Hrbacek & Jech 第 1 章（集合）まとめ

鴎海

最終更新日：2025 年 12 月 26 日

概要

このノートは，Hrbacek, K. & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory* (3 ed.). Taylor & Francis. の Chapter 1 をベースとしたまとめノートである．かなりの部分を書き直したり，意味の変わらない範囲で再定式化し直したりしている場合があるので，必ずしもオリジナルの記述に忠実ではない．

目次

1　集合

1.1　集合

$\exists X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$ が成り立つとき（φ は X を含まない），$\{x \mid \varphi\}$ は集合であるという．

thm_oR6ZA

定理 1.1　$\{x \mid x \notin x\}$ は集合ではない．

証明　仮に $\{x \mid x \notin x\}$ が集合であるとする．$^{\exists}X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow x \notin x)$ を 1 つ取る．いま，$\forall x\ (x \in X \Leftrightarrow x \notin x)$ であるから，$X \in X \Leftrightarrow X \notin X$．矛盾．

1.2　外延性公理

axm_8eePh

公理 1.2（外延性公理）　$\forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

外延性公理より，$!X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$．よって，$\{x \mid \varphi\}$ が集合であれば，$\exists! X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$．

def_to2hW

定義 1.3（内包的記法）　$\{x \mid \varphi\}$ が集合であるとする．
$\forall x\ (x \in \{x \mid \varphi\} \Leftrightarrow \varphi)$

thm_fHW9p

定理 1.4　$\{x \mid \varphi\}$ と $\{x \mid \psi\}$ が集合であるとする．
以下は同値である．

1. $\forall x\ (\varphi \Leftrightarrow \psi)$
2. $\{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}$

証明

$$\begin{aligned}\forall x\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) &\Leftrightarrow \forall x\ (x \in \{x \mid \varphi\} \Leftrightarrow x \in \{x \mid \psi\}) \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}\end{aligned}$$

1.3　部分集合

def_yKGF7

定義 1.5（部分集合）

(1) $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
　であるとき，A は B の部分集合であるといい，$A \subseteq B$ と書く．

(2) $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$
　であるとき，A は B の真部分集合であるといい，$A \subsetneq B$ と書く．

thm_0WjeK

命題 1.6

(1) $A \subseteq A$
(2) $A \subseteq B \subseteq A \Rightarrow A = B$
(3) $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

証明

(1) $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in A)$

(2)

$$\begin{aligned} A \subseteq B \subseteq A &\Rightarrow \begin{cases} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in A) \end{cases} \\ &\Rightarrow \forall x \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases} \\ &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} A \subseteq B \subseteq C &\Rightarrow \begin{cases} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in C) \end{cases} \\ &\Rightarrow \forall x \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in C \end{cases} \\ &\Rightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in C) \\ &\Rightarrow A \subseteq C \end{aligned}$$

thm_7TrQj

定理 1.7 $\{x \mid \varphi\}$ と $\{x \mid \psi\}$ が集合であるとする．
以下は同値である．

1. $\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$
2. $\{x \mid \varphi\} \subseteq \{x \mid \psi\}$

証明

$$\begin{aligned} \forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow \forall x\ (x \in \{x \mid \varphi\} \Rightarrow x \in \{x \mid \psi\}) \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \varphi\} \subseteq \{x \mid \psi\} \end{aligned}$$

1.4 分出公理

axm_Ny87T

公理 1.8（分出公理） φ を論理式とする．
$\{x \mid x \in A \land \varphi\}$ は集合である．

def_gShX2

定義 1.9 φ を論理式とする．
$\{x \in A \mid \varphi\} := \{x \mid x \in A \land \varphi\}$

thm_CW2cc

系 1.10 $\{x \in A \mid \varphi\} \subseteq A$

証明 $\{x \in A \mid \varphi\} = \{x \mid x \in A \land \varphi\} \subseteq \{x \mid x \in A\}$

thm_B6k6b

定理 1.11 $\exists X\ \forall x\ (\varphi \Rightarrow x \in X)$ であれば，$\{x \mid \varphi\}$ は集合である．

証明 $\exists X\ \forall x\ (\varphi \Rightarrow x \in X)$ を仮定する．そのような ${}^{\exists}X$ を 1 つ取る．いま，$\forall x\ (\varphi \Rightarrow x \in X)$ であるから，${}^{\forall}x$ を

取ると，

$$x \in \{x \in X \mid \varphi\} \Leftrightarrow x \in X \land \varphi \\ \Leftrightarrow \varphi$$

よって，$\exists X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$.

演習

nb_r3dPF

注意 1.12　外延性公理と分出公理を仮定する．

(1) $\exists X\ (x = a \lor x = b \Rightarrow x \in X)$
を，**弱い対の公理**という．弱い対の公理から，対の公理が従う．

(2) 一般に，$\exists X\ (\varphi \Rightarrow x \in X)$ が成り立てば，$\exists X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$ が成り立つ．
$\exists X\ (\varphi \Rightarrow x \in X)$ を仮定する．$\{x \mid \varphi\}$ は集合である．よって，$\forall x\ (x \in \{x \mid \varphi\} \Leftrightarrow \varphi)$ であるから，$\exists X\ \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow \varphi)$.

thm_FCmL7

定理 1.13

(1) $\nexists X\ \forall x\ (x \in X)$

(2) $\forall X\ \exists x\ (x \notin X)$

証明

(1) 仮に $\exists X\ \forall x\ (x \in X)$ であるとする．そのような ${}^{\exists}X$ を 1 つ取る．$A := \{x \in X \mid x \notin x\}$ とする．いま，$\forall x$，$x \in X$ であるから，$A \in X$．よって，

$$A \in A \Leftrightarrow \begin{cases} A \in X \\ A \notin A \end{cases} \Leftrightarrow A \notin A$$

矛盾．よって，$\nexists X\ \forall x\ (x \in X)$.

(2) 上の書き換え．

thm_aD7xd

命題 1.14　$\mathcal{P}(A) \nsubseteq A$．したがって，$\mathcal{P}(A) \neq A$.

証明　$B := \{x \in A \mid x \notin x\}$ とする．

$(B \in \mathcal{P}(A))$: $B \subseteq A$ であるから，$B \in \mathcal{P}(A)$.
$(B \notin A)$: 仮に $B \in A$ であるとすると，

$$B \in B \Leftrightarrow \begin{cases} B \in A \\ B \notin B \end{cases} \Leftrightarrow B \notin B$$

矛盾．よって，$B \notin A$.

2　基本的な集合

2.1　空集合

thm_35BTz

補題 2.1　$\{x \mid x \neq x\}$ は集合である．

証明　$x \neq x \Rightarrow x \in X$ は空虚に成り立つので，$\exists X\ (x \neq x \Rightarrow x \in X)$.

def_Q6R3e

定義 2.2（空集合）　$\varnothing := \{x \mid x \neq x\}$
これを，空集合という．

thm_tmq6M

命題 2.3　$x \notin \varnothing$

証明　$x = x \Leftrightarrow x \notin \varnothing$

thm_R6VcP

命題 2.4　$\varnothing \subseteq A$

証明　$x \notin \varnothing$ より，$\forall x\ (x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$.

thm_Qm1l1

事実 2.5　$\{x \in \varnothing \mid \varphi(x)\} = \varnothing$

証明　$\{x \in \varnothing \mid \varphi(x)\} = \{x \mid x \in \varnothing \wedge \varphi(x)\} = \{x \mid x \neq x\}$

thm_OysuN

命題 2.6

(1) 以下は同値である．
   1. $\forall x\ (x \notin X)$
   2. $X = \varnothing$

(2) 以下は同値である．
   1. $\exists x\ (x \in X)$
   2. $X \neq \varnothing$

証明

(1)

$$\begin{aligned} X = \varnothing &\Leftrightarrow \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow x \in \varnothing) \\ &\Leftrightarrow \forall x\ (x \in X \Leftrightarrow x \neq x) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ x \notin X \end{aligned}$$

(2) 上の書き換え．

thm_fa2SD

命題 2.7　$\neg\varphi$ であれば，$\{x \mid \varphi\} = \varnothing$

証明　$\neg\varphi$ を仮定すると，$\{x \mid \varphi\} = \{x \mid x \neq x\} = \varnothing$.

2.2　和集合

axm_6Umgx

公理 2.8（和集合の公理）　$\{x \mid \exists X,\ x \in X \in \mathcal{S}\}$ は集合である．

def_rE6BY

定義 2.9（和集合）　$\bigcup \mathcal{S} := \{x \mid \exists X,\ x \in X \in \mathcal{S}\}$
これを，$\mathcal{S}$ の和集合という．

thm_nWoC2

事実 2.10　$A \in \mathcal{S} \Rightarrow A \subseteq \bigcup \mathcal{S}$

証明　$A \in \mathcal{S}$ を仮定する．${}^{\forall}x \in A$ を取り，$x \in \bigcup \mathcal{S}$ を示す．
いま，$x \in A \in \mathcal{S}$ だから，$\exists X,\ x \in X \in \mathcal{S}$．よって，$x \in \bigcup \mathcal{S}$.

thm_8IazD

命題 2.11　$\bigcup \varnothing = \varnothing$

証明　$\bigcup \varnothing = \{x \mid \exists X,\ x \in X \in \varnothing\} = \varnothing$

2.3　非順序対

axm_dg9Dp

公理 2.12（対の公理）　$\{x \mid x = a \vee x = b\}$ は集合である．

def_U5wdF

定義 2.13（非順序対）　$\{a, b\} := \{x \mid x = a \vee x = b\}$

thm_VfD4r

補題 2.14　$\{x \mid x = a_{\mathbf{1}} \vee \cdots \vee x = a_{\mathbf{n}}\}$ は集合である．

def_gAA2W

定義 2.15　$\{a_{\mathbf{1}}, \ldots, a_{\mathbf{n}}\} := \{x \mid x = a_{\mathbf{1}} \vee \cdots \vee x = a_{\mathbf{n}}\}$

$a, b \in \{a, b\}$
$a_{\mathbf{1}}, \ldots, a_{\mathbf{n}} \in \{a_{\mathbf{1}}, \ldots, a_{\mathbf{n}}\}$

thm_71S1x

命題 2.16　$\{a, b\} = \{b, a\}$

証明　$\{x \mid x = a \vee x = b\} = \{x \mid x = b \vee x = a\}$

thm_7Mtjp

事実 2.17　$\{a\} \subseteq \{a, b\}$

証明　$\{x \mid x = a\} \subseteq \{x \mid x = a \vee x = b\}$

$\{a, b\} \neq \varnothing$

2.4　べき集合

axm_CTw3y

公理 2.18（べき集合公理） $\{X \mid X \subseteq A\}$ は集合である．

def_GNv1i

定義 2.19（べき集合） $\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$

thm_Eg4XY

命題 2.20

(1) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
(2) $A \in \mathcal{P}(A)$

証明

(1) $\varnothing \subseteq A$
(2) $A \subseteq A$

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, a\}$
$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

演習

3　集合代数

thm_2vE5K

補題 3.1 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ であれば，$\{x \mid \forall X \in \mathcal{S},\ x \in X\}$ は集合である．

証明 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ を仮定する．${}^{\exists}A \in \mathcal{S}$ を 1 つ取る．
$\forall X \in \mathcal{S},\ x \in X$ を仮定する．$A \in \mathcal{S}$ だから，$x \in A$.

def_e4GJp

定義 3.2（共通部分） $\mathcal{S} \neq \varnothing$ とする．
$\bigcap \mathcal{S} := \{x \mid \forall X \in \mathcal{S},\ x \in X\}$
これを，$\mathcal{S}$ の共通部分という．

thm_Qge35

補題 3.3 $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ は集合である．

証明

$$\begin{aligned} x \in \bigcup\{A, B\} &\Leftrightarrow \exists X\ (x \in X \in \{A, B\}) \\ &\Leftrightarrow \exists X \begin{cases} x \in X \\ X = A \vee X = B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \end{aligned}$$

def_f2yXZ

定義 3.4（和集合） $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
これを，A と B の和集合という．

def_Ep6Su

定義 3.5（共通部分，差集合，対象差）

(1) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(2) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(3) $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

thm_QXbo2

命題 3.6

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cup B = B \cup A$

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(7) $C \setminus (A \cup B)(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(8) $C \setminus (A \cap B)(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

thm_T6klf

命題 3.7

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

thm_3PWXv

命題 3.8　以下は同値.

1. $A \setminus B = \varnothing$
2. $A \subseteq B$

thm_1BEGc

命題 3.9

(1) $A \triangle A = \varnothing$

(2) $A \triangle B = B \triangle A$

(3) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

def_7rBeN

定義 3.10（互いに素）

(1) $A \cap B = \varnothing$
であるとき，A と B は互いに素であるという.

(2) $\forall X, Y \in \mathcal{S}\ (X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \varnothing)$
であるとき，$\mathcal{S}$ は互いに素な集合系であるという.

演習

thm_aq5SC

事実 3.11　以下は同値である.

1. $A \subseteq B$
2. $A \cap B = A$
3. $A \cup B = A$

4. $A \setminus B = \varnothing$

thm_m0g9o

事実 3.12 以下は同値である．

1. $A \subseteq B \cap C$
2. $A \subseteq B, C$

thm_29Qfa

事実 3.13 以下は同値である．

1. $B \cup C \subseteq A$
2. $B, C \subseteq A$

thm_RWSe5

事実 3.14 以下は同じである．

1. $A \setminus B$
2. $(A \cup B) \setminus B$
3. $A \setminus (A \cap B)$

thm_gv4qR

事実 3.15 $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

thm_0Trvi

事実 3.16 $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

thm_i02QV

事実 3.17 以下は同値である．

1. $A = B$
2. $A \bigtriangleup B = \varnothing$

thm_hLy6Q

事実 3.18 $\{x \mid x \notin A\}$ は集合ではない．

def_K3Mbp

定義 3.19 $\{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\varphi}\}$ が集合であるとする．

(1) $\bigcup_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\tau} := \bigcup \{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\varphi}\}$

(2) $\{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\varphi}\} \neq \varnothing$ とする．
$\bigcap_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\tau} := \bigcap \{\boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\varphi}\}$

thm_5DNdw

事実 3.20

1. $A \cap \bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{X \in \mathcal{S}} (A \cap X)$
2. $\mathcal{S} \neq \varnothing$ とする．
   $A \cup \bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{X \in \mathcal{S}} (A \cup X)$

thm_M3uu3

事実 3.21

1. $A \setminus \bigcup \mathcal{S} = \bigcap_{X \in \mathcal{S}} (A \setminus X)$
2. $\mathcal{S} \neq \varnothing$ とする．
   $A \setminus \bigcap \mathcal{S} = \bigcup_{X \in \mathcal{S}} (A \setminus X)$