Hrbacek & Jech 第 2 章（関係，写像，順序）まとめ

鴎海

最終更新日：2025 年 12 月 23 日

概要

このノートは，Hrbacek, K. & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory* (3 ed.). Taylor & Francis. の Chapter 2 をベースとしたまとめノートである．かなりの部分を書き直したり，意味の変わらない範囲で再定式化し直したりしている場合があるので，必ずしもオリジナルの記述に忠実ではない．

目次

1 順序対

1.1 定義

dfn_1JVJn

定義 1.1（順序対）

(1) $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
(2) $\langle a\rangle := a$
(3) $\langle a_1, ..., a_n\rangle := \langle\langle a_1, ..., a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$

thm_N4qSr

定理 1.2（順序対の公理） 以下は同値である．

1. $\langle a, b\rangle = (c, d)$
2. $a = c$ かつ $b = d$

証明

(1 ⇒ 2): 1 を仮定する．（2 を示す．）
仮定と順序対の定義より，以下のいずれかが成り立つ．
(a) $_{(a1)}\ \underline{\{a\} = \{c\}}$ かつ $_{(a2)}\ \underline{\{a, b\} = \{c, d\}}$
(b) $_{(b1)}\ \underline{\{a\} = \{c, d\}}$ かつ $_{(b2)}\ \underline{\{a, b\} = \{c\}}$
(a の場合): (a1) より，$a = c$． これと (a2) より，$b = d$.
(b の場合): (b1) より $a = c = d$． (b2) より $a = b = c$． よって，$a = c$，$b = d$.
(2 ⇒ 1): 明らか．

thm_3TOXi

系 1.3

(1) $a \neq c \Rightarrow \langle a, b\rangle \neq (c, d)$
(2) $b \neq d \Rightarrow \langle a, b\rangle \neq (c, d)$

証明 順序対の公理より直ちに従う．

thm_b1k6B

定理 1.4（n 項順序対の公理） 以下は同値である．

1. $\langle a_1, ..., a_n\rangle = \langle b_1, ..., b_n\rangle$
2. $a_1 = b_1$ かつ…かつ $a_n = b_n$

証明 示すべき主張を φ_n と書く． n についての帰納法で示す．

(φ_1): 定義より，$\langle a_1\rangle = \langle b_1\rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1$
(φ_2): 定理 1.2.
(Step): φ_n を仮定する．（φ_{n+1} を示す．）
順序対の定義と定理 1.2 より，

$$\langle a_1, ..., a_n, a_{n+1}\rangle = \langle b_1, ..., b_n, b_{n+1}\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \langle a_1, ..., a_n\rangle = \langle b_1, ..., b_n\rangle \\ a_{n+1} = b_{n+1} \end{cases}$$
$$\overset{(\text{仮定})}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_1 = b_1 \text{ かつ…かつ } a_n = b_n \\ a_{n+1} = b_{n+1} \end{cases}$$

rmk_7pxU5

注意 1.5 $(\langle a, b\rangle, c) = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ **とは限らない．**
反例：$a = b = c = 0$

rmk_2HPyF

注意 1.6 $\langle a, b\rangle := \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$ と定義しても，順序対の公理が導かれる．

thm_JR6pw

事実 1.7（技術的な事実）

(1) $a, b \in A \Rightarrow \langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
　特に，$\langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$.

(2) $\bigcup\langle a, b\rangle = \{a, b\}$

// n 項に拡張できると良い．

証明

(1)

$$\begin{aligned} a, b \in A &\Rightarrow \{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A) \\ &\Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \end{aligned}$$

(2) $\bigcup\langle a, b\rangle = \bigcup\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{a, b\}$

1.2 覚書

定義 1.8

(1) $(a) := \{\langle 1, a\rangle\}$
(2) $(a, b) := \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$
(3) $(a, b, c) := \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$

2 対応

2.1 定義

定義 2.1（対応）

$$\forall x \in R,\ x \text{ は順序対}$$

が成り立つとき，R は**対応**であるという．
$(x, y) \in R$ を，xRy とも書く．

$\{(x, y) \mid \varphi\}$ が集合であるとする．$\{(x, y) \mid \varphi\}$ は対応である．

定義 2.2 R を対応とする．

$$\forall x, y\ (xRy \Rightarrow x, y \in A)$$

であるとき，R は **A 上の対応**であるという．
// これは field $R \subseteq A$，$R \subseteq A \times A$ と同じ．

$\varnothing$ は対応である．

例 2.3（対角線集合） $\mathit{\Delta}_A := \{(x,y) \mid x,y \in A,\ x=y\}$

2.2　逆対応，域，像

定義 2.4（逆対応） R を対応とする．

$$R^- := \{(y,x) \mid xRy\}$$

これを R の**逆対応**という．

R^- は対応である．

$yR^-x \Leftrightarrow xRy$

命題 2.5（逆対応の公式） $(R^-)^- = R$

証明 $(R^-)^- = \{(x,y) \mid yR^-x\} = \{(x,y) \mid xRy\} = R$

定義 2.6（定義域，値域，領域） R を対応とする．

(1) $\operatorname{dom} R := \{x \mid xRy\}$
　これを R の**定義域**という．
(2) $\operatorname{ran} R := \{y \mid xRy\}$
　これを R の**値域**という．
(3) $\operatorname{field} R := \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$
　これを R の**領域**という．

命題 2.7（逆対応と域） R を対応とする．

(1) $\operatorname{dom} R = \operatorname{ran} R^-$
(2) $\operatorname{ran} R = \operatorname{dom} R^-$

証明

(1) $\operatorname{dom} R = \{y \mid xRy\} = \{y \mid yR^-x\} = \operatorname{ran} R^-$
(2) $\operatorname{ran} R = \operatorname{ran}(R^-)^- = \operatorname{dom} R^-$

定義 2.8（制限，像，逆像） R を対応とする．

(1) $R \restriction A = \{(x,y) \in R \mid x \in A\}$
　これを A による R の**制限**という．
(2) $\exists X,\ S = R \restriction X$ であるとき，R は S の**拡張**である，または S は R の**制限**であるといい，$S \leq R$ と書く．
(3) $R[A] := \{y \mid \exists x \in A,\ xRy\}$
　これを R による A の**像**という．
(4) $R^-[B]$ を，R による B の**逆像**という．

$R \restriction A$ は対応である．

$R^-[B] = \{x \mid \exists y \in B,\ xRy\}$

$R[A] \subseteq \operatorname{ran} R$

$R^{-}[A] \subseteq \operatorname{dom} R$

$R[A] = \operatorname{ran}(R \restriction A)$

$xRy \Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{dom} R \\ y \in \operatorname{ran} R \end{cases}$

// $A \supseteq B \setminus C \Leftrightarrow A \cup C \supseteq B$

命題 2.9（像についての分配法則） R を対応とする．

(1) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$
(2) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$
(3) $R[A \setminus B] \supseteq R[A] \setminus R[B]$

証明

(1) y を任意に取る．

$$\begin{aligned} y \in R[A \cup B] &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B,\ xRy \\ &\Leftrightarrow \exists x \begin{cases} x \in A \vee x \in B \\ xRy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists x \left[\begin{array}{l} x \in A,\ xRy \\ x \in B,\ xRy \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists x \in A,\ xRy \\ \exists x \in B,\ xRy \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow y \in R[A] \cup R[B] \end{aligned}$$

(2) y を任意に取る．

$$\begin{aligned} y \in R[A \cap B] &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B,\ xRy \\ &\Leftrightarrow \exists x \begin{cases} x \in A,\ x \in B \\ xRy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists x \begin{cases} x \in A,\ xRy \\ x \in B,\ xRy \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \exists x \in A,\ xRy \\ \exists x \in B,\ xRy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B] \end{aligned}$$

(3) $R[A \setminus B] \cup R[B] \supseteq R[A]$ を示せばよい．
y を任意に取る．

$$\begin{aligned} y \in R[A] &\Leftrightarrow \exists x \in A,\ xRy \\ &\Leftrightarrow \exists x \left[\begin{array}{l} x \in A,\ x \notin B,\ xRy \\ x \in A,\ x \in B,\ xRy \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists x\ (x \in A,\ x \notin B,\ xRy) \\ \exists x\ (x \in A,\ x \in B,\ xRy) \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists x \in A \setminus B,\ xRy \\ \exists x \in B,\ xRy \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow y \in R[A \setminus B] \cup R[B] \end{aligned}$$

- $R\left[\bigcup \mathcal{F}\right] = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} R[X]$

- $\mathcal{F} \neq \varnothing$ のとき，$R\left[\bigcap \mathcal{F}\right] \subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{F}} R[X]$

命題 2.10（像の範囲） R を対応とする．

(1) $R[A] \subseteq \operatorname{ran} R$
(2) $R^{-}[B] \subseteq \operatorname{dom} R$

証明

(1) $R[A] = \{y \mid \exists x \in A,\ xRy\} \subseteq \{y \mid \exists x,\ xRy\} = \operatorname{ran} R$
(2) $R^{-}[B] = R^{-}[B] \subseteq \operatorname{ran} R^{-} = \operatorname{dom} R$

命題 2.11（像の範囲） R を対応とする．

(1) $A \cap \operatorname{dom} R \subseteq R^{-}[R[A]]$
(2) $B \cap \operatorname{ran} R \subseteq R[R^{-}[B]]$

証明

(1) $(\forall x)$: $x \in A \cap \operatorname{dom} R$ を任意に取る．
　　$x \in A,\ x \in \operatorname{dom} R$ である．よって，$\exists y,\ xRy$.
　　$(\exists y)$: そのような y を 1 つ取る．つまり，xRy.
　　　$x \in A$ と xRy より，$y \in R[A]$．これと xRy より，$x \in R^{-}[R[A]]$.
　よって，$A \cap \operatorname{dom} R \subseteq R^{-}[R[A]]$.
(2) $B \cap \operatorname{ran} R = B \cap \operatorname{dom} R^{-} \subseteq (R^{-})^{-}[R^{-}[B]] = R[R^{-}[B]]$

$\operatorname{dom} R = \varnothing \Leftrightarrow \operatorname{ran} R = \varnothing \Leftrightarrow R = \varnothing$

命題 2.12（空な像） R を対応とする．

(1) 以下は同値である．
 1. A と $\operatorname{dom} R$ は互いに素.
 2. $R[A] = \varnothing$
(2) 以下は同値である．
 1. B と $\operatorname{ran} R$ は互いに素.
 2. $R^{-}[B] = \varnothing$

証明

(1) 対偶を示す.

$$\begin{aligned} R[A] \neq \varnothing &\Leftrightarrow \exists y,\ y \in R[A] \\ &\Leftrightarrow \exists y\ (\exists x \in A,\ xRy) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A\ (\exists y,\ xRy) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A\ (x \in \operatorname{dom} R) \\ &\Leftrightarrow A \cap \operatorname{dom} R \neq \varnothing \end{aligned}$$

(2) $\operatorname{ran} R = \operatorname{dom} R^{-}$ より，

$$\begin{aligned} B \text{ と } \operatorname{ran} R \text{ は互いに素} &\Leftrightarrow B \text{ と } \operatorname{dom} R^{-} \text{ は互いに素} \\ &\Leftrightarrow R^{-}[B] = \varnothing \end{aligned}$$