先端データ解析 第 3 回レポート

37-196357　蓑田 浩史

2019 年 4 月 23 日

宿題 1

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \frac{1}{2}(\theta - z)^2 + u(\theta - z) + \lambda|z| \\
&= \frac{1}{2}z^2 + \left(-u - \theta + \lambda\frac{|z|}{z}\right)z + \frac{1}{2}\theta^2 + u\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(z - u - \theta + \lambda\frac{|z|}{z}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-u - \theta + \lambda\frac{|z|}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 + u\theta \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(z - u - \theta + \lambda)^2 - \frac{1}{2}(-u - \theta + \lambda)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 + u\theta & (z > 0) \\ \frac{1}{2}(z - u - \theta - \lambda)^2 - \frac{1}{2}(-u - \theta - \lambda)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 + u\theta & (z < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_+(z) & (z \geq 0) \\ f_-(z) & (z < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで

1. $u + \theta - \lambda \geq 0$, $u + \theta + \lambda \geq 0$ の場合

$f_+(z)$ は $z = u + \theta - \lambda$ で最小値を取り $f_-(z)$ は z について単調減少である。すなわち

$$\underset{z}{\operatorname{argmin}}\, T(z) = u + \theta - \lambda$$

2. $u + \theta - \lambda \geq 0$, $u + \theta + \lambda < 0$ の場合

$u + \theta - \lambda \geq 0$, $u + \theta + \lambda < 0$ の両立を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
& u + \theta - \lambda \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u + \theta \geq \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
& u + \theta + \lambda \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u + \theta < -\lambda \leq 0
\end{aligned}
$$

よって $0 \leq u + \theta < 0$ となり矛盾。つまりこのような場合は存在しない。

3. $u + \theta - \lambda < 0$, $u + \theta + \lambda \geq 0$ の場合

$f_+(z)$ は z について単調増加であり $f_-(z)$ は z について単調減少である。すなわち

$$\underset{z}{\operatorname{argmin}}\, T(z) = 0$$

4. $u+\theta-\lambda<0$, $u+\theta+\lambda<0$ の場合

$f_+(z)$ は z について単調増加であり $f_-(z)$ は $z=u+\theta+\lambda$ で最小値を取る。すなわち

$$\operatorname*{argmin}_z T(z) = u+\theta+\lambda$$

以上 1.〜4. より、

$$\operatorname*{argmin}_z T(z) = \max(0, u+\theta-\lambda) + \min(0, u+\theta+\lambda)$$

宿題 2

同ディレクトリにある"quiz_2.ipynb"を参照のこと。