Лабораторная работа №3

Куимов Михаил, группа 675 3 мая 2019 года

Численное решение уравнений в частных производных элептического типа на примере уравнений Лапласа И Пуассона

В задание требуется решить уравнение Пуассона в квадрате с разбиением сеткой $h_x=h_y=h=\frac{1}{20}$. Для этого запишем схему для аппроксимации. Пусть $W_x=a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x},\,W_y=a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}.$ Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} = f \quad \Rightarrow \quad -\frac{(W_x)_{m+1}^n - (W_x)_m^n}{h} - \frac{(W_y)_{m}^{n+1} - (W_y)_m^n}{h} = f_m^n$$

$$(W_x)_m^n = a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}; \quad (W_y)_m^n = a_m^n \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h}$$

$$\Rightarrow \quad -a_{m+1}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h^2} + a_m^n \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h^2} - a_m^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h^2} + a_m^n \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h^2} = f_m^n$$

$$(a_{m+1}^n + 2a_m^n + a_m^{n+1})u_m^n - a_{m+1}^n u_{m+1}^n - a_m^n u_{m-1}^n - a_m^{n+1} u_m^{n+1} - a_m^n u_m^{n-1} = f_m^n h^2$$

Последнее уравнение является СЛАУ при $n, m = \overline{1..20}$. То есть, имееем систему вида Mu = s, которая может быть решена относительно u методом сопряженных градиентов. Что и было мною сделано: github

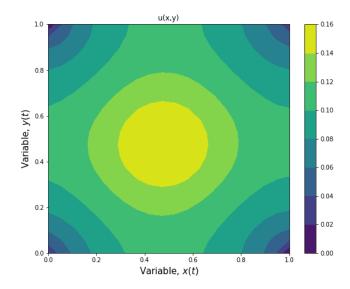


Рис. 1: Решение уравнения

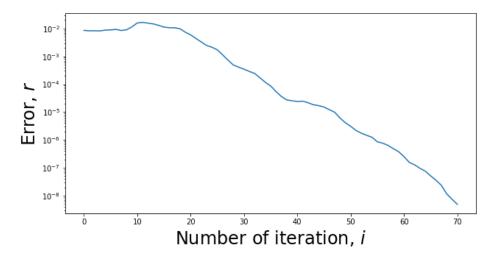


Рис. 2: График сходимости