Лабораторная работа №1

Куимов Михаил, группа 675

3 февраля 2019 года

Явные методы Рунге-Кутты

Рассмотрим численный метод Рунге-Кутты решения систем дифференциальных уравнений на примере задачи Коши:

$$x'' = -x + \epsilon x'(1 - x^2), \quad x_0 = 1, \quad x'_0 = 1, \quad \epsilon \geq 0$$

Произведем замену $x' = z$. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} x'(t) = z(t) = g(x, z, t) \\ z'(t) = -x(t) + \epsilon z(1 - x^2) = f(x, z, t) \\ z(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. Тогда система может быть представлена в виде:

$$Y' = p(Y, t), \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = p(Y_n, t_n), \quad k_2 = p(Y_n + \frac{H}{2}, t_n + k_1\frac{h}{2}), \quad k_3 = p(Y_n + \frac{H}{2}, t_n + k_2\frac{h}{2})$$

$$k_4 = p(Y_n + \frac{H}{2}, t_n + k_3\frac{h}{2})$$

Где h величина шага сетки по x, а $H = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$. Причем точность метода на каждом шаге $O(h^5)$.

Выше описан ЯМРК4. Для ЯМРК1 остается только слогаемое с k_1. И точность на каждом шаге будет $O(h)$.
В моей реализации данного метода было выбрано $h = 10^{-3}$, что соответствует точности 10^{-3} и 10^{-15} для ЯМРК1 и ЯМРК4 соответственно. По времени было сделано 100000 шагов. Ниже будут представлены графики решений при $\epsilon = 2$ для ЯМРК1, ЯМРК4 и решения с помощью стандартной библиотеки.
Также было сравнено время работы моего ЯМРК4 и стандартной библиотки. Получилось 3.6 и 2.1 секунд соответственно при одинаковых параметрах. То есть, мой алгоритм, написанный через обычный цикл, работает на $1,5$ секунды медленне, чем библиотечный, что, я считаю, приемлимо.
Также были проведены расчеты при разных ϵ и получено, что при увеличении данного параметра от 0 синусоидальное решение становится "зубчатым что происходит из-за увеличения нелинейности уравнения.
Теперь сравним аналитическое и численное решение задачи при$\epsilon = 0$.

$$x'' + x = 0 \Leftrightarrow x = A \sin t + B \cos t$$

Находим из начальных условий, что $A = B = 1$. Тогда

$$x = \sin t + \cos t \Rightarrow x' = \cos t - \sin t$$

$$\Rightarrow x^2 + (x')^2 = 2(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2$$

Тогда уравнение траектории окружность с радиусом $\sqrt{2}$. Теперь найдем уравнения траектории для ЯМРК1 и ЯМРК4. Видим, что получили ту же окружность.

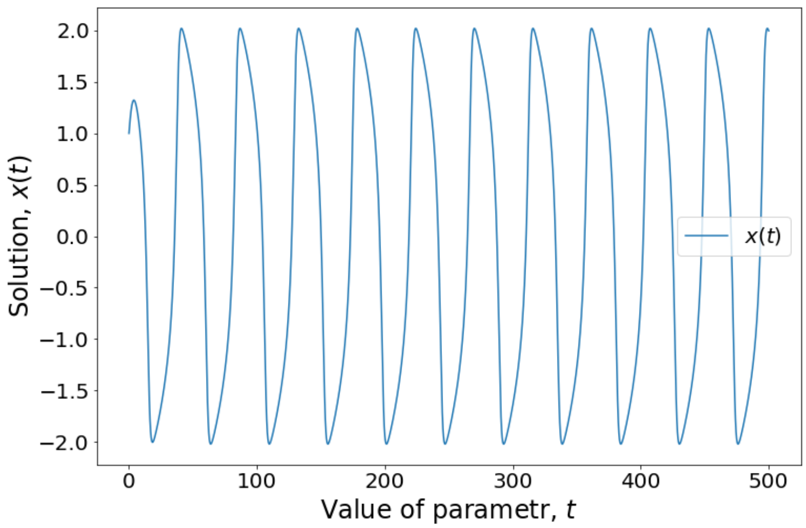

Рис. 1: ЯМРК1, $\epsilon = 2$

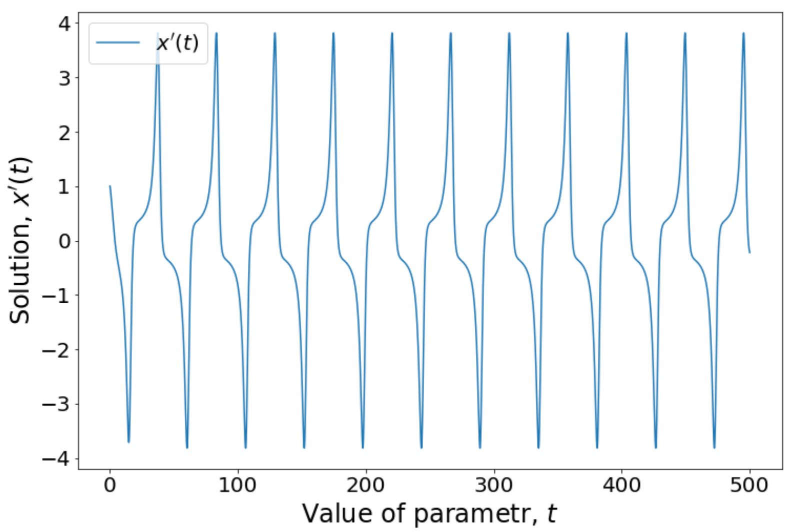

Рис. 2: ЯМРК1, $\epsilon = 2$

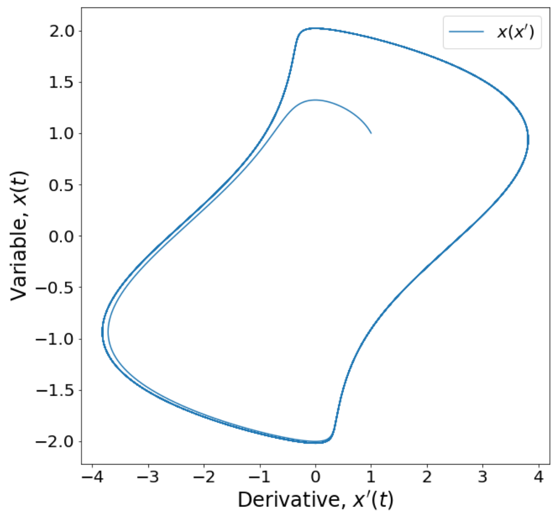

Рис. 3: ЯМРК1, $\epsilon = 2$

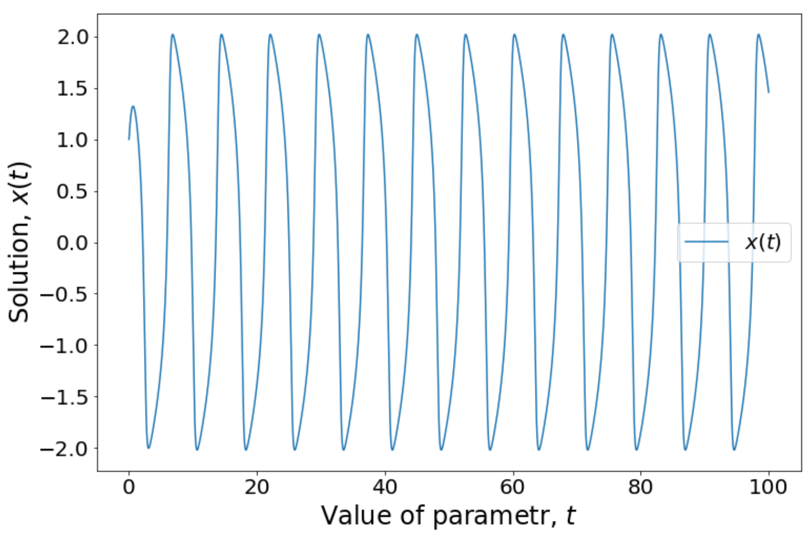

Рис. 4: ЯМРК4, $\epsilon = 2$

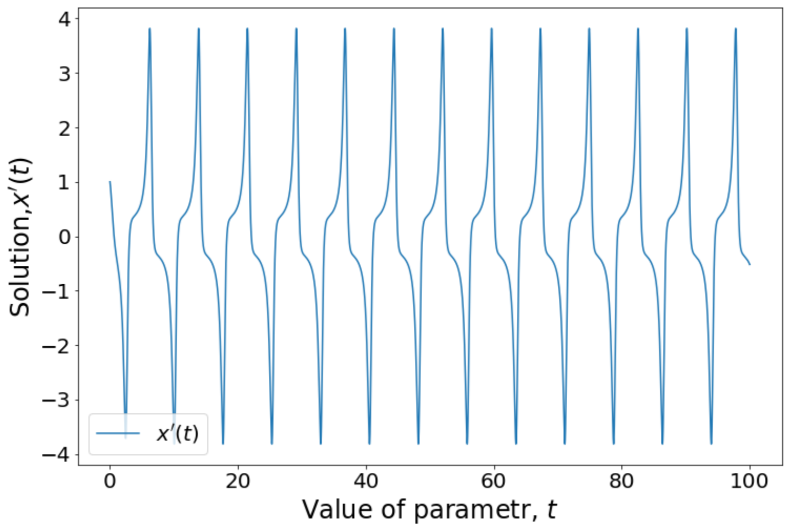

Рис. 5: ЯМРК4, $\epsilon = 2$

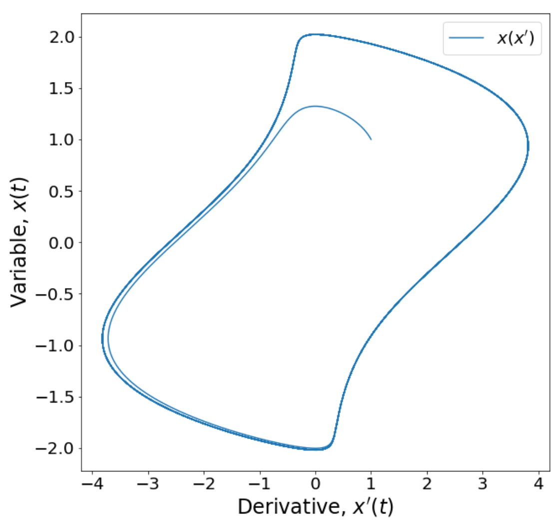

Рис. 6: ЯМРК4, $\epsilon = 2$

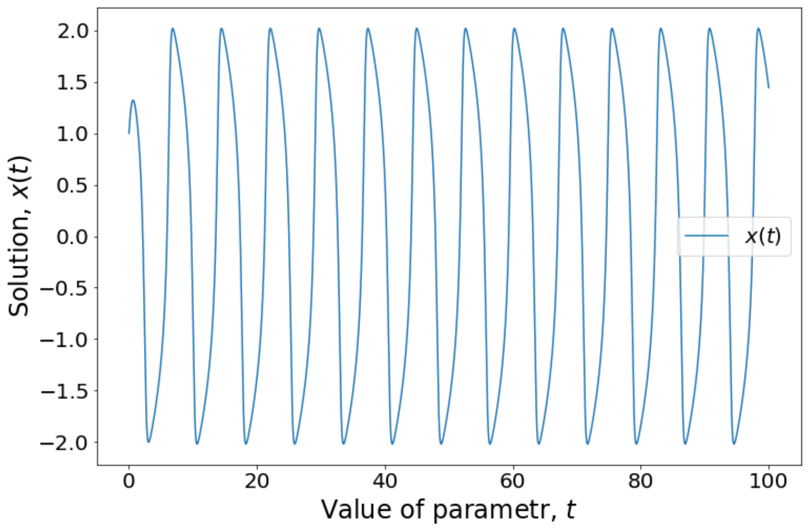

Рис. 7: Стандартная библиотека, $\epsilon = 2$

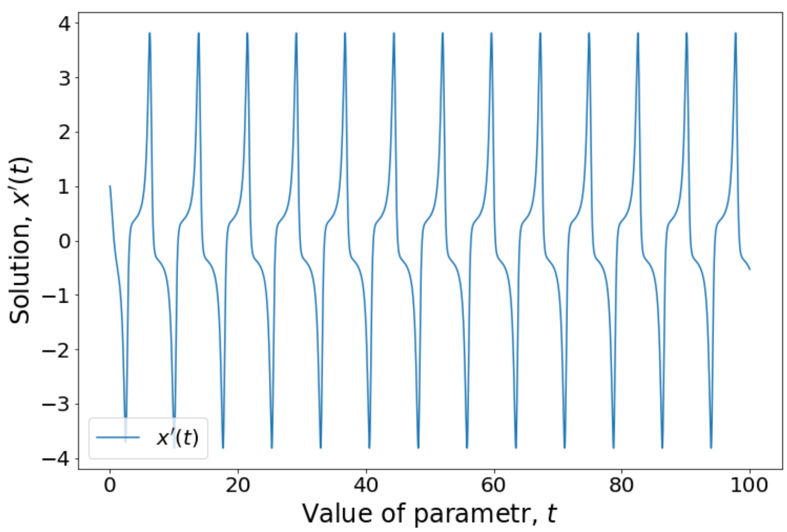

Рис. 8: Стандартная библиотека, $\epsilon = 2$

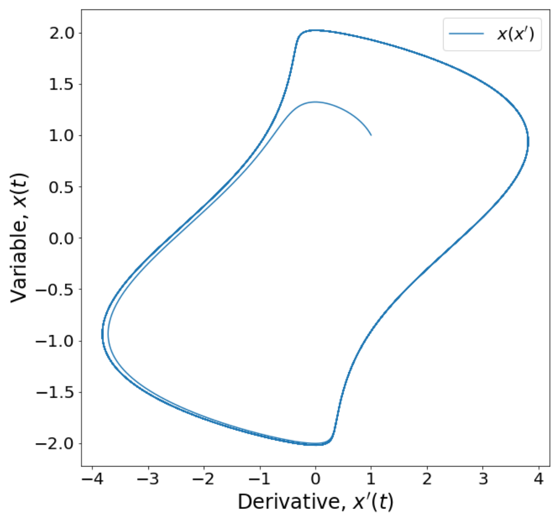

Рис. 9: Стандартная библиотека, $\epsilon = 2$

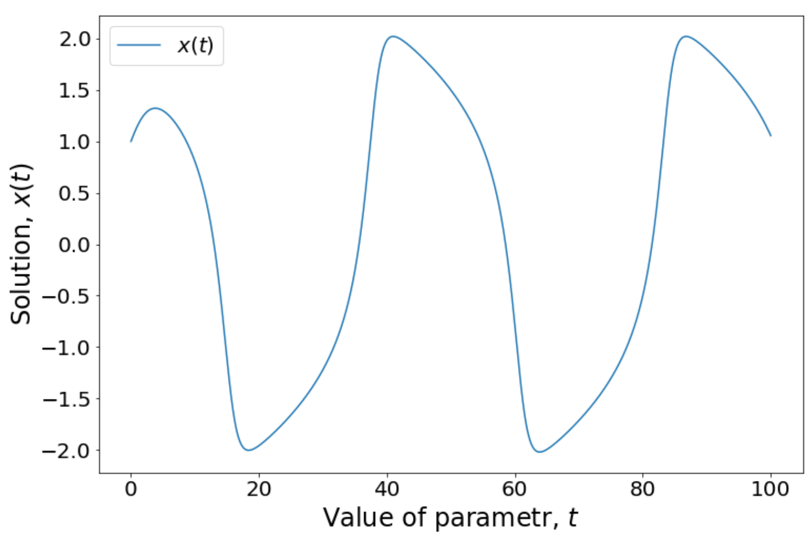

Рис. 10: ЯМРК1, тот же масштаб $\epsilon = 2$

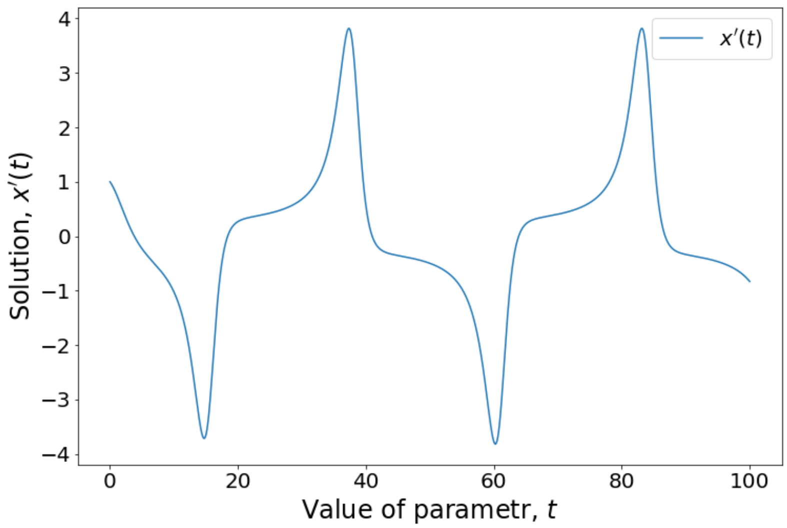

Рис. 11: ЯМРК1, тот же масштаб $\epsilon = 2$

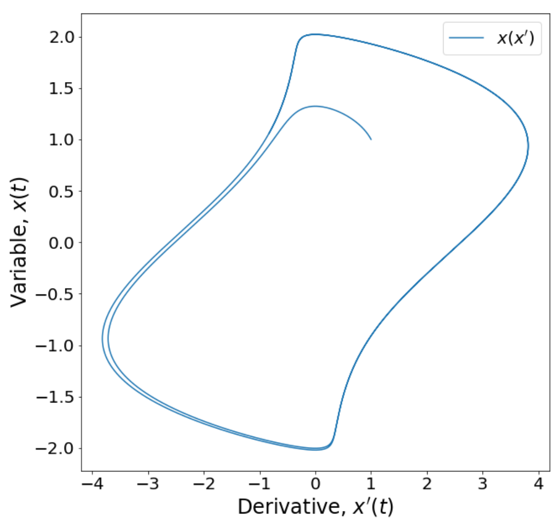

Рис. 12: ЯМРК1, тот же масштаб $\epsilon = 2$

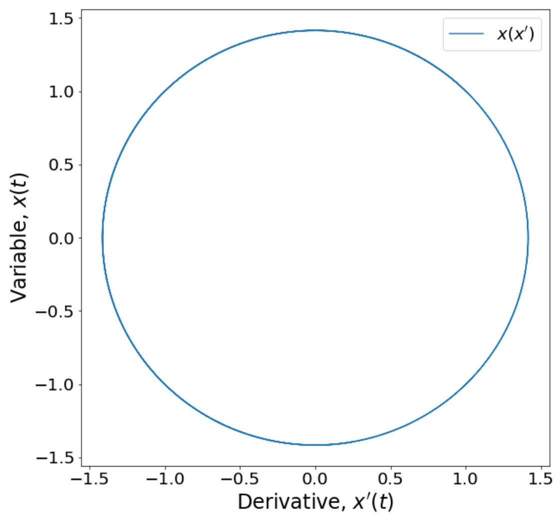

Рис. 13: ЯМРК1, $\epsilon = 0$

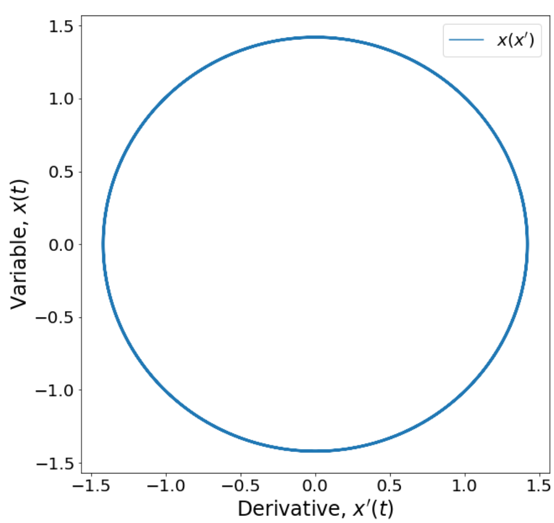

Рис. 14: ЯМРК4, $\epsilon = 0$