Лабораторная работа №3

Куимов Михаил, группа 675

3 мая 2019 года

Численное решение уравнений в частных производных элептического типа на примере уравнений Лапласа И Пуассона

В задание требуется решить уравнение Пуассона в квадрате с разбиением сеткой $h_x = h_y = h = \frac{1}{20}$. Для этого запишем схему для аппроксимации. Пусть $W_x = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$, $W_y = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} = f \quad \Rightarrow \quad -\frac{(W_x)^n_{m+1} - (W_x)^n_m}{h} - \frac{(W_y)^{n+1}_m - (W_y)^n_m}{h} = f^n_m$$

$$(W_x)^n_m = a^n_m \frac{u^n_m - u^n_{m-1}}{h}; \quad (W_y)^n_m = a^n_m \frac{u^n_m - u^{n-1}_m}{h}$$

$$\Rightarrow \quad -a^n_{m+1}\frac{u^n_{m+1} - u^n_m}{h^2} + a^n_m \frac{u^n_m - u^{m-1}_n}{h^2} - a^{n+1}_m \frac{u^{n+1}_m - u^n_m}{h^2} + a^n_m \frac{u^n_m - u^{n-1}_m}{h^2} = f^n_m$$

$$(a^n_{m+1} + 2a^n_m + a^{n+1}_m)u^n_m - a^n_{m+1}u^n_{m+1} - a^n_m u^n_{m-1} - a^{n+1}_m u^{n+1}_m - a^n_m u^{n-1}_m = f^n_m h^2$$

Последнее уравнение является СЛАУ при $n, m = \overline{1..20}$. То есть, имееем систему вида $Mu = s$, которая может быть решена относительно u методом сопряженных градиентов. Что и было мною сделано: github

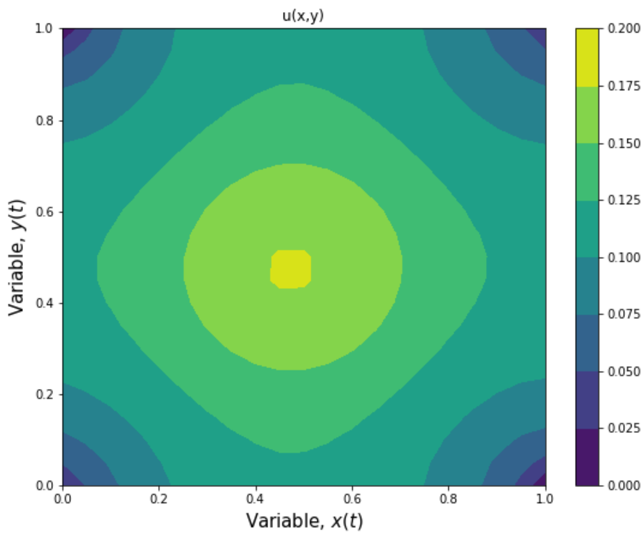

Рис. 1: Решение уравнения

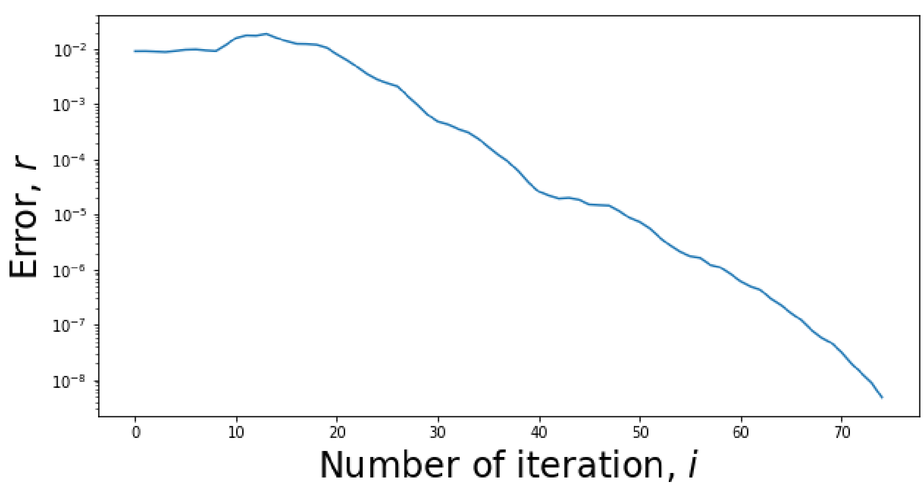

Рис. 2: График сходимости