

Лабораторная работа №2

Куимов Михаил, группа 675

5 мая 2019 года

Уравнение теплопроводности

В задании требуется реализовать явную схему (ЯС) и схему Кранка-Никольсона (КН) для решения уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + x^4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-3t} \sin(\pi x) (-3 + \pi^2 (1 + x^4))$$

С граничными и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sin \pi x; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Явная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a_m \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

Здесь мы можем выразить значение функции в следующий момент времени:

$$u_m^{n+1} = \tau u_m^n + a_m \tau \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

Эта схема является условно устойчивой при $\sigma = \frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ - условие Куранта. При $h = \frac{1}{20}$ и $\tau = \frac{1}{50}$ это условие не выполняется, поэтому и результат при увеличении t перестает совпадать с аналитическим решением и значения функции устремляются в бесконечность. Это можно видеть из графиков ниже. Если же взять $\tau = \frac{1}{1600}$, то условие будет выполняться, и сразу результат на лицо: приближенное решение точно совпадает с аналитическим. Схема КН:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{a_m}{2} \left(\frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} \right)$$

Эту схему можно переписать, как:

$$(a_m \tau + h^2) u_m^{n+1} - \frac{\tau a_m}{2} u_{m-1}^{n+1} - \frac{a_m \tau}{2} u_{m+1}^{n+1} = f_m^n \tau h^2 + (a_m \tau + h^2) u_m^n + \frac{\tau a_m}{2} u_{m-1}^n + \frac{\tau a_m}{2} u_{m+1}^n$$

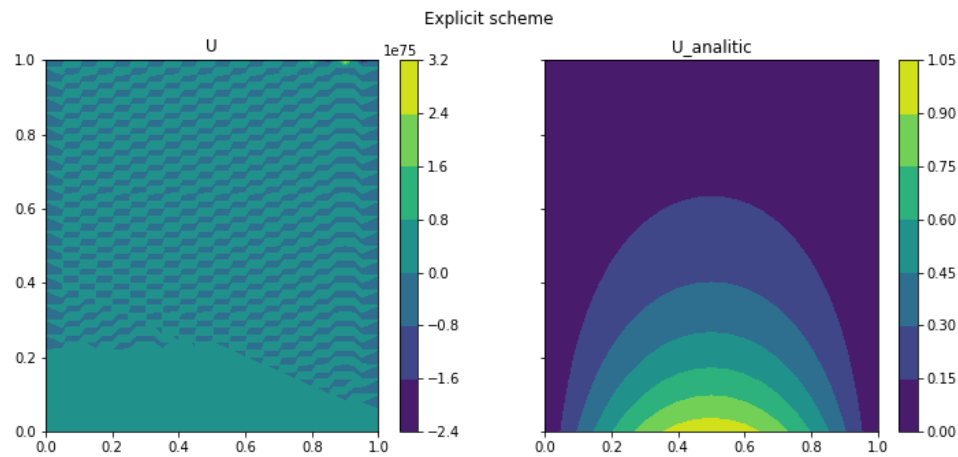


Рис. 1: Не выполняется условие Куранта

Тогда она представляет из себя СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Тогда на каждом шаге по t будем искать решение в следующий момент времени, используя метод прогонки. Схема КН безусловно устойчива, поэтому при шаге $h = \frac{1}{20}$ и $\tau = \frac{1}{50}$ решение должно совпадать с аналитическим. У меня так не получилось. Допускаю, что сделал ошибку в реализации. Но за 4 часа упорных поисков, она так и не нашлась, поэтому график выглядит очень плохо. Также прикладываю требуемую таблицу, в которой последний столбец должен быть, как первый, но здесь не вышло: [github](#)

U_a	U_noKurant	U_kn
0.9876883405951377	0.9876883405951377	0.9876883405951377
0.9301698494071804	0.9288642372071123	16.708843429917692
0.876000974381084	0.8737720833834564	282.9537909784892
0.8249866490573491	0.8221106447976759	4818.5212778331725
0.7769431667627267	0.7735545859447334	82382.53851561822
0.7316975190677684	0.7277307888579659	1412228.8261376442
0.6890867727696088	0.6842761765243177	24252043.146122076
0.6489574831564459	0.6434607130535925	416987378.12641215
0.6111651414408381	0.6100419915017324	7175795710.3522835
0.5755736543719823	0.613948794158735	123561520059.07748
0.5420548541530115	0.7826854551231051	2128576085436.3872
0.5104880368984888	835460.1991315276	36680598460833.71
0.4807595279700441	-154305804.4241965	632248976050349.8
0.4527622726248921	16829493786.646616	1.0899777414416042e+16
0.426395450503126	-1416614534265.507	1.8793397055690333e+17
0.40156411256552216	101931930182170.78	3.2406833814353377e+18
0.37817883917444167	-6604424743472109.0	5.5885707992253686e+19
0.35615541808655066	3.9726131550602816e+17	9.638060895620753e+20
0.3354145411977834	-2.2621049953629774e+19	1.662253497308221e+22
0.31588151894850525	1.2356660462370376e+21	2.8669423177343776e+23
0.2974860113604231	-6.536152572171674e+22	4.944829481603087e+24
0.2801617747366874	3.37104929132541e+24	8.528874997362632e+25
0.26384642311303175	-1.704025123784587e+26	1.4710867328649068e+27
0.24848120360091666	8.475731521200309e+27	2.537402851356991e+28
0.23401078481367008	-4.161127504327421e+29	4.376672606156237e+29
0.22038305761372995	2.021330929892588e+31	7.549207121566156e+30
0.207548947463465	-9.7342431412809e+32	1.3021488192135973e+32
0.19546223770383184	4.654638828503693e+34	2.246060322998277e+33
0.18407940312448276	-2.212790367991242e+36	3.874211773809323e+34
0.17335945322599547	1.04692168522228e+38	6.682610744963835e+35
0.16326378460979998	-4.9337267811630914e+39	1.1526823130739146e+37
0.15375604196424753	2.317524544739961e+41	1.9882619027606568e+38
0.14480198714621972	-1.0856998118712577e+43	3.4295562393294416e+39
0.136369375886832	5.074993525728798e+44	5.915651099981112e+40
0.12842784167723742	-2.3679355203820145e+46	1.020392810817363e+42
0.12094878641639523	1.103193819163914e+48	1.7600799337848648e+43
0.11390527742701737	-5.133292556899372e+49	3.0359702868360825e+44
0.1072719504688395	2.3861467088902468e+51	5.236760780224735e+45
0.10102491839995921	-1.1082388183129037e+53	9.032917106725693e+46
0.09514168515732441	5.143623482816965e+54	1.5580929690941217e+48
0.089601064746607	-2.3859305397896624e+56	2.687563605881074e+49
0.08438310494974045	1.1062241103418807e+58	4.635794390736617e+50
0.07946901547538303	-5.12697631775733e+59	7.996309645072146e+51
0.07484110029357353	2.375429619416573e+61	1.3792883191356566e+53
0.07048269391090925	-1.1002977390836838e+63	2.3791428922789372e+54
0.06637810135676882	5.095486541433476e+64	4.103798281164839e+55
0.06251254166446536	-2.3593104234007242e+66	7.078667146531996e+56
0.058872094643801144	1.0922502504384818e+68	1.2210037093687975e+58
0.055443650753347146	-5.056011743186321e+69	2.1061169319669867e+59
0.05221486389193396	2.340195073562869e+71	3.632854291022509e+60
0.04917410693935221	-1.0830828406511859e+73	6.266333163011622e+61

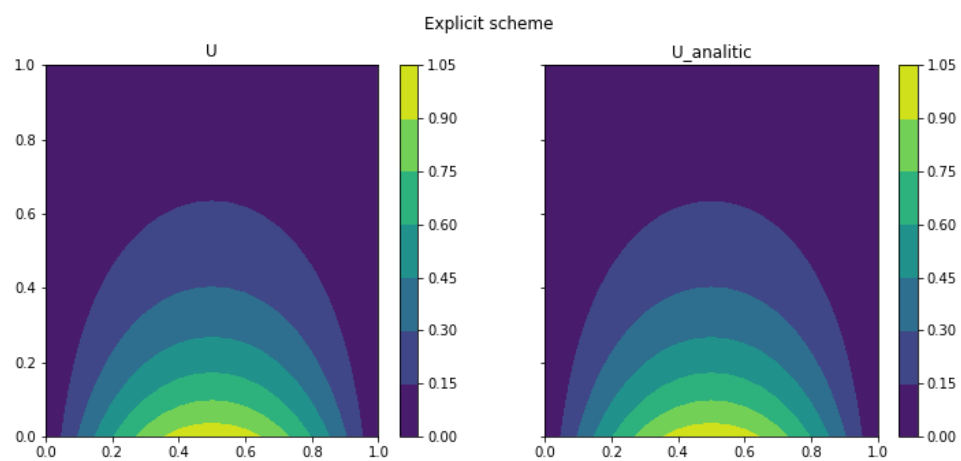


Рис. 2: Выполняется условие Куранта

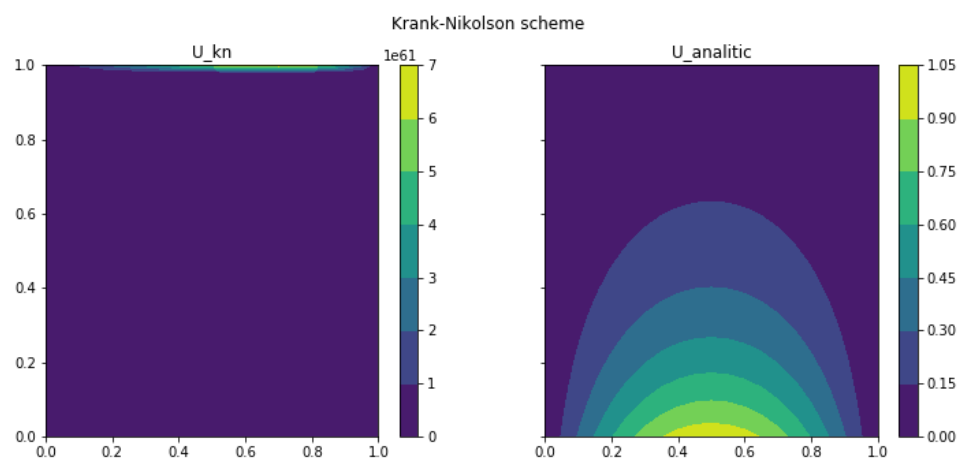


Рис. 3: Плохой график