

**Реализовать программу для численного интегрирования систем ОДУ явным методом Рунге-Кутты 1 и 4 порядков и решить задачу Коши:**

$$x'' = -x + \epsilon x'(1 - x^2), \quad x_0 = 1, \quad x'_0 = 1, \quad \epsilon \geq 0. \quad (1)$$

1. Реализовать два численных метода (ЯМРК1 и ЯМРК4).
2. Счёт должен выполняться с контролем точности, т.е. шаг интегрирования должен выбираться исходя из желаемой точности (возможны разные варианты).
3. Исследовать поведение решения при различных значениях  $\epsilon$  (включая  $\epsilon = 0$ ) и начальных приближениях и объяснить результат.
4. Для  $\epsilon = 0$  сравнить аналитическое решение с численными решениями (ЯМРК1 и ЯМРК4) и объяснить результат.
5. Решить задачу (1) стандартной библиотекой. Сравнить с точностью и скоростью вашего алгоритма. Этот пункт не обязательно программировать – можно использовать внешний пакет.

Прислать:

1. Исходник программы. Язык: Python (файл \*.py, не Jupyter!).
2. PDF файл (один!) с отчётом, содержащим:
  - выписанный численный метод и краткое описание программной реализации;
  - численное решения системы ОДУ в виде функции от времени;
  - численное решения системы ОДУ в виде траектории в фазовом пространстве;
  - описание результатов счёта (выбор шага, кол-во шагов по времени и т.п.).

**Справка.** Предъявленное ОДУ является одним из вариантов т.н. осциллятора Ван-дер-Поля, который служит основной моделью автоколебаний с одной степенью свободы. В 1920-хх гг. голландский физик Балтазар Ван-дер-Поль, будучи сотрудником электрической лаборатории Philips, предложил уравнение для описания регулярных помех, возникающих в электрической цепи (рис. 1). Если на LC-контур наводится помеха выше критического уровня, то в системе устанавливаются автоколебания. Частота автоколебаний отличается как от вынужденных колебаний, так и от собственных колебаний, и полностью определяется только свойствами системы. В уравнении (1) величина  $x$  имеет смысл напряжения  $U$  (рис. 1).

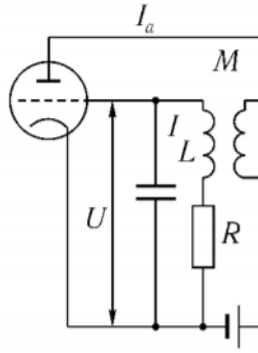


Рис. 1. Схема осциллятора Ван-дер-Поля с контуром в цепи сетки лампы (рисунок из [1]).

Популярность осциллятора Ван-дер-Поля связана с тем, что это безразмерное уравнение оказалось очень простой и удобной моделью автоколебаний в самых разных областях: в радиотехнике; для описания колебаний в плазме; колебаний в турбулентных потоке, в лазерной физике, робототехнике, моделирования процессов в живом организме и т.д.

[1] Рабинович, М.И., Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн, - НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000, 560 с.