DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

Diferansiyel denklemler ders notlarına ek olarak, hemen hemen her konuya ait birkaç soru, çözümleri ile verilmiştir. Bazı sorularda geçen teoremler, dersin temel kitabı "Elementary Diffrerential Equations and Boundary Value Problems, Boyce, DiPrima, Sixth Edition" 'daki teorem numarasına göredir. Soruların üzerine, farenin (mause) imlecini getirip tıklarsanız, sorunun cevabını, cevabın üzerini tıklarsanız, ayrıntılı cevabı görebilirsiniz.

2. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1 Lineer Diferansiyel Denklemler

2.1.1 $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

2.1.2 $y' + \dfrac{2}{t} y = \dfrac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Sabitlerin Değişimi Yöntemi

2.1.3 $y' + 2y = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.2 Lineer Diferansiyel Denklemlerin İleri Tartışması

2.2.1 Teorem 2.2.1 'i kullanarak $t^2 y' + 3ty = \dfrac{\sin t}{t}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ başlangıç değer probleminin tek çözüme sahip olduğu aralığı bulunuz ve problemi çözünüz.

Bernoulli Diferansiyel Denklemi

2.2.2 $3ty' + y = \dfrac{e^t}{y^2}, \quad t > 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2.3 Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

2.3.1 $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.3.2 $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{3 + 2y}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.3.3 $xdx + ye^{-x}dy = 0, \;\; y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü açık formda bulunuz ve çözümün tanımlandığı aralığı yaklaşık olarak belirleyiniz.

2.3.4 $y' = 2(1+x)(1+y^2), \quad y(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz ve çözümün nerde minimum değerini aldığını belirleyiniz.

2.8 Tam Diferansiyel Denklemler Ve İntegrasyon Çarpanı

2.8.1 $(x + e^x) + (2y + 4y^3)y' = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.8.2 $(ye^x + \cos y + \dfrac{1}{x})dx + (e^x - x\sin y)dy = 0, \quad x > 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.8.3 $(ye^y + e^y + x)dy + ydx = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.8.4 $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.8.5 $(\dfrac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x)dx + (\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y})dy = 0$ diferansiyel denkleminin

$\mu(x, y) = ye^x$ integral çarpanı olarak alındığında tam olduğunu gösteriniz ve çözünüz.

2.8.6 $y' = e^{2x} + y - 1$ diferansiyel denklemini, integral çarpanını bulup çözünüz.

2.8.7 $\left(y^2 + \dfrac{y}{x}\right) + (xy + 1)y' = 0$ diferansiyel denklemini, integral çarpanını bulup çözünüz.

2.9 Homojen Diferansiyel Denklemler

2.9.1 $2ydx - xdy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.9.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.9.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{x - y}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2.9.4 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y+15}{2x+y+7}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Riccati Diferansiyel Denklemi

2.10.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t}$, $y_1(t) = \sin t$ özel çözümü ile verilen Riccati diferansiyel denklemini çözünüz.

3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1 Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

3.1.1 $4y'' - 9y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.1.2 $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

3.1.3 Genel çözümü $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz

Bağımlı Değişkeni İçermeyen Diferansiyel Denklemler

3.1.4 $y'' + 3y' = t$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3.1.5 $t^2 y'' = (y')^2, \quad t > 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Bağımsız Değişkeni İçermeyen Diferansiyel Denklemler

3.1.6 $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3.1.7 $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

3.2 Lineer Homojen Denklemlerin Temel Çözümleri

3.2.1 $(t^2 - 1)y'' - 3ty' + 3y = \sin t, \quad y(-2) = 2, \quad y'(-2) = 1$ başlangıç değer probleminin var olduğu en büyük aralığı bulunuz.

3.2.2 $r_1 \neq r_2$ olmak üzere bir lineer diferansiyel denklemin iki çözümü $y_1(t) = e^{r_1 t}$ ve $y_2(t) = e^{r_2 t}$ ise bu iki fonksiyonun temel çözüm kümesi olduğunu gösteriniz.

3.2.3 $y_1(t) = t^2$ ve $y_2(t) = t^2 \ln t$ fonksiyonlarının $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t>0$ diferansiyel denkleminin temel çözüm kümesi olduğunu gösteriniz.

3.2.4 $y_1(t) = 1$ ve $y_2(t) = t^{1/2}$ fonksiyonlarının $yy'' + (y')^2 = 0, \quad t>0$ diferansiyel denkleminin çözümleri olduğunu, fakat genel olarak $c_1 + c_2 t^{1/2}$ nin bu diferansiyel denklemin temel çözüm kümesi olmadığını gösteriniz.

Tam Denklemler

3.2.5 $x^2 y'' - xy' - 3y = 0, \;\; x > 0$ diferansiyel denkleminin tam olup olmadığını araştırınız tam ise çaözünüz.

3.3 Lineer Bağımsızlık Ve Wronskiyan

3.3.1 $f(\theta) = \cos 3\theta, \;\; g(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

3.3.2 $f(t) = \dfrac{1}{t}, \;\; g(t) = t$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

3.3.3 $f(x) = e^{3x}, \;\; g(x) = e^{3(x-1)}$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

3.3.4 $f(t) = 3t, \;\; g(t) = |t|$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

3.3.5 $f(t) = \sin t, \;\; g(t) = \cos t$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

3.3.6 İki fonksiyonun Wronskiyanı $W(t) = t\sin^2 t$ ise bu fonksiyonlar lineer bağımlı mıdır? Neden?

3.3.7 $(\cos t)y'' + (\sin t)y' - ty = 0$ diferansiyel denklemini çözmeden, diferansiyel denklemi sağlayan iki çözümün wronskiyanını bulunuz.

3.3.8 $f(t) = 3t - 5, \;\; g(t) = 9t - 15$ fonksiyonları bir diferansiyel denklemin çözümleri ise lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.

3.3.9 $f(x) = e^{3x}, \;\; g(x) = e^{3(x-1)}$ bir ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri ise lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.

3.3.10 $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü y_1 , y_2 ve $W(y_1, y_2)(1) = 2$ ise $W(y_1, y_2)(5) = ?$

3.4 Karakteristik Denklemin Kompleks Kökleri

3.4.1 $y'' + 2y' + 1.25y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.4.2 $y'' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.4.3 $4y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = \dfrac{3}{2}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Euler Denklemleri

3.4.4 $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3.5 Katlı Kökler Ve Mertebe Düşürme

3.5.1 $y'' - 6y' + 9y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.5.2 $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \;\; y'(-1) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

3.5.3 $y_1(t) = t$ çözümü ile verilen $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t>0$ diferansiyel denkleminin ikinci çözümünü bulunuz.

3.5.4 $y_1(x) = e^x$ çözümü ile verilen $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x>1$ diferansiyel denkleminin ikinci çözümünü iki yolla bulunuz.

3.6 Homojen Olmayan Denklemler, Belirsiz Katsayılar Yöntemi

3.6.1 $y'' + y' - 6y = -3e^{3t}$ homojen olmayan diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.2 $y'' + y' - 6y = -3e^{2t}$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.3 $y'' + y' - 6y = 2\cos t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.4 $y'' + y' - 6y = 4t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.5 $y'' + y' - 6y = e^{-2t}\sin t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.6 $y'' + y' - 6y = -3e^{3t} - 3e^{2t} + 2\cos t + 4t + e^{-2t}\sin t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.7 $y'' + y = \sin t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3.6.8 $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\sin t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.6.9 $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

3.6.10 a) $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} + 2e^{-t}\cos t + 4e^{-t}t^2\sin t$

b) $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t}\cos 2t - 2te^{-2t}\cos t$

diferansiyel denklemlerinde belirsiz katsayılar yöntemlerinde kullanılacak $Y(t)$ formlarını belirleyiniz.

3.7 Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Yöntemi

3.7.1 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.7.2 $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.7.3 $\sin^2 x \cdot y'' - 2\sin x\cos x \cdot y' + (\cos^2 x + 1)y = \sin^3 t, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının lineer bağımsız iki çözümü $y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = x\sin x$ ise genel çözümü bulunuz.

4. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1 n. mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Teorisi

4.1.1 Aşağıdaki fonksiyonların lineer bağımlı olup olmadıklarını araştırınız. Lineer bağımlı ise aralarındaki lineer bağıntıyı bulunuz.

a) $f_1(t) = 3t + 1, \quad f_2(t) = 5, \quad f_3(t) = 6t - 1$

b) $f_1(t) = t^4, \quad f_2(t) = t^2, \quad f_3(t) = t, \quad f_4(t) = 1$

4.1.2 Abel teoremini $y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$ diferansiyel denklemine genelleyiniz ve bundan yararlanarak $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0, \quad t > 0$ diferansiyel denkleminin bir temel çözümünün Wronskiyanını bulunuz.

4.2 Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

Reel ve Birbirinden Farklı Kökler

4.2.1 $y^{iv} - 6y''' + 3y'' + 26y' - 24y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4.2.2 $6y''' + 5y'' + y' = 0, \quad y(0) = -2, \;\; y'(0) = 2, \;\; y''(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Kompleks Kökler

4.2.3 $y^{iv} - 2y''' + 3y'' - 2y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4.2.4 $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = -2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Katlı Kökler

4.2.5 $y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4.2.6 $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0, \quad y(1) = -1, \;\; y'(1) = 2, \;\; y''(1) = y'''(1) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

4.3 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

4.3.1 $y^{iv} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4.3.2 $y^{iv} + 2y'' + y = 3t + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \;\; y''(0) = y'''(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

4.3.3 a) $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$

b) $y^{iv} + 4y'' = \sin 2t + te^t + 4$

diferansiyel denklemleri belirsiz katsayılar yöntemi ile çözülmek istendiğinde özel çözüm $Y(t)$ nin formunu katsayıları hesaplamadan yazınız.

4.4 Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Yöntemi

4.4.1 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitlerin değişimi yöntemi ile bulunuz.

4.4.2 $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^{-2}e^t$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

4.4.3 $y''' - y' = \csc t, \quad y(\pi/2) = 2, \ \ y'(\pi/2) = 1, \ \ y''(\pi/2) = -1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

5. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

5.2 Adi Nokta Komşuluğunda (Civarında) Seri Çözümleri I

5.2.1 $y'' - y = 0, \quad -\infty < x < \infty$ diferansiyel denklemini seri çözümü ile bulunuz.

5.2.2 $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$ diferansiyel denklemini $x_0 = 0$ ve $x_0 = 1$ noktalarında kuvvet serisine açarak genel çözümü bulunuz.

5.2.3 $y'' + x^2y' + x(x+2)y = 0$ diferansiyel denklemini $x_0 = 0$ noktasında kuvvet serisine açarak lineer bağımsız her iki çözümün ilk dört terimini yazınız.

5.2.4 $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \ \ y(0) = -3, \ \ y'(0) = 2$ başlangıç değer probleminin sıfırdan farklı ilk beş terimini yazınız. Çözümün ilk üç ve ilk dört terimine göre yaklaşımların grafiklerini aynı eksende çiziniz.

5.3 Adi Nokta Komşuluğunda (Civarında) Seri Çözümleri II

5.3.1 $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0$ başlangıç değer probleminin bir çözümü $y = \phi(x)$ ise $\phi''(0), \ \phi'''(0)$ ve $\phi^{iv}(0)$ bulunuz.

5.3.2 $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminin $x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 1$ noktalarındaki seri çözümlerinin yakınsaklık yarıçapları için bir alt sınır belirleyiniz.

5.3.3 $e^{-x}y'' + \ln(1+x)y' - xy = 0$ diferansiyel denkleminin $x_0 = 0$ noktasında iki lineer bağımsız kuvvet serisi çözümlerinin sıfırdan farklı ilk üç terimlerini bulunuz. Çözümlerin yakınsaklık yarıçapları en azından ne olmalıdır?

5.3.4 $(1-x)y' = y$ diferansiyel denkleminin seri çözümünü bulunuz. Çözümün yakınsaklık yarıçapı en azından ne olmalıdır?

5.4 Düzgün Tekil Noktalar

5.4.1 a) $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ (Legendre dif. denklemi)

b) $x^2y''+xy'+(x^2-\upsilon^2)y=0$ (Bessel dif. denklemi)

diferansiyel denklemlerinin sonsuzda tekilliğini inceleyiniz.

5.5 Euler Denklemleri

Reel Ve Farklı Kökler

5.5.1 $2x^2y''+xy'-3y=0,\ \ y(1)=1,\ \ y'(1)=4$ başlangıç değer problemi çözünüz.

Reel Ve Katlı Kökler

5.5.2 $x^2y''-3xy'+4y=0,\ \ x>0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Kompleks Kökler

5.5.3 $4x^2y''+8xy'+17y=0,\ \ x>0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5.5.4 $(x+1)^2y''+3(x+1)y'+0.75y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5.6 Düzgün Tekil Nokta Civarında Seri Çözümleri I

5.6.1 $x=0$ noktasının

$$xy''+y=0$$

diferansiyel denkleminin düzgün tekil noktası olduğunu gösteriniz. İndis (indisyel) denklemini, indis denkleminin köklerini, indirgeme bağıntısını ve $x>0$ için en büyük köke göre bir seri çözümünü bulunuz. (Yakınsaklığını inceleyiniz.)

5.6.2 Sıfır mertebeden

$$x^2y''+xy'+x^2y=0$$

Bessel denkleminin $x>0$ için bir çözümün

$$J_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

5.7 Düzgün Tekil Nokta Civarında Seri Çözümleri II

5.7.1 $x(x-1)y''+6x^2y'+3y=0$ diferansiyel denkleminin bütün düzgün tekil noktalarını bulunuz. $x=0$ noktasının eksponantlarını bulunuz ve $x=0$ noktasında iki lineer bağımsız çözümün sıfırdan farklı ilk üç terimini yazınız.

6. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

6.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı

6.1.1 $f(t)=\sin at, \quad t\geq 0, \quad \mathcal{L}\{\sin at\}=?$

6.1.2 $f(t)=t^n$ ise $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0$ olduğunu gösteriniz.

6.2 Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü

6.2.1 $F(s)=\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.2.2 $y''-2y'+2y=e^{-t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

6.2.3 $y^{iv}-4y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=-2, \quad y'''(0)=0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

6.2.4 Teorem 6.2.1 'in şartlarını sağlayan $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ Laplace dönüşümü için $F'(s)=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$ olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere te^{at} 'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.3 Adım Fonksiyonları

6.3.1 a) $f(t)=t^2, \quad g(t)=u_\pi(t)f(t-\pi)$

b) $f(t)=(t-1)u_1(t)-2(t-2)u_2(t)+(t-3)u_3(t)$

fonksiyonlarını açık şekilde yazınız ve grafiklerini çiziniz.

6.3.2 a) $f(t)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\le t<1 \\ t^2-2t+2 & , \quad t\ge 1 \end{cases}$

b) $f(t)=t-u_1(t)(t-1)$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.3.3 a) $F(s)=\dfrac{3!}{(s-2)^4}$, b) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$, c) $F(s)=\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

6.3.4 c,k pozitif bir sayı ve $s>a\ge 0$ için $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ var ise

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),\quad s>ca \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

olduğunu gösteriniz ve bundan yararlanarak $F(s)=\dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü bulunuz.

6.3.5 a) $f(t)=1-u_1(t)+u_2(t)+\cdots+u_{2n}(t)-u_{2n+1}(t)=1+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k(t)$

b) $f(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(t)$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.3.6 $f(t+T)=f(t),\ \ t\ge 0$ T peryodlu f fonksiyonunun Laplace dönüşümünün

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

olduğunu gösteriniz ve bundan yararlanarak

a) $f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad 0\le t<1 \\ 0 & , \quad 1\le t<2 \end{cases}, \quad f(t+2)=f(t),\ \ t\ge 0$

b) $f(t)=t, \quad 0\le t<1, \quad f(t+1)=f(t)$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.4 Süreksiz Kuvvet Fonksiyonlarına Sahip Diferansiyel Denklemler

6.4.1 $g(t)=\begin{cases} t/2 & , \quad 0\le t<6 \\ 3 & , \quad t\ge 6 \end{cases}$ olmak üzere $y''+y=g(t), \ y(0)=0, \ y'(0)=1$ başlangıç değer problemini çözünüz. Kuvvet fonksiyonunun ve çözümün grafiğini çizerek aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

6.5 Darbe (impuls) Fonksiyonları

6.5.1 $y''+y=\delta(t-2\pi)\cos t+\delta(t-2\pi)+u_{\pi/2}(t), \ y(0)=0, \ y'(0)=1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz ve grafiğini çiziniız.

6.5.2 a) Sabitlerin değişimi yöntemi ile $y''+2y'+2y=f(t), \ y(0)=0, \ y'(0)=0$

başlangıç değer probleminin çözümünün

$$y=\int_0^t e^{-(t-\tau)}f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

olduğunu gösteriniz.

b) $f(t)=\delta(t-\pi)$ ise çözümünün

$$y=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

olduğunu gösteriniz.

c) $f(t)=\delta(t-\pi)$ alarak başlangıç değer problemini çözünüz ve çözümün b) şıkkı ile

aynı olduğunu gösteriniz.

6.6 Konvolüsyon İntegrali

6.6.1 $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

6.6.2 $H(s)=\dfrac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+s+5/4)}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü konvolüsyon teoremini kullanarak bulunuz.

6.6.3 $y''+y'+5/4\, y=1-u_\pi(t), \quad y(0)=1, \;\; y'(0)=-1$ başlangıç değer probleminin çözümünü konvolüsyon integrali terimleri ile yazınız.

7. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

7.1 Giriş

7.1.1 $t^2u''+tu'+(t^2-0.25)u=0$ diferansiyel denklemini birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürünüz.

7.1.2 $u''+p(t)u'+q(t)u=g(t), \;\; u(0)=u_0, \;\; u'(0)=u'_0$ başlangıç değer problemini birinci mertebeden başlangıç değer problemine dönüştürünüz.

7.1.3 a) $\begin{aligned} x'_1 &= x_1-2x_2 \\ x'_2 &= 3x_1-4x_2 \end{aligned} \qquad x_1(0)=-1, \;\; x_2(0)=2$

b) $\begin{aligned} x'_1 &= 2x_2 \\ x'_2 &= -2x_1 \end{aligned} \qquad x_1(0)=3, \;\; x_2(0)=4$

diferansiyel denklem sistemlerini ikinci mertebeden tek bir diferansiyel denklem haline getirip, başlangıç değer problemlerini çözünüz.

7.4 Birinci Mertebeden Lineer Denklem Sistemlerinin Temel Teorisi

7.4.1 1) $x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$

2) $x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad x^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

a) $x^{(1)}, x^{(2)}$'nin Wronskiyanını bulunuz.

b) Hangi aralıkta $x^{(1)}, x^{(2)}$ lineer bağımsızdır.

c) $x^{(1)}, x^{(2)}$ tarafından sağlanan homojen denklem sisteminin katsayıları hakkında ne söylenebilir.

d) c) şıkkında sonucu sağlayan diferansiyel denklem sistemini bulunuz.

7.5 Sabit Katsayılı Homojen Lineer Denklem Sistemleri

7.5.1 $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.5.2 $x' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.5.3 $x' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} x$ denklem sistemini çözünüz.

7.5.4 $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.5.5 $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.5.6 $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

7.5.7 $tx' = Ax$ denklem sistemi Euler denklemine benzerdir. ξ sabit bir vektör olmak üzere $x = \xi t^r$ şeklinde çözüm arandığında sıfırdan farklı çözümler elde etmek için $(A - rI)\xi = 0$ denkleminin sağlanması gerektiğini gösteriniz ve bundan yararlanarak $tx' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$ denklem sistemini çözünüz.

7.6 Kompleks Özdeğerler

7.6.1 $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.6.2 $x' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

7.6.3 $x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.6.4 $tx' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad t > 0$ sistemini çözünüz.

7.7 Katlı Özdeğerler

7.7.1 $x' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.7.2 $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

7.7.3 $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.7.4 $x' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.7.5 $tx' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x, \quad t > 0$ sistemini çözünüz.

7.8 Temel Matrisler

7.8.1 a) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$ b) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$

Verilen sistemlerin bir temel matrisini bulunuz. Ayrıca $\Phi(0) = I$ şartını sağlayan $\Phi(t)$ temel matrisini bulunuz.

7.9 Homojen Olmayan Lineer Sistemleri

7.9.1 $x' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ denklem sisteminin genel çözümünü üç farklı yöntemle bulunuz.

7.9.2 $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$ denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Ayrıntılı çözüm için, farenin (mause) imlecini istediğiniz cevabın üzerine getirip tıklayınız.

2.1.1 $y = \frac{1}{2}(t^2 - 1)e^{-2t}$

2.1.2 $y = \frac{\sin t}{t^2}$

2.1.3 $y = \frac{1}{2} + ce^{-2t}$

2.2.1 $0 < t < \infty$, $\quad y = -\frac{\cos t}{t^3}$

2.2.2 $y = \sqrt[3]{\frac{e^t + c}{t}}$

2.3.1 $2\tan 2y - 2x - \sin 2x = c$

2.3.2 $y^2 + 3y - x^3 + x = c$

2.3.3 $y = \sqrt{2(1-x)e^x - 1}$

2.3.4 $y = \tan(x^2 + 2x)$

2.8.1 $y^4 + y^2 + e^x + \frac{x^2}{2} = c$

2.8.2 $ye^x + x\cos y + \ln x = c, \quad x > 0$

2.8.3 $xy + ye^y = c$

2.8.4 $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$

2.8.5 $e^x \sin y + 2y\cos x = c$

2.8.6 $e^x - ye^{-x} + e^{-x} = c$

2.8.7 $x^2y^2 + 2xy = c, \quad xy + \ln(xy) = c$

2.9.1 $y = cx^2$

2.9.2 $y = x\tan\left(\ln c\left|x\right|\right)$

2.9.3 $\ln\left|y+x\right| + \dfrac{2x}{x+y} = c$ ve $y = -x$

2.9.4 $\left|y+x+4\right|\left|y+4x+13\right|^2 = c$ ve $y+x+4=0$

2.10.1 $y = \sin t + \dfrac{1}{-\frac{1}{2}\sin t + \cos t}$

3.1.1 $y = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3}{2}t}$

3.1.2 $y = 12e^{\frac{t}{3}} - 8e^{\frac{t}{2}}$

3.1.3 $2y'' + 5y' + 2y = 0$

3.1.4 $y = \dfrac{t^2}{6} - \dfrac{t}{9} - \dfrac{c_1}{3}e^{-3t} + c_2$

3.1.5 $y = \dfrac{t^2}{2} + c,$ ve $y = c$

3.1.6 $e^y = \left(t+c_2\right)^2 - \dfrac{c_1}{4}$

3.1.7 $y = \dfrac{4}{3}(t+1)^{3/2} - \dfrac{1}{3}$

3.2.1 $-\infty < t < -1$

3.2.2 $W(y_1, y_2)(t) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0$

3.2.3 $W(y_1, y_2)(t) = t^3 \neq 0, \quad t > 0$

3.2.5 $y=-\frac{1}{4}c_1x^{-1}+c_2x^3, \quad x>0$

3.3.1 Lineer bağımlı

3.3.2 Lineer bağımsız

3.3.3 Lineer bağımlı

3.3.4 Sıfırı içeren bir aralıkta lineer bağımsız, sıfırı içermeyen aralıklarda lineer bağımlı

3.3.5 Lineer bağımsız

3.3.6 Lineer bağımsız

3.3.7 $W(y_1,y_2)(t)=c\cos t, \quad \cos t>0$

3.3.8 Lineer bağımlı

3.3.9 Lineer bağımlı

3.3.10 $W(y_1,y_2)(5)=\frac{2}{25}$

3.4.1 $y=c_1e^{-t}\cos\frac{t}{2}+c_2e^{-t}\sin\frac{t}{2}$

3.4.2 $y=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$

3.4.3 $y=e^{-\frac{t}{2}}\cos t+2e^{-\frac{t}{2}}\sin t$

3.4.4 $y=c_1t^{-1}+c_2t^{-2}$

3.5.1 $y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$

3.5.2 $y=(7+5t)e^{-2(t+1)}$

3.5.3 $y_2(t)=\frac{1}{t^2}$

3.5.4 $y_2(x)=x$

3.6.1 $Y(t)=-\frac{1}{2}e^{3t}$

3.6.2 $Y(t) = -\frac{3}{5}te^{2t}$

3.6.3 $Y(t) = -\frac{7}{25}\cos t + \frac{1}{25}\sin t$

3.6.4 $Y(t) = -\frac{2}{3}t - \frac{1}{9}$

3.6.5 $Y(t) = \left(-\frac{5}{34}\sin t + \frac{3}{34}\cos t\right)e^{-2t}$

3.6.6

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} - \frac{3}{5}te^{2t} - \frac{7}{25}\cos t + \frac{1}{25}\sin t - \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} + \left(-\frac{5}{34}\sin t + \frac{3}{34}\cos t\right)e^{-2t}$$

3.6.7 $Y(t) = -\frac{1}{2}t\cos t$

3.6.8 $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-t} + t^2 - 6t + 14 - \left(3/10\right)\sin t - \left(9/10\right)\cos t$

3.6.9 $y = \frac{7}{10}\sin 2t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$

3.6.10 a) $Y(t) = Ae^{-t} + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-t}\cos t + t(C_0 t^2 + C_1 t + C_2)e^{-t}\sin t$

b)
$$\begin{aligned} Y(t) &= t(A_0 t + A_1)e^{-t}\cos 2t + t(B_0 t + B_1)e^{-t}\sin 2t \\ &\quad + (C_0 t + C_1)e^{-2t}\cos t + (D_0 t + D_1)e^{-2t}\sin t \end{aligned}$$

3.7.1 $y = c_1 e^t + c_2 te^t - \left(1/2\right)e^t \ln(1+t^2) + te^t \arctan t$

3.7.2 $y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - 1 + \sin 3t \ln(\sec 3t + \tan 3t)$

3.7.3 $y = c_1 \sin x + c_2 x \sin x + \left(x^2/2\right)\sin x$

4.1.1 a) Lineer bağımlı, $-10f_1 + 4f_2 + 5f_3 = 0$

b) Lineer bağımsız

4.1.2 $W = ce^{-\int p_1(t)dt}, \quad W = \dfrac{c}{t^2}$

4.2.1 $y = c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} + c_4e^{4t}$

4.2.2 $y = 8 - 18e^{\frac{-t}{3}} + 8e^{\frac{-t}{2}}$

4.2.3 $y = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3e^t\cos t + c_4e^t\sin t$

4.2.4 $y = 2\cos t - \sin t$

4.2.5 $y = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4e^{-t} + c_5te^{-t} + c_6t^2e^{-t}$

4.2.6 $y = -3 + 2t$

4.3.1 $y = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3t\cos t + c_4t\sin t + 3 + \dfrac{1}{9}\cos 2t$

4.3.2 $y = -4\cos t - 4\sin t + t\cos t - \dfrac{3}{2}t\sin t + 3t + 4$

4.3.3 a) $Y(t) = t(A_0t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3) + t^2Be^t$

b) $Y(t) = t(A\sin 2t + B\cos 2t) + (C_0t + C_1)e^t + t^2D$

4.4.1 $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} + \dfrac{1}{2}te^t$

4.4.2 $Y(t) = -t\ln|t|e^t$.

4.4.3 $y = 3 - e^{\frac{\pi}{2}-t} + \ln\dfrac{1+\cos t}{\sin t} + \dfrac{1}{2}e^t\displaystyle\int_{\pi/2}^{t}\dfrac{e^{-s}}{\sin s}ds + \dfrac{1}{2}e^{-t}\int_{\pi/2}^{t}\dfrac{e^{s}}{\sin s}ds$

5.2.1 $$y = a_0 + a_1\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) = c_0 + c_1 e^x$$

5.2.2 $$y = a_0\left(1 - 3x^2\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$y = b_0\left[1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3\right] + b_1\left[(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3\right]$$

5.2.3 $$y = a_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{28}x^7 + \cdots\right]$$

5.2.4 $$y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

5.3.1 $\phi''(0) = -1,\ \ \phi'''(0) = 0,\ \ \phi^{iv}(0) = 3$

5.3.2 $x_0 = 4 \Rightarrow \rho = 1,\ \ x_0 = -4 \Rightarrow \rho = 3,\ \ x_0 = 1 \Rightarrow \rho = 2$

5.3.3 $$y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \cdots,\ \ y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots, \rho = 1$$

5.3.4 $$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = a_0 \frac{1}{1-x}, \qquad \rho = 1$$

5.4.1 a) Düzgün tekil b) Düzgün tekil değil

5.5.1 $$y = 2x^{3/2} - x^{-1}$$

5.5.2 $$y = \left(c_1 + c_2 \ln x\right)x^2$$

5.5.3 $$y = c_1 x^{-1/2}\cos\left(2\ln x\right) + c_2 x^{-1/2}\sin\left(2\ln x\right), \qquad x > 0$$

5.5.4 $$y = c_1\left|x+1\right|^{-1/2} + c_2\left|x+1\right|^{-3/2}$$

5.6.1 $F(r) = r(r-1),\ \ r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ \ a_n(n+r)(n+r-1) + a_{n+2} = 0,\ \ n = 1, 2, \cdots$

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n \quad (\rho=\infty)$$

5.7.1 $$x=0,\quad x=1,\quad r_1=1,\ r_2=0,\quad y_1(x)=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x^3+\cdots$$

$$y_2(x)=3y_1(x)\ln x+1-3x-\frac{39}{4}x^2+\cdots$$

6.1.1 $$\mathcal{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0$$

6.2.1 $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=3+5\cos 2t-2\sin 2t$$

6.2.2 $$y(t)=\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{5}e^t\cos t+\frac{7}{5}e^t\sin t$$

6.2.3 $$Y(t)=\cos\sqrt{2}t$$

6.2.4 $$\mathcal{L}\{te^{at}\}=\frac{1}{(s-a)^2},\quad s>a$$

6.3.1 a) $$g(t)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le t<\pi\\ (t-\pi)^2 & , \quad t\ge\pi\end{cases}$$ b) $$f(t)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le t<1\\ t-1 & , \quad 1\le t<2\\ -t+3 & , \quad 2\le t<3\\ 0 & , \quad t\ge 3\end{cases}$$

6.3.2 a) $$\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s}\right)$$ b) $$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$$

6.3.3 a) $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{2t}t^3$$ b) $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{3}u_2(t)\left[e^{t-2}-e^{-2(t-2)}\right]$$

c) $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=u_1(t)+u_2(t)-u_3(t)-u_4(t)$$

6.3.4 $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=2(2t)^n$$

6.3.5 a) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left[\frac{1-e^{-(2n+2)s}}{1+e^{-s}}\right], \quad s>0$$

b) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \quad s>0$$

6.3.6 a) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \quad s>0$$

b) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{1+e^{-s}}(-se^{-s}-e^{-s}+1), \quad s>0$$

6.4.1 $$y(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}u_6(t)\left[\sin(t-6)-(t-6)\right]$$

6.5.1 $$y(t) = \sin t + 2u_{2\pi}(t)\sin t + u_{\pi/2}(t) - u_{\pi/2}(t)\sin t = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad \frac{\pi}{2} \le t < 2\pi \\ 2\sin t + 1 & , \quad t \ge 2\pi \end{cases}$$

6.6.1 $$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

6.6.2 $$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \int_0^t e^{\frac{-1}{2}(t-\tau)}\sin(t-\tau)\left[1-u_\pi(\tau)\right]d\tau$$

6.6.3 $$y(t) = e^{\frac{-1}{2}t}\cos t - \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}t}\sin t + \int_0^t e^{\frac{-1}{2}(t-\tau)}\sin(t-\tau)\left[1-u_\pi(\tau)\right]d\tau$$

7.1.1 $$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \left(\frac{0.25}{t^2}-1\right)x_1 - \frac{1}{t}x_2$$

7.1.2 $\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t) \end{array}$ $\quad x_1(0) = u(0) = u_0, \;\; x_2(0) = u'(0) = u_0'$

7.1.3 a) $x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0,$ $\quad \begin{array}{l} x_1(t) = -7e^{-t} + 6e^{-2t} \\ x_2(t) = -7e^{-t} + 9e^{-2t} \end{array}$

b) $x_1'' + 4x_1 = 0,$ $\quad \begin{array}{l} x_1(t) = 3\cos 2t + 4\sin 2t \\ x_2(t) = 4\cos 2t - 3\sin 2t \end{array}$

7.4.1 a) 1) $W\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)(t) = t^2$, 2) $W\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)(t) = (t^2 - 2t)e^t$

b) Herhangi bir aralıkta 1) ve 2) için $x^{(1)}, x^{(2)}$ lineer bağımsızdır.

c) 1) ve 2) için en az bir katsayı süreksizdir

d) 1) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2-2t}{t^2-2t} & \dfrac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

7.5.1 $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$

7.5.2 $x = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$

7.5.3 $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{2t}$

7.5.4 $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$

7.5.5 $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

7.5.6 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}$

7.5.7 $$x = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t$$

7.6.1 $$x = c_1\begin{pmatrix}-2\cos 3t\\3\sin 3t + \cos 3t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\sin 3t\\-\sin 3t - 3\cos 3t\end{pmatrix}$$

7.6.2 $$x = \begin{pmatrix}-5\sin t + \cos t\\-3\sin t - 2\cos t\end{pmatrix}e^{-2t}$$

7.6.3 $$x = c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\\\cos\sqrt{2}t\\-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t - \cos\sqrt{2}t\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\\\sin\sqrt{2}t\\-\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix}e^{-t}$$

7.6.4 $$x = c_1\begin{pmatrix}-\sin(\ln t) + 2\cos(\ln t)\\\cos(\ln t)\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\sin(\ln t) + \cos(\ln t)\\\sin(\ln t)\end{pmatrix}$$

7.7.1 $$x = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}e^{-t}\right]$$

7.7.2 $$x = \begin{pmatrix}-1\\2\\-33\end{pmatrix}e^{t} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}te^{t} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

7.7.3 $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + c_3x^{(3)}$, $$x^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t},\quad x^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}e^{t},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}t^2e^{t} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1/2\end{pmatrix}e^{t}$$

7.7.4 $$x = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}e^{t} + c_3\left[\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}e^{t}\right]$$

7.7.5 $$x = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^{-3} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^{-3}\ln t + \begin{pmatrix}1/4\\0\end{pmatrix}t^{-3}\right]$$

7.8.1 a) $$\Psi(t) = \begin{pmatrix}-\sin t + 2\cos t & 2\sin t + \cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}2\sin t + \cos t & -5\sin t\\ \sin t & -2\sin t + \cos t\end{pmatrix}$$

b) $$\Psi(t) = \begin{pmatrix}e^t & e^{-2t} & e^{3t}\\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t}\\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}\frac{e^t}{6} + \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{2} & -\frac{e^t}{3} + \frac{e^{-2t}}{3} & \frac{e^t}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{3t}}{2}\\ \frac{-2e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} + e^{3t} & \frac{4e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} & -2e^t + e^{-2t} + e^{3t}\\ -\frac{e^t}{6} - \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^t}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} & -\frac{e^t}{2} + e^{-2t} + \frac{e^{3t}}{2}\end{pmatrix}$$

7.9.1 $$x = c_1\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}e^{-4t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-2\end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\ -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-t}$$

7.9.2 $$x = c_1\begin{pmatrix}-\sin t + 2\cos t\\ \cos t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\sin t + \cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5/2\\ -1\end{pmatrix}t\sin t + \begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}t\cos t + \begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}\sin t$$