

Лабораторная работа 5.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ИЗ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

Цель работы

Определение модуля Юнга материала равнопрочной балки и радиуса кривизны изгиба из измерений стрелы прогиба балки в разных ее сечениях.

Теоретическое введение

Равнопрочной называется балка с переменным поперечным сечением, площадь которого линейно уменьшается при удалении от ее закрепленного конца. Такая балка имеет вид прямой треугольной призмы с максимальной площадью поперечного сечения $S_0 = a_0 b$ (см. рис. 5.2.1). Далее будет доказано, что название «равнопрочная» обусловлено постоянством механических напряжений, возникающих при изгибе балки, по всей ее длине.

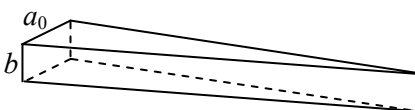


Рис. 5.2.1. Равнопрочная балка.

Определим связь стрелы прогиба балки с модулем Юнга при заданных значениях ее геометрических параметров (a_0 и b – линейные размеры поперечного сечения закрепленного конца, L – длина балки) и силе F , приложенной к незакрепленному концу.

Проанализируем сначала деформацию балки, возникающую в результате воздействия на ее свободный конец вертикальной силы F . На рис. 5.2.2 изображены силы, действующие на правую часть нагруженной балки. При изгибе балки возникают нормальные напряжения, вызванные сжатием слоев, находящихся ниже нейтрального слоя, и растяжением слоев, расположенных выше нейтрального. Эти напряжения dT различны в разных слоях и

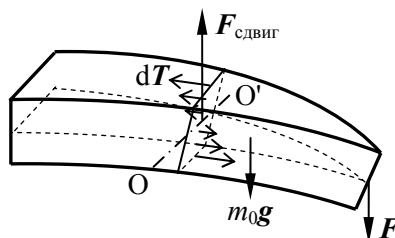


Рис. 5.2.2. Силы, действующие на правую часть балки при изгибе.

возрастают с удалением от нейтрального слоя, изображенного пунктиром на рис. 5.2.2. Кроме указанных напряжений возникают еще касательные напряжения, обусловленные деформацией сдвига. На рис. 5.2.2 изображена также касательная сила $F_{\text{сдвиг}}$, которая уравнивает силу F , приложенную к концу балки, и силу тяжести $m_0 g$, действующую на выделенную правую часть балки.

Выберем лабораторную инерциальную систему отсчета, жестко связанную со стеной, к которой прикреплена балка. Оси X и Y декартовой системы координат изображены на рис. 5.2.3. Под действием силы F незакрепленный конец балки опустится. При таком изгибе верхние слои балки будут растягиваться, а нижние – сжиматься, средний (нейтральный) слой сохраняет свою длину и только претерпевает искривление. В случае прямоугольного поперечного сечения балки нейтральный слой расположен посредине балки. Для удобства решения задачи введем еще и криволинейную систему координат, направив ось l вдоль нейтральной линии. Для решения задачи будем использовать гипотезу Бернулли о том, что при изгибе все поперечные сечения балки остаются плоскими. Линейный поперечный размер равнопрочной балки изменяется по закону:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (1)$$

Смещение оси балки в результате действия силы F будем описывать функцией $u(x)$. Будем считать деформации достаточно малыми, то есть стрела прогиба $\lambda = u(L) \ll L$.

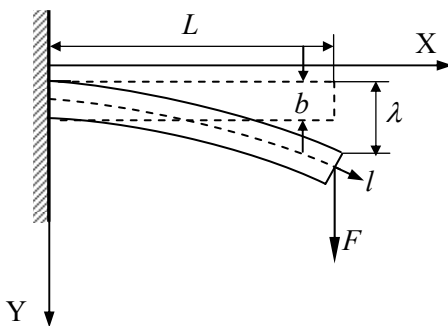


Рис. 5.2.3. Изгиб центрального сечения балки под действием силы F относительно осей выбранной декартовой системы координат.

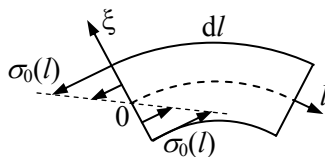


Рис. 5.2.4. Линейное изменение напряжения σ при удалении от нейтрального слоя для малого элемента длиной dl .

Для определения стрелы прогиба выделим малый фрагмент балки длиной dl (рис. 5.2.4).

При малых деформациях нормальное напряжение σ в каждом слое выделенного участка пропорционально величине изменения его длины, а, следовательно, напряжение $\sigma(l, \xi)$ будет линейно меняться при удалении от нейтрального слоя:

$$\sigma(l, \xi) = \sigma_0(l) \frac{\xi}{b/2}. \quad (2)$$

Здесь ξ – координата слоя, l – координата элемента балки длиной dl , $\sigma_0(l)$ – напряжение в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии $\frac{b}{2}$ от нейтрального.

На каждый элемент слоя, имеющий границы с координатами $(\xi, \xi + d\xi)$ действует со стороны соприкасающейся части балки сила, равная

$$dT(\xi) = \sigma dS = \sigma ad\xi, \quad (3)$$

где $dS = ad\xi = a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi$

– площадь поперечного сечения выделенного малого фрагмента балки.

Определим линию прогиба $u(x)$ балки, прикрепленной одним концом к вертикальной стене, под действием силы F . При малой деформации балки угол между направлением касательной к нейтральному слою в точке x равен (рис. 5.2.5)

$$\varphi = \frac{du}{dx}, \quad (4)$$

а изменение направления касательной при переходе от точки x к точке $x+dx$ равно:

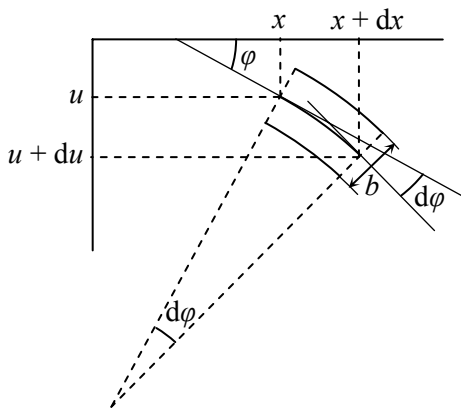


Рис. 5.2.5. К вопросу об определении линии прогиба $u(x)$ стержня, закрепленного одним концом в стенке, под действием силы F .

$$d\varphi = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \frac{d^2 u}{dx^2} dx. \quad (5)$$

Поскольку при деформации элемент длиной dl удлиняется на величину $\frac{b}{2} d\varphi$, то относительное удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального, как видно на рис. 5.2.5, равно:

$$\varepsilon(l) = \frac{d\varphi}{dl} \cdot \frac{b}{2}. \quad (6)$$

Поскольку угол φ – мал, то величины dl и dx связаны следующим соотношением:

$$dx \approx dl \cos \varphi \approx dl. \quad (7)$$

В соответствии с выражениями (6) и (7) относительная деформация равна:

$$\varepsilon(x) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{b}{2}. \quad (8)$$

Так как $\sigma_0(l) = \sigma_0(x)$, используя закон Гука, получим выражение для напряжения в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии $\frac{b}{2}$ от нейтрального:

$$\sigma_0(l) = \sigma_0(x) = E\varepsilon(x). \quad (9)$$

Поскольку балка находится в равновесии, то суммарный момент внешних сил, действующих на любой выделенный фрагмент балки, относительно любой оси равен нулю. Рассмотрим условие равновесия правой части нагруженной балки, изображенной на рис. 5.2.2.

Выберем горизонтальную ось OO' в точке с координатой l , принадлежащей нейтральному слою. Проекция этой точки на ось X имеет координату x . Ось OO' перпендикулярна плоскости центрального вертикального сечения балки (см. рис. 5.2.2, 5.2.3).

Определим момент упругих сил растяжения – сжатия, действующих на элемент балки со стороны другой его части относительно указанной оси:

$$M_T = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi dT(\xi). \quad (10)$$

Момент упругих сил M_T находим, интегрируя (10) с учетом (3) и (2):

$$M_T = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi \sigma d\xi = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\xi^2 \sigma_0(l)}{b/2} a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) d\xi =$$

$$= \frac{\sigma_0(l) a_0 b^2}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (11)$$

Момент силы F относительно выбранной оси равен:

$$M_F = F(L - x). \quad (12)$$

Масса выделенного фрагмента балки равна:

$$m_0 = \rho \frac{1}{2} (L - x) a_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) b = \frac{\rho (L - x)^2 a_0 b}{2L} = m \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad (13)$$

где ρ – плотность материала балки, m – масса всей балки.

Координату центра масс выделенной части балки найдем в соответствии с определением центра масс:

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{m_0} \int_0^{L-x} \rho a(x) \left(1 - \frac{z}{L-x}\right) b z dz = \frac{\rho a(x) b}{m_0} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3(L-x)} \right)_0^{L-x} =$$

$$= \frac{L-x}{3}, \quad (14)$$

где $z_{\text{цм}}$ – координата центра масс правой части балки, отсчитанная от точки с координатой x .

Плечо силы тяжести $m_0 g$ относительно выбранной оси OO' равно координате центра масс $z_{\text{цм}}$.

С учетом выражений (13) и (14) находим момент силы тяжести, действующей на правую часть балки, относительно оси OO' :

$$M_{m_0 g} = \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}. \quad (15)$$

Запишем условие равновесия элемента балки, левая граница которого имеет координату x , а правая совпадает с незакрепленным концом и имеет координату $x = L$:

$$M_F + M_{m_0 g} = M_T. \quad (16)$$

При записи условия равновесия балки (16), учтено, что момент силы $F_{\text{сдвиг}}$ относительно оси OO' равен нулю.

Выражение (16) с учетом соотношений (11), (12) и (15) принимает вид:

$$\frac{\sigma_0(l)a_0b^2}{6}\left(1-\frac{x}{L}\right) = F(L-x) + \frac{mg(L-x)^3}{3L^2}. \quad (17)$$

Следовательно, нормальные напряжения в слое, наиболее удаленном от нейтрального, в точке с координатой x равны:

$$\sigma_0(x) = \frac{6L}{a_0b^2} \left(F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right). \quad (18)$$

Как видим, в случае легкой балки ($m \ll F/g$) напряжение σ_0 не зависит от координаты x , следовательно, оно постоянно во всех сечениях балки, что и отражено в названии «равнопрочная балка».

Решая систему уравнений (5), (8) и (9), получим

$$\sigma_0(x) = \frac{Eb}{2} \frac{d^2u}{dx^2}. \quad (19)$$

Подставляя соотношение (19) в (18), находим:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right). \quad (20)$$

Дифференциальное уравнение (20) интегрируем в пределах от $x=0$ до $x=x'$ с учетом граничного условия $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{x'} &= \int_0^{x'} \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int_0^{x'} \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(F + \frac{mg(L-x)^2}{3L^2} \right) dx = \\ &= \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(x' \left(F + \frac{mg}{3} \right) - \frac{mgx'^2}{3L} + \frac{mgx'^3}{9L^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Интегрируя (21) по x' от 0 до x с учетом граничного условия $u(x=0) = 0$, определим стрелу прогиба для балки в точке с координатой x :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^x \frac{12L}{Ea_0b^3} \left(x' \left(F + \frac{mg}{3} \right) - \frac{mgx'^2}{3L} + \frac{mgx'^3}{9L^2} \right) dx' = \\
 &= \frac{6L}{Ea_0b^3} \left(\left(F + \frac{mg}{3} \right) x^2 - \frac{2mgx^3}{9L} + \frac{mgx^4}{18L^2} \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (22), стрела прогиба в точке с фиксированной координатой x является линейной функцией приложенной силы:

$$u(F) = AF + B, \quad (23)$$

где $A = \frac{6Lx^2}{Ea_0b^3}$ – коэффициент, зависящий от модуля Юнга.

Следовательно, зная зависимость $u(F)$, можно с помощью метода наименьших квадратов определить модуль Юнга.

В случае легкой балки выражение (22) упрощается и принимает вид:

$$u(x)|_{m=0} = \frac{6LFx^2}{Ea_0b^3}. \quad (24)$$

Стрелу прогиба в правом конце балки находим подстановкой $x = L$ в соотношение (22):

$$u(L) = \frac{6L^3}{Ea_0b^3} \left(F + \frac{mg}{6} \right). \quad (25)$$

Радиус кривизны изгиба балки R определяется соотношением:

$$dl = Rd\varphi. \quad (26)$$

В соответствии с соотношениями (5) – (8), (20) и (26) радиус кривизны равен

$$R = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}} = \frac{Ea_0b^3L}{4(3FL^2 + mg(L-x)^2)}. \quad (27)$$

Как видим, в случае легкой балки радиус кривизны R является постоянной величиной, не зависящей от выбранной точки балки. Следовательно, балка изгибается в форме дуги окружности с радиусом

$$R|_{m=0} = \frac{Ea_0b^3}{12FL}. \quad (28)$$

В этом случае легко геометрически получить связь радиуса кривизны балки со стрелой прогиба в точке с координатой x (рис. 5.2.6):

$$R^2 = (R - u(x))^2 + x^2. \quad (28)$$

Учитывая малость стрелы прогиба по сравнению с радиусом кривизны, преобразуем (27) к виду:

$$u(x) \approx \frac{1}{2R}x^2. \quad (29)$$

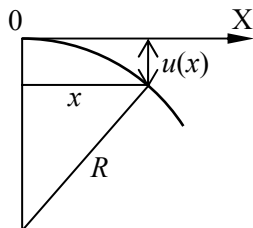


Рис. 5.2.6. Связь радиуса кривизны изгиба легкой балки со стрелой прогиба.

Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки представлен на рис. 5.2.7. На данной установке измеряется модуль Юнга четырех балок из различных материалов: углепластика, алюминия, меди и стали. Радиус кривизны определяется только для легкой балки из углепластика.

Установка для изучения упругой деформации балки с переменным поперечным сечением (рис. 5.2.7) состоит из рамы 1. Четыре балки 2, модуль Юнга материала которых необходимо определить, одним концом прочно прикреплены к раме 1. Для изгиба балки грузы 3 подвешиваются к ее незакрепленному концу. Стрела прогиба измеряется с помощью индикатора 4 часового типа (ИЧ-10). Индикатор может перемещаться вдоль балки, измеряя стрелу прогиба в разных ее точках. В комплект установки входит набор из десяти одинаковых грузов. Положение индикатора (точки, в которой определяется стрела прогиба балки) измеряется по

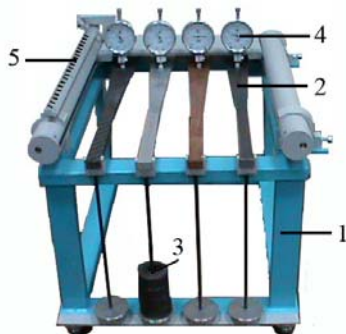


Рис. 5.2.7. Общий вид экспериментальной установки.

шкале 5, начало отсчета, которой совпадает с точкой подвеса грузов, т.е. в эксперименте измеряется величина $L - x$.

Индикатор (рис.5.2.8) имеет металлический корпус 1, в котором заключен механизм прибора. Через корпус индикатора проходит стержень 2 с выступающим наружу наконечником, всегда находящимся под воздействием пружины. Если нажать на стержень снизу вверх, он переместиться в осевом направлении и при этом повернет стрелку 3, которая передвинется по циферблату, имеющему шкалу в 100 делений, каждое из которых соответствует перемещению стержня на 0,01 мм. При перемещении стержня на 1 мм стрелка 3 сделает по циферблату полный оборот. Для отсчета целых оборотов служит стрелка 4.

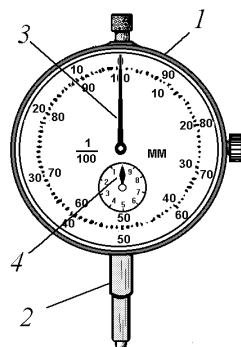


Рис. 5.2.8. Устройство часового индикатора.

Упражнение 1. Изучение деформации изгиба и определение модуля Юнга

Измерения

1. Занесите в таблицу 5.2.1 значения линейных размеров балок a_0 , b , L с указанием погрешностей их измерения для четырех различных балок, исследуемых в данной работе.

Таблица 5.2.1

Параметры установки

	a_0 , мм	b , мм	L , см
Углепластик			
Алюминий			
Медь			
Сталь			

2. Грузы, входящие в комплект установки, имеют одинаковую массу. Занесите в таблицу 5.2.2 значение массы груза $m_{гр}$ с указанием погрешности.

3. Установите планку с индикаторами на том месте, где заканчивается скос балки. Занесите в таблицу 5.2.2 значение $L - x$ с указанием погрешности.

Таблица 5.2.2.

Экспериментальные данные для определения модуля Юнга

Углепластик ($L - x = \dots$ см, $m_{гр} = \dots$ кг)						
Кол-во грузов	$u_1(x)_\uparrow$	$u(x)_\uparrow$	$u_1(x)_\downarrow$	$u(x)_\downarrow$	$\langle u(x) \rangle$	S_u
0						
1						
2						
...						
10						
Алюминий						
...						
Медь						
...						
Сталь						
...						

4. Далее аккуратно нагружайте балку при помощи грузов и вносите показания индикатора $u_1(x)_\uparrow$ в табл. 5.2.2. Стрелка в нижнем индексе стрелы прогиба $u_1(x)_\uparrow$ указывает на увеличение количества грузов.

5. Запишите показания индикатора $u_1(x)_\downarrow$ при уменьшении количества грузов в табл. 5.2.2.

6. Повторите эксперимент для балок из алюминия, меди и стали.

7. После окончания всех измерений необходимо снять грузы с держателя.

Обработка результатов

1. Найдите $u(x)_{\uparrow} = u_1(x)_{\uparrow} - u_1(x)_{\uparrow}|_{m=0}$,
 $u(x)_{\downarrow} = u_1(x)_{\downarrow} - u_1(x)_{\downarrow}|_{m=0}$ и занесите в табл. 5.2.2.

2. Найдите среднее значение стрелы прогиба $\langle u(x) \rangle$ и занесите в табл. 5.2.2.

3. Оцените погрешность измерения стрелы прогиба S_u . Результат запишите в табл. 5.2.2.

4. В процессе проведения эксперимента целенаправленно изменялась одна из величин, входящих в формулу (22), $-F = m_{\text{тр}}g$, при этом изменялась стрела прогиба. Следовательно, измерения являлись совместными, и для обработки результатов воспользуемся методом наименьших квадратов. Для каждой балки определить модуль Юнга.

Поскольку $u(F) = AF + B$, обработку проводим в рамках линейной модели:

$$y = Ax + B. \quad (23)$$

В соответствии с методом наименьших квадратов, изложенным в пособии [7] для оценки истинного значения A используем выражение

$$\hat{A} = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad (30)$$

в котором введены следующие обозначения:

$$\Delta = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \quad (31)$$

$$\Delta_A = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i. \quad (32)$$

5. Модуль Юнга (в соответствии с формулой (23)) равен:

$$E = \frac{6Lx^2}{Aa_0b^3} \quad (34)$$

и, следовательно, является результатом косвенных измерений.

Подставляя в выражение (34) оценки значений величин L, x, a_0, b, A , получите оценку истинного значения модуля Юнга

для четырех материалов: углепластика, алюминия стали и меди.
 5. Построить графики полученных с помощью метода наименьших квадратов зависимостей $u(F)$ и нанести экспериментальные точки с указанием погрешностей.

Упражнение 2. Определение радиуса кривизны в случае легкой балки

Измерения

1. Установите планку с индикаторами на том месте, где заканчивается скос балки из углепластика. Занесите в табл. 5.2.3 значение $L - x$ с указанием погрешности.

2. Записать значение стрелы прогиба $u(x)_{\uparrow}$ в табл. 5.2.3 как разницу между показаниями индикатора без нагрузки и с максимальным количеством грузов. В этом упражнении стрелка в нижнем индексе стрелы прогиба $u(x)_{\uparrow}$ указывает на то, что производится перемещение индикатора в сторону крепления балки.

3. Смещая индикатор на 0,5-1,0 см. проведите измерения стрелы прогиба в различных точках балки и занесите значения в табл. 5.2.3.

4. Запишите показания индикатора $u(x)_{\downarrow}$ при обратном его перемещении к точке подвеса грузов в табл. 5.2.3.

5. После окончания всех измерений необходимо снять грузы с держателя.

Таблица 5.2.3.

Экспериментальные данные для определения модуля Юнга

Углепластик				
	$F = 10m_{\text{гп}}g$			
$L - x$, см	$u(x)_{\uparrow}$	$u(x)_{\downarrow}$	$\langle u(x) \rangle$	S_u
0				
2				
4				
...				
10				

Обработка результатов

1. Найдите среднее значение стрелы прогиба $\langle u(x) \rangle$ и занесите в табл. 5.2.3.

2. Оцените погрешность измерения стрелы прогиба S_u . Результат запишите в табл. 5.2.3.

3. Определить радиус кривизны, используя зависимость стрелы прогиба от координаты $u(x) = \frac{1}{2R}x^2$. Обработать с помощью метода наименьших квадратов результаты измерений стрелы прогиба. В соответствии с указанной формулой стрела прогиба пропорциональна x^2 , а коэффициент пропорциональности определяет радиус кривизны. Не забудьте добавить точку соответствующую $x=0$.

4. Сравнить полученное значение радиуса кривизны R с рассчитанным по формуле:

$$R = \frac{Ea_0b^3}{12FL},$$

где E взято из первого упражнения

9. Построить график зависимости $u(x^2)$ и нанести экспериментальные точки с указанием погрешностей.

Контрольные вопросы

1. Какие виды деформаций вам известны?
2. Сформулируйте закон Гука и условия его применимости.
3. Зависит ли модуль Юнга от геометрических параметров образца?
4. Что такое стрела прогиба? Как она зависит от модуля Юнга?
5. Как влияет масса балки на стрелу прогиба и радиус ее кривизны?
6. Как влияет форма балки на стрелу прогиба и радиус ее кривизны? Сравнить балку в форме прямой треугольной призмы и прямоугольного параллелепипеда.