

*Посвящается 250-летию  
Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова*

---

**А. Н. Матвеев**

# **МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

---

Учебник для студентов  
высших учебных заведений

---

*3-е издание*



Москва  
«ОНИКС 21 век»  
«Мир и Образование»  
2003

УДК 53(075.8)  
ББК 22.21  
М33

**Матвеев А. Н.**

**М33** Механика и теория относительности: Учеб. для студентов вузов /  
А. Н. Матвеев. — 3-е изд. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС  
21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. — 432 с.: ил.

ISBN 5-329-00742-9 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)  
ISBN 5-94666-074-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Книга является 3-м изданием учебника, написанного в соответствии  
с программой курса физики для университетов и допущенного Министер-  
ством высшего и среднего специального образования для студентов вузов.

В книге наряду с классической кинематикой и динамикой излагаются  
основные положения и выводы релятивистской кинематики и динамики.  
Рассматриваются движения заряженных частиц в электромагнитных полях,  
движение искусственных спутников Земли, принцип эквивалентности и т. д.

В конце книги после изложения теоретического материала приводятся  
задачи для самостоятельного решения и ответы к ним

Учебник предназначен для студентов и преподавателей вузов и универ-  
ситетов

УДК 53(075.8)  
ББК 22.21

ISBN 5-329-00742-9  
(ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)  
ISBN 5-94666-074-8  
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Замчалова Е. А., наследник, 2003  
© ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»,  
оформление обложки, 2003

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>13</b>
<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>15</b>
1. Задачи и методы физики .. . . . .	15
Задачи физики. Абстракции и ограниченность моделей. Методы физики	
2. Физические величины и их измерение .. . . . .	18
Различие и сравнение. Сравнение и измерение. Измерение Единицы измерения. Число единиц измерения	
3. Об определении понятий и величин в физике . . . . .	22
Две категории понятий, используемых в физике. Два пути определения физических величин. О философских понятиях	
4. Системы единиц физических величин . . . . .	24
Основные и производные единицы. Размерность физической величины. Выбор основных единиц. Число основных единиц. Условность выбора системы единиц. Система единиц СИ	
<b>Глава 2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА .....</b>	<b>30</b>
5. Системы координат . . . . .	30
Пространство и геометрия. Геометрия и опыт. Материальная точка. Материальное тело. Расстояние между точками. Абсолютно твердое тело. Система отсчета. Системы координат. Число измерений пространства. Важнейшие системы координат. Преобразование координат	

<b>6. Векторы . . . . .</b>	<b>40</b>
Определение вектора. Сложение векторов и умножение вектора на число. Скалярное произведение. Векторное произведение. Представление векторов с помощью единичного вектора. Преимущества векторных обозначений. Радиус-вектор. Компоненты вектора в декартовой системе координат. Соотношение между векторами $\mathbf{i}$ , $\mathbf{j}$ , $\mathbf{k}$ . Вычисление компонент вектора. Выражение векторных операций в координатах. Преобразование декартовых координат. Преобразование компонент векторов	
<b>7. Время . . . . .</b>	<b>50</b>
Понятие времени. Периодические процессы. Синхронизация часов	
<b>8. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки . . . . .</b>	<b>55</b>
Способы описания движения. Описание движения в координатной форме. Описание движения в векторной форме. Описание движения с помощью параметров траектории. Вектор перемещения. Скорость. Ускорение	
<b>9. Движение точки по окружности . . . . .</b>	<b>63</b>
Угловая скорость. Центростремительное ускорение. Угловое ускорение. Векторы угловой скорости и углового ускорения	
<b>10. Движение твердого тела . . . . .</b>	<b>66</b>
Степени свободы. Число степеней свободы твердого тела. Движение твердого тела, закрепленного в точке. Углы Эйлера. Поступательное движение. Плоское движение. Вращательное движение. Мгновенная ось вращения	
<b>Глава 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>11. Принцип относительности . . . . .</b>	<b>76</b>
Геометрические преобразования координат. Физические преобразования координат. Инерциальные системы отсчета и принцип относительности. Ложное и истинное в физике. Физическое содержание принципа относительности	

12. Преобразования Галилея . . . . .	81
Преобразования Галилея. Инварианты преобразований. Инвариантность длины. Абсолютный характер понятия одновременности. Инвариантность интервала времени. Сложение скоростей. Инвариантность ускорения	
13. Постоянство скорости света . . . . .	84
Развитие взглядов на скорость света. Определение скорости света Ремером. Аберрация света. Различные трактовки скорости света. Идея так называемого Мирового эфира и Абсолютной скорости. Идея измерения так называемой Абсолютной скорости. Идея и схема опыта Майкельсона—Морли.	
Расчет разности хода лучей. Результат опыта Майкельсона—Морли. Интерпретация результатов опыта Майкельсона—Морли в рамках представлений об эфире. Баллистическая гипотеза. Несостоятельность баллистической гипотезы. Несовместимость постоянства скорости света с привычными представлениями.	
Идея опыта Физо. Вычисление разности хода лучей. Результат опыта Физо. Постулативный характер постоянства скорости света	
14. Преобразования Лоренца . . . . .	100
Постулаты. Линейность преобразования координат. Преобразования для $y$ и $z$ . Преобразования для $x$ и $t$ . Преобразования Лоренца. Преобразования Галилея как предельный случай преобразований Лоренца	
<b>Глава 4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА . . . . .</b>	<b>106</b>
15. Относительность одновременности . . . . .	106
Относительность одновременности.	
Относительность одновременности и причинность.	
Инвариантность интервала. Пространственноподобные и времениподобные интервалы	
16. Длина движущегося тела . . . . .	111
Определение длины движущегося тела. Формула сокращения длины движущегося тела. Изменение формы движущихся тел. Оценка величины сокращения. О реальности сокращения движущихся тел.	
О сокращении и абсолютной твердости тел	

<b>17. Темп хода движущихся часов.</b>	
<b>Собственное время . . . . .</b>	<b>116</b>
Замедление хода движущихся часов. Собственное время. Экспериментальное подтверждение замедления времени. Темп хода ускоренно движущихся часов	
<b>18. Сложение скоростей</b>	
<b>и преобразование ускорений . . . . .</b>	<b>123</b>
Формула сложения скоростей. Аберрация. Интерпретация опыта Физо. Преобразование ускорения	
<b>Глава 5. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>19. Силы. . . . .</b>	<b>127</b>
Происхождение понятия силы. Взаимодействия. Измерение силы	
<b>20. Законы Ньютона. . . . .</b>	<b>129</b>
Сколько независимых законов Ньютона существует? Масса. О третьем законе Ньютона	
<b>21. Релятивистское уравнение движения . . . . .</b>	<b>136</b>
Продольная и поперечная массы. Релятивистское уравнение движения. Несовпадение направлений силы и ускорения в релятивистском случае	
<b>22. Уравнение моментов . . . . .</b>	<b>142</b>
Момент импульса. Момент силы. Уравнение моментов	
<b>23. Уравнение движения</b>	
<b>системы материальных точек . . . . .</b>	<b>143</b>
Система материальных точек. Импульс системы. Момент импульса системы. Момент силы, действующей на систему. Уравнение движения системы материальных точек. Центр масс. Неприменимость понятия центра масс в релятивистском случае. Уравнение моментов	
<b>Глава 6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ . . . . .</b>	<b>149</b>
<b>24. Значение и содержание законов сохранения . .</b>	<b>149</b>
Содержание законов сохранения. Уравнения движения и законы сохранения. Математическая сущность механических законов сохранения	

---

<b>25. Закон сохранения импульса . . . . .</b>	<b>151</b>
Изолированная система. Закон сохранения импульса для изолированной системы. Законы сохранения для отдельных компонент импульса. Применение закона сохранения импульса	
<b>26. Закон сохранения момента импульса . . . . .</b>	<b>154</b>
Формулировка закона. Закон сохранения для отдельных компонент. О применениях закона	
<b>27. Закон сохранения энергии . . . . .</b>	<b>155</b>
Работа сил. Потенциальные силы. Математический критерий потенциальности поля. Работа в потенциальном поле. Нормировка потенциальной энергии. Энергия взаимодействия. Применения закона	
<b>28. Законы сохранения и симметрии пространства и времени . . . . .</b>	<b>169</b>
Полная энергия и энергия покоя. Кинетическая энергия. Соотношение между массой и энергией. Экспериментальная проверка соотношения между массой и энергией. Инертность потенциальной энергии. Энергия связи. Законы сохранения и симметрии пространства и времени	
<b>Глава 7. ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ . . . . .</b>	<b>178</b>
<b>29. Силы, известные в природе . . . . .</b>	<b>178</b>
Четыре типа сил, известных в природе. Гравитационное взаимодействие. Электромагнитные взаимодействия. Сильные взаимодействия. Слабые взаимодействия	
<b>30. Свойства сил тяготения . . . . .</b>	<b>183</b>
Неподвижный точечный источник сил. Силы, убывающие обратно пропорционально квадрату расстояний. Сила тяготения, действующая на материальную точку со стороны шарообразного тела. Сила со стороны шарового слоя. Сила в шаровой полости. Поле вблизи поверхности Земли. Гравитационная энергия. Гравитационная энергия шарообразного тела. Гравитационный радиус. Размеры Вселенной. «Черные дыры»	

<b>31. Движение планет и комет . . . . .</b>	<b>195</b>
Уравнение движения. Уравнение моментов. Плоскость движения. Второй закон Кеплера. Первый закон Кеплера. Третий закон Кеплера. Вращение перигелия Меркурия. Движение комет. Отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. Межпланетные перелеты	
<b>32. Движение искусственных спутников Земли . . . . .</b>	<b>213</b>
Отличие законов движения искусственных спутников Земли от законов Кеплера. Трасса спутника. Форма Земли. Атмосферное торможение	
<b>33. Проблема двух тел . . . . .</b>	<b>218</b>
Приведенная масса. Переход в систему центра масс. Приливы	
<b>Глава 8. ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ 224</b>	
<b>34. Свойства электромагнитных полей . . . . .</b>	<b>224</b>
Потенциальность электростатического поля. Сила Лоренца. Уравнение движения	
<b>35. Движение в стационарном магнитном поле . . . . .</b>	<b>227</b>
Неизменность абсолютного значения скорости. Движение в однородном магнитном поле. Движение в поперечном неоднородном магнитном поле	
<b>36. Движение в стационарном электрическом поле . . . . .</b>	<b>232</b>
Закон сохранения энергии. Движение в продольном поле. Движение в поперечном поле. Случай малого отклонения	
<b>37. Дрейф заряженных частиц . . . . .</b>	<b>235</b>
Дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях. Дрейф в неоднородном магнитном поле. Дрейф, обусловленный кривизной линии магнитной индукции	
<b>38. Адиабатическая инвариантность магнитного момента . . . . .</b>	<b>241</b>
Магнитный момент. Адиабатическая инвариантность магнитного момента. Магнитные зеркала. Радиационные пояса Земли	

---

<b>39. Движение заряженной частицы в поле электромагнитной волны . . . . .</b>	<b>249</b>
Плоская электромагнитная волна. Уравнение движения. Анализ движения	
<b>40. Движения в переменном электрическом и постоянном магнитном полях . . . . .</b>	<b>251</b>
Постановка задачи. Анализ различных случаев движения. Циклотронный резонанс	
<b>41. Ускорители заряженных частиц . . . . .</b>	<b>254</b>
Резонансный метод ускорения. Индукционный метод ускорения. Циклотрон. Вертикальная устойчивость движения частиц в циклотроне. Бетатрон. Синхротрон. Принцип автофазировки. Фазotron. Синхрофазотрон. Принцип сильной фокусировки. Линейные ускорители	
<b>Глава 9. СТОЛКНОВЕНИЯ . . . . .</b>	<b>270</b>
<b>42. Характеристика процессов столкновения . . . . .</b>	<b>270</b>
Определение понятия столкновения. Изображение процессов столкновений с помощью диаграмм. Законы сохранения при столкновениях. Закон сохранения импульса. Закон сохранения энергии. Закон сохранения момента импульса. Упругие и неупругие столкновения. Система центра масс	
<b>43. Упругие столкновения . . . . .</b>	<b>276</b>
Столкновения двух частиц в нерелятивистском случае. Лобовое столкновение. Замедление нейtronов. Комитон- эффект	
<b>44. Неупругие столкновения . . . . .</b>	<b>283</b>
Общая характеристика неупругих столкновений. Неупругие столкновения двух частиц. Поглощение фотона. Испускание фотона	
<b>45. Реакции между субатомными частицами . . . . .</b>	<b>285</b>
Пороговая энергия. Энергия активации. Переход в лабораторную систему.	
Порог рождения $\pi^0$ -мезонов. Порог рождения пары протон — антипротон	

**Глава 10. ДИНАМИКА ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ... 289**

<b>46. Нерелятивистские ракеты . . . . .</b>	<b>289</b>
Реактивное движение. Уравнение Менцерского. Формула Циолковского. Характеристическая скорость	
<b>47. Релятивистские ракеты . . . . .</b>	<b>29</b>
Уравнение движения. Зависимость конечной массы от скорости. Фотонные ракеты	

**Глава 11. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА... 298**

<b>48. Уравнения движения . . . . .</b>	<b>298</b>
Система уравнений. Замкнутость системы уравнений. Выбор системы координат	
<b>49. Момент инерции . . . . .</b>	<b>300</b>
Тензор инерции. Главные оси тензора инерции. Нахождение главных осей. Вычисление момента инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса	
<b>50. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. . . . .</b>	<b>307</b>
Вычисление в координатах. Кинетическая энергия вращения	
<b>51. Плоское движение. Маятники. . . . .</b>	<b>311</b>
Особенности динамики плоского движения. Скатывание цилиндра с наклонной плоскости. Маятник Максвелла. Физический маятник	
<b>52. Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гирокопы . . . . .</b>	<b>317</b>
Уравнения Эйлера. Свободные оси. Нутация. Гирокопы. Прецессия гирокопа. Направление и скорость пресессии. Гирокопический маятник. Яйцеобразный волчок. Несвободный гирокоп. Ларморова пресессия	

**Глава 12. ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ ... 332**

<b>53. Силы трения . . . . .</b>	<b>332</b>
Сухое трение. Жидкое трение. Трение качения. Работа сил трения	

---

54. Движение при наличии сухого трения . . . . .	335
Явление застоя. Явление заноса	
55. Движение при наличии жидкого трения . . . . .	339
Предельная скорость. Формула Стокса. Приближение к предельной скорости. Падение тел в воздухе	
56. Трение качения . . . . .	344
Доказательство существования. Механизм возникновения. Самодвижущиеся средства транспорта	
<b>Глава 13. КОЛЕБАНИЯ. . . . .</b>	<b>348</b>
57. Гармонические колебания . . . . .	348
Роль гармонических колебаний в природе. Уравнение гармонических колебаний. Гармонические функции. Амплитуда, частота, фаза. Представление гармонических колебаний в комплексной форме. Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения	
58. Собственные колебания . . . . .	358
Определение. Начальные условия. Энергия. Соотношение между смещением, скоростью и ускорением. Нелинейные колебания	
59. Затухающие колебания . . . . .	365
Трение. Уравнение движения. Частота и декремент затухания. Логарифмический декремент затухания. Случай большого трения. Расчет затухания исходя из потерь энергии на трение	
60. Вынужденные колебания. Резонанс . . . . .	370
Внешняя сила. Уравнение движения. Переходный режим. Установившиеся вынужденные колебания. Амплитудная резонансная кривая. Добротность. Фазовая резонансная кривая. Периодическая, но не гармоническая сила. Важное свойство гармонических функций. Ненпериодическая сила. Резонанс при нелинейных колебаниях	

---

<b>61. Автоколебания и параметрические колебания . . . . .</b>	<b>381</b>
Определение. Автоколебания маятника.	
Релаксационные колебания. Параметрическое возбуждение колебаний	
<b>62. Колебания связанных систем . . . . .</b>	<b>385</b>
Системы со многими степенями свободы.	
Связанные системы. Нормальные колебания.	
Колебания связанных систем	
<b>Глава 14. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА... . . . .</b>	<b>391</b>
<b>63. Силы инерции . . . . .</b>	<b>391</b>
Определение неинерциальных систем. Время и пространство в неинерциальных системах отсчета.	
Силы инерции. О реальности существования сил инерции. Нахождение сил инерции	
<b>64. Неинерциальные системы, движущиеся прямолинейно-поступательно . . . . .</b>	<b>394</b>
Выражение для сил инерции. Маятник на тележке.	
Маятник Любимова	
<b>65. Невесомость. Принцип эквивалентности . . . . .</b>	<b>397</b>
Невесомость. Гравитационная и инертная массы.	
Принцип эквивалентности. Красное смещение	
<b>66. Неинерциальные врачающиеся системы координат . . . . .</b>	<b>402</b>
Кориолисово ускорение. Выражение для кориолисова ускорения. Силы инерции во врачающейся системе координат. Равновесие маятника на врачающемся диске. Движение тела вдоль врачающегося стержня.	
Неинерциальная система координат, связанная с поверхностью Земли. Маятник Фуко. Законы сохранения в неинерциальных системах	
<b>67. Гирокопические силы . . . . .</b>	<b>412</b>
<b>ЗАДАЧИ . . . . .</b>	<b>416</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .</b>	<b>430</b>

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

---

Перед курсом физики, изучаемым в вузе, стоят следующие задачи. Во-первых, сообщить студенту основные принципы и законы физики и их математическое выражение; ознакомить его с основными физическими явлениями, методами их наблюдения и экспериментального исследования; научить правильно выражать физические идеи, количественно формулировать и решать физические задачи, оценивать порядки физических величин; дать студенту ясное представление о границах применимости физических моделей и теорий. Во-вторых, сформировать у студента определенные навыки экспериментальной работы, ознакомить его с главными методами точного измерения физических величин, простейшими методами обработки результатов эксперимента и основными физическими приборами. В-третьих, помочь студенту овладеть философскими и методологическими вопросами современной физической науки, ознакомиться с этапами истории ее развития. В-четвертых, дать студенту правильное представление о роли физики в научно-техническом прогрессе, развивать у него любознательность и интерес к научно-техническим и другим прикладным вопросам.

Решение этих задач возможно лишь при правильном сочетании экспериментального и теоретического обучения. Экспериментальное обучение осуществляется в лабораториях и обеспечивается соответствующими лабораторными руководствами. Данное пособие содержит также описание и анализ физических явлений, способы измерения физических величин, описание методов экспериментальных исследований и другие аналогичные вопросы, но лишь в аспекте теоретического обучения.

Физика является одной из фундаментальных дисциплин. Поэтому в этом пособии более подробно представлен материал об измерениях и определении физических величин, роли абстракций, методах физического исследования. Кинематика излагается не как математическая теория, а как физическая. Это позволило в самом начале книги изложить релятивистские представления о пространстве и времени и преобразования Лоренца. Благодаря этому понятия пространства, времени, движения и материи выступают в неразрывном единстве уже в рамках кинематики. Достаточно подробно анализируется физическое содержание законов Ньютона, рассматриваются с критических позиций различные пути обоснования механики, в доступной для понимания форме излагаются вопросы о связи законов сохранения с симметриями пространства и времени.

Наряду с фундаментальностью образования для современного специалиста большое значение имеет умение эффективно применять результаты физических исследований для ускорения научно-технического прогресса. В связи с этим в книге рассматриваются такие вопросы, как движение в неинерциальных системах отсчета, инерциальные навигационные системы, гироскопические явления, движение искусственных спутников Земли, динамика тел переменной массы, движение в электромагнитных полях, соотношение между массой и энергией и др.

Материал данного курса физики написан единообразно в методическом отношении. Каждая глава начинается с краткой обобщенной формулировки ее основной идеи, а каждый параграф — с ориентировки читателя на узловые вопросы излагаемого в нем материала. Систематически разбираются примеры решения наиболее важных задач, развивающих теорию. В тексте специально выделены краткие формулировки наиболее важных положений, формулы и вопросы для самостоятельного контроля. Большое число рисунков помогает восприятию материала. В приложениях содержатся необходимые справочные данные.

Общеизвестно, что теоретические знания без умения применять их для решения практических задач бесполезны. Поэтому неотъемлемой частью изучения курса общей физики является решение задач. В конце книги после изложения теоретического материала приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы на них.

# Глава 1

## ВВЕДЕНИЕ

---

1. Задачи и методы физики
2. Физические величины и их измерение
3. Об определении понятий и величин в физике
4. Системы единиц физических величин

**Ф**изические модели являются математическими, но не математика является их основой. Количественные соотношения между физическими величинами выясняются в результате измерений, наблюдений и экспериментальных исследований и лишь выражаются на языке математики. Однако другого языка для построения физических теорий не существует.

---

### 1. Задачи и методы физики

**Задачи физики.** Встречаясь в повседневной жизни и практической деятельности с различными физическими объектами, явлениями, ситуациями и связями между ними, человек создает в своем сознании модель, которая состоит из образов этих объектов, явлений, ситуаций и связей между ними, а также правил оперирования с ними. Модели физической действительности начали создаваться в сознании человека вместе с возникновением самого сознания. Поэтому нет ничего удивительного в том, что некоторые элементы этих моделей (например, понятия пространства и времени) столь глубоко укоренились в нашем сознании, что ряд философов считали их формами сознания, а не отражением в сознании элементов внешнего мира. При изучении физики как науки весьма важно всегда иметь в виду модельный характер ее построений. **Задача физики** состоит в том, чтобы создать в нашем сознании такую картину физического мира, которая наиболее полно

отражает свойства мира и обеспечивает такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира.

**Абстракции и ограниченность моделей.** В реальном физическом мире связи между явлениями и предметами столь многообразны, что охватить их все невозможно не только в практическом, но и в теоретическом принципиальном смысле. Последнее обстоятельство обусловлено неисчерпаемостью свойств материи. Поэтому при создании моделей принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. Лишь благодаря такому ограничению удается создать модель, которую возможно охватить мысленным взором. Задача отбрасывания всего несущественного для данного явления выступает в качестве важнейшего элемента физического исследования. Например, при изучении законов движения планет вокруг Солнца нет необходимости принимать во внимание давление солнечных лучей и солнечного ветра на планеты, а при рассмотрении поведения хвостов комет их учет является необходимым. Известны многочисленные факты неудачи научного поиска из-за того, что исследователи пытались учесть факторы, которые для исследуемого явления не имеют значения.

Учет лишь существенных факторов сводится к абстрагированию от реальной ситуации и созданию модели в рамках принятых абстракций.

**Используемые модели являются приближенными моделями, и их справедливость может быть гарантирована лишь в пределах применимости употребляемых абстракций. Вне этих пределов модель может стать неприменимой и даже бессмысленной.**

Поэтому в физическом исследовании весьма важно иметь на каждом этапе ясное понимание, почему считается применимой именно та модель, которая используется. Здесь существенно подчеркнуть, что один и тот же физический объект в различных ситуациях может быть представлен различными моделями. Например, при рассмотрении движения Земли вокруг Солнца можно в качестве модели принять модель материальной точки с массой Земли, расположенной в ее центре. Эта же модель Земли применима в первом приближении при рассмотрении полетов спутников вокруг Земли на достаточно большом расстоянии от нее. Однако для более точного описания движения спутников такая модель неприменима, поскольку Земля не является строгого шаром и ее масса неравномерно распределена по объему, благодаря чему сила тяготения, действующая на спутник, не сводится к силе тяготения материальной точки, расположенной в центре Земли. Кроме того, модель тяготеющей материальной точки допускает для спутников орбиты, проходящие от центра Земли на расстояниях, меньших ее радиуса, что невозможно ввиду неизбежного столкновения с поверхностью Земли.

**Методы физики.** Поскольку задача физики состоит в создании в нашем сознании модели внешнего мира, адекватно отражающей его строение и свойства, она может быть выполнена лишь в процессе практической деятельности человека по познанию и преобразованию мира. Человек от рождения не имеет в сознании никаких элементов модели внешнего мира и правил оперирования с ними. Они выработаны человечеством в результате всего исторического развития. Индивидуальный человек делает их элементами своего сознания посредством собственной деятельности и процесса обучения.

Научные исследования постоянно расширяют и углубляют физическую модель мира. Это может быть сделано лишь в результате эксперимента и наблюдения. Поэтому физика является наукой экспериментальной. Ее модели должны адекватно отражать свойства, обнаруживаемые в наблюдении и экспериментах. С другой стороны, границы применимости моделей также определяются экспериментом.

**Следовательно, экспериментальный метод физики состоит в следующем: на основе эксперимента и наблюдений создается модель, в рамках которой делаются предсказания о явлениях, проверяемых в свою очередь в экспериментах и наблюдениях; в результате этого уточняется модель, делаются новые предсказания и т. д.**

Наиболее существенный прогресс в физике происходит в двух случаях: во-первых, когда предсказания модели не подтверждаются экспериментом; во-вторых, когда открывается новый круг физических явлений, для которого нет моделей вообще. В первом случае приходится исправлять модель, а иногда заменять новой. Если замена модели связана с пересмотром основных представлений, то говорят о революции в физике. Во втором случае создается новый раздел физики.

Примером первого случая, когда пришлось пересматривать основные представления ньютоновской модели пространства и времени, является создание специальной теории относительности, примером второго случая — создание квантовой механики как нового раздела физики. В обоих случаях речь идет не об опровержении существующих моделей, а об установлении границ их применимости и разработке новых моделей, особенности которых проявляются вне области применимости старых моделей.

Экспериментальный метод физики требует, чтобы всем представлениям, понятиям и другим элементам, составляющим физическую модель, было дано однозначное истолкование. Необходимо, чтобы модель не содержала элементов, для которых не указано однозначного истолкования в виде соотношений либо с объектами, процессыми, ситуациями и т. д. реального мира, либо с другими элементами модели, которые уже определены.

Это обстоятельство имеет большое значение для изучения физики. Необходимо заботиться, чтобы каждый элемент изучаемой модели имел четко определенное содержание и ясно сформулированное соотношение с элементом реального физического мира.

## 2. Физические величины и их измерение

**Различие и сравнение.** Первым шагом в познании является установление различия между объектами физической действительности. Благодаря этому удается идентифицировать объекты изучения. После этого возникает задача сравнения. Но сравнение возможно лишь на базе общности. Поэтому должно быть найдено общее в различном. Общее и различное выступают здесь в своем диалектическом единстве. Возьмем, например, арбуз и яблоко. Это различные объекты по величине, цвету, запаху и другим свойствам. Сравнение арбуза и яблока возможно по нечто такому, что является у них общим. Например, они занимают определенный объем в пространстве и их можно сравнивать по этому признаку. Результат сравнения выражается, например, словами «арбуз больше яблока». Попытка сравнить их по цвету более трудна. Лишь воспользовавшись возможностью представить произвольный цвет в виде смеси трех цветов в определенной пропорции, можно дать разумное и однозначное сравнение цветов арбуза и яблока. Сравнить же предметы по запаху в настоящее время не представляется возможным, так как наукой еще не установлена природа запаха и неизвестно число измерений запаха, т. е. минимальное число различных запахов, комбинацией которых в соответствующих пропорциях можно воспроизвести любой запах. Поэтому сравнивать запахи можно сейчас лишь в субъективном смысле, т. е. не в смысле отношения между предметами, а в смысле отношения предметов к нашим органам чувств. Можно, например, сказать, что запах яблока более приятен, чем запах лимона (или, возможно, наоборот).

**Сравнение и измерение.** Интуитивно достаточно ясно, что означает выражение «арбуз больше яблока». Это означает возможность лишь из части материала арбуза составить тело, совпадающее по форме и размеру с яблоком, и невозможность обратной процедуры. Такое сравнение носит качественный характер. Оно несет в себе мало информации. Например, может быть известно, что данный арбуз больше некоторого другого яблока, но отсюда нельзя извлечь никакой информации о том, какое из двух яблок больше.

Поэтому возникает задача выражать результат сравнения арбуза с каждым из яблок в такой форме, чтобы можно было сделать заключение о результатах сравнения яблок между собой. Это достигается процедурой измерения, в результате которой рассматриваемое свойство характеризуется числом.

**Измерение.** Как уже подчеркивалось, речь идет о сравнении одинаковых свойств, качеств в различных предметах, явлениях, процессах и т. д. Например, наиболее общими свойствами материальных тел является их протяженность, наиболее общим свойством процессов — их длительность. Для конкретности рассмотрим одно из этих свойств, например протяженность. При этом нет необходимости входить во все детали теории измерений, а достаточно отметить лишь некоторые наиболее существенные моменты. Для сокращения выражений будем рассматривать протяженность в одном направлении, т. е. длину. Тела, протяженность которых исследуют, назовем линейками. Сравниваются две линейки следующим образом: прикладывают их друг к другу так, чтобы один из концов одной из них совпадал с каким-либо концом другой. Тогда на другом конце возможны лишь две ситуации: либо концы совпадают, либо не совпадают. Если эти концы совпадают, то, по определению, протяженности линеек равны. Если концы не совпадают, то, по определению, меньшей линейкой является та, конец которой совпадает с внутренней частью другой линейки. Ее называют большей.

Измерением физических свойств называется процедура соотнесения этим свойствам некоторых чисел таким образом, чтобы сравнение свойств можно было провести путем сравнения чисел. В рассматриваемом примере задача сводится к тому, чтобы каждой линейке присвоить некоторое число, однозначно характеризующее ее протяженность, и, наоборот, каждое число должно позволить из всех существующих линеек выбрать однозначно такие, протяженность которых определяется этим числом. Характеризуемое таким способом свойство называется физической величиной, а процедура, с помощью которой находится число, характеризующее физическую величину, — измерением.

Простейшая процедура измерения состоит в следующем. Возьмем некоторую линейку, называемую эталонной, которая была бы больше всех линеек, подлежащих сравнению (понятия «больше», «меньше» уже определены). Одному из концов эталонной линейки припишем некоторое число, а всем остальным точкам — числа, возрастающие по произвольному закону при удалении от начальной точки. Задача изучения протяженностей теперь сводится к следующему: каждую из сравниваемых линеек прикладывают одним ее концом к началу эталонной линейки. Протяженность измеряемой линейки характеризуется числом, присвященным той точке эталонной линейки, с которой совпадает другой конец измеряемой линейки. Тем самым задача сравнения различных линеек решена; большей является та линейка, у которой больше присвященное ей указанным способом число. Равные линейки имеют равные присвященные им числа. Каждая из протяженностей однозначно характеризуется числом и каждому числу однозначно соответствует определенная протяженность. Длиной линейки в этом методе измерения назы-

вается некоторое **безразмерное число**, приписанное ей указанным способом.

Рассмотрим пример применения такого подхода для измерения некоторых физических величин. Для характеристики твердости веществ существует шкала Мооса. Принимается, что из двух тел более твердым является то, которое способно процарапывать поверхность другого. По этому принципу можно расположить вещества в порядке возрастания твердости. Затем надо указать способ соотнесения числа каждой твердости. В шкале Мооса это делается следующим образом. Выбирают десять эталонных тел, расположенных в порядке возрастания твердости: от очень мягкого (тальк) до очень твердого (алмаз). Твердость каждого из них характеризуется числом, равным его порядковому номеру. Эти тела следующие: 1. Тальк. 2. Гипс. 3. Известковый шпат. 4. Плавиковый шпат. 5. Апатит. 6. Полевой шпат. 7. Кварц. 8. Топаз 9. Корунд. 10. Алмаз.

Измерение твердости некоторого тела сводится к исследованию способности этого тела царапать поверхности эталонных тел и, в свою очередь, быть процарапанным другими эталонными телами. Твердость тела характеризуется числом, большим номера, соответствующего наиболее твердому эталонному телу, которое процарапывается измеряемым телом, и меньшим номера следующего эталонного тела, которое не процарапывается измеряемым телом. Например, по этой шкале твердость платины оказывается равной 4, 3. Это означает, что платина царапает поверхность всех веществ шкалы до плавикового шпата (№ 4) включительно, но не в состоянии поцарапать апатит (№ 5) и все более твердые тела. Нет необходимости пояснять, каким образом получаются десятичные знаки в измерении твердости: процедура построения шкалы твердости между целыми числами в принципе совершенно аналогична процедуре построения всей шкалы твердости, но в качестве эталонных должны быть взяты тела, твердости которых лежат между соответствующими твердостями, выраженными целыми числами.

Применим такой метод к измерению длин. Пусть имеется обычная линейка со штрихами, расположенными через 1 см друг от друга. Начало линейки обозначим числом 0, первый штрих — числом 1, второй, третий, ...,  $n$ -й штрихи — соответственно числами 4, 9, ...,  $n^2$ . Это означает, что длина в  $n$  см в выбранном масштабе выражается безразмерным числом  $p = n^2$ . Пусть имеются две линейки длиной  $p_1$  и  $p_2$  каждая. Спрашивается, чему равна длина  $p_{1+2}$  линейки, полученная сложением линеек с длинами  $p_1$  и  $p_2$ ? Нетрудно видеть, что эта длина вычисляется по формуле  $p_{1+2} = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2$ . Таким образом, число, обозначающее сумму длин, отнюдь не равно сумме чисел слагаемых длин.

Рассмотрим другую шкалу. Пронумеруем штрихи той же линейки с сантиметровыми штрихами следующим образом: начало линейки — числом 1, первый штрих — числом 2, второй, тре-

тий, ...,  $n$ -й штрихи — соответственно числами 4, 8, ...,  $2^n$ . Это означает, что длина в  $n$  см в выбранном масштабе обозначена безразмерным числом  $p = 2^n$ . Число  $p_{1+2}$ , выражающее длину линейки, является суммой двух линеек с длинами  $p_1$  и  $p_2$  и вычисляется по формуле  $p_{1+2} = p_1 p_2$ .

В обоих рассмотренных примерах при сложении длин не происходит сложения чисел, обозначающих эти длины. В этом смысле эти шкалы неудобны. Для построения более удобной шкалы поступают следующим образом. Берется некоторая линейка, длина которой обозначается числом 1 и которая называется единицей измерения. Длинам всех других линеек приписываются числа, равные числу единичных линеек, укладывающихся на длине рассматриваемой линейки.

Таким образом, процесс измерения сводится к сравнению длин с некоторой одной длиной, принятой за единицу. Сама по себе процедура сравнения и получения соответствующего числа и составляет сущность измерения. Она может быть весьма сложной. При таком определении длина некоторой линейки выражается формулой  $l = nl_0$ , где  $n$  есть безразмерное число, показывающее, сколько раз в измеряемой длине содержится длина, принятая за единицу. Символом  $l_0$  обозначена единица длины, которая обычно имеет некоторое название, например сантиметр, метр и т. д. При таком определении чисел, которыми измеряются длины, автоматически обеспечивается требование, чтобы число, обозначающее сумму двух длин, было равно сумме чисел, обозначающих слагаемые длины. Это обстоятельство придает последнему методу измерения громадное преимущество перед предыдущим. Говоря об измерении, обычно имеют в виду именно этот метод.

Однако не следует думать, что имеется какое-то принципиальное преимущество последнего определения перед возможными предыдущими. Все эти определения равнозначны, если только они обеспечивают однозначное соответствие между измеряемыми длинами и числами, их обозначающими. Эта ситуация совершенно аналогична той, с которой приходится повседневно встречаться: некоторый факт может быть изложен одинаково точно, как, например, на русском языке, так и на английском.

**Единицы измерения.** Таким образом, для измерения некоторого физического свойства необходимо выбрать единицу измерения, т. е. конкретное физическое свойство, которому приписывается число 1. Например, для измерения свойства протяженности материальных тел выбирают конкретное материальное тело (линейку), протяженность которого принимается за единицу и обозначается числом 1. Измерение сводится к сравнению измеряемых свойств со свойством, принятым за единичное. Свойства, качества и т. д., которыми оперирует физика, называются **физическими величинами**. В этом смысле задача измерения сводится к нахождению численного значения физической величины. Численное значение

физической величины, принимаемой за единицу, по определению, равно 1.

**Число единиц измерения.** В физике изучаются многие физические величины. Каждая из них может измеряться только в своих собственных единицах. Поэтому число единиц измерения равно числу физических величин. С таким большим числом различных единиц измерения очень неудобно работать. К счастью, их число может быть уменьшено. Дело в том, что различные физические величины не являются независимыми. Между ними существуют многообразные связи, изучаемые физикой. С помощью этих связей можно одни физические величины выразить через другие и ограничиться небольшим числом физических величин, через единицы измерения которых можно выразить все остальные. Эти единицы измерения называются основными, а их совокупность — системой единиц.

**Выбор физических величин, принимаемых за основные, произведен. В принципиальном смысле все системы единиц измерения равнозначны между собой. Выбор той или иной из них диктуется соображениями удобства, традиции и т. д.**

В настоящее время достигнуто всеобщее соглашение принять в качестве основной Международную систему единиц (СИ), которая используется и в данной книге. В течение некоторого времени допускаются и другие системы единиц, а также и внесистемные единицы. Это обусловлено главным образом привычками, необходимостью использования ранее напечатанного материала и т. д. Относительно систем единиц сделаем еще одно принципиальное замечание. Благодаря связям между физическими величинами можно выразить их все через небольшое число величин, единицы которых приняты за основные. Однако не следует думать, что какая-то физическая величина измеряется в единицах другой величины. Каждая физическая величина измеряется всегда в своих собственных единицах, т. е. выражается через величину той же природы, принятой за единицу. Используя связи между физическими величинами, определяют единицы измерения одних физических величин через единицы измерения других. Измерение же физических величин всегда состоит в сравнении величин одинаковой природы.

### **3. Об определении понятий и величин в физике**

**Две категории понятий, используемых в физике.** Первая категория понятий, с которыми имеет дело физика, может быть условно названа категорией физических понятий. К ней относятся такие понятия, как сила, скорость, ускорение, электроемкость, вязкость и т. д. Об этой категории понятий люди, не занимающиеся специально физикой, обычно имеют весьма смутное и расплывчатое представление. Физик же имеет о них четкое представление, уточ-

няемое обычно количественным определением, т. е. их определением как физических величин. Однако в своей работе физик не может обойтись только этими понятиями. Он использует понятия, которые не являются специфичными для физики, а имеют общий характер. Эта категория понятий может быть условно названа категорией общеподходящих понятий. К ней относятся такие понятия, как существование, аннигиляция, истинность, причинность, детерминизм, объективность и т. д. Представления физика об этих понятиях мало чем отличаются от представлений людей, не занимающихся физикой: они могут быть как расплывчатыми, так и ясными в зависимости от обстоятельств. Многие из этих понятий рассматриваются в философии. Однако общеподходящие определения сами по себе еще недостаточны. Они должны быть конкретизированы применительно к физике. Физический анализ многих из этих понятий позволил существенно продвинуться в понимании и создании чисто физических теорий.

**Два пути определения физических величин.** Каждое физическое понятие должно иметь ясное и однозначное определение. В этом утверждении нуждается в разъяснении само слово «определение». Что значит определить физическую величину? Это значит, что надо указать то различие, что делает эту физическую величину конкретной, и то общее, что делает ее элементом всеобщей физической связи явлений. Например, считая известным определение скорости, можно выразить ускорение как скорость изменения скорости. Такие определения даются при помощи математических формул. В рассматриваемом случае ускорение записывается в виде  $w \equiv (dv/dt)$ , причем это есть именно определение величины  $w$ . Иногда, чтобы специально подчеркнуть, что некоторая формула является определением, вместо знака равенства «=» используется специальный знак « $\equiv$ ».

Ясно, что нельзя все физические величины определить указанным способом: переходя последовательно от одних к другим, мы придем, наконец, к таким величинам, которые надо задать каким-то новым способом. Например, ускорение выражается через скорость и изменение скорости (во времени). Следовательно, надо дать определение скорости и промежутков времени. Скорость выражается через отрезки пути и промежутки времени, к которым свелся вопрос об ускорении. Их необходимо фиксировать другим методом, отличным от указания на связь с известными физическими величинами. (Следует подчеркнуть, что сейчас речь идет не о пространстве и времени как философских понятиях, а о метре и секунде и об измерении длин и интервалов времени как физических величин.) Этот метод называется **операционным**: мы указываем на физический объект, свойство которого принято за единичное, и определяем процедуру измерения, с помощью которой сравниваются свойства измеряемого объекта и единичного. Например, при измерении длин необходимо указать эталон, принятый за единицу длины, и процедуру измерения других длин с помощью этого эталона. Ана-

логичным образом для измерения промежутка времени необходимо указать промежуток времени, принятый за единичный. Несколько позднее этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

Эти два метода определения физических величин существуют одновременно и дополняют друг друга.

О философских понятиях. Большинство из понятий, которые условно были названы философскими, не имеют специальных определений в физике. Считается, что смысл слов, которыми эти понятия выражаются, не требует дополнительных пояснений. Иногда могут быть сделаны ссылки на разъяснения этих понятий, которые даются в философской литературе. Однако с течением времени становится все более ясным, что физика как наука не может обойтись без анализа и осмысливания этих понятий. Гносеологическим, методологическим и философским вопросам физики посвящено много работ. При изучении физики нельзя пройти мимо этих вопросов. Развитие физики стимулирует их разработку. Например, в связи с развитием квантовой механики значительный прогресс достигнут в понимании проблем причинности, детерминизма и т. д.; развитие теории относительности связано с более глубоким осмысливанием соотношения между материей, пространством и временем, которое в философском смысле было задолго до теории относительности правильно установлено теорией диалектического материализма. Это показывает, что осмысливание и применение в рамках физики общих философских понятий тесно связаны с прогрессом физики как науки. Многие крупные достижения в развитии физики были связаны в той или иной степени с прогрессом в осмысливании понятий, которые были условно названы философскими. Теперь ясно, почему они названы философскими лишь условно: с того момента, как эти понятия становятся элементом физической теории, они конкретизируются и приобретают черты физических понятий. Например, чисто философские понятия о соотношении свободы и необходимости находят свою конкретизацию в физическом понятии статистической детерминации. Сказанное выше позволяет сделать заключение, что нельзя требовать, чтобы философским понятиям были даны такие же определения, какие даются физическим величинам, потому что философские понятия являются более широкими и применимыми не только к физическим явлениям. Для физики основная задача, связанная с философскими понятиями, состоит в нахождении такой их конкретизации, которая бы превращала их в активный элемент физического исследования и понимания материального мира.

#### 4. Системы единиц физических величин

Основные и производные единицы. Как уже подчеркивалось, должно существовать столько различных единиц измерения, сколько существует различных физических величин. Однако некоторые

физические величины определяются с помощью формул через другие физические величины. Это позволяет так называемые производные единицы измерения выразить с помощью формул через основные, которые определяются без ссылок на другие единицы измерения. Число основных единиц измерения можно сократить, пользуясь формулами, выражающими физические законы.

**Размерность физической величины.** Как уже показано выше, в физике, как правило, хотя и не всегда, принимается такое определение физической величины, при которой она задается формулой вида

$$a = m_a e_a. \quad (4.1)$$

Здесь символ  $e_a$  означает единицу измерения, т. е. физическую величину той же природы, что и измеряемая величина  $a$ , относительно которой условились, что ее численное выражение принимается равным единице. Таким образом, символ  $e_a$  фиксирует как природу измеряемой величины, так и принятый масштаб измерения. Число  $m_a$  является безразмерным числом, показывающим, из скольких единиц  $e_a$  можно составить измеряемую величину  $a$ . Кроме того, из формулы (4.1) следует, что при сложении двух величин  $a_1$  и  $a_2$  происходит сложение чисел  $m_{a1}$  и  $m_{a2}$ :

$$a_1 + a_2 = (m_{a1} + m_{a2}) e_a. \quad (4.2)$$

Как видно из изложенного ранее, требование (4.2) не является тривиальным: существуют другие возможные определения, при которых число, измеряющее сумму двух физических величин, не равно сумме чисел, измеряющих слагаемые. Природа измеряемой величины характеризуется ее **размерностью**. Обычно размерность физической величины обозначается той же буквой, заключенной в квадратные скобки. Например, если рассматриваемая величина  $a$  является длиной, то ее размерность есть длина, обозначаемая как  $L$ , что выражается равенством  $[a] = L$ . Ясно, что размерность единицы измерения та же самая, т. е.  $[e_a] = L$ . Когда мы говорим, например, что размерность данной величины есть длина, то этим характеризуем лишь природу этой величины, но ничего не говорим о масштабе той единицы, с помощью которой эта величина измеряется. Например, это может быть или метр, или сантиметр, или еще какая-нибудь другая длина, принимаемая за единицу. Размерность всех этих единиц одна и та же, т. е.  $L$ .

Рассмотрим еще две физические величины, заданные формулами:

$$b = m_b e_b, \quad c = m_c e_c. \quad (4.3)$$

Пусть имеется некоторый физический закон, связывающий между собой эти три физические величины. Необходимо ясно себе отда-

вать отчет, что закон устанавливается не в виде соотношения между физическими величинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а между измеряющими эти величины числами  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ . Пусть, например, этот закон имеет следующий вид:

$$m_c = A m_a^p m_b^q. \quad (4.4)$$

Здесь числа  $A$ ,  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  также безразмерны;  $p$  и  $q$  — показатели степени, в которую возводятся числа  $m_a$  и  $m_b$ . С помощью (4.2) и (4.3) это соотношение формально можно переписать в виде

$$\frac{c}{e_c} = A \frac{a^p}{e_a^p} \frac{b^q}{e_b^q}, \quad (4.4a)$$

или

$$c = \left( A \frac{e_c}{e_a^p e_b^q} \right) a^p b^q. \quad (4.4b)$$

Численное значение величин  $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$ , по определению, равно 1. Поэтому стоящая в скобках (4.4б) величина численно равна величине  $A$ , но является размерной. Обозначим ее через  $A'$  и запишем физический закон (4.4б) в форме

$$c = A' a^p b^q. \quad (4.4b)$$

Именно в такой, а не в безразмерной, форме (4.4) выражаются обычно физические законы.

Правила нахождения размерностей сложных выражений сводятся к следующим двум:

$$\left[ \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{[a]}, \quad [ab] = [a][b].$$

(4.5)

Поэтому размерность величины  $A$  в (4.4в) равна

$$[A'] = A \left[ \frac{e_c}{e_a^p e_b^q} \right] = [A] \frac{[e_c]}{[e_a]^p \cdot [e_b]^q} = \frac{[c]}{[a]^p [b]^q}, \quad (4.6)$$

где учтено, что  $A$  является безразмерным числом. Благодаря этому обеспечивается одинаковая размерность левой и правой частей равенства (4.4в).

**Математические равенства возможны лишь между физическими величинами одинаковой размерности.** При изменении систем единиц

измерения размерность физических величин, вообще говоря, меняется. Однако если две физические величины имеют одинаковые размерности при какой-либо одной системе единиц, то их размерности будут одинаковыми и при любой другой системе. Хорошим и быстрым контролем отсутствия грубых ошибок в формулах при вычислениях является проверка размерностей в левой и правой частях равенств, а также различных членов, входящих в суммы и разности, поскольку складывать и вычитать можно лишь физические величины одинаковой размерности. Поэтому если размерности левой и правой частей равенства не совпадают или в формуле производится вычитание или сложение величин с различными размерностями, то наверняка можно сказать, что допущена ошибка. Легче всего обнаружить ошибку, когда безразмерное число складывают с размерной величиной или вычитают из нее.

#### Выбор основных единиц.

**Выбор физических величин, единицы которых принимаются за основные, является делом соглашения. С принципиальной точки зрения нельзя указать мотивы предпочтительности одной физической величины перед другой.**

Однако с практической точки зрения не все единицы одинаково подходят для роли основных. Дело в том, что основная единица должна быть определена прямым указанием на материальный объект и физические процедуры, которые эту единицу реализуют. Поэтому возникают вопросы неизменности материального объекта, воспроизведимости процедур, удобства реализации и т. д. С учетом этих обстоятельств произвол в выборе основных единиц существенно снижается. Поэтому не удивительно, что в многочисленных системах единиц в качестве основных наряду с другими берутся почти неизменно единицы длины, времени, массы.

**Число основных единиц.** Максимальным числом основных единиц является число всех физических величин, которые измеряются; каждая физическая величина измеряется своей единицей. Например, каждая из величин: скорость  $v$ , расстояние  $l$  и время  $t$  — измеряется с помощью своей единицы. Размерность единицы измерения совпадает с размерностью физической величины. В данном случае этими размерностями являются размерности скорости  $[v] = V$ , длины  $[l] = L$  и времени  $[t] = T$ .

Изучение равномерного движения позволяет установить следующий закон:

$$l = Avt, \quad (4.7)$$

где  $A$  — размерная постоянная. Численное значение ее зависит от выбора единиц измерения скорости, длины и времени, а размерность дается формулой

$$[A] = LT^{-1}V^{-1}. \quad (4.8)$$

При данном выборе системы единиц равенство (4.7) является универсальным соотношением между  $l$ ,  $v$  и  $t$ , а постоянная  $A$  — универсальной постоянной. Пользуясь этим, можно в качестве основных величин выбрать какие-либо две (например,  $L$  и  $T$ ), а размерность и величину третьей единицы (т. е.  $V$ ) выбрать таким образом, чтобы  $A$  стала безразмерной, равной единице. Для этого в качестве единицы измерения скорости надо принять такую скорость, при которой за выбранную единицу времени проходится выбранная единица расстояния, а размерность этой единицы скорости должна быть такой, чтобы величина  $A$  в (4.8) стала безразмерной, т. е.

$$[v] = LT^{-1} \quad (4.9)$$

Благодаря такому выбору единиц измерения соотношение (4.7) принимает вид  $l = vt$ , а единица скорости перестает быть основной, превращаясь в производную единицу с размерностью  $LT^{-1}$ . В качестве основных остались две единицы — длины и времени.

Произведем дальнейшее сокращение числа единиц. Для этого воспользуемся фундаментальным законом постоянства скорости света, о котором подробно будет сказано позднее. Луч света, распространяясь со скоростью  $c$ , за время  $t$  пройдет расстояние

$$l = ct. \quad (4.10)$$

Скорость света  $c$  в этом соотношении является универсальной размernой постоянной, не зависящей ни от системы координат, ни от скорости источника или наблюдателя. Как и в предыдущем случае, выберем в качестве основной единицы, например, время, а другую единицу сделаем производной и определим так, чтобы  $c$  стала безразмерной величиной, равной единице. Для этого размерность длины должна совпадать с размерностью времени, т. е.  $[l] = T$ .

Если в качестве единицы времени выбрать 1 с, то длина  $l$  будет измеряться числом секунд, затрачиваемых светом для прохождения  $l$ . Например, длина письменного стола равна примерно  $0,5 \cdot 10^{-8}$  с (это около 1,5 м), длина земного экватора 0,13 с. Иногда такого рода единицы употреблять удобно, иногда нет. Например, в астрономии очень наглядным и широко распространенным является измерение расстояний в световых годах. Это та же система единиц, что и рассмотренная выше, только в качестве единицы времени выбран один год.

**Условность выбора системы единиц.** Все изложенное достаточно убедительно доказывает, что нет никаких принципиальных или общефилософских соображений для предпочтительного выбора основных единиц и их числа.

**С принципиальной точки зрения все системы единиц равнозначны. Они отличаются друг от друга лишь практической целесообразностью и удобством как с точки зрения их использования, так и удовлетворения тем требованиям к основным единицам, о которых говорилось выше.**

Система единиц СИ. В результате почти столетнего обсуждения научная и техническая общественность всех стран мира пришла к заключению, что наиболее целесообразной является Международная система единиц (СИ). Это соглашение оформлено решением соответствующих компетентных международных организаций, а в странах — соответствующими правительственными постановлениями. Эта система принята также в нашей стране. В настоящее время имеется достаточное число руководств по этой системе, в которых содержатся все необходимые сведения, и в этой книге они не излагаются.

# Глава 2

## КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

5. Системы координат
6. Векторы
7. Время
8. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки
9. Движение точки по окружности
10. Движение твердого тела

**К**инематика описывает конкретные механические движения, не интересуясь их причинами, вопросом осуществляемости таких движений в природе. Для нее важны лишь физическая обоснованность и математическая строгость в рамках принятых моделей.

---

### 5. Системы координат

**Пространство и геометрия.** Все материальные тела имеют протяженность, занимают определенное место в пространстве и располагаются определенным образом друг относительно друга. Эти наиболее общие свойства материальных тел в результате длительной практической деятельности отразились в сознании человека в виде понятия пространства, а математическая формулировка этих свойств была выражена в виде системы геометрических понятий и связей между ними. Формирование геометрии как науки было завершено примерно две с половиной тысячи лет тому назад Евклидом.

Понятие пространства, возникнув в сознании человека как отражение свойств материальных тел, приобрело затем у части ученых и философов относительную самостоятельность как якобы нечто такое, что существует независимо от материальных тел. В результате этого геометрия из науки о свойствах материальных тел приобрела в их сознании характер науки

о свойствах пространства, могущего существовать независимо от тел. Другая часть ученых и философов не допускала обоснования понятия пространства от свойств материальных тел. Эти две точки зрения противостояли друг другу в течение всей истории развития науки.

В древнем мире наиболее яркими представителями точки зрения о независимости пространства от материальных тел были пифагореи (около V в. до н. э.). Вот, например, как один из представителей этой школы Архип Терентский (начало IV в. до н. э.) формулирует свои взгляды: «Пространство есть первое из бытий, нечто отличное от тел и независимое от них. Его особенность в том, что все вещи находятся в нем, но само оно не находится ни в чем. Оно независимо от тел, но тела зависят от него, оно мешает объемам тел возрастать и убывать беспредельно».

Другой точки зрения придерживался Платон (V в. до н. э.). Он не допускал внутри Вселенной существования пустоты как нечто отличного от тел, однако допускал пустоту вне Вселенной, считая, что ограниченная сферическая Вселенная находится в пустом пространстве. Аристотель (IV в. до н. э.) также не допускал существования пустоты, независимой от тел. Для него возможность перемещения тел доказывает существование не пустоты, а лишь места, занимаемого телами.

Нет необходимости прослеживать весь длительный и извилистый путь развития этих взглядов. Отметим лишь, что взгляды Ньютона на пространство являются в известном смысле синтезом обеих точек зрения. Он допускает существование независимого от материальных тел пространства в виде Абсолютного пространства, которое «по самой своей сущности безотносительно к чему-либо внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным». Но наряду с Абсолютным пространством существует также Относительное пространство, которое является какой-либо частью ограниченного пространства, определяемого нашими органами чувств относительно некоторых тел.

Дальнейший крупный шаг в понимании соотношения между пространством и материальными телами был сделан творцами неевклидовой геометрии. Лобачевский выразил свое понимание этого вопроса в следующих словах: «В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственное впечатление невозможно. Все прочие понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство само собой отдельно для нас не существует».

В дальнейшем положение о неразрывности понятий пространства и материи получило свое развитие в естественнонаучном плане в теории относительности. В философском плане развитие этих идей нашло завершение в учении диалектического материализма о пространстве и времени. Для диалектического материализма про-

**странство и время являются формами существования материи и поэтому немыслимы без материи.**

Таким образом, в настоящее время можно считать достаточно надежно установленным как в естественнонаучном, так и в философском плане, что не имеет смысла говорить о свойствах пространства как о нечто таком, что существует само по себе, независимо от свойств материи и ее движения. Утверждения о «свойствах пространства» имеют смысл утверждений о соотношениях между материальными объектами. Геометрические соотношения в конечном счете — это соотношения между материальными телами.

**Геометрия и опыт.** Геометрические понятия являются абстракциями реальных соотношений между материальными телами. Поэтому по своему происхождению геометрия является наукой опытной. В качестве «строительного материала» геометрия использует идеализированные образы свойств материальных объектов реального мира, такие, как точка, линия, поверхность, объем и т. д. С помощью этих образов создается геометрическая модель реального мира. Долго казалось, что вопрос о соотношении геометрии с реальным миром даже не возникает, потому что единственной мыслимой моделью реального мира была геометрия Евклида. В дальнейшем было показано, что в принципе существует бесчисленное множество других внутренне непротиворечивых моделей — неевклидовых геометрий. Поэтому вопрос о том, какая модель, или геометрия, правильно отражает свойства реального мира, может быть решен только экспериментально путем сравнения всех выводов из этой модели с той ситуацией, какая существует в реальном мире.

Например, евклидова геометрия утверждает, что сумма углов треугольника равна  $\pi$ . Это утверждение в принципе может и должно быть проверено на опыте. В самом деле, прямая линия определяется как кратчайшее расстояние между двумя точками. Поэтому, взяв некоторые три точки, связанные с некоторым материальным телом, мы в принципе можем построить треугольник с вершинами в этих точках. При этом возникает вопрос о неизменности (твердости) масштабов измерения при переносе из одной точки в другую, о неизменности материального тела, с которым связаны рассматриваемые три точки. Ответ на этот вопрос также может быть дан только в результате эксперимента, причем не одного какого-то эксперимента, а всего экспериментального опыта. Измерение, например, длины есть сравнение длины измеряемого тела с длиной тела, принятого за единицу. Но имеет ли смысл вопрос о постоянстве длины тела, принятого за единицу? Да, имеет, причем вполне строгий. Дело в том, что измерение есть сравнение двух тел, в котором оба тела занимают одинаковое положение. Поэтому каждый единичный акт измерения некоторого тела с помощью другого, принятого за единицу, является одновременно измерением этого другого тела с помощью первого.

Принимая некоторое тело за единицу измерения и изучая с помощью него длины всех других тел, можно сделать заключение о самой единице измерения. В самом деле, представим себе, что в некоторый момент времени длины всех тел изменились, например увеличились на 10%, т. е. на 10% изменились числа, которыми выражались длины тел. Длина тела, принятого за единицу измерения, по определению, осталась равной единице. Но на это событие можно взглянуть по-другому. Можно все тела по очереди взять в виде масштаба измерения. При этом каждый раз мы придем к заключению, что в данный момент времени длины всех других тел никаких изменений не претерпели, за исключением одного тела, ранее принятого за масштабное, длина которого уменьшилась на 10%. Полная совокупность данных позволит сделать заключение, что рассматриваемое событие состояло не в увеличении длины всех тел на 10%, а в уменьшении длины тела, принятого за масштабное, на 10%. Этот пример показывает, что вопрос о неизменности масштаба имеет вполне определенный смысл.

Столь же определенный смысл имеет вопрос об абсолютно твердых неизменных телах. К нахождению неизменных масштабов или эталонов измерений человечество приближается постепенно, используя для проверки их пригодности весь совокупный опыт. В соответствии с результатами этих совокупных исследований меняется принятый за основу эталон. В течение длительного времени казалась достаточно постоянной длина земного меридиана, которая и была взята за основу эталона длины. В настоящее время стало ясно, что более надежным в смысле постоянства и неизменности является длина волны света в вакууме, испущенная вполне конкретным атомом во вполне конкретных условиях. Именно такого рода определение масштаба длины принято в СИ.

Теперь вернемся к проверке истинности евклидовой геометрии. Согласно сказанному можно утверждать, что действительно можно построить треугольник, стороны которого определены однозначно. Очевидно, далее, что с помощью соответствующих методов можно измерить все углы треугольника. Сложение полученных результатов либо даст  $\pi$ , либо не даст. Если  $\pi$  не получается, то можно уверенно утверждать, что евклидова геометрия не подходит в качестве модели реального мира и нам нужна другая модель. Аналогично может быть поставлен вопрос о проверке справедливости теоремы Пифагора. Экспериментально он сводится к построению прямоугольного треугольника и измерению длин его катетов и гипотенузы.

В настоящее время произведены многие измерения, на основе которых сделан вывод о границах применимости геометрии Евклида. Результат сформулирован так: евклидова геометрия достаточно точно описывает геометрические соотношения реального мира, начиная с расстояний, раз в десять меньших, чем размеры ядер, т. е. с расстояний  $10^{-16}$  м, до расстояний, близких к «размерам

Вселенной», т. е. расстояний  $10^{26}$  м  $\approx 10^{10}$  световых лет. Однако на этих расстояниях (порядка 10 млрд. световых лет) должна начать проявляться неевклидовость пространства, если справедливы предсказания теории относительности. Есть все основания думать, что на расстояниях, меньших  $10^{-16}$  м, геометрия Евклида продолжает быть справедливой, но неизвестно до сколь малых расстояний.

**Материальная точка.** Для построения моделей механических систем важнейшей абстракцией является понятие материальной точки. За материальную точку принимают материальное тело, размеры которого пренебрежимо малы в сравнении с расстояниями между телами. В предельном случае это понятие превращается в понятие математической точки.

**Материальное тело.** Материальное тело есть совокупность материальных точек, которые могут быть идентифицированы и отличны друг от друга. Благодаря этому можно говорить о взаимном расположении различных точек материального тела. Как показывает опыт, имеются тела, у которых различные части обладают относительной свободой перемещения друг относительно друга, как, например, жидкости, сыпучие тела и т. д., и имеются другие тела, различные части которых устойчиво сохраняют свое относительное положение, благодаря чему остается неизменной форма этих тел. Такие тела называются **твёрдыми**. Относительное постоянство взаимного расположения различных частей твердого тела позволяет говорить об относительном постоянстве протяженности твердого тела. Благодаря этому приобретает ясный смысл задача сравнения протяженностей твердых материальных тел друг с другом и становится возможным определить понятие длины твердого тела, операции измерения и дать количественную характеристику относительной неизменности протяженности данного тела и тела, принятого за единичный масштаб. Но это единичное соотношение двух тел пока не дает возможности получить количественную характеристику такого важнейшего понятия, как «абсолютно твердое тело». Необходимо исследовать взаимные соотношения многих тел и из анализа их устойчивости можно прийти к выбору тех тел, которые являются наиболее устойчивыми и неизменными. Эти тела берутся за масштаб измерения. Как это было описано раньше, само использование масштаба измерения позволяет сделать заключение о постоянстве этого масштаба и произвести его уточнение.

Таким образом, в результате всей практической деятельности в течение многих веков удалось определить те материальные тела, процессы и условия, на основе которых вводится понятие неизменной протяженности и выбирается неизменной единица длины для измерения протяженностей. Этот выбор носит исторический характер и с течением времени изменяется, поскольку новый опыт практической деятельности приносит новые выводы об относи-

тельной устойчивости предметов материального мира, окружающего человека.

**Расстояние между точками.** Материальное тело представляется как совокупность материальных точек. Выбрав единицу длины, можно измерять одномерные протяженности, т. е. длины линий, которые могут быть проведены по точкам материального тела. Любые две точки материального тела могут быть соединены друг с другом бесчисленным количеством линий, длина каждой из которых может быть измерена. Если проанализировать все эти длины, то окажется, что среди них нет наибольшей, но есть наименьшая. Эта наименьшая длина и называется расстоянием между точками, а соответствующая линия — прямой. Понятие расстояния между точками неразрывно связано с понятием материального тела. Если имеются две материальные точки, которые не являются частью какого-либо реального материального тела, то они представляются точками воображаемого материального тела.

**Абсолютно твердое тело.** Это тело, расстояние между любыми точками которого неизменно. О смысле неизменности масштаба, с помощью которого измеряются расстояния, говорилось подробно раньше.

**Система отсчета.** Воображенное абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение изучаемых изолированных или входящих в тела материальных точек, называется системой отсчета. Она распространяется на все пространства. Характеризовать точку пространства — значит задать соответствующую точку системы отсчета. Положение изучаемых материальных точек описывается положением точки системы отсчета, с которой совпадает изучаемая материальная точка. Поэтому задача состоит в том, чтобы указать, каким образом можно характеризовать положение точек системы отсчета. Это достигается введением системы координат.

**Системы координат.** В заданной системе отсчета определены понятия расстояния, линии, прямой, углов и т. д. Задача установления соотношений между ними является экспериментальной. Некоторые из соотношений кажутся настолько очевидными, что имеется искушение объявить их истинами, не требующими доказательств. Такого рода допущения называются аксиомами. Построение всего здания геометрии исходя из положенных в ее основание аксиом требует лишь логической мыслительной деятельности и непосредственно не связано с экспериментом. Различные системы аксиом приводят к различным геометриям, которые сами по себе, без соотношения с реальным миром, одинаково справедливы. Каждая из геометрий является геометрической моделью соотношений, которые, вообще говоря, могли бы существовать в реальном мире. Лишь эксперимент может решить, какая из мыслимых геометрий станет геометрической моделью реального физического мира. Как уже было сказано, из опыта известно, что в очень боль-

ших пределах расстояний, примерно от  $10^{-16}$  до  $10^{25}$  м с большой точностью справедлива геометрическая модель, которая получила название геометрии Евклида по имени ее создателя. Поэтому, если не оговорено противного, везде в последующем будет предполагаться справедливость этой модели. Это означает, что в используемых в последующем системах отсчета предполагается справедливой евклидова геометрия.

Чтобы описывать движение материальных точек и твердых тел, необходимо условиться о способе задания положения точек. Как уже говорилось, «адрес» материальной точки определяется «адресом» той воображаемой точки системы отсчета, с которой совпадает рассматриваемая материальная точка. Поэтому задача заключается в том, чтобы придать «адреса» всем точкам системы отсчета таким образом, чтобы каждая точка имела свой, отличный от других, «адрес» и каждый «адрес» приводил только к одной точке. Возможности для этого, вообще говоря, весьма многообразны. Например, в повседневной жизни в системе отсчета, связанной с Землей, различные области этой системы отсчета, именуемые квартирами, имеют адреса, состоящие из названия страны, города, улицы, номера дома и номера квартиры. Хорошо известно, что такой способ придания адресов действует вполне удовлетворительно, но лишь для обозначения адресов очень ограниченного числа областей системы отсчета. Например, некоторая конкретная лужайка в некотором парке некоторого города не имеет адреса. Поэтому такая система адресовки недостаточно обща и имеет много других недостатков. В физике нужна такая система, которая обеспечивала бы адрес не областей, а точек. Для этого вводится система координат.

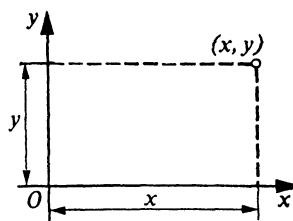
Введение ее есть соглашение о способе приписывания «адресов» различным точкам системы отсчета. Например, достигнуто соглашение, что «адреса» точек земной поверхности выражаются числами, имеющими размерность углового градуса, называемыми широтой и долготой. Каждая точка земной поверхности лежит на пересечении меридиана и параллели, и ее «адрес» дается двумя числами, которые по определенному правилу приписаны этим меридианам и параллелям. Правила, по которым различным меридианам и параллелям приписываются числа, являются произвольными. Важно лишь, чтобы была обеспечена взаимная однозначность: каждому меридиану должно быть приписано вполне определенное число, и по числу можно найти вполне определенный меридиан. Например, вместо того чтобы характеризовать долготу углом, образуемым плоскостью рассматриваемого меридиана и плоскостью некоторого другого меридиана, принятого за начальный, можно бы характеризовать ее, например, расстоянием по экватору от точки пересечения экватора меридианом, принятым за начальный, и точкой пересечения экватора меридиональной плоскостью, проходящей через рассматриваемую точку. Тогда пришлось бы говорить, например,

что некоторая точка находится на стольких-то километрах долготы и стольких-то градусах широты. Конечно, никаких принципиальных преимуществ или недостатков различные способы введения систем координат не имеют друг перед другом. Но в практическом смысле различные системы координат далеко не равнозначны. Успех в решении той или иной задачи часто зависит от удачного выбора системы координат.

**Число измерений пространства.** В рассмотренном примере введения системы координат на поверхности Земли в виде долгот и широт было видно, что положение каждой точки характеризуется двумя числами. Совершенно безразлично, какие это числа, существенно лишь, чтобы способ их задания обеспечивал непрерывность и однозначность адресов. Существенно также, что этих чисел должно быть два. Это обуславливается тем, что рассматривалась поверхность Земли. Положение точки на поверхности характеризуется двумя числами. Иначе это обстоятельство выражается утверждением, что поверхность есть пространство двух измерений.

Пространство, в котором мы живем, является трехмерным. Это означает, что положение точек в нем характеризуется тремя числами. Какими именно числами, зависит от системы координат, с помощью которой описывается положение точек пространства.

Может быть пространство большего числа измерений. Если положение точек пространства характеризуется  $n$  числами, то говорят о  $n$ -мерном пространстве. Часто в физике, рассматривая некоторые явления, зависящие не от пространственных переменных, говорят о пространстве этих непространственных переменных. Это очень удобно и не вызывает недоразумений. Например, важную роль в физике играет импульс частиц. Поэтому иногда оказывается удобным говорить о пространстве



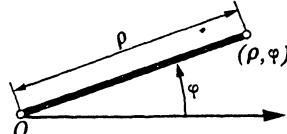
## 1.

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Двумя числами, характеризующими положение точки, являются расстояния  $x$  и  $y$  от начала координат до проекций ее на оси координат



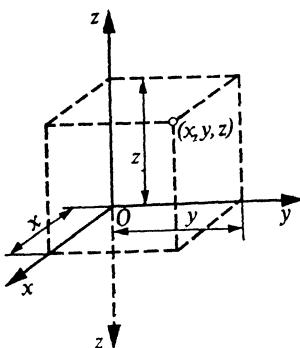
Правая система прямоугольных декартовых координат никакими движениями в пространстве не может быть совмещена с левой.



## 2.

Полярная система координат

Двумя числами, характеризующими положение точки на плоскости, являются расстояние  $\rho$  до начала координат и угол  $\varphi$  между лучом, проведенным из начала координат, и отрезком прямой, соединяющим начало координат и точку



3.

**Прямоугольная декартова система координат в пространстве**

Тремя числами, характеризующими положение точки, являются расстояния  $x$ ,  $y$  и  $z$  от начала координат до проекций ее на оси координат

?

- 1 Каков смысл утверждений о геометрических свойствах пространства?
- 2 В чем смысл вопроса об истинности или ложности той или иной геометрии?
- 3 В каких пределах в настоящее время доказана справедливость геометрии Евклида?
- 4 Что такое абсолютно твердое тело и какова роль этого понятия в развитии геометрических представлений?
- 5 В чем смысл представления о неизменности масштаба, принятого за единицу измерения, поскольку в этом своем качестве он неизменен по определению?

импульсов. Ему приписывается число измерений, равное числу независимых чисел, которые характеризуют импульсы частиц рассматриваемой системы. Такое использование обобщенного понятия пространства во многих случаях позволяет сократить словесные выражения и сделать все рассуждения более понятными и наглядными. Поэтому оно употребляется очень часто и с ним необходимо освоиться.

**Важнейшие системы координат.** Из бесчисленного множества возможных систем координат наиболее простыми и важными, чаще всего используемыми на практике, являются лишь немногие. Сведения о большинстве из них можно найти в справочниках, а запомнить необходимо следующие системы координат:

1) на плоскости:

1а) **прямоугольная декартова** (рис. 1), в которой двумя числами  $(x, y)$ , характеризующими положение точки, являются длины  $x$  и  $y$ ;

1б) **极坐标** (рис. 2), в которой двумя числами  $(\rho, \phi)$ , характеризующими положение точки, являются длина  $\rho$  и угол  $\phi$ ;

2) в пространстве:

2а) **прямоугольная декартова** (рис. 3), в которой тремя числами  $(x, y, z)$ , характеризующими положение точки, являются длины  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Следует отметить, что возможны две прямоугольные декартовы системы координат, которые никакими движениями в пространстве не могут быть совмещены друг с другом. Одна из них называется правой, другая — левой. Они различаются взаимной ориентацией осей. В правой системе направление оси  $z$  относительно осей  $x$  и  $y$  определяется правилом правого винта: если винт с правой нарезкой перемещать вдоль оси  $z$ , то положительные значения оси должны совпадать с движением винта, если его головка поворачивается

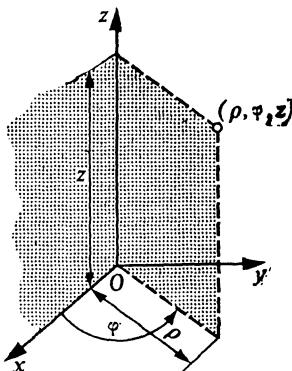
в том же направлении вокруг оси  $z$ , в каком должна вращаться плоскость  $(x, y)$ , чтобы при угле поворота оси  $x$  на  $90^\circ$  положительные направления этой оси и оси  $y$  совместились. На рис. 3 изображена правая система. Пунктиром показано направление оси  $z$  в левой системе при неизменных осях  $x$  и  $y$ . Нетрудно видеть, что никакими движениями в пространстве правая система не может быть совмещена с левой. Например, если на рис. 3 ось  $z$  правой системы направить вниз, то оси  $x$  и  $y$  поменяются местами. Необходимо всегда иметь в виду, какая система используется, потому что при переходе от правой системы к левой меняются знаки в некоторых формулах. Практически в подавляющем большинстве случаев, как и в этой книге, применяется правая система;

2б) цилиндрическая (рис. 4), в которой тремя числами  $(\rho, \varphi, z)$ , характеризующими положение точки, являются длина  $\rho$ , угол  $\varphi$  и длина  $z$ ;

2в) сферическая (рис. 5), в которой тремя числами  $(r, \varphi, \theta)$ , характеризующими положение точки, являются длина  $r$ , углы  $\varphi$  и  $\theta$ .

Числа, определяющие положение точки в некоторой системе координат, называются координатами точки. Часто для удобства координаты точки обозначаются одной и той же буквой, но с различными индексами, например, как  $(x_1, x_2, x_3)$ . Эти числа означают в декартовой системе координат:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , в цилиндрической:  $x_1 = \rho$ ,  $x_2 = \varphi$ ,  $x_3 = z$ , в сферической:  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \varphi$ ,  $x_3 = \theta$ .

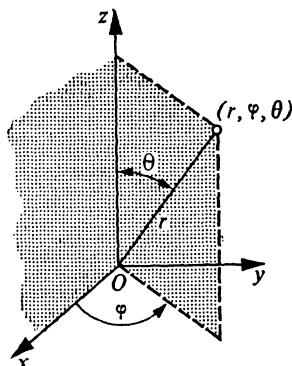
**Преобразование координат.** Формулы, связывающие координаты точки в одной системе с ее координатами в другой, называются преобразованием координат. Приведем здесь формулы преобразования между цилиндрическими, сферическими и декартовыми координатами, которые непосредственно могут быть получены из рассмотрения рис. 4 и 5.



4.

#### Цилиндрическая система координат

Тремя числами, характеризующими положение точки, являются расстояние  $\rho$ ,  $z$  до начала координат и угол  $\varphi$  между отрезком  $\rho$  и осью  $x$



5.

#### Сферическая система координат

Тремя числами, характеризующими положение точки, являются расстояние  $r$  до начала координат и углы  $\varphi$ ,  $\theta$

Преобразование от цилиндрических к декартовым координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (5.1)$$

Преобразование от сферических к декартовым координатам:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (5.2)$$

Важное практическое значение имеют формулы преобразования от одной декартовой системы координат к другой, когда их начала и направления осей не совпадают. Однако этот случай удобнее рассмотреть, пользуясь векторными понятиями.

## 6. Векторы

**Определение вектора.** Многие физические величины характеризуются одним числом. К ним, например, относятся температура, выражаемая числом градусов в определенной шкале, масса — числом граммов и т. д. Такие величины называются скалярами. Для характеристики многих других физических величин необходимо задать несколько чисел. Например, скорость определяется не только численным значением, но и направлением. Нетрудно видеть, например, на рис. 5, что направление в пространстве полностью задается двумя числами — углами  $\varphi$  и  $\theta$ . Поэтому скорость характеризуется всего тремя числами. Такие величины называются векторами. Можно сказать, что вектор определяется абсолютным значением и направлением. Однако не всякая физическая величина, характеризуемая тремя числами, является вектором. Чтобы быть вектором, эти три числа должны преобразовываться при переходе от одной системы координат к другой. Здесь мы лишь отметим это обстоятельство, оставив разъяснение его смысла до более позднего времени.

Вектор изображается направленным отрезком, длина которого в некотором масштабе равна представляемой вектором физической величине, а стрелка показывает ее направление. Векторы будут обозначаться в книге жирным шрифтом, например вектор  $A$ , а их абсолютное численное значение — либо той же жирной буквой, заключенной между двумя вертикальными черточками:  $|A|$ , либо той же буквой, что и вектор, но светлым шрифтом:  $A$ .

**Сложение векторов и умножение вектора на число.** Одной из важных физических реализаций понятия вектора является смещение. Если некоторая материальная точка перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  (рис. 6, a), то ее перемещение характеризуется вектором  $\overline{M_1 M_2}$ , который изображается отрезком, соединяющим точки  $M_1$  и  $M_2$  и направленным от  $M_1$  к  $M_2$ . Если затем точка из  $M_2$  перемещается в  $M_3$ , то эта последовательность двух перемещений, т. е. сумма двух перемещений, эквивалентна одному

перемещению  $\overrightarrow{M_1 M_3}$ , что записывается в виде векторного равенства:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 M_3} = \overrightarrow{M_1 M_3}. \quad (6.1)$$

Эта формула выражает правило сложения векторов, которое иногда называется правилом параллелограмма, поскольку сумма векторов равна диагонали параллелограмма, стороны которого образованы слагаемыми векторами. Эта формула сложения, по определению, применима к любым векторам. На рис. 6, б изображено сложение произвольных векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

На примере сложения перемещений видно, что сумма векторов не зависит от порядка следования перемещений, т. е. от порядка слагаемых векторов перемещений (рис. 7, а):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \quad (6.2)$$

Это правило распространяется на сложение векторов произвольной природы.

Умножение вектора на число сводится к умножению абсолютного значения вектора на это число без изменения направления, если число положительное, и с изменением направления на обратное, если число отрицательное (рис. 7, б).

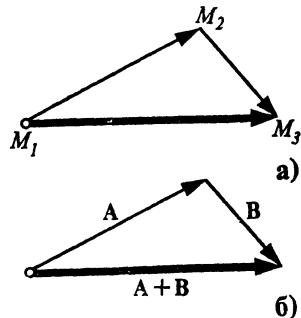
**Скалярное произведение.** Скалярным произведением ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ) двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называется число, равное произведению абсолютных значений векторов на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}). \quad (6.3)$$

Нетрудно проверить, что для скалярного произведения справедливы следующие правила:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= (\mathbf{B}, \mathbf{A}), \\ (\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A}, \mathbf{B}) + (\mathbf{A}, \mathbf{C}), \\ (\mathbf{A}, \alpha \mathbf{B}) &= \alpha (\mathbf{A}, \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $\alpha$  — произвольное число.



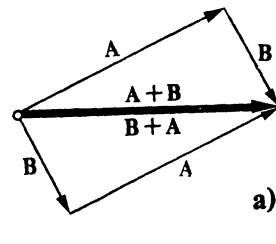
## 6.

### Сложение векторов

Правило сложения векторов является естественным обобщением очевидного правила сложения перемещений

!

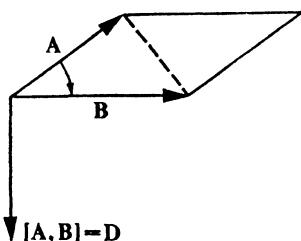
Направление в пространстве определяется двумя числами.



## 7.

Коммутативность сложения векторов (а) и умножение вектора на число (б)

Сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых. При умножении вектора на отрицательное число его направление меняется на обратное



8.

**Векторное произведение**  
 $[A, B] = D$

Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы

**Векторное произведение.** Векторным произведением  $[A, B]$  векторов  $A$  и  $B$  называется вектор  $D = [A, B]$ , определяемый следующим образом (рис. 8):

1) он перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы  $A$  и  $B$ , и направлен в ту сторону, в которую будет двигаться винт, если его головку вращать в том же направлении, в каком необходимо поворачивать вектор  $A$  для совпадения с вектором  $B$  по кратчайшему пути. Иначе говоря, векторы  $A$ ,  $B$  и  $[A, B]$  друг относительно друга ориентированы так же, как и положительные направления осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  правой системы координат;

2) по абсолютному значению он равен произведению абсолютных значений перемножаемых векторов на синус угла между ними:

$$|D| = |A, B| = |A| |B| \sin(\hat{A}, B). \quad (6.5)$$

!

*Перемещение не есть отрезок траектории.*

*Правило сложения векторов есть определение, целесообразность которого подтверждается свойствами ряда простейших физических величин.*

*Физическая величина, характеризующаяся тремя числами, чаще всего является вектором. Однако это не всегда. Чтобы быть вектором, она должна определенным образом преобразовываться при переходе от одной системы координат к другой.*

Здесь существенно, что угол между векторами  $A$  и  $B$  отсчитывается от первого сомножителя  $A$  ко второму  $B$  по кратчайшему расстоянию, т. е. угол меньше или равен  $\pi$ , благодаря чему синус в (6.5) не может быть отрицательным. Как видно из (6.5), можно также сказать, что абсолютное значение векторного произведения равно площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах (рис. 8).

Легко проверить следующие свойства векторного произведения:

$$[A, B] = -[B, A],$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C],$$

$$[A, \alpha B] = \alpha [A, B].$$

(6.6)

**Представление векторов с помощью единичного вектора.** Направление вектора можно указать с помощью единичного безразмерного вектора. Любой век-

тор  $\mathbf{A}$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{A}|} |\mathbf{A}| = \mathbf{n} |\mathbf{A}| = \mathbf{n} \mathbf{A}, \quad (6.7)$$

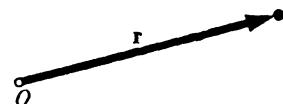
где  $\mathbf{n} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$  есть единичный безразмерный вектор, фиксирующий направление вектора  $\mathbf{A}$ .

**Преимущества векторных обозначений.** Понятие вектора и все связанные с ним операции вводятся независимо от какой-либо системы координат. Благодаря этому имеется возможность оперировать непосредственно физическими величинами, не обращаясь к их выражению в какой-либо конкретной системе координат. Различные соотношения между физическими величинами в векторной форме обычно имеют значительно более простой и наглядный вид, чем в соответствующей координатной форме. Все это составляет большое преимущество векторных обозначений и обеспечивает им широкое применение. С другой стороны, очень часто проведение конкретных численных расчетов гораздо проще в координатной форме, где они носят чисто арифметический характер. Если расчеты проводить непосредственно по векторным формулам, не обращаясь к координатной системе, то наряду с арифметикой необходимо зачастую пользоваться довольно сложными пространственными геометрическими представлениями, что не всегда удобно. Поэтому важно уметь записывать все векторные выражения и операции в координатной форме. В первую очередь необходимо это уметь делать в декартовых координатах.

**Радиус-вектор.** Положение точки характеризуется тремя числами в соответствующей системе координат. Каждую точку можно представить себе как конечный пункт перемещения из некоторой начальной, называемой началом отсчета, и характеризовать вектором перемещения, соединяющим начальную и рассматриваемую



*Сумма и скалярное произведение векторов не зависят от порядка векторов.*



## 9.

### К понятию радиуса-вектора

Положение любой точки пространства относительно точки  $O$ , принятой за начальную, полностью характеризуется ее радиусом-вектором  $r$



- 1      Какие два способа геометрического построения суммы векторов Вы знаете?
- 2      Зависит ли скалярное произведение от порядка сомножителей? Докажите свой ответ.
- 3      Как зависит векторное произведение от порядка сомножителей?
- 4      Изменится ли определение векторного произведения, если вместо правой декартовой системы координат пользоваться левой?
- 5      Что такое компоненты вектора? По какому правилу определяется их знак?

!

*Радиус-вектор не связан с существованием какой-либо системы координат.*

*Если выбрать конкретную систему координат, то радиус-вектор можно выразить в этой системе.*

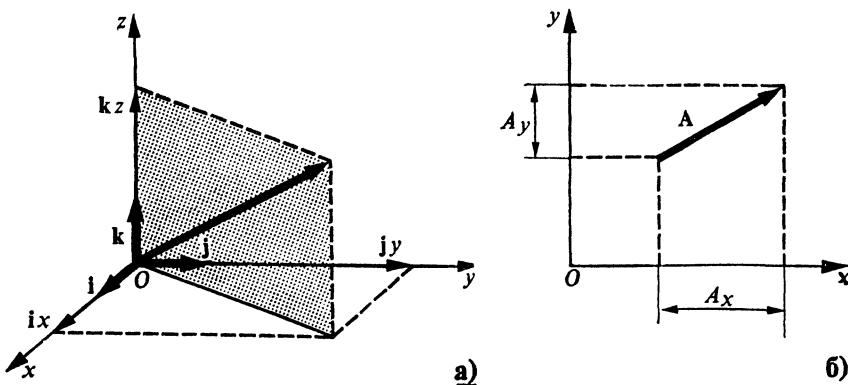
#### 10.

**Компоненты радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  в пространственной декартовой системе координат (а) и произвольного вектора  $\mathbf{A}$  в той же системе на плоскости (б)**

Компонентами вектора называются его проекции на оси координат. Компоненты являются алгебраическими величинами, и их знак определяется знаком косинуса угла между направлениями вектора и единичного вектора соответствующей оси. Компоненты радиуса-вектора — это координаты точки, характеризуемой им

точки (рис. 9). Этот вектор называется радиусом-вектором. Если положение точки задается радиусом-вектором, то нет необходимости использовать какую-либо систему координат. При этом упрощаются и делаются более наглядными многие физические соотношения. Поэтому, как правило, мы будем везде оперировать с векторами, а положение точек характеризовать их радиусами-векторами. Переход к координатам при необходимости может быть всегда осуществлен по раз и навсегда установленным формулам, которые сейчас будут выведены.

**Компоненты вектора в декартовой системе координат.** Пусть некоторая точка  $O$  принята за начало отсчета. Возьмем (прямоугольную) декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой  $O$ . Положение любой точки можно охарактеризовать либо ее радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , либо тремя числами  $(x, y, z)$ , являющимися декартовыми координатами этой точки. Установим связь между  $\mathbf{r}$  и числами  $x, y, z$ . Для этого полезно ввести единичные безразмерные векторы, направленные вдоль положительных значений осей  $x, y, z$  и обозначаемые соответственно как  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Принимая во внимание правило сложения векторов (6.1) и формулу (6.7), можно, как это непосред-



ственno видно на рис. 10, а, представить радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в виде суммы трех векторов ( $\mathbf{i}x$ ,  $\mathbf{j}y$  и  $\mathbf{k}z$ ), также направленных вдоль осей координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (6.8)$$

Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются компонентами радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Они совпадают с координатами точки, которую характеризует  $\mathbf{r}$ .

Не только радиус-вектор, но и любой другой вектор может быть представлен в виде суммы векторов, направленных вдоль осей координат (рис. 10, б):

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z. \quad (6.9)$$

Числа  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  называются компонентами вектора  $\mathbf{A}$  вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для того чтобы уметь вычислять компоненты вектора и выражать все векторные операции в координатной форме, необходимо знать несколько соотношений между единичными векторами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

**Соотношение между векторами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .** Принимая во внимание, что эти векторы взаимно перпендикулярны и единичны, получаем:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad (6.10)$$

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0, \quad (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = 0, \quad (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0.$$

Согласно определению векторного произведения, сразу находим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{i}, \mathbf{j}] &= \mathbf{k}, \quad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}, \\ [\mathbf{i}, \mathbf{i}] &= 0, \quad [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = 0, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

**Вычисление компонент вектора.** Умножая скалярно левую и правую части равенства (6.9) последовательно на  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  и принимая во внимание (6.10), сразу получаем:

$$A_x = (\mathbf{A}, \mathbf{i}), \quad A_y = (\mathbf{A}, \mathbf{j}), \quad A_z = (\mathbf{A}, \mathbf{k}). \quad (6.12)$$

Нетрудно видеть, что компоненты векторов по осям декартовой прямоугольной системы координат являются не чем иным, как проекциями этих векторов на оси, вычисленные с учетом знака. Например,

$$A_x = (\mathbf{A}, \mathbf{i}) = |\mathbf{A}| |\mathbf{i}| \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{i}}) = |\mathbf{A}| \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{i}}),$$

где  $(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{i}})$  — угол между вектором  $\mathbf{A}$  и направлением оси  $x$ , что и доказывает сделанное утверждение. Аналогичным образом обстоит дело с другими компонентами.

**Выражение векторных операций в координатах.** Для получения этих выражений необходимо векторы представить в виде (6.9) и

воспользоваться полученными ранее формулами для единичных векторов. Пусть задано:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= iA_x + jA_y + kA_z, \\ \mathbf{B} &= iB_x + jB_y + kB_z. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Складывая векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , получаем

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = i(A_x + B_x) + j(A_y + B_y) + k(A_z + B_z). \quad (6.14)$$

Таким образом, компоненты суммы двух векторов равны сумме соответствующих компонент слагаемых:

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z. \quad (6.14a)$$

Нетрудно видеть, что аналогичным образом умножение вектора на число сводится к умножению каждой из его компонент на это число. Для скалярного произведения с учетом (6.10) получим следующее выражение:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (6.15)$$

Для векторного произведения прямое вычисление с учетом (6.12) дает

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = i(A_y B_z - A_z B_y) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x). \quad (6.16)$$

Поэтому можно написать:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad (6.16a)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

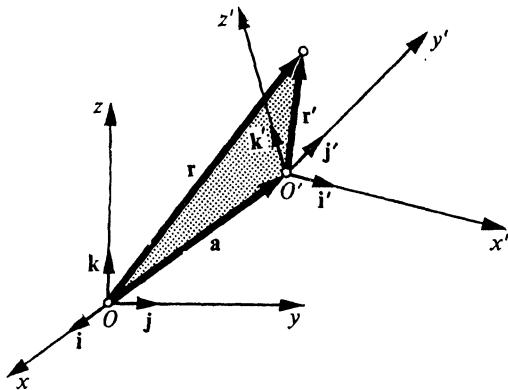
**Преобразование декартовых координат.** Используя векторные представления, легко найти формулы преобразования координат при переходе от одной декартовой системы к другой. В общем случае не совпадают ни начало систем координат, ни направление осей, как это изображено на рис. 11. Положение начала штрихованной системы координат относительно начала ненешированной задается вектором  $\mathbf{a}$ . Из чертежа непосредственно видно, что радиусы-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , характеризующие положение точки в ненешированной и штрихованной системах, связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'. \quad (6.17)$$

Если  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  выразить через их компоненты по соответствующим осям координат, то можно написать:

$$ix + jy + kz = \mathbf{a} + i'x' + j'y' + k'z'. \quad (6.18)$$

Для нахождения связи между координатами точек необходимо скалярно умножить обе части этого равенства на соответствующий единичный вектор. Например, чтобы найти координату  $x$ ,



11.

## Преобразование координат

Вектор  $\mathbf{a}$  характеризует положение начала штрихованной системы координат относительно нештрихованной, а косинусы углов между осями той и другой систем определяют их взаимную ориентировку в пространстве

надо произвести это умножение на вектор  $i$ . В результате получим

!

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{i}) + (\mathbf{i}', \mathbf{i}) \mathbf{x}' + (\mathbf{j}', \mathbf{i}) \mathbf{y}' + (\mathbf{k}', \mathbf{i}) \mathbf{z}',$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & a_x + \cos(\widehat{\mathbf{i}' \mathbf{i}}) \mathbf{x}' + \cos(\widehat{\mathbf{j}' \mathbf{i}}) \mathbf{y}' + \\ & + \cos(\widehat{\mathbf{k}' \mathbf{i}}) \mathbf{z}'. \end{aligned} \quad (6.18a)$$

*Радиус-вектор, по определению, исходит из начала координат. Другие векторы имеют начало, вообще говоря, в других точках.*

Таким образом, для преобразования необходимо знать углы между осями координат и взаимное расположение начал координат.

Аналогичным образом находим выражение для координат  $y$  и  $z$ . Чтобы найти обратные формулы преобразования для  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , необходимо произвести скалярное умножение на соответствующий единичный вектор  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ . Например, умножая обе части (6.18) на  $i'$ , найдем

$$(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \mathbf{x} + (\mathbf{j}, \mathbf{i}') \mathbf{y} + (\mathbf{k}, \mathbf{i}') \mathbf{z} = (\mathbf{a}, \mathbf{i}') + \mathbf{x}',$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = & -a'_x + \cos(\widehat{\mathbf{i}' \mathbf{i}}) \mathbf{x} + \cos(\widehat{\mathbf{j}' \mathbf{i}}) \mathbf{y} + \\ & + \cos(\widehat{\mathbf{k}' \mathbf{i}}) \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

В этой формуле  $a'_x = (\mathbf{a}, \mathbf{i}')$  есть  $x$ -я компонента вектора  $\mathbf{a}$  в штрихованной системе координат. Этот вектор направ-

*Связь положения точки относительно различных начал с помощью радиусов-векторов очень проста. Эта связь выражается через величины конкретных систем координат с помощью формул преобразования координат и имеет более сложный вид.*

лен к началу штрихованной системы. Если изменить его направление так, чтобы он начинался в точке  $O'$  штрихованной системы координат и заканчивался в точке  $O$  нештрихованной, то в формуле (6.19) в первом члене правой части знак изменится на обратный и она станет полностью аналогичной формуле (6.18а). Если начала систем координат совпадают, то вектор  $a$  обращается в нуль.

Чтобы упростить формулы преобразования, введем обозначения:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3;$$

$$x' = x_{1'}, \quad y' = x_{2'}, \quad z' = x_{3'};$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{e}_{1'}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{e}_{2'}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{e}_{3'},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{n'}}) = \alpha_{mn'} \ (m = 1, 2, 3; n' = 1', 2', 3').$$

Обозначение штрихом отнесено к индексу, что, как это сейчас будет видно, более удобно. Тогда преобразования (6.18а) при  $\mathbf{a} = 0$  запишутся следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \alpha_{13} \cdot x_3, \\ x_2 &= \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \alpha_{23} \cdot x_3, \\ x_3 &= \alpha_{31} \cdot x_1 + \alpha_{32} \cdot x_2 + \alpha_{33} \cdot x_3. \end{aligned}} \quad (6.20)$$

В таком виде их очень просто запомнить. Аналогично можно записать преобразования (6.19). Рекомендуется сделать это в качестве упражнения.

Рассмотрим применение формул (6.20) для двухмерного случая ( $x_3 = 0, x_{3'} = 0$ ), изображенного на рис. 12:

$$\alpha_{11'} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{1'}}) = \cos \varphi, \quad \alpha_{12'} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2'}}) = -\sin \varphi,$$

$$\alpha_{21'} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{1'}}) = \sin \varphi, \quad \alpha_{22'} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{2'}}) = \cos \varphi.$$

Поэтому формулы преобразования (6.20) принимают следующий вид:

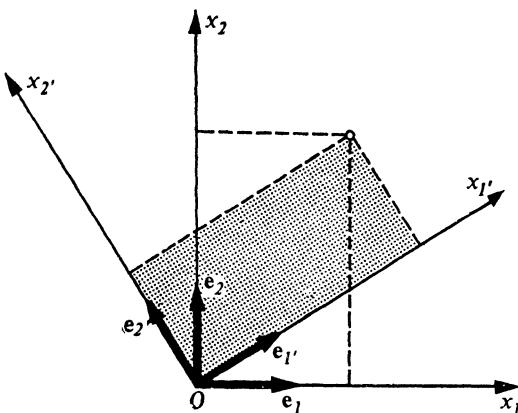
$$x_1 = \cos \varphi \cdot x_{1'} - \sin \varphi \cdot x_{2'},$$

$$x_2 = \sin \varphi \cdot x_{1'} + \cos \varphi \cdot x_{2'}.$$

**Преобразование компонент векторов.** Раньше уже было отмечено, что не всякая физическая величина, характеризуемая тремя числами, является вектором.

**Чтобы физическая величина была вектором, необходимо, чтобы эти три числа вели себя при переходе из одной системы координат в другую как компоненты радиуса-вектора при преобразованиях [6. 20].**

Формулы (6.20) описывают преобразования компонент радиуса-вектора при произвольных относительных движениях систем координат, начала которых совпадают. Можно показать, что эти дви-



12.

### Вращение системы координат

В двухмерном случае при совпадении начал взаимная ориентировка осей координат полностью характеризуется углом поворота между осями  $x_1$  и  $x_1'$ .

жения сводятся к вращениям. Естественно потребовать, чтобы при указанном преобразовании координат компоненты любого вектора преобразовывались бы по тем же формулам, что и компоненты радиус-вектора, т. е. по формулам (6.20), в которые вместо величин  $x_m$  и  $x_{m'}$  должны входить соответствующие компоненты вектора, а коэффициенты  $\alpha_{nm'}$  должны быть теми же самыми. Если три числа, характеризующие физическую величину, преобразуются по указанным формулам, то она называется вектором, а числа — компонентами вектора.

Может случиться, что физическая величина в некоторой системе координат определяется тремя числами, однако при переходе в другую систему координат преобразуется не по формулам вида (6.20), а по некоторым другим. Тогда эта величина не будет вектором. Например, известна важная физическая величина, описывающая поведение твердого тела при вращениях и называемая моментом инерции. В системе координат, оси которой совпадают с так называемыми главными осями, момент инерции задается тремя числами  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ . Однако при переходе в другую систему координат эти числа преобразуются не по формулам

?

- 1 Какие компоненты имеет радиус-вектор?
- 2 В чем состоит метод нахождения координатных выражений для векторных операций?
- 3 Каким условиям должны удовлетворять три числа, характеризующие физическую величину, чтобы она была вектором?

(6.20), а по другим формулам. Более того, в другой системе координат рассматриваемая физическая величина характеризуется не тремя числами, а шестью. Это означает, что она является симметричным тензором (более подробно об этом см. в § 49). Важнейшим свойством физической величины является ее поведение при преобразованиях систем координат. Это обстоятельство будет неоднократно использоваться в последующем.

## 7. Время

**Понятие времени.** Окружающий мир находится в процессе постоянных изменений. Процессы следуют в определенной последовательности; каждый из процессов имеет определенную длительность. В мире происходит постоянное развитие. Эти общие свойства развивающегося, изменяющегося мира в сознании человека отразились в виде понятия времени.

**Под временем понимается свойство материальных процессов иметь определенную длительность, следовать друг за другом в определенной последовательности и развиваться по этапам и стадиям.**

Таким образом, время не может быть отделено от материи и ее движения, оно является формой существования материи. Так же как не имеет смысла говорить о пространстве самом по себе, не имеет смысла говорить о времени самом по себе. Представление о течении времени вне связи с материальными процессами является бессодержательным. Лишь изучение этих процессов и их взаимосвязей и соотношений наполняет понятие времени физическим содержанием.

**Периодические процессы.** Среди многообразных процессов, происходящих в природе, обращают на себя внимание в первую очередь повторяющиеся процессы: повторение дней и ночей, времен года, движение звезд по небесному своду, биение сердца, дыхание и т. п. Изучение и сравнение их между собой приводит к идеи длительности материальных процессов, а сравнение длительностей — к идеи их измерения. Практика измерения всевозможных процессов позволяет выделить те из них, которые обладают наилучшим постоянством длительности, и тем самым уточнить выбор процесса, принимаемого за эталон измерения. Ситуация здесь совершенно аналогична той, которая в § 5 была довольно подробно описана относительно протяженности, и нет необходимости повторять уже сказанное.

**Принятый за эталон измерения периодический процесс называется часами.** Прежде всего возникает вопрос: что значит, что часы в различных точках отсчета идут одинаково? Это означает следующее. Пусть некоторый физический процесс может переносить информацию из одной точки в другую. Такой процесс называется сигналом. Им может быть световая вспышка, пуля, выпущенная из одной точки

в другую, и т. д. Нет необходимости знать закон распространения этих сигналов; достаточно лишь знать, что посылка, распространение и прием сигналов проходят в неизменных и, следовательно, одинаковых условиях. Тогда будем из одной точки посыпать сигналы через одинаковые промежутки времени. Если в другую точку сигналы приходят через те же одинаковые промежутки времени, то можно сказать, что темп хода часов в различных точках одинаков. Такую проверку в принципе можно провести для всевозможных пар точек; при этом выполняется условие, что если темп хода часов в точке  $A$  одинаков с темпом хода часов в точке  $B$ , а темп хода часов в точке  $B$  одинаков с темпом хода часов в точке  $C$ , то темпы хода часов в точках  $A$  и  $C$  также одинаковы. Конечно, не следует ограничиваться каким-либо одним видом сигналов; проверка одинакового темпа хода часов в различных точках тела отсчета должна быть проведена с помощью всевозможных имеющихся в распоряжении экспериментатора сигналов.

Эти опыты могут в принципе дать два результата: либо окажется, что такая одинаковость хода часов в различных точках рассматриваемой системы отсчета возможна, либо окажется, что часы в различных точках системы отсчета имеют различный ход. Оба мыслимые в принципе результата могут, как показывает эксперимент, иметь место в действительности. Например, возьмем в качестве эталонных процессов (часов) некоторые внутриядерные процессы, которые заведомо не зависят от давления, воздействия температуры и т. д., и будем проверять указанным выше способом одинаковость их хода. Пусть в начале рассматриваемого процесса из точки на некоторой высоте над поверхностью Земли посыпается сигнал в точку на поверхности Земли, где происходит такой же процесс, и этот сигнал приходит в точку на поверхности Земли в тот момент, когда в этой точке начинается такой же процесс. Следующий сигнал посыпается из первой точки в тот момент, когда в ней рассматриваемый процесс заканчивается. Не имеет значения закон движения сигнала из первой точки во вторую. Важно лишь, чтобы он был совершенно одинаков для всех сигналов, т. е., иначе говоря, чтобы все условия посылки, движения и приема сигнала были совершенно одинаковыми для всех последовательных сигналов. Эксперимент показывает, что второй сигнал придет в точку на поверхности Земли не в момент окончания происходящего там процесса, а несколько раньше.

Такие эксперименты были поставлены лишь сравнительно недавно и будут более подробно описаны позднее. Здесь же нам важно лишь отметить, что в принципе возможна такая ситуация, при которой темп хода физических процессов различен в различных точках тела отсчета. Эта возможная экспериментальная ситуация выражается в виде утверждения, что в данной системе отсчета нет единого времени, в каждой точке скорость течения времени различна. Строго говоря, такая ситуация существует, например,

в системе отсчета, связанной с Землей. Но отличие в темпе хода часов в различных точках вблизи поверхности Земли оказывается весьма малым. Например, если разность в высоте часов над поверхностью Земли составляет около 10 м, то длительность некоторого процесса в этих точках отличается друг от друга примерно на  $10^{-15}$  его величины. Это совершенно ничтожное отличие удалось впервые экспериментально наблюдать лишь в 1960 г. Если пренебречь столь малыми различиями в длительностях, то можно сказать, что в системе отсчета, связанной с Землей, существует с большей точностью единое время.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие системы отсчета, в которых возможно введение единого времени если не в абсолютном смысле, то хотя бы с достаточной точностью. Заметим, что невозможность введения единого времени у поверхности Земли в принципиальном смысле обусловлена наличием поля тяготения. Но это поле тяготения невелико и с большой степенью приближения можно говорить о едином времени.

Однако поле тяготения не является единственным фактором, затрудняющим введение единого времени. Пусть, например, система отсчета находится во вращательном движении относительно неподвижных звезд или движется как-либо ускоренно относительно них. В такой системе отсчета также нельзя ввести единое время. Это утверждение в настоящее время не проверено экспериментом, но его справедливость следует из имеющихся многочисленных данных. Такие системы отсчета называются неинерциальными. В них единое время можно ввести лишь с определенной точностью. Это обстоятельство будет использовано в гл. 14.

Спрашивается, а существуют ли вообще системы отсчета с единым временем? Ответить на этот вопрос можно так: существуют системы отсчета, в которых возможно введение единого времени с достаточной для практики точностью; основанные на введенном таким образом едином времени теории достаточно хорошо подтверждаются экспериментом; более того, теория позволяет предсказать отклонения от единого времени, которые проверяются экспериментально.

**Синхронизация часов.** Длительность физического процесса, проходящего в некоторой точке, измеряется по часам, находящимся в той же точке, прямым сравнением, т. е. путем сравнения длительности физических процессов, происходящих в одной и той же точке. Измерение длительности сводится к фиксации начала и конца измеренного процесса на шкале процесса, принятого за эталонный. Об этом говорится как о фиксации показаний часов в моменты начала и конца процесса, хотя, конечно, это не имеет никакого отношения к фактическому нахождению часов (процесса) в рассматриваемой точке. Результаты измерений дают возможность сравнивать длительности процессов, происходящих в различных точках, но при условии, что каждый процесс от начала до конца происходит

дит в одной и той же точке. Но как быть с физическим процессом, который начинается в одной точке, а оканчивается в другой? Что следует понимать под длительностью этого процесса? По каким часам эту длительность измерять? Ясно, что эту длительность нельзя измерить по каким-либо одним часам. Можно лишь зарегистрировать начало и конец процесса по часам, находящимся в различных точках. Однако эта фиксация ничего не дает, поскольку начало отсчета времени на различных часах пока еще никак не согласовано, или, как говорят, часы не синхронизованы между собой.

Простейшим способом синхронизации является такой: «одновременно» у всех часов поставить стрелки на одно и то же деление. Но это бессмысленно, потому что неизвестно, что такое «одновременно». Поэтому необходимо дать определение синхронизации часов не через какие-нибудь другие известные понятия, а путем ссылки на физические процедуры, с которыми связана эта синхронизация. Прежде всего надо установить физическую связь между часами в различных точках, т. е. снова обратиться к сигналам. Однако теперь важно не только чтобы сигналы распространялись в неизменных физических условиях, но и закон их распространения, который неизвестен и без синхронизации часов не может быть установлен.

Синхронизация часов и изучение законов распространения различных физических сигналов и исторически, и логически развивались параллельно, дополняя и уточняя друг друга. Существенную роль сыграло здесь очень большое численное значение скорости света. Дело в том, что свет с самого начала являлся естественным сигналом для синхронизации часов, причем его скорость в сравнении со всеми другими известными скоростями принималась практически эквивалентной бесконечности. Поэтому возникла идея о синхронизации часов с помощью сигналов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью. Она осуществляется так: стрелки часов во всех точках устанавливаются на одно и то же деление; затем из некоторой точки по всем направлениям испускаются сигналы, и каждые из часов запускаются в тот момент, когда сигнал проходит точку, где находятся часы. Эта синхронизация обладает очень важным свойством: если часы *A* синхронизовать с часами *B*, а часы *B* — с часами *C*, то часы *A* оказываются синхронизованными с часами *C* при любых взаимных расположениях часов *A*, *B*, *C*.

Вместо сигналов с бесконечной скоростью можно использовать световые сигналы. Конечно, это будет приближенная синхронизация с ошибкой, равной примерно времени распространения между наиболее удаленными точками рассматриваемой области. Например, для условий повседневной жизни на Земле эта синхронизация вполне удовлетворительна. Она также была долго удовлетворительна и для научных лабораторных исследований. В частности, она позво-

лила изучить механические движения с малыми скоростями и выявить понятие постоянной скорости. После этого стало возможным произвести синхронизацию часов с помощью сигналов, распространяющихся с конечной скоростью. По существу это есть просто использование определения постоянной скорости: если из точки, часы в которой показывают  $t_0$ , испускается сигнал с постоянной скоростью  $v$ , то в тот момент, когда он придет в точку на расстоянии  $s$ , часы в этой точке должны показывать  $t = t_0 + s/v$ . Нетрудно видеть, что эта синхронизация полностью согласуется с синхронизацией при помощи световых сигналов.

Увеличение точности измерений промежутков времени и увеличение области, в которой производятся измерения, позволяют установить, что скорость света не бесконечна, и измерить эту скорость. После этого сама скорость света включается в совокупность сигналов с конечной скоростью распространения. На этой стадии часы синхронизируются с помощью световых сигналов по формуле  $t = t_0 + s/c$ , где  $c$  — скорость света.

При синхронизации с помощью сигнала с постоянной скоростью  $v$  всегда возникает вопрос, чему равна эта скорость и действительно ли она постоянна. В частности, этот вопрос относился и к скорости света: как она зависит от направления распространения, скорости источника света, скорости приемника и других физических условий. Исследование этого вопроса в конце концов привело к следующему фундаментальному результату:

**Скорость света в инерциальных системах отсчета не зависит от скорости ни источника, ни приемника и по всем направлениям в пространстве одинакова и равна универсальной постоянной  $c$ .**

Эта универсальная постоянная скорость света в вакууме недавно определена с точностью до 1,1 м/с:  $c = 299792,4562 \text{ км/с} \pm 1,1 \text{ м/с}$ . Путь, приведший к этому заключению, будет более подробно рассмотрен несколько позднее, а сейчас нам нужен лишь результат для определения правила синхронизации часов: любые двое часов  $A$  и  $B$ , находящихся на расстоянии  $s$  друг от друга, синхронизованы, если разность показаний часов в момент прихода светового сигнала в точку нахождения одних часов и его испускания из точки нахождения других равна  $s/c$ . Физический смысл этого утверждения состоит не в том, что двое часов могут быть синхронизованы таким образом, а в том, что эта синхронизация возможна и непротиворечива для всех пар точек системы отсчета.

Практически эта синхронизация осуществляется следующим образом. В некоторой точке, принимаемой за начальную, стрелки часов устанавливаются на 0, и из нее испускается световой сигнал в виде сферической волны. На часах на расстоянии  $r$  в момент прихода фронта этой волны стрелки должны показывать время  $r/c$ .

Таким образом, когда говорится, что в некоторой точке произошло событие в момент  $t$ , то имеется в виду, что в момент этого

события стрелка часов, находящихся в этой точке, указывала на  $t$ . Конечно, нет необходимости, чтобы в каждой точке были часы. Это просто краткое выражение утверждения, что если бы в этой точке были часы, синхронизованные указанным образом, то они показывали бы время  $t$ .

Теперь выполнены все предпосылки для описания движения в системах отсчета, в которых положение точек и время событий могут характеризоваться координатами и временем, точный смысл которых определен в предшествующих параграфах.

## 8. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки

**Способы описания движения.** Сейчас нас не интересует вопрос, чем вызвано движение материальной точки, почему она движется так, а не иначе, каковы причины ее движения. Задача состоит лишь в том, чтобы описать ее движение. Описать движение материальной точки — значит указать ее положение в любой момент времени, т. е. указать для каждого момента ту точку системы отсчета, с которой материальная точка в этот момент времени совпадает. При своем движении она проходит непрерывную последовательность точек системы отсчета, называемую **траекторией** движения.

Положение точек системы отсчета можно характеризовать различными способами, в соответствии с которыми можно описывать и движение точки.

**Описание движения в координатной форме.** Выберем систему координат, в которой положение точки характеризуется тремя координатами. В общем случае обозначим их как  $x_1, x_2, x_3$ . Как было сказано в § 5, это означает для декартовых координат (см. рис. 3):  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ; для цилиндрических (см. рис. 4):  $x_1 = \rho, x_2 = \varphi, x_3 = z$ ; для сферических (см. рис. 5):  $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = \theta$ . При движении точки эти координаты меняются со временем, т. е. являются некоторыми функциями времени. Описать движение — значит указать эти функции:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t). \quad (8.1)$$

Напомним, что функцией называется правило, по которому каждому значению одной переменной величины соотносится численное значение другой. Это правило условно обозначается некоторой буквой, например  $y = f(x)$ . Здесь  $f$  символизирует то правило, с помощью которого каждому значению переменной величины  $x$  соотносится определенное значение величины  $y$ . Однако, чтобы не вводить слишком много букв, часто ту же самую функциональную зависимость записывают в виде  $y = y(x)$ . Символ  $y$  в правой части этого равенства аналогичен  $f$ ; символ  $y$  в левой части указывает чис-

ленное значение переменной  $y$ , которое при этом получается. Такой метод выражения функциональных зависимостей более экономен и широко применяется. Формулы (8.1) записаны таким способом.

Рассмотрим примеры описания движения этим способом. Пусть в некоторый момент  $t = 0$  точка начинает движение и удаляется по прямой от начального положения таким образом, что ее расстояние  $s$  от начальной точки вдоль траектории пропорционально времени:  $s = At$ , где  $A$  — коэффициент пропорциональности. Формулы, описывающие это движение, зависят от того, какая система координат выбрана и как она расположена. Возьмем декартову систему координат, начало которой совместим с точкой начала движения, а одну из осей, например ось  $y$ , направим вдоль скорости движения. Тогда формулы (8.1) принимают следующий вид:

$$x_1 = x = 0, \quad x_2 = y = At, \quad x_3 = z = 0. \quad (8.2a)$$

Если же, например, оси расположить таким образом, чтобы траектория движения лежала в координатной плоскости  $(x, y)$  и совпадала с биссектрисой угла, проведенной между положительными направлениями этих осей, то формулы (8.1) запишутся так:

$$x_1 = x = At/\sqrt{2}, \quad x_2 = y = At/\sqrt{2}, \quad x_3 = z = 0. \quad (8.2b)$$

В сферической же системе координат, которую расположим относительно декартовых осей так, как указано на рис. 5, а они при этом ориентированы относительно траектории движения так, как и в случае (8.2b), формулы (8.1) примут следующий вид:

$$x_1 = r = At, \quad x_2 = \varphi = \pi/4, \quad x_3 = \theta = \pi/2. \quad (8.2c)$$

Если начала систем координат не совмещать с точкой начала движения, то все формулы приобретут более сложный вид, особенно в сферических координатах, в чем рекомендуем убедиться в качестве упражнения.

Пусть по окружности радиуса  $R$  равномерно движется точка. Положение ее в некоторый момент  $t = 0$  примем за начало отсчета. Проходимый точкой путь  $s$  вдоль траектории, являющейся окружностью, пропорционален времени, т. е.  $s = At$ , где  $A$  — коэффициент пропорциональности. Декартову систему координат расположим таким образом, чтобы окружность лежала в координатной плоскости  $(x, y)$ , начало ее совпадало с центром окружности, а ось  $z$  была бы направлена так, чтобы наблюдателю, смотрящему на движение со стороны положительных значений оси  $z$ , оно представлялось происходящим против часовой стрелки. Кроме того, положительная часть оси  $x$  пусть проходит через точку начала дви-

жения. Тогда формулы (8.1) для описания указанного движения по окружности приобретают следующий вид:

$$x_1 = x = R \cos(At/R), \quad x_2 = y = R \sin(At/R), \quad x_3 = z = 0. \quad (8.3a)$$

В сферической системе координат формулы (8.1) для этого случая запишутся в виде:

$$x_1 = r = R, \quad x_2 = \varphi = At/R, \quad x_3 = \theta = \pi/2. \quad (8.3b)$$

В цилиндрической системе координат, которая расположена относительно декартовых осей так, как указано на рис. 4, а декартовы оси ориентированы относительно рассматриваемой траектории так же, как в (8.3а), формулы (8.1) примут вид:

$$x_1 = \rho = R, \quad x_2 = \varphi = At/R, \quad x_3 = z = 0. \quad (8.3b)$$

Все формулы значительно усложняются при несовпадении начала координат с центром окружности и при других ориентировках осей координат.

**Описание движения в векторной форме.** Положение точки может быть задано с помощью радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  относительно некоторой точки, принятой за начало. Как было отмечено в § 5, такое задание положения точки предполагает не введение какой-то системы координат, а только наличие тела отсчета. Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  рассматривается как непосредственно задаваемая величина. При движении точки радиус-вектор ее непрерывно меняется. Конец его описывает траекторию. Движение задается в бескоординатной форме:

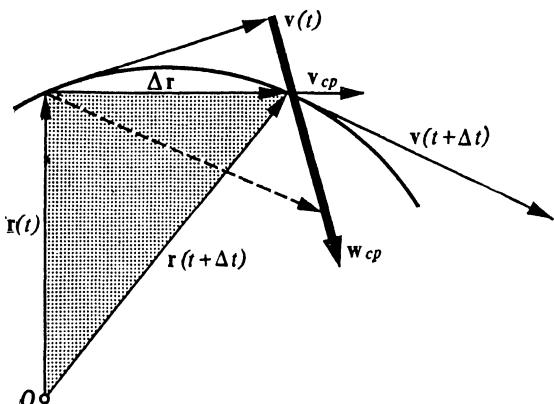
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (8.4)$$

Формула этого вида определяет векторную функцию скалярного аргумента. Векторной функцией скалярного аргумента называется правило, по которому каждому численному значению аргумента (в данном случае  $t$ ) соотносится некоторый вектор (в данном случае  $\mathbf{r}$ ). В формуле (8.4) это правило обозначается как  $\mathbf{r}$  в правой части, а вектор, получаемый по этому правилу, — как  $\mathbf{r}$  в левой части. Так же как и в формулах (8.1), такое употребление одного и того же символа в двух различных смыслах путаницы не вызывает.

Формулами (8.2а) — (8.2в), имеющими различный вид, описывается одно и то же движение. Чтобы представить это движение в виде (8.4), обозначим через  $\tau$  единичный безразмерный вектор в направлении движения, а начало отсчета радиусов-векторов совместим с точкой начала движения. Тогда рассматриваемое движение описывается формулой, не зависящей от системы координат:

$$\mathbf{r} = \tau At. \quad (8.5)$$

Подчеркнем еще раз, что формулу (8.4) следует понимать не как краткую запись трех скалярных равенств вида (8.1), а как



13.

**К понятиям перемещения, скорости и ускорения**

Средняя скорость при движении между двумя точками траектории совпадает по направлению с вектором перемещения. Она, вообще говоря, не направлена по касательной к траектории ни в начальной, ни в конечной точке. Точка  $O$  — начало отсчета

!

**Скорость всегда направлена по касательной к траектории.**

!

**Ускорение может составить любой угол относительно скорости, т. е. может быть направлено под любым углом к траектории.**

?

1

**Какие способы описания движения Вы знаете?**

2

**В чем состоят преимущества векторных обозначений и векторной записи движения?**

исходную, которую при необходимости можно расписать в виде трех скалярных равенств, но существует она независимо от возможности такого представления.

**Описание движения с помощью параметров траектории.** Если траектория задана, то задача сводится к указанию закона движения вдоль нее. Некоторая точка траектории принимается за начальную, а любая другая точка характеризуется расстоянием  $s$  вдоль нее от начальной точки. В этом случае движение описывается следующей формулой:

$$s = s(t). \quad (8.6)$$

Например, закон движения по окружности, задаваемого формулой (8.3а), имеет вид

$$s = At, \quad (8.7)$$

причем известными являются окружность и точка начала движения. Отсчет положительных значений  $s$  совпадает с направлением движения точки по окружности.

**Вектор перемещения.** Вектор перемещения  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$  численно равен расстоянию между конечной и начальной точками, направлен от начальной к конечной (рис. 13) и соединяет

точки траектории, в которых материальная точка находилась в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ .

**Скорость.** Вектор средней скорости  $v_{cp}$  при перемещении между двумя точками определяется как вектор, совпадающий по направлению с перемещением и равный абсолютному значению вектора перемещения, деленному на время перемещения (рис. 13):

$$v_{cp}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta r}{|\Delta r|} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (8.8)$$

В скобках у  $v_{cp}$  указан промежуток времени, для которого средняя скорость вычислена. Если в пределах промежутка  $\Delta t$  рассмотреть более маленькие промежутки времени, то средняя скорость на них отличается от средней скорости на всем промежутке. Будем уменьшать промежуток времени. Тогда будут уменьшаться и все более мелкие промежутки времени. Средние скорости в этих более мелких промежутках будут по-прежнему отличаться от средней скорости во всем промежутке, но это различие уменьшается с уменьшением промежутка  $\Delta t$ . При неограниченном уменьшении  $\Delta t$  средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью  $v$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (8.9)$$

В декартовой системе координат, представив  $r$  в виде

$$r(t) = i x(t) + j y(t) + k z(t)$$

и учитя, что величины  $i, j, k$  постоянны по времени, получаем

$$v = \frac{dr}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt}. \quad (8.10)$$

Следовательно, компоненты скорости даются формулами:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.11)$$

Если движение задано через параметры траектории, то известны траектория и зависимость пути от времени. Путь отсчитывается от точки траектории, принятой за начальную. Каждая точка траектории характеризуется своим значением  $s$ . Следовательно, ее радиус-вектор является функцией от  $s$  и траектория может быть задана уравнением

$$r = r(s). \quad (8.12)$$

Следовательно, в формуле (8.9) можно рассматривать  $\mathbf{r}(t)$  как сложную функцию  $\mathbf{r}[s(t)]$  и вычислить ее производные по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (8.13)$$

Величина  $\Delta s$  — расстояние между двумя точками вдоль траектории,  $|\Delta \mathbf{r}|$  — расстояние между ними по прямой линии. Ясно, что по мере сближения точек разница в этих величинах уменьшается. Поэтому можно написать:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau},$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор, касательный к траектории. Кроме того, по определению,  $(ds/dt) = v$  есть абсолютное значение скорости по траектории. Поэтому формула (8.13) приобретает вид

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} v. \quad (8.14)$$

Отсюда следует, что скорость направлена по касательной к траектории.

**Ускорение.** Ускорением называется скорость изменения скорости. Пусть в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$  скорости равны соответственно  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ . Значит, в течение промежутка времени  $\Delta t$  скорость изменилась на  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ . Среднее ускорение за  $\Delta t$  равно (рис. 13)

$$\mathbf{w}_{cp}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (8.15)$$

Будем изображать векторы  $\mathbf{v}(t)$  в различные промежутки времени исходящими из общего начала. Конец вектора  $\mathbf{v}(t)$  описывает кривую, которая называется **годографом скоростей** (рис. 14). Уменьшая неограниченно промежуток времени  $\Delta t$ , на котором вычисляется средняя скорость, получаем в пределе ускорение

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

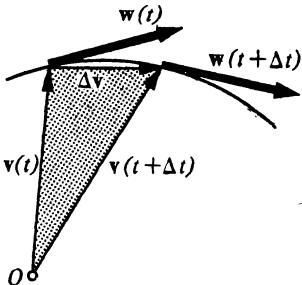
(8.16)

Учитывая, что  $\mathbf{v} = dr/dt$ , а  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ , ускорение можно выразить в виде  $\mathbf{w} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ , или

$$\mathbf{w} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (8.17)$$

Следовательно, компоненты ускорения в декартовой системе координат выражаются формулами:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (8.18)$$



14.

**Годограф скоростей**

Это кривая, которую описывает конец вектора скорости, проведенного из фиксированного начала (точка  $O$ )

Теперь необходимо изучить вопрос об ориентировке ускорения относительно скорости и траектории движения. На рис. 14 видно, что ускорение всегда касательно годографу скорости, но может иметь произвольный угол относительно нее. Поскольку скорость всегда касательна к траектории движения, это означает, что ускорение может быть направлено под любым углом к касательной к траектории движения. Чтобы выяснить, от чего зависит направление ускорения, вычислим его, исходя из формулы (8.14):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\mathbf{v}) = \frac{d\tau}{dt}\mathbf{v} + \tau\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.19)$$

!

*Нормальная компонента ускорения не изменяет абсолютного значения скорости, а изменяет лишь ее направление.*

Единичный касательный вектор  $\tau$  полностью определяется точкой траектории, а точка траектории однозначно характеризуется своим расстоянием  $s$  от точки, принятой за начальную. Поэтому вектор  $\tau$  является функцией от  $s$ , т. е.  $\tau = \tau(s)$ , а  $s$  является функцией от времени. Поэтому можно написать  $(d\tau/dt) = (d\tau/ds)(ds/dt)$ . Вектор  $\tau$  по абсолютному значению неизменен. Отсюда следует, что вектор  $(d\tau/ds)$  перпендикулярен  $\tau$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно проанализировать равенство  $\tau^2 = 1$ , выражающее постоянство абсолютного значения вектора  $\tau$ :  $[d(\tau^2)/ds] = 2(\tau d\tau/ds) = 0$ . Но если скалярное произведение двух векторов равно нулю и ни один из них не равен нулю, то эти векторы перпендикулярны друг другу. Таким образом, действительно,  $\tau$  и  $d\tau/ds$

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

т. е.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

!

**Изменение абсолютного значения скорости обусловлено только тангенциальной составляющей ускорения.**

$$\mathbf{v} = \tau \mathbf{v}.$$

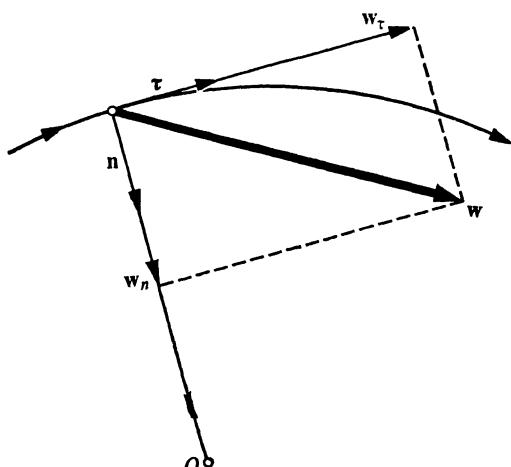
взаимно перпендикулярны. Вектор  $\tau$  направлен по касательной к траектории. Следовательно, вектор  $d\tau/ds$  перпендикулярен этой касательной, т. е. направлен по нормали, которая называется главной. Единичный вектор в направлении главной нормали обозначается  $n$ . Значение вектора  $d\tau/ds$  равно  $(1/R)$ , где  $R$  называется радиусом кривизны траектории.

Точка, отстоящая от траектории на расстоянии  $R$  в направлении главной нормали  $n$ , называется центром кривизны траектории. Таким образом, можно написать

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}. \quad (8.20)$$

Учитывая, что  $(ds/dt) = v$  есть абсолютное значение скорости, можно формулу (8.19) с учетом (8.20) записать окончательно в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \frac{v^2}{R} + \tau \frac{dv}{dt}. \quad (8.21)$$



15.

Разложение вектора полного ускорения  $w$  на составляющие: тангенциальное  $w_\tau$  и нормальное  $w_n$  ускорения

Точка  $O$  есть центр кривизны траектории;  $\tau$  — единичный касательный вектор;  $n$  — единичный вектор в направлении главной нормали

Полное ускорение состоит из двух взаимно перпендикулярных векторов; ускорения  $\tau$  ( $dv/dt$ ) =  $w_\tau$ , направленного вдоль траектории движения и называемого тангенциальным, и ускорения  $(nv^2/R) = w_n$ , направленного перпендикулярно траектории по главной нормали, т. е. к центру кривизны траектории (рис. 15), и называемого нормальным. Из (8.21) после возведения его в квадрат и с учетом того, что  $(n, \tau) = 0$ , находим абсолютное значение полного ускорения:

$$w = \sqrt{w^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \quad (8.22)$$

## 9. Движение точки по окружности

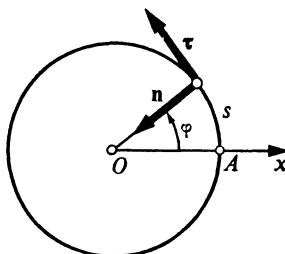
**Угловая скорость.** Это движение удобно рассмотреть в цилиндрической системе координат, совместив начало координат с центром окружности и расположив оси  $x$  и  $y$  в ее плоскости. В плоскости  $(x, y)$  это будет полярная система координат (рис. 16). Обозначим радиус окружности через  $R$ . Взяв за начало отсчета расстояний вдоль траектории точку  $A$ , можно написать  $s = R\varphi$ . Абсолютное значение скорости  $v = (ds/dt) = R(d\varphi/dt)$ . Скорость изменения угла  $d\varphi/dt$  называется угловой и обозначается через  $\omega$ . Если эта скорость постоянна, то она называется круговой частотой. С периодом обращения  $T$  круговая частота связана очевидным соотношением  $\omega = 2\pi/T$ .

**Центростремительное ускорение.** Нормальное ускорение в этом случае называется центростремительным. Центр кривизны всех точек окружности один и тот же и совпадает с центром окружности. Радиус кривизны равен ее радиусу. Это нетрудно показать с помощью простого вычисления, которое предлагается сделать в качестве упражнения. Центростремительное ускорение равно  $w_n = (v^2/R) = \omega^2 R$ , где учтено, что  $v = R\omega$ .

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \frac{v^2}{R} + \boldsymbol{\tau} \frac{dv}{dt}.$$

?

- 1 Что такое мгновенная скорость и как она ориентирована относительно траектории?
- 2 Каковы направления относительно траектории нормального и тангенциального ускорений и чем определяется их абсолютное значение?
- 3 Откуда следует, что угловая скорость является вектором?
- 4 Являются ли векторами конечные угловые перемещения?
- 5 Что такое вектор углового ускорения? Как он направлен, если угловая скорость неизменна по направлению?



16.

Движение точки по окружности

Положение точки на окружности полностью характеризуется путем  $s$ , пройденным вектором от точки  $A$ , принятой за начало отсчета. Центр кривизны траектории является центр окружности

**Угловое ускорение.** Из формулы  $v = R(d\phi/dt)$  следует, что тангенциальное ускорение  $w_t = (dv/dt) = R(d\omega/dt) = R/(d^2\phi/dt^2)$ . Величина  $\ddot{\omega} = d\omega/dt$  называется угловым ускорением точки. Полное ускорение точки можно записать в виде

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = R\sqrt{\omega^4 + \ddot{\omega}^2}. \quad (9.1)$$

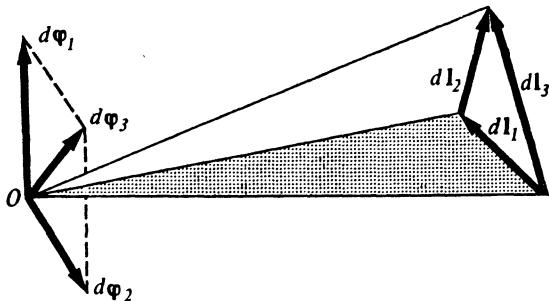
**Векторы угловой скорости и углового ускорения.** Движение по окружности характеризуется не только ее радиусом и угловой скоростью, являющейся скалярной величиной, но и ориентировкой плоскости, в которой лежит окружность. Ориентировка плоскости определяется направлением перпендикуляра к ней. Поэтому движение по окружности характеризуется линией, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Это ось вращения.

Величина  $d\phi$  называется элементарным угловым перемещением, с которым угловая скорость  $\omega = d\phi/dt$  связана таким же соотношением, как скорость  $v$  — с пространственным перемещением  $ds$ :  $v = ds/dt$ . Однако для характеристики скорости важно не только ее абсолютное значение, но и направление. Поэтому важно не только значение пространственного перемещения  $ds$ , но и его направление. Если вектор перемещения обозначить через  $ds$ , то выражение для вектора скорости имеет вид  $ds/dt$ .

Элементарное угловое перемещение  $d\phi$  характеризуется не только своим значением, но и плоскостью, в которой оно происходит. Чтобы фиксировать эту плоскость, следует  $d\phi$  рассматривать как вектор, перпендикулярный этой плоскости. Его направление находится по правилу правого винта: если винт вращать в сторону увеличения  $\phi$ , то направление движения винта должно совпадать с вектором  $d\phi$ . Однако, чтобы иметь основание определенную так величину  $d\phi$  называть вектором, необходимо доказать, что она обладает его свойствами.

Пусть  $d\phi_1$  и  $d\phi_2$  являются двумя угловыми перемещениями (рис. 17). Докажем, что эти величины складываются как векторы. Если из точки  $O$  провести сферу радиусом, равным единице, то этим углам на поверхности сферы соответствуют бесконечно малые дуги  $dL_1$  и  $dL_2$ . Бесконечно малая дуга  $dL_3$  составляет третью сторону треугольника. Этот бесконечно малый треугольник можно считать плоским. Векторы  $d\phi_1$ ,  $d\phi_2$  и  $d\phi_3$  направлены перпендикулярно сторонам этого треугольника и лежат в его плоскости. Очевидно, что  $d\phi_3 = d\phi_1 + d\phi_2$ , них имеет место векторное равенство

$$d\phi_3 = d\phi_1 + d\phi_2,$$



17.

К доказательству векторного характера элементарных угловых перемещений

!

*Только бесконечно малые угловые перемещения являются векторами. Вращение на конечные углы — не вектор.*

что и требовалось доказать. Эти векторы можно разложить на компоненты по осям координат. Ввиду (9.2) эти компоненты ведут себя как компоненты вектора и, следовательно,

### элементарное угловое перемещение является вектором.

Заметим, что свойством быть вектором обладают лишь элементарные (бесконечно малые) угловые перемещения. Перемещения на конечный угол не являются векторами, потому что если их изображать отрезками прямых, имеющих направление, перпендикулярное плоскости, в которой происходит перемещение, то эти отрезки не складываются по правилу параллелограмма (9.2).

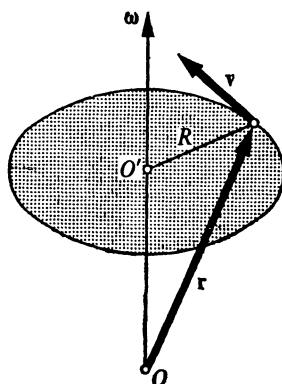
Бесконечно малое угловое перемещение  $d\phi$  материальной точки происходит в течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$ . Поэтому угловая скорость

$$\omega = d\phi/dt, \quad (9.3)$$

является вектором, поскольку  $d\phi$  — вектор, а  $dt$  — скаляр. Направления  $\omega$  и  $d\phi$  совпадают и определяются по правилу правого винта.

Если начало отсчета расположить в произвольной точке оси вращения (рис. 18, точка  $O$ ), то, как это видно из рисунка, скорость материальной точки может быть выражена через вектор угловой скорости по формуле

$$v = [\omega, r]. \quad (9.4)$$



18.

Вектор угловой скорости точки, движущейся по окружности радиуса  $R$ , направлен перпендикулярно плоскости движения

Угловым ускорением называется вектор  $d\omega/dt$ . При движении по окружности вектор  $\omega$  меняется лишь по значению, а по направлению совпадает с неизменной осью вращения. Используя формулу (8.4), находим полное ускорение точки:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[ \frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r} \right] + \left[ \omega, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \left[ \frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r} \right] + [\omega, \mathbf{v}], \quad (9.5)$$

где учтено, что  $(d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{v}$ . Поскольку в рассматриваемом случае вектор углового ускорения  $d\omega/dt$  совпадает с осью вращения, первый вектор в правой части (9.5) направлен по касательной к траектории. Это есть тангенциальное ускорение. Второй вектор дает в (9.5) нормальное ускорение. Таким образом,

$$\mathbf{w}_\tau = \left[ \frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r} \right], \quad \mathbf{w}_n = [\omega, \mathbf{v}], \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n. \quad (9.6)$$

Эти формулы справедливы только тогда, когда ось вращения не изменяет своего направления в пространстве.

## 10. Движение твердого тела

**Степени свободы.** Твердым телом называется совокупность материальных точек, расстояние между которыми постоянно. Поэтому его движение сводится к движению составляющих точек. Движение каждой точки описывается тремя функциями (координатами). Следовательно, если твердое тело состоит из  $N$  точек, то его движение должно описываться  $3N$  координатами. Однако они не независимы, потому что расстояние между любыми двумя точками в твердом теле постоянно. Благодаря этому нет необходимости для описания движения твердого тела использовать громадное число  $3N$  функций. Число независимых функций (или, как чаще говорят, параметров), которыми определяется движение некоторой совокупности, или системы, материальных точек, называется числом ее степеней свободы.

Движение материальной точки описывается тремя параметрами и поэтому число ее степеней свободы равно трем. Число степеней свободы двух материальных точек, движущихся независимо друг от друга, равно 6. Если же эти две материальные точки жестко связаны между собой некоторым стержнем неизменной длины  $l$ , то шесть координат двух точек уже не являются независимыми величинами, потому что между ними имеется соотношение  $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ , в котором  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  — декартовы координаты точек. С помощью этого равенства одну из шести координат можно выразить через величину  $l$  и остав-

шиеся пять координат. Таким образом, остается лишь пять независимых параметров для описания движения двух жестко скрепленных материальных точек. Следовательно, эта система имеет пять степеней свободы.

**Число степеней свободы твердого тела.** Для того чтобы жестко закрепить твердое тело, необходимо закрепить какие-либо три его точки, не лежащие на одной прямой. Положение этих трех точек полностью определяет положение твердого тела и описывается девятью параметрами, между которыми имеются три равенства, выражающие постоянство трех расстояний между этими точками. Следовательно, чтобы найти положение твердого тела, необходимо задать шесть независимых параметров, т. е. число степеней свободы твердого тела  $i = 6$ . Эти шесть независимых параметров можно задавать различным образом.

**Движение твердого тела, закрепленного в точке.** Удобно использовать три параметра для указания положения какой-либо точки твердого тела, а оставшимися тремя параметрами описывать положение твердого тела, закрепленного в этой точке. Кинематика движения точки была уже подробно проанализирована. Поэтому остается рассмотреть лишь движение твердого тела, закрепленного в точке. Его описание осуществляется с помощью углов Эйлера.

**Углы Эйлера.** Свяжем с твердым телом жестко систему координат  $(x', y', z')$ , которая полностью характеризуется единичными векторами  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$ . Начало этой системы координат, а также начало системы координат  $(x, y, z)$ , в которой рассматривается движение тела, совпадают с точкой закрепления твердого тела (рис. 19). Положение его полностью определяется положением осей  $(x', y', z')$  относительно осей  $(x, y, z)$ .

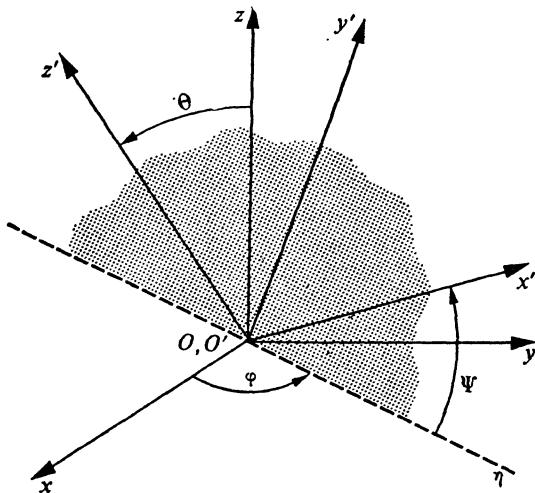
Плоскости  $O'x'y'$  и  $Oxy$  пересекаются по линии  $O\eta$ , называемой линией узлов. Положительное направление вдоль этой линии задается вектором  $\tau = [\mathbf{k}, \mathbf{k}']$ . Углами Эйлера называются углы:

$$\begin{aligned}\varphi &= \angle xO\eta \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \quad \theta = \angle zOz' \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \\ \Psi &= \angle \eta Ox' \quad (0 \leqslant \Psi \leqslant 2\pi).\end{aligned}\tag{10.1}$$

По определению этих углов видно, что они являются независимыми переменными и полностью характеризуют положение твердого тела, закрепленного в одной точке. Произвольное движение тела можно описать заданием трех функций:

$$\varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \Psi = \Psi(t).\tag{10.2}$$

**Поступательное движение.** Поступательным движением твердого тела называется такое, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям. Это означает, что скорости всех то-



19.

Углы Эйлера характеризуют взаимное расположение двух прямоугольных декартовых систем координат

Плоскость  $(x', y')$  пересекает плоскость  $(x, y)$  по линии  $\eta$

!

*Угловая скорость — это вектор, потому что она определяется через бесконечно малое элементарное угловое перемещение, которое является вектором. Средняя угловая скорость при повороте на конечный угол — не вектор, хотя и может быть охарактеризована абсолютным значением и направлением.*

чек тела в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная между какими-либо точками тела, перемещается параллельно самой себе. Углы Эйлера при поступательном движении постоянны. Таким образом, это движение полностью характеризуется заданием движения какой-либо одной точки тела, т. е. поступательно движущееся тело имеет три степени свободы. В кинематическом отношении это движение полностью эквивалентно движению материальной точки.

**Плоское движение.** Плоским называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Движение тела в этом случае полностью определяется движением одного из его сечений в какой-либо из параллельных плоскостей, а положение сечения — положением двух точек этого сечения. Положение двух точек на плоскости характеризуется четырьмя параметрами (координатами). Между этими параметрами имеется одно соотношение, выражающее постоянство расстояний между двумя точками. Следовательно, имеются

лишь три независимых параметра, т. е. число степеней свободы равно трем.

**Вращательное движение.** Вращательное движение — это такое, при котором две точки тела остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения. Все точки твердого тела, лежащие на оси вращения, неподвижны. Другие точки твердого тела движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Центры этих окружностей лежат на оси вращения. Можно определить вектор угловой скорости  $\omega$  так же, как в (9.3). Если начало отсчета радиуса-вектора  $r$  расположить на оси вращения, то скорость любой точки вращающегося твердого тела

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}] \quad (10.3)$$

Если расстояние точки твердого тела от оси вращения равно  $R$  (см. рис. 18), то для нормального, тангенциального и полного ускорений, так же как и в § 9, получим следующие формулы:

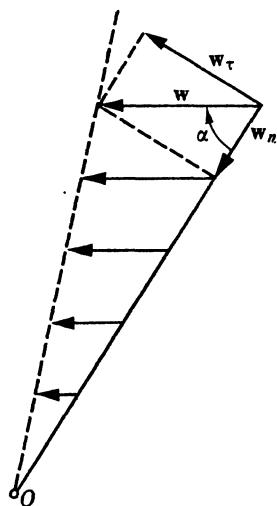
$$\begin{aligned} w_n &= \omega^2 R, \quad w_t = \dot{\omega} R, \\ w &= R \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

(Буквенное обозначение с точкой выражает производную по времени.) Из этих формул видно, что векторы полного ускорения точек твердого тела, лежащих на одном и том же радиусе, проведенном перпендикулярно оси вращения, параллельны друг другу и увеличиваются пропорционально расстоянию от оси вращения (рис. 20). Угол  $\alpha$ , характеризующий направление ускорения относительно радиуса, как это видно на рис. 20, определяется соотношением  $\operatorname{tg} \alpha = (w_t/w_n) = \dot{\omega}/\omega^2$ , т. е. не зависит от  $R$ .

В векторной форме ускорение точек твердого тела, ось вращения которого

!

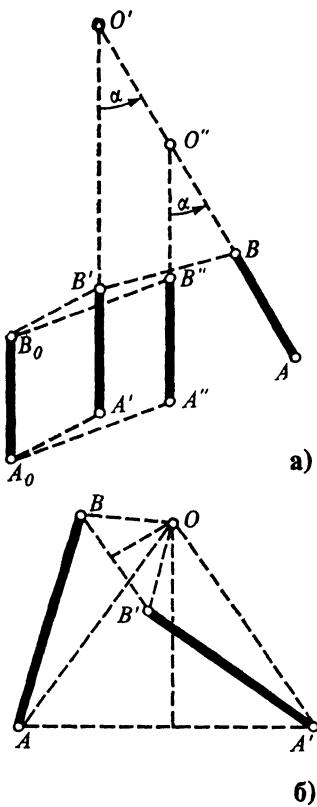
Положение системы с шестью степенями свободы полностью характеризуется заданием шести чисел, называемых координатами. Они произвольны. Важно лишь проверить, что они независимы. Углы Эйлера — один из возможных выборов, обладающий рядом удобств.



20.

При удалении от оси вращения полное ускорение остается неизменным по направлению, но растет по абсолютному значению

Ось вращения (точка  $O$ ) перпендикулярна плоскости чертежа



21.

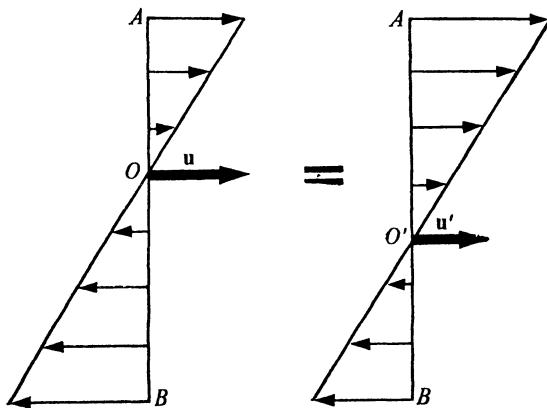
**Разложение перемещения на поступательное и вращательное неоднозначно и может быть произведено бесконечным числом способов, но угол вращения во всех случаях один и тот же**

не изменяет направления в пространстве, дается формулами (9.6), которые здесь нет необходимости выписывать еще раз.

**Мгновенная ось вращения.** В плоском движении положение твердого тела полностью определяется положением одного из его сечений в соответствующей плоскости, параллельно которой движутся все точки тела, а положение этого сечения в плоскости — положением отрезка прямой, жестко связанной с точками тела в этом сечении. Рассмотрим перемещение этого отрезка в течение некоторого промежутка времени из положения  $A_0B_0$  в положение  $AB$  (рис. 21, a). Это перемещение может быть разложено на два: 1) поступательное из  $A_0B_0$  в  $A'B'$ , при котором прямая перемещается параллельно самой себе; 2) вращательное, при котором твердое тело поворачивается на угол  $\alpha$  вокруг оси, проходящей через точку  $O'$  перпендикулярно плоскости движения твердого тела. Это разложение перемещения неоднозначно: можно было бы, например, поступательно переместить прямую из положения  $A_0B_0$  в положение  $A''B''$ , а вращение на угол  $\alpha$  произвести вокруг оси, проходящей через  $O''$ .

Таким образом, разложение перемещения на поступательное и вращательное неоднозначно, однако угол поворота  $\alpha$  при перемещении всегда один и тот же. В течение времени  $dt$  происходит одновременно поступательное перемещение всех точек тела на  $d\ell$  и элементарное угловое перемещение  $d\alpha$  вокруг  $O'$ . Поэтому скорость всех точек тела слагается из двух: 1) поступательной  $v_0 = d\ell/dt$ ; 2) вращательной  $v' = [\omega, r]$ , где  $\omega = d\alpha/dt$ , а началом отсчета радиуса-вектора  $r$  является точка  $O'$ , через которую проходит ось вращения тела. Эта точка, будучи одной из точек тела, имеет поступательную скорость  $v_0$ . Следовательно,

$$v = v_0 + [\omega, r]. \quad (10.5)$$



22.

Разложение скорости движения точек твердого тела на поступательную и вращательную неоднозначно

В обоих случаях, разделенных знаком равенства, полная скорость любой точки вдоль прямой  $AB$ , равна сумме поступательной и вращательной скоростей, одна и та же

Поскольку разложение перемещения на поступательное и вращательное неоднозначно, неоднозначным является и разложение скорости на поступательную и вращательную, что поясняется на рис. 22 в виде символического равенства: в его левой части движение слагается из поступательного со скоростью  $u$  и вращательного вокруг оси  $O$ , а в правой части — из поступательного со скоростью  $u'$ , меньшей, чем  $u$ , и вращательного вокруг оси  $O'$ .

Изменяя поступательную скорость тела, мы одновременно изменяем положение оси вращения. Можно сказать, что любая ось, перпендикулярная плоскости движения, представляет собой ось вращения.

При этом поступательная скорость тела будет зависеть от того, какая ось выбрана за ось вращения. Та ось вращения, для которой поступательная скорость равна нулю, называется мгновенной осью вращения.

Скорость всех точек тела в данный момент может быть представлена как скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси. Поступательная скорость точки твердого тела, через которую про-

?

- 1 Чем определяется число степеней свободы механической системы?
- 2 Чему равно число степеней свободы твердого тела в различных случаях движения?
- 3 Каково геометрическое определение углов Эйлера?
- 4 Как доказывается возможность разложения скорости плоского движения твердого тела на сумму поступательной и вращательной скоростей?
- 5 Что такое мгновенная ось вращения? Можете ли Вы привести примеры мгновенной оси вращения в простейших случаях движения?

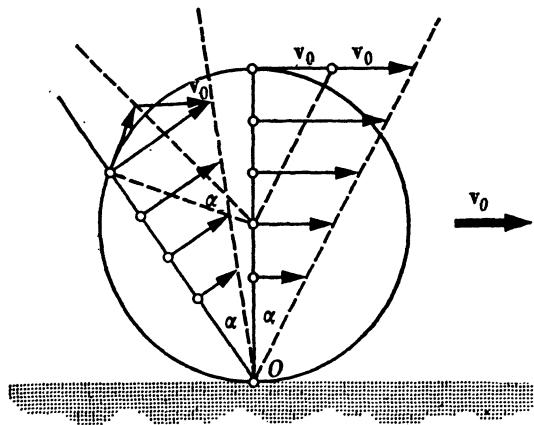
ходит мгновенная ось, равна нулю. Но и вращательная скорость этой точки равна нулю, поскольку она лежит на оси вращения. Следовательно, скорость всех точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси, равна нулю. Если рассматриваемое твердое тело имеет конечные размеры, то мгновенная ось может лежать вне тела, однако ее свойства и определение остаются, конечно, теми же самыми.

На рис. 21, б показано построение для нахождения оси, движением вокруг которой плоское перемещение твердого тела представляется в виде чистого вращения. Точка  $O$ , через которую проходит ось, расположена на пересечении перпендикуляров к  $AA'$  и  $BB'$ . Это видно из того обстоятельства, что треугольники  $ABO$  и  $A'B'O$  равны, поскольку сторона  $OB$  равна  $OB'$  и сторона  $OA$  равна  $OA'$ , как проведенные к концам отрезка из точки на перпендикуляре к его середине, а сторона  $AB$  равна  $A'B'$ , поскольку это один и тот же отрезок в разных положениях. В случае бесконечно малого перемещения это построение дает точку  $O$ , через которую проходит мгновенная ось вращения. С течением времени положение мгновенной оси меняется относительно тела и относительно системы координат, в которой рассматривается движение тела.

Проиллюстрируем это на примере катящегося по прямой линии колеса. Его мгновенной осью вращения является прямая, параллельная оси колеса и проходящая через точку соприкосновения колеса с землей (рис. 23). Эта ось меняет свое положение относительно земли. За время  $t$  она перемещается в точку, отстоящую от первоначальной на величину  $vt$ , где  $v$  — скорость движения оси колеса. Мгновенная ось в разные моменты времени проходит через различные точки колеса, перемещаясь вдоль обода. Мгновенная ось — это воображаемая ось, которая не имеет своего материального носителя. Поэтому говорить о скорости движения мгновенной оси не имеет физического смысла.

Например, если линейка падает на поверхность стола, будучи ей параллельна, то можно сказать, что точка соприкосновения линейки со столом движется с бесконечной скоростью. Но в действительности в этом явлении нет материального носителя, который движется с бесконечной скоростью. Примерно такой же характер имеет и «скорость» мгновенной оси вращения. Физический смысл имеет не скорость движения мгновенной оси, а именно тот факт, что точки материального тела, лежащие на мгновенной оси, покоятся в рассматриваемый момент времени и движение тела сводится к вращению вокруг этой оси.

Все сказанное выше относилось к плоскому движению тела. Теперь рассмотрим тело, закрепленное в одной точке. Спрашивается, может ли мгновенное движение этого тела быть представлено в виде вращения вокруг некоторой оси, проходящей через зак-



23.

К понятию мгновенной оси вращения

крепленную точку тела? Ответ на этот вопрос дает теорема Эйлера, которая гласит:

**твердое тело, имеющее одну закрепленную неподвижную точку, может быть из одного положения переведено в любое другое одним поворотом на некоторый угол вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления.**

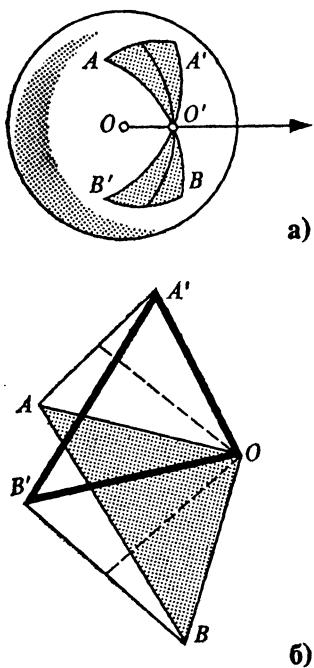
Теорема Эйлера справедлива как в случае бесконечно малых перемещений тела, так и в случае конечных. Для доказательства очертим в твердом теле некоторую сферу единичного радиуса с центром в закрепленной точке и проведем на этой сфере дугу  $AB$ . Положение этой дуги полностью характеризует положение твердого тела. При его движении положение дуги меняется в пространстве, оставаясь на поверхности сферы единичного радиуса. Утверждение теоремы Эйлера сводится к тому, что дуга  $AB$  может быть переведена в любое другое положение одним поворотом. Рассмотрим два положения дуги на сфере:  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 24, а). Соединим точки  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$  дугами больших кругов. Затем через середины этих дуг проведем перпендикулярно им дуги больших кругов до пересечения в точке  $O'$ . Из построения

!

**Точка соприкосновения колеса с землей неподвижна. Грязь, отбрасываемая колесами автомобиля назад, отлетает от не соприкасающихся с землей точек, находящихся в движении.**

?

- 1      Опишите метод нахождения мгновенной оси вращения.
- 2      В чем состоит доказательство теоремы Эйлера?
- 3      Из каких скоростей слагается скорость точек твердого тела при произвольном движении?
- 4      Если тело движется поступательно, то где ось вращения?



## 24.

К доказательству теоремы Эйлера

Дуга  $AB$  сферы одним вращением вокруг оси, проходящей через центр сферы и точку  $O'$ , может быть совмещена с дугой  $A'B'$

!

*Произвольное движение твердого тела может быть представлено как движение некоторой точки и вращение тела с мгновенной угловой скоростью, проходящей через эту точку.*

видно, что сферический треугольник  $AO'B'$  равен сферическому треугольнику  $A'O'B$ . Поэтому вращением вокруг оси, проходящей через точку  $O'$  и центр сферы, они могут быть совмещены друг с другом. Тем самым теорема Эйлера доказана. На рис. 24, б показано аналогичное построение для нахождения мгновенной оси вращения в плоском движении (точка  $O$  здесь соответствует точке  $O'$  на рис. 24, а).

Из теоремы Эйлера непосредственно следует, что движение закрепленного в точке твердого тела в каждый данный момент может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления. Положение этой мгновенной оси с течением времени меняется как относительно точек твердого тела, так и относительно неподвижной системы координат, в которой твердое тело закреплено в одной точке. Скорость точек твердого тела представляется в виде

$$\mathbf{v} = [\omega_m, \mathbf{r}], \quad (10.6)$$

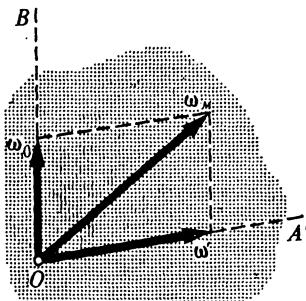
где  $\omega_m$  — мгновенная угловая скорость,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор относительно закрепленной точки. Пользуясь тем, что угловая скорость  $\omega_m$  является вектором, можно представить ее как сумму двух векторов (рис. 25): один вектор направлен вдоль линии  $OA'$ , закрепленной относительно точек тела; другой — вдоль линии  $OB$ , неподвижной в системе координат, в которой рассматривается движение твердого тела, т. е.

$$\omega_m = \omega_0 + \omega', \quad \mathbf{v} = [\omega_0, \mathbf{r}] + [\omega', \mathbf{r}]. \quad (10.7)$$

Представив скорость тела в таком виде, можно сказать, что его движение слагается из двух: вращения с угловой скоростью  $\omega'$  вокруг оси, имеющей неизменное положение относительно тела,

и вращения с угловой скоростью  $\omega_0$  относительно оси, имеющей неизменное направление в пространстве. Угловая скорость  $\omega_0$  при движении меняется лишь по значению, но не меняет своего направления. Угловая скорость  $\omega'$  меняется как по значению, так и по направлению. Скорость каждой точки равна сумме двух скоростей:  $[\omega_0, r]$  — скорости вращения тела вокруг неподвижной оси и  $[\omega', r]$  — скорости вращения тела относительно закрепленной в теле оси, которая вращается вместе с телом вокруг неподвижной оси.

Произвольное движение твердого тела слагается из движения некоторой точки тела и движения тела относительно этой точки, рассматриваемой как точка закрепления. Следовательно, изложенное выше дает полное описание движения твердого тела.



## 25.

**Разложение вектора мгновенной угловой скорости  $\omega_m$  вращения твердого тела на составляющие:  $\omega_0$  и  $\omega'$**

Направление угловой скорости  $\omega_0$  неизменно относительно неподвижной системы координат, а угловой скорости  $\omega'$  неизменно относительно тела, но меняется относительно неподвижной системы координат

# Глава 3

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

---

- 11. Принцип относительности
- 12. Преобразования Галилея
- 13. Постоянство скорости света
- 14. Преобразования Лоренца

**В**опрос о преобразовании координат, относящихся к одной и той же инерциальной системе отсчета, является чисто математическим, а вопрос о преобразовании координат, относящихся к различным инерциальным системам отсчета, является вопросом физики. Он может быть решен только с помощью эксперимента.

---

### 11. Принцип относительности

Геометрические преобразования координат. Положение точек относительно материального тела, принятого за систему отсчета, описывается с помощью системы координат, как это было подробно рассмотрено в § 5. В каждой системе координат пространственное положение точки задается тремя числами, называемыми координатами. Формулы, связывающие эти числа в одной системе координат с соответствующими числами в другой системе координат, называются формулами преобразования координат или просто преобразованием координат. В качестве примеров в § 5 были рассмотрены формулы преобразования от сферической и цилиндрической систем координат к декартовой, а в § 6 — преобразование от одной декартовой системы координат к другой. Эти преобразования координат происходят в одной и той же системе отсчета и являются чисто геометрическими операциями, осуществлямыми алгебраическими методами. Они полностью опреде-

ляются способом введения различных систем координат и геометрическими свойствами пространства в том смысле, как это было рассмотрено в § 5. Они не связаны с движением тела отсчета.

Можно себе представить, что различные системы координат связаны с различными телами отсчета, которые покоятся друг относительно друга. Но покоящиеся друг относительно друга системы отсчета в совокупности составляют одну систему отсчета. Поэтому все эти системы координат описывают одну и ту же систему отсчета в различных переменных. Именно поэтому эти преобразования и являются чисто геометрическими. Для того чтобы рассматривать движение, необходимо было ввести измерение времени и синхронизовать часы, как это было сделано в § 7. Однако преобразование пространственных координат в одной и той же системе отсчета не затрагивает времени, поскольку физические условия в некоторой точке определяются системой отсчета, а не тем, как в ней будет характеризоваться пространственное положение точки. Можно сказать, что время просто не имеет отношения к преобразованиям пространственных координат в пределах одной и той же системы отсчета.

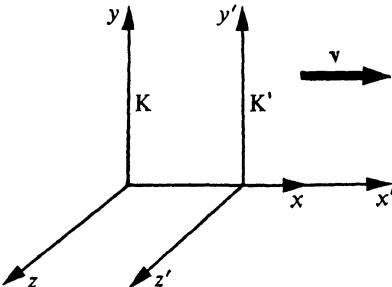
**Физические преобразования координат.** Различные материальные тела, с которыми связаны различные системы отсчета, могут находиться в движении друг относительно друга. В каждой из систем отсчета введены свои системы координат, время в различных точках измеряется по часам, покоящимся в этих точках и синхронизованных между собой указанным в § 7 способом. Возникает вопрос о том, как связаны координаты и время двух разных систем отсчета, если эти системы находятся в относительном движении? Ответ на этот вопрос не может быть дан лишь на основе геометрических соображений. Это физическая задача. Она превращается в геометрическую лишь в том случае, когда относительная скорость различных систем отсчета равна нулю, физическое различие между системами отсчета исчезает и их можно рассматривать как одну систему отсчета.

**Инерциальные системы отсчета и принцип относительности.** Простейшее движение твердого тела — его поступательное равномерное прямолинейное движение. Соответственно этому простейшим относительным движением систем отсчета является поступательное равномерное прямолинейное движение. Одну из систем отсчета будем условно называть неподвижной, а другую — движущейся. В каждой из систем отсчета введем декартову систему координат. Координаты в неподвижной системе отсчета  $K$  будем обозначать через  $(x, y, z)$ , а в движущейся  $K'$  — через  $(x', y', z')$ . Условимся, что величины в движущейся системе координат будут обозначаться теми же буквами, что в неподвижной, но со штрихами. Оси систем координат направим, как указано на рис. 26. Вместо того чтобы говорить: «тело отсчета, с которым связана штрихованная система координат, движется со скоростью  $v$ », будем сокращенно говорить: «штрихован-

26.

**Относительное движение штрихованной и нештрихованной систем координат**

Пространственным поворотом систем координат и перемещением начала координат можно всегда добиться такого положения, что оси  $x$ ,  $x'$  этих систем координат совпадут, а движение будет происходить вдоль оси  $x$ . При таком взаимном расположении систем преобразования координат имеют наимпростейший вид



!

**Поворотом систем координат и перемещением начала отсчета всегда целесообразно добиться наиболее простого взаимного расположения систем координат.**

**Инварианты преобразований представляют то существенное в изучаемых объектах, что не зависит от случайного выбора системы координат, а действительно характеризует свойства объектов.**

?

1    Чем отличаются чисто геометрические преобразования координат от физических преобразований?

2    Если имеются различные системы отсчета, то при каком условии преобразования связанных с ними координат становятся геометрическим преобразованием?

ная система координат движется со скоростью  $v$  относительно нештрихованной». Это не вызывает недоразумений, поскольку каждая система координат имеет смысл лишь при указании тела отсчета, с которым она связана. В том же смысле будем говорить об измерении времени в различных системах координат, о синхронизации часов и т. д., понимая, что все это производится в соответствующих системах отсчета.

Первый принципиальный вопрос, который возникает, состоит в следующем. В § 5 и 7 было рассмотрено измерение координат и времени в предположении справедливости геометрии Евклида, существование единого времени и возможности такой синхронизации часов, которая была описана. Было сказано, что существование таких систем подтверждается опытом. Теперь необходимо указать способ нахождения таких систем отсчета. Это можно сделать лишь в результате изучения хода физических процессов в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга. Давно было замечено, что по наблюдениям за ходом механических явлений в системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно поверхности Земли, ничего нельзя сказать об этом движении. Внутри кабины корабля, плавущего по морю без качки равномерно и прямолинейно, все механические явления протекают так же, как и на берегу.

Если на поверхности Земли проделать более тонкие физические опыты, например опыт с маятником Фуко, то удается обнаружить движение поверхности Земли относительно системы неподвижных звезд. Однако анализ показывает, что в этих опытах обнаруживается не скорость точек поверхности Земли относительно неподвижных звезд, а их ускорение. Из других же многочисленных опытов следует, что

**во всех системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно системы неподвижных звезд и, следовательно, друг относительно друга, все механические явления протекают совершенно одинаково.** Предполагается, что поля тяготения пренебрежимо малы. Такие системы координат называются **инерциальными**, поскольку в них справедлив закон инерции Ньютона: **тело, удаленное достаточно далеко от других тел, движется относительно систем координат равномерно и прямолинейно.**

Утверждение, впервые высказанное Галилеем, о том, что во всех инерциальных системах координат механические явления протекают, одинаково, называется **принципом относительности Галилея**. В дальнейшем в результате изучения других явлений, в частности электромагнитных, справедливость этого положения была признана для любых явлений. В таком общем виде оно называется **принципом относительности специальной теории относительности** или просто **принципом относительности**. В настоящее время он с большой точностью экспериментально доказан для механических и электромагнитных явлений. Тем не менее **принцип относительности является постулатом**, т. е. **основополагающим допущением, выходящим за пределы экспериментальной проверки**. Это обусловлено двумя обстоятельствами.

Во-первых, в пределах изучаемого круга физических явлений эксперимент позволяет проверить утверждение лишь с определенной точностью, доступной измерениям на данном этапе развития науки. Утверждение же носит абсолютный характер, т. е. предполагает, что при сколь угодно большом повышении точности результаты эксперимента будут находиться в согласии с утверждением. Ясно, что это не может быть проверено экспериментально, потому что на каждом данном этапе развития науки эксперименты могут быть выполнены лишь с конечной точностью. Во-вторых, неизвестны физические явления, которые в настоящее время не открыты. Утверждение о том, что все явления, которые будут открыты в будущем, подчиняются принципу относительности, есть также выход за пределы эксперимента. Поэтому **принцип относительности является постулатом и всегда в будущем останется таким**. Это не умаляет его значения. Все научные понятия, законы, теории выработаны для определенного круга физических явлений и справедливы в определенных пределах. Выход за пределы их применимости не делает эти понятия, законы, теории и т. д. неправильными. Он лишь указывает границы,

условия и точность их применимости. Прогресс науки как раз и состоит в выходе за пределы применимости существующих теорий.

Теперь вернемся к вопросу о том, в каких системах координат геометрия является евклидовой, существует единое время и возможна такая синхронизация часов, которая была описана выше? Ответ гласит: такими системами являются инерциальные системы координат. Этих систем существует бесконечное множество, но все они движутся поступательно равномерно и прямолинейно друг относительно друга. В последующем будут рассматриваться только инерциальные системы и лишь в гл. 14 — неинерциальные системы.

**Ложное и истинное в физике.** Для оценки значения физических теорий необходимо иметь в виду определенную асимметрию между понятиями истинного и ложного в физике. Результаты данного физического эксперимента могут либо находиться в согласии с проверяемой теорией, либо ей противоречить. Если они ей противоречат, то теория ложна. Это утверждение абсолютно и окончательно и не может быть изменено никаким последующим развитием науки. Если же они ей не противоречат, то это лишь означает, что данный эксперимент не противоречит теории и можно продолжать ею пользоваться. К каким выводам относительно этой теории приведет дальнейшее развитие науки на основании этого эксперимента, сказать нельзя. Иначе говоря, ложность физической теории может быть установлена на любом этапе, а истинность — лишь в перспективе развития. Это связано с философским соотношением между абсолютной и относительной истинами. На каждом этапе познается относительная истина и лишь бесконечная последовательность этапов познания ведет человечество в направлении познания абсолютной истины. Этот процесс никогда не будет завершен.

**Физическое содержание принципа относительности.** Принцип относительности основывается на предположении, что существует бесчисленное множество систем координат, в которых геометрия является евклидовой, существует единое время и часы можно синхронизовать так, как это было описано ранее. Пространственно-временные соотношения в пределах каждой из этих систем координат совершенно одинаковы и по этому признаку системы координат неотличимы друг от друга. Справедливость такого предположения обосновывается большим числом экспериментальных фактов. Опыт показывает, что в таких системах координат соблюдается первый закон Ньютона и поэтому они называются инерциальными. Эти системы координат движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, без вращения.

Указанные пространственно-временные соотношения должны соблюдаться во всем пространстве и в течение бесконечно больших промежутков времени. Если они справедливы лишь приближенно в ограниченной области пространства, то нельзя говорить о системе координат, в которой справедлив принцип относительности специальной теории относительности. Например, пусть система координат

движется прямолинейно и равноускоренно относительно системы неподвижных звезд. В этой системе координат существует единое время, и в небольших областях пространства геометрия является с большой точностью евклидовой (при достаточно малых ускорениях), и можно приблизенно синхронизовать часы так, как это было описано ранее. Однако такая система координат не относится к системам координат, к которым можно применять принцип относительности, и не является инерциальной, хотя в малой области пространства и для небольших промежутков времени пространственно-временные соотношения в этой системе мало отличаются от аналогичных соотношений в инерциальной системе координат.

Но содержание принципа относительности не сводится лишь к характеристике пространственно-временных соотношений. Принцип относительности является констатацией одинакового характера течения физических процессов в инерциальных системах координат и является, следовательно, физическим утверждением. Впрочем, надо иметь в виду обсужденный ранее смысл утверждений о свойствах пространства и времени.

## 12. Преобразования Галилея

**Преобразования Галилея.** Движущаяся система координат (см. рис. 26) в каждый момент времени занимает определенное положение относительно неподвижной. Если начала обеих систем координат совпадают в момент  $t = 0$ , то в момент  $t$  начало движущейся системы координат находится в точке  $x = vt$  неподвижной системы. Преобразования Галилея предполагают, что для координат и времени систем  $(x, y, z)$  и  $(x', y', z')$  в каждый момент существует такое соотношение, какое существовало бы между ними, если бы эти системы в данный момент покоились друг относительно друга, т. е. преобразования координат сводятся к геометрическим преобразованиям, которые были уже рассмотрены, а время является одним и тем же, т. е.

$$\boxed{x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.} \quad (12.1)$$

Эти формулы называются преобразованиями Галилея.

Очевидно, что в качестве неподвижной системы можно было бы взять штрихованную. В штрихованной системе координат нештрихованная движется со скоростью  $v$  в направлении отрицательных значений  $x'$ , т. е. с отрицательной скоростью. Поэтому формулы преобразования в этом случае могут быть получены из (12.1) заменой штрихованных величин на нештрихованные и заменой  $v \rightarrow -v$ , т. е. имеют вид

$$\boxed{x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.} \quad (12.2)$$

Полезно заметить, что формулы (12.2) сейчас были получены из (12.1) не путем вычисления, т. е. не решением уравнений (12.1) относительно ненштрихованных величин, а путем применения к преобразованиям (12.1) принципа относительности. Конечно, те же формулы (12.2) получаются из (12.1) просто решением их как системы уравнений относительно ненштрихованных величин. Совпадение обоих результатов означает, что уравнения (12.1) и (12.2) не противоречат принципу относительности.

**Инварианты преобразований.** При преобразовании координат различные физические и геометрические величины, вообще говоря, изменяют свои численные значения. Например, положение некоторой точки характеризуется тремя числами  $(x_1, y_1, z_1)$ . При изменении системы координат эти числа меняются. Ясно, что они характеризуют не какое-либо объективное свойство точки, а лишь положение точки относительно конкретной системы координат.

Если величина не изменяет своего численного значения при преобразовании координат, то это означает, что она имеет объективное значение, независимое от выбора той или иной системы координат. Такие величины отражают свойства самих изучаемых явлений и предметов, а не отношения этих явлений и предметов к системе координат, в которой они рассматриваются. Величины, численное значение которых не изменяется при преобразовании координат, называются инвариантами преобразований. Они имеют первостепенное значение в физической теории. Поэтому необходимо изучить инварианты преобразований Галилея.

**Инвариантность длины.** Пусть в штрихованной системе координат находится стержень, координаты концов которого  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  и  $(x'_2, y'_2, z'_2)$ . Это означает, что длина стержня в штрихованной системе равна  $l = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$ . В ненштрихованной системе координат стержень движется поступательно и все его точки имеют скорость  $v$ . Длиной движущегося стержня, по определению, называется расстояние между координатами его концов в некоторый момент времени. Таким образом, для измерения длины движущегося стержня необходимо одновременно, т. е. при одинаковых показаниях часов неподвижной системы координат, расположенных в соответствующих точках, отметить положение концов стержня. Пусть засечки положения концов движущегося стержня сделаны в неподвижной системе координат в момент  $t_0$  и характеризуются координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ . Согласно формулам преобразования (12.1), координаты и время в движущейся и неподвижной системах связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - vt_0, & x'_2 &= x_2 - vt_0, \\ y'_1 &= y_1, & y'_2 &= y_2, \\ z'_1 &= z_2, & z'_2 &= z_2, \\ t'_1 &= t_0, & t'_2 &= t_0. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Отсюда следует:

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1, \quad y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1, \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$$

и поэтому

$$\boxed{l = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l',} \quad (12.4)$$

т. е. длина стержня в обеих системах координат одинакова. Это позволяет утверждать, что длина является инвариантом преобразований Галилея.

**Абсолютный характер понятия одновременности.** Обратим внимание на последнюю строчку в формуле (12.3): эти равенства показывают, что в тот момент, когда засекались концы движущегося стержня в неподвижной системе координат, часы, расположенные в тех точках движущейся системы координат, с которыми совпадают концы стержня, показывают одно и то же время. Это является следствием формулы преобразования времени от одной системы координат к другой в виде  $t' = t$ . Она говорит, что события, одновременные в одной системе, одновремены и в другой, т. е. **утверждение об одновременности двух событий имеет абсолютный характер, независимый от системы координат.**

**Инвариантность интервала времени.** Инвариантность интервала времени доказывается на основании формулы преобразования  $t' = t$ . Пусть в движущейся системе координат произошли события в некоторые моменты  $t'_1$  и  $t'_2$ . Интервал времени между этими событиями

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \quad (12.5)$$

В неподвижной системе координат эти события на основании (12.2) произошли в моменты  $t_1 = t'_1$  и  $t_2 = t'_2$  и, следовательно, интервал времени между ними

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'.} \quad (12.6)$$

Таким образом, можно сказать, что **интервал времени является инвариантом преобразований Галилея.**

**Сложение скоростей.** Пусть в штрихованной системе координат движется материальная точка, зависимость координат которой от времени описывается формулами:

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (12.7)$$

а компоненты скорости равны:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (12.8)$$

В неподвижной системе координат на основании (12.2) координаты этой точки изменяются со временем по закону:

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t') + vt', & z(t) &= z'(t'), \\ y(t) &= y'(t'), & t &= t', \end{aligned} \quad (12.9)$$

а компоненты ее скорости даются равенствами:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \frac{dt}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v \frac{dt'}{dt'} = u'_x + v, \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = u'_y, \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} = u'_z, \end{aligned} \quad (12.10)$$

которые являются формулами сложения скоростей классической нерелятивистской механики.

**Инвариантность ускорения.** Дифференцируя равенства (12.10) с учетом того, что  $dt = dt'$ , получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{(dt')^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{(dt')^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{(dt')^2}. \quad (12.11)$$

Эти формулы показывают, что ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея.

### 13. Постоянство скорости света

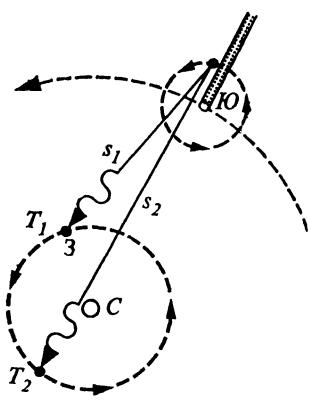
Справедливость преобразований Галилея может быть проверена сравнением следствий из них с экспериментом. Важнейшим следствием является формула сложения (12.10). Именно проверка этой формулы показала ее приближенный характер. Отклонения от нее тем значительнее, чем больше скорость. Особенно они велики при скоростях, близких к скорости света. Эти отклонения впервые были

открыты при исследовании скорости света, поведение которой с точки зрения классической физики оказалось не только странным, но и необъяснимым. Поэтому необходимо прежде всего рассмотреть вопрос о скорости света.

**Развитие взглядов на скорость света.** Античные мыслители имели о свете представления двойского рода. Платон (427—347 гг. до н. э.) придерживался теории зрительных лучей, которые исходят из глаза и как бы «ощущают предметы». Демокрит (460—370 гг. до н. э.) был сторонником теории атомов истечения, которые попадают от предметов в глаз. Аристотель (384—322 гг. до н. э.) также придерживался теории истечения. Однако геометрический характер, приданый оптике Евклидом (300 г. до н. э.), установившим учение о прямолинейном распространении лучей света и законы отражения, делал обе точки зрения практически эквивалентными. В дальнейшем получила перевес точка зрения атомов истечения, при этом считалось, что свет распространяется с очень большой скоростью и даже мгновенно. Это убеждение базировалось на аналогии с полетом стрелы из лука: траектория стрелы тем прямее, чем больше скорость стрелы.

Основоположник новой физики Галилей (1564—1642) считал скорость света конечной, но не имел о ней никакого реального представления, пытаясь измерить ее заведомо непригодными методами. Декарт (1596—1650) выдвинул новую точку зрения на свет, согласно которой свет есть давление, передаваемое через среду с бесконечной скоростью. Таким образом, Декартом ясно высказывается мысль о необходимости среды для передачи света. Гримальди (1618—1660) и Гук (1625—1695) предложили волновую точку зрения на свет: свет есть волновое движение в однородной среде. Но истинным создателем волновой теории света явился Христиан Гюйгенс (1629—1695), изложивший ее перед Парижской Академией наук в 1678 г. Ньютон (1643—1727) неохотно высказывался о природе света, «не желая измышлять гипотез». Однако он явно принимал корпускулярную теорию истечения, хотя и не настаивал на ее безусловной правильности. В 1675 г. Ньютон писал: «Свет, по моему мнению, не следует определять ни как эфир, ни как колебательное движение эфира, но как нечто, распространяющееся от светящихся тел. Это нечто можно считать либо группой различных перипатетических качеств, либо, еще лучше, множеством крайне малых и быстрых корпускул».

**Определение скорости света Ремером.** Впервые скорость света была измерена в 1676 г. Ремером. Наблюдения затмений спутников Юпитера показали, что видимый период их обращения уменьшается, когда Земля в своем годовом движении приближается к Юпитеру, и увеличивается, когда Земля удаляется от него. Ремер понял, что этот эффект связан с конечной скоростью распространения света, и по результатам наблюдений вычислил эту скорость. На рис. 27 изображено положение спутника Юпитера в момент после затмения.



27.

К определению скорости света Ремером

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \quad y' = y, \\z' &= z, \quad t' = t.\end{aligned}$$

!

*Если в движущемся поезде производить выстрелы с интервалом, например, в одну секунду, то наблюдатель на полотне железной дороги, к которому этот поезд приближается, будет слышать их следующими друг за другом чаще, чем через секунду. Наблюдатель, от которого поезд удаляется, будет слышать более редкие выстрелы.*

Поскольку период обращения Юпитера вокруг Солнца много больше периода обращения Земли вокруг Солнца, при расчете можно считать Юпитер неподвижным. Пусть в некоторый момент  $t_1$  спутник Юпитера выходит из его тени, что будет зафиксировано земным наблюдателем в момент

$$T_1 = t_1 + s_1/c, \quad (13.1)$$

где  $s_1$  — расстояние между Землей и точкой выхода спутника из тени в момент наблюдения,  $c$  — скорость света. После того как спутник совершил один оборот вокруг Юпитера, выход его из тени произойдет в момент  $t_2$ , а земной наблюдатель отметит в момент

$$T_2 = t_2 + s_2/c. \quad (13.2)$$

Таким образом, согласно измерениям земного наблюдателя период обращения спутника

$$T_{\text{набл}} = T_2 - T_1 = T_{\text{ист}} + (s_2 - s_1)/c, \quad (13.3)$$

где  $T_{\text{ист}} = (t_2 - t_1)$  — истинный период обращения спутника. Таким образом, вследствие разности расстояний от Земли до Юпитера  $s_2 - s_1$  наблюдаемый период обращения спутника будет отличаться от истинного. Если проделать большое число измерений этого периода как при приближении Земли к Юпитеру, так и при удалении от него, то среднее значение полученных результатов будет равно истинному периоду, поскольку при усреднении члены  $(s_2 - s_1)/c$  имеют различные знаки и взаимно уничтожаются.

Зная  $T_{\text{ист}}$ , можно по формуле (13.3) определить скорость света:

$$c = (s_2 - s_1)/(T_{\text{набл}} - T_{\text{ист}}). \quad (13.4)$$

Величины  $s_2$  и  $s_1$  известны из астрономических вычислений, поскольку движения Юпитера и Земли хорошо изучены. Нетрудно, конечно, учесть и движение Юпитера. Проделав соответствующие расчеты,

Ремер получил значение скорости света  $c = 214\,300$  км/с. Это было первое надежное измерение скорости света с удовлетворительной для тех времен точностью.

**Аберрация света** (Брадлей, 1727). Капли дождя в безветренную погоду падают вертикально. Однако на стекле движущегося горизонтально поезда они оставляют наклонный след. Это является следствием сложения вертикальной скорости капли и горизонтальной скорости поезда. Со светом наблюдается аналогичное явление, называемое аберрацией. В результате аберрации света кажущееся направление на звезду отличается от истинного (рис. 28) на угол  $(\pi/2) - \alpha = \beta$ , называемый углом аберрации. Из рисунка видно, что

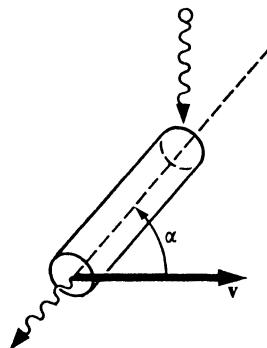
$$\tan \beta = v_{\perp} / c, \quad (13.5)$$

где  $v_{\perp}$  — составляющая скорости движения Земли, перпендикулярная направлению к Звезде,  $c$  — скорость света.

Явление аберрации практически наблюдается следующим образом. Ось телескопа при каждом наблюдении в течение года ориентируется одинаковым образом в пространстве относительно звездного неба, и при этом изображение звезды фиксируется в фокальной плоскости телескопа. В течение года это изображение описывает некоторый эллипс. Зная размеры эллипса и другие данные наблюдения, можно определить угол аберрации. Измерив  $\alpha$  и зная  $v_{\perp}$  (скорость Земли), можно вычислить скорость света, что подтвердило результаты Ремера в пределах той же точности.

**Различные трактовки скорости света.** После того как установлена скорость света, возникает вопрос о том, от чего она зависит. Ответ на него в рамках существовавших в то время представлений был обусловлен взглядом на природу света.

Если свет есть волнообразное движение однородной среды, то его скорость относительно этой среды является неко-



### 28.

При наблюдении света от звезды, расположенной перпендикулярно скорости движения Земли, ось телескопа необходимо ориентировать под углом  $\beta$  к истинному направлению на звезду из-за аберрации света

$$\begin{aligned} x &= x' + vt', & y &= y', \\ z &= z', & t &= t'. \end{aligned}$$

!

Во время дождя при отсутствии ветра, чтобы не намокнуть, надо зонтик держать вертикально. Если же приходится бежать, то его необходимо наклонить в направлении движения.

торой постоянной величиной, определяемой свойствами среды. Скорость же света относительно источника и наблюдателя является переменной величиной, зависящей от скорости источника или наблюдателя относительно этой среды, и находится по правилу сложения скоростей (12.10).

Если свет есть поток быстрых корпускул, летящих от источника, то естественно считать, что скорость этих корпускул относительно источника имеет некоторое постоянное значение, а относительно наблюдателя складывается согласно (12.10) со скоростью наблюдателя относительно источника.

**Идея так называемого Мирового эфира и Абсолютной скорости.** Авторитет Ньютона принес победу корпускулярной точке зрения на свет. Волновая теория Гюйгенса, хотя и имела сторонников, в продолжение свыше ста лет была оттеснена на задний план. Однако в начале XIX столетия новые открытия в оптике в корне изменили положение. В 1801 г. Юнг установил принцип интерференции и на его основе объяснил цвета тонких пластинок. Однако эти представления Юнга, носившие скорее качественный характер, еще не смогли завоевать всеобщего признания. Окончательный удар по корпускулярной теории был нанесен в 1818 г. Френелем, решившим на основе волновой теории проблему дифракции. Все попытки рассмотреть эту проблему в рамках корпускулярной теории оказались безуспешными. Идея работы Френеля базировалась на объединении принципа элементарных волн Гюйгенса с принципом интерференции Юнга. В течение нескольких лет после этого корпускулярная теория была полностью вытеснена из науки и общепринятой стала точка зрения на свет как на волновой процесс в среде. Эта среда, заполняющая всю Вселенную, получила название «Мирового эфира». Задача заключалась в том, чтобы построить теорию света как теорию колебаний эфира. В дальнейшем роль эфира была расширена, он считался ответственным и за другие явления (тяготение, магнетизм, электричество). В работе по созданию теории Мирового эфира приняли участие многие выдающиеся ученые прошлого столетия. Однако сейчас эти работы имеют лишь исторический интерес и их нет необходимости освещать. Мы напомнили о Мировом эфире лишь для того, чтобы пояснить понятие Абсолютной скорости и методы ее поисков.

Согласно только что изложенным представлениям, эфир заполняет все пространство, в котором движутся материальные тела, и неподвижен в этом пространстве. Скорость света относительно эфира является постоянной величиной, определяемой свойствами эфира. Материальные тела движутся относительно неподвижного эфира, заполняющего все пространство. Ясно, что это движение тел относительно эфира носит абсолютный характер и отличается от движения материальных тел друг относительно друга. Действительно, если тело *A* движется относительно тела *B* со скоростью *v*, то ее можно изменить, действуя силой как на тело *A*, так и на тело *B*. Изменить

же движение тела *A* относительно эфира можно только приложением силы к нему, а не к какому-либо другому телу. Скорость тела относительно эфира была названа «Абсолютной». Абсолютная скорость данного материального тела не зависит от движения других тел. Она, по идею, имела бы смысл даже тогда, когда все остальные тела перестали существовать. Возникает лишь вопрос, как ее измерить.

**Идея измерения так называемой Абсолютной скорости.** Поскольку скорость света относительно эфира постоянна, то относительно материальных тел, движущихся в эфире, она переменна и зависит от их скорости относительно эфира. Измерив скорость тела относительно света, или, что то же самое, скорость света относительно тела, можно определить скорость его относительно эфира (скорость света относительно эфира можно считать известной). Ситуация здесь совершенно аналогична той, когда гребцы в лодке, измерив скорость лодки относительно волн и зная скорость волн относительно неподвижной воды, могут найти свою скорость относительно воды.

Попытка таким способом определить Абсолютную скорость Земли была выполнена Майкельсоном и Морли (1881, 1887).

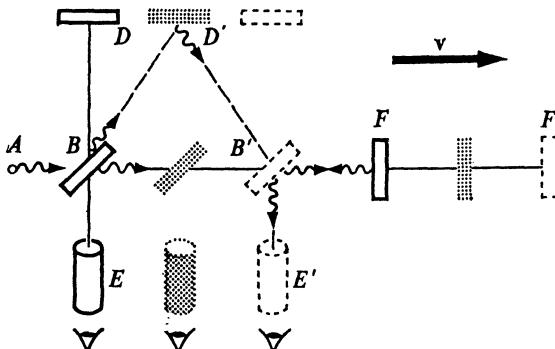
**Идея и схема опыта Майкельсона — Морли.** Идея опыта состоит в сравнении прохождения светом двух путей, из которых один совпадает с направлением движения тела в эфире, а другой ему перпендикулярен. Схема установки изображена на рис. 29.

Луч монохроматического света, т. е. света определенной частоты, из источника *A* падает на полупрозрачную пластинку *B*, расположенную под углом  $45^\circ$ . Здесь луч разделяется на два. Эти два луча порождаются одним и тем же падающим лучом и поэтому волнобразные движения в них происходят не независимо, а как бы в такт друг с другом. Если воспользоваться аналогией с волнами на поверхности воды, то в точке разделения колебания в обеих волнах происходят совершенно синхронно. Можно также представить себе случай, что обе волны колеблются по однаковому закону, но одна из них несколько запаздывает относительно другой. Иначе говоря, колебания в волнах происходят с постоянной разностью фаз, т. е. если колебание в одной из них в точке разделения описывается, например, функцией  $\sin \omega t$ , то колебание в другой представляется в виде  $\sin(\omega t + \phi)$ , где  $\phi = \text{const}$  — разность фаз рассматриваемых колебаний. Такие две волны называются **когерентными**. Таким образом, можно сказать, что на пластинке *B* луч разделяется на два когерентных луча: один отражается от пластинки и направляется к зеркалу *D*, а другой проходит через пластинку и направляется к зеркалу *F*. От зеркал *D* и *F* лучи света отражаются и возвращаются к пластинке *B*. Луч, частично отразившись от *D* и пройдя сквозь полупрозрачную пластинку *B*, встречается в интерферометре *E* с лучом, отразившимся от зеркала *F* и пластинки *B*. Таким образом, в интерферометре встречаются два когерентных луча, прошедших от места разделения два

29.

**Схема опыта Майкельсона — Морли в системе координат, связанной с эфиром**

На рисунке изображены последовательные положения интерферометра относительно эфира



!

**В опыте Майкельсона — Морли нельзя было выбрать «плечи» одинаковой длины, потому что это означало бы возможность измерения расстояния в несолько метров с точностью до миллионных долей метра, что в то время было невозможно.**

?

- 1 Как у античных мыслителей возникла идея об очень большой скорости распространения света? Правильны ли их рассуждения с точки зрения современной физики?
- 2 Опишите схему эксперимента, который бы позволил по методу Ремера измерить скорость звука.
- 3 К чему сводится учет скорости движения Юпитера в расчете скорости света по методу Ремера?

различных путей. Ясно, что если эти пути пройдены ими за одинаковое время, то в точке встречи между их колебаниями имеется та же самая разность фаз  $\phi$ , как и в точке разделения. Пусть, например, при разделении лучей разность фаз  $\phi = 0$ , т. е. колебания в обоих лучах происходят в одной и той же фазе. Эти лучи в точку встречи в рассматриваемом случае также придут в одной и той же фазе и усилят друг друга — гребень одной волны попадает на гребень другой. Если же рассматриваемые пути пройдены лучами за разное время, то в точке встречи разность фаз и колебаний изменится. Например, может случиться, что гребень одной волны совпадает с впадиной другой и они взаимно погасят друг друга. Явление сложения амплитуд волн называется интерференцией. Наблюдая интерференцию, можно сделать заключение о разности фаз пришедших в интерферометр когерентных волн, а отсюда вычислить время запаздывания одной волны относительно другой. Именно это и было сделано Майкельсоном и Морли. Оптическая часть этого эксперимента и устройство интерферометра Майкельсона будут более подробно рассмотрены в «Оптике».

**Расчет разности хода лучей.** Пусть прибор движется в направлении «плеча»  $BF = l_1$  со скоростью  $v$  относительно эфира (рис. 29). Скорость света относи-

тельно эфира обозначим через  $c$ . При движении луча от  $B$  к  $F$  направления скоростей света и прибора совпадают. Следовательно, скорость света относительно прибора равна  $c - v$ , а время, за которое им пройден путь от  $B$  к  $F$ ,

$$t_{BF}^{(1)} = \frac{l_1}{c - v}. \quad (13.6)$$

Время, в течение которого пройден путь от  $F$  к  $B$  после отражения,

$$t_{FB}^{(1)} = \frac{l_1}{c + v}, \quad (13.7)$$

поскольку свет движется навстречу прибору, и скорости складываются. Таким образом, полное время на прохождение пути до зеркала  $F$  и обратно будет

$$t_{||}^{(1)} = t_{BF}^{(1)} + t_{FB}^{(1)} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.8)$$

Индексом (1) снабжаются промежутки времени, за которые пройдены различные пути, при рассматриваемой ориентации прибора относительно направления движения, а индексом (2) — в случае, если прибор ориентирован так, что с направлением движения совпадает плечо  $BD$ .

Чтобы определить время прохождения пути  $BD'B'$ , учтем, что для попадания на зеркало  $D$  после отражения от  $B$  скорость света должна разложиться на две составляющие:  $v$  — вдоль направления движения прибора и  $c_{\perp}$  — перпендикулярную составляющую, направленную от  $B$  к  $D$ . Поэтому можно написать

$$c^2 = c_{\perp}^2 + v^2. \quad (13.9)$$

Время, в течение которого лучом пройден путь  $BD = l_2$ ,

$$t_{BD}^{(1)} = \frac{l_2}{c_{\perp}} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.10)$$

Скорость луча при движении в обратном направлении также равна  $c_{\perp}$ , и, следовательно, время прохождения пути  $DB$  то же самое. Поэтому полное время на прохождение пути до зеркала  $D$  и обратно равно

$$t_{\perp}^{(1)} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.11)$$

Скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца примерно 30 км/с. Линейная скорость вращения ее примерно в 60 раз меньше (около 500 м/с) и может не учитываться в сравнении со скоростью по орбите. Следовательно, если прибор стоит на Земле, величина  $(v/c)^2$  имеет порядок  $10^{-8}$ . Учитывая малость  $(v/c)^2$ , можно выражения

(13.8) и (13.11) разложить в ряд по этой величине и ограничиться первыми членами разложения. Получаем:

$$t_{||}^{(1)} \approx \frac{2l_1}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right), \quad t_{\perp}^{(1)} \approx \frac{2l_2}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (13.12)$$

Следовательно, разность времени хода лучей равна

$$\Delta t^{(1)} = t_{||}^{(1)} - t_{\perp}^{(1)} = \frac{2}{c} \frac{v^2}{c^2} \left( l_1 - \frac{l_2}{2} \right) + \frac{2}{c} (l_1 - l_2). \quad (13.13)$$

Теперь повернем прибор на  $90^\circ$  так, чтобы с направлением движения совпало плечо  $BD$ , а плечо  $BF$  было направлено перпендикулярно. Разность хода лучей по различным путям в этом случае вычисляется совершенно аналогично, но вместо плеча  $l_1$  в формулы входят  $l_2$ , и наоборот. Поэтому для разности хода лучей по времени вместо формулы (13.13) получим

$$\Delta t^{(2)} = t_{||}^{(2)} - t_{\perp}^{(2)} = \frac{2}{c} \frac{v^2}{c^2} \left( l_2 - \frac{l_1}{2} \right) + \frac{2}{c} (l_2 - l_1). \quad (13.14)$$

Таким образом, полное изменение разности хода лучей по времени при повороте прибора на  $90^\circ$  равно

$$\Delta t = \Delta t^{(1)} + \Delta t^{(2)} = \frac{l_1 + l_2}{c} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.15)$$

**Результат опыта Майкельсона — Морли.** Истинное движение прибора относительно предполагаемого эфира неизвестно. Следовательно, ориентировать прибор каким-либо плечом по направлению движения мы не можем. Поэтому в опыте прибор медленно вращается. Каково бы ни было направление движения прибора относительно предполагаемого эфира, при повороте прибора на  $360^\circ$  каждое из плеч два раза совпадает с линией движения и два раза примет положение, перпендикулярное направлению движения, если считать, что ось, вокруг которой вращается прибор, перпендикулярна скорости движения. Конечно, можно представить себе случай, когда ось вращения прибора совпадает с направлением его движения в эфире и тогда никакого изменения в разности хода наблюдаваться не будет. Но можно опыт поставить так, чтобы изменить направление оси вращения прибора и опять-таки добиться изменения разности хода. В интерферометре наблюдаются полосы интерференции. Если при повороте прибора разность хода лучей изменяется, то положение полос интерференции в поле зрения должно измениться. По смещению полос можно вычислить изменения разности хода лучей по времени и тем самым определить скорость движения прибора относительно предполагаемого эфира.

Такой опыт был проделан в 1881 г. Майкельсоном и затем, с большей точностью, в 1887 г. Майкельсоном и Морли. Чтобы увеличить эффективное расстояние, Майкельсон и Морли использовали много-кратные отражения луча от зеркал и добились увеличения  $l_1 + l_2$

более чем до 10 м. Длины волн видимого света заключены в пределах  $(0,4 \div 0,75) \cdot 10^{-6}$  м. Величина запаздывания, даваемая формулой (13.15) и выраженная в виде смещения по длине волны, равна

$$\Delta\lambda = \Delta t c = (l_1 + l_2) (v^2/c^2) \approx (l_1 + l_2) \cdot 10^{-8}, \quad (13.16)$$

где учтено, что для скорости Земли вокруг Солнца  $(v^2/c^2) \approx 10^{-8}$ . Поэтому для длины волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м относительная величина смещения интерференционных полос равна  $(\Delta\lambda/\lambda) = (l_1 + l_2) \cdot 2 \cdot 10^{-2}$ .

В опытах 1887 г. эффективное расстояние  $l_1 + l_2$  равнялось 11 м. Поэтому ожидаемое смещение  $(\Delta\lambda/\lambda) \approx 1/5$ , что много больше тех величин, которые без труда можно наблюдать. Фактически в опыте можно было наблюдать смещения, которые соответствуют скоростям прибора относительно предполагаемого эфира всего 3 км/с. Однако никакого эффекта обнаружено не было. Получалось, что скорость света по всем направлениям одна и та же и никакого эфирного ветра нет. Затем опыт был повторен с еще большей точностью в 1905 г., но дал по-прежнему отрицательный результат. В дальнейшем, вплоть до самого последнего времени, опыт многократно повторялся различными исследователями и неизменно приводил к заключению, что скорость света во всех направлениях одна и та же и никакого эфирного ветра нет. С появлением лазеров точность опытов удалось значительно повысить. В настоящее время можно считать доказанным, что скорость эфирного ветра во всяком случае меньше 10 м/с.

Интерпретация результатов опыта Майкельсона — Морли в рамках представлений об эфире. В рамках представлений об эфире было предложено два выхода из сложившегося затруднительного положения:

1. Можно предположить, что эфир вблизи массивных тел, таких, как Земля, движется вместе с этими телами, т. е. полностью увлекается их движением. Тогда, естественно, вблизи этих тел никакого «эфирного ветра» не должно наблюдаться.

2. Можно предположить, что размеры материальных тел, движущихся в эфире, не остаются постоянными, а изменяются таким образом, что ожидаемой разности хода (13.15) не получается.

Предположение о полностью увлекаемом эфире приходится отвергнуть из-за его противоречия с другими наблюдаемыми фактами. В частности, это предположение не удается согласовать с явлением aberrации света. Второе предположение, выдвиннутое Лоренцем и Фитцджеральдом, успешно объясняет отсутствие эффекта запаздывания. Сравнение формул (13.8) и (13.11) показывает, что при  $l_1 = l_2 = l$  время прохождения путей по движению и перпендикулярно ему будет одинаковым в том случае, если длина плеча, совпадающего с направлением движения, сократится и станет равной

$$l' = l \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.17)$$

Если предположить, что все материальные тела сокращаются в направлении движения в соответствии с формулой (13.17), то отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли становится вполне понятным.

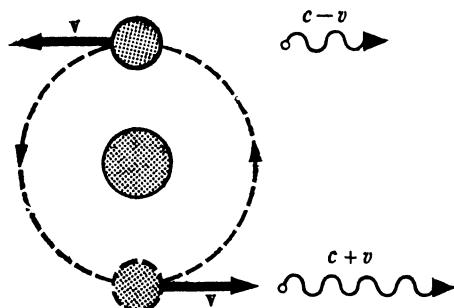
Такое объяснение, однако, не является достаточно убедительным, потому что оно создает логически неудовлетворительное представление о скорости света. Скорость света считается постоянной относительно эфира и переменной относительно тел, движущихся в эфире, но измерения этой скорости относительно материальных тел всегда дают один и тот же результат. Короче говоря, скорость света относительно материальных тел переменна, но результаты ее измерения постоянны. Ясно, что при такой ситуации утверждение о переменности скорости света совершенно бессодержательно и подлежит устранению. Вместо него приходится принять представление о постоянстве скорости света. Если это представление принять, то опыт Майкельсона — Морли объясняется естественным образом.

Однако сделаем следующее замечание. Стого говоря, из опыта Майкельсона — Морли и последующих аналогичных опытов не следует вывода о постоянстве скорости света. Из них лишь следует вывод о том, что средняя скорость света туда и обратно в различных направлениях в данной инерциальной системе координат одинакова, и нельзя сделать заключения о постоянстве скорости света в различных направлениях.

**Баллистическая гипотеза.** Имеется и другой путь объяснения результата опыта Майкельсона — Морли: можно с самого начала отказаться от эфира и считать, что свет является потоком материальных корпускул, т. е. вернуться к первоначальной точке зрения Ньютона. Естественно считать, что скорость этих корпускул относительно источника является постоянной величиной и складывается со скоростью источника по правилу параллелограмма.

Поскольку в баллистической гипотезе скорость света относительно источника во всех направлениях имеет одно и то же значение, то никакой разности хода в опыте Майкельсона — Морли ожидать нельзя. Поэтому баллистическая гипотеза естественным образом объясняет результат этого опыта и позволяет избежать совершенно непонятного в рамках преобразований Галилея положения о постоянстве скорости света. Однако баллистическая гипотеза оказалась несостоятельной.

**Несостоятельность баллистической гипотезы.** Проверку баллистической гипотезы можно сделать из астрономических наблюдений двойных звезд, на которые впервые указал де-Ситтер в 1913 г. Двойная звезда представляет собой две сравнительно близко расположенные друг от друга звезды, движущиеся вокруг общего центра масс. Если одна из звезд значительно массивнее другой, то можно считать, что менее массивная звезда движется вокруг более массивной, которая покоятся. Такие двойные звезды наблюдаются в довольно большом числе. По эффекту Доплера можно измерить скорость звезд и вы-



30.

Наблюдение двойных звезд

числить элементы орбиты. Оказывается, что компоненты двойной звезды движутся по эллиптическим орбитам в соответствии с законами Кеплера, т. е. между ними действуют силы тяготения, убывающие обратно пропорционально квадрату расстояния между компонентами.

Каких-либо странностей в движении компонент двойных звезд не наблюдается. Между тем если бы была справедлива баллистическая гипотеза, то движение двойных звезд представлялось бы весьма странным.

Пусть наблюдение двойной звезды ведется с достаточно большого расстояния  $s$ . Для простоты будем считать, что менее массивная звезда движется по окружности со скоростью  $v$  вокруг более массивной, которую можно считать неподвижной (рис. 30), и имеет период обращения  $T$ . Луч света, испущенный в тот момент, когда звезда находилась в точке  $B$  (верхнее положение на рис. 30) и двигалась от наблюдателя, будет распространяться в направлении наблюдателя со скоростью  $c - v$ . Испущенный в момент  $t_1$ , он достигнет глаза наблюдателя в момент

$$T_1 = t_1 + s/(c - v), \quad (13.18)$$

где  $s$  — расстояние от звезды до наблюдателя. Через половину периода обращения  $T/2$  звезда испустит луч из точки  $A$  (нижнее положение на рис. 30), двигаясь до направлению к наблюдателю. Скорость

!

*Если бы была справедлива баллистическая гипотеза, то кроме изменения наблюдаемого движения двойной звезды должна была бы наблюдаться переменность ее блеска. Действительно, имеется много переменных звезд, но закон изменения их блеска не соответствует тому, который получается из баллистической гипотезы.*

?

1 | Как практически наблюдать aberrацию света от звезды, если неизвестно истинное направление на нее?

2 | Почему скорость относительно эфира было бы целесообразно назвать «абсолютной», если бы существовал «Мировой эфир»?

этого луча при движении к наблюдателю равна  $c + v$ . Следовательно, луч, испущенный в точке  $A$ , достигнет глаза наблюдателя в момент

$$T_2 = t_1 + (T/2) + s/(c + v). \quad (13.19)$$

Если расстояние  $s$  достаточно велико, то этот луч, имея большую скорость, может обогнать луч, испущенный в точке  $B$ . Это произойдет на расстоянии  $s$ , для которого  $T_2 = T_1$ . Нетрудно найти это расстояние из формул (13.18) и (13.19). На больших расстояниях луч из  $A$  может обогнать луч, испущенный из  $B$  на предыдущем обороте, и т. д. Тогда наблюдатель, находящийся на достаточно большом расстоянии, увидит звезду одновременно в нескольких точках орбиты.

Таким образом, если бы баллистическая гипотеза была справедливой, то при наблюдении двойных звезд астрономы должны были бы видеть довольно замысловатую картину. В действительности же ничего подобного нет.

Наблюдаемая картина получается из предположения, что двойные звезды движутся по законам Кеплера и скорость света постоянна, а не складывается со скоростью источника, как этого требует баллистическая гипотеза. Таким образом, баллистическая гипотеза оказывается опровергнутой.

**Несостоятельность баллистической гипотезы заставляет признать, что скорость света не зависит от скорости источника света. Результат опыта Майкельсона — Морли показывает, что она не зависит также и от скорости наблюдателя. Поэтому делается вывод, что скорость света является постоянной величиной, не зависящей ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя.**

**Несовместимость постоянства скорости света с привычными представлениями.** Постоянство скорости света находится в глубоком противоречии с привычными представлениями повседневного опыта и с формулами сложения скоростей (12.10), которые являются следствием преобразований Галилея. Таким образом, можно сказать, что преобразования Галилея (12.2) противоречат экспериментальному факту постоянства скорости света. Однако это противоречие становится заметным лишь для достаточно больших скоростей.

Представим себе поезд, который движется со скоростью 100 км/ч относительно полотна железной дороги. Если вдоль вагона в направлении движения поезда идет человек со скоростью 5 км/ч относительно поезда, то скорость этого человека относительно полотна железной дороги равна 105 км/ч. Этот результат понятен и полностью соглашается с привычными представлениями о пространстве и времени, выражением которых в рассматриваемом случае является формула сложения скоростей классической механики. Эксперимент неоднократно подтверждал эту формулу.

Представим теперь ракету, которая движется со скоростью 100 000 км/с относительно Земли. Пусть в ракете в направлении ее движения перемещается некоторый предмет со скоростью

100 000 км/с относительно ракеты. Спрашивается, какова будет скорость этого предмета относительно Земли? Если бы измерить ее, то получилось бы значение около 164 000 км/с. Хотя описанный опыт с ракетой не производился, но проводились многочисленные другие опыты, которые показали, что формула сложения скоростей (12.10) не является правильной. При скоростях, много меньших скорости света, эта неправильность не замечается, поскольку отклонения от этой формулы чрезвычайно малы. Впервые в эксперименте неправильность формулы сложения скоростей была обнаружена в середине прошлого столетия. Но в то время ученые не смогли осознать этот факт.

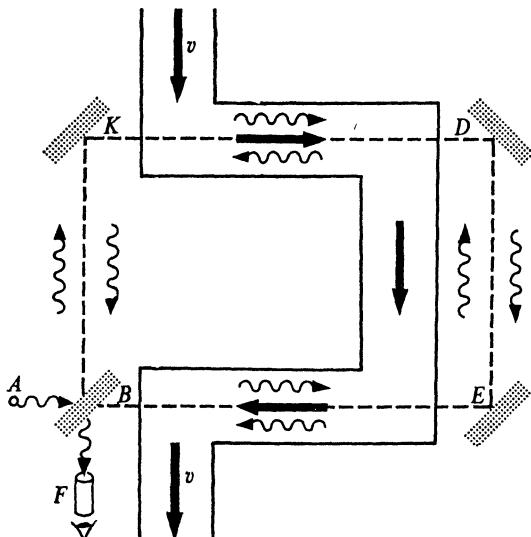
**Идея опыта Физо.** Задолго до того, как возникло представление о постоянстве скорости света и был установлен приближенный характер преобразований Галилея, в физике был известен опыт, который указывал на странный закон сложения больших скоростей, сравнимых со скоростью света. Это был опыт Физо, выполненный в 1860 г.

Идея опыта Физо состояла в измерении скорости света в движущейся материальной среде, например воде. Пусть  $u' = c/n$  — скорость света в среде,  $n$  — показатель преломления среды. Если среда, в которой распространяется свет, сама движется со скоростью  $v$ , то скорость света относительно покоящегося наблюдателя должна быть  $u' \pm v$  в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены скорости света и среды. В своем опыте Физо сравнил скорости лучей света в направлении движения среды и против этого направления.

Схема опыта Физо изображена на рис. 31. Монохроматический луч от источника  $A$  падает на полуупрозрачную пластинку  $B$  и разделяется на два когерентных луча. Луч, отразившийся от пластины, проходит путь  $BKDEB$  ( $K, D, E$  — зеркала), а прошедший через пластинку  $B$  — путь  $BEDKB$ , т. е. противоположно предыдущему. Первый луч, возвратившись к пластинке  $B$ , частично отражается от нее и попадает в интерферометр  $F$ . Второй луч, возвратившись к пластинке  $B$ , частично проходит через нее и также попадает в интерферометр  $F$ . Оба луча проходят один и тот же путь, причем на участках  $BE$  и  $KD$  эти пути проходят через жидкость, которая течет по трубе. Если жидкость покойится, то пути обоих лучей совершенно эквивалентны и время их прохождения в обоих направлениях одно и то же, разницы никакой нет.

Если же жидкость движется,пути лучей не эквивалентны: скорость одного из них на указанных участках направлена по течению жидкости, а другого — против течения. Вследствие этого возникает разность хода — один из лучей запаздывает по сравнению с другим. По интерференционной картине можно определить эту разность хода, а по ней вычислить скорость света на участках с жидкостью, потому что известны скорость света на остальных участках и длина всех участков пути.

<sup>4</sup> Механика и теория относительности



31.

Схема опыта Физо

?

- 1 В чем состоит неудовлетворительность интерпретации результата опыта Майкельсона — Морли с помощью сокращения масштабов Фитцджеральда — Лоренца!
- 2 Каковы астрономические свидетельства несостоятельности баллистической гипотезы?
- 3 Как был истолкован результат опыта Физо в то время, когда он был выполнен?
- 4 Почему утверждение о постоянстве скорости света, имеющее столь многочисленные экспериментальные подтверждения, является все же постулатом?

**Вычисление разности хода лучей.** Введем обозначения:  $l$  — общая длина участков света в жидкости;  $t_0$  — время, в течение которого свет проходит весь путь, исключая участки пути через жидкость;  $u^{(+)}$  — скорость луча света по течению жидкости;  $u^{(-)}$  — против течения. Эти скорости можно представить в виде:

$$u^{(+)} = u' + kv, \quad u^{(-)} = u' - kv, \quad (13.20)$$

где  $k$  — коэффициент, который требуется определить в эксперименте. Если  $k = 1$ , то справедлива классическая формула сложения скоростей (12.10). Если же  $k \neq 1$ , то имеет место отклонение от этой формулы. Заметим, что в этом эксперименте мы имеем дело с очень большими скоростями, поскольку для видимого света коэффициент преломления воды примерно 1,3 и, следовательно, скорость света относительно воды примерно 230 000 км/с.

Время, за которое первый и второй лучи проходят весь путь, равно соответственно:

$$t_1 = t_0 + l/(u' + kv), \quad t_2 = t_0 + l/(u' - kv). \quad (13.21)$$

Отсюда получаем, что разность хода по времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2lkv/(u'^2 - k^2v^2). \quad (13.22)$$

Измерив по смещению интерференционных полос разность хода и зная  $l$ ,  $v$ ,  $u'$ , можно из этой формулы найти  $k$ .

**Результат опыта Физо.** В опыте Физо было получено следующее значение коэффициента  $k$ :

$$k = 1 - 1/n^2, \quad (13.23)$$

где  $n$  — показатель преломления жидкости. Таким образом, скорости света в жидкости и жидкости не складываются по формуле сложения скоростей классической механики. С обыденной привычной точки зрения этот результат столь же удивителен, как и утверждение о постоянстве скорости света в вакууме. Однако в те годы, когда был выполнен опыт Физо, его результат не вызвал удивления. Дело в том, что Френель задолго до опыта Физо показал, что материя, движущаяся в эфире, должна за собой лишь частично увлекать эфир, и величина этого увлечения в точности соответствует результату опыта Физо.

Лишь после создания теории относительности стало ясным, что в опыте Физо впервые была экспериментально доказана несправедливость классического закона сложения скоростей и преобразований Галилея.

**Постулативный характер постоянства скорости света.** Утверждение о постоянстве скорости света в вакууме, т. е. независимость скорости света от скорости источника и скорости наблюдателя, является естественным выводом из многих экспериментальных фактов. Выше были описаны лишь те эксперименты и соображения, которые исторически были первыми. В дальнейшем это утверждение выдерживало другие многочисленные экспериментальные проверки. Главным же его подтверждением является согласие с экспериментом всех тех выводов, которые из него следуют. Эти подтверждения очень многочисленны, потому что вся современная физика больших скоростей и высоких энергий основывается на постулате постоянства скорости света.

Тем не менее в своем абсолютном виде утверждение о постоянстве скорости света является постулатом, т. е. допущением, выходящим за пределы прямой экспериментальной проверки. Это связано с конечной точностью экспериментальных проверок, как это было объяснено выше в связи с постулативным характером принципа относительности.

## 14. Преобразования Лоренца

**Постулаты.** Поскольку преобразования Галилея для достаточно больших скоростей приводят к выводам, противоречащим экспериментам, и постоянство скорости света не является их следствием, они не отражают правильно той связи, которая существует для координат и времени инерциальных систем координат, движущихся друг относительно друга. Необходимо найти другие преобразования, которые правильно описывают экспериментальные факты и, в частности, приводят к постоянству скорости света. Эти преобразования называются преобразованиями Лоренца. Они могут быть введены исходя из двух принципов, обоснование которых было изложено в предыдущих параграфах:

- 1) принципа относительности;
- 2) принципа постоянства скорости света.

Оба эти принципа, хотя и подтверждены многочисленными экспериментами, имеют характер постулатов и поэтому иногда называются постулатом относительности и постулатом постоянства скорости света.

**Линейность преобразования координат.** Ориентировку движущихся систем координат чисто геометрическими преобразованиями, сводящимися к пространственным поворотам и переносам начала координат в пределах каждого из тел отсчета, можно всегда привести к такой, которая изображена на рис. 26. Поскольку скорости не складываются по классической формуле (12.10), можно ожидать, что время одной системы координат не выражается только через время другой системы координат, а зависит также и от координат. Поэтому в общем случае преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x' &= \Phi_1(x, y, z, t), & y' &= \Phi_2(x, y, z, t), \\z' &= \Phi_3(x, y, z, t), & t' &= \Phi_4(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{14.1}$$

где в правых частях стоят некоторые функции  $\Phi_i$ , вид которых надо найти.

Общий вид этих функций определяется свойствами пространства и времени. При рассмотрении геометрических соотношений в выбранной системе отсчета и при измерениях в ней принималось, что каждая точка ничем не отличается от любой другой точки. Это означает, что начало системы координат может быть помещено в любой точке и все геометрические соотношения между любыми геометрическими объектами при этом совершенно одинаковы с теми, которые получаются при помещении начала координат в любую другую точку. Это свойство называется однородностью пространства, т. е. свойством неизменности характеристик пространства при переходе от одной точки к другой. Можно также в каждой точке пространства оси системы координат произвольным образом ориентировать в нем, при этом геометрические соотношения между геометрическими объек-

тами также не изменяются. Это означает, что свойства пространства по различным направлениям одинаковы. Такое свойство называется изотропностью пространства.

**Однородность и изотропность пространства являются его главными свойствами в инерциальных системах координат.**

Время также обладает важнейшим свойством однородности. Физически это означает следующее. Пусть некоторая физическая ситуация возникает в некоторый момент времени. В последующие моменты времени она будет каким-то образом развиваться. И пусть такая же физическая ситуация возникает в любой другой момент времени. Если она в последующие моменты времени будет развиваться относительно этого момента точно так же, как она в первом случае развивалась относительно своего начального момента, то говорят, что время однородно. Иначе говоря,

**однородность времени есть одинакость развития и изменения данной физической ситуации независимо от того, в какой момент времени эта ситуация сложилась.**

Из однородности пространства и времени следует, что преобразования (14.1) должны быть линейными. Для доказательства рассмотрим бесконечно малое изменение  $dx'$ , т. е. разность координат  $x'$  двух бесконечно близких точек. В нештрихованной системе им будут соответствовать бесконечно малые разности координат  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и времени  $dt$ . Из (14.1) можно вычислить полное изменение  $dx'$ , связанное с изменениями величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , по формуле полного дифференциала, известной из математики:

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt. \quad (14.2)$$

В силу однородности пространства и времени эти соотношения должны быть одинаковыми для всех точек пространства и для любых моментов времени. А это означает, что величины  $\partial \Phi_1 / \partial x$ ,  $\partial \Phi_1 / \partial y$ ,  $\partial \Phi_1 / \partial z$ ,  $\partial \Phi_1 / \partial t$  не должны зависеть от координат и времени, т. е. являются постоянными. Поэтому функция  $\Phi_1$  имеет следующий вид:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5, \quad (14.3)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  и  $A_5$  — постоянные. Таким образом, функция  $\Phi_1(x, y, z, t)$  является линейной функцией своих аргументов. Аналогично доказывается, что в силу однородности пространства и времени и другие функции  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  в преобразованиях (14.1) будут линейными функциями от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ .

**Преобразования для  $y$  и  $z$ .** Точка начала в каждой системе координат задается равенствами  $x = y = z = 0$ ,  $x' = y' = z' = 0$ . Будем считать, что в момент  $t = 0$  начала координат совпадают. Тогда свободный член  $A_5$  в линейных преобразованиях вида (14.3) должен

быть равен нулю и преобразования для  $y$  и  $z$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \\ z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Ориентировка осей координат указана на рис. 26: ось  $y'$  параллельна оси  $y$ , а ось  $z'$  — оси  $z$ . Поскольку ось  $x'$  все время совпадает с осью  $x$ , из условия  $y = 0$  всегда следует равенство  $y' = 0$ , а из условия  $z = 0$  — равенство  $z' = 0$ , т. е. должно быть

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x + a_3z + a_4t, \\ 0 &= b_1x + b_2y + b_4t \end{aligned} \quad (14.5)$$

при любых  $x, y, z$  и  $t$ . Это возможно лишь при условии

$$a_1 = a_3 = a_4 = 0, \quad b_1 = b_2 = b_4 = 0. \quad (14.6)$$

Поэтому преобразования для  $y$  и  $z$  принимают следующий простой вид:

$$a' = ay, \quad z' = az, \quad (14.7)$$

где учтено, что в силу равноправности осей  $y$  и  $z$  относительно движения коэффициенты в преобразованиях должны быть одинаковыми:  $y_3 = b_3 = a$ . Коэффициент  $a$  в формуле (14.7) показывает, во сколько раз длина некоторого масштаба в штрихованной системе координат больше, чем в нештрихованной.

Перепишем (14.7) в виде

$$y = \frac{1}{a}y', \quad z = \frac{1}{a}z'. \quad (14.8)$$

Величина  $1/a$  показывает, во сколько раз длина некоторого масштаба в нештрихованной системе больше, чем в штрихованной. Согласно принципу относительности, обе системы координат равноправны и поэтому при переходе от одной системы к другой длина масштаба должна изменяться так же, как и при обратном переходе. Поэтому в формулах (14.7) и (14.8) должно соблюдаться равенство  $(1/a) = a$ , откуда получаем  $a = 1$  (возможное математически решение  $a = -1$  исключается в силу выбранной ориентации осей: положительные значения осей  $y$ ,  $z$  и  $y'$ ,  $z'$  совпадают). Следовательно, преобразования для координат  $y$  и  $z$  имеют вид:

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (14.9)$$

**Преобразования для  $x$  и  $t$ .** Поскольку переменные  $y$  и  $z$  преобразуются отдельно, переменные  $x$  и  $t$  могут быть связаны линейным преобразованием только друг с другом. Точка начала движущейся системы координат в неподвижной имеет координату  $x = vt$ ,

а в движущейся системе — координату  $x' = 0$ . Поэтому в силу линейности преобразования должно быть

$$x' = \alpha(x - vt), \quad (14.10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, который требуется определить.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести, отправляясь от движущейся системы, приняв ее за покоящуюся. Тогда в ней точка начала координат нештрихованной системы имеет координату  $x' = -vt'$ , поскольку в штрихованной системе нештрихованная движется в направлении отрицательных значений оси  $x$ . Точка начала координат нештрихованной системы в нештрихованной системе характеризуется равенством  $x = 0$ . Следовательно, отправляясь от штрихованной системы, как неподвижной, приходим вместо (14.10) к преобразованию

$$x = \alpha'(x' + vt'), \quad (14.11)$$

где  $\alpha'$  — коэффициент пропорциональности. Докажем, что согласно принципу относительности  $\alpha = \alpha'$ .

Пусть некоторый стержень покоится в штрихованной системе координат и имеет в ней длину  $l$ . Это означает, что координаты начала и конца стержня различаются в этой системе на величину  $l$ :

$$x'_2 - x'_1 = l. \quad (14.12)$$

В нештрихованной системе этот стержень движется со скоростью  $v$ . Длиной его считается расстояние между двумя точками неподвижной системы, с которыми в один и тот же момент времени совпадают начало и конец движущегося стержня. Засечем концы его в момент  $t_0$ . На основании формул (14.10) получим для координат засечек  $x'_1$  и  $x'_2$  следующие выражения:

$$x'_1 = \alpha(x_1 - vt_0), \quad x'_2 = \alpha(x_2 - vt_0). \quad (14.13)$$

Следовательно, длина движущегося стержня в неподвижной нештрихованной системе равна

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)/\alpha = l/\alpha. \quad (14.14)$$

Пусть теперь тот же стержень покоится в нештрихованной системе и имеет в ней длину  $l$ . Следовательно, координаты начала и конца стержня различаются в этой системе на величину  $l$ , т. е.

$$x_2 - x_1 = l. \quad (14.15)$$

В штрихованной системе, принятой за неподвижную, этот стержень движется со скоростью  $-v$ . Чтобы измерить его длину относительно штрихованной системы, необходимо засечь начало и конец этого

стержня в некоторый момент  $t'_0$  этой системы. На основании формулы (14.11) имеем:

$$x_1 = \alpha' (x'_1 + vt'_0), \quad x_2 = \alpha' (x'_2 + vt'_0). \quad (14.16)$$

Следовательно, длина движущегося стержня в штрихованной системе, принятой за неподвижную, равна

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)/\alpha' = l/\alpha'. \quad (14.17)$$

Согласно принципу относительности обе системы равноправны и длина одного и того же стержня, движущегося в этих системах с одинаковой скоростью, должна быть одинаковой. Поэтому в формулах (14.14) и (14.17) должно быть  $(l/\alpha) = (l/\alpha')$ , т. е.  $\alpha = \alpha'$ , что и требовалось доказать.

Теперь воспользуемся постулатом постоянства скорости света. Пусть в момент времени, когда начала координат совпадают и когда часы, находящиеся в началах координат, показывают время  $t = t' = 0$ , из них испускается световой сигнал. Распространение света в штрихованной и нештрихованной системах координат описывается равенствами:

$$x' = ct', \quad x = ct, \quad (14.18)$$

в которых учтено, что в обеих системах скорость света имеет одно и то же значение  $c$ . Эти равенства характеризуют положение светового сигнала, распространяющегося в направлении осей  $x$ ,  $x'$  в любой момент времени каждой из систем координат. Подставляя (14.18) в формулы (14.10) и (14.11) с учетом того, что  $\alpha = \alpha'$ , находим:

$$ct' = \alpha t (c - v), \quad ct = \alpha t' (c + v). \quad (14.19)$$

Умножая левые и правые части этих равенств друг на друга и сокращая на  $t't$ , получаем

$$\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (14.20)$$

Из равенства (14.11), используя (14.10), имеем

$$vt' = \frac{x}{\alpha} - x' = \frac{x}{\alpha} - \alpha(x - vt) = \alpha vt + x\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right), \quad (14.21)$$

откуда с учетом (14.20)

$$t' = \alpha \left\{ t + \frac{x}{v} \left( \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \right\} = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.22)$$

**Преобразования Лоренца.** Преобразования (14.9), (14.10) и (14.22) связывают между собой координаты систем, движущихся относительно друг друга со скоростью  $v$ . Они называются преобразованиями Лоренца. Выпишем их здесь еще раз:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.23)$$

Обратные преобразования согласно принципу относительности имеют такой же вид, но лишь изменяется знак скорости:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.24)$$

Переход от (14.23) к (14.24) можно произвести и без использования принципа относительности. Для этого надо равенства (14.23) рассмотреть как систему уравнений относительно ненштрихованных величин и решить ее. В результате получаются выражения (14.24). Рекомендуем проделать это вычисление в качестве упражнения.

**Преобразования Галилея как предельный случай преобразований Лоренца.** В предельном случае скоростей, много меньших скорости света, в преобразованиях Лоренца можно пренебречь величинами порядка  $(v/c) \ll 1$  в сравнении с единицей, т. е. все величины  $v/c$  в этих преобразованиях положить равными нулю. Тогда они сводятся к преобразованиям Галилея (12.1). При малых скоростях различие между преобразованиями Лоренца и Галилея незначительно и поэтому неточность преобразований Галилея долго оставалась незамеченной.

# Глава 4

## СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

- 
- 15. Относительность одновременности
  - 16. Длина движущегося тела
  - 17. Темп хода движущихся часов. Собственное время
  - 18. Сложение скоростей и преобразование ускорений
- 

**Э**кспериментальное подтверждение следствий преобразований Лоренца является подтверждением основ специальной теории относительности. Сокращение длии и изменение формы движущихся тел реальны, потому что они приводят к наблюдаемым физическим следствиям.

---

### 15. Относительность одновременности

**Относительность одновременности.** Два события, произошедшие в различных точках  $x_1$  и  $x_2$  системы координат, называются одновременными, если они происходят в один и тот же момент времени по часам этой системы координат. В каждой из точек момент события фиксируется по часам, находящимся в соответствующей точке. Будем считать, что события произошли одновременно в неподвижной системе координат в момент  $t_0$ .

В движущейся системе координат эти события произошли в точках  $x'_1$  и  $x'_2$  в моменты  $t'_1$  и  $t'_2$ , причем  $t'_1$  и  $t'_2$  являются показаниями часов движущейся системы координат, расположенных соответственно в точках  $x'_1$  и  $x'_2$  этой системы в те моменты, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие. Связь между штрихованными и нештрихованными величинами дается преобразованиями Лоренца (14.23):

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t_0 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_0 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.1)$$

!

Поскольку события происходят в точках на оси  $x$ , координаты  $y, z$  в обеих системах равны нулю. Из (15.1) видно, что в движущейся системе координат эти события происходят не одновременно ( $t'_2 \neq t'_1$ ), они разделены интервалом времени

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(v/c^2)(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.2)$$

Таким образом, события, одновременные в одной системе координат, оказались неодновременными в другой.

**Понятие одновременности не имеет абсолютного значения, независимого от системы координат. Чтобы утверждение об одновременности каких-либо событий имело определенное содержание, необходимо указать, к какой системе координат это утверждение относится.**

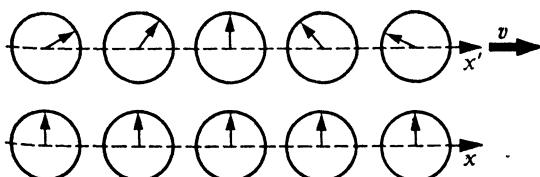
Относительность одновременности можно продемонстрировать также следующим образом. Показания часов неподвижной системы координат, расположенных в различных точках оси  $x$  (рис. 32), сравниваются с показаниями часов движущейся со скоростью  $v$  системы координат, расположенных в точках оси  $x'$ . На рис. 32

теория относительности не доказывает принципа причинности. Она исходит из того, что он справедлив и должен выполняться во всех системах координат. Отсюда получается ограничение на значение скоростей, с которыми могут передаваться физические воздействия.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$



32.

Часы неподвижной системы координат, расположенные в разных точках, в которых одновременно произошли некоторые события, показывают момент совершения события в одно и то же время. В движущейся системе координат соответствующие часы показывают разное время в момент совершения событий, т. е. там события не одновременны

изображено время в различных точках движущейся системы координат в момент  $t = 0$  неподвижной системы.

**Относительность одновременности и причинность.** Из формулы (15.2) видно, что если  $x_1 > x_2$ , то в системе координат, движущейся в направлении положительных значений оси  $x$  ( $v > 0$ ), имеет место неравенство  $t'_2 > t'_1$ , а в системе координат, движущейся в противоположном направлении ( $v < 0$ ),  $t'_2 < t'_1$ . Таким образом, последовательность одних и тех же событий в различных системах координат различна. Спрашивается, не может ли случиться так, что в одной системе координат причина предшествует следствию, а в другой, наоборот, следствие предшествует причине? Ясно, что такая ситуация не может быть допущена в теории, которая признает объективную роль причинно-следственной связи в мире: от перемены точки зрения на события следствие и причина не могут меняться местами.

**Чтобы причинно-следственная связь имела объективный характер и не зависела от системы координат, в которой она рассматривается, необходимо, чтобы никакие материальные воздействия, осуществляющие физическую связь событий, происходящих в различных точках, не могли передаваться со скоростью, большей скорости света.**

Для доказательства рассмотрим два события в покоящейся системе координат. Пусть событие в точке  $x_1$ , произшедшее в момент  $t_1$ , будет причиной события в точке  $x_2 > x_1$ , произшедшего в момент  $t_2 > t_1$ . Скорость передачи «влияния» от точки  $x_1$  к точке  $x_2$  обозначим через  $v_{\text{вл}}$ . Очевидно, по определению скорости, имеем

$$\frac{x_2 - x_1}{v_{\text{вл}}} = t_2 - t_1. \quad (15.3)$$

В движущейся системе координат эти события произошли в некоторых точках  $x'_1$  и  $x'_2$  в моменты  $t'_1$  и  $t'_2$ . По формуле (14.22) можно написать

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - (v/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} v_{\text{вл}}\right), \quad (15.4)$$

где в последнем равенстве величина  $x_2 - x_1$  исключена с помощью (15.3). Формула (15.4) показывает, что если

$$1 - \frac{v}{c^2} v_{\text{вл}} < 0, \quad (15.5)$$

то в движущейся системе координат следствие наступает раньше причины. Но это невозможно. Поэтому всегда должно быть  $1 - (vv_{\text{вл}}/c^2) > 0$ , или

$$v_{\text{вл}} < \frac{c}{v} c. \quad (15.6)$$

Так как преобразования Лоренца допускают для  $v$  значения, сколь угодно близкие к скорости света, но не превосходящие ее (тогда преобразования перестают быть вещественными), то требование (15.6) должно быть записано следующим образом:

$$v_{\text{вл}} \leq c.$$

(15.7)

Таким образом, передача физического влияния из одной точки в другую не может происходить со скоростью, большей скорости света. При этом условии причинная связь событий носит абсолютный характер: не существует системы координат, в которой причина и следствие меняются местами.

**Инвариантность интервала.** В § 12 было охарактеризовано значение инвариантов преобразований для теории. Инвариантами преобразования Галилея являются длина тел и промежуток времени между событиями. Именно поэтому понятия длины и промежутка времени играют такую большую роль в классической физике.

Однако ни длина тел, ни промежутки времени между событиями не являются инвариантами преобразований Лоренца. Это означает, что они зависят от системы координат. В следующих параграфах этот вопрос будет более подробно рассмотрен. Здесь же лишь отметим это обстоятельство, чтобы перейти к анализу важного инварианта преобразований Лоренца, который называется пространственно-временным интервалом или просто интервалом.

Пусть события произошли в точке  $x_1, y_1, z_1$  в момент  $t_1$  и в точке  $x_2, y_2, z_2$  в момент  $t_2$ . Интервалом между этими событиями, или, как говорят короче, интервалом между точками  $x_1 y_1 z_1 t_1$  и  $x_2 y_2 z_2 t_2$ , называется величина  $s$ , квадрат которой определяется формулой

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2. \quad (15.8)$$

Эта величина имеет во всех системах координат одно и то же значение, т. е. является инвариантом преобразований Лоренца. Чтобы в этом убедиться, преобразуем выражение (15.8) в штрихованную систему координат по формулам (14.4). Имеем

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y_2 - y_1 &= y'_2 - y'_1, \\ z_2 - z_1 &= z'_2 - z'_1, \\ t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 - t'_1 + (v/c^2)(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (15.8), находим

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = \\ &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = s'^2. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Это доказывает, что квадрат интервала является инвариантом:  $s^2 = s'^2 = \text{inv}$ .

Если рассматриваемые точки расположены бесконечно близко, то равенство (15.9) доказывает инвариантность квадрата дифференциала интервала:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = \text{inv}. \quad (15.10)$$

**Пространственноподобные и времениподобные интервалы.** Обозначим пространственное расстояние между событиями через  $l$ , а промежуток времени между ними — через  $t$ . Квадрат интервала  $s^2 = l^2 - c^2 t^2$  между этими событиями является инвариантом.

Пусть в некоторой системе координат события не могут быть связаны причинно. Тогда для них  $l > ct$  и, следовательно,  $s^2 > 0$ . Из инвариантности интервала следует, что и во всех других системах координат эти события не могут быть соединены причинной связью. Справедливо, конечно, и обратное утверждение: если в некоторой системе координат события могут в принципе находиться в причинной связи ( $l < ct$ ,  $s^2 < 0$ ), то они в принципе могут находиться в причинной связи и во всех других системах координат.

Интервал, для которого

$$s^2 > 0, \quad (15.11)$$

называется пространственноподобным, а для которого

$$s^2 < 0, \quad (15.12)$$

— времениподобным.

Если интервал пространственноподобен, то можно выбрать такую систему координат, в которой два события происходят одновременно в разных пространственных точках ( $s^2 = l^2 > 0$ ,  $t = 0$ ), и не существует такой системы координат, в которой эти два события происходили бы в одной и той же точке (тогда должно было бы быть  $l = 0$ , т. е.  $s^2 = -c^2 t^2 < 0$ , что противоречит условию  $s^2 > 0$ ).

Если интервал времениподобен, то можно выбрать такую систему координат, в которой два события происходят в одной и той же точке пространства, но в разные моменты времени ( $l = 0$ ,  $s^2 = -c^2 t^2 < 0$ ), и не существует такой системы координат, в которой эти два события происходили бы одновременно (тогда должно было бы быть  $t = 0$ , т. е.  $s^2 = l^2 > 0$ , что противоречит условию  $s^2 < 0$ ).

Таким образом, для событий, которые в принципе могут находиться в причинной связи, можно всегда выбрать такую систему координат, в которой эти события происходят в одной в той же точке пространства в последовательные промежутки времени.

Является ли интервал между событиями временеподобным или пространственноподобным, не зависит от системы координат. Это есть инвариантное свойство самих событий.

## 16. Длина движущегося тела

Определение длины движущегося тела. Длиной движущегося стержня называется расстояние между точками покоящейся системы координат, с которыми совпадают начало и конец движущегося стержня в некоторый момент времени по часам покоящейся системы координат. Таким образом, концы движущегося стержня засекаются одновременно в покоящейся системе координат. Часы движущейся системы координат, совпадающие с концами стержня в момент засечек, будут показывать разное время, как это видно непосредственно на рис. 32, т. е. засечка концов происходит не одновременно в движущейся системе координат. Это приводит к тому, что длина стержня не является инвариантом преобразований Лоренца и имеет разные значения в различных системах координат.

**Формула сокращения длины движущегося тела.** Пусть стержень длиной  $l$  покоялся в штрихованной системе координат, будучи расположенным вдоль оси  $x'$ . Заметим, что когда говорится о теле такой-то длины, то имеется в виду длина покоящегося тела. Координаты концов рассматриваемого стержня обозначим через  $x'_1$  и  $x'_2$ , причем, по определению,  $x'_2 - x'_1 = l$ . Величина  $l$  написана здесь без штриха, потому что она обозначает длину стержня в той системе координат, в которой он покоялся, т. е. длину покоящегося стержня.

Отметим положение концов стержня, движущегося со скоростью  $v$  в нештрихованной системе координат, в момент  $t_0$ . По формулам преобразования Лоренца можно написать:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (16.1)$$

Отсюда следует, что

$$l = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (16.2)$$

где  $l' = (x_2 - x_1)$  — длина движущегося стержня. Переписав равенство (16.2) в виде

$$l' = l \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (16.3)$$

замечаем, что длина движущегося стержня, расположенного в направлении движения, меньше длины покоящегося. Конечно, если

все эти рассуждения провести с точки зрения штрихованной системы координат, принятой за неподвижную, то получится та же формула (16.3) уменьшения длины движущегося стержня, как это и требуется принципом относительности.

Если стержень расположить перпендикулярно направлению движения, например вдоль оси  $y'$  или  $z'$ , то из формул (14.23) можно заключить, что его длина в этом случае не изменится. Таким образом, размеры тела в направлении, перпендикулярном относительной скорости движения, не изменяются.

**Изменение формы движущихся тел.** Поскольку размеры тел в направлении движения сокращаются в соответствии с формулой (16.3), а в перпендикулярном направлении остаются неизменными, форма движущихся тел изменяется. Тело как бы «сплющивается» в направлении движения.

Следует ясно представить себе, какое физическое содержание имеет это изменение формы движущегося тела. Дело в том, что если движущееся тело наблюдать с помощью обычных оптических приборов, например, в видимом свете, то тело нам не будет представляться сплющенным.

Утверждение об изменении формы движущегося тела имеет следующее физическое содержание. В некоторый момент времени покоящейся системы координат фиксируются в ней координаты всех точек поверхности движущегося тела. Тем самым делается как бы моментальный слепок с движущегося тела. Форма этого покоящегося в неподвижной системе координат слепка и принимается за форму движущегося тела. Форма слепка не совпадала бы с формой тела, с которого слепок снят, если бы это тело поколось. Слепок оказывается «сплющенным» в сравнении со своим покоявшимся оригиналом.

Эффект сплющивания является реальным эффектом в указанном выше смысле.

По-другому обстоит дело, если форма движущегося тела наблюдается визуально. В этом случае два обстоятельства изменяют ситуацию: во-первых, лучи света от различных точек тела за разное время достигают глаза наблюдателя; во-вторых, имеет место aberrация света, изменяющая кажущееся направление, из которого лучи приходят в глаз наблюдателя. Как показывают расчеты, эти два обстоятельства приводят к тому, что при визуальном наблюдении форма движущегося тела не совпадает с той, которая получается по преобразованиям Лоренца.

**Оценка величины сокращения.** Обычно скорости тел много меньше скорости света, т. е.  $(v/c) \ll 1$ . Поэтому с точностью до величины первого порядка по  $v^2/c^2$  формулу (16.3) можно представить в виде

$$l' \approx l \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (16.4)$$

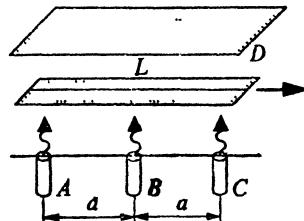
Следовательно, относительная величина сокращения длины равна

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (16.5)$$

Для скоростей порядка десятков километров в секунду ( $v^2/c^2 \approx 10^{-8}$ ), и, следовательно, относительная величина сокращения меньше, чем  $10^{-8}$ , и поэтому его трудно заметить. Например, при таких скоростях 1 м сократится лишь на величину  $10^{-6}$  см. Диаметр земного шара несколько больше 12 тыс. км. Скорость движения Земли вокруг Солнца  $v = 30$  км/с обусловливает сокращение диаметра Земли в системе координат, связанной с Солнцем, всего примерно на 6 см. С другой стороны, при больших скоростях это сокращение значительно. Например, при скорости тела, равной примерно 0,85 с, его длина сократится в 2 раза. При скоростях, близких к скорости света, его длина становится весьма малой.

**О реальности сокращения движущихся тел.** В связи со сказанным о форме движущихся тел и об их наблюдаемой в световых лучах форме возникает вопрос: реально ли сокращение масштабов и если да, то что означает эта реальность? Ответ гласит: изменение формы движущихся тел реально, потому что оно приводит к наблюдаемым физическим следствиям. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующую физическую ситуацию.

Имеется три покоящихся источника света (например, лазеры)  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , расположенных на одной прямой на расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 33). Эти источники могут одновременно испускать короткие импульсы света перпендикулярно прямой, на которой они лежат, причем эти импульсы регистрируются фотопластинкой  $D$ . Между источниками света и фотопластинкой параллельно линии  $AC$  и плоскости пластиинки может перемещаться некоторое тело (линейка). Если



33.

Схема опыта, демонстрирующего реальность сокращения масштабов

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y = y', \quad z = z',$$

$$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

?

1

Отличаются ли определения длины движущихся тел в классической механике и теории относительности?

2

Благодаря каким факторам наблюдаемая в световых лучах форма движущихся тел не является столь «сплющенной» в направлении движения, как это непосредственно следует из преобразований Лоренца?

3

Каково физическое содержание утверждения о реальности сокращения движущихся тел?

линейка попадает между источником света и фотопластинкой, то луч света при вспышке не достигает фотопластинки и на ней не будет обнаружено соответствующего следа.

**Случай 1.** Пусть покоящаяся линейка имеет длину  $L < 2a$  ( $L > a$ ). Тогда в зависимости от ее расположения между источниками света и фотопластинкой она может загородить либо один из источников  $A, B, C$ , либо два источника:  $A, B$  или  $B, C$ . В частности, она может загородить источник  $B$ , в то время как  $A, C$  окажутся незагороженными. Если производить одновременно вспышки всех трех источников при различных положениях линейки, то на фотографии будут обнаружены следующие комбинации пятен — вспышек источников: а) все три пятна (когда линейка полностью находится вне отрезка  $AC$ ); б) любые из двух пятен (когда линейка закрывает лишь один из источников), в том числе и пара пятен от  $A, C$ , когда источник  $B$  закрыт; в) одно пятно  $A$  или одно пятно  $C$ , когда два других источника закрыты. Ситуация, при которой были бы закрыты источники  $A$  и  $C$ , а источник  $B$  дал пятно, невозможна.

**Случай 2.** Возьмем более длинную линейку, когда  $L > 2a$ . Рассматривая различным образом эту линейку между источниками света и фотопластинкой и производя регистрацию на фотопластинке одновременных вспышек источников, мы обнаружим следующие комбинации пятен: а) все три пятна (когда все части линейки находятся вне отрезка  $AC$ ); б) два пятна от  $A, B$  или  $B, C$  (когда линейка закрывает соответствующий крайний источник). Ситуация, при которой источник  $B$  был бы закрыт, а источники  $A$  и  $C$  открыты, невозможна, т. е. невозможна фотография, на которой присутствуют следы от вспышек  $A$  и  $C$  и отсутствует след от вспышки  $B$ . Заметим, что эта ситуация в предшествующем случае более короткой линейки возможна; в) одно пятно от  $A$  или одно пятно от  $C$ , когда два других источника закрыты. Ситуация, при которой были бы закрыты источники  $A$  и  $C$ , а источник  $B$  дал пятно, невозможна: г) на фотопластинке не регистрируется никакой луч. В этом случае линейка закрывает все три источника. Заметим, что такая ситуация в предшествующем случае более короткой линейки невозможна.

**Случай 3.** Будем теперь ту же линейку  $L > 2a$  двигать между источниками света и фотопластинкой параллельно  $AC$  с такой скоростью  $v$ , чтобы  $L\sqrt{1-v^2/c^2} < 2a$ , и будем производить вспышки и их фотографирование на фотопластинке. В результате получим всевозможные комбинации пятен, которые характерны для первого из рассмотренных случаев более короткой линейки. В частности, мы найдем фотографии, на которых имеются два пятна от  $A$  и  $C$  и нет пятна от  $B$ , что невозможно во втором случае. С другой стороны, мы никогда не найдем фотографии, на которой не было бы ни одного пятна, что характерно для второго случая. Поэтому мы придем к выводу, что осуществляется первый случай, т. е. длина движущейся линейки меньше  $2a$ . А это означает, что высказывание о сокращении длины движущейся линейки до значения, мень-

шего  $2a$ , имеет столь же реальное содержание, как и утверждение о том, что длина покоящейся линейки в первом случае меньше  $2a$ . Отсюда ясно, что сокращение движущихся тел есть реальное, а не кажущееся явление. Оно приводит к вполне осозаемым последствиям, реальность которых, как, например, в рассмотренных случаях, не вызывает сомнения.

Теперь проанализируем эти явления в системе координат, связанной с движущейся линейкой (случай  $L > 2a$ ). В той системе координат источники света и фотопластинка движутся в отрицательном направлении со скоростью  $-v$ . В силу сокращения расстояние  $AC$  между источниками будет равно  $2a\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т. е. они будут находиться на значительно меньшем расстоянии, чем длина  $L$  покоящейся линейки. Тем не менее импульсы света от источников  $A$  и  $C$  смогут миновать линейку и дать пятна на фотопластинке. Это обусловлено относительностью одновременности. Вспышки источников, одновременные в системе координат, в которой они покоятся, будут неодновременными в системе координат, в которой они движутся. Поэтому в системе координат, связанной с линейкой, вспышки от источников  $A$ ,  $B$  и  $C$  происходят неодновременно. В частности, в той ситуации, которая рассматривается, вспышка от источника  $C$  происходит раньше на время  $\Delta t' = (2av/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . За это время источники света пройдут путь  $\Delta t'v$  и, следовательно, вторая вспышка произойдет после первой вспышки на расстоянии

$$\frac{2av^2}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} + 2a\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{2a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (16.6)$$

где учтено, что расстояние между движущимися источниками равно  $2a\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . При соответствующей скорости, когда

$$\frac{2a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > L, \quad (16.7)$$

импульс света от  $A$  также минует линейку  $L$  и даст пятно на фотографии. Таким образом, для объяснения рассматриваемого явления в системе координат, связанной с движущейся линейкой, необходимо принять во внимание не только сокращение движущихся масштабов, но и относительность одновременности.

**О сокращении и абсолютной твердости тел.** Представим себе две не связанные между собой, изолированные покоящиеся материальные точки с координатами  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_2 > x_1$ ). Расстояние между ними  $l = x_2 - x_1$ . Допустим, что в некоторый момент времени эти точки начали ускоряться по одинаковому закону в направлении положительных значений оси  $x$ . Это означает, что в каждый момент времени скорости этих точек будут одинаковыми, а следовательно будут одинаковыми и пути, пройденные ими от исходных положений. Отсюда мы заключаем, что расстояние между рассматривае-

мыми точками в процессе ускорения остается неизменным, равным  $l$ . С точки зрения ускоренно движущихся наблюдателей, связанных с материальными точками, дело будет обстоять по-другому. Если они будут каким-то способом измерять расстояние (например, с помощью световых сигналов), то они заметят, что расстояние между ними в процессе ускорения увеличивается. Пусть по достижении точками скорости  $v$  в неподвижной системе координат ускорение прекращается и точки движутся равномерно с этой скоростью. Тогда, измерив между собой расстояние в режиме равномерного движения, наблюдатели на материальных точках придут к выводу, что расстояние между ними увеличилось и стало равным  $l/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Однако они легко объяснят этот результат. Для неподвижного наблюдателя обе материальные точки ускорялись совершенно синхронно и в каждый момент времени имели одинаковые скорости и ускорения. Для наблюдателей, связанных с материальными точками, их движение не будет синхронным из-за относительности одновременности. В рассматриваемом случае они обнаружат, что материальная точка  $x_2$  ускоряется с опережением и именно поэтому она удаляется от точки  $x_1$ .

Теперь представим себе, что материальные точки соединены невесомой пружиной и ускоряются в неподвижной системе координат по одинаковому закону. На основе вышеизложенного ясно, что наблюдатели, связанные с точками  $x_1$  и  $x_2$ , отметят, что в процессе ускорения пружина растягивается и в ней накапливается энергия деформации. Источником этой энергии являются двигатели, обеспечивающие ускоренное движение материальных точек. Если материальные точки соединены абсолютно жестким стержнем, то для бесконечно малой деформации его требуется бесконечно большая энергия. Ясно, что ускорение по одинаковому закону в этом случае становится невозможным. Отсюда можно заключить, что при рассмотрении ускоренных движений материальных тел мы не можем представлять их себе как абсолютно твердые.

## 17. Темп хода движущихся часов.

### Собственное время

**Замедление хода движущихся часов.** Пусть в точке  $x'_0$  движущейся системы координат происходят последовательно два события в моменты  $t'_1$  и  $t'_2$ . В неподвижной нештрихованной системе координат эти события происходят в разных точках в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Интервал времени между этими событиями в движущейся системе координат равен  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ , а в покоящейся  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

На основании преобразования Лоренца имеем:

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v/c^2)x'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v/c^2)x'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (17.1)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (17.2)$$

Таким образом, интервал времени между событиями, измеренный движущимися часами,

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.3)$$

меньше, чем интервал времени  $\Delta t$  между теми же событиями, измеренный покоящимися часами. Это означает, что темп хода движущихся часов замедлен относительно неподвижных.

Может показаться, что это утверждение противоречит принципу относительности, поскольку движущиеся часы можно считать неподвижными. Однако это противоречие основано на недоразумении. Дело в том, что в формуле (17.3) сравнивается время одной и той же движущейся точки со временем различных неподвижных точек. Поэтому, чтобы применить принцип относительности, надо время различных точек движущейся системы координат сравнивать с временем одной и той же точки неподвижной системы координат. Проделаем это сравнение. Пусть в некоторой точке неподвижной системы координат, например в точке  $x_0$  оси  $x$ , произошли два последовательных события в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Интервал времени между этими событиями равен  $\Delta t = t_2 - t_1$ . В штрихованной системе координат, принятой за неподвижную, эти события произошли в разных точках в моменты  $t'_1$  и  $t'_2$ . На основании формул (14.23) имеем:

$$t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (17.4)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (17.5)$$

но теперь  $\Delta t'$  есть интервал времени между событиями в неподвижной системе координат, а  $\Delta t$  — интервал времени между теми же событиями в движущейся системе. Таким образом, содержание формулы (17.5) совпадает с содержанием формулы (17.2), и никакого противоречия с принципом относительности нет.

**Собственное время.** Время, которое измеряется по часам, связанным с движущейся точкой, называется собственным временем этой точки. В формуле (17.3) можно перейти к бесконечно малому

интервалу времени и записать ее так:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (17.6)$$

где  $d\tau$  — дифференциал собственного времени движущейся точки,  $dt$  — дифференциал времени той инерциальной системы координат, в которой рассматриваемая точка имеет в данный момент скорость  $v$ . Заметим, что  $dt$  есть изменение показаний одних и тех же часов, связанных с движущейся точкой, а  $d\tau$  — это разность показаний различных часов неподвижной системы координат, находящихся в соседних пространственных точках.

В § 15 [формула (15.10)] было показано, что дифференциал интервала есть инвариант. Учтем, что  $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2$  есть квадрат дифференциала пространственного расстояния между двумя соседними точками. Поэтому формула (15.10) для квадрата дифференциала интервала может быть преобразована следующим образом,

$$\frac{ds}{i} = c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (17.7)$$

где в качестве событий, между которыми вычисляется интервал, взяты два последовательных положения движущейся точки и учтено, что  $(dr/dt)^2 = v^2$  есть квадрат ее скорости. Мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$  появилась в этой формуле вследствие того, что  $ds^2 = dr^2 - c^2 dt^2 = (-1)(c^2 dt^2 - dr^2)$ . Сравнение (17.7) и (17.6) показывает, что дифференциал собственного времени  $d\tau$  может быть выражен через дифференциал интервала по формуле

$$d\tau = ds/i c. \quad (17.8)$$

Как это видно в (15.10), дифференциал интервала является инвариантом. Поскольку скорость света — постоянная величина, из равенства (17.8) можно заключить, что

**собственное время есть инвариант относительно преобразований Лоренца.**

Это вполне естественно, потому что собственное время определяется по показаниям часов, связанных с движущейся точкой и не имеет значения, в какой системе координат эти показания считываются.

**Экспериментальное подтверждение замедления времени.** В настоящее время известно много экспериментальных подтверждений замедления времени. Исторически одно из первых было получено в опытах по исследованию распада  $\mu$ -мезонов. Среди известных элементарных частиц большинство существует лишь в течение очень корот-

ких промежутков времени от  $10^{-6}$  с и меньше. По истечении времени жизни элементарной частицы она распадается, превращаясь в некоторые другие.

Среди элементарных частиц имеются так называемые  $\pi$ -мезоны (пи-мезоны). Есть положительные  $\pi^+$ -мезоны, отрицательные  $\pi^-$ -мезоны и нейтральные  $\pi^0$ -мезоны. Пи-плюс-мезоны распадаются на  $\mu^+$ -мезоны (мю-мезоны) и нейтрино  $\nu$  по схеме

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu. \quad (17.9)$$

Нейтрино — нейтральная частица, движущаяся со скоростью света (масса покоя равна нулю). Через некоторый промежуток времени  $\mu^+$ -мезоны распадаются на позитроны  $e^+$  и два нейтрино:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + 2\nu. \quad (17.10)$$

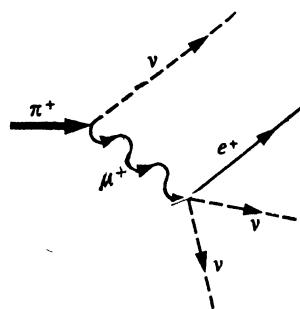
Позитрон — частица с массой, равной массе электрона, но с положительным зарядом. Схема рождения и распада  $\mu^+$ -мезона изображена на рис. 34.

Существуют различные способы регистрации заряженных частиц, позволяющие измерить длину пути  $\mu$ -мезона между моментом его рождения и моментом его распада и независимо определить его скорость. Благодаря этому можно найти время жизни частицы. Если имеет место эффект замедления времени, то время жизни мезона должно быть тем больше, чем больше его скорость  $v$ :

$$\tau_{\mu^+} = \frac{\tau_{\mu^+}^{(0)}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (17.11)$$

где  $\tau_{\mu^+}^{(0)}$  — время жизни по часам, связанным с  $\mu$ -мезоном, т. е. собственное время жизни;  $\tau_{\mu^+}$  — время жизни по часам лабораторной системы координат, в которой изучаются рассматриваемые явления. Длина пути  $l$  в зависимости от скорости в отсутствие замедления времени должна выражаться формулой

$$l = \tau_{\mu^+}^{(0)} v, \quad (17.12)$$



34.

### Схема рождения и распада $\mu^+$ -мезона

Опыты по исследованию распада этой частицы подтвердили формулу замедления времени теории относительности

!

*Преобразования Лоренца справедливы лишь в инерциальных системах отсчета. Поэтому анализ хода часов при облете Земли в западном и восточном направлениях нельзя произвести в системе координат, связанной с поверхностью Земли.*

$$d\tau = ds/c.$$

т. е. быть линейной функцией скорости, а в случае замедления времени

$$l = \tau_{\mu^+}^{(0)} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (17.13)$$

т. е. является большей, чем в отсутствие замедления времени, и зависит от скорости  $v$  нелинейно. Измеряя величину  $l$  в зависимости от  $v$ , можно установить, какая из формул, (17.12) или (17.13), подтверждается экспериментом. Эксперимент подтвердил формулу (17.13). Собственное время жизни  $\mu^+$ -мезона равно  $\tau_{\mu^+}^{(0)} \approx 2 \cdot 10^{-6}$  с.

Замедление времени играет большую роль при работе на современных ускорителях, где часто приходится направлять частицы от источника их получения к далеко отстоящей мишени, с которой частица взаимодействует. Если бы не было эффекта замедления времени, то это было бы невозможно, потому что время прохождения этих расстояний зачастую в десятки и сотни раз больше собственного времени жизни частиц. Например, собственное время жизни  $\pi^+$ -мезонов, о которых только что говорилось, равно  $\tau_{\pi^+}^{(0)} \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$  с. После этого он распадается на  $\mu^+$ -мезон и нейтрину. За это время  $\pi^+$ -мезон, даже двигаясь со скоростью света, может пройти расстояние лишь в  $l \approx 2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 7,5$  м. Между тем мишени для  $\pi^+$ -мезонов часто располагаются от их источника в нескольких десятках метров и  $\pi^+$ -мезоны благополучно их достигают. Например, если  $\pi^+$ -мезон движется со скоростью, отличающейся от скорости света в шестом знаке [т. е.  $(v/c) \approx (1 \div 2) \cdot 10^{-6}$ ], то время его жизни равно  $\tau_{\pi^+} \approx 2,5 \cdot 10^{-8} / \sqrt{1 - [(1 \div 2) \cdot 10^{-6}]^2} \approx 1,25 \cdot 10^{-5}$  с. За это время он пролетает расстояние более 1 км и достигает мишени, во много раз более отдаленной, чем 7,5 м. которые соответствуют собственному времени его жизни.

Недавно (1972 г.) был поставлен эксперимент по фиксации замедления времени с помощью атомных часов, позволяющих с большой точностью измерять время. Идея опыта состояла в следующем. Берутся трое одинаковых атомных часов. Одни остаются на месте, а двое других посылаются в кругосветное путешествие на самолете в западном и восточном направлениях. После возвращения в исходную точку показания часов сравниваются.

Рассмотрим ход всех часов в системе координат, связанной с центром Земли. Эта система координат инерциальная, и в ней можно пользоваться выведенными формулами для замедления времени. Будем считать для простоты, что кругосветное путешествие совершается по некоторой широте. Обозначим через  $v$  линейную скорость точек поверхности Земли на рассматриваемой широте, а через  $v'$  — скорость самолета относительно поверхности Земли. Так как Земля вращается с запада на восток, то скорость часов, движущихся в западном направлении, относительно непод-

вижной системы координат будет  $v - u'$ , а скорость часов, движущихся на восток, равна  $v + u'$  (рис. 35). Заметим, что в неподвижной системе координат и те, и другие часы движутся в одном и том же направлении с востока на запад, поскольку  $v > u'$ .

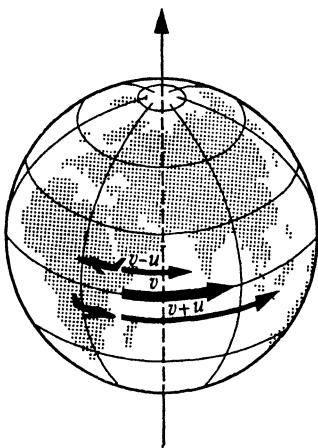
Время в неподвижной системе координат обозначим через  $t$ ; собственное время покоящихся на поверхности Земли часов — через  $\tau_0$ ; часов, путешествующих в западном направлении, — через  $\tau_{(+)}$ , а в восточном — через  $\tau_{(-)}$ . Ясно, что часы, покоящиеся на поверхности Земли, движутся относительно покоящейся системы координат, связанной с центром Земли, со скоростью  $v$  и, следовательно, отстают от этих часов в соответствии с формулой (17.6):

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (17.14)$$

Движущиеся в западном направлении часы имеют относительно покоящейся системы меньшую скорость  $v$ , следовательно, отстают меньше. Поэтому они опережают часы, покоящиеся на поверхности Земли. С другой стороны, движущиеся на восток часы относительно покоящейся системы имеют большую скорость  $v$  и отстают больше, чем покоящиеся на поверхности Земли часы. Следовательно, они отстают от этих часов. Таким образом, после возвращения в исходную точку часы, совершившие кругосветное путешествие в западном направлении, должны уйти вперед в сравнении с оставшимися на Земле часами, а путешествовавшие в восточном направлении должны отстать. Для часов, движущихся в западном и восточном направлениях, аналогично (17.14), можно написать:

$$\begin{aligned} d\tau_{(+)} &= dt \sqrt{1 - (v - u')^2/c^2}, \\ d\tau_{(-)} &= dt \sqrt{1 - (v + u')^2/c^2}. \end{aligned} \quad (17.15)$$

По формулам (17.14) и (17.15), зная скорость самолета и другие данные, не-



35.

#### Опыт проверки замедления времени при облете Земли

После облете вокруг Земли часы на самолете, летевшем на восток, отстанут от часов, оставшихся на Земле, а часы на самолете, летевшем на запад, уйдут вперед

?

- 1 Почему эксперимент по замедлению времени при облете атомных часов вокруг Земли нельзя анализировать в системе координат, связанной с ее поверхностью!
- 2 Какие факторы замедления времени необходимо учитывать в эксперименте по облете Земли атомных часов!
- 3 В чем состоит парадокс близнеццов и каково разрешение этого парадокса!
- 4 Откуда следует инвариантность дифференциала собственного времени?

трудно рассчитать ожидаемую разницу в показаниях часов. Однако эта разница не единственная, которую отметят часы. Дело в том, что на темп хода часов, как это следует из общей теории относительности, оказывает влияние поле тяготения; поле тяготения замедляет темп хода часов, причем тем значительнее, чем оно сильнее. Часы на поверхности Земли также замедляются полем тяготения. Часы, поднятые на самолете на некоторую высоту, находятся в более слабом поле тяготения и замедляются меньше. Поэтому они идут более быстро, чем на поверхности Земли. Эта разница в ходе часов имеет тот же порядок величины, что и разница в ходе часов за счет различия в скоростях, и ее надо учесть.

Если наряду с эффектами, описываемыми формулами (17.14) и (17.15), учесть влияние поля тяготения на ход часов, то можно получить разницу в показаниях часов после возвращения из кругосветного путешествия. Американские ученые Китинг и Хафель, проделавшие этот опыт, нашли, что часы, двигавшиеся на запад, должны были уйти вперед на  $275 \cdot 10^{-9}$  с, а двигавшиеся на восток — отстать на  $40 \cdot 10^{-9}$  с относительно часов, оставшихся на Земле. В полет с собой эти ученые брали для контроля несколько часов. Были учтены также другие возможные источники ошибок. Результат эксперимента находится в хорошем согласии с предсказаниями теории и подтверждает эффект замедления темпа хода движущихся часов.

**Темп хода ускоренно движущихся часов.** В эксперименте с облетом Земли без оговорок предполагалось, что формула (17.6) применима не только для часов, движущихся равномерно и прямолинейно, но и для часов, движущихся ускоренно. Однако она была выведена для равномерного и прямолинейного движения часов, и распространение ее на ускоренные движения требует дополнительного обоснования. Теоретическое обоснование этого представляется затруднительным, поскольку специальная теория относительности не описывает ускоренные движения.

Имеются экспериментальные свидетельства, что формула (17.6) применима и для ускоренных движений. В магнитных полях заряженная частица испытывает ускорение под действием силы Лоренца. По абсолютному значению скорость частиц при этом не меняется, потому что сила со стороны магнитного поля действует перпендикулярно скорости и не совершает работы. Опыты с измерением времени жизни частиц для проверки эффекта замедления времени можно проделать в магнитном поле, когда частицы испытывают ускорения, а их скорость не меняется. Тем самым можно проверить наличие эффекта в условиях ускорения. Имеющиеся в этом отношении экспериментальные данные позволяют утверждать, что формула (17.6) применима также и для ускоренного движения по крайней мере при движении по окружности.

## 18 Сложение скоростей и преобразование ускорений

**Формула сложения скоростей.** Пусть в движущейся системе координат движение материальной точки задано функциями:

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (18.1)$$

а в неподвижной системе — функциями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (18.2)$$

которые находятся из (18.1) с помощью (14.24). Необходимо установить связь между компонентами скорости точки в движущейся и неподвижной системах координат, представленными соответственно в виде:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}, \quad (18.3)$$

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (18.4)$$

Из (14.24) имеем:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \\ dt &= \frac{dt' + (v/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt' \frac{1 + vu'_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Подставляя значения дифференциалов из (18.5) в выражения (18.4) и учитывая (18.3), находим:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \\ u_z &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Это есть искомые формулы сложения скоростей теории относительности. Формулы обратного преобразования согласно принципу относительности получаются, как обычно, заменой штрихованных величин на нештрихованные и скорости  $v$  на  $-v$ .

Из формулы (18.6) следует, что скорость света постоянна, и сложение скоростей никогда не приводит к скоростям, большим скорости света. Докажем это. Пусть  $u_y = u_z = 0$ ,  $u'_x = c$ . Тогда из (18.6) находим:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (18.7)$$

Конечно, этот результат вполне естествен, потому что сами формулы преобразований получены в конечном счете из требования постоянства скорости света.

**Аберрация.** Пусть в штрихованной системе координат вдоль оси  $y'$  распространяется луч света, т. е.

$$u'_x = 0, \quad u'_y = c, \quad u'_z = 0. \quad (18.8)$$

В неподвижной системе координат получаем:

$$u_x = v, \quad u_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c, \quad u_z = 0. \quad (18.9)$$

Следовательно, в неподвижной системе координат луч света составляет с осью  $y$  угол  $\beta$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_x}{u_y} = \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.10)$$

Для  $(v/c) \ll 1$  (18.10) совпадает с формулой (13.5) классической теории:

$$\operatorname{tg} \beta = v_{\perp}/c, \quad (18.11)$$

но содержание ее иное. В классической теории необходимо было различать случаи: движущийся источник — покоящийся наблюдатель и движущийся наблюдатель — покоящийся источник. В теории относительности имеется лишь один случай относительного движения источника и наблюдателя.

**Интерпретация опыта Физо.** Результат опыта Физо (13.23) является естественным следствием формулы сложения скоростей теории относительности.

Скорость света относительно неподвижной среды с показателем преломления  $n$  равна  $c/n$ . Совместная ось  $x'$  с направлением движения среды, мы имеем в движущейся системе координат для скорости света следующие выражения:

$$u'_x = c/n, \quad u'_y = 0, \quad u'_z = 0. \quad (18.12)$$

Отсюда по формулам (18.6) находим компоненты скорости света в той системе координат, относительно которой среда движется со скоростью  $\pm v$ :

$$u_x = \frac{(c/n) \pm v}{1 \pm v/cn}, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad (18.13)$$

где знак плюс относится к случаю, когда направления распространения света в среде и движения среды совпадают, а знак минус — когда эти направления противоположны.

Принимая во внимание малость величины  $(v/c) \ll 1$ , выражение (18.13) преобразуем следующим образом:

$$u_x \approx \left( \frac{c}{n} \pm v \right) \left( 1 \mp \frac{v}{cn} \right) \approx \frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2} \pm v = \frac{c}{n} \pm \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) v, \quad (18.14)$$

где отброшены члены первого порядка по  $v/c$  и более высоких порядков. Это выражение полностью согласуется с формулой (13.23). Таким образом, результат опыта Физо является экспериментальным подтверждением формулы сложения скоростей теории относительности.

**Преобразование ускорения.** Пусть в штрихованной системе координат материальная точка испытывает ускорение, компоненты которого  $w'_x, w'_y, w'_z$ , но скорость ее в этот момент равна нулю. Таким образом, в штрихованной системе координат движение точки характеризуется следующими формулами:

$$\frac{du'_x}{dt'} = w'_x, \quad \frac{du'_y}{dt'} = w'_y, \quad \frac{du'_z}{dt'} = w'_z, \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0. \quad (18.15)$$

Определим движение точки в нештрихованной системе координат. Скорость находим по формулам (18.6):

$$u_x = v, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (18.16)$$

Ускорение в нештрихованной системе координат равно:

$$w_x = \frac{du_x}{dt}, \quad w_y = \frac{du_y}{dt}, \quad w_z = \frac{du_z}{dt}. \quad (18.17)$$

Величины  $dt, du_x, du_y, du_z$  определяются по формулам (18.5) и (18.6), причем скорости  $u'_x, u'_y, u'_z$  можно полагать равными нулю лишь после вычисления дифференциалов. Например, для  $du_x$  имеем

$$du_x = \frac{du'_x}{1 + vu'_x/c^2} - \frac{(u'_x + v)(v/c^2) du'_x}{(1 + vu'_x/c^2)^2} = \frac{du'_x}{(1 + vu'_x/c^2)^2} \left( 1 + \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) = \\ = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + vu'_x/c^2)^2} du'_x.$$

Отсюда с учетом (18.5) находим

$$w_x = \frac{du_x}{dt} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \frac{du'_x}{dt'} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} w'_x, \quad (18.18)$$

где в соответствии с (18.15) положено  $u'_x = 0$ .

Аналогично вычисляют дифференциалы  $dw_y$  и  $dw_z$ . Таким образом получают следующие формулы преобразования ускорения:

$$\boxed{\begin{aligned} w_x &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} w'_x, & w_y &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} w'_y, \\ w_z &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} w'_z. \end{aligned}} \quad (18.19)$$

Точка при этом движется в нештрихованной системе со скоростью  $v$ . Поэтому формулы (18.19) означают следующее. С движущейся материальной точкой можно связать инерциальную систему координат, в которой она в данный момент поконится. Такая система координат называется сопровождающей. Если в этой системе точка движется с ускорением, то и в любой другой системе координат она будет двигаться с ускорением, однако это ускорение будет иным, но всегда меньше. Компонента ускорения вдоль движения уменьшается пропорционально множителю  $\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}$ , где  $v$  — скорость частицы в той системе координат, в которой ее ускорение рассматривается. Поперечная составляющая ускорения, которая перпендикулярна скорости частицы, изменяется меньше. Ее уменьшение пропорционально множителю  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

# Глава 5

## ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

---

- 19. Силы
- 20. Законы Ньютона
- 21. Релятивистское уравнение движения
- 22. Уравнение моментов
- 23. Уравнение движения системы материальных точек

**О**сновной смысл динамики Ньютона состоит в том, что именно ускорение, а не скорость или производная ускорения по времени, обуславливается внешними факторами, описываемыми посредством понятия силы. Поэтому второй закон Ньютона не является определением силы, хотя для нахождения силы во многих конкретных условиях использование второго закона является единственно возможным.

---

### 19. Силы

**Происхождение понятия силы.** В течение примерно 2000 лет до Галилея задачей теории движения являлось объяснить, почему тело имеет данную скорость. Эта задача решалась в динамике Аристотеля следующим образом. Считалось, что каждому телу свойственно определенное место: легкие тела наверху, тяжелые — внизу. Тела стремятся к своим местам и такое их движение — легких тел вверх, тяжелых вниз — не требует объяснения — оно является естественным. Движение звезд и небесных тел по небесному своду считалось также естественным. Другие движения, не относящиеся к естественным, являются насильтвенными, например качение биллиардного шара по горизонтальному столу, и требуют указания причины, почему они происходят.

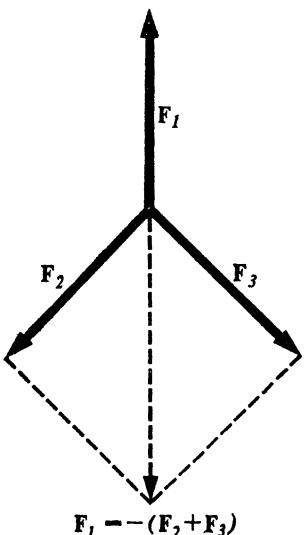
Причину, почему шар катится по столу, Аристотель называл силой, которая передается шару из окружающего его воздуха. Если в математической форме выра-

!

*Силы существуют независимо от ускорений. Поэтому хотя и можно их измерять через ускорения, но вводить более правильно независимо от ускорений. Однако существует и другая точка зрения.*

?

- 1 В чем состоит субъективный характер отличия действия от противодействия?
- 2 Как связаны силы и вызываемые ими деформации?



36.

Сложение сил по правилу параллелограмма

зить закон движения Аристотеля, то эта сила была пропорциональна скорости шара. В дальнейшем постепенно возникли сомнения, что эта сила передается шару из окружающего воздуха, и Николай Кузанский (1401–1464) приходит к представлению, что она передается шару в момент толчка, а дальше уже находится в шаре и обеспечивает существование его скорости. Необходимость в окружающей среде для этой цели отпала. Затем Галилей наиболее ясно показал, что нуждается в объяснении не сохранение скорости, а ее изменение, и связал понятие силы не со скоростью, а с ускорением. Сохранение же телом имеющейся у него скорости происходит в силу закона инерции, согласно которому тело стремится сохранить состояние своего равномерного прямолинейного движения. Этот закон, согласно Галилею, следует рассматривать как первоначальный, основной закон, который не может быть сведен к чему-либо более простому.

В динамике Ньютона не скорость, а изменение скорости, т. е. ускорение, имеет причину. Причиной изменения скорости является сила. Задача заключается в том, чтобы дать количественную формулировку соотношения между силой и ускорением. Эта задача решается законами движения Ньютона.

**Взаимодействия.** Силы не являются какими-то самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел. Они создаются материальными телами. Поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела действуют друг на друга, т. е. взаимодействуют. Сила при этом выступает как количественная мера интенсивности взаимодействий. При рассмотрении движений в неинерциальных системах отсчета это представление о силах будет обобщено и будут введены силы, для которых нельзя указать в качестве источника какое-либо конкретное материальное тело.

**Измерение силы.** Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают их деформации. Наиболее простым и наглядным примером деформированного тела является сжатая или растянутая пружина. Ее удобно использовать в качестве эталона измерения силы: за единицу эталона силы берется пружина, растянутая или сжатая в определенной степени. Две силы называются равными по численному значению, но противоположно направленными, если они, будучи приложенными к материальному телу, не сообщают ему ускорения. На основании этого можно сравнивать силы, направленные вдоль одной прямой, и сделать вывод, что силы характеризуются не только численным значением, но и направлением. С другой стороны, это позволяет построить шкалу сил. На рис. 36 показано сложение сил, действующих в различных направлениях, причем доказательством того, что сумма сил равна нулю, по-прежнему является отсутствие ускорения у тела, к которому они приложены. На этом рисунке видно, что силы складываются по правилу параллелограмма, т. е. как векторы. Тем самым доказывается, что сила является вектором, и устанавливается процедура измерения сил, независимая от измерения ускорений.

## 20. Законы Ньютона

Сколько независимых законов Ньютона существует? Как известно, первый закон гласит, что тело, достаточно удаленное от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, а второй закон дает выражение ускорения тела под действием силы, приложенной к нему, в виде

$$m(dv/dt) = F, \quad (20.1)$$

где  $m$  — масса тела,  $dv/dt$  — ускорение. Из уравнения (20.1) при отсутствии силы ( $F = 0$ ) следует, что  $v = \text{const}$ . Иначе говоря, если на теле не действуют никакие силы или если равнодействующая сил, приложенных к телу, равна нулю, то тело движется равномерно прямолинейно либо покойится. Поэтому существует точка зрения, что первый закон не имеет самостоятельного значения и является следствием второго закона. В этой книге такая точка зрения отвергается по следующим причинам.

Как уже подробно говорилось в § 5 и 7, условием возможности даже чисто кинематического рассмотрения движения тел в некоторой системе отсчета является такое поведение масштабов и часов, которое предполагалось справедливым в этих параграфах. Если, например, нельзя синхронизовать часы и ввести в системе отсчета единое время так, как это было изложено в § 7, то не имеет определенного смысла не только закон динамики (20.1), но и вообще все математические соотношения, которые изложены в главе о кин-

матике движения. Поэтому возникает вопрос, каким образом проверить, что в данной системе отсчета возможны построения, изложенные в § 5 и 7. Только убедившись в этом, можно говорить о том, что физические величины имеют ясный смысл и точно определенное содержание, причем это касается не только величин динамики, но и величин кинематики. Например, самое простое представление о равномерном движении теряет свой смысл, если нельзя синхронизовать часы так, как это указано в § 7.

В принципе можно убедиться в пригодности системы отсчета путем тщательного изучения поведения масштабов и часов в ней, причем необходимо охватить этой проверкой все пространство и провести ее с достаточно большой точностью. Лишь после этого можно написать уравнение (20.1) и из него действительно вывести первый закон. Однако такого рода проверку практически провести трудно, а без этого нельзя сказать, какой смысл имеет уравнение (20.1).

Для того чтобы обойти эту трудность, можно выбрать систему отсчета с помощью первого закона Ньютона: надо взять некоторое пробное тело и поместить его достаточно далеко от всех других материальных тел; если при этом, наблюдая движение пробного тела, будет обнаружено, что оно движется равномерно и прямолинейно или покоятся, то система отсчета годится для кинематических и динамических описаний движений по тем правилам, которые применяются. Эта проверка эквивалентна той, о которой говорилось выше. Только после этого можно написать закон движения (20.1).

Поэтому первый закон Ньютона является независимым законом, выражающим критерий пригодности системы отсчета для рассмотрения движений, причем и в динамическом, и в кинематическом смысле. Этот закон является не только независимым, но и первым в порядковом смысле, потому что только после него можно говорить о точно определенном физическом смысле и содержании второго и третьего законов.

**Масса.** В качестве простейшего эталона силы целесообразно взять пружину, проградуированную на различные значения силы указанным выше способом. Таким образом, имеется возможность прикладывать к телу различные силы, значения которых известны. Единицей силы является независимая величина, материализованная в пружине, растянутой или сжатой до определенной степени. Второй измеряемой величиной является ускорение различных материальных тел, на которые действует сила. Схема демонстрационной установки, на которой изучается зависимость ускорений от сил, изображена на рис. 37. Результаты экспериментов показывают, что ускорение по направлению совпадает с силой. Одна и та же сила разным телам сообщает различные ускорения. Различные силы одному и тому же телу сообщают разные ускорения. Однако отношение силы к ускорению всегда равно одной и той же величине:

$$\frac{F}{m} = \text{const} = m. \quad (20.2)$$

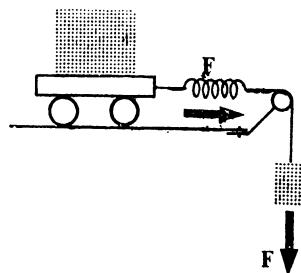
Эта постоянная величина имеет для разных тел различные значения, но для каждого тела имеет определенное значение. Она характеризует свойство инертности тела и называется его массой  $m$ . Какого-либо иного смысла, кроме характеристики свойства инертности тела, масса не имеет. Иногда еще эту массу называют инертной. Если соотношение (20.2) записать в векторной форме с учетом того, что направления силы и ускорения совпадают, то получается уравнение (20.1), выражающее второй закон Ньютона. Однако полезно это уравнение переписать также и в другой форме:

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad p = mv. \quad (20.3)$$

Произведение массы на скорость  $p = mv$  называется импульсом. Сила  $F$  в правой части является суммой всех сил, действующих на тело. Уравнение (20.3) отличается от (20.1) в данном случае только обозначениями, но имеет то же физическое содержание. Однако оно более удобно для обобщений, которые в дальнейшем необходимо будет сделать. Заметим также, что это уравнение строго применимо лишь к материальной точке. К материальному телу его также можно применять, если под  $v$  понимать скорость центра масс тела, а не какой-либо произвольной точки тела.

Отношение  $(F/w) = \text{const}$  справедливо только при достаточно малых скоростях тел. Если же скорости тел увеличивать, то оно начинает изменяться, возрастая со скоростью. Это означает, что инертные свойства тел усиливаются с увеличением скорости. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

**От третьем законе Ньютона.** Третий закон Ньютона говорит о том, что во взаимо-



37.

Демонстрация зависимости ускорения от сил

Сила измеряется по величине деформации пружины

?

1 Знаете ли Вы существующие точки зрения о числе независимых законов Ньютона? Какова Ваша точка зрения по этому вопросу?

2 В чем состоят общие релятивистские соображения, показывающие, что в своей простейшей форме третий закон Ньютона не может выполняться?

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}},$$

$$u_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_y, \quad 1 + \frac{vu'_x}{c^2},$$

$$u_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_z, \quad 1 + \frac{vu'_x}{c^2}.$$

!

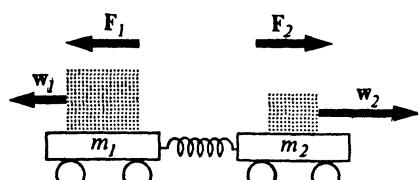
*В простейшем случае электромагнитного взаимодействия третий закон Ньютона не соблюдается. Лишь переформулировав его как закон сохранения импульса в замкнутой системе, можно восстановить его справедливость.*

действии двух тел каждое из тел действует на другое тело с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой. Таким образом, источниками «действующей» и «противодействующей» сил являются различные материальные тела, различны также тела, к которым приложены эти силы. Каждое из взаимодействующих тел является источником «действующей» на другое тело силы и объектом приложения «противодействующей» силы, источником которой является другое из взаимодействующих тел. Поэтому разница между «действующей» и «противодействующей» силами имеет лишь субъективный характер и зависит от точки зрения. По своей природе «действие» и «противодействие» не отличаются.

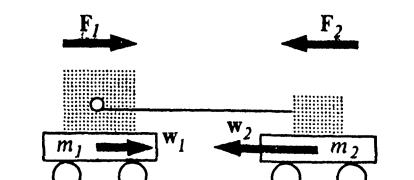
Наиболее наглядно закон равенства действия и противодействия демонстрируется при взаимодействии материальных тел, осуществляя через посредство других материальных тел, например через посредство пружины или нити. На рис. 38 показаны установки, на которых можно убедиться в выполнимости третьего закона Ньютона. В случае, изображенном на рис. 38, а, пружина сжимается до некоторого положения внешними силами  $F_1$  и  $F_2$ , приложенными соответственно к телам  $m_1$  и  $m_2$ . После прекращения действия сил, сжимающих пружину, тела  $m_1$  и  $m_2$  приходят в ускоренное движение. Следовательно, на каждое из тел действует сила, которая может быть вычислена по ускорению, приобретаемому телом

## 38.

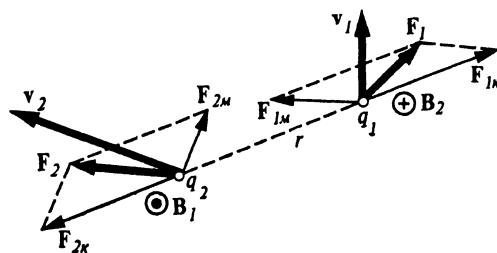
При взаимодействии двух тел одно из них действует на другое с такой же силой, но противоположно направленной, как другое — на первое (третий закон Ньютона)



а)



б)



39

### Электромагнитное взаимодействие движущихся зарядов

В этом случае третий закон Ньютона не выполняется, поскольку заряды не являются изолированной системой. В этом взаимодействии участвуют также и поля

лом. Опыт показывает, что всегда соблюдается соотношение  $m_1 w_1 = m_2 w_2$ , где  $w_1$  и  $w_2$  — ускорения тел  $m_1$  и  $m_2$ . Это означает, что  $F_1 = F_2$ . В случае, изображенном на рис. 38, б, на одном из взаимодействующих тел укреплен электромотор, на вал которого при вращении наматывается нить, другой конец которой жестко прикреплен к другому телу. При работе мотора тела движутся навстречу друг другу с ускорениями  $w_1$  и  $w_2$ , причем всегда  $m_1 w_1 = m_2 w_2$ , т. е.  $F_1 = F_2$ .

Однако закон равенства действия и противодействия выполняется в такой простой форме не всегда. Рассмотрим взаимодействие двух положительных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , движущихся соответственно со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , на каждый из которых со стороны другого заряда действуют силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 39). Каждую из этих сил можно представить в виде двух составляющих. Первая составляющая есть сила электрического взаимодействия по закону Кулона. Она действует по линии, соединяющей заряды, равна  $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$  и удовлетворяет требованиям третьего закона Ньютона, т. е. обозначена как  $F_{1k} = -F_{2k}$ . Но кроме электрического взаимодействия зарядов существует их магнитное взаимодействие: каждый из движущихся зарядов в точке нахождения другого заряда создает магнитное поле индукции  $B$ . Оно действует на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $v$ , с силой

$$w_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} w'_x,$$

$$w_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} w'_y,$$

$$w_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} w'_z.$$

?

- 1 Какая более глубокая точка зрения на третий закон Ньютона Вам известна и какова при этом интерпретация взаимодействия движущихся электрических зарядов?
- 2 Какое свойство материи характеризует масса?
- 3 Какова роль поля во взаимодействии?

Лоренца, равной

$$\mathbf{F}_m = q [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (20.4)$$

Поле  $\mathbf{B}$ , создаваемое движущимся зарядом, может быть найдено. Сейчас нет необходимости знать точную величину этого поля, а важно лишь отметить, что в ситуации, изображенной на рис. 39, поле  $\mathbf{B}_1$ , создаваемое зарядом  $q_1$  в точке нахождения заряда  $q_2$ , направлено перпендикулярно плоскости чертежа к нам, а поле  $\mathbf{B}_2$ , создаваемое зарядом  $q_2$  в точке нахождения заряда  $q_1$ , направлено перпендикулярно плоскости чертежа от нас. Сила Лоренца (20.4) перпендикулярна скорости  $\mathbf{v}$  и магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Как видно из рис. 39, силы Лоренца  $\mathbf{F}_{1m}$  и  $\mathbf{F}_{2m}$ , действующие на каждый из зарядов в  $q_1$  и  $q_2$ , не совпадают по направлению и, следовательно, не могут удовлетворять закону действия и противодействия. Полная сила действия первого заряда на второй («действие») равна  $\mathbf{F}_{2k} + \mathbf{F}_{2m} = \mathbf{F}_2$ , а полная сила действия второго заряда на первый («противодействие») равна  $\mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_{1m} = \mathbf{F}_1$ . Ясно, что эти силы не равны друг другу и не направлены противоположно:

$$\mathbf{F}_1 \neq -\mathbf{F}_2, \quad (20.5)$$

т. е. третий закон Ньютона не выполняется.

Заметим, что при не очень больших скоростях заряженных частиц, много меньших скорости света [ $(v/c) \ll 1$ ], силы магнитного происхождения много меньше электрических. Поскольку отклонение от закона равенства действия и противодействия обусловлено магнитными силами, то это отклонение при не очень больших скоростях несущественно и им обычно можно пренебречь.

Чтобы разобраться в этом вопросе, необходимо иметь в виду, что третий закон Ньютона имеет более глубокое содержание, чем просто равенство сил действия и противодействия. Рассмотрим взаимодействие тележек, изображенных на рис. 38, и запишем уравнение движения (20.3) для каждого из взаимодействующих тел:

$$\frac{dp_1}{dt} = F_1, \quad \frac{dp_2}{dt} = F_2, \quad (20.6)$$

где  $p_1 = m_1 v_1$ ,  $p_2 = m_2 v_2$ . Скорость  $v_1$  или  $v_2$  имеет знак «+», если ее направление совпадает с направлением оси  $x$ , выбранным за положительное. Тогда на рис. 38, *a* скорость  $v_2$  тележки  $m_2$  будет положительной, а  $v_1$  тележки  $m_1$  — отрицательной; на рис. 38, *б* знаки у скоростей  $v_1$  и  $v_2$  будут противоположными. Знаки сил  $F_1$  и  $F_2$  в уравнениях (20.6) также определяются тем, совпадает ли вектор данной силы с положительным направлением оси  $x$  или противоположен ей. По третьему закону Ньютона должно быть

$F_1 + F_2 = 0$ . Поэтому, сложив почленно уравнения (20.6), получим

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = F_1 + F_2 = 0. \quad (20.7)$$

Отсюда следует, что

$$p_1 + p_2 = \text{const.} \quad (20.8)$$

Таким образом, при взаимодействии двух тел сумма их импульсов является постоянной. Третий закон Ньютона можно сформулировать как требование сохранения суммы импульсов взаимодействующих тел, если нет никаких других внешних сил. В этом — его более глубокое физическое содержание.

Теперь вернемся к случаю взаимодействия движущихся зарядов (рис. 39). Как уже показано выше, силы, с которыми электроны действуют друг на друга, не равны и не направлены противоположно. Следовательно, согласно (20.7) получаем, что сумма импульсов взаимодействующих электронов не сохраняет постоянного значения, она изменяется, т. е. третий закон Ньютона не выполняется.

Однако посмотрим более внимательно на картину взаимодействия. В нем участвуют не только заряды  $q_1$  и  $q_2$ , но и электрическое поле  $E$ , и магнитное поле  $B$ . Спрашивается, а не обладают ли импульсом эти поля? Ответ гласит: да, электромагнитное поле обладает импульсом. В электродинамике показывается, что этот импульс распределен во всем пространстве, где есть электромагнитное поле, а плотность импульса (т. е. импульс, отнесенный к единице объема) для поля в вакууме равна  $[E, B]/c^2\mu_0$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м есть магнитная постоянная. Вычисления показывают, что одновременно с изменением суммы импульсов взаимодействующих электронов изменяется на такое же значение, но в противоположном направлении, и импульс электромагнитного поля, создаваемого этими электронами, т. е. при взаимодействии сохраняется суммарный импульс взаимодействующих движущихся электронов и созданного ими электромагнитного поля. В такой формулировке восстанавливается справедливость третьего закона Ньютона для описания данного взаимодействия.

На основе представления о силах восстановить справедливость третьего закона Ньютона для описания взаимодействий нельзя. Поскольку электромагнитное поле занимает все пространство, источниками дополнительных сил, которые должны скомпенсировать неравенство нулю сил взаимодействия между электронами, должны были бы являться все точки пространства. Но тогда надо ввести еще представление о передаче этих сил в пространстве, необходимость в котором ни из каких экспериментальных фактов не следует. Поэтому такой путь приходится отвергнуть.

Вот почему формулировка третьего закона Ньютона в виде требования сохранения суммарного импульса участвующих во взаимодействии тел и полей является более физически содержательной, чем формулировка в виде требования равенства сил действия и противодействия.

Можно показать невозможность соблюдения третьего закона Ньютона в релятивистском случае без обращения к электромагнитным взаимодействиям. Пусть в некоторой системе координат происходит взаимодействие двух тел такое, что соблюдается равенство действия и противодействия и в некоторый момент времени тела приходят в движение с равными и противоположно направленными ускорениями. В другой системе координат начало движения произойдет не одновременно и, следовательно, будет некоторый промежуток времени, в течение которого одно из тел движется, а другое покоятся. Ясно, что в течение этого промежутка времени третий закон Ньютона в его простейшей форме заведомо не выполняется. Таким образом,

**невыполнимость третьего закона Ньютона в простейшей форме является следствием общих релятивистских свойств пространства и времени.**

## 21. Релятивистское уравнение движения

Продольная и поперечная массы. Если продолжать эксперименты с тележками, изображенными на рис. 38, увеличивая скорости их движения, то вместо (20.2) окажется, что отношение  $F/w$  не является постоянным, а зависит от скорости. Однако, чтобы это заметить, нужны очень большие скорости. Проще всего эти опыты осуществить с заряженными элементарными частицами, движущимися в электромагнитных полях (например, в ускорителях). При этом сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся со скоростью  $v$ , вычисляется по формуле

$$\boxed{F = q \{E + [v, B]\}} \quad (21.1)$$

Пусть заряженная частица, например протон, движется по круговой орбите в переменном магнитном поле  $B$ , как это происходит в циклическом ускорителе (рис. 40). На пути протона имеется промежуток, в котором создается электрическое поле  $E$ , известное по величине и меняющееся так, что в момент прохождения протоном этого промежутка он ускоряется. Вне ускоряющего промежутка протон движется по окружности заданного радиуса  $r$  под действием силы  $F_n = e [v, B]$ . Задав величину магнитного поля  $B$ , определив скорость протона по времени облета окружности ускорителя и принимая во внимание формулу центростремительного ускорения при движении по окружности по формуле  $(v^2/r) = w_n$ , можно найти

отношение  $(F_n/w_n) = (evBr/v^2)$ . Эксперимент дает следующую зависимость:

$$\frac{F_n}{w_n} = \frac{\text{const}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (21.2)$$

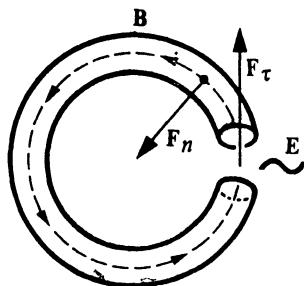
Под действием силы  $F_\tau = eE$  при прохождении ускоряющего промежутка скорость протона увеличивается. Изменение этой скорости от оборота к обороту, т. е. ускорение  $w_\tau$  протона, может быть измерено. Конечно, практически сделать это не просто, потому что протон проходит ускоряющий промежуток в разных фазах ускоряющего поля, т. е. при различных значениях  $E$  радиус его орбиты также колебляется и т. д. Однако здесь нет необходимости подробно обсуждать эти вопросы. Ясно, что можно эти факторы в принципе учесть и вычислить ускорение электрона  $w_\tau$ , обусловленное действием силы  $F_\tau$ . Из этих данных можно найти величину  $F_\tau/w_\tau$ . Эксперимент дает следующую зависимость:

$$\frac{F_\tau}{w_\tau} = \frac{\text{const}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (21.3)$$

Формулы (21.2) и (21.3) при малых скоростях  $(v/c) \ll 1$  должны перейти в формулу (20.2). Поэтому постоянная величина в них равна массе частицы  $m_0$ , которая является мерой инертности частицы при нулевой скорости и поэтому называется массой покоя. Окончательно выражения (21.2) и (21.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ w_n &= \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Эти зависимости графически изображены на рис. 41. Ускорение  $w_\tau$  является тангенциальным ускорением,  $F_\tau$  — сила, коллинеарная касательной к траектории. Ускорение  $w_n$  и сила  $F_n$  перпендикулярны траектории; равенства (21.4) показывают,

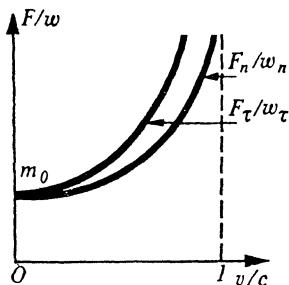


40.

Движение заряженной частицы в ускорителе

!

*Масса является мерой инертности. Поэтому понятия «продольная масса» и «поперечная масса» выражают лишь различие инертных свойств тела в отношении ускорений по направлению скорости и перпендикулярно ей. В системе координат, связанной с телом, это различие пропадает.*



41.

**Зависимость продольной и поперечной масс от скорости**

Инертность частицы в направлении скорости (продольная масса) больше, чем перпендикулярно скорости (поперечная масса)

?

- 1 | Как изменяется инертность тела со скоростью в направлении ее и перпендикулярно ей?
- 2 | Как выводится закон изменения инертности со скоростью исходя из преобразований Лоренца и принципа относительности?

!

**Если скорость частицы близка к скорости света, то для изменения ее скорости по абсолютному значению требуется приложить значительно большую силу, чем для изменения ее направления. Иначе говоря, очень быстрая частица легче изменяет направление скорости, чем ее абсолютное значение.**

что инертность частицы по направлению скорости отличается от ее инертности перпендикулярно скорости, а соответствующие характеристики инертности называются продольной и поперечной массами. Продольная масса частицы равна  $m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ , а поперечная  $m_0/V\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

Эти эксперименты убедительны, но остается один вопрос, на который надо дать ответ: откуда нам известно, что сила  $F_\tau$ , действующая на частицу со стороны электрического поля, не зависит от скорости частицы? Иначе говоря, откуда нам известно, что зависимость отношения  $F_\tau/w_\tau$  от скорости хотя бы частично не проистекает из-за неучтенней зависимости  $F_\tau = eE$  от скорости? Проверить этот вопрос можно экспериментально путем изучения лобового удара одноименно заряженных частиц различных масс. При этом частицы сближаются по прямой линии и затем по ней удаляются. Нетрудно видеть, что магнитное взаимодействие между ними в этом случае отсутствует. В каждый момент ввиду различия в массах частицы движутся с различными скоростями (система координат связана с центром масс частицы). Поэтому можно сделать определенные заключения о возможной зависимости силы взаимодействия от скорости частицы. Изучение столкновений частиц показывает, что формула (21.1) правильно описывает силы, действующие на заряженные частицы.

Несмотря на убедительность этих экспериментов, желательно проверить формулы (21.4) более непосредственно, например с помощью установки, изображенной на рис. 37. Конечно, разогнать тележку с помощью пружины до скорости в несколько тысяч километров в секунду невозможно. Но в этом и нет необходимости. Представим себе обычную демонстрацию с тележками, которая выполняется в аудитории, и рассмотрим эту демонстрацию из системы координат, в которой и аудитория, и демонстрационная установка дви-

жуется с очень большой скоростью  $v$ . Не надо фактически перемещаться в эту систему координат. Достаточно по формулам преобразований Лоренца выяснить, как в ней будет происходить процесс. Один раз движение той системы координат можно будет направить параллельно движению тележки, а другой раз перпендикулярно. Такой прием является важнейшим методом применения принципа относительности для анализа конкретных задач: задачу целесообразно решать в той системе координат, которая представляется наиболее удобной. Обычно удобна, конечно, та система, где задача решается проще. В данном случае такой системой является лабораторная система, связанная со столом в аудитории, в которой законы движения уже изучены. Это законы Ньютона. Теперь переходом в другую систему с помощью преобразований Лоренца можно установить вид закона движения в системе координат, в которой частица движется с любой скоростью. В данном случае этот переход позволяет записать отношения  $F_\tau/w_\tau$  и  $F_n/w_n$  для произвольных скоростей тел.

Проделаем это вычисление. Система координат, в которой проводится опыт, изображенный на рис. 37, является штрихованной системой, где ось  $x'$  направлена по движению тележки. Нештрихованной системой, из которой мы хотим рассмотреть этот опыт, будет система координат, движущаяся относительно штрихованной влево со скоростью  $v$ , а штрихованная система в нештрихованной движется вправо со скоростью  $v$ . В штрихованной системе опыт с тележкой дал следующий результат:

$$\frac{F'_x}{w'_x} = m_0. \quad (21.4a)$$

А как преобразуется сила в нештрихованной системе? Ясно, что она остается без изменения, потому что ее значение определяется той цифрой, на которую показывает стрелка динамометра, а эта цифра, конечно, не изменяется. Поэтому закон преобразования силы есть  $F = F'$ . Преобразование ускорения дается формулой (18.19). Подставляя из нее выражение  $w'_x$  в формулу (21.4a), находим

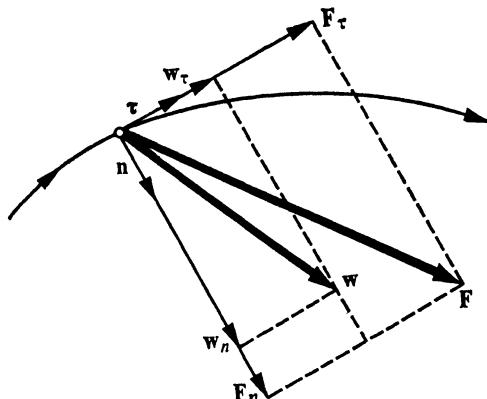
$$\frac{F_\tau}{w_\tau} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (21.4b)$$

что совпадает со второй формулой (21.4), поскольку направление оси  $x$  в данном случае является тангенциальным. Совершенно аналогично, рассмотрев опыт, изображенный на рис. 37, в системе координат, движущейся со скоростью  $v$  перпендикулярно направлению движения тележки, мы получим первую формулу (21.4).

**Релятивистское уравнение движения.** Пусть частица движется вдоль некоторой траектории. Обозначим, как в § 8 (см. рис. 15), тангенциальный к траектории единичный вектор через  $\tau$ , а нормальный — через  $n$ . Полную силу  $F$ , действующую на частицу, можно

42.

В релятивистском случае ускорение и сила, вообще говоря, не совпадают по направлению ввиду различия инертности частицы вдоль скорости и перпендикулярно ей



!

*В релятивистском случае направления ускорения и силы не совпадают.*

$$\mathbf{F} = q \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \}.$$

?

- 1 Что такое релятивистская масса тела и как записывается релятивистское уравнение движения?
- 2 Какими факторами обуславливается несовпадение направления силы и вызываемого ею ускорения? Откуда видно, что масса покоя является инвариантом?
- 3

разложить на тангенциальную и нормальную компоненты (рис. 42):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_n. \quad (21.5)$$

Каждая из компонент силы создает в соответствующем направлении ускорение, которое определяется инертностью тела в этом направлении. Поскольку нормальное ускорение равно  $v^2/R$  [см. (8.21), где  $R$  — радиус кривизны траектории,  $v$  — скорость частицы], а тангенциальное ускорение есть  $d\mathbf{v}/dt$ , формулы (21.4) для нормальных и тангенциальных компонент силы могут быть записаны следующим образом:

$$\tau \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_\tau, \quad \mathbf{n} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = \mathbf{F}_n. \quad (21.6)$$

Сложив почленно выражения (21.6) и учитывая (21.5), получим уравнение движения частицы под действием полной силы  $\mathbf{F}$ :

$$\tau \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{n} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = \mathbf{F}. \quad (21.7)$$

Левую часть этого уравнения можно упростить. Принимая во внимание, что  $(d\tau/dt) = (dt/ds) (ds/dt) = v (d\tau/ds)$  и представив формулу (8.20) в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = v \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad (21.8)$$

величину  $nv^2/R$  в (21.7) заменим на  $v d\tau/dt$ , и это уравнение примет вид

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \tau \frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \frac{d\tau}{dt} = F. \quad (21.9)$$

Прямыми дифференцированием проверяем следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

Согласно этому, левую часть уравнения (21.9) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \tau \frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \frac{d\tau}{dt} &= \tau \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\tau}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v \tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \end{aligned}$$

где учтено, что  $v\tau = v$  есть вектор скорости частицы. Таким образом, получаем релятивистское уравнение движения частицы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = F, \quad (21.10)$$

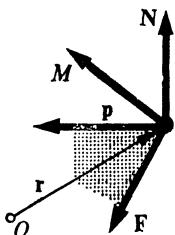
которое является обобщением уравнения движения Ньютона (20.1). Более удобно представить его в виде, аналогичном (20.3):

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad p = mv, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (21.11)$$

Величина  $m$  называется релятивистской массой или просто массой;  $m_0$  — масса покоя,  $p$  называется релятивистским импульсом или просто импульсом.

Обычно нет необходимости специально оговаривать, что импульс является «релятивистским», масса — «релятивистской» и т. д., потому что когда скорости очень большие, релятивистские, то можно использовать только релятивистские выражения импульса и массы, а когда скорости малы, то эти выражения автоматически превращаются в нерелятивистские.

**Несовпадение направлений силы и ускорения в релятивистском случае.** Поскольку инертность тела различна в направлении движения и перпендикулярном направлении, вектор полной силы неколлинеарен вектору полного ускорения, т. е. вектору изменения скорости, вызываемого этой силой, как это показано на рис. 42. Как видно из уравнения (21.11), с вектором силы совпадает по направлению вектор изменения импульса. Вот почему в нерелятивистском случае различие между уравнениями Ньютона (20.1) и (20.3) чисто формальное и сводится к изменению обозначений, но для обобщения на релятивистский случай они не равнозначны. Уравнение Ньютона в форме (20.3) непосредственно обобщается на релятивистский случай (21.11) простой подстановкой массы, зависящей от скорости.



43.

**К определению понятий момента импульса и момента сил**

Вектор момента импульса перпендикулярен плоскости, в которой лежат радиус-вектор и импульс точки, а вектор момента силы перпендикулярен плоскости, в которой расположены радиус-вектор и сила. Точка  $O$  — начало отсчета радиусов-векторов

?

- 1 **Момент импульса и момент силы определяются относительно точки. Произвольно ли состояние движения этой точки?**
- 2 **Чем отличаются выражения для моментов импульса и силы в нерелятивистском и релятивистском случаях?**
- 3 **При каких условиях справедливо уравнение моментов?**
- 4 **Как зависят моменты силы и импульса от положения точки, относительно которой они вычисляются?**

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

$$p = mv,$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

## 22. Уравнение моментов

**Момент импульса.** Пусть положение некоторой материальной точки относительно точки  $O$ , принятой за начало, характеризуется радиусом-вектором  $r$ . Моментом импульса материальной точки относительно  $O$  называется вектор (рис. 43)

$$N = [r, p]. \quad (22.1)$$

Это определение справедливо как для нерелятивистского, так и для релятивистского импульса. В обоих случаях импульс  $p$  по направлению совпадает со скоростью материальной точки.

**Момент силы.** Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно точки  $O$  (рис. 43) называется вектор

$$M = [r, F]. \quad (22.2)$$

Под  $F$  здесь, как и в других случаях, понимается равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку.

**Уравнение моментов.** Продифференцируем момент импульса (22.1) по времени:

$$\frac{dN}{dt} = \left[ \frac{dr}{dt}, p \right] + \left[ r, \frac{dp}{dt} \right]. \quad (22.3)$$

Учтем, что  $(dr/dt) = v$  является скоростью, по направлению совпадающей с импульсом  $p$ . Векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю. Поэтому первый член в правой части (22.3) равен нулю, а второй член выражает момент силы (22.2), поскольку в соответствии с (21.11)  $(dp/dt) = F$ . В результате уравнение (22.3) превращается в **уравнение моментов**

$$\frac{dN}{dt} = M, \quad (22.4)$$

которое играет важную роль при рассмотрении движений материальных точек и тел.

### 23. Уравнение движения системы материальных точек

**Система материальных точек.** Системой материальных точек называется совокупность конечного их числа. Следовательно, эти материальные точки можно пронумеровать. Примером такой системы может служить газ, находящийся в некотором объеме, если по условиям задачи его молекулы могут считаться материальными точками. Солнце и планеты, входящие в солнечную систему, могут рассматриваться как система материальных точек во всех вопросах, когда внутреннее строение и размеры Солнца и планет не играют роли. С течением времени взаимное положение отдельных точек системы, вообще говоря, изменяется.

На каждую из точек системы действуют силы двойского происхождения: во-первых, силы, источники которых лежат вне системы, называемые **внешними силами**; во-вторых, силы со стороны других точек системы, называемые **внутренними силами**. Обычно принимается, что внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Частным случаем системы материальных точек является твердое тело. Характерная особенность этой системы заключается в постоянстве расстояний между точками, ее составляющими. Эти точки будем нумеровать индексами, например индексами  $i, j$  и т. д., которые пробегают все значения  $1, 2, 3, \dots, n$ , где  $n$  — число точек системы. Физические величины, относящиеся к  $i$ -й точке, обозначаются тем же индексом, что и точка. Например,  $r_i, p_i, v_i$  и т. д. выражают соответственно радиус-вектор, импульс и скорость  $i$ -й точки.

Не следует, конечно, путать эти индексы с единичными векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , направленными вдоль осей декартовой системы координат.

**Импульс системы.** Импульсом системы называется сумма импульсов материальных точек, ее составляющих:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n. \quad (23.1)$$

В последующем для упрощения написания формул можно не ставить у знака  $\Sigma$  значений индексов, по которым производится суммирование, поскольку это обычно бывает ясно.

**Момент импульса системы.** Моментом импульса системы относительно точки  $O$ , принятой за начало, называется сумма моментов импульса материальных точек системы относительно  $O$ :

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{N}_i = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]. \quad (23.2)$$

**Момент силы, действующей на систему.** Моментом силы, действующей на систему, относительно точки  $O$  называется сумма моментов сил, приложенных к точкам системы, относительно  $O$ :

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]. \quad (23.3)$$

!

*В релятивистском случае понятие центра масс не имеет смысла, поскольку оно не является инвариантом преобразований Лоренца. Однако понятие системы центра масс имеет весьма точный смысл и оказывается очень полезным и важным.*

В силу третьего закона Ньютона выражение в правой части (23.3) значительно упрощается, поскольку моменты всех внутренних сил взаимно уничтожаются. Чтобы это доказать, учтем, что сила  $F_i$ , действующая на  $i$ -ю точку системы, слагается из внешней силы  $F_{i\text{вн}}$  и суммы внутренних сил взаимодействия, т. е. сил, приложенных к данной точке со стороны всех других точек системы. Обозначив внутреннюю силу, действующую на точку  $i$  со стороны точки  $j$ , как  $f_{ji}$ , представим полную силу  $F_i$  в виде

$$F_i = F_{i\text{вн}} + \sum_{j \neq i} f_{ji}. \quad (23.4)$$

$$N = [r, p].$$

$$M = [r, F].$$

$$\frac{dN}{dt} = M.$$

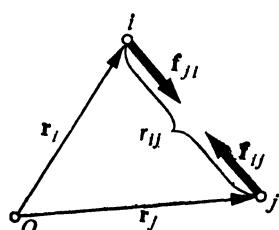
Знак  $j \neq i$  у суммы показывает, что надо суммировать по всем значениям  $j$ , за исключением значения  $j = i$ , поскольку действие точки самой на себя отсутствует. Можно, конечно, было бы и не писать этого значка, заметив, что  $f_{ii} = 0$ .

Подставив (23.4) в (23.3), запишем момент сил в виде двух слагаемых:

$$M = \sum_i [r_i, F_{i\text{вн}}] + \sum_{i,j} [r_i, f_{ji}]. \quad (23.5)$$

Вторая сумма является двойной суммой по обоим индексам, т. е. при каждом значении одного из индексов второй пробегает всевозможные значения. Следует поупражняться в расписании таких сумм.

Покажем, что вторая сумма в (23.5) равна нулю. Учтем, что по третьему закону Ньютона,  $f_{ij} + f_{ji} = 0$ , поскольку сила действия  $i$ -й точки на  $j$ -ю равна силе действия  $j$ -й точки на  $i$ -ю и противоположно направлена. Рассмотрим момент действующих на точки  $i$  и  $j$  сил взаимодействия (рис. 44). Вектор  $r_{ij}$ , соединяющий эти точки, направлен от  $i$  к  $j$ . Момент сил  $f_{ij}$  и  $f_{ji}$  относительно точки  $O$  равен



44.

Момент внутренних сил, приложенных к точкам  $i$  и  $j$ , равен нулю согласно третьему закону Ньютона

$$M' = [r_i, f_{ji}] + [r_j, f_{ij}].$$

Учтя, что  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ ,  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ji}$ , находим

$$\mathbf{M}' = [\mathbf{r}_i, \mathbf{f}_{ji}] - [\mathbf{r}_j, \mathbf{f}_{ji}] = [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{f}_{ji}] = [\mathbf{r}_{ji}, \mathbf{f}_{ji}] = 0,$$

поскольку векторы  $\mathbf{r}_{ji}$  и  $\mathbf{f}_{ji}$  параллельны и их векторное произведение равно нулю. Таким образом, моменты всех внутренних сил взаимодействия во второй сумме в правой части (23.5) взаимно сокращаются и вся сумма оказывается равной нулю. Остается только первый член, который равен сумме моментов **внешних** сил, приложенных к отдельным точкам системы. Поэтому, говоря о моменте сил, действующем на систему материальных точек, можно иметь в виду определение (23.3), понимая под силами  $\mathbf{F}_i$  только внешние силы.

**Уравнение движения системы материальных точек.** Продифференцируем (23.1) по времени и учтем, что уравнение движения  $i$ -й точки на основании (21.11) имеет вид  $(d\mathbf{p}_i/dt) = \mathbf{F}_i$ :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (23.6)$$

где

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i. \quad (23.6a)$$

Величина  $\mathbf{F}$ , равная сумме сил, действующих на точки системы, называется **силой**, приложенной к системе точек, или **внешней силой**, так как в сумме (23.6а) все внутренние силы взаимно сокращаются. Уравнение (23.6) по внешнему виду полностью совпадает с уравнением (21.11) для материальной точки, но по содержанию отлично от него, поскольку физические носители импульса  $\mathbf{p}$  распределены по всему пространству, занимаемому системой точек; точки приложения внешних сил, составляющих  $\mathbf{F}$ , распределены аналогичным образом. Лишь в нерелятивистском случае можно дать такое истолкование уравнениям (23.6), которое близко к смыслу уравнения (21.11).

**Центр масс.** В нерелятивистском случае, т. е. при движении с малыми скоростями, можно ввести понятие центра масс. Прежде всего рассмотрим выражения для импульса системы точек в нерелятивистском случае:

$$\mathbf{p} = \sum m_{0i} \mathbf{v}_i = \sum m_{0i} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_{0i} \mathbf{r}_i = m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{m} \sum m_{0i} \mathbf{r}_i \right), \quad (23.7)$$

где под  $m = \sum m_{0i}$  понимается масса системы как сумма масс покоя составляющих ее точек.

Радиус-вектор

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum m_{0i} \mathbf{r}_i$$

(23.8)

определяет воображаемую точку, которая называется центром масс системы. Величина  $(d\mathbf{R}/dt) = \mathbf{V}$  есть скорость движения этой воображаемой точки. Импульс системы (23.7) с учетом (23.8) записывается в виде

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{R}}{dt} = m\mathbf{V}, \quad (23.9)$$

т. е. представляется как произведение массы системы на скорость ее центра масс, что совершенно аналогично импульсу материальной точки. За движением центра масс можно следить так же, как за движением материальной точки.

С учетом выражений (23.8) и (23.9) уравнение движения (23.6) системы приобретает следующий вид:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (23.10)$$

т. е. оно эквивалентно уравнению движения материальной точки, вся масса которой сосредоточена в центре масс, а все внешние силы, действующие на точки системы, приложены к ее центру масс. Точка центра масс (23.8) занимает вполне определенное положение относительно материальных точек системы. Если система не является твердым телом, то взаимное положение ее точек с течением времени меняется. Вследствие этого меняется и положение центра масс относительно точек системы, но в каждый данный момент он имеет вполне определенное положение. Выражение «определенное положение» означает, что если в этот момент «взглянуть» на систему точек из другой системы координат, то положение центра масс относительно точек системы останется неизменным. Это можно доказать следующим образом. Из определения радиуса-вектора центра масс (23.8) видно, что если точку  $O$ , относительно которой отсчитывается радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , поместить в точку центра масс, то очевидно, что  $\mathbf{R} = 0$ . Поэтому если радиусы-векторы  $\mathbf{r}_i$  отдельных точек системы отсчитывать относительно центра масс, то из (23.8) находим

$$\sum m_{0i} \mathbf{r}_i = 0. \quad (23.11)$$

Напомним, что в формуле (23.8) начало радиусов-векторов  $\mathbf{r}_i$  находится в произвольной точке, относительно которой положение центра масс системы дается радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ .

Теперь представим себе, что надо найти центр масс по формуле (23.8), пользуясь другой точкой отсчета радиусов-векторов, т. е. другой системой координат. Спрашивается, получим ли мы в качестве центра масс ту же точку или другую? Найдем положение центра масс, исходя из начала отсчета в точке  $O'$ , положение которой характеризуется относительно  $O$  радиусом-вектором  $\rho$  (рис. 45). Вели-

чины, относящиеся к точке отсчета  $O'$ , будем обозначать буквами со штрихами. Чтобы определить положение центра масс относительно точки  $O'$ , формулу (23.8) перепишем в виде

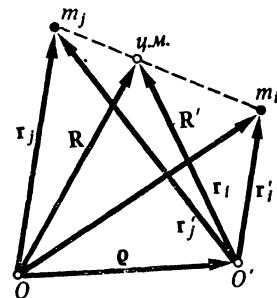
$$\mathbf{R}' = \frac{1}{m} \sum m_{0i} \mathbf{r}'_i. \quad (23.12)$$

Учтя, что  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ , и подставив это выражение в (23.12), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \frac{1}{m} \sum m_{0i} \mathbf{r}_i - \frac{1}{m} \rho \sum m_{0i} = \\ &= \mathbf{R} - \rho, \end{aligned} \quad (23.13)$$

где  $m = \sum m_{0i}$ . Формула (23.13) показывает, что радиус-вектор  $\mathbf{R}'$ , проведенный из  $O'$ , действительно заканчивается в той же точке, что и радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , имеющий начало в точке  $O$ . Тем самым доказано, что положение точки центра масс не зависит от того, в какой системе координат оно определяется.

**Неприменимость понятия центра масс в релятивистском случае.** В этом случае дело обстоит по-другому. Преобразования в выражении для импульса, которые проведены в (23.7), выполнить нельзя, потому что в этом случае вместо постоянных масс покоя  $m_{0i}$  стоят релятивистские массы, зависящие от времени, так как скорости зависят от времени. Можно было бы попытаться определить центр масс формулой (23.8), подставив в нее вместо масс покоя  $m_{0i}$  релятивистские массы, а под  $t$  понимая их сумму. При этом, конечно, получился бы радиус-вектор, оканчивающийся в некоторой точке. Ее можно попытаться назвать центром масс. Однако эта точка не имеет смысла. Если бы мы попытались для данного момента времени найти положение центра масс в другой системе координат, то получили бы точку, которая относительно точек системы занимает другое положение. Следовательно, в релятивистском случае понятие центра масс не является инвариантным понятием,



45.

Инвариантность центра масс системы материальных точек в нерелятивистском случае

?

- 1 Как определяются импульсы системы материальных точек и сила, действующая на нее?
- 2 Как доказывается независимость момента силы, действующего на систему материальных точек, от внутренних сил, удовлетворяющих третьему закону Ньютона?
- 3 Почему в релятивистском случае не имеет смысла понятие центра масс и какой смысл имеет понятие системы центра масс?
- 4 Каково должно быть состояние движения точки, относительно которой написано уравнение моментов, чтобы оно выполнялось?
- 5 Можете ли Вы доказать, что уравнение моментов справедливо относительно центра масс, хотя движение последнего может быть весьма сложным?

не зависящим от выбора системы координат, и поэтому не применяется. Не имеет смысла писать уравнения движения этой точки, следить за ее движением. Тем не менее общепринятым является выражение «система центра масс». В этой системе центра масс значительно упрощаются многие релятивистские вопросы. Системой центра масс называется система координат, в которой сумма импульсов частиц равна нулю. Такую систему координат можно всегда найти. Это будет сделано дальше при рассмотрении столкновений. Она характеризуется своей скоростью и, а не тем, где находится ее начало. Если импульсы частиц в этой системе координат обозначить  $p_i$ , то должно быть

$$\sum p_i = 0. \quad (23.14)$$

Из этого условия можно найти лишь скорость системы координат, а не ее положение. Поэтому можно сказать, что в релятивистском случае имеется система центра масс, но нет центра масс.

**Уравнение моментов.** Дифференцируя (23.2) по времени, получаем уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\frac{dN}{dt} = \sum \left[ \frac{dr_i}{dt}, \quad p_i \right] + \sum \left[ r_i, \quad \frac{dp_i}{dt} \right] = \sum [v_i, \quad p_i] + \sum [r_i, \quad F_i] = \\ = 0 + \sum M_i = M,$$

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = M,} \quad (23.15)$$

где учтено, что векторы скорости частицы параллельны векторам импульсов, и принято во внимание выражение (23.3) для момента силы, действующей на систему. Напомним, что  $M$  есть момент *внешних* сил, приложенных к системе, как это было подробно объяснено в связи с (23.3).

# Глава 6

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

- 
- 24. Значение и содержание законов сохранения
  - 25. Закон сохранения импульса
  - 26. Закон сохранения момента импульса
  - 27. Закон сохранения энергии
  - 28. Законы сохранения и симметрии пространства и времени
- 

**З**аконы сохранения справедливы для изолированных систем и в механике математически сводятся к первым интегралам уравнений движения. Законы сохранения для изолированных систем в целом обусловлены фундаментальными свойствами — пространства и времени — однородностью и изотропностью пространства и однородностью времени.

---

### 24. Значение и содержание законов сохранения

**Содержание законов сохранения.** Сформулированные в предыдущей главе законы движения позволяют в принципе ответить на все вопросы о движении материальных частиц и тел. При достаточном искусстве и терпении можно вычислить положение частиц в любой момент времени, что означает полное решение задачи. С появлением электронных вычислительных машин увеличились возможности решения этих уравнений. Многие задачи, связанные, например, с движением искусственных спутников Земли и межпланетными полетами ракет, можно было бы уже давно формулировать корректно в виде уравнений, но решить эти уравнения, чтобы получить из них нужную информацию, было невозможно до появления ЭВМ. Однако и сейчас есть задачи, которые можно сформулировать в виде уравнений, но решить их даже с помощью ЭВМ нельзя. Поэтому до настоящего времени остается важным исследование общих

свойств решения уравнений без получения конкретного вида решения.

Например, пусть нас интересует движение тела, но мы не в состоянии решить уравнение этого движения и поэтому не знаем не только, где это тело будет в тот или иной момент времени, но и будет ли оно при своем движении находиться вблизи поверхности Земли или покинет Землю, отправившись в межпланетное путешествие. Если при этих условиях нам удастся, не имея решений уравнений, установить, что тело будет двигаться вблизи Земли, и предсказать, что ни при каких условиях оно не удалится от поверхности Земли дальше, например, чем на 10 км, то это будет существенным успехом. А если еще удастся установить, что на высоте 10 км скорость тела будет равна нулю, и указать, какое направление должна иметь заданная скорость тела на Земле, чтобы оно достигло высоты 10 км, то в сущности для определенных целей нам известно все об этом движении и вообще нет необходимости решать уравнения.

**Законы сохранения** позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о развитии процессов во времени. Исследование общих свойств движения проводится в рамках решений уравнений движения и не может содержать в себе больше информации, чем имеется в уравнениях движения. Поэтому в законах сохранения имеется не больше информации, чем в уравнениях движения. Однако в них нужная информация содержится в столь скрытом виде, что непосредственно увидеть ее является нелегкой задачей. С помощью законов сохранения эта неочевидная информация представляется в легкообозримом виде, удобном для использования. Ее важная особенность заключается в общем характере: она применима к любому конкретному движению независимо от его детальных особенностей.

Общий характер законов сохранения позволяет их применять не только тогда, когда известно уравнение движения, но неизвестно их решение, но и тогда, когда неизвестно уравнение движения, т. е. в рассматриваемом случае механических движений, когда неизвестны силы. Для применения законов сохранения часто достаточно лишь знать определенные свойства симметрии действия сил и нет необходимости детально знать законы действия этих сил. Благодаря этому часто удается выяснить весьма важные особенности движения без знания закона действия сил.

**Уравнения движения и законы сохранения.** Уравнения движения являются уравнениями изменения физических величин во времени и пространстве. Перед нашим мысленным взором проходит бесконечная последовательность физических ситуаций. В сущности, нас не интересует какая-то одна ситуация в конкретный момент времени, которая не содержит в себе движения, а интересует именно последовательность ситуаций, через посредство которой осуществляется движение. При рассмотрении последовательности ситуаций нас интересует не только то, чем они различаются, но и то, что в них общее и что

в них сохраняется. Законы сохранения и отвечают на вопрос о том, что в последовательности физических ситуаций, описываемой уравнениями движения, остается неизменным, постоянным. Ясно, что физическая теория должна сформулировать это постоянство в виде постоянства численных значений соответствующих физических величин, или, как говорят, в виде законов сохранения.

**Математическая сущность механических законов сохранения.** Рассмотрим пример одномерного уравнения Ньютона, которое запишем в виде двух уравнений:

$$\text{а) } m_0 \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad \text{б) } \frac{dx}{dt} = v_x. \quad (24.1)$$

Задача считается полностью решенной, если известно положение движущейся материальной точки в любой момент времени. Поэтому для решения надо сначала проинтегрировать уравнение (24.1а) и получить  $v_x$ , а затем, рассматривая  $v_x$  как известную величину, интегрированием уравнения (24.1б) получить  $x(t)$ .

Для очень широкого класса сил первое интегрирование удается произвести в общем виде и представить результат как постоянство численного значения определенной комбинации физических величин. Это и есть закон сохранения. Таким образом,

**в механике законы сохранения в математическом смысле сводятся к первым интегралам уравнений движения.**

Однако значение сохраняющихся величин выходит за рамки механики; они играют важнейшую роль и за пределами механики. Сохраняющиеся физические величины являются фундаментальными, а их законы сохранения — фундаментальными законами физики, а не просто результатом математического упражнения с уравнениями механического движения.

## 25. Закон сохранения импульса

**Изолированная система.** Система материальных точек или материальная точка называется изолированной, если отсутствуют внешние силы. Во Вселенной не может быть изолированных в абсолютном смысле систем, поскольку все тела взаимно связаны, например, силами тяготения. Однако при определенных условиях можно тела считать в достаточной степени изолированными. Например, материальное тело в некоторой области космического пространства, достаточно далеко удаленной от массивных небесных тел, ведет себя как изолированная система. В других случаях движение системы в определенных направлениях можно рассматривать как движение изолированной системы, хотя в целом система заведомо не является изолированной.

**Закон сохранения импульса для изолированной системы.** В изолированной системе внешние силы отсутствуют. Поэтому в уравне-

нии движения (21.11) сила  $F = 0$ , и оно принимает вид

$$\frac{dp}{dt} = 0. \quad (25.1)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$p = \text{const}, \quad (25.2)$$

$$p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}, \quad p_z = \text{const}. \quad (25.2a)$$

Это равенство выражает закон сохранения импульса: импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри системы. Для материальной точки закон сохранения импульса означает, что в отсутствие внешних сил она движется с постоянной скоростью по прямой линии. Для системы материальных точек в нерелятивистском случае закон утверждает, что центр масс системы движется равномерно и прямолинейно.

Закон сохранения импульса (25.2) справедлив как в релятивистском, так и нерелятивистском случае. Однако в релятивистском случае его нельзя интерпретировать как равномерное и прямолинейное движение центра масс, потому что в этом случае не существует центра масс, как это было разобрано в § 23. Однако существует система центра масс, в которой закон сохранения импульса сводится к равенству  $p = 0$  и означает, что эта система при любых процессах внутри нее остается системой центра масс.

**Законы сохранения для отдельных компонент импульса.** Может случиться, что система материальных точек или отдельная материальная точка не изолирована, но внешние силы действуют лишь в определенных направлениях, а в других — отсутствуют. Тогда соответствующим выбором системы координат можно добиться того, что одна или две компоненты внешних сил обращаются в нуль. Пусть, например, нет сил в направлениях, параллельных плоскости  $(x, y)$ , т. е.

$F_x = 0, F_y = 0, F_z \neq 0$ . Тогда уравнение движения (21.11), написанное в компонентах величин по осям координат, имеет следующий вид:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (25.3)$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем:

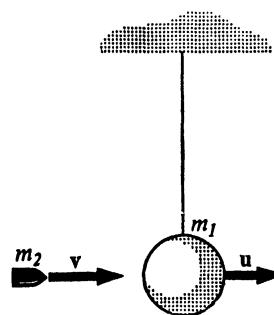
$$p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}. \quad (25.4)$$

Это означает, что импульс системы в направлениях, параллельных плоскости  $(x, y)$ , сохраняет свое значение и относительно них система ведет себя как изолированная. Например, вблизи поверхности

Земли силы тяготения вертикальны, горизонтальные составляющие отсутствуют. Поэтому систему материальных тел относительно горизонтальных движений можно рассматривать как изолированную, если речь идет о силах тяготения.

**Применение закона сохранения импульса.** Примеры применения закона сохранения для решения конкретных задач будут даны в последующих главах. Здесь же рассмотрим пример с так называемым баллистическим маятником, представляющим собой небольшой свинцовый шар массы  $m_1$ , подвешенный на длинной нити (рис. 46). Размеры шара таковы, что пуля массы  $m_2$ , движущаяся со скоростью  $v$  и попадающая в шар в направлении его центра, застrevает в нем, а шар отклоняется. Какова будет скорость  $u$  шара с застрявшей в нем пулей? Если попытаться проанализировать картину проникновения пули в свинцовый шар, выяснить зависимость от времени возникающих при этом сил и затем решить уравнения движения, то будет затрачено много усилий и все же не будет уверенности в результате, потому что для его получения придется принять многие допущения, строгое доказательство которых оказывается затруднительным.

Если же воспользоваться законом сохранения импульса, то задача решается достаточно просто и совсем не надо знать деталей проникновения пули в шар. В горизонтальном направлении силы отсутствуют и система шар—пуля является изолированной. Закон сохранения импульса записывается в виде равенства суммарного импульса шара и пули до столкновения и импульса шара с застрявшей в нем пулей после столкновения, т. е.  $m_2v = (m_1 + m_2)u$ . Обычно с помощью баллистического маятника измеряется скорость пули  $v$ , потому что скорость шара с застрявшей в нем пулей, массы шара и пули можно легко измерить.



46.

Определение скорости пули при помощи баллистического маятника

?

- 1 В каком случае закон сохранения импульса можно применить к неизолированной системе?
- 2 На систему бильярдных шаров, движущихся по горизонтальному столу, действует сила трения и поэтому эта система в отношении горизонтальных движений не является изолированной. Можно ли применять закон сохранения импульса к столкновению шаров? Почему?
- 3 Можно ли систему взаимодействующих электрических зарядов, вообще говоря, рассматривать как изолированную? Какие факторы следует при этом учесть?

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}.$$

## 26. Закон сохранения момента импульса

**Формулировка закона.** Этот закон, так же как и закон сохранения импульса, справедлив лишь для изолированных систем. Для них момент внешних сил  $M$  равен нулю и уравнение моментов (22.4) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = 0. \quad (26.1)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$N = \text{const}, \quad (26.2)$$

$$N_x = \text{const}, \quad N_y = \text{const}, \quad N_z = \text{const}. \quad (26.2a)$$

Это равенство выражает закон сохранения момента импульса: момент импульса изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри системы.

**Закон сохранения для отдельных компонент.** Может случиться, что система не является полностью изолированной, но в некотором направлении, например вдоль оси  $z$ , компонента момента сил равна нулю. Тогда уравнение моментов (23.5) запишется в компонентах следующим образом:

$$\frac{dN_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dN_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dN_z}{dt} = 0. \quad (26.3)$$

Следовательно, систему можно считать изолированной лишь в отношении  $z$ -й компоненты момента импульса:

$$N_z = \text{const}. \quad (26.4)$$

Поэтому закон сохранения момента импульса, так же как и импульса, можно применять не только к полностью изолированным системам, но и к частично изолированным.

**О применении.** Примеры применения закона для решения конкретных задач приведены в последующих главах. Здесь же проиллюстрируем его эффективность лишь на одном примере.

Через закрепленную жестко трубу продета нить, на конце которой подвешено тело массы  $m$ , могущее вращаться по окружности вокруг оси вращения, совпадающей с осью трубы (рис. 47). Пусть в начальный момент тело движется по окружности радиуса  $r_1$  со скоростью  $v_1$ . Затем к нити прилагается сила  $F$ , в результате чего тело массы  $m$  начинает двигаться по спирали с уменьшающимся радиусом и переменной скоростью. В конце процесса тело движется по окружности заданного радиуса  $r_2$ . Требуется определить скорость  $v_2$  тела.

Если решать эту задачу с помощью уравнений движения, то она оказывается довольно сложной. При движении по спирали сила, действующая вдоль радиуса, направлена под углом к скорости, вследствие чего скорость будет увеличиваться. Имея соответствующие данные, можно рассчитать изменение скорости и найти скорость  $v_2$ . Однако значительно проще решить задачу с помощью закона сохранения момента импульса. Сила, действующая на массу  $m$ , всегда направлена вдоль радиуса, поэтому ее момент (22.2) равен нулю. Следовательно, момент импульса сохраняется. В данном случае в исходной ситуации момент импульса  $N$  направлен параллельно оси вращения и равен  $r_1mv_1$ . В конечной ситуации он должен иметь такое же значение, т. е.  $r_1mv_1 = r_2mv_2$ . Отсюда находим скорость тела:  $v_2 = r_1v_1/r_2$ .

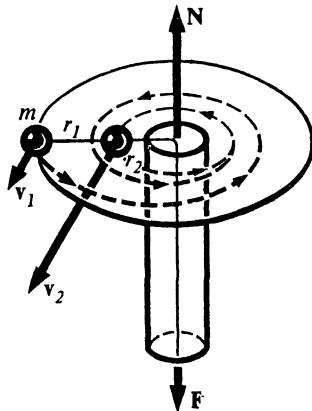
## 27. Закон сохранения энергии

**Работа сил.** Если под действием силы изменяется абсолютное значение скорости, то говорят, что сила совершает работу. Если скорость увеличивается, то принимается, что работа силы положительна, а если уменьшается, то отрицательна.

Найдем связь между работой и изменением скорости. Сначала рассмотрим одномерный случай, когда сила действует, например, вдоль оси  $x$  и движение происходит вдоль этой оси. Например, пусть материальная точка массы  $m_0$  перемещается под действием силы сжатой или растянутой пружины, закрепленной в начале системы координат — точке  $O$  (рис. 48). Уравнение движения точки имеет вид

$$m_0 \frac{dv_x}{dt} = F_x. \quad (27.1)$$

Умножив обе части этого уравнения на  $v_x$  и учитя, что  $v (dv/dt) = 1/2 [d(v_x^2)/dt]$ ,

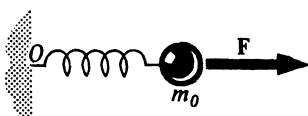


47.

Уменьшением расстояния вращающейся материальной точки от оси вращения под действием силы, направленной к оси вращения, обусловлено возрастание угловой и линейной скоростей точки в силу закона сохранения момента импульса

?

- 1 В каком случае закон сохранения момента импульса можно применять к неизолированной системе?
- 2 Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?



48.

К вычислению работы силы в случае одномерного движения

получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_x^2}{2} \right) = F_x v_x. \quad (27.2)$$

В правой части этого равенства заменим  $v_x = dx/dt$  и обе части его умножим на  $dt$ . Тогда

$$d \left( \frac{m_0 v_x^2}{2} \right) = F_x dx. \quad (27.3)$$

В этом виде равенство имеет очень наглядный смысл: при смещении точки на  $dx$  сила совершаает над ней работу  $F_x dx$ , в результате чего изменяется величина  $m_0 v_x^2/2$ , характеризующая движение тела и, в частности, абсолютное значение его скорости. Величина  $m_0 v_x^2/2$  называется кинетической энергией тела. Если тело смещается из положения  $x_1$  до  $x_2$ , а его скорость при этом изменяется от  $v_{x1}$  до  $v_{x2}$ , то, интегрируя (27.3), имеем

$$\int_{v_x=v_{x1}}^{v_x=v_{x2}} d \left( \frac{m_0 v_x^2}{2} \right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (27.4)$$

Учитывая, что

$$\int_{v_x=v_{x1}}^{v_x=v_{x2}} d \left( \frac{m_0 v_x^2}{2} \right) = \frac{m_0 v_{x2}^2}{2} - \frac{m_0 v_{x1}^2}{2},$$

окончательно находим

$$\frac{m_0 v_{x2}^2}{2} - \frac{m_0 v_{x1}^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx,$$

(27.5)

т. е. изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении между двумя положениями равно совершенной при этом силой работе.

Интеграл в правой части (27.5) является пределом суммы элементарных работ, которые совершаются при элементарных перемещениях. Весь промежуток между точками  $x_1$  и  $x_2$  разбивается на маленькие отрезки  $\Delta x_i$  ( $x_2 - x_1 = \sum \Delta x_i$ ), на каждом из них сила имеет некоторое значение  $F_{xi}$  (неважно, в какой точке интервала  $\Delta x_i$  берется значение силы  $F_{xi}$ ). Элементарная работа на участке  $\Delta x_i$  равна

$\Delta A_i = F_{xi} \Delta x_i$ , а полная работа на всем перемещении от  $x_1$  до  $x_2$  будет

$$\sum_i F_{xi} \Delta x_i. \quad (27.6)$$

Устремляя длины интервалов  $\Delta x_i$  к нулю, а их число — к бесконечности, получим работу силы при перемещении от точки  $x_1$  к точке  $x_2$ :

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i F_{xi} \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (27.7)$$

Из (27.5) видно, что кинетическая энергия материальной точки изменяется, если силы не равны нулю. Таким образом, при наличии силы кинетическая энергия не сохраняется. Она остается постоянной лишь в отсутствие сил, потому что при  $F_x = 0$  из (27.5) следует

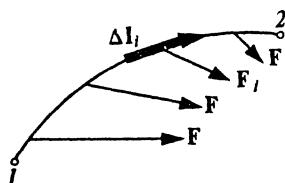
$$\frac{m_0 v_{x2}^2}{2} = \frac{m_0 v_{x1}^2}{2} = \text{const.} \quad (27.8)$$

Но этот закон сохранения кинетической энергии материальной точки в отсутствие сил тривиален, поскольку закон сохранения импульса в отсутствие сил уже устанавливает постоянство скорости, а следовательно, и ее квадрата.

Если перемещение материальной точки не совпадает с направлением силы, то работу производит компонента силы вдоль перемещения. Работа равна абсолютному значению силы, умноженному на косинус угла между силой и перемещением. Поскольку элементарное перемещение точки является вектором  $d\mathbf{l}$ , а сила  $\mathbf{F}$  — тоже вектор, элементарная работа может быть представлена в виде их скалярного произведения:

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} \cos (\widehat{\mathbf{F}, d\mathbf{l}}) = (\mathbf{F}, d\mathbf{l}). \quad (27.9)$$

Пусть точка движется не вдоль прямой, как в (27.1), а по произвольной траектории (рис. 49). В этом случае работа силы при перемещении из точки 1 в точку 2 также выражается как предел суммы элементарных работ (27.9) на всем пути. Разобьем траекторию движения на малые отрезки  $\Delta \mathbf{l}_i$ , один из которых изображен на рис. 49. Элементарная работа на этом отрезке равна  $\Delta A_i = (\mathbf{F}_i, \Delta \mathbf{l}_i) = \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{l}_i \cos (\widehat{\mathbf{F}_i, \Delta \mathbf{l}_i})$ . Сумма же всех элементарных работ приближенно равна работе при перемещении из точки 1 в точку 2. Устремляя длины отрезков  $\Delta \mathbf{l}_i$  к нулю, а их число — к бесконечности, получим работу



49.

К вычислению работы силы при движении по произвольной траектории

!

*В случае одномерного движения, когда известна сила, зависящая только от координат, уравнения движения всегда решаются посредством двух интегралов.*

$$p = \text{const.}$$

$$N = \text{const.}$$

силы при перемещении вдоль произвольной траектории:

$$A = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_i (F_i, d l_i) = \int_L^{(2)} (F, d l). \quad (27.10)$$

Интеграл в правой части (27.10) называется криволинейным, взятым вдоль линии  $L$  между точками  $I$  и  $2$ . В обозначении пределов интегрирования буква  $L$  указывает на конкретную линию, которой соединяются точки  $I$  и  $2$ . Часто этот значок опускают, потому что известно, какая линия имеется в виду. Последовательность точек (1) внизу интеграла и (2) вверху говорит о направлении, в котором мы передвигаемся по этой кривой, в данном случае от точки  $I$  к точке  $2$ . Конечно, по той же кривой можно двигаться из точки  $2$  в точку  $I$ . В этом случае пределы у интеграла в (27.10) надо было бы поменять местами. Если изменить направление движения вдоль кривой на обратное, то изменится только знак интеграла. Это видно из того, что направление всех элементарных перемещений  $d l_i$  изменяется на противоположное, а сила в каждой точке остается неизменной и, следовательно, знаки всех элементарных работ  $(F, d l)$  изменятся на обратные.

При рассмотрении общего случая надо вместо уравнения (27.1) взять общее уравнение движения

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (27.11)$$

а дальше провести вычисления, аналогичные тем, которые были разобраны в связи с уравнением (27.5). Умножая обе части уравнения (27.11) скалярно на скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  и учитывая, что

$$\left( \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right), \quad (27.12)$$

получаем, как и в (27.3),

$$d \left( \frac{m_0 v^2}{2} \right) = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \quad (27.13)$$

Вектор  $d\mathbf{r}$  означает то же, что и вектор перемещения  $d\mathbf{l}$ . В уравнении (27.10) было написано  $d\mathbf{l}$ , чтобы подчеркнуть, что интеграл определяется исключительно линией, вдоль которой проводится интегрирование, и силами в точках на линии и не зависит от того, где помещена точка, относительно которой отсчитывается радиус-вектор.

Интегрируя обе части (27.13) по траектории движения материальной точки между ее положениями 1 и 2, находим

$$\boxed{\frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l})}. \quad (27.14)$$

Относительно равенства (27.14) можно сделать те же замечания, которые были сделаны в связи с (27.8), добавив, что в отсутствие сил траектория движущейся точки является прямой линией.

Можно сказать, что (27.14) выражает закон сохранения энергии, если иметь в виду не только механические формы энергии, но и всевозможные другие, т. е. выйти за рамки механики. Дело в том, что в правой части этого равенства стоит величина, имеющая размерность энергии. Однако может оказаться, что выяснить физический смысл этой величины, оставаясь в рамках механики, невозможно, потому что она совсем другой, немеханической природы. Например, если сила является силой трения, то интеграл в правой части (27.14) выражает в определенных единицах степень нагревания

!

*Криволинейный интеграл, по определению, не отличается от интеграла одной переменной, надо лишь разбить на участки путь интегрирования, вычислить для каждого участка величину подынтегрального выражения, а затем сумму этих величин для всех участков кривой и найти предел этой суммы при стремлении величины каждого участка к нулю, а их числа к бесконечности.*

$$\boxed{\frac{m_0 v_{x2}^2}{2} - \frac{m_0 v_{x1}^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx.}$$

среды, о которую трется тело. Потребовалось немало труда, чтобы выяснить, что представляет собой форма энергии, называемая теплотой. Понимание смысла величины, стоящей в правой части (27.14), привело к созданию нового раздела физики, называемого термодинамикой.

Однако во многих случаях свойства сил таковы, что правая часть (27.14) имеет ясный смысл в пределах механики. Именно эти случаи представляют интерес для механики и будут здесь разобраны.

**Потенциальные силы.** Силы по их свойствам можно разбить на два класса. Для сил одного класса работа при перемещении между двумя точками не зависит от пути, по которому это перемещение произошло, для сил другого класса — зависит.

Приведем в качестве примера силу сухого трения, направленную против скорости, но в известных пределах не зависящую от нее. Ясно, что работа силы пропорциональна длине траектории и поэтому зависит от траектории, по которой произошло перемещение из одной точки в другую.

Хорошо известен и другой пример: работа, совершаемая при перемещении некоторого груза в поле тяготения Земли из одной точки в другую, зависит только от разности высот точек, но не зависит от конкретного вида траектории, ее длины и т. д.

Силы, работа которых зависит лишь от начальной и конечной точек траектории, но не зависит от ее вида, называются потенциальными. К этим силам относятся силы тяготения.

Вместо выражения «потенциальные силы» чаще говорят «потенциальные поля». Полем сил называется область пространства, в точках которого действуют рассматриваемые силы. В выражении «поле сил» слово «сила» часто опускается.

**Математический критерий потенциальности поля.** Потенциальным называется поле, работа в котором, т. е. интеграл

$$\int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}), \quad (27.15)$$

зависит только от положений точек 1 и 2, но не зависит от вида пути, соединяющего эти точки. Можно дать другое математическое выражение этому определению. Соединим точки 1 и 2 двумя различными кривыми  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 50). Согласно определению потенциального поля можно написать:

$$\int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_{L_1}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}). \quad (27.16)$$

Пути интегрирования в 27.16) между точками 1 и 2 различны. Если по пути  $L_2$  идти не от точки 1 к точке 2, а в обрат-

ном направлении, то знак интеграла изменится на противоположный:

$$\int_{L_1}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = - \int_{L_2}^{(1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}). \quad (27.17)$$

Заметим, что направление движения по пути интегрирования не имеет никакого отношения к направлению движения материальных точек. Вычисление интеграла является чисто математической операцией. Например, в правой части формулы (27.14) направление движения при интегрировании совпадает с действительным движением точки. Однако нам ничто не мешает поставить перед интегралом знак минус и вычислить его, двигаясь вдоль пути в противоположном направлении.

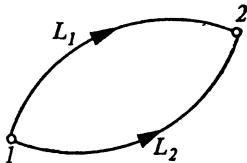
С учетом (27.17) равенство (27.16) принимает следующий вид:

$$\int_{L_1}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) + \int_{L_2}^{(1)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0. \quad (27.18)$$

В левой части стоит сумма двух интегралов: в первом перемещение происходит от точки 1 до точки 2 по пути  $L_1$ , во втором — возвращение в исходную точку по пути  $L_2$ . В итоге получен интеграл по замкнутому контуру и равенство (27.18) гласит:

$$\oint (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0. \quad (27.19)$$

Кружок у знака интеграла означает, что берется интеграл по замкнутому контуру. По какому конкретно контуру, не обозначено, потому что известно без этого. При необходимости различить контуры под знаком интеграла могут быть поставлены соответствующие значки. В исходном определении потенциального поля говорилось



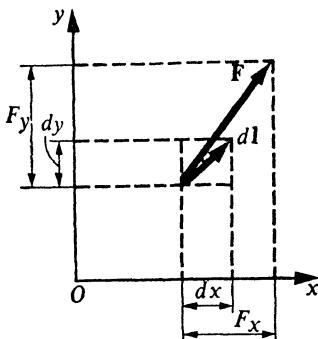
50.

К доказательству потенциальности поля

$$d \left( \frac{m_0 v^2}{2} \right) = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}).$$

!

*Потенциальность поля определяется из условия равенства нулю интеграла по любому замкнутому контуру. Эта формулировка наглядна, но не очень эффективна. Она напоминает следующую ситуацию: чтобы установить, проживает ли человек в данном городе, надо проверить, что он не проживает ни в каком другом городе. Более эффективным является дифференциальное определение потенциальности поля, которое будет изучено в курсе электричества.*



51.

**Вычисление работы силы в потенциальном поле**

Компоненты величин указаны лишь для осей  $x$  и  $y$

!

*В случае одного изменения любой сила, зависящая только от координат, является потенциальной.*

о произвольных путях, соединяющих произвольные точки. Поэтому в качестве замкнутого контура в (27.19) может быть выбран любой.

Утверждение, содержащееся в равенстве (27.19), может быть выражено словами в форме о **пределении**:

1) потенциальным называется поле, в котором работа сил поля по любому замкнутому контуру равна нулю; и в форме **критерия**:

2) чтобы поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы работа сил поля по любому замкнутому контуру была равна нулю.

**Работа в потенциальном поле.** Теперь воспользуемся одной математической теоремой, которую приведем без доказательства: если  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  являются компонентами потенциальной силы, то существует такая функция  $U(x, y, z)$ , с помощью которой эти компоненты выражаются следующими формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, & F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}} \quad (27.20)$$

$$\boxed{\frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l})}.$$

$$\boxed{\phi(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0.}$$

Производные  $\partial U / \partial x$  и другие называются частными. Их вычисляют точно так же, как обычные производные в случае функций одного аргумента, считая, что при этом все остальные аргументы функций являются постоянными величинами и не имеют никакого отношения к дифференцированию по рассматриваемому аргументу. Например, при вычислении  $\partial U / \partial x$  мы дифференцируем функцию  $U$  по  $x$ , считая, что  $y$  и  $z$  постоянны.

Теперь с помощью функции  $U$  можно вычислить работу силы в правой части равенства (27.14). Прежде всего запишем элементарную работу с учетом, что компонентами перемещения  $d\mathbf{l}$  по осям

координат являются  $dx, dy, dz$  (рис. 51), в виде

$$(F, dl) = F_x dl_x + F_y dl_y + F_z dl_z = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (27.21)$$

Выражая компоненты силы по формулам (27.20), имеем

$$(F, dl) = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (27.22)$$

Из теории функций одной переменной известно, что величина  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$  называется дифференциалом функции и выражает приращение функции при изменении аргумента  $x$  на  $dx$ . Поэтому аналогично величину  $(\partial U/\partial x) dx$  считаем приращением  $U$  при изменении аргумента  $x$  на  $dx$ , если другие аргументы постоянны. При смещении на величину  $dl$  полное приращение  $U$  складывается из приращений  $(\partial U/\partial x) dx, (\partial U/\partial y) dy, (\partial U/\partial z) dz$ , обусловленных соответствующими смещениями по осям  $x, y, z$ :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (27.23)$$

и называется **полным дифференциалом**. Поэтому выражение (27.22) для элементарной работы имеет вид

$$(F, dl) = -dU. \quad (27.24)$$

Интегрируя, получаем работу при перемещении из точки 1 в точку 2:

$$\int_{(1)}^{(2)} (F, dl) = - \int_{(1)}^{(2)} dU = -(U_2 - U_1), \quad (27.25)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — значения функции  $U$  в точках 1 и 2. Формула (27.25) непосредственно показывает, что работа в рассматриваемом случае зависит только от начальной и конечной точек траектории и не зависит от ее вида.

С учетом (27.25) вместо (27.14) имеем

$$\frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = -(U_2 - U_1). \quad (27.26)$$

Таким образом, между точками 1 и 2 кинетическая энергия изменилась на такое же значение, на какое с обратным знаком изменилась величина  $U$  при перемещении между теми же точками. Равенство (27.26) удобно переписать в виде

$$\frac{m_0 v_2^2}{2} + U_2 = \frac{m_0 v_1^2}{2} + U_1. \quad (27.27)$$

Отсюда следует, что сумма кинетической энергии и величины  $U$  при движении остается постоянной [в качестве точек 1 и 2 в (27.27) можно взять любые две точки на траектории]. Поэтому можно написать

$$\frac{m_0 v^2}{2} + U = \text{const.} \quad (27.28)$$

Величина  $U$  называется потенциальной энергией материальной точки, а равенство (27.28) — законом сохранения энергии. Следует подчеркнуть, что это равенство выражает не только закон сохранения энергии, но и закон ее превращения, поскольку описывает взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий.

**Нормировка потенциальной энергии.** Пока потенциальная энергия определена как функция, частные производные от которой по координатам, взятые со знаком минус, должны быть равны соответствующим компонентам силы, как это записано в (27.20). Если вместо потенциальной энергии  $U$  взять другую  $U' = U + A$ , т. е. измененную во всем пространстве на постоянную величину  $A$ , то от этого силы не изменятся. Например,

$$F'_x = -\frac{\partial U'}{\partial x} = -\frac{\partial (U+A)}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad (27.29)$$

где учтено, что производная от постоянной величины равна нулю, т. е.  $(\partial A / \partial x) = 0$ . Таким образом, потенциальная энергия определена лишь с точностью до аддитивной постоянной.

Если взять некоторую точку пространства, то можно сказать, что потенциальная энергия в ней равна любому наперед заданному значению. Отсюда ясно, что физический смысл имеет не само значение потенциальной энергии, а лишь разность потенциальных энергий между двумя точками.

Пользуясь имеющимся произволом в выборе потенциальной энергии, можно положить ее равной любому наперед заданному значению в некоторой точке пространства. Тогда во всех остальных точках ее значение будет фиксировано однозначно. Эта процедура придания потенциальной энергии однозначности называется нормировкой.

Рассмотрим, например, силу тяготения вблизи поверхности Земли. Направим ось  $z$  вертикально и поместим ее начало на поверхности Земли. Тогда компоненты силы, действующей на материальное тело массы  $m$ , равны:  $F_z = -mg$ ,  $F_x = F_y = 0$ . Следовательно, в соответствии с (27.20) потенциальная энергия дается выражением  $U(z) = mgz + A$ , где  $A$  — постоянная. Если условимся считать, что на поверхности Земли ( $z = 0$ )  $U = 0$ , то постоянная  $A = 0$  и тогда  $U(z) = mgz$ . Говорят, что это есть выражение для потенциальной энергии при нормировке ее значения на нуль на поверхности Земли. Можно условиться, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна  $A_0$ . Тогда  $A = A_0$ ,  $U(z) = mgz + A_0$ .

В этом случае говорят, что потенциальная энергия нормирована на значение  $A_0$  на поверхности Земли.

**Энергия взаимодействия.** Наличие потенциальной энергии у тела обусловлено взаимодействием этого тела с другими телами, в данном случае с Землей. Если нет взаимодействия, то нет потенциальной энергии. Будем удалять тело от поверхности Земли. Силу тяготения можно считать постоянной лишь приближенно в пределах небольших изменений расстояния тела от поверхности Земли. При удалении на большие расстояния необходимо принять во внимание уменьшение силы тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Расположим начало координат (точка  $O$ ) в центре Земли. Сила тяготения направлена вдоль радиуса  $r$ . Составляющие силы, перпендикулярные радиусу, равны нулю, а абсолютное значение силы зависит только от расстояния до центра Земли. Нетрудно убедиться, что такая сила является потенциальной. Для этого вычислим элементарную работу при перемещении на  $dl$  (рис. 52). Сила, действующая на массу  $m$ , равна

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (27.30)$$

где  $M$  — масса Земли,  $G$  — гравитационная постоянная,  $\mathbf{r}/r$  — единичный вектор по радиусу от центра Земли. Знак минус означает, что сила направлена к центру Земли. Элементарная работа при перемещении на  $dl$  равна (рис. 52)

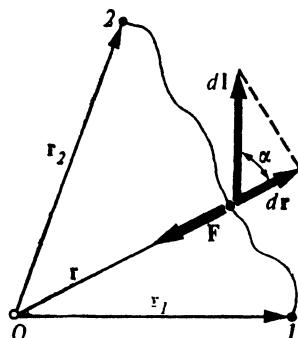
$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, dl) &= -G \frac{Mm}{r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r}, dl \right) = \\ &= -G \frac{Mm}{r^2} dl \cos \alpha = -G \frac{Mm}{r^2} dr, \quad (27.31) \end{aligned}$$

где учтено, что вектор  $\mathbf{r}/r$  является единичным, а  $dl \cos \alpha$  — проекция перемещения на направление радиуса, равная перемещению  $dr$  вдоль радиуса. Таким обра-

?

- 1 В чем состоит смысл криволинейного интеграла, выражающего работу при перемещении между двумя точками! От чего зависит этот интеграл в общем случае!
- 2 Что такое потенциальные силы!
- 3 Какие критерии потенциальности сил Вы знаете!
- 4 Какая существует связь между силами и потенциальной энергией!

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$



52.

К доказательству потенциальности силы тяжести

зом, элементарная работа определяется только перемещением вдоль радиуса и не зависит от перемещения, перпендикулярного радиусу. Это означает отсутствие сил тяготения в плоскости, перпендикулярной радиусу. Элементарная работа в (27.31) зависит только от одной переменной  $r$  и ее дифференциала  $dr$ . Поэтому вычисление работы при перемещении тела из произвольной точки, находящейся на расстоянии  $r_1$ , в точку на расстоянии  $r_2$  сводится к интегрированию функции одной переменной:

$$\int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (27.32)$$

Уже сейчас видно, что сила тяготения потенциальна, потому что работа между точками 1 и 2 зависит только от расстояний  $r_1$  и  $r_2$  от центра Земли и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Ясно, что и работа по замкнутому пути равна нулю, потому что если вернуться из точки 2 в точку 1 по другому пути, то работа будет равна тому же значению (27.32), но с обратным знаком, так что полная работа по замкнутому пути 1-2-1 равна нулю, как это и должно быть для потенциальных сил. Тем самым доказано, что сила тяготения является потенциальной.

Сравнив (27.32) с общей формулой (27.25), находим потенциальную энергию  $U$  материальной частицы массы  $m$ :

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} + A. \quad (27.33)$$

Возникает вопрос о нормировке энергии. Желательно выбрать условие нормировки так, чтобы оно учитывало физические особенности взаимодействия, и тогда, возможно, численное значение потенциальной энергии приобретет более ясный смысл, а не будет чисто формальным числом, как это было до сих пор. Такое физическое соображение есть. Дело в том, что если материальное тело удалить от поверхности Земли на бесконечно большое расстояние, то никакого взаимодействия между телом и Землей не будет. Это означает, что существование на бесконечности материального тела не окажет никакого влияния на явления, происходящие в пределах любого конечного расстояния от Земли. То же самое можно сказать и о явлениях в пределах любого конечного расстояния от тела  $m$ . Поэтому логичным является заключение, что в этом случае и потенциальная энергия  $U$ , связанная с взаимодействием между телом и Землей при удалении тела от Земли, должна быть равна нулю. Это приводит к следующему условию нормировки:

$$U(\infty) = 0, \quad (27.34)$$

которое уже не является чисто произвольным требованием, а учитывает сущность физических процессов, происходящих при взаимодействии.

ствии. Из условия нормировки (27.34) следует, что в (27.33) постоянная  $A = 0$  и потенциальная энергия массы  $m$  в поле тяготения Земли равна

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}. \quad (27.35)$$

Заметим, что при условии нормировки (27.34) формула для потенциальной энергии частицы, находящейся в некоторой точке  $B$ , может быть записана в виде

$$U(B) = \int_{(B)}^{\infty} F(r) dr, \quad (27.35a)$$

где работа вычисляется по любому пути, начинающемуся в точке  $B$  и заканчивающемуся на бесконечности, когда сила  $F$  обращается в нуль и взаимодействие выключается.

**Применения.** Многие применения закона сохранения энергии будут рассматриваться в последующих главах. Здесь достаточно сослаться на эффективность использования закона сохранения энергии в хорошо известных примерах скатывания санок с горок сложной формы. Если задана подобная горка, с верхней точки которой скатываются сани, и требуется определить скорость саней в любой точке горки (с учетом или без учета трения), то решение этой задачи на основе уравнений движения является довольно утомительным, а с помощью закона сохранения энергии значительно упрощается.

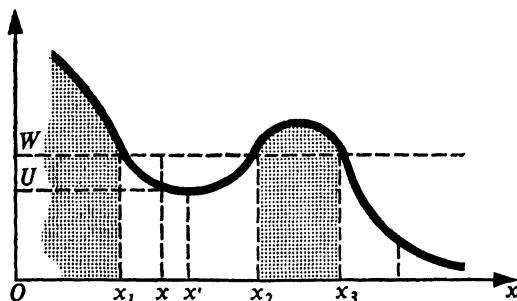
Закон сохранения энергии позволяет провести сравнительно простой анализ общих особенностей движения без детального знания уравнений движения, если нам известен закон изменения потенциала, т. е. потенциальной энергии. Рассмотрим этот метод в одномерном случае. В этом случае любая сила, зависящая только от координат (и не зависящая от скорости и времени), является, согласно определению, потенциальной силой. Нахождение потенциала сводится к вычислению интеграла от известной силы и всегда выполнимо. Поэтому можно считать закон изменения потенциальной энергии известным. Пусть он имеет вид, показанный на рис. 53.

Рассмотрим движение частицы, полная энергия которой равна  $W$ . Эта частица может находиться либо в области между точками  $x_1$  и  $x_2$ , либо правее точки  $x_3$ . В самом деле, по закону сохранения энергии, кинетическая энергия частицы равна разности полной энергии и потенциальной, т. е.  $W - U$ , причем она может быть только положительной. Поэтому допустимыми областями движения являются лишь те, в которых полная энергия больше потенциальной. Например, движение в области между  $x_2$  и  $x_3$  невозможно, потому что кинетическая энергия частицы должна была бы быть отрицательной.

Теперь проанализируем движение в допустимой области, например на участке  $x_1x_2$ . Пусть частица находится в точке  $x$ .

53.

Частица может двигаться лишь в области, где ее полная энергия больше или равна потенциальной. Эта область называется потенциальной ямой



$$\frac{m_0 v^2}{2} + U = \text{const.}$$

$$U(B) = \int_{(B)}^{\infty} F(r) dr.$$

Ее кинетическая энергия дается величиной  $W - U$ , а двигаться она может как влево, так и вправо. Если она движется влево, то ее потенциальная энергия возрастает, и, следовательно, кинетическая энергия убывает (потому что полная энергия остается постоянной), т. е. скорость частицы уменьшается. Это означает, что на частицу действует в точке  $x$  сила, направленная вправо. Это видно также из формулы, выражющей силу через потенциальную энергию:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (27.36)$$

?

- 1 **Можно ли, оставаясь в пределах механики, написать закон сохранения энергии для непотенциальных сил? Какие немеханические формы энергии Вы знаете?**
- 2 **Что такое нормировка потенциальной энергии и благодаря чему она возможна? Какие наиболее употребительные нормировки Вы знаете?**
- 3 **Что такое энергия взаимодействия?**
- 4 **Что является носителем потенциальной энергии?**

В точке  $x$  потенциальная энергия убывает с ростом  $x$  и, следовательно,  $\partial U / \partial x$  отрицательно, а  $F_x = -\partial U / \partial x$  положительно, т. е. сила действует вправо — в направлении положительных значений оси  $x$ . Частица будет двигаться влево до тех пор, пока ее скорость не уменьшится до нуля, т. е. пока полная ее энергия не превратится в потенциальную. Это произойдет в точке  $x_1$ . Однако в этой точке частица не сможет остаться в покое, потому что на нее действует сила, направленная вправо. Под действием этой силы частица будет двигаться вправо с возрастающей скоростью, которая достигнет максимального абсолютного значения в точке  $x'$ , когда потенциальная энергия частицы будет минимальной. На отрезке  $(x', x_2)$  на нее будет действовать сила, направленная влево,

которая вызовет уменьшение ее скорости до нуля в точке  $x_2$ . Затем частица начнет двигаться влево и т. д. На всем отрезке  $(x_1, x_2)$  существует только одна точка, где частица может покоиться. Это есть точка  $x'$ , в которой потенциальная энергия станет минимальной, что является условием устойчивого равновесия.

Частица, находящаяся левее  $x_3$ , может двигаться от точки  $x_3$  и до бесконечности (если правее  $x_3$  потенциальная энергия никогда не поднимается выше  $W$ ). Между  $x_2$  и  $x_3$  движение невозможно. Область между  $x_1$  и  $x_2$ , в которой частица оказывается запертой, называется потенциальной ямой, а область между  $x_2$  и  $x_3$ , через которую частица не может пройти, называется потенциальным барьером. В классической механике потенциальный барьер является абсолютным препятствием для движения частицы. В квантовой механике при определенных условиях частица может пройти через потенциальный барьер. Это явление называется туннельным эффектом и играет важную роль в микромире. Более подробно этот эффект рассматривается в квантовой механике.

## 28. Законы сохранения и симметрии пространства и времени

**Полная энергия и энергия покоя.** Все соображения, изложенные в предшествующем параграфе относительно работы сил, потенциальности сил и потенциальной энергии, остаются справедливыми и для движений с большими скоростями, потому что при их рассмотрении было несущественно, с какой скоростью движется тело. Различие заключается лишь в том, что вместо нерелятивистского уравнения движения (27.11) необходимо исходить из релятивистского уравнения движения (21.10):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F. \quad (28.1)$$

Так же как и в нерелятивистском случае (27.11), умножая обе части (28.1) на скорость  $v$ , получим

$$v \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = (F, v). \quad (28.2)$$

Дифференцируем левую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned} v \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) &= m_0 v \left\{ \frac{1}{2} \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} \right\} = \\ &= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{c^2} \right) + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( v, \frac{dv}{dt} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{c^2} \right) \left\{ v^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (28.2) принимает следующий вид:

$$d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = (\mathbf{F}, \, dv), \quad (28.3)$$

где учтено, что  $v = (dr/dt)$  и обе части равенства умножены на  $dt$ . Сравним (28.3) с равенством (27.13) нерелятивистской теории. Видно, что вместо кинетической энергии сейчас в результате совершения силой работы изменяется величина

$$m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Пусть частица движется в поле потенциальной силы так, что сила, действующая на нее, дается соотношениями (27.20). Тогда, отправляясь от равенства (28.3), повторив все вычисления от формулы (27.20) до (27.28), вместо нее получим

$$\boxed{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + U = \text{const.}} \quad (28.4)$$

Эта формула выражает закон сохранения энергии в релятивистском случае. Потенциальная энергия  $U$  имеет тот же смысл, что и в нерелятивистской теории, а величина

$$\boxed{E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad (28.5)$$

называется полной энергией тела. В том случае, когда тело поконится ( $v = 0$ ), оно в соответствии с формулой (28.5) обладает энергией

$$E_0 = m_0c^2, \quad (28.6)$$

которая называется энергией покоя.

Выражение «полная энергия тела» в нерелятивистском случае означает сумму его кинетической и потенциальной энергий, а в релятивистском случае оно используется для названия не только величины (28.5), но и суммы этой величины и потенциальной энергии тела. Необходимо следить за тем, чтобы не путать между собой различный смысл одного и того же выражения.

Далее следует заметить, что в формуле (28.4) не учитывается собственная энергия того тела, которое создает поле сил, действующих на рассматриваемое тело. Оно предполагается неподвижным и имеет только энергию покоя.

**Кинетическая энергия.** При малых скоростях движения ( $v/c \ll 1$ , поэтому  $(1/\sqrt{1-v^2/c^2}) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ ) и формулу (28.5) можно записать в виде

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots . \quad (28.7)$$

Таким образом, в результате того, что тело приобретает скорость, к его энергии покоя  $m_0 c^2$  прибавляется кинетическая энергия и эта сумма представляет полную энергию движущегося тела. Поэтому **кинетическая энергия**  $W$  тела, движущегося с произвольной скоростью, дается формулой

$$W = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (28.8)$$

При малых скоростях это соотношение с учетом (28.7) переходит в классическое выражение для кинетической энергии ( $m_0 v^2/2$ ).

**Соотношение между массой и энергией.** Принимая во внимание (21.11) для релятивистской массы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (28.9)$$

равенство (28.5) для полной энергии представим в виде

$$E = mc^2. \quad (28.10)$$

Из сравнения (28.10) с (28.6) видно, что в обоих случаях энергия связана с инертностью тела одной и той же формулой. Благодаря этому оказываются связанными между собой две важнейшие характеристики материи — энергия и инертность, т. е. масса. Приведенный вывод соотношения между энергией и массой показывает, что оно справедливо как соотношение между инертной массой тела и его полной энергией, т. е. суммой кинетической энергии и энергии покоя. Но выполняется ли оно для других видов энергии, например для потенциальной энергии, может решить лишь эксперимент. Установленный равенством (28.4) закон сохранения энергии заставляет думать, что имеется большая вероятность справедливости этого соотношения для потенциальной энергии, т. е. справедливости утверждения, что потенциальная энергия обладает инертными свойствами. Если окажется, что равенство (28.10) носит универсальный характер, т. е. применимо для произвольных видов энергий, то оно является одним из самых фундаментальных законов физики. Эксперимент показывает, что это действительно так. Оно называется соотношением между

массой и энергией и было установлено Эйнштейном. Иногда говорят об этом равенстве как об эквивалентности массы и энергии. Это выражение неудачно, как это будет ясно из дальнейшего, и поэтому использоваться не будет.

**Экспериментальная проверка соотношения между массой и энергией.** При выводе релятивистского уравнения движения (21.10) были рассмотрены эксперименты, из которых следует, что инертность тела зависит от скорости и зависит именно так, как предусматривается формулой для релятивистской массы, входящей в это уравнение. Такая зависимость массы от скорости, как это было показано в § 21, следует также из принципа относительности и преобразований Лоренца. Поэтому все экспериментальные данные, подтверждающие преобразования Лоренца, подтверждают также и соотношение (28.10).

Лишь один вопрос не затрагивается этими экспериментами: является ли энергия покоя  $m_0c^2$  действительно энергией или это есть просто некоторая величина, имеющая ее размерность, но не имеющая физического смысла? Однако какой смысл имеет вопрос, является ли величина  $m_0c^2$  размерностью энергии энергией? Не тавтология ли это? Нет, не тавтология, и вопрос этот имеет вполне ясный физический смысл: может ли энергия покоя  $m_0c^2$  превращаться в другие виды энергии? Если может, то это реальная энергия, как и все другие виды энергии, а если не может, то это просто некоторая вспомогательная величина, не имеющая реального физического значения. Опыт показывает, что энергия покоя может превращаться в другие виды энергии и, следовательно, это действительно энергия.

Одним из многочисленных экспериментальных доказательств этого утверждения является так называемая аннигиляция элементарных частиц. Электрон и позитрон могут рассматриваться как совершенно одинаковые частицы, отличающиеся лишь знаком заряда и магнитного момента. Массы их одинаковы и могут быть измерены, например, по их движению в магнитном поле, и полная энергия, включающая в себя кинетическую энергию и энергию покоя, может быть определена. Поскольку магнитное поле не производит работы, то потенциальная энергия может быть исключена из рассмотрения. При столкновении позитрона и электрона между собой происходит их аннигиляция, в результате которой они исчезают как частицы, обладающие массой покоя, а вместо них появляется  $\gamma$ -квант, т. е. частица, движущаяся со скоростью света и по своей природе аналогичная фотонам видимого света. Можно измерить энергию этого кванта и его свойство инертности. Оказывается, что энергия  $\gamma$ -кванта равна сумме энергий позитрона и электрона, включая и энергию их покоя, а инертность представляется как сумма релятивистских инертностей электрона и позитрона, включающая в себя также и массу покоя.

Здесь не было сказано, что «масса  $\gamma$ -кванта равна сумме масс электрона и позитрона», лишь потому, что  $\gamma$ -квант движется со скоростью

света и не может покойиться, а его масса покоя должна быть равна нулю, ибо в противном случае релятивистская формула для массы ввиду обращения знаменателя в нуль дала бы бессмысленный бесконечный результат для релятивистской массы  $\gamma$ -кванта. Однако, хотя масса покоя  $\gamma$ -кванта равна нулю, он обладает инертностью, которая проявляется при столкновениях с другими частицами. При анализе этих столкновений свойства инертности  $\gamma$ -кванта могут быть измерены. Эксперименты показывают, что энергия и масса покоя превращаются в совершенно новые формы, но соотношение между энергией и массой в этих новых формах имеет прежний вид. Это доказывает, что  $m_0c^2$  является действительно энергией и заслуживает названия энергии покоя.

Одновременно эти эксперименты проясняют физический смысл соотношения между массой и энергией. Иногда говорят, что соотношение (28.10) выражает эквивалентность массы и энергии и возможность превращения массы в энергию, и наоборот. Такие утверждения ошибочны. О превращении, например, массы в энергию можно было бы говорить лишь тогда, когда в каком-то процессе масса исчезла и за счет исчезновения инертных свойств появилась энергия, которой раньше не было. Таких процессов не существует.

**Во всех процессах энергия исчезает в одной форме, но появляется в другой, значение ее при этом сохраняется. Аналогично форма существования массы также изменяется, но ее значение сохраняется. Соотношение [28. 10] утверждает, что какие бы взаимопревращения форм энергии и массы ни происходили в природе, между ними всегда существует это соотношение.**

**Инертность потенциальной энергии.** Теперь рассмотрим вопрос о применимости соотношения между массой и энергией к потенциальной энергии. Поскольку формулой (28.4) доказан закон сохранения энергии при взаимопревращении полной и потенциальной энергий, то задача сводится к доказательству того, что потенциальная энергия обладает инерцией. Как видно из формулы (27.35), при притяжении в поле тяготения потенциальная энергия отрицательна. Это не есть лишь свойство сил тяготения — всяким потенциальным силам притяжения соответствует отрицательная энергия, поскольку для преодоления таких сил частица затрачивает свою кинетическую энергию. Сумма кинетической и потенциальной энергий должна оставаться постоянной, а при бесконечном удалении скорость частицы уменьшается и потенциальная энергия обратится в нуль. Следовательно, на конечных расстояниях потенциальная энергия должна быть меньше, т. е. отрицательна.

Если частица движется в поле сил тяготения на конечном расстоянии от другой частицы, тяжелой, которую можно считать за неподвижную, то сумма ее полной и потенциальной энергий  $E + U$  должна быть меньше, чем энергия покоя. Действительно, если  $E + U > m_0c^2$ , то закон сохранения энергии допускает удаление частицы на бесконечность, когда  $U \rightarrow 0$ . Если же  $E + U < m_0c^2$ ,

то частица не может удалиться на бесконечность, потому что в этом случае было бы  $E < m_0c^2$ , а это невозможно, так как энергия частицы не может быть меньше энергии покоя. Поэтому сила тяготения удерживает частицу в конечной области при условии

$$E + U < m_0c^2 \quad \text{или} \quad (E - m_0c^2) + U = W + U < 0, \quad (28.11)$$

т. е. сумма потенциальной и кинетической энергий должна быть отрицательной. Это есть условие образования связанных состояний.

Мы считали тело, создающее поле сил, неподвижным. Это допустимо лишь в том случае, когда его масса много больше массы движущегося тела. В противном случае необходимо учесть и его движение. Заметим, что все проведенные рассуждения остаются без существенного изменения.

Если движение обеих частиц рассматривается в инерциальной системе координат (именно инерциальной), тогда условие существования связанного состояния сводится к тому, что сумма кинетической энергии обеих частиц и их энергии взаимодействия должна быть отрицательной. Энергию взаимодействия как потенциальную энергию одного тела в поле другого надо учитывать лишь один раз. Например, энергия (27.35) есть потенциальная энергия материального тела  $m$  в поле тяготения другого тела  $M$ , но с таким же успехом эта величина может рассматриваться как потенциальная энергия тела  $M$  в поле тяготения тела  $m$ . Это одна и та же величина, представляющая собой энергию взаимодействия тел  $M$  и  $m$ , ее не надо учитывать дважды. Поэтому условие существования связанного состояния гласит: сумма кинетической энергии и энергии взаимодействия частиц в связанном состоянии должна быть отрицательной. Сумма кинетической энергии и энергии взаимодействия называется **энергией связи**. Поэтому можно считать, что энергия связи в связанном состоянии отрицательна.

**Энергия связи.** Известно, что ядра атомов состоят из нейтронов и протонов. Точный закон действия ядерных сил нам не известен, но известно, что это силы притяжения, поскольку они удерживают нейтроны и протоны в пределах ядра. Поэтому энергия связи в ядре отрицательна. Обозначим ее в виде  $-\Delta E_{яд}$ . Общая энергия ядра равна сумме энергий покоя протонов  $E_{0p}$  и нейтронов  $E_{0n}$ , уменьшенной на энергию связи:

$$E_{яд} = E_{0p} + E_{0n} - \Delta E_{яд}. \quad (28.12)$$

Если соотношение между массой и энергией (28.10) применимо также и к потенциальной энергии (его применимость к энергии покоя и кинетической энергии уже доказана), то тогда масса ядра  $M_{яд}$  должна быть меньше суммы масс покоя протонов  $M_{0p}$  и нейтронов  $M_{0n}$ , потому что в этом случае из (28.12) следует, что

$$M_{яд} = M_{0p} + M_{0n} - \Delta M_{яд}, \quad \Delta \dot{M}_{яд} = \frac{\Delta E_{яд}}{c^2}. \quad (28.13)$$

Величина  $\Delta M_{\text{яд}}$  называется дефектом массы ядра. Массы покоя протонов и нейтронов измеряются многими способами и хорошо известны. Масса ядра также может быть измерена в опытах, в которых проявляются его инертные свойства. Оказалось, что действительно масса ядра меньше суммы масс покоя составляющих его нейтронов и протонов. Это означает, что

**отрицательная потенциальная энергия в ядре дает отрицательную инертность в соответствии с формулой [28. 10], т. е. соотношение между массой и энергией применимо и к потенциальной энергии.**

Энергия связи ядер хорошо изучена. Наиболее удобно ее характеризовать энергией связи  $\varepsilon$ , приходящейся на одну частицу (протон и нейtron в отношении ядерных сил ведут себя как совершенно одинаковые частицы):

$$\varepsilon = \Delta E_{\text{яд}}/A,$$

где  $A$  — сумма числа протонов и нейтронов в ядре, называемая **массовым числом**. Зависимость  $\varepsilon$  от  $A$  изображена на рис. 54.

Как видно, частицы ядер (протоны и нейтроны) элементов, находящихся в начале периодической системы Менделеева, связаны между собой слабо. При переходе к более тяжелым ядрам эта связь усиливается. В области ядер с массовым числом примерно 120 связь достигает максимальной величины, равной примерно 8,5 МэВ (миллионов электронвольт). Напомним, что электронвольтом называется энергия, которую приобретает электрон или протон при прохождении разности потенциалов в один вольт ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Затем эта связь начинает ослабевать. У ядер элементов, расположенных к концу периодической системы, она ослабевает настолько, что ядра с массовым числом больше 238 являются нестабильными. Их удается получить лишь искусствен-

?

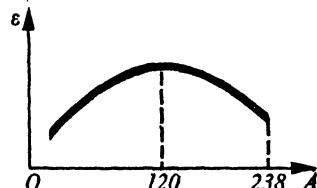
- 1 Что такое полная энергия тела в релятивистском случае!
- 2 Каково выражение кинетической энергии в релятивистском случае!
- 3 Что такое энергия покоя и как экспериментально доказывается, что это именно энергия?
- 4 Почему формула, связывающая массу и энергию, не может быть названа формулой превращения массы в энергию, а является формулой соотношения между этими величинами?
- 5 Какое экспериментальное доказательство соотношения между массой и энергией Вы знаете?

$$W = E - m_0 c^2,$$

или

$$W = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

$$E = mc^2.$$



54.

Зависимость энергии связи от массового числа

ными способами, существуют они не очень длительное время, самоизвестно превращаясь в более легкие ядра.

Если тяжелое ядро в конце периодической системы элементов расщепить на две примерно равные части, то получившиеся два ядра находятся ближе к ее середине и, согласно рис. 54, энергия связи этих ядер, приходящаяся на одну частицу, больше, чем в исходном ядре, т. е. частицы в этих ядрах связаны между собой сильнее, чем в исходном. Сумма масс покоя ядер, полученных в результате их деления, меньше, чем масса покоя исходного ядра. Поэтому сумма полных энергий покоя ядер, образующихся в результате их деления, меньше, чем энергия покоя исходного ядра. Разница в энергиях выделяется в виде кинетической энергии продуктов деления и образующихся при этом излучений. Это и есть атомная (ядерная) энергия, которая используется в атомных (ядерных) реакторах и атомных бомбах.

Если два легких ядра, расположенных в начале периодической системы элементов, соединяются в одно, то полученное в результате слияния ядро будет находиться ближе к ее середине и, согласно рис. 54, частицы в этих ядрах сильнее связаны, чем в исходном. Такие же рассуждения, как и в предыдущем случае, приводят к выводу, что при слиянии легких ядер должна выделяться энергия. Это энергия, которая используется в водородных бомбах. Пути управляемого освобождения этой энергии в мирных целях в настоящее время еще неизвестны и являются предметом интенсивных научных исследований. Большинство ученых считает, что эта проблема будет успешно решена в принципиальном смысле до конца XX в., а полное практическое использование научного решения осуществится в XXI в.

Соотношение между массой и энергией не только было подтверждено экспериментально, но и нашло многие важные практические применения. Одновременно описанные явления доказывают также и закон сохранения энергии в релятивистском случае.

**Законы сохранения и симметрии пространства и времени.** Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса играют чрезвычайно большую роль в понимании хода физических процессов. Ранее было отмечено, что если мы даже не знаем закона действия сил, законы сохранения позволяют нам обычно сделать многие важные заключения о характере движения. Спрашивается, в какой мере это убеждение справедливо? Ведь при выводе, например, закона сохранения импульса предполагалось, что силы взаимодействия между материальными точками системы удовлетворяют третьему закону Ньютона (такие силы обычно называются ньютоновскими). Поэтому, вообще говоря, вышеизложенное не дает оснований делать заключение об универсальном характере законов сохранения. Нельзя исключить такой возможности, что их существование связано с конкретными свойствами сил и уравнений движения. При других силах

эти законы, возможно, и не действуют. Однако такое утверждение является неправильным.

Дело в том, что

**существование законов сохранения энергии, импульса и момента импульса обусловливается не какими-то свойствами конкретных сил и уравнений движения, а коренными свойствами пространства и времени. Закон сохранения импульса обусловлен однородностью пространства, закон сохранения момента импульса изотропностью пространства, а закон сохранения энергии — однородностью времени.**

Поэтому, если бы где-то было открыто явление, противоречащее закону сохранения импульса, то нам пришлось бы усомниться в таком фундаментальном свойстве пространства, как его однородность. Но для этого надо иметь весьма и весьма убедительные экспериментальные основания. Более разумным является допущение, что нами не учтены какие-то не известные в настоящее время факторы. Именно таким образом было предсказано существование нейтрино. В явлениях β-распада наблюдалось несоблюдение закона сохранения импульса. Вместо того чтобы отсюда сделать заключение о нарушении неоднородности пространства, было предположено, что в процессе существует частица, которую по каким-то причинам не удается обнаружить. Участие этой частицы обеспечивает соблюдение закона сохранения импульса и делает ненужным пересмотр наших представлений о свойствах пространства. Эта частица была названа нейтрино. Экспериментально ее существование было доказано много лет спустя.

Аналогичным образом обстоит дело и с законами сохранения энергии и момента импульса. Дело не в том, что эти законы должны всегда соблюдаться, а в том, что их несоблюдение связано с коренными изменениями свойств пространства и времени.

Однородность и изотропность пространства и однородность времени являются их важнейшими симметриями. Поэтому можно сказать, что законы сохранения обусловлены симметрией пространства и времени. Общее доказательство этого утверждения дается в теоретической механике и здесь не приводится.

# Глава 7

## ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

---

- 29. Силы, известные в природе
- 30. Свойства сил тяготения
- 31. Движение планет и комет
- 32. Движение искусственных спутников Земли
- 33. Проблема двух тел

Силы тяготения существенно влияют на движение лишь в том случае, когда масса хотя бы одного из взаимодействующих тел имеет достаточно большое (астрономическое) значение. Законы Кеплера описывают как движение планет и комет, так и распространение света в поле тяготения Солнца. Законы движения искусственных спутников Земли отличаются от законов Кеплера.

---

### 29. Силы, известные в природе

Четыре типа сил, известных в природе. В физике рассматривается много сил: силы трения, упругости, электродвигущая сила, силы сцепления, электрические и магнитные силы и т. д.

Однако если подходить к определению силы более строго, понимая под силой (см. § 19) количественную меру интенсивности взаимодействия, то все их многообразие сводится всего лишь к четырем видам взаимодействия, известным в настоящее время:

- 1) гравитационное;
- 2) электромагнитное;
- 3) сильное, или ядерное;
- 4) слабое.

Все остальные взаимодействия, которые упоминались выше, можно отнести к одному или нескольким из указанных.

Взаимодействия отличаются как по своей интенсивности, так и по кругу явлений, в которых они существенны. Рассмотрим кратко особенности этих взаимодействий.

**Гравитационное взаимодействие.** Оно подчиняется закону тяготения Ньютона. В подавляющем большинстве случаев закон Ньютона дает хорошее описание наблюдаемых явлений. В настоящее время известно лишь одно явление, которое не объясняется с помощью этого закона, — вращение перигелия Меркурия на  $42''$  в столетие. Это явление успешно описывается теорией тяготения Эйнштейна, или, как ее иногда называют, общей теорией относительности. Кроме того, многие вопросы космологии, эволюции звезд и Вселенной можно рассматривать лишь в рамках общей теории относительности. Мы будем изучать тяготение в основном в рамках закона тяготения Ньютона, делая в соответствующих случаях необходимые замечания об общей теории относительности.

**Интенсивность гравитационных сил** чрезвычайно мала. Они практически не играют роли при взаимодействии между неастрономическими телами. Лишь при взаимодействии с телами астрономических размеров и между телами таких размеров силы тяготения имеют существенное значение.

Природа гравитационного взаимодействия в настоящее время еще не установлена. По теории Эйнштейна, силы тяготения связаны с изменением геометрических свойств пространства — времени под влиянием материи. Это совершенно другой механизм взаимодействия в сравнении с принятым в квантовой теории поля, где взаимодействие обусловливается обменом частиц. Поэтому в настоящее время много усилий прилагается к выяснению возможности существования частиц, ответственных за гравитационное взаимодействие, — гравитонов. При наличии гравитонов возможны два подхода к проблеме тяготения. Либо гравитационное взаимодействие полностью подпадает под схему описания всех других взаимодействий, если гравитоны рассматривать как частицы, обеспечивающие взаимодействие, либо не подпадает и тогда гравитоны надо рассматривать как вид материи, который наряду с обычной материи осуществляет искривление пространства — времени. Дальнейшее развитие теории гравитационного взаимодействия является одной из самых важных и многообещающих проблем современной физики.

**Электромагнитные взаимодействия.** Они обусловлены электрическим и магнитным взаимодействием зарядов, законы которого точно известны и хорошо изучены. В сравнении с гравитационным взаимодействием электромагнитное неизмеримо сильнее. Например, между двумя электронами, находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга, действует сила гравитационного притяжения

$$F_m = G \frac{m_0^2}{r^2}, \quad (29.1)$$

где  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона. Электрическая сила отталкивания между ними

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (29.2)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона,  $\epsilon_0 = 8,82 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная. Из (29.1) и (29.2) следует

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_0^2} \approx 10^{43}. \quad (29.3)$$

Таким образом, электрическое взаимодействие между заряженными элементарными частицами в необозримое число раз более интенсивно, чем гравитационное.

Характерная особенность электромагнитных взаимодействий — их медленное убывание с расстоянием (обратно пропорционально квадрату расстояний). Поэтому электрические и магнитные силы проявляются при больших расстояниях между заряженными частицами.

При рассмотрении явлений в областях пространства, которые больше размеров ядер, но меньше астрономических размеров, электромагнитные взаимодействия играют главную роль. Большинство сил, с которыми приходится встречаться в этих областях, сводятся в конечном счете к электромагнитным взаимодействиям. Силы трения, силы сцепления, силы упругости, силы, благодаря которым жидкости сохраняют свой объем, и т. д. — все они в конечном счете электромагнитной природы. Правда, фактически проследить детали этой связи очень трудно, но такая связь всегда существует. Твердость тел и само существование твердых тел, химические превращения, создание новых материалов, вся радиоэлектроника, лазеры и мазеры и т. д. — все это обусловлено электромагнитными взаимодействиями.

Важнейшая проблема современной науки — проблема управляемых термоядерных реакций — в своей главной части является электродинамической и сводится к нахождению способов достаточно длительного удержания горячей плазмы в небольших объемах с помощью электромагнитных полей. Создание ионных и плазменных ракетных двигателей в значительной степени также относится к электродинамической проблеме.

Электромагнитные взаимодействия имеют первостепенное значение в астрономических явлениях. Существующие в межзвездном пространстве магнитные поля ускоряют космические заряженные частицы; вспышки на Солнце приводят к изменению магнитного поля в окрестности Земли и тем самым оказывают влияние на явления, происходящие на Земле; магнитное поле Земли удерживает вблизи от нее заряженные частицы, благодаря чему создаются радиационные пояса. Все изложенное достаточно полно иллюстрирует утверждение о том, что в области масштабов, больших, чем ядерные, но меньших, чем астрономические, электромагнитные взаимодействия играют главную роль.

**Сильные взаимодействия.** Сильные, или ядерные, взаимодействия являются силами притяжения, действующими, например, между протонами и нейтронами в ядре. Поэтому их называют ядерными силами.

Однако они действуют не только в ядре и не только между протонами и нейтронами, но и между многими другими частицами, известными в настоящее время. Поэтому предпочтительнее говорить о них не как о ядерных, а как о сильных взаимодействиях.

Закон действия этих сил неизвестен, хотя многие характерные их свойства хорошо изучены экспериментально. Эти силы действуют лишь на малых расстояниях порядка  $10^{-15}$  м (это порядок размера ядер) и являются короткодействующими. На более далеких расстояниях они практически обращаются в нуль. На расстояниях же, меньших  $10^{-15}$  м, они примерно в сто раз больше, чем электромагнитные. Именно благодаря этому силы электрического отталкивания между протонами в ядрах не в состоянии преодолеть силы ядерного притяжения между ними. Но это лишь в определенных пределах.

Если силы имеют большой радиус действия, как, например, электромагнитные силы, то каждая частица взаимодействует со всеми другими в достаточно большом объеме. Поэтому энергия взаимодействия каждой частицы с другими пропорциональна числу частиц  $n$ . Поскольку общее число частиц  $n$ , а энергия взаимодействия каждой из них с другими пропорциональна также  $n$ , то общая энергия взаимодействия пропорциональна  $n^2$ .

По-другому обстоит дело в случае короткодействующих сил. В этом случае каждая частица взаимодействует лишь со своими соседями, находящимися в сфере действия сил. Поэтому энергия ее взаимодействия с другими частицами является примерно постоянной величиной и не зависит от общего числа частиц  $n$ , находящихся, например, в ядре. Поскольку энергия взаимодействия каждой из них с другими примерно постоянна, то общая энергия взаимодействия между частицами пропорциональна  $n$ . Это свойство короткодействующих сил называется свойством насыщения.

Таким образом, общая энергия взаимодействия, связанная с короткодействующими силами, растет медленнее, чем общая энергия, связанная с дальнодействующими силами, поскольку в первом случае она зависит от первой степени числа частиц, а во втором — от квадрата числа частиц. Вот почему, несмотря на то что ядерные силы притяжения между протонами и нейтронами примерно в сто раз больше, чем силы электрического отталкивания между ними, при достаточно большом общем числе частиц (число протонов и нейтронов в ядре примерно одинаково) наступает такая ситуация, что общая энергия электрического отталкивания превосходит общую энергию ядерного притяжения и такое ядро не может существовать. Этим обусловливается отсутствие стабильных ядер, в которых число нуклонов (протоны и нейтроны называются нуклонами) было бы больше, чем 238. Более тяжелые ядра могут быть созданы искусственно, но они живут лишь конечное время, в большинстве случаев очень и очень короткое, и в результате распада превращаются в более легкие ядра.

Следующим важным свойством сильных взаимодействий является их **зарядовая независимость**, что было подтверждено экспериментально. Силы ядерного взаимодействия между нейтроном и протоном, между протоном и протоном и между нейтроном и нейтроном равны между собой. Иначе говоря, эти силы не зависят от того, имеет ли участвующая во взаимодействии частица электрический заряд или она нейтральна.

Ядерные силы весьма сложным образом зависят не только от относительного движения взаимодействующих частиц, но и от взаимной ориентации их спина. Спин характеризует наличие внутреннего момента количества движения частиц и образно может быть представлен как результат «вращения» частицы вокруг некоторой оси, проходящей через нее. Однако такое представление о «вращении» частицы как источника имеющегося у нее внутреннего момента количества движения используется лишь для наглядности и не означает, что частица в действительности вращается. При разумных предположениях о «размерах» частиц пришлось бы допустить линейные скорости при вращении, большие, чем скорость света. Оснований для таких допущений в настоящее время нет. С наличием спина у частиц связано существование их магнитного момента, который является источником магнитного поля. Известно, что магнитное поле порождается либо электрическими токами, либо изменяющимся электрическим полем, а магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам, не существует. По тем же соображениям, что и спин, магнитный момент не может быть объяснен наличием электрических токов внутри частицы. В настоящее время он рассматривается как первоначальная сущность, как источник магнитного поля, не связанный к другим известным источникам. Экспериментально показано, что свойства частиц, связанные со спином, весьма важны для понимания ядерных сил.

Таким образом, можно заключить, что закон действия ядерных сил, по всей вероятности, является сложным законом. Возможно, в сравнении с законом электромагнитных взаимодействий он значительно более сложен, чем закон электромагнитных взаимодействий в сравнении с законом тяготения Ньютона. Какого-либо интереса с точки зрения механики эти силы не имеют. Можно говорить о движении протонов и нейтронов в ядре под действием этих сил, но оно может быть рассмотрено лишь с помощью квантовой механики.

**Слабые взаимодействия.** Этот тип взаимодействия ответствен за взаимопревращения многих элементарных частиц. Слабые взаимодействия проявляются лишь в пределах «объема» элементарных частиц, хотя понятие «объема» может быть употреблено лишь очень и очень условно. В данном случае нельзя говорить о «силе» в обычном смысле. Тем не менее необходимо дать количественную меру интенсивности этих взаимодействий. Интенсивностью этих взаимодействий обусловливается время существования некоторых частиц до момента распада, т. е. время жизни таких частиц. Чем сильнее

взаимодействие, тем меньше время жизни. По этому признаку можно говорить об интенсивности взаимодействий и сравнивать взаимодействия между собой. Оказывается, слабое взаимодействие в миллион миллиардов раз меньше электромагнитного (поэтому оно и называется слабым), но все же неизмеримо больше гравитационного. Какую-либо роль в описании механического движения частиц оно не играет и поэтому с точки зрения механики не представляет интереса.

### 30. Свойства сил тяготения

**Неподвижный точечный источник сил.** Поля сил, создаваемых точечными источниками, являются исходными при рассмотрении более сложных полей. Ввиду того что силы являются векторами и правило их сложения известно, поле сил **сложного источника** может быть представлено как сумма сил точечных источников, входящих в него. В простейшем случае точечный источник неподвижен, потенциальная энергия тела в какой-либо точке пространства постоянна по времени:  $U = U(\mathbf{r})$ .

Силы, убывающие обратно пропорционально квадрату расстояний. Силы тяготения и кулоновские силы электрического притяжения и отталкивания между зарядами убывают обратно пропорционально квадрату расстояний между телами или, соответственно, зарядами. В этом параграфе рассмотрим только поля тяготения, отложив анализ движения в электромагнитных полях до гл. 8. Ограничимся нерелятивистским случаем, поскольку закон тяготения Ньютона справедлив только для него.

Потенциальная энергия и сила были вычислены в § 27 и даются формулами (27.35) и (27.30), которые целесообразно выписать еще раз:

$$\text{а) } U(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r}, \quad \text{б) } \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (30.1)$$

Здесь  $r$  — расстояние до движущейся точки, а ее радиус-вектор  $\mathbf{r}$  откладывается от точки с массой  $M$ , которая рассматривается как неподвижный источник сил тяготения.

Примером реализации этой модели является движение планет вокруг Солнца. Масса Солнца ( $2 \cdot 10^{30}$  кг) больше массы Земли ( $6 \cdot 10^{24}$  кг) в 332 000 раз и больше массы самой массивной планеты солнечной системы Юпитера примерно в 1000 раз. Поэтому с достаточной точностью можно считать Солнце неподвижным, а планеты — движущимися вокруг него. Расстояние от планет до Солнца много больше размеров и планет, и Солнца. Например, расстояние от Солнца до Земли равно около 150 млн. км, а диаметр Солнца около 1,4 млн. км, диаметр Земли примерно 12 700 км. Таким образом, при рассмотрении движения Земли и планет вокруг Солнца с большой точностью можно считать их материальными точками.

!

**Бесконечно малый элемент объема материального тела рассматривается как материальная точка, масса которой равна произведению плотности на элемент объема.**

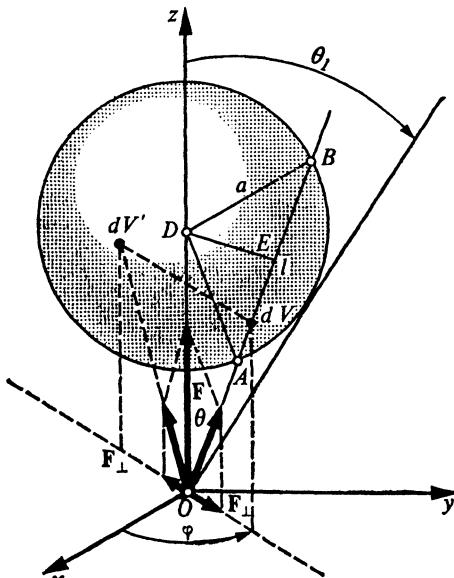
$$\begin{aligned} M_{\text{яд}} &= M_{\text{оп}} + \\ &+ M_{\text{он}} - \Delta M_{\text{яд}}, \\ \Delta M_{\text{яд}} &= \frac{\Delta E_{\text{яд}}}{c^2}. \end{aligned}$$

55.

Взаимодействие шарообразного тела, у которого сферически симметрично распределена масса, и материальной точки, помещенной в начале сферической системы координат

Это тело создает в окружающем пространстве такое же поле тяготения, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре шара

Планеты взаимодействуют друг с другом. Однако массы планет во много раз меньше массы Солнца, а минимальные расстояния между планетами лишь в несколько раз меньше расстояний от каждой из планет до Солнца. Силы притяжения между ними во много раз меньше сил притяжения со стороны Солнца. Поэтому с большой точностью можно пренебречь силами притяжения между планетами и учитывать только силы, действующие на них со стороны Солнца. Следовательно, модель движущейся материальной точки в поле сил тяготения, создаваемой другой материальной точкой, применима к рассмотрению движений планет солнечной системы. Однако применимость такой модели для анализа движения спутника около Земли не очевидна. Спутник движется, например, на расстоянии 400 км от поверхности Земли. Ясно, что в этой задаче Земля никак не подходит под понятие точечной. И тем не менее модель точечной



Земли в определенных пределах оказывается применимой и для этого случая, что обусловливается одной важной особенностью сил, изменяющихся обратно пропорционально квадрату расстояний, а именно: шарообразное однородное тело притягивает материальную точку так, как если бы вся его масса была сосредоточена в его геометрическом центре.

**Сила тяготения, действующая на материальную точку со стороны шарообразного тела.** Пусть материальная точка массы  $m$  находится в начале сферической системы координат, а центр шарообразного тела радиуса  $a$ , которое ее притягивает, расположен на оси  $z$  на расстоянии  $R$  ( $R > a$ ) (рис. 55). Масса шарообразного тела равна  $M$  и, следовательно, плотность  $\rho = 3M/(4\pi a^3)$ . В сферической системе координат элемент объема  $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$ . Заключенная в этом объеме масса тела  $dM = \rho dV$  действует на помещенную в начале координат точку с силой  $dF = GmdM/r^2$ . Эту силу можно разложить на две компоненты:  $dF_z$ , действующую вдоль оси  $z$ , и  $dF_{\perp}$  — в перпендикулярном оси  $z$  направлении, т. е. в плоскости  $(x, y)$ .

Ось  $z$  проходит через центр шарообразного тела и является осью симметрии тела. Поэтому у каждого элементарного объема  $dV$  имеется симметрично расположенный объем  $dV'$ , находящийся на перпендикуляре, опущенном на ось  $z$  из объема  $dV$ . Сила тяготения, действующая на материальную точку в начале координат со стороны массы  $dM' = \rho dV'$ , равна по абсолютному значению силе со стороны массы  $dM$ , а направление этой силы таково, что ее составляющая  $dF'_z$  равна  $dF_z$ , а составляющая  $dF'_{\perp}$  в плоскости  $(x, y)$  по абсолютному значению равна  $dF_{\perp}$  и противоположно направлена. Поэтому  $dF_{\perp}$  и  $dF'_{\perp}$  взаимно уничтожаются и остается лишь сила вдоль оси  $z$ . Это соображение применимо к любому элементу объема  $dV$ . Поэтому суммарная сила действует вдоль оси  $z$  и при ее вычислении от каждого элемента объема необходимо лишь учитывать эту компоненту, которую обозначим через  $dF$ . Компонента силы со стороны массы  $dM = \rho dV$  по закону взаимодействия точечных масс равна (рис. 55)

$$dF = G \frac{mdM \cos \theta}{r^2} = Gm\rho \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi dr, \quad (30.2)$$

а полная сила

$$F = Gm\rho \int_V \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi dr, \quad (30.3)$$

где  $V$  под знаком интеграла указывает, что он берется по всему объему шарообразного тела. Для вычисления интеграла (30.3) распишем его по переменным:

$$I = \int_V \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi dr = \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{r=OA}^{r=OB} dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi. \quad (30.4)$$

Интегрирование по  $d\phi$  в силу аксиальной симметрии дает  $2\pi$ , а по  $r$  от первого пересечения с поверхностью шара в точке  $A$  до второго пересечения в точке  $B$  дает длину хорды  $AB = l(\theta)$ . Эта длина в различных направлениях различна, т. е. является функцией от  $\theta$ . Таким образом, получаем

$$I = 2\pi \int_0^{\theta_1} \cos \theta \sin \theta d\theta l(\theta). \quad (30.5)$$

Из равнобедренного треугольника  $DAB$  находим, учитывая, что его высота  $DE = R \sin \theta$ , длину хорды на луче под углом  $\theta$ :

$$l(\theta) = 2\sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \theta}. \quad (30.6)$$

Из рис. 55 видно, что угол  $\theta_1$  есть угол между осью  $z$  и касательной, проведенной к окружности из начала координат. Поэтому  $\sin \theta_1 = a/R$ . Теперь окончательно вычисляем интеграл (30.5):

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^{\theta_1} 2\sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \theta} \frac{d(-R^2 \sin^2 \theta)}{R^2} = \\ &= \frac{2\pi}{R^2} \left[ \frac{2}{3} (a^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \right]_0^{\theta_1} = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{1}{R^2}. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (30.3) и принимая во внимание, что  $4\pi a^3/3 = M$  есть масса шарообразного тела, получаем

$$F = GmM/R^2, \quad (30.8)$$

т. е. это тело действует на материальную точку так, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре.

**Поэтому взаимодействие шарообразных однородных материальных тел можно рассматривать как взаимодействие материальных точек.**

Из формулы (30.8) следует, что потенциальная энергия материальной точки массы  $m$ , находящейся на расстоянии  $R$  от центра шарообразного тела массы  $M$ , равна

$$U = -GmM/r. \quad (30.8a)$$

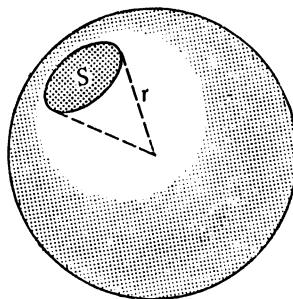
За счет какого физического фактора возникает такая интересная особенность действия гравитационных сил? Для ответа на этот вопрос необходимо вернуться к формуле (30.2) ( $\cos \theta$  сейчас нас не интересует). Из математики известно, что телесным (пространственным) углом  $d\Omega$  (рис. 56) называется отношение площади поверхности сферы, на которую опирается этот угол, к квадрату радиуса сферы. Отсюда заключаем, что в сферической системе координат элемент бесконечно малого пространственного угла  $d\Omega = dS/r^2 = \sin \theta d\theta d\phi$ . Поэтому формулу (30.2) для силы, с которой масса элемента объема  $dV$  действует на материальную точку, можно записать в виде

$$dF = Gm\rho d\Omega dr. \quad (30.9)$$

Следовательно, сила со стороны материального слоя толщиной  $dr$  зависит только от угла, под которым он виден, и не зависит от расстояния до слоя (рис. 57). Такая ситуация обусловлена убыванием силы тяготения именно обратно пропорционально квадрату расстояний. Если бы, например, сила убывала как  $1/r^3$ , то этого не было бы.

С другой стороны, ясно, что любая сила, убывающая обратно пропорционально квадрату расстояний, должна обладать тем же свойством, например силы, описываемые законом Кулона.

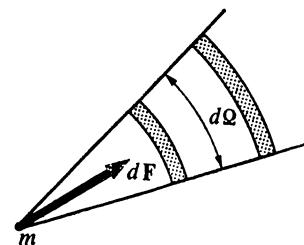
Рассмотрим взаимодействие двух шарообразных тел. Поскольку каждое из них взаимодействует с каждой материальной точкой другого тела так, как если бы тело было само материальной точкой, расположенной в его геометрическом центре, то два шарообразных тела притягиваются друг к другу с той же силой, с какой притягиваются материальные точки с соответствующими массами, расположенные в их геометрических центрах.



56.

К понятию пространственного угла

Этот угол измеряется безразмерным числом, равным отношению площади  $S$ , выделяемой им на поверхности сферы с центром в его вершине к квадрату радиуса  $r$  сферы



57.

Масса тонкого сферического слоя, заключенного внутри некоторого пространственного угла  $d\Omega$ , растет пропорционально квадрату расстояния от вершины угла. Поэтому поле тяготения, создаваемое таким слоем в вершине угла, не зависит от его расстояния до слоя

**Сила со стороны шарового слоя.** Из только что доказанного утверждения непосредственно следует, что

**шаровой слой действует на находящуюся во внешнем пространстве материальную точку так, как если бы вся масса шарового слоя была сосредоточена в его геометрическом центре.**

В самом деле, сила от шарообразного тела может рассматриваться как сумма сил от меньшего шарообразного тела и шарового слоя, дополняющего это тело до первоначального. Поскольку сила от шарообразного тела сводится к силе от материальной точки, расположенной в его геометрическом центре, сила от шарового слоя равна силе от материальной точки, расположенной в его геометрическом центре, но с массой, равной разности масс шарообразных тел, т. е. с массой шарового слоя, что и требовалось доказать.

**Сила в шаровой полости.** Однако если материальная точка находится внутри полости, ограниченной шаровым слоем, то на нее никакая сила не действует. Чтобы это показать, рассмотрим действие на материальную точку со стороны бесконечно тонкого шарового слоя толщиной  $dr$ .

Возьмем участок шарового слоя площадью  $dS_1$ , на котором находится масса  $\rho dr dS_1$ . Симметрично ему расположен другой участок поверхности шарового слоя  $dS_2$ , видимый из точки  $O$  под тем же телесным углом  $d\Omega$  (рис. 58). На этом участке имеется масса  $\rho dr dS_2$ . На рисунке изображено сечение в плоскости, проходящей через центр шарового слоя и линию, соединяющую площадки. Силы, действующие на массу  $m$  в точке  $O$  со стороны этих участков, направлены противоположно и равны:

$$dF_1 = Gm\rho dr \frac{dS_1}{r_1^2}, \quad dF_2 = Gm\rho dr \frac{dS_2}{r_2^2}. \quad (30.10)$$

Заметим, что величины  $dS_1/r_1^2$  и  $dS_2/r_2^2$  не являются телесными углами, под которыми эти площадки видны из точки  $O$ , потому что их поверхности не перпендикулярны радиусам. Проведем через середину площадок плоскости, перпендикулярные радиусам, и обозначим проекции площадок  $dS_1$  и  $dS_2$  на эти плоскости через  $dS'_1$  и  $dS'_2$  соответственно. Углы между этими плоскостями и касательными плоскостями у обеих площадок равны по теореме о касательных в концах хорды:  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Поэтому получаем  $dS'_1 = dS_1 \cos \theta$ ,  $dS'_2 = dS_2 \cos \theta$ . Следовательно, (30.10) можно переписать в виде

$$dF_1 = Gm\rho dr \frac{dS'_1}{r_1^2} \frac{1}{\cos \theta}, \quad dF_2 = Gm\rho dr \frac{dS'_2}{r_2^2} \frac{1}{\cos \theta}. \quad (30.10')$$

Но  $(dS'_1/r_1^2) = (dS'_2/r_2^2) = d\Omega$  есть одинаковые телесные углы, под которыми площадки  $dS_1$  и  $dS_2$  видны из  $O$ . Величины  $1/\cos \theta$  также

одинаковы. Следовательно,  $dF_1$  и  $dF_2$  равны по абсолютному значению, но направлены противоположно и поэтому компенсируют друг друга. Суммарная сила, действующая на точку в полости со стороны симметрично расположенных масс на площадках  $dS_1$  и  $dS_2$ , равна нулю. Каждая из площадок имеет себе симметричную. В результате получаем, что

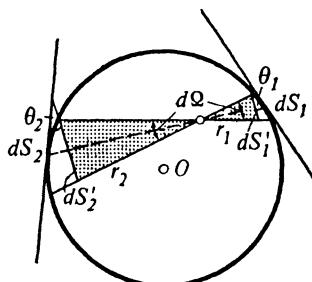
**полная сила, действующая на материальную точку внутри полости со стороны бесконечно тонкого шарового слоя, равна нулю.**

Шаровой слой конечной толщины можно представить в виде суммы (интеграла) шаровых слоев малой (бесконечно малой) толщины. Поэтому утверждение справедливо также для шаровых слоев любой толщины.

Вычислим силу тяжести на глубине  $h$  ниже поверхности Земли. Она будет меньше, чем на поверхности Земли, потому что весь шаровой слой, лежащий выше глубины  $h$ , не дает никакого вклада в эту силу. Уменьшение силы тяжести равно той силе в точке на глубине  $h$ , которую может создать масса Земли в слое толщиной  $h$  от поверхности Земли, помещенная в ее центр. В центре Земли сила тяжести равна нулю. Нетрудно видеть, что при удалении от центра Земли сила тяжести растет пропорционально первой степени расстояния от центра. В самом деле, масса, заключенная в шаре радиуса  $r$ , меньшего радиуса Земли, равна  $4\pi r^3 \rho/3$ , где  $\rho$  — плотность Земли. Поэтому сила, действующая на массу  $m$  внутри Земли, расположенную на расстоянии  $r$  от центра, равна

$$F = G \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho m}{r^2} = \text{const} \cdot mr.$$

Так происходит до поверхности Земли. Вне поверхности сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояний. График зависимости силы тяготения от



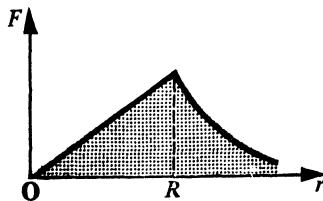
58.

**Вычисление силы, действующей на точку в шаровой полости**

Из вычислений получено, что внутри шаровой полости со сферически симметричным расположением массы силы тяготения отсутствуют

!

**Замена поля шарообразного тела полем материальной точки возможна для всех сил, убывающих обратно пропорционально квадрату расстояний, в том числе и для электрических сил, действующих по закону Кулона.**



59.

**Зависимость поля тяготения от расстояния до центра однородного шарообразного тела радиуса  $R$**

!

При вычислении сил тяготения полость в материальном теле можно формально рассматривать как «отрицательную» массу в сплошном теле.

?

1 **Можете ли Вы доказать, что центральные силы являются всегда потенциальными?**

2 **Каким свойством сил тяготения обусловлена эквивалентность поля тяготения вне шара со стороны шара со стороны материальной точки с массой шара, помещенной в его центр?**

расстояния до центра однородного шарообразного тела приведен на рис. 59.

**Поле вблизи поверхности Земли.** Обозначим радиус Земли  $R_0$ , а расстояние от ее поверхности до материальной точки массы  $m$  через  $h$ , причем  $h \ll R_0$ . Полное расстояние от центра Земли до материальной точки есть  $R_0 + h$ , и, следовательно, в соответствии с формулой (30.8) сила тяжести

$$F = GMm/(R_0 + h)^2. \quad (30.11)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R_0 + h)^2} &= \frac{1}{R_0^2} \frac{1}{(1 + h/R_0)^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{R_0^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_0} + \dots\right), \end{aligned} \quad (30.12)$$

где отброшены члены  $(h/R_0)^2$  и члены более высоких степеней, потому что уже член  $h/R_0$  очень мал. Например, для расстояний в пределах высот полета самолета порядка 20 км  $(h/R_0) \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . Квадрат этой величины отличается от единицы уже в миллионных долях. В большинстве случаев нет необходимости учитывать изменения силы тяжести, составляющие лишь незначительную долю ее величины. Например, при падении тел с высот до 1 км изменение силы тяжести составит меньше  $2(h/R_0) \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . С этой точностью можно считать силу тяжести постоянной, независимой от высоты и на основании (30.11) и (30.12) равной

$$F_0 = (GMm/R_0^2) = gm, \quad (30.13)$$

где  $g = (GM/R_0^2) = 9,8 \text{ м/с}^2$  есть ускорение силы тяжести у поверхности Земли. В этом приближении рассматривается большое число задач, связанных с силой тяжести вблизи поверхности Земли.

**Гравитационная энергия.** Формула (27.35а) показывает, что потенциальная энергия равна работе, которую совершают силы поля при удалении частицы из точки ее нахождения на бесконечность.

При перемещении частицы из одной точки в другую ее потенциальная энергия изменяется и на такую же величину изменяется кинетическая энергия, так что сумма этих энергий остается постоянной. Поэтому возникает вопрос о физическом носителе той энергии, за счет которой изменяется кинетическая энергия тела, т. е. о физическом носителе потенциальной энергии.

Кинетическая энергия определяется относительной скоростью движения тел, а потенциальная энергия — их относительным расположением. Это наводит на мысль считать носителем потенциальной энергии взаимное расположение тел, т. е. чисто геометрическое соотношение. Однако одно и то же изменение взаимного расположения тел приводит к совершенно различным изменениям потенциальной энергии в зависимости от того, о каких силах идет речь. Поэтому относительное расположение тел есть лишь мера потенциальной энергии, а ее физическим носителем является то состояние в пространстве, которое обусловливает наличие в нем сил.

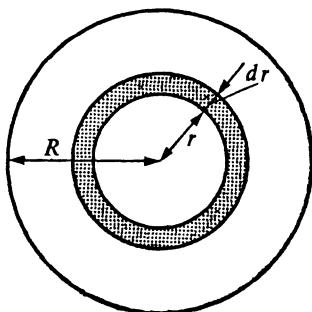
Область пространства, в которой действуют силы, называется полем сил. Следовательно, можно сказать, что носителем потенциальной энергии является поле сил и потенциальная энергия тела обусловливается энергией поля. Картина взаимопревращения потенциальной и кинетической энергий при движении состоит в следующем: имеется кинетическая энергия тела и энергия поля, которая не связана непосредственно с потенциальной энергией. При движении тела изменяется его кинетическая энергия и так же, но в противоположном направлении изменяется энергия поля, т. е. энергия поля переходит в энергию кинетического движения тела, при этом вопрос об абсолютном значении энергии поля остается открытым. Поскольку физически наблюдаемой величиной являются лишь изменения энергии поля, то начало ее отсчета может быть выбрано произвольно.

**Сумма кинетической и потенциальной энергий частицы является в действительности энергией системы частица — поле, причем кинетическая энергия принадлежит частице, а потенциальная — полю.**

При движении частицы происходит обмен энергией между ней и полем. Таким образом, поле является важнейшим участником всякой картины взаимодействия материальных тел.

Энергия поля, обуславливающего гравитационное взаимодействие, называется гравитационной энергией. Возникает вопрос о ее вычислении.

Гравитационная энергия шарообразного тела. Пусть имеется шар радиуса  $R$  и массы  $M$ . С взаимодействием частиц шара друг с другом связана энергия гравитационного поля, называемая гравитационной. Она численно равна работе, которую необходимо затратить, чтобы все частицы шара развести на бесконечные расстояния друг от друга. Конечно, при этом необходимо принять во внимание лишь работу на преодоление сил гравитационного притяжения и не рас-



60.

### К вычислению гравитационной энергии шара

Так как потенциальная энергия шарообразного слоя вещества зависит лишь от внутренних слоев, то расчет следует начинать от внешних слоев материального тела и заканчивать в центре

сматривать, например, электромагнитные силы, которые удерживают атомы в молекулах, молекулы в твердых и жидких телах и т. д.

Для упрощения расчетов будем считать, что масса тела распределена равномерно в шаре с плотностью  $\rho = 3M/4\pi R^3$ . Удобнее всего удалить частицы на бесконечность последовательно шаровыми слоями, начиная с поверхности. Удаленные на бесконечность слои не могут оказывать никакого действия на удаление последующих слоев, поскольку эти последующие слои находятся внутри предшествующих шаровых слоев.

В слое толщиной  $dr$  на расстоянии  $r$  от центра шара содержится масса  $\rho 4\pi r^2 dr$  (рис. 60). При удалении этого слоя на него действует лишь масса шара радиуса  $r$ , заключенная в полости, ограниченной шаровым слоем. Работа удаления равна потенциальной энергии этого шарового слоя в гравитационном поле, созданном всеми внутренними слоями:

$$dU_{rp} = -G \frac{\left(\rho \frac{4\pi}{3} r^3\right) \rho 4\pi r^2 dr}{r}. \quad (30.14)$$

Интегрируя это выражение по всему объему шара, т. е. от  $r = 0$  до  $r = R$ , получим полную гравитационную энергию шара:

$$\begin{aligned} U_{rp} &= -G \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \\ &= -G \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 R^5, \end{aligned} \quad (30.14a)$$

или с учетом, что  $\rho = 3M/4\pi R^3$ ,

$$U_{rp} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}. \quad (30.15)$$

?

- 1 Чему равна гравитационная энергия шарового сферически симметричного тела?
- 2 Что такое гравитационный радиус?
- 3 Чему равен гравитационный радиус Земли? Солнца!
- 4 Что такое «черные дыры»? Какие свидетельства в пользу их существования Вы знаете?

Это есть энергия гравитационного поля, связанная с гравитационным притяжением составляющих шар элементов массы. Однако это не полная энергия гравитационного поля, а та часть ее,

которая связана с гравитационным взаимодействием частиц шара. Она показывает, на сколько энергия гравитационного поля, когда шар существует, меньше энергии гравитационного поля в его отсутствие.

**Гравитационный радиус.** Энергия покоя тела массы  $M$  равна  $Mc^2$ . Возникает вопрос, нельзя ли себе представить дело так, что эта энергия является энергией гравитационного поля, превратившейся в энергию массы покоя при стягивании материи, составляющей тело, из рассеянного состояния на бесконечности, когда никакого взаимодействия между частицами не было. При стягивании материи в шар энергия гравитационного поля уменьшается на величину (30.15), а образовавшийся шар должен иметь соответствующую энергию.

Чтобы вычислить радиус шара, надо гравитационную энергию приравнять энергии массы покоя (отбросив численные коэффициенты):

$$GM^2/r_g = Mc^2.$$

Отсюда получаем

$$r_g = GM/c^2. \quad (30.16)$$

Эта величина называется гравитационным радиусом.

В качестве примера вычислим гравитационный радиус Земли, масса которой  $M = 6 \cdot 10^{24}$  кг:

$$r_g \text{ Зем} = \frac{(6,7 \cdot 10^{-11})(6 \cdot 10^{24}) \text{ м}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,4 \text{ см.}$$

Это число означает, что для того, чтобы гравитационная энергия массы Земли была равна энергии массы покоя, необходимо было бы всю ее массу сжать в шарик диаметром примерно 1 см. Фактически же диаметр Земли имеет порядок  $10^9$  см. Полученный результат свидетельствует, что в общем энергетическом балансе Земли, включающем и ее энергию массы покоя, гравитационная энергия играет прецебрежимо малую роль. Аналогичная ситуация существует и для Солнца, у которого гравитационный радиус составляет примерно 1 км, а его действительный радиус почти 700 тыс. км.

**Размеры Вселенной.** Однако так обстоит дело не всегда. В астрономии есть объекты, для которых гравитационная энергия примерно равна энергии их массы покоя и поэтому в них повседневно гравитационная энергия играет очень существенную роль. Примером такого объекта может служить Вселенная в целом.

Среднюю плотность распределения материи во Вселенной можно найти из наблюдений, оценивая массу астрономических объектов и расстояния до них. Точность этих оценок невелика, поскольку, во-первых, имеются большие погрешности в определении расстояний

и, во-вторых, очень трудно учесть массу межзвездного газа и несуществующихся объектов, которые не наблюдаются. В настоящее время считается, что средняя плотность по порядку величины лежит где-то около  $\rho \approx 10^{-25}$  кг/м<sup>3</sup>. Это означает, что в 1 м<sup>3</sup> заключено примерно 100 протонов, т. е. среднее расстояние между ними было бы около 30 см, если бы масса Вселенной была распределена равномерно по ее объему в виде протонов. Можно представить себе эту ситуацию следующим образом. Известно, что электрический заряд протона распределен в объеме с линейными размерами порядка  $10^{-13}$ . Поэтому если бы протон был горошиной диаметром 1 см, то среднее расстояние между протонами, соответствующее их среднему расстоянию во Вселенной, было бы примерно равно двадцати расстояниям от Земли до Солнца.

Подсчитаем, какое значение надо взять для радиуса  $R_0$  шара во Вселенной, чтобы энергия покоя содержащейся внутри него массы была равна гравитационной энергии или, иначе говоря, чтобы радиус этого шара был равен гравитационному радиусу массы, заключенной внутри шара. Поскольку масса этого шара  $M \sim \rho_0 R_0^3$ , ожидаемое условие на основании (30.16) запишется в виде

$$R_0 \approx G \rho_0 R_0^3 / c^2. \quad (30.17)$$

Отсюда следует

$$R_0 \approx \frac{c}{\sqrt{G \rho_0}} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-25}}} \text{ м} \approx 10^{26} \text{ м.}$$

Таким образом, искомый гравитационный радиус равен той величине, которая в настоящее время принимается за радиус Вселенной. Утверждение о конечности размеров Вселенной, которое при определенных условиях следует из общей теории относительности, означает, что все физические процессы замкнуты в конечном объеме и не выходят «наружу». В частности, лучи света не в состоянии покинуть этот объем. С другой стороны, расчеты показывают, что лучи света не в состоянии покинуть область, заключенную внутри гравитационного радиуса, независимо от его абсолютных размеров и, следовательно, ситуация в ней в этом отношении аналогична ситуации в конечной Вселенной.

«Черные дыры». Наиболее важным физическим содержанием понятия гравитационного радиуса является представление о том, что область внутри сферы такого радиуса как бы теряет всякую связь с областью вне этой сферы, за исключением гравитационной связи. Если бы, например, всю массу Земли удалось сосредоточить в шарик диаметром меньше 1 см, то внутренние области этого шарика потеряли бы связь с внешними областями, оказывая на них лишь гравитационное воздействие. Это означает, что свет не смог бы выйти из внутренней области. Во внешнем пространстве эта область проявляется лишь громадными силами тяготения — вблизи «поверх-

ности» такой сферы силы тяготения больше сил тяготения у поверхности Земли примерно во столько раз, во сколько квадрат радиуса Земли больше квадрата ее гравитационного радиуса, т. е. приблизительно в  $(r_3/r_1)^2 = 10^{18}$  раз. Пролетающие вблизи частицы и кванты излучения будут втягиваться внутрь сферы гравитационного радиуса и там исчезать. Поэтому такая область называется «черной дырой».

Имеются ли «черные дыры» во Вселенной? Теоретические расчеты показали, что если масса звезды меньше примерно двух масс Солнца, то силы тяготения ее постепенно сжимают, однако не в состоянии сжать до такой степени, чтобы радиус звезды стал равным ее гравитационному радиусу. Звезда превращается в белого карликса, плотность материи которого весьма велика, а радиус весьма мал. Однако этот радиус все же много больше гравитационного и звезда не в состоянии превратиться в «черную дыру». Если же масса звезды превосходит примерно две массы Солнца, то под действием тяготения она неудержимо сжимается и в определенный момент радиус звезды станет равным гравитационному, а она превратится в «черную дыру».

«Черные дыры» пока еще не открыты, хотя очень многие ученые и не сомневаются в их существовании. Если «черные дыры» будут обнаружены, то это, несомненно, будет крупнейшим научным событием.

Можно также представить себе, что сравнительно небольшая масса, например в несколько тонн, по каким-то причинам оказалась заключенной в таком маленьком объеме, соответствующем формуле (30.16), что превратилась в маленькую «черную дыру». По одной из гипотез предполагается, что некоторое количество таких черных дыр осталось от первоначального сверхплотного состояния Вселенной. Они называются реликтовыми «черными дырами» и также пока не обнаружены в природе.

### 31. Движение планет и комет

**Уравнение движения.** В первом приближении, как это было показано в § 30, можно считать, что Солнце неподвижно, и пренебречь силами взаимодействия между планетами. Обозначим массу планеты  $m$ , массу Солнца  $M$  и будем называть их материальной точкой и центром сил соответственно. Начало системы координат поместим в центр Солнца. Уравнение движения планеты запишется в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (31.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор планеты.

**Уравнение моментов.** Сила, действующая на материальную точку, направлена вдоль радиуса-вектора. Момент этой силы относительно

центра сил равен нулю, и уравнение моментов (22.4) имеет следующий вид:

$$\frac{dN}{dt} = M = [r, F] = 0. \quad (31.2)$$

Следовательно, момент импульса материальной точки относительно центра сил равен постоянной величине как по модулю, так и по направлению:

$$N = [r, mv] = \text{const.} \quad (31.3)$$

**Плоскость движения.** Равенство (31.3) можно переписать в виде

$$m[r, \dot{r}] = \text{const.} \quad (31.4)$$

Отсюда следует, что элементарное перемещение  $d\mathbf{r} = vdt$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$  лежат в плоскости, перпендикулярной  $N$ . Это означает, что движение происходит в одной и той же плоскости, т. е. является плоским движением.

**Второй закон Кеплера.** Он утверждает, что

**отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает за равные промежутки времени равные площади.**

Этот закон является непосредственным следствием закона сохранения момента импульса (31.3). В самом деле, равенство (31.3) можно переписать так:

$$[r, dr] = \frac{N}{m} dt. \quad (31.5)$$

Установим геометрический смысл левой части этого равенства. Как это непосредственно видно на рис. 61, векторное произведение  $[r, dr]$  по абсолютному значению равно удвоенной площади треугольника, построенного на векторах  $r$  и  $dr$ :

$$|[r, dr]| = |r| |dr| \sin(r, dr) = r dr \sin \alpha = r dh = 2dS. \quad (31.6)$$

Вектор  $[r, dr]$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $r$  и  $dr$ . Если взять некоторую элементарную поверхность  $dS$ , то она полностью характеризуется своей величиной и ориентировкой в пространстве. Ее ориентировка в пространстве определяется направлением перпендикуляра к ней. Поэтому представляется естественным характеризовать элемент поверхности вектором  $dS$ , перпендикулярным поверхности и по абсолютному значению равным ее площади. Необходимо лишь условиться о направлении. Оно дается правилом правого винта. Некоторый обход элемента поверхности принимается за положительный, и вектор  $dS$  считается направленным в сторону движения винта, если вращение его головки совпадает с обходом.

Положительным обходом площадки  $[r, dr]$  считается движение от первого слагаемого ко второму, поэтому элемент поверхности выражается формулой  $dS = \frac{1}{2} [r, dr]$  и закон сохранения момента импульса (31.5) можно записать так:

$$dS = \frac{N}{2m} dt. \quad (31.7)$$

Поскольку  $N = \text{const}$ , то, интегрируя обе части этого равенства во времени, получаем

$$S - S_0 = \frac{N}{2m} (t - t_0) \quad (31.8)$$

или

$$\Delta S = \frac{N}{2m} \Delta t.$$

$$(31.8a)$$



61.

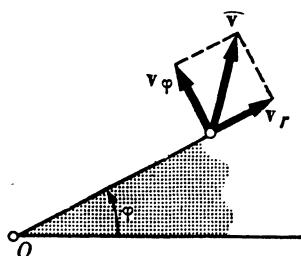
Изображение площади вектором, перпендикулярным поверхности, на которой лежит эта площадь

$$r_r = GM/c^2.$$

Это есть второй закон Кеплера, утверждающий, что за равные промежутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади.

**Первый закон Кеплера.** Он гласит, что все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов.

Для доказательства этого закона нужно найти орбиту. Расчет удобно вести в полярной системе координат, плоскость которой совпадает с плоскостью орбиты. Прежде всего необходимо записать законы сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах. Для этого элементарное перемещение  $dr$  разложим на два:  $(dr)_\varphi$ , перпендикулярное радиусу  $r$  полярной системы координат, и  $(dr)_r$ , по направлению этого радиуса (рис. 62). Первое перемещение обусловлено изменением угла  $\varphi$  при движении, а второе — изменением расстояния  $r$  планеты от начала координат. Единичный вектор, направленный перпендикулярно радиусу  $r$  в сторону возрастания угла  $\varphi$ , обозначим  $e_\varphi$ ,



62.

Разложение вектора скорости в полярной системе координат на две составляющие: вдоль радиуса и перпендикулярно ему

а в сторону возрастания радиуса —  $\mathbf{e}_r$ . Перемещение  $d\mathbf{r}$  можно представить формулой

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\phi (d\mathbf{r})_\phi + \mathbf{e}_r (d\mathbf{r})_r. \quad (31.9)$$

Поскольку  $(d\mathbf{r})_\phi$  есть элементарная дуга окружности радиуса  $r$ , то  $(d\mathbf{r})_\phi = rd\phi$ ; величина  $(d\mathbf{r})_r$  есть изменение абсолютного значения  $r$ , т. е.  $(d\mathbf{r})_r = dr$ . Поэтому (31.9) принимает вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\phi r d\phi + \mathbf{e}_r dr. \quad (31.10)$$

Разделив обе части (31.10) на время перемещения, находим (рис. 62)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e}_\phi r \frac{d\phi}{dt} + \mathbf{e}_r \frac{dr}{dt} = \mathbf{e}_\phi v_\phi + \mathbf{e}_r v_r, \quad (31.11)$$

где  $v_\phi = (rd\phi/dt) = r\dot{\phi}$ ,  $v_r = (dr/dt) = \dot{r}$ . Возведя обе части равенства (31.11) в квадрат и учитывая, что в силу взаимной перпендикулярности векторов  $\mathbf{e}_\phi$  и  $\mathbf{e}_r$ , их скалярное произведение равно нулю:  $(\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r) = 0$ , получаем для квадрата скорости следующее выражение:

$$v^2 = v_\phi^2 + v_r^2 = r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2. \quad (31.12)$$

Подставим в формулу (31.3) выражения для радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r$  и (31.11) для скорости. По правилу получения векторного произведения находим

$$\mathbf{N} = mr^2\dot{\phi} [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi] = \text{const}. \quad (31.13)$$

Вектор  $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi]$  является единичным вектором, перпендикулярным плоскости движения. Он фиксирует направление  $\mathbf{N}$ . Закон сохранения импульса для абсолютного значения  $\mathbf{N}$  в полярных координатах на основании (31.13) имеет следующий вид:

$N = mr^2\dot{\phi} = \text{const.} \quad (31.14)$

Закон сохранения энергии записывается с помощью (31.12) без дополнительных вычислений:

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - G \frac{mM}{r} = \text{const}. \quad (31.15)$$

Получены два уравнения (31.14) и (31.15) с двумя неизвестными функциями  $r(t)$  и  $\phi(t)$ . Их достаточно, чтобы полностью определить движение. Однако нас сейчас интересует не вопрос о том, как проходит движение по времени, а форма траектории. Поэтому исключим из уравнений зависимость от времени. Из уравнения (31.14) следует, что  $\dot{\phi} = N/mr^2$ . Подставив это выражение в уравнение (31.15), исключим из него  $\dot{\phi}$ . Далее представим  $r$  как

сложную функцию от времени:  $r(t) = r[\varphi(t)]$ . Для удобства решения введем вместо  $r$  функцию

$$\rho = 1/r. \quad (31.16)$$

Получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{N}{mr^2} = - \frac{N}{m} \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Подставив это выражение для  $\dot{r}$  и  $1/\rho$  из (31.16) вместо  $r$  в равенство (31.15), находим

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 - G \frac{2m^2 M}{N^2} \rho = \text{const}. \quad (31.17)$$

Дифференцируя это уравнение еще раз по  $\varphi$ , получаем

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \quad (31.18)$$

где  $C = (Gm^2M/N^2) > 0$ . Общее решение уравнения (31.18) хорошо известно:

$$\rho = C + A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (31.19)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, которые надо определить из начальных условий. Правую часть этого равенства можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \rho &= C + A \cos \varphi + B \sin \varphi = \\ &= C + \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \varphi \right) = \\ &= C + \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) = \\ &= C + \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\varphi - \varphi_0) = C \left[ 1 + \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] = \\ &= \frac{1}{p} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \end{aligned} \quad (31.20)$$

где введены обозначения  $p = (1/C) = N^2/Gm^2M$ ,  $e = \sqrt{A^2 + B^2}/C$  и угол  $\varphi_0$  определен равенствами

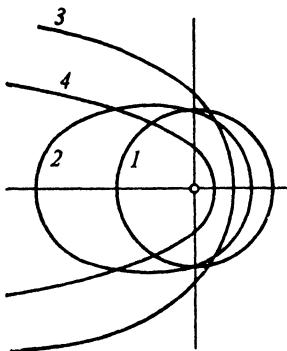
$$\cos \varphi_0 = A / \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \sin \varphi_0 = B / \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Таким образом, уравнение кривой, по которой движется тело (планета), в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\rho} = r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

(31.21)

Из аналитической геометрии известно, что это есть коническое сечение, т. е. кривая в сечении конуса плоскостью. Величина  $p$  называется параметром орбиты, а постоянная  $e$  — эксцентриситетом. Коническое сечение является либо эллипсом ( $e < 1$ ), либо окруж-



63.

Различные возможные траектории движения в поле тяжести точечного тела:

1 — окружность; 2 — эллипс; 3 — парабола; 4 — гипербола

!

*Силу притяжения в каждой точке орбиты можно разложить на две компоненты: тангенциальную по скорости и нормальную перпендикулярно скорости. Тангенциальная компонента обуславливает изменение абсолютного значения скорости планеты, а нормальная — изменение направления скорости.*

ностью ( $e = 0$ ), либо параболой ( $e = 1$ ), либо гиперболой ( $e > 1$ ).

Из формулы (31.21) видно, что расстояние  $r$  до тела принимает минимальное значение  $r_{\min}$  при  $\varphi = \varphi_0$ . Поэтому удобно направить ось полярной системы координат через точку наибольшего приближения тела к центру притяжения. Эта точка называется **перигелием**. Противоположная точка орбиты эллипса называется **афелием**. При указанном выборе оси полярной системы координат в уравнении кривой (31.21) надо положить  $\varphi_0 = 0$  и оно примет еще более простой вид:

$$r = p/(1 + e \cos \varphi). \quad (31.21a)$$

Кривые, описываемые этим уравнением, изображены на рис. 63.

Рассмотрим более подробно движение по эллипсу. На наименьшем удалении  $r_{\min}$  от центра притяжения тело находится при  $\varphi = 0$ , а на наибольшем — при  $\varphi = \pi$ . Поэтому из (31.21a) можно написать:

$$r_{\min} = p/(1 + e), \quad r_{\max} = p/(1 - e). \quad (31.22)$$

В моменты наименьшего и наибольшего удалений радиальная скорость тела  $\dot{r} = 0$ . Поэтому закон сохранения энергии (31.15) в этих точках с учетом (31.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{2m} \left( \frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - G \frac{mM}{r_{\min}} &= \\ = \frac{N^2}{2m} \left( \frac{1}{r_{\max}} \right)^2 - G \frac{mM}{r_{\max}} &= E_0, \end{aligned} \quad (31.23)$$

где через  $E_0$  обозначена полная энергия тела, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий. Значение величины  $p = 1/C$  дано в равенстве (31.18). Подставляя выражения (31.22) в (31.23), находим следующую связь между эксцентриситетом  $e$  и энергией  $E_0$ :

$$e = \left( 1 + \frac{2E_0 N^2}{G^2 m^3 M^3} \right)^{1/2}, \quad (31.24a)$$

$$E_0 = -\frac{G m^3 M^2}{2N^2} (1 - e^2). \quad (31.24b)$$

Формула (31.24б) подтверждает ранее доказанное положение о том, что **связанные состояния возможны только при отрицательной энергии связи, т. е. отрицательной сумме кинетической и потенциальной энергий**. Если полная энергия положительна, то движение в конечной области невозможно.

Частица движется по гиперболе и уходит на бесконечность. В граничном случае, когда полная энергия равна нулю, частица также уходит на бесконечность, но по параболе.

**Третий закон Кеплера.** Этот закон читается так:

**квадраты времени обращения различных планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их эллипсов.**

Для доказательства выпишем равенство (31.8а), связывающее период обращения  $T$  с другими характеристиками движения:

$$S = \frac{N}{2\pi} T, \quad (31.25)$$

где  $S$  — площадь эллипса. Из геометрии известно, что площадь эллипса  $S = \pi ab$ , где  $a$  и  $b$  — его полуоси (рис. 64). Из формулы (31.21) непосредственно получаем следующее выражение для полуосей через эксцентриситет  $e$  и параметр  $p$ :

$$a = p/(1 - e^2), \quad b = p/\sqrt{1 - e^2}. \quad (31.26)$$

Из (31.26) следует, что

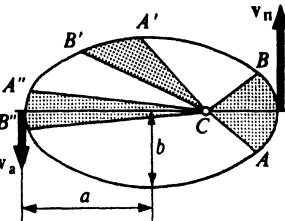
$$b^2 = p^2/(1 - e^2) = pa. \quad (31.27)$$

С другой стороны, учтем связь между  $N$  и  $p$ , указанную в (31.20):

$$N = m \sqrt{GMp}. \quad (31.28)$$

Теперь выразим  $T^2$  из уравнения (31.25) и воспользуемся формулами (31.26) и (31.27):

$$T^2 = \frac{4m^2 S^2}{N^2} = \frac{4m^2 \pi^2 a^2 b^2}{m^2 G M p} = \frac{4\pi^2 a^3}{G M}. \quad (31.29)$$



64.

Движение планеты по эллипсу

!

*Вид кривой, по которой движется тело в поле центральных сил, определяется полной энергией тела.*

?

1 Как доказывается, что движение в поле центральных сил является плоским?

2 Следствием какого закона сохранения является второй закон Кеплера?

3 Какие траектории материальной точки возможны в поле тяготения точечного тела и при каких условиях они осуществляются? В чем состоит метод возмущения?

т. е. квадрат времени обращения планеты зависит только от большой полуоси и пропорционален ее кубу; тем самым третий закон Кеплера доказан.

Эти законы были установлены Кеплером в результате анализа движения планет, что явилось крупнейшим достижением научной мысли и открыло путь к формулировке закона тяготения.

В приведенных выше расчетах центр притяжения считался неподвижным, т. е. масса центрального тела (Солнца) принималась очень большой. Фактически его масса имеет конечную величину, поэтому как рассматриваемое, так и центральное тело движутся вокруг их общего центра масс, т. е. возникает проблема движения двух тел, которая будет проанализирована позднее.

Мы пренебрегали взаимодействием с другими планетами, которое значительно меньше основного принятого во внимание взаимодействия планеты с Солнцем. Существует хорошо разработанный метод учета этих дополнительных взаимодействий. Он называется теорией возмущений, и его суть состоит в следующем.

В качестве исходного движения берется невозмущенное движение, когда все дополнительные взаимодействия считаются отсутствующими. Затем вычисляется изменение в невозмущенном движении, вносимое дополнительным взаимодействием, т. е. определяется возмущение движения. Поскольку дополнительные силы очень малы, возмущения оказываются тоже малыми. Точные значения величины возмущения представляются в виде бесконечного ряда членов. Но эти члены быстро убывают по своему значению и для получения результата с большой точностью бывает обычно достаточно взять один или максимум несколько первых членов этого ряда. Нет необходимости рассматривать методы возмущений, поскольку они дают лишь небольшие поправки к невозмущенному движению. Отметим лишь, что в итоге удается рассчитать движение планет с громадной точностью. Их наблюдение проводится также с очень большой точностью. Согласие между теорией и опытом чрезвычайно хорошее. Чтобы судить о точности вычислений и наблюдений и одновременно указать на один результат, который в рамках теории тяготения Ньютона не удается объяснить, скажем несколько слов о вращении перигелия планет и, в частности, Меркурия.

**Вращение перигелия Меркурия.** В результате взаимодействия с другими планетами и других факторов линия, соединяющая Солнце и точку перигелия орбиты планеты, меняет свою ориентировку в пространстве, вращаясь в направлении движения планеты. Это явление называется вращением перигелия планеты. Величина вращения невелика и измеряется угловыми минутами в столетие. Однако точность расчетов и наблюдений такова, что расхождение даже в несколько секунд в столетие требует объяснения. Наибольшее различие имеется у ближайшей к Солнцу планеты Меркурий. Главный вклад во вра-

щение перигелия Меркурия дает прецессию, аналогичная прецессии оси гироскопа (см. гл. 11). Планеты и Солнце вращаются вокруг общего центра тяжести и также образуют гироскоп, ось которого прецессирует, что обусловливает вращение перигелия. Небольшое вращение перигелия происходит за счет сплющенности Солнца и более точного учета самого движения планеты. Принимая во внимание все факторы, получаем следующий баланс между результатами расчетов и наблюдений:

Причина	Величина вращения перигелия Меркурия за столетие в угловых секундах
Влияние планет:	
Меркурия	$0,025 \pm 0,00$
Венеры	$277,856 \pm 0,68$
Земли	$90,038 \pm 0,08$
Марса	$2,536 \pm 0,00$
Юпитера	$153,584 \pm 0,00$
Сатурна	$7,302 \pm 0,01$
Урана	$0,142 \pm 0,00$
Нептуна	$0,042 \pm 0,00$
Сжатие Солнца	$0,010 \pm 0,02$
Прецессия	$5025,645 \pm 0,50$
<i>Сумма</i>	$5557,18 \pm 0,85$
<i>Наблюдения</i>	$5599,74 \pm 0,41$
<i>Разница между наблюдением и теорией</i>	$42,56 \pm 0,94$

Таким образом, теоретически вращение перигелия Меркурия вычислено с точностью, большей, чем одна угловая секунда в столетие. Примерно с такой же точностью измерено это вращение. Расхождение в  $42'',56$  в столетие между наблюдениями и теорией лежит вне возможных ошибок и требует объяснения. У других планет также имеется разница между теорией и наблюдениями, однако она не является столь вопиющей, как у Меркурия. Например, у Венеры она в столетие составляет около  $8''$ , у Земли — около  $5''$ . Тем не менее и эти небольшие различия требуют объяснения. Классическая теория тяготения оказалась не в состоянии это сделать. Поэтому приходится обратиться к релятивистской теории.

Прежде всего возникает вопрос: не может ли релятивистское изменение массы со скоростью привести к вращению перигелия? Оказывается, может, и это нетрудно рассчитать. Очевидно, что величина релятивистского эффекта должна возрастать со скоро-

стью движения, а ближайшая к Солнцу планета Меркурий имеет максимальную скорость движения вокруг него. Это означает, что максимальное вращение перигелия, обусловленное релятивистским изменением массы, должно быть у Меркурия.

Физическая причина вращения перигелия вследствие изменения массы со скоростью состоит в следующем. Момент импульса  $N$  при движении в поле центральных сил сохраняется как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае. Скорости движения малы в сравнении со скоростью света [ $(v/c)^2 = 10^{-8}$ ] и поэтому относительное изменение массы столь же мало. Воспользуемся методом возмущений, рассматривая движение с постоянной массой как невозмущенное. Момент импульса  $N$  при этом сохраняется. Скорости до центрального тела в перигелии и афелии обозначим соответственно  $v_n$  и  $v_a$ , а расстояния —  $r_n$  и  $r_a$ . Из закона сохранения импульса следует, что  $m_0 r_n v_n = m_0 r_a v_a$ . Однако если принять во внимание зависимость массы от скорости, то это равенство нарушится, поскольку в перигелии скорость больше, чем в афелии (см. рис. 64), а значит, больше и изменение массы, в результате чего момент импульса в афелии будет меньше, чем в перигелии. Но этого не должно быть, поскольку и в релятивистской теории момент импульса должен сохраняться. Поэтому движение должно измениться так, чтобы восстановить справедливость закона сохранения импульса. Для этого орбита как целое должна начать вращаться в направлении вращения планеты с некоторой угловой скоростью. Поскольку расстояние в афелии больше, чем в перигелии, это вращение обуславливает большее изменение скорости в афелии, чем в перигелии, т. е.  $\Delta v_a = -r_a \omega > \Delta v_n = r_n \omega$ . Вследствие этого момент импульса в афелии увеличится больше, чем в перигелии, и закон сохранения импульса снова будет выполняться.

С учетом изменения массы и дополнительного вращения орбиты в целом с угловой скоростью  $\omega$  закон сохранения импульса соблюдается при условии

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(v_n + \Delta v_n)^2/c^2}} (v_n + \Delta v_n) r_n = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v_a + \Delta v_a)^2/c^2}} (v_a + \Delta v_a) r_a, \quad (31.30)$$

где  $\Delta v_n = r_n \omega$ ,  $\Delta v_a = r_a \omega$ .

Из этого равенства можно определить угловую скорость  $\omega$  вращения перигелия. Для этого учтем, что  $(v_n/c) \ll 1$ ,  $(v_a/c) \ll 1$ ,  $(\Delta v_n/v_n) \ll 1$ ,  $(\Delta v_a/v_a) \ll 1$ . Поэтому можно написать

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v_n + \Delta v_n)^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{(v_n + \Delta v_n)^2}{c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v_n^2}{c^2}, \quad (31.31)$$

поскольку отброшенные члены много меньше сохраненного малого члена  $v_n^2/2c^2$ . Аналогичное представление справедливо и для члена,

выражающего момент импульса в афелии. Поэтому уравнение (31.30) записывается в виде

$$\begin{aligned} m_0 v_{\text{n}} r_{\text{n}} + m_0 \Delta v_{\text{n}} r_{\text{n}} + \frac{1}{2} m_0 \frac{v_{\text{n}}^2}{c^2} v_{\text{n}} r_{\text{n}} + \frac{1}{2} m_0 \frac{v_{\text{n}}^2}{c^2} \Delta v_{\text{n}} r_{\text{n}} = \\ = m_0 v_{\text{a}} r_{\text{a}} + m_0 \Delta v_{\text{a}} r_{\text{a}} + \frac{1}{2} m_0 \frac{v_{\text{a}}^2}{c^2} v_{\text{a}} r_{\text{a}} + \frac{1}{2} m_0 \frac{v_{\text{a}}^2}{c^2} \Delta v_{\text{a}} r_{\text{a}}. \end{aligned} \quad (31.32)$$

Здесь первые члены в обеих частях равны в силу закона сохранения момента импульса для невозмущенного движения:  $m_0 r_{\text{n}} v_{\text{n}} = m_0 r_{\text{a}} v_{\text{a}}$ , последние члены пренебрежимо малы в сравнении с предпоследними, поскольку  $(\Delta v_{\text{n}}/v_{\text{n}}) \ll 1$ ,  $(\Delta v_{\text{a}}/v_{\text{a}}) \ll 1$ , и их можно отбросить. Сокращая на общий множитель  $m_0$ , уравнение (31.32) можно окончательно представить следующим образом:

$$\Delta v_{\text{n}} r_{\text{n}} + \frac{1}{2} \frac{v_{\text{n}}^2}{c^2} v_{\text{n}} r_{\text{n}} = \Delta v_{\text{a}} r_{\text{a}} + \frac{1}{2} \frac{v_{\text{a}}^2}{c^2} v_{\text{a}} r_{\text{a}}. \quad (31.33)$$

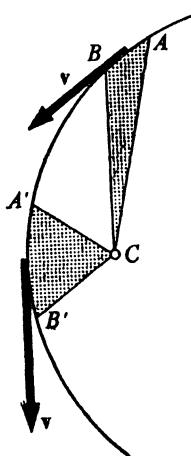
Учтем далее, что согласно закону сохранения момента импульса при невозмущенном движении множители  $v_{\text{n}} r_{\text{n}}$  и  $v_{\text{a}} r_{\text{a}}$  равны друг другу. Поэтому из (31.33) для угловой скорости  $\omega$  вращения перигелия получаем выражение

$$\omega = \frac{v_{\text{n}}^2 r_{\text{n}} - v_{\text{a}}^2 r_{\text{a}}}{2 (r_{\text{a}}^2 - r_{\text{n}}^2) c^2} = \frac{(v_{\text{n}}^2 - v_{\text{a}}^2) v_{\text{a}} r_{\text{a}}}{2 (r_{\text{a}}^2 - r_{\text{n}}^2) c^2}. \quad (31.34)$$

Для Меркурия известны  $r_{\text{n}} \approx 24 \cdot 10^6$  км,  $r_{\text{a}} \approx 36 \cdot 10^6$  км,  $v_{\text{n}} \approx \approx 50$  км/с,  $v_{\text{a}} \approx 34$  км/с, и тогда угловая скорость  $\omega \approx 1,2 \times \times 10^{-14}$  рад/с  $\approx 2'',4 \cdot 10^{-9}$  1/с  $= 7'',4$  1/столетие, поскольку в столетии  $\pi \cdot 10^9$  с. Вращение перигелия других планет, обусловленное изменением массы со скоростью, оказывается еще меньшим.

Таким образом, хотя изменение массы со скоростью и приводит к вращению перигелия, оно в случае Меркурия ответственно лишь за небольшую часть необъясненной величины вращения. Удовлетворительное объяснение вращения перигелия Меркурия дано теорией тяготения Эйнштейна и явилось одним из основных аргументов в пользу общей теории относительности.

**Движение комет.** Кометами называются небесные тела, которые не принадлежат к телам солнечной системы. Они прилетают из удаленных от солнечной системы областей, пролетают по гиперболическим орбитам мимо Солнца и навсегда удаляются за пределы солнечной системы. Правда, известны небесные тела, называемые также кометами, но фактически движущиеся, как планеты, по очень удлиненным эллиптическим орбитам. Хотя они весьма редко появляются в пределах солнечной системы, их правильнее было бы считать планетами.



65.

### Движение кометы по гиперболе

При приближении к центру притяжения скорость кометы увеличивается

К наиболее известным кометам такого рода относится комета Галлея. Движение этих комет происходит по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, и было только что подробно рассмотрено. Поэтому сделаем несколько замечаний лишь о движении истинных комет. Их траекторией является гипербола (рис. 65). Площади, описываемые радиусом-вектором за равные промежутки времени, равны (второй закон Кеплера). Отсюда следует, что при приближении к центру притяжения скорость кометы увеличивается, достигая максимального значения при минимальном расстоянии до притягивающего центра. При этом радиальная скорость (скорость сближения) равна нулю. Полная энергия положительна, поскольку комета прилетает из области, где ее потенциальная энергия равна нулю ( $r \rightarrow \infty$ ).

Наиболее экзотической особенностью комет является наличие «хвостов», которые видны в форме светящегося шлейфа, как бы отталкивающегося от Солнца. «Хвост» состоит из газа, отражающего солнечные лучи. Физической причиной «отталкивания» хвоста от Солнца является давление излучения, которое состоит не только из видимого и невидимого света, но и из потока частиц, главным образом протонов. Именно последние и дают самый большой вклад в «отталкивание».

Кривизна траектории кометы вблизи Солнца зависит от ее скорости. Чем больше скорость, тем меньше кривизна. Если скорость движения кометы окажется весьма значительной, то ее траектория будет близка к прямой линии.

**Отклонение лучей света в поле тяготения Солнца.** В связи с искривлением траекторий материальных тел в поле тяготения возникает вопрос о действии этого поля на лучи света. Если это действие такое, как на материальные тела, то лучи света в поле тяготения не будут распространяться по прямой линии. Такая идея возникла давно, и уже в 1804 г. было рас-

!

**Вращение перигелия орбиты наблюдается у всех планет солнечной системы. Однако скорость вращения увеличивается с уменьшением радиуса орбиты. Поэтому вращение перигелия заметно у Меркурия.**

считано искривление луча в поле тяготения Солнца. При этом луч света представляется как материальная точка, движущаяся со скоростью света. Ясно, что ее пролет вблизи Солнца происходит по гиперболе с очень малой кривизной. В результате этого первоначальное направление движения изменяется на угол  $\Delta\varphi$ , который можно определить (рис. 66).

Для этого надо точно вычислить траекторию материальной точки, что было проделано выше. При этом была получена формула (31.19), применимая ко всем движениям в поле тяготения. Воспользуемся этой формулой:

$$\frac{1}{r} = G \frac{m^2 M}{N^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (31.35)$$

Для света под  $m$  можно понимать произвольную малую массу, которая ему приписывается. В расчете она имеет вспомогательное значение. Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из условий движения светового луча. При таком расположении полярной системы координат, которое изображено на рис. 66, угол  $\varphi$  с течением времени уменьшается, изменяясь от  $\pi$  до  $0$  и затем до отрицательного значения  $-\Delta\varphi$ , равного искомому углу отклонения луча света Солнцем. Ближайшее расстояние луча до Солнца обозначим  $r_0$ . В начальный момент, когда луч света направлен к Солнцу, но находится на очень большом расстоянии, имеем:  $\varphi = \pi$ ,  $(1/r) = 0$ ,  $\cos \varphi = -1$ ,  $\sin \varphi = 0$ . Подставив эти зна-

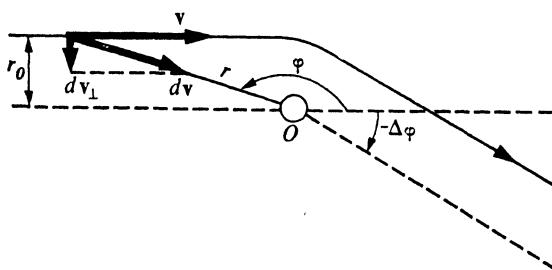
?

1

**Опишите механизм возникновения вращения перигелия планет вследствие релятивистского изменения массы со скоростью. Может ли этот механизм объяснить наблюдаемую величину вращения перигелия Меркурия?**

2

**Чем отличается предсказание отклонения светового луча в поле Солнца классической теории, сделанное более 150 лет назад, от предсказаний общей теории относительности? Какова экспериментальная ситуация в этом вопросе?**



66.

**Расчет отклонения лучей света вблизи Солнца в рамках классических представлений**

чения в (31.35), находим  $A = Gm^2M/N^2$ . Следовательно, равенство (31.35) принимает вид

$$\frac{1}{r} = G \frac{m^2 M}{N^2} (1 + \cos \varphi) + B \sin \varphi. \quad (31.36)$$

Для определения  $B$  разделим эту формулу на  $\sin \varphi$  и учтем, что  $1 + \cos \varphi = 2 \cos^2(\varphi/2)$ ,  $\sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$ . Тогда получим

$$\frac{1}{r \sin \varphi} = G \frac{m^2 M}{N^2} \operatorname{ctg}(\varphi/2) + B. \quad (31.37)$$

Теперь используем еще раз начальное условие, устремляя  $\varphi$  к  $\pi$ . Расстояние, на котором луч света прошел бы вблизи Солнца, если бы на него сила притяжения не действовала, называется **прицельным расстоянием**. В силу малости отклонения оно примерно равно  $r_0$ . На рис. 66 видно, что  $r \sin \varphi = r_0$  при  $\varphi \rightarrow \pi$ , а  $\operatorname{ctg}(\varphi/2) = 0$ . Поэтому из (31.37) при  $\varphi \rightarrow \pi$  находим  $B = 1/r_0$ . В процессе движения момент импульса  $N$  сохраняется. Его значение вычислим в начальный момент времени при  $\varphi = \pi$ . Очевидно,  $N = mc r_0$ , где  $c$  — скорость света. Подставляя эту величину в (31.37), окончательно получаем формулу, описывающую траекторию светового луча:

$$\frac{1}{r \sin \varphi} = G \frac{M}{c^2 r_0^2} \operatorname{ctg}(\varphi/2) + \frac{1}{r_0}. \quad (31.38)$$

Как и следовало ожидать, масса  $m$  из формулы выпала, потому что траектория частицы в заданном поле тяготения не зависит от нее.

После отклонения луч удалится от Солнца на  $r \rightarrow \infty$  в направлении угла  $-\Delta\varphi$ . Из (31.38) определяем этот угол:

$$0 = G \frac{M}{c^2 r_0^2} \operatorname{ctg}\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \frac{1}{r_0}. \quad (31.39)$$

Принимая во внимание, что угол  $\Delta\varphi$  очень мал, можно считать, что  $\operatorname{ctg}(-\Delta\varphi/2) \approx -2/\Delta\varphi$  и, следовательно,

$$\Delta\varphi = 2GM/c^2r_0.$$

(31.40)

Эту же формулу можно получить более просто с помощью следующего прикидочного расчета. В первом приближении можно считать, что траектория луча является прямой линией. Поле тяготения ускоряет фотон в направлении, перпендикулярном его траектории. В результате этого он приобретет перпендикулярную составляющую скорости  $v_\perp$ , а угол отклонения от первоначального направления может быть найден по формуле  $\operatorname{tg}(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi = v_\perp/c$ .

На рис. 66 непосредственно видно, что  $dv_\perp = dv \sin \varphi$ , причем  $dv$  есть изменение скорости за время  $dt$ , направленное по радиус-вектору к центру притяжения. Из (31.1) следует, что

$$dv_\perp = \frac{GM}{r^2} \sin \varphi dt. \quad (31.41)$$

Закон сохранения момента импульса (31.14) имеет вид

$$mr^2\dot{\varphi} = -mr_0c, \quad (31.42)$$

где учтено, что при движении угол  $\varphi$  уменьшается, а момент импульса в правой части равенства вычислен для начального момента времени. Из (31.42) следует, что

$$dt = -\frac{r^2}{r_0c} d\varphi, \quad (31.43)$$

и, следовательно, формула (31.41) записывается в виде

$$dv_{\perp} = -\frac{GM}{r_0c} \sin \varphi d\varphi. \quad (31.44)$$

Полное значение перпендикулярной составляющей скорости, приобретаемой фотоном в процессе движения при изменении угла  $\varphi$  от  $\pi$  до 0, равно

$$v_{\perp} = -\frac{GM}{r_0c} \int_{\pi}^{0} \sin \varphi d\varphi = \frac{2GM}{r_0c}, \quad (31.45)$$

и, следовательно, для определения угла отклонения луча  $\Delta\varphi$  имеем формулу

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi = \frac{v_{\perp}}{c} = \frac{2GM}{r_0c^2}, \quad (31.46)$$

совпадающую с точной формулой (31.40).

Отметим одно побочное обстоятельство: приближенный расчет не обязательно приводит лишь к приближенной формуле. Он может привести и к точной формуле, как это только что случилось, вследствие того, что различные погрешности, которые были допущены в расчете, скомпенсировали друг друга.

Считая, что луч проходит вблизи поверхности Солнца, и полагая в формуле (31.46) величину  $r_0$  равной радиусу Солнца, находим  $\Delta\varphi \approx 0'',87$ . Напомним, что это значение для угла отклонения было получено в 1804 г. Однако проверить его экспериментально долго не представлялось возможным. Затем, когда была создана общая теория относительности, в ней также был обнаружен эффект отклонения луча. Однако величина этого отклонения оказывается равной  $1'',75$ , т. е. в два раза большей. Такое расхождение в предсказаниях очень благоприятно для экспериментальной проверки теорий: какая же из них является правильной. Поэтому результат первого измерения этого эффекта во время солнечного затмения 1919 г. ожидался с всеобщим интересом.

Идея измерения состояла в следующем. Во время солнечного затмения необходимо сфотографировать звезды вблизи диска Солнца. Ввиду отклонения луча их положение на фотопластинке будет соот-

ветствовать кажущемуся удалению этих звезд от диска Солнца. Истинное положение этих звезд известно с большой точностью из повседневных астрономических наблюдений. Поэтому по кажущемуся смещению звезд, зафиксированному на фотопластинке, можно вычислить угол отклонения  $\Delta\varphi$ . Результат оказался, без сомнения, ближе к предсказаниям теории относительности, чем классической теории. Однако точность эксперимента не была достаточно большой, чтобы исключить всякие сомнения. Большинство ученых рассматривали эти наблюдения как подтверждение теории относительности, но были и сомневающиеся. В дальнейшем были проведены другие измерения, которые согласовались с теорией относительности с еще большей точностью.

В настоящее время можно считать установленным, что результат теории относительности подтверждается с точностью, большей 25%, но дискуссия о смысле этого подтверждения пока не окончена. Дело в том, что разница между результатами классической теории и теории относительности формально обусловлена различным соотношением между импульсом и энергией. В классической теории энергия  $E = m_0 v^2/2$ , а импульс  $p = m_0 v$ , т. е.  $E = vp/2$ , в релятивистской же — энергия и импульс для фотона связаны формулой  $E = cp$ . В расчете, который проведен выше, мы применяли к фотону вместо релятивистского классическое соотношение  $E = cp/2$ . Вследствие этого и получился результат, в два раза меньший. Поэтому эксперимент по отклонению лучей света при прохождении вблизи Солнца может быть интерпретирован как подтверждение не теории тяготения Эйнштейна в целом, а релятивистского соотношения между импульсом и энергией, относительно которого ни у кого нет сомнений. Вот почему некоторые дискуссии о значении наблюдения по отклонению лучей света вблизи Солнца еще продолжаются.

**Межпланетные перелеты.** Чтобы преодолеть силу тяготения Земли, начав двигаться с ее поверхности (силой сопротивления воздуха пренебрегаем), необходимо иметь достаточную скорость  $v_2$ , называемую второй космической. Она может быть найдена из закона сохранения энергии

$$mv_2^2/2 = GmM_3/r_3,$$

где  $m$  — масса тела,  $M_3$  и  $r_3$  — соответственно масса и радиус Земли. Учитывая, что  $(GM_3/r_3^2) = g$  есть ускорение силы тяжести у поверхности Земли, получаем

$$v_2 = \sqrt{2gr_3} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Первой космической скоростью  $v_1$  называется скорость, с которой тело может двигаться вокруг Земли по круговой орбите радиуса  $r$ . В случае, если спутник движется на высотах до несколь-

ких сотен километров, то, принимая радиус Земли  $r_3 = 6371$  км, можно приближенно считать, что  $r = r_3$ . Чтобы найти скорость  $v_1$ , произведение центростремительного ускорения на массу тела (спутника) приравняем силе тяготения, действующей на тело (второй закон Ньютона):

$$mv_1^2/r_3 = GmM_3/r_3^2.$$

Отсюда находим

$$v_1 = \sqrt{gr_3} = v_2/\sqrt{2} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Третьей космической скоростью  $v_3$  называется скорость, которая необходима телу, удаленному от Солнца на расстояние радиуса земной орбиты  $R_3$ , для того, чтобы преодолеть силу притяжения Солнца. Эта скорость может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$mv_3^2/2 = GmM_{\text{C}}/R_3,$$

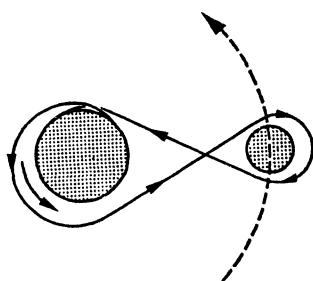
где  $M_{\text{C}}$  — масса Солнца. Отсюда

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_{\text{C}}}{R_3}} = 42 \text{ км/с.}$$

Движение искусственных спутников Земли будет более подробно рассмотрено в следующем параграфе. Здесь заметим лишь, что для сообщения спутнику необходимой скорости желательно использовать линейную скорость вращения Земли и поэтому энергетически более выгодно запускать спутник в направлении вращения Земли, т. е. с запада на восток. Линейная скорость точек экватора около 500 м/с. Отсюда можно заключить, что, выбрав нужное направление (восточное) при запуске искусственных спутников, можно получить выигрыш в скорости в несколько процентов.

Для полета на какое-либо небесное тело надо прежде всего преодолеть силу тяготения Земли, т. е. достигнуть точки, где поля тяготения Земли и данного небесного тела уравновешиваются (пренебрегаем существованием других небесных тел). Требуемая для этого скорость несколько меньше  $v_2$ , но это уменьшение незначительно и при прикидочных оценках его не принимают во внимание.

Типичная траектория полета к Луне и обратно к Земле показана на рис. 67, причем для ясности рисунка не принято во внимание движение Луны в процессе ее облета. Вследствие движения Луны траектория при облете смещается вдоль орбиты Луны. Как видно на рисунке, при таком плане полета полностью используется линейная скорость вращения Земли: при запуске она складывается со



67.

#### Типичная траектория облета Луны

Используя линейную скорость вращения Земли, запуск и посадку спутника производят в восточном направлении

скоростью ракеты, а при возвращении за счет нее уменьшается относительная скорость поверхности Земли и возвратившегося после полета космического аппарата.

При полете к дальним планетам, например Юпитеру, Урану и т. д., необходимо после преодоления притяжения Земли иметь еще примерно третью космическую скорость 42 км/с. Это очень большая скорость. Однако, учитывая, что Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью примерно 30 км/с, ракету запускают в направлении движения Земли вокруг Солнца, и тогда ей необходимо сообщить дополнительную скорость лишь  $(42 - 30) = 12$  (км/с). Простейшая траектория такого полета показана на рис. 68.

Движение происходит по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Положение Земли в момент запуска является перигелием эллипса, поэтому минимальное расстояние  $r_{\min}$  равно радиусу  $R_3$  земной орбиты, а максимальное расстояние — радиусу  $R_n$  орбиты планеты, на которую осуществляется перелет. Эти расстояния определяются по формулам [см. (31.22)]:

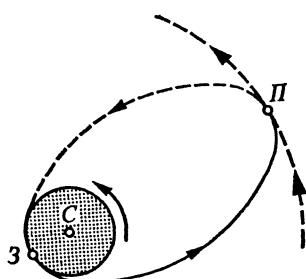
$$R_3 = p/(1 + e), \quad R_n = p/(1 - e).$$

Отсюда находим параметры эллипса:

$$\begin{aligned} e &= (R_n - R_3)/(R_n + R_3), \\ p &= 2R_n R_3/(R_n + R_3). \end{aligned} \quad (31.47)$$

Зная элементы орбиты, можно по закону Кеплера вычислить период вращения тела, движущегося по этой орбите вокруг Солнца:

$$\frac{T^2}{T_3^2} = \left( \frac{R_n + R_3}{2R_3} \right)^3, \quad T = T_3 \left( \frac{R_n + R_3}{2R_3} \right)^{3/2}, \quad (31.48)$$



68.

#### Возможная траектория полета к отдаленной планете $P$ солнечной системы

где  $T_3 = 1$  год — время обращения Земли вокруг Солнца. Время полета к планете  $\tau = T/2$ . Например, для Урана  $R_n \approx \approx 19R_3$  и, следовательно, время полета занимает около 16 лет.

Рассмотренная траектория полета не является самой выгодной по затрате времени. Можно найти такую траекторию, при движении по которой время значительно сокращается. Основная идея состоит в том, чтобы воспользоваться силами притяжения более близких планет и тем самым значительно увеличить среднюю скорость движения и сократить продолжительность полета. Например, в одном из возможных вариантов полета на Уран траектория проходит вблизи Юпитера, благодаря чему скорость значительно увеличивается. В результате полет до Урана будет длиться не 16, а лишь 5 лет. Выбор траекторий полета является довольно сложной математической задачей и проводится на ЭВМ.

### **32. Движение искусственных спутников Земли**

**Отличие законов движения искусственных спутников Земли от законов Кеплера.** Движение искусственных спутников Земли не описывается законами Кеплера, что обуславливается двумя причинами:

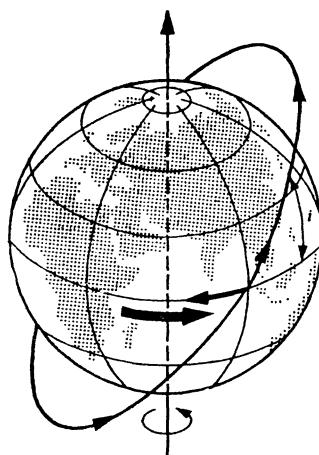
1) Земля не является точно шаром с однородным распределением плотности по объему. Поэтому ее поле тяготения не эквивалентно полю тяготения точечной массы, расположенной в геометрическом центре Земли;

2) земная атмосфера оказывает тормозящее действие на движение искусственных спутников, вследствие чего их орбита меняет свою форму и размеры и в конечном результате спутники падают на Землю.

По отклонению движения спутников от кеплеровского можно вывести заключение о форме Земли, распределении плотности по ее объему, строении земной атмосферы. Поэтому именно изучение движения искусственных спутников позволило получить наиболее полные данные по этим вопросам. Кратко остановимся на них.

Проблема запуска искусственных спутников рассмотрена в главе о движении тел переменной массы.

**Трасса спутника.** Если бы Земля была однородным шаром и не существовало атмосферы, то спутник двигался бы по орбите, плоскость которой сохраняет неизменную ориентацию в пространстве относительно системы неподвижных звезд. Элементы орбиты в этом случае определяются законами Кеплера. Поскольку Земля вращается, то при каждом последующем обороте спутник движется над разными точками земной поверхности. Зная трассу спутника за один какой-либо оборот, нетрудно предсказать его положение во все последующие моменты времени. Для этого необходимо учесть, что Земля вращается с запада на восток с угловой скоростью примерно  $15^\circ$  в час. Поэтому на последующем обороте спутник пересекает ту же широту западнее на столько градусов, на сколько Земля повернется на восток за период вращения спутника (рис. 69).



69.

**Изменение трассы спутника вследствие вращения Земли и отклонения ее формы от шарообразной**

Стрелка вдоль экватора вправо показывает направление движения точек земной поверхности из-за ее вращения вокруг оси. Стрелка влево (на запад) имеет двойкий смысл: она показывает смещение трассы спутника на запад и направление вращения плоскости его орбиты вокруг оси вращения Земли

!

*Ввиду того, что плоскость вращения спутника почти неизменна относительно неподвижных звезд, а Земля вращается, то через один оборот спутник пересечет некоторую фиксированную широту западнее настолько, насколько за один оборот точка земной поверхности на этой широте за счет вращения Земли переместится относительно неподвижных звезд в восточном направлении.*

Из-за сопротивления земной атмосферы спутники не могут длительно двигаться на высотах ниже 160 км. Минимальный период обращения на такой высоте по круговой орбите равен примерно 88 мин, т. е. около полутора часов. За это время Земля поворачивается примерно на  $22,5^\circ$ . На широте  $50^\circ$  этому углу соответствует расстояние в 1400 км. Следовательно, можно сказать, что спутник, период обращения которого  $T = 1,5$  ч, на широте  $50^\circ$  будет наблюдаться при каждом последующем обороте примерно на 1400 км западнее, чем на предыдущем.

Однако такой расчет дает достаточную точность предсказаний лишь для нескольких оборотов спутника. Если речь идет о значительном промежутке времени, то надо принять во внимание движение Земли вокруг Солнца. Поскольку один оборот вокруг Солнца совершается ею за 365 суток, то за одни сутки Земля вокруг Солнца описывает угол примерно в  $1^\circ$  (точнее,  $0,99^\circ$ ) в том же направлении, в каком вращается вокруг своей оси. Поэтому за 24 ч Земля поворачивается относительно неподвижных звезд не на  $360^\circ$ , а на  $361^\circ$ , и, следовательно, совершает один оборот не за 24 ч, а за 23 ч 56 мин. Поэтому трасса спутника по широте смещается на запад не на  $15^\circ$  в час, а на  $(15 + 1/24)^\circ$ . Эта поправка за несколько суток составляет несколько градусов.

Если бы Земля была однородным шаром и не имела атмосферы, то описанный метод подсчета давал бы возможность весьма точно предсказать положение спутника на длительное время вперед. Однако отличие формы Земли от шарообразной и неоднородность ее плотности, а также наличие атмосферы существенно изменяют характер движения спутников.

**Форма Земли.** Уже давно стало ясно, что форма Земли отличается от шарообразной. Первую численную оценку величины этого отклонения дал Ньютона,

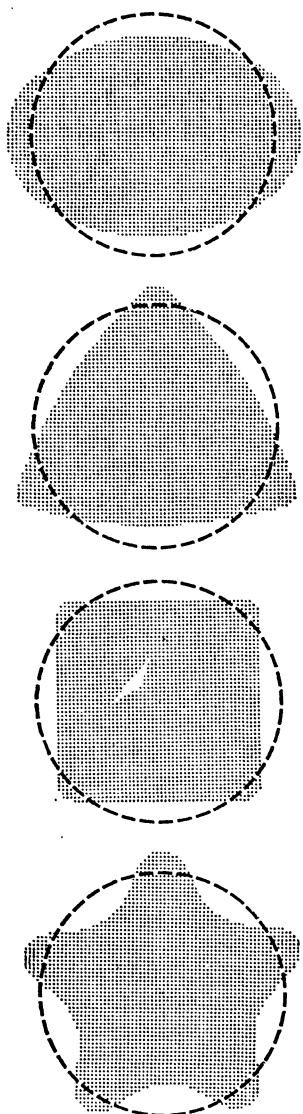
пользуясь законом всемирного тяготения. Идея расчета Ньютона была проста. Представим себе канал, идущий от полюса к центру Земли и оттуда по радиусу к одной из точек экватора. Ясно, что давление в каждом из каналов в центре Земли должно быть одинаковым. Вследствие вращения Земли вес некоторого элемента столба жидкости в канале, идущем к экватору, будет меньше веса соответствующего элемента столба жидкости на таком же расстоянии от центра Земли в канале, идущем к полюсу. Поэтому для равенства давлений в центре Земли необходимо допустить, что канал, идущий к экватору, должен быть длиннее. Это означает, что Земля не является шаром, а сплющена со стороны полюсов. Величина сжатия  $f$  определяется формулой

$$f = (D_s - D_p)/D_s, \quad (32.1)$$

где  $D_s$  — экваториальный,  $D_p$  — полярный диаметр Земли.

Проделав вычисления с учетом только что изложенных соображений, Ньютон получил значение  $f = 1/298$ . (Рекомендуется в качестве упражнения проделать эти вычисления.) Результаты его расчета были опубликованы в 1687 г. В течение всего последующего времени вплоть до настоящих дней сплющенность Земли изучалась экспериментально различными методами. Результаты находились вблизи значения, данного Ньютоном, хотя и несколько отличались. Наиболее широко принятой оценкой сжатия Земли к моменту запуска первых спутников была величина  $1/297,1$ . Наблюдения за движением спутников позволили получить значение этой величины с гораздо большей точностью и надежностью в сравнении с изложенными методами и существенно изменили только что указанную оценку.

Идея заключается в следующем. Если форма Земли отличается от шарообразной, то ее поле тяготения не сводится к полю тяготения материальной точки, помещенной в центре Земли. Если полагать форму Земли известной, то можно рассчитать поле тяготения и траекторию спутника. Эти вычисления в настоящее время проводятся только с помощью ЭВМ. Нам достаточно описать лишь результат. Если учесть сплющенность Земли, то плоскость орбиты уже не сохраняет неизменного положения относительно неподвижных звезд. Она поворачивается вокруг земной оси в направлении, противоположном вращению спутника. Например, если спутник движется вокруг земной оси в восточном направлении (см. рис. 69), то плоскость орбиты вращается в западном направлении. Если, не изменяя плоскости орбиты спутника, изменить направление его вращения на обратное, то и вращение плоскости орбиты изменится на обратное. Угол  $i$  между плоскостями орбиты и экватора (рис. 69) остается постоянным. Если плоскость орбиты спутника проходит через ось вращения Земли, т. е. орбита является строго полярной, то она сохраняет свое положение относительно неподвижных звезд. Скорость вращения плоскости орбиты зависит от степени сжатия Земли



70.

Форма первых гармоник, характеризующих отклонение земной поверхности от сферической

и элементов орбиты. Поэтому, измерив элементы орбиты и скорость вращения ее плоскости, можно вычислить сжатие Земли.

Кроме вращения плоскости орбиты сжатие Земли приводит также к другому эффекту: перигелий орбиты вращается в ее плоскости и вследствие этого перемещается из северного полушария в южное и наоборот. Скорость вращения перигелия зависит от сжатия Земли и угла наклона орбиты. Измерение скорости вращения перигелия также позволило найти численную оценку сжатия Земли, которая согласуется с оценкой сжатия по вращению плоскости орбиты.

Измерения скоростей поворота плоскостей орбит первых спутников привели к выводу, что сжатие Земли заключено между 1/298,2 и 1/298,3. Это означает, что экваториальный радиус Земли больше полярного на 42,77 км, а не на 42,94 км, как это получалось по существовавшей до этого оценке. Таким образом, форма Земли была уточнена на 170 м, что весьма существенно, поскольку геодезические измерения поверхности Земли проводились в то время с точностью до 10 м.

Однако сжатие Земли не является ее единственным отклонением от шарообразной формы. Полное отклонение от шарообразности может быть математически представлено в виде суммы различных регулярных отклонений, называемых гармониками. Сжатие относится ко второй гармонике. Третьей гармоникой является грушевидность, четвертой — квадратообразность и т. д. На рис. 70 показано несколько первых гармоник, сумма которых определяет реальную форму Земли. Можно подсчитать, какие изменения в орбиту спутника вносит каждая из гармоник, и по результатам наблюдений судить о роли каждой из них в образовании формы Земли.

Третья гармоника, характеризующая грушевидность Земли, обусловливает изменение расстояния от перигелия до цент-

ра Земли в зависимости от того, в каком полушарии находится перигелий. При перемещении перигелия из одного полушария в другое его расстояние от центра Земли изменяется. Изучение орбит спутников показало, что грушевидность Земли составляет около 40 м с вытянутостью в сторону северного полюса. Это означает, что поверхность воды океана на северном полюсе на 40 м дальше от плоскости экватора, чем уровень моря в Антарктиде, находящегося примерно под трехкилометровым слоем льда.

Дают свой вклад в изменение элементов орбиты спутника также и следующие гармоники. Их учет позволил с большой точностью определить форму Земли. Ее наиболее существенные особенности сводятся к сжатию и грушевидной асимметрии между северным и южным полушариями.

Следующим важным результатом наблюдений за движением спутников явилось установление формы экватора. Уже до запуска спутников имелись указания на то, что линия экватора не является точной окружностью. Они основывались на том факте, что сила тяготения немного меняется с долготой. Но это не приводит к существенным изменениям орбит спутников, потому что вследствие вращения Земли спутник проходит над всеми долготами и изменения силы тяготения по долготе усредняются. Однако это усреднение происходит посредством небольших ежедневных колебаний положения спутников вдоль их траектории с амплитудой в несколько сотен метров. По этим колебаниям можно сделать заключение об изменении силы тяготения по долготе и о форме экватора. В первом приближении экватор похож на эллипс, большая полуось которого направлена от  $20^{\circ}$  западной долготы к  $160^{\circ}$  восточной, а малая полуось — от  $110^{\circ}$  западной долготы к  $70^{\circ}$  восточной. Разница между величинами этих осей равна примерно 140 м. Однако эта картина также лишь приближенная. Дальнейшие уточнения формы экватора были произведены также по наблюдениям за движением спутников.

**Атмосферное торможение.** Вторым фактором, обуславливающим отклонение движения спутников от законов Кеплера, является трение спутников о земную атмосферу. Плотность воздуха с высотой уменьшается по экспоненциальному закону, т. е. очень быстро. Тем не менее до высот примерно 160 км плотность воздуха такова, что не дает возможности спутникам существовать сколько-нибудь продолжительное время, поскольку на такой высоте они быстро теряют энергию на торможение и падают на Землю. Чем больше высота спутника, тем более продолжительное время он существует.

Общий характер изменения орбиты вследствие торможения состоит в следующем. Наибольшая потеря энергии спутника на торможение происходит в перигелии. Вследствие этого высоты перигелия и афелия уменьшаются, но высота афелия изменяется более значительно, чем перигелия, и поэтому вытянутость орбиты умень-

шается. Скорость движения спутника по орбите увеличивается, а период обращения уменьшается. Орбита спутника в некоторых своих частях может оказаться ниже 160 км, тогда потери энергии на торможение становятся весьма значительными и он по быстро приближающейся к Земле траектории падает на Землю. Однако благодаря наличию защитных покрытий спутник не сгорает и можно с помощью парашюта произвести его мягкую посадку на земную поверхность.

Траекторию спутника с учетом изменения плотности атмосферы по высоте можно рассчитать. Поэтому знание траектории позволяет найти распределение плотности атмосферы. Наряду с этим аппаратура, помещенная на спутнике, дает возможность изучить также и многие другие характеристики околоземного пространства.

**О плотности атмосферы судят главным образом по изменению периода обращения спутника.** Как уже было сказано, вследствие торможения земной атмосферой период обращения спутника (в соответствии с законами Кеплера) уменьшается, а его скорость увеличивается. Это обстоятельство, конечно, не противоречит закону сохранения энергии. Дело в том, что полная энергия спутника слагается из положительной кинетической энергии и отрицательной потенциальной, причем полная энергия является отрицательной. Вследствие торможения высота движения спутника уменьшается, при этом его потенциальная энергия, согласно закону сохранения энергии, расходуется на совершение работы против сил трения и увеличение кинетической энергии спутника. По скорости уменьшения периода обращения спутника можно сделать заключение о плотности атмосферы. В настоящее время имеются очень подробные данные о плотности атмосферы в широком интервале высот и зависимости плотности от различных факторов, полученные с помощью спутников.

### 33. Проблема двух тел

**Приведенная масса.** В рассмотренных ранее случаях движения под действием сил тяготения предполагалось, что масса тела, являющегося источником силы тяготения, много больше массы тела, движение которого анализируется. Вследствие этого более массивное тело можно считать неподвижным и задача сводится к определению движения менее массивного тела в заданном поле. Это проблема одного тела.

Однако такое приближение не всегда возможно, т. е. оно не всегда приводит к пренебрежимо малым ошибкам. Например, в двойных звездах компоненты зачастую имеют примерно равные массы и ни одну из компонент нельзя считать неподвижной. При достаточно точном рассмотрении движения Луны вокруг Земли также надо принять во внимание влияние Луны на движение

Земли и т. д. Поэтому возникает задача учета движения обоих взаимодействующих тел, которая называется проблемой двух тел.

Пусть два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  притягиваются друг к другу силами тяготения. Их уравнения движения в инерциальной системе координат имеют следующий вид (рис. 71):

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \end{aligned} \quad (33.1)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  есть вектор, соединяющий взаимодействующие массы и направленный от  $m_1$  к  $m_2$ .

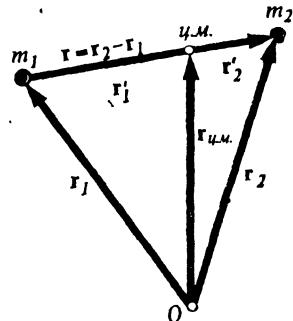
Общий характер движения может быть изучен с помощью соображений, изложенных в § 23, относительно движения системы материальных точек. Ясно, что точка центра масс, положение которой характеризуется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_{\text{ц.м.}} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2), \quad (33.2)$$

движется равномерно и прямолинейно, а массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся таким образом, что в системе центра масс их суммарный импульс равен нулю. Момент импульса этих масс в любой инерциальной системе, в том числе связанной с центром масс, сохраняется.

Однако решение задачи двух тел более удобно не в системе центра масс, а в системе координат, связанной с одним из тел, так как в этом случае задача математически эквивалентна проблеме одного тела. Для этого разделим уравнения (33.1) соответственно на  $m_1$  и  $m_2$  и вычтем из второго первое. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \\ &= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cdot G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (33.3)$$



71.

К решению задачи о движении двух тел

Точка  $O$  — начало отсчета радиус-векторов

!

*Отклонения формы Земли от шарообразной удобно представить в виде гармоник, каждая из которых вносит в орбиту спутника, движущегося вокруг шарообразной Земли, определенные отклонения. Изучая эти изменения в орбите, можно сделать заключение о величине гармоник, которыми они обусловливаются. Зная гармоники, можно найти истинную форму Земли.*

Обозначим сумму обратных масс, стоящую в скобках, через

$$(1/\mu) = (1/m_1) + (1/m_2), \quad (33.4)$$

причем  $\mu$  называется **приведенной массой**. Тогда уравнение (33.3) запишется в виде

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (33.5)$$

Это есть уравнение движения в проблеме одного тела, потому что неизвестной величиной является один вектор  $\mathbf{r}$ . Решение такого рода уравнения было подробно рассмотрено в § 31, 32. Результаты этих параграфов можно непосредственно применить к (33.5), приняв лишь во внимание, что сила взаимодействия определяется массами  $m_1$  и  $m_2$  взаимодействующих тел, а инерционные свойства — приведенной массой  $\mu$ . При решении задачи одно из тел, с которым совпадает начало отсчета радиуса-вектора, принимается за неподвижное, а движение другого тела описывается относительно этого тела.

**Переход в систему центра масс.** После того как в результате решения уравнения (33.5) получено изменение вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , проще всего найти траектории обеих масс в системе центра масс. Если обозначить радиусы-векторы масс  $m_1$  и  $m_2$  через  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$ , взяв за начало отсчета этих векторов точку центра масс, то, по его определению, имеем (рис. 71):

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (33.6)$$

С помощью этих соотношений, зная  $\mathbf{r}(t)$ , можно вычертить  $\mathbf{r}'_1(t)$  и  $\mathbf{r}'_2(t)$ . Траектории обоих тел являются подобными относительно центра масс, причем центр подобия находится в центре масс, а отношение подобия равно отношению масс.

**Приливы.** При движении в неоднородном поле тяготения в телах возникают силы, стремящиеся деформировать их, а также соответствующие деформации.

Пусть три материальные точки массы  $m$  каждая, связанные невесомой пружиной, свободно падают в неоднородном поле тяготения вдоль прямой, соединяющей их центры (рис. 72), а поле тяготения, в котором происходит движение, создается точечной массой. Силы тяготения, действующие на эти точки, не равны друг другу: верхняя точка испытывает меньшую силу тяготения, чем нижняя. Эта ситуация, как изображено на рис. 72, эквивалентна следующей: на все три тела действуют одинаковые силы, равные силе, действующей на среднее тело, и дополнительно на верхнее тело действует сила, направленная вверх, а на нижнее тело — направленная вниз. Следовательно, пружина растянулась. Таким образом,

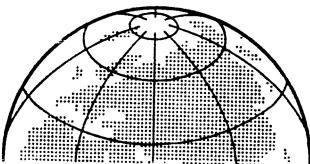
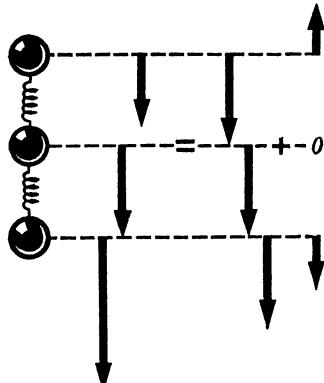
**неоднородное поле тяготения стремится растянуть материальное тело в направлении неоднородности.**

В частности, поле тяготения Солнца растягивает Землю вдоль линии, соединяющей их центры. Аналогичный эффект на Землю оказывает и Луна. Величина эффекта зависит не от силы тяготения, а от скорости изменения этой силы.

Движение планеты вокруг Солнца представляет собой свободное падение. Она не может упасть на Солнце лишь из-за наличия касательной скорости, перпендикулярной линии, соединяющей центры планеты и Солнца. На небесное тело, движущееся в поле тяготения другого тела, действует описанная деформирующая сила.

В поле шарообразного тела сила тяготения на расстоянии  $r$  от центра равна  $F = -GMm/r^2$ , а следовательно скорость изменения этой силы с расстоянием определяется по формуле  $(dF/dr) = 2GMm/r^3$ . Для полей тяготения Солнца и Луны в центре Земли получаются следующие значения (величины отнесены к единице массы):  $2GM_{\text{С}}/r^3 = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ 1/c}^2$  и  $2GM_{\text{Л}}/r^3 = 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ 1/c}^2$ . Таким образом, «деформирующая» сила, действующая на Землю со стороны Луны, превышает соответствующую силу со стороны Солнца более чем в два раза.

Эта «деформирующая» сила не изменяет существенно формы твердой оболочки Земли, поскольку уже маленькие деформации, возникшие в оболочке, в состоянии компенсировать действие этой силы. Однако форма поверхности воды в океанах существенно изменяется: вдоль неоднородности поля тяготения появляются «горбы», а в перпендикулярном направлении уровень океана понижается (рис. 73). Каждый из этих пар «горбов» сохраняет свое положение вдоль линии, соединяющей центр Земли соответственно с центрами Солнца и Луны. Поскольку Земля совершает вращение, «горбы» и



72.

Приливная сила обусловлена изменением силы тяготения с расстоянием

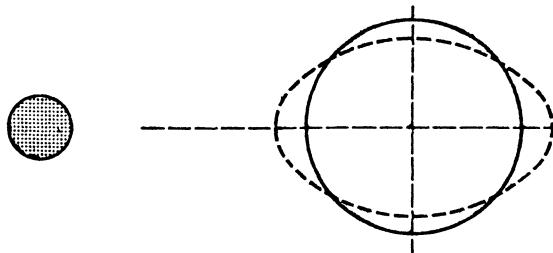
!

Проблема двух тел является простейшей задачей на взаимодействие, «пробным камнем» для теории взаимодействия. В ряде случаев она имеет точное решение. Проблема трех тел значительно сложнее; она не имеет решения в конечном аналитическом виде.

73.

Приливы на Земле, обусловленные полем тяготения Луны

Приливы, вызванные полем тяготения Солнца, в несколько раз меньше



?

- 1 Приведенная масса больше или меньше масс тел или заключена между ними?
- 2 При каких условиях в проблеме двух тел одно из взаимодействующих тел можно считать неподвижным?
- 3 Какой вид имеют траектории взаимодействующих тел в системе центра масс?
- 4 В какой системе координат — инерциальной или неинерциальной — записано уравнение движения в проблеме двух тел, в которое входит приведенная масса?

«впадины» перемещаются по поверхности Земли и вызывают периодическое повышение и понижение уровня воды в океанах. У берегов это явление выражается в приливах и отливах. Расчет показывает, что во время лунных приливов и отливов уровень воды максимально изменяется на 0,56 м. Это было бы справедливо, если бы вся поверхность Земли была покрыта водой. Фактически сложное влияние масс суши при перемещении «горбов» и «впадин» поверхности воды приводит к тому, что уровень ее в различных местах колеблется от нуля до 20 м (приблизительно). Очевидно, что в течение суток в данном месте бывает два прилива и два отлива. Поскольку ось вращения Земли наклонена к плоскости орбиты Луны, величина этих двух приливов не одинакова.

Приливы вызывают движение водяных масс в горизонтальном направлении, которое сопровождается трением и потерей энергии на совершение работы против сил трения. В результате возникает так называемое приливное трение, из-за которого уменьшается скорость вращения Земли. Это трение невелико, и скорость изменяется незначительно. Однако оно может быть и очень существенным. Ясно, что потери энергии на трение имеются при перемещении не только жидких масс, но и деформаций вдоль поверхности тела, поскольку на деформации и при ее последующем устраниении всегда теряется часть

энергии (абсолютно упругих тел не существует). Вследствие приливов, которые возникали в веществе Луны под действием силы тяготения Земли, вращение Луны замедлилось настолько, что она все время обращена одной стороной к Земле. При такой ситуации силы приливного трения отсутствуют.

Приливное трение на Земле уменьшает период ее обращения вокруг оси на  $4,4 \cdot 10^{-8}$  с за оборот, что подтверждается астрономическими наблюдениями. Однако в системе Луна — Земля момент импульса должен сохраняться. Земля вращается в том же направлении вокруг оси, в каком Луна — вокруг Земли. Следовательно, уменьшение момента импульса Земли должно сопровождаться увеличением момента импульса системы Земля — Луна при движении вокруг их общего центра масс. Момент импульса системы Земля — Луна

$$M = \mu v r, \quad (33.7)$$

где  $\mu$  — приведенная масса Земли и Луны, определяемая формулой (33.4),  $r$  — расстояние между ними. Считая их орбиты круговыми, можно написать

$$Gm_3 m_{\text{Л}} / r^2 = \mu v^2 / r. \quad (33.8)$$

Из (33.7) и (33.8) следует:

$$r = M^2 / Gm_3 m_{\text{Л}} \mu; \quad v = Gm_3 m_{\text{Л}} / M. \quad (33.9)$$

С увеличением  $M$ , обусловленным приливным трением, возрастает расстояние  $r$  между Землей и Луной и уменьшается скорость вращения Луны вокруг Земли. Скорость увеличения расстояния в настоящее время составляет примерно 0,04 см/сут. Хотя она и мала, но за несколько миллиардов лет составляет величину, сравнимую с современным расстоянием между Землей и Луной.

# Глава 8

## ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

- 
- 34. Свойства электромагнитных полей
  - 35. Движение в стационарном магнитном поле
  - 36. Движение в стационарном электрическом поле
  - 37. Дрейф заряженных частиц
  - 38. Адиабатическая инвариантность магнитного момента
  - 39. Движение заряженной частицы в поле электромагнитной волны
  - 40. Движения в переменном электрическом и постоянном магнитном полях
  - 41. Ускорители заряженных частиц
- 

Электромагнитные силы имеют определяющее влияние на движение заряженных частиц в областях, пространственные масштабы которых больше размеров ядра, но меньше астрономических размеров. В субатомных масштабах проявляются сильные (ядерные) и слабые взаимодействия, а в астрономических — гравитационные.

### 34. Свойства электромагнитных полей

Потенциальность электростатического поля. Как известно, на точечный заряд  $e$ , находящийся в точке электрического поля с напряженностью  $E$ , действует сила

$$F = eE. \quad (34.1)$$

В задачу механики входит изучение движения заряженных частиц в заданном поле. Вопрос о том, как это поле создается, рассматривается в теории электричества. Однако для выяснения некоторых важных свойств этих сил необходимо сделать здесь несколько замечаний.

Сила взаимодействия двух точечных зарядов  $e_1$  и  $e_2$ , расположенных в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, дается законом Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad (34.2)$$

где  $\epsilon_0 = (1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$  Ф/м. Эта сила изменяется по такому же закону обратной пропорциональности квадрату расстояний,

как и сила тяготения в законе Ньютона (см. § 30). В § 27 было доказано на примере тяготения, что центральные силы, зависящие только от расстояния, являются всегда потенциальными и поэтому все ранее приведенные вычисления и рассуждения можно применить к силе электрического взаимодействия двух точечных зарядов.

Будем считать, что  $e_1$  есть неподвижный заряд, действующий на заряд  $e_2$  с силой, определяемой формулой (34.2). Здесь имеется лишь одно отличие от формулы (27.30), описывающей притяжение: в случае закона Кулона на заряд  $e_2$  со стороны заряда  $e_1$  может действовать как сила притяжения (когда знаки этих зарядов различны), так и сила отталкивания (когда знаки одинаковы). Формулу (34.2) с учетом направления действия силы можно записать совершенно аналогично (27.30а):

$$\boxed{F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},} \quad (34.2a)$$

где  $\mathbf{r}_{12}$  — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда  $e_1$  к заряду  $e_2$ ;  $\mathbf{F}_{12}$  — вектор силы, действующей на  $e_2$  со стороны  $e_1$ . Если заряды  $e_1$  и  $e_2$  имеют одинаковый знак, то их произведение положительно ( $e_1 e_2 > 0$ ) и, следовательно, направления  $\mathbf{F}_{12}$  и  $\mathbf{r}_{12}$  совпадают, т. е. эта сила действует как сила отталкивания. В случае разноименных зарядов  $e_1 e_2 < 0$  и сила  $\mathbf{F}_{12}$  направлена противоположно вектору  $\mathbf{r}_{12}$ , т. е. является силой притяжения. Поэтому знак минус в формуле (34.2а) отсутствует, поскольку он автоматически учитывается знаками зарядов  $e_1$  и  $e_2$ . Рассуждая точно так же, как в § 27, но используя для силы вместо (27.30) формулу (34.2), можно потенциальную энергию заряда  $e_2$ , находящегося в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , представить в виде

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = e_2 \varphi(\mathbf{r}),} \quad (34.3)$$

где

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1}{r}} \quad (34.3a)$$

называется потенциалом электрического поля, созданным зарядом  $e_1$  в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ .

Сила определяется через потенциальную энергию по формулам (27.29). Поэтому на основании (34.3) можно написать следующие

<sup>8</sup> Механика и теория относительности

выражения для компонент силы, действующей на заряд  $e_2$ :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -e_2 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_y = -e_2 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad F_z = -e_2 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (34.4)$$

Сравнивая эти формулы с равенством (34.1), находим следующую связь между напряженностью электрического поля и потенциалом:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (34.5)$$

Заметим, что эти выражения справедливы лишь в случае полей, постоянных по времени. Если поля зависят от времени, то надо принять во внимание закон электромагнитной индукции Фарадея, согласно которому электрическое поле создается не только электрическими зарядами, но и изменением магнитного поля. Соответствующие члены должны быть добавлены в правые части равенств (34.5). В этом случае электрическое поле перестает быть потенциальным, т. е. работа в нем зависит не только от начальной и конечной точек пути, но и от самого пути. Однако сила, действующая на заряд, по-прежнему определяется формулой (34.1).

**Сила Лоренца.** Со стороны магнитного поля, индукция которого  $B$ , на точечный заряд  $e$  действует сила

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (34.6)$$

называемая силой Лоренца. Она направлена перпендикулярно скорости, т. е. смещению точки. Следовательно, ее работа равна нулю. Эта сила изменяет лишь направление скорости, но не изменяет ее абсолютного значения. Последнее может произойти лишь в результате действия электрического поля.

**Уравнение движения.** Полная сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, слагается из сил (34.1) и (34.6). Поэтому уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\{\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]\}. \quad (34.7)$$

Оно справедливо как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае, но тогда под  $\mathbf{p}$  надо понимать релятивистский импульс.

### 35. Движение в стационарном магнитном поле

**Неизменность абсолютного значения скорости.** Как было отмечено выше в связи с формулой (34.6), магнитное поле не изменяет абсолютного значения скорости движущегося заряда. Это утверждение математически доказывается следующим образом.

Уравнение движения в нерелятивистском случае имеет вид

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (35.1)$$

где  $m_0$  — масса покоя частицы. Умножая обе части (35.1) скалярно на  $\mathbf{v}$ , получаем

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} = e([\mathbf{v}, \mathbf{B}], \mathbf{v}) = 0, \quad (35.2)$$

где учтено, что смешанное произведение двух параллельных векторов, стоящее в правой части, равно нулю. Из (35.2) следует

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v^2}{2} \right) = 0 \quad (35.3)$$

и, значит,

$$\boxed{v^2 = \text{const}}, \quad (35.4)$$

что и требовалось установить.

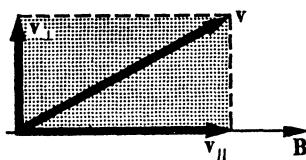
В случае релятивистских скоростей неизменной остается релятивистская кинетическая энергия частицы. Для доказательства удобно исходить из (28.3), в которую входит сила Лоренца. Из равенства нулю правой части (28.3) следует

$$\boxed{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const.}} \quad (35.5)$$

Это означает постоянство релятивистской кинетической энергии, следовательно, абсолютного значения скорости. Поэтому можно сказать, что **утверждение о постоянстве абсолютного значения скорости частицы при движении в магнитном поле справедливо как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае.**

**Движение в однородном магнитном поле.** При рассмотрении движения заряда в магнитном поле удобно скорость  $\mathbf{v}$  представить в виде суммы скоростей параллельно магнитному полю  $\mathbf{v}_{||}$  и перпендикулярно ему  $\mathbf{v}_{\perp}$  (рис. 74):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{||}. \quad (35.6)$$



74.

Разложение вектора скорости заряда, движущегося в магнитном поле, на две составляющие: вдоль индукции  $\mathbf{B}$  магнитного поля и перпендикулярно ей

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}.$$

!

Поскольку сила, действующая на заряд со стороны магнитного поля, перпендикулярна скорости, эта сила изменяет лишь ее направление, но не изменяет абсолютного значения скорости. Следовательно, эта сила не производит работы.

Сила Лоренца, действующая на заряд, равна

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel, \mathbf{B}] = e[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] + e[\mathbf{v}_\parallel, \mathbf{B}] = e[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}], \quad (35.7)$$

где учтено, что составляющая силы Лоренца вдоль магнитного поля равна нулю, т. е.

$$\mathbf{F}_\parallel = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]_\parallel = 0; \quad (35.7a)$$

составляющая, перпендикулярная магнитному полю,

$$\mathbf{F}_\perp = e[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] \quad (35.7b)$$

зависит лишь от перпендикулярной составляющей скорости.

В нерелятивистском случае уравнения движения частицы для параллельной и перпендикулярной составляющих ее скорости имеют вид:

$$a) m_0 \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = 0; \quad b) m_0 \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = e[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}]. \quad (35.8)$$

Из (35.8a) следует

$$\mathbf{v}_\parallel = \text{const.} \quad (35.9)$$

Это означает, что при движении в однородном магнитном поле, т. е. в поле, величина и направление которого во всех точках одни и те же, составляющая скорости вдоль поля постоянна. Таким образом, в направлении, параллельном вектору  $\mathbf{B}$ , частица движется так, как если бы поля не было вообще.

Для анализа движения перпендикулярно магнитному полю рассмотрим уравнение (35.8b). Перепишем равенство (35.4) с учетом (35.6) в виде

$$v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 = \text{const}, \quad (35.10)$$

откуда в силу (35.9) имеем

$$v_\perp^2 = \text{const.} \quad (35.11)$$

Таким образом, при движении в однородном магнитном поле сохраняется неизменным абсолютное значение не только полной скорости, но и ее перпендикулярной составляющей.

Посмотрим более внимательно на уравнение (35.8б). Угол между векторами  $v_{\perp}$  и  $B$  остается постоянным и равным  $\pi/2$ . Абсолютные значения  $v_{\perp}$  и  $B$  не изменяются. Сила в правой части (35.8б) перпендикулярна скорости и постоянна по абсолютному значению. Следовательно, это уравнение описывает движение с постоянным ускорением, направленным все время перпендикулярно скорости, т. е. движение по окружности. Левая часть (35.8б) выражает произведение массы частицы на центростремительное ускорение  $v_{\perp}^2/r$ , где  $r$  — радиус окружности, а правая часть — центростремительную силу  $|e| v_{\perp} B$ . Поэтому можно записать

$$m_0 v_{\perp}^2/r = |e| v_{\perp} B. \quad (35.12)$$

Это уравнение содержит в себе полную характеристику движения заряженной частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю.

Направление вращения зависит от знака заряда. Из уравнения (35.8б) можно заключить, что направление вращения отрицательного заряда связано с направлением магнитного поля  $B$  правилом правого винта, а положительного заряда — правилом левого винта (рис. 75).

Из уравнения (35.12) получаются следующие выражения для угловой частоты вращения и радиуса орбиты:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(2\pi r/v_{\perp})} = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{|e| B}{m_0};$$

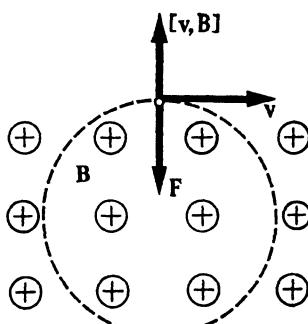
$$r = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{m_0 v_{\perp}}{|e| B}. \quad (35.13)$$

Полное движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле слагается из равномерного движения вдоль

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

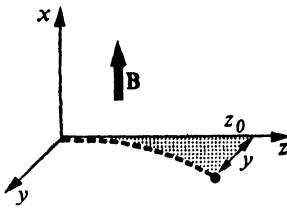
?

- 1 Какое свойство сил, действующих на заряд со стороны магнитного поля, обуславливает неизменность абсолютного значения скорости заряда при движении в этом поле?
- 2 Чем определяются параметры спирали, по которой движется заряд в однородном магнитном поле?



75.

К определению направлению вращения отрицательно заряженной частицы в магнитном поле индукции  $B$



76.

**Траектория движения заряженной частицы в поперечном магнитном поле**

?

- 1 | От чего зависит направление вращения заряда в магнитном поле!
- 2 | Чем отличаются движения заряда в однородном магнитном поле в релятивистском и нерелятивистском случаях?

!

**Вид магнитного поля выбирается не произвольно, а лишь таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла. Этот вопрос рассматривается в курсе электричества и магнетизма.**

поля и вращения в плоскости, перпендикулярной ему. Это означает, что частица движется по спирали, причем ее шаг  $l$  зависит от параллельной составляющей скорости  $v_{||}$  и периода вращения  $T$  по окружности, т. е.

$$l = v_{||} T = v_{||} \cdot 2\pi/\omega. \quad (35.14)$$

В случае больших скоростей движение остается без изменения. Формулы (35.12) и (35.13) также сохраняют свой вид, но под  $m$  в них следует понимать релятивистскую массу  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , где  $m_0$  — масса покоя частицы. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что ввиду постоянства скорости при движении в однородном магнитном поле релятивистское уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = e [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \quad (35.15)$$

принимает вид

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (35.16)$$

т. е. становится полностью эквивалентным нерелятивистскому уравнению (35.1), но с заменой массы покоя  $m_0$  на релятивистскую. Поэтому все последующие рассуждения и формулы остаются справедливыми, но вместо массы покоя  $m_0$  надо использовать релятивистскую массу  $m$ .

**Движение в поперечном неоднородном магнитном поле.** В общем виде эта задача достаточно сложна, и мы ограничимся лишь случаем, когда заряженная частица движется, не сильно отклоняясь от прямолинейной траектории, все время приблизительно перпендикулярно магнитному полю, которое постоянно по направлению, меняется по величине. Пусть оно задается формулами (рис. 76):

$$B_x = B(z), \quad B_y = B_z = 0. \quad (35.17)$$

Будем считать, что частица движется вдоль оси  $z$ . В этом же направлении изменяется по произвольному закону ве-

личина магнитного поля  $B(z)$ . В момент  $t = 0$  частица находится в начале координат и имеет скорость  $v$  в сторону положительных значений оси  $z$ . Как непосредственно видно, сила Лоренца в этом случае все время действует в плоскости  $(y, z)$  и, следовательно, движение частицы совершается в этой плоскости. Рассматриваются лишь малые отклонения частицы от оси  $z$ . Это означает, что скорость вдоль оси  $z$  много больше, чем скорость вдоль оси  $y$ :

$$(v_y/v_z) \ll 1. \quad (35.18)$$

Поэтому постоянную в магнитном поле скорость  $v$  можно представить в виде

$$v = \sqrt{v_z^2 + v_y^2} = v_z \left(1 + \frac{v_y^2}{v_z^2}\right)^{1/2} \approx v_z + \frac{1}{2} v_z \frac{v_y^2}{v_z^2} + \dots, \quad (35.19)$$

где произведено разложение квадратного корня в ряд и сохранен лишь первый по  $(v_y^2/v_z^2)$  член разложения. Отсюда видно, что с точностью до малых величин  $[(v_y^2/v_z^2) \ll 1]$  скорость частицы вдоль оси  $z$  не изменяется, т. е.

$$v = v_z = \text{const}. \quad (35.20)$$

Теперь распишем уравнение движения (35.1) в координатах, воспользовавшись формулой (5.18) для векторного произведения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = ev_z B, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -ev_y B. \quad (35.21)$$

Ввиду малости  $v_y$  в сравнении с  $v_z$  сила в уравнении для  $z$ -й координаты много меньше силы в уравнении для  $y$ -й координаты. Поэтому, учитывая (35.20), можно силу в правой части третьего уравнения (35.21) считать равной нулю и записать его в виде  $m(d^2z/dt^2) = 0$ .

Поэтому, задав начальные условия:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0, \\ (dx(0)/dt) &= 0, & (dy(0)/dt) &= 0, & (dz(0)/dt) &= v, \end{aligned} \quad (35.22)$$

для  $x(t)$  и  $z(t)$  получим следующие выражения:

$$x(t) = 0, \quad z(t) = vt, \quad (35.23)$$

а используя формулы

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dz} v, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dz^2} v^2, \quad (35.24)$$

уравнение для  $y$  можно переписать в виде

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{e}{mv} B(z). \quad (35.25)$$

Решение этого уравнения после двух последовательных интегрирований имеет вид

$$y(z_0) = (e/mv) b, \quad (35.26)$$

где

$$b = \int_0^{z_0} d\xi \int_0^{\xi} B(\eta) d\eta = \int_0^{z_0} (z_0 - \eta) B(\eta) d\eta \quad (35.27)$$

есть постоянная прибора длиной  $z_0$ , через который пролетает заряженная частица. Эта постоянная зависит от конфигурации поля и является известной величиной. Измерив отклонение  $y(z_0)$  и зная скорость  $v$  движения частицы, можно найти отношение  $e/m$ . Именно таким способом было определено отношение заряда к массе электрона в одном из самых ранних измерений этого отношения.

### 36. Движение в стационарном электрическом поле

**Закон сохранения энергии.** Постоянное по времени электрическое поле является потенциальным. Его напряженность выражается через потенциал  $\varphi$  с помощью соотношений (34.5), а потенциал  $\varphi$  связан с потенциальной энергией равенством (34.3). Эти формулы были установлены для поля точечного заряда. В силу того, что поле нескольких точечных зарядов равно сумме полей отдельных зарядов (принцип суперпозиции), они справедливы для любого электростатического поля, поскольку последнее порождается электрическими зарядами. Поэтому уравнение движения частицы, имеющей массу  $m_0$  и заряд  $e$ , в электростатическом поле, потенциал которого  $\varphi$ , имеет следующий вид:

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} = -e \left( \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (36.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость заряда. Поступая точно так же, как при переходе от (27.11) к (27.28), получаем закон сохранения энергии при движении заряда в электростатическом поле:

$$m_0 v^2 / 2 + e\varphi = \text{const.} \quad (36.2)$$

Пусть заряд первоначально поконится, а затем проходит поле с разностью потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1 = U$ , приобретая скорость  $v$ . На основании (36.2) можно записать

$$m_0 v^2 / 2 = |e| U. \quad (36.3)$$

Отсюда находим скорость движения заряда:

$$v = \sqrt{2|e|U/m_0}. \quad (36.4)$$

Для электропа получаем

$$v \approx 6 \cdot 10^5 \sqrt{U} \text{ м/с} = 600 \sqrt{U} \text{ км/с.} \quad (36.5)$$

Это означает, что при прохождении разности потенциалов в 1 В электрон приобретает скорость примерно 600 км/с.

В атомной физике энергию принято измерять в электронвольтах. Один электронвольт есть энергия, приобретаемая частицей с зарядом, равным по абсолютному значению заряду электрона, при прохождении разности потенциалов в 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.} \quad (36.6)$$

Для вывода закона сохранения энергии в случае больших скоростей, необходимо воспользоваться релятивистским уравнением движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = eE = - \operatorname{grad} \varphi. \quad (36.7)$$

Тогда, поступая так же, как при переходе от (28.1) к (28.4), получим следующее равенство:

$$\boxed{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi = \text{const.}} \quad (36.8)$$

**Движение в продольном поле.** Пусть ось  $z$  параллельна силе, действующей на заряд со стороны электростатического поля. Скорость частицы также направлена вдоль оси  $z$ , а ее значение в каждой точке может быть определено по закону сохранения энергии, т. е. известно  $v = v(z)$ . Это дает возможность найти также зависимость положения частицы от времени  $z(t)$ , поскольку

$$dz/dt = v(z). \quad (36.9)$$

Стоящая в правой части этого уравнения функция (скорость) известна. Поэтому если точка в момент  $t_0$  имеет координату  $z_0$ , то в момент  $t$  она будет иметь координату  $z$ , причем из (36.9) имеем

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{v(z)} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (36.10)$$

Вычислив интеграл в левой части, мы получим в неявном виде зависимость  $z(t)$ . Например, в перелятивистском случае, когда закон сохранения энергии записывается в виде (36.2), находим

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{2[E_0 - e\varphi(z)]/m}} = t - t_0, \quad (36.11)$$

где  $E_0$  есть сумма кинетической и потенциальной энергий, которая при движении сохраняет свое значение. Знак корня должен быть таким, чтобы соответствовать знаку скорости при выбранном направлении положительных значений оси  $z$ .

Совершенно аналогично рассматривается движение и в релятивистском случае, надо лишь при вычислении скорости пользоваться формулой не (36.2), а (36.8). Принципиальных различий это в решение задачи не вносит.

**Движение в поперечном поле.** Пусть начальная скорость частицы направлена вдоль оси  $z$ , а электрическое поле — вдоль оси  $x$ . В результате частица описывает некоторую траекторию в плоскости  $(x, z)$ .

Характер движения частицы в этом случае существенно различен в релятивистском и нерелятивистском случаях.

В нерелятивистском случае движение можно представить состоящим из двух независимых движений: 1) вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью, равной начальной  $v_0$ , и 2) вдоль оси  $x$  под действием силы со стороны электрического поля с начальной скоростью в этом направлении, равной нулю. Таким образом, в момент  $t$  координата частицы равна  $z = v_0 t$ , а координата  $x$  может быть найдена по формулам, которые только что были получены для движения в продольном электрическом поле, поскольку движения вдоль осей  $x$  и  $z$  между собой никак не связаны.

В релятивистском случае такое простое рассмотрение движения, как состоящего из двух независимых движений во взаимно перпендикулярных направлениях, невозможно. Это обусловливается несовпадением направления ускорения и силы (см. § 21), вследствие чего сила, действующая вдоль оси  $x$ , вызывает ускорение также и вдоль оси  $z$  и движения вдоль осей  $x$  и  $z$  оказываются взаимно зависимыми. Формулы значительно усложняются. Поэтому ограничимся лишь сделанным замечанием, характеризующим принципиальную сторону релятивистского движения.

**Случай малого отклонения.** Предположим, что траектория частицы мало отличается от прямой линии, т. е. радиус кривизны траектории много больше ее длины. Пусть электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ , а магнитное поле отсутствует (рис. 77):

$$E_y = E_z = 0, \quad E_x = E(z).$$

причем абсолютное значение вектора  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, изменяется вдоль оси  $z$ , т. е.  $E = E(z)$ . Уравнения движения и начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2x}{dt^2} &= eE(z), \quad m_0 \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m_0 \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \\ x(0) = y(0) = z(0) &= 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0, \quad \frac{dz(0)}{dt} = v. \end{aligned} \tag{36.12}$$

При решении этой задачи можно воспользоваться теми же соображениями и преобразованиями переменных, которые были описаны в связи с уравнениями (35.21). Разница состоит лишь в том, что теперь вместо (35.25) получается уравнение

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{e}{mv^2} E(z), \quad \frac{dx(0)}{dz} = 0, \quad x(0) = 0. \quad (36.13)$$

Решение полностью аналогично формуле (35.26):

$$x(z_0) = ea/mv^2, \quad (36.14)$$

где

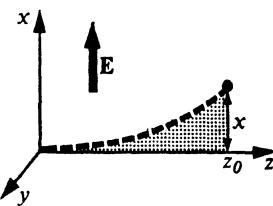
$$a = \int_0^{z_0} d\xi \int_0^\xi E(\eta) d\eta = \int_0^{z_0} (z_0 - \eta) E(\eta) d\eta \quad (36.15)$$

зависит только от конфигурации электрического поля.

### 37. Дрейф заряженных частиц

**Дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях.** В § 35 и 36 было рассмотрено движение заряженных частиц при наличии либо электрического, либо магнитного постоянного по времени поля. Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, то движение значительно усложняется. Возьмем простейший случай, когда эти поля перпендикулярны друг другу, причем их величина такова, что радиус кривизны траектории частицы много меньше линейных размеров области движения, т. е. магнитное поле достаточно велико. Следовательно, частица в области движения совершает большое количество оборотов. При этих обстоятельствах возникает явление дрейфа заряженных частиц.

Пусть имеются однородные скрещенные поля ( $E \perp B$ ), изображенные на рис. 78. Общий характер движения может быть выяснен с помощью чисто качественных соображений без решения уравнений. Будем для определенности считать заряд



77.

Траектория движения заряженной частицы в поперечном электрическом поле

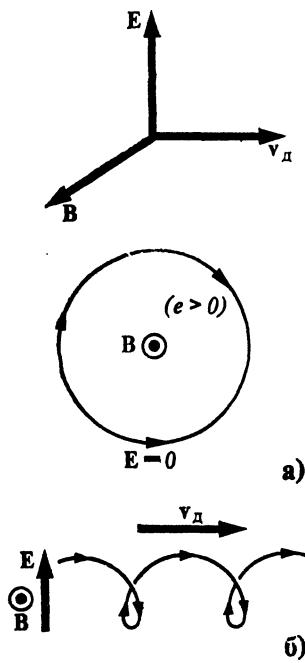
?

1 | Можете ли Вы записать закон сохранения энергии при движении заряда в стационарном электрическом поле? Чем отличается в заданном поле движение зарядов различных знаков?

2 | Что такое электронволты? Можно ли пользоваться этой единицей энергии, если за систему единиц принята СИ! Что такое внесистемные единицы?

!

Электрическое поле потенциально и для него можно записать закон сохранения энергии. После этого для решения задачи о движении заряженных частиц остается выполнить одно интегрирование.



78.

Дрейф заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях

!

**Дрейф заряда в постоянном магнитном поле является следствием изменения радиуса кривизны траектории, происходящего из-за изменения энергии частицы, обусловленного наличием постоянного электрического поля.**

частицы положительным ( $e > 0$ ). В отсутствие электрического поля в постоянном магнитном поле частица движется по окружности с постоянной скоростью  $v$  (рис. 78, а). При наложении электрического поля, перпендикулярного магнитному, скорость частицы становится переменной. При смещении в направлении действия электрической силы  $F_e$  ее скорость возрастает, а радиус кривизны траектории частицы увеличивается (верхние полуокружности на рис. 78, б). После изменения направления скорости на обратное частица движется против электрической силы, вследствие чего ее скорость, а следовательно, и радиус кривизны траектории уменьшаются (нижние полуокружности на рис. 78, б). Движение с малым радиусом кривизны происходит на меньшем участке траектории, в результате чего за один полный оборот частица смещается в направлении, перпендикулярном как электрическому, так и магнитному полю. Это движение называется дрейфом.

Дрейф в скрещенных электрических и магнитных полях не зависит от знака заряда. Если заряд частицы отрицателен ( $e < 0$ ), то направление вращения частицы в магнитном поле меняется на обратное, т. е. на рис. 78, а частица должна была бы вращаться не по часовой стрелке, а против нее. Направление силы со стороны электрического поля также изменится на обратное, т. е. вниз на рис. 78, б. Поэтому в нижней части траектории радиус кривизны будет больше, чем в верхней, а дрейф происходит в ту же сторону, что и при положительном знаке заряда.

Дрейф можно представить себе как движение по окружности вокруг центра, который смещается со скоростью дрейфа  $v_d$ . Для ее вычисления необходимо решить уравнение движения

$$m_0 \frac{dv}{dt} = eE + e[v, B] \quad (37.1)$$

в заданном поле. Будем искать это решение в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{B}^{-2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad (37.2)$$

где  $\mathbf{v}'$  — неизвестная переменная скорость, а величина

$$v_d = \mathbf{B}^{-2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] \quad (37.3)$$

есть постоянная скорость, которая, как это сейчас будет видно, и является скоростью дрейфа. Подставив (37.2) в (37.1), получим

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}', \mathbf{B}] + (e/B^2) \{\mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \mathbf{E}\mathbf{B}^2\} = e[\mathbf{v}', \mathbf{B}], \quad (37.4)$$

где использована формула разложения для двойного векторного произведения  $[(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \mathbf{B}] = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \mathbf{E}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$  и учтено, что скалярное произведение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  равно нулю в силу их ортогональности. Уравнение (37.4) для вектора  $\mathbf{v}'$

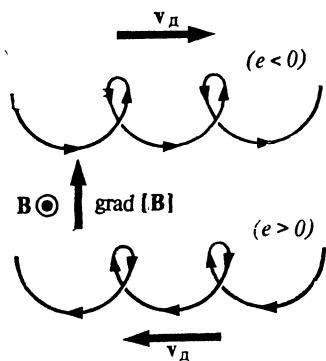
$$m_0 \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e[\mathbf{v}', \mathbf{B}] \quad (37.5)$$

совпадает с уравнением (35.8б), описывающим равномерное движение по окружности. Следовательно, вектор  $\mathbf{v}'$  есть скорость этого движения. Радиус окружности и частота вращения даются формулами вида (35.13). Центр окружности движется со скоростью дрейфа  $v_d$ , выражаемой формулой (37.3). По абсолютному значению она равна

$$v_d = B^{-2} |[\mathbf{E}, \mathbf{B}]| = E/B, \quad (37.6)$$

а по направлению перпендикулярина  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Формула (37.3) непосредственно показывает, что скорость дрейфа не зависит ни от знака заряда, ни от его величины, а также и от массы частицы. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку дрейф тяжелых частиц, например протонов, оказывается аналогичным дрейфу легких частиц, например электронов, имеющих заряды противоположного знака. Поэтому если имеется плазма, состоящая из протонов и электронов, заряды которых взаимно компенсируют друг друга, то при помещении ее в скрещенном электромагнитном поле она приобретает общее движение со скоростью дрейфа. Каких-либо сил, стремящихся разделить положительно и отрицательно заряженные компоненты плазмы, при этом не возникает.

**Дрейф в неоднородном магнитном поле.** Рассмотрим магнитное поле, линии индукции которого параллельны друг другу, а величина поля изменяется в направлении, перпендикулярном полю. Если бы поле было однородным, то заряженная частица двигалась бы по



79.

**Дрейф заряженной частицы в неоднородном магнитном поле**

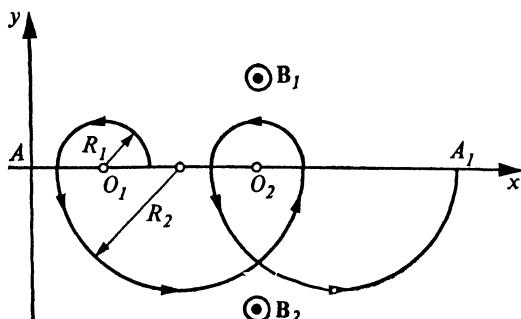
Стрелка вверх указывает направление, в котором увеличивается абсолютное значение магнитного поля ( $\text{grad } |B|$ )

окружности. Однако вследствие неоднородности поля радиус кривизны траектории при движении изменяется: там, где поле больше, радиус кривизны меньше, и наоборот. Таким образом, полностью повторяется картина, которая имеет место в скрещенных полях, с тем лишь отличием, что в рассматриваемом случае радиус кривизны траекторий меняется вследствие изменения не энергии частицы, а величины магнитного поля в различных точках траектории. Дрейф частицы происходит в направлении, перпендикулярном как магнитному полю, так и тому направлению, в котором магнитное поле неоднородно. Картина дрейфа изображена на рис. 79. Как это непосредственно видно на рисунке, частицы с различным знаком заряда дрейфуют в различных направлениях.

Точное вычисление скорости дрейфа в этом случае довольно сложно, но можно произвести более простое приближенное вычисление, которое дает достаточно точный результат. Предположим, что вместо непрерывного роста магнитного поля его величина изменяется скачком вдоль линии  $AA_1$  (рис. 80), причем  $B_1 > B_2$ . В каждой из полуплоскостей частица движется по окружностям, но радиусы их различны ( $R_2 > R_1$ ). На рис. 80 непосредственно видно, что за одно вращение, состоящее из двух движений по

80.

К вычислению скорости дрейфа в неоднородном магнитном поле



полуокружностям разного радиуса, смещение точки, вокруг которой происходит вращение, равно  $2(R_2 - R_1)$ . Если через  $T_1$  и  $T_2$  обозначить полные периоды соответствующих вращений с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , для скорости дрейфа можно написать следующее выражение:

$$v_d \approx \frac{2(R_2 - R_1)}{(1/2)(T_2 + T_1)}. \quad (37.7)$$

Выражая периоды вращения  $T_1$  и  $T_2$  и радиусы орбит  $R_1$  и  $R_2$  через величину поля по формулам (35.13), преобразуем (37.7) к виду

$$v_d = \frac{2}{\pi} v \left( \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2} \right). \quad (37.8)$$

Теперь вычислим среднее расстояние точек полуокружности траектории от диаметра, на котором происходит скачкообразное изменение поля. Очевидно, имеем (рис. 81):

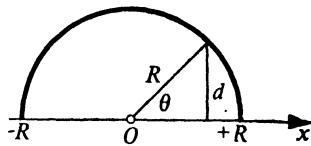
$$\begin{aligned} d &= R \sin \theta, \quad x = R \cos \theta, \\ \langle d \rangle &= \frac{\int_{-R}^{+R} d \cdot dx}{\int_{-R}^{+R} dx} = \frac{R}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{R}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{R}{4} \pi. \end{aligned} \quad (37.9)$$

Поэтому в первом приближении можно написать:

$$\begin{aligned} B_1 - B_2 &\approx \frac{\pi}{4} (R_2 + R_1) \frac{\partial B}{\partial x} \approx \\ &\approx \frac{\pi}{4} \frac{m_0 v}{e} \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \frac{\partial B}{\partial x}, \end{aligned} \quad (37.10)$$

где  $B$  — индукция поля на средней линии в том случае, если бы поле менялось не скачкообразно, а плавно. Далее при том же предположении можно написать приближенно:

$$B_1 + B_2 \approx 2B, \quad B_1 B_2 \approx B^2. \quad (37.11)$$



81.

К вычислению среднего расстояния точек окружности от диаметра

?

1

Опишите механизм возникновения дрейфа заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях.

2

Зависит ли направление дрейфа в скрещенных полях от знака заряда?

!

*Дрейф заряда в неоднородном магнитном поле является следствием изменения радиуса кривизны траектории, обусловленного непостоянством магнитного поля.*

Подставляя (37.11) и (37.10) в (37.8), окончательно для скорости дрейфа найдем следующую формулу:

$$v_d = \frac{W_{\text{кин}}}{eB^2} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (37.12)$$

где  $W_{\text{кин}} = m_0 v^2 / 2$  есть кинетическая энергия частицы. Дрейф перпендикулярен магнитному полю и направлению максимального изменения абсолютной величины магнитного поля. В векторной форме равенство (37.12) можно переписать так:

$$\mathbf{v}_d = \frac{W_{\text{кин}}}{eB^2} [\mathbf{b}_1, \text{grad} |\mathbf{B}|], \quad (37.13)$$

где  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{B}/B$  — единичный вектор вдоль магнитного поля,  $\text{grad} |\mathbf{B}|$  — вектор, направленный в сторону максимального возрастания абсолютного значения  $\mathbf{B}$  и равный производной от абсолютного значения  $|\mathbf{B}|$  в этом направлении.

Формула (37.13) выведена в первом приближении. Это означает, что изменение магнитного поля на расстояниях порядка радиуса орбит должно быть малым в сравнении с величиной самого поля. Математически это условие может быть записано следующим образом:

$$R \frac{|\text{grad } \mathbf{B}|}{B} \ll 1. \quad (37.14)$$

**Дрейф, обусловленный кривизной линии магнитной индукции.** В общем случае линии индукции неоднородного магнитного поля не являются прямыми. Они представляют собой изогнутые линии, каждая точка которых имеет определенный радиус кривизны. Заряженная частица вращается вокруг центра, который как бы закреплен на линии и движется вдоль нее. Поэтому он называется ведущим центром. Траектория частицы является *спиралью*, навивающейся на линию магнитной индукции (рис. 82). Связем систему координат с ведущим центром. В этой системе координат на частицу действует центробежная сила инерции  $\mathbf{F}_{\text{цб}}$  (более подробно о силах инерции будет сказано в гл. 14), эквивалентная действию электрического поля величины  $E_{\text{эф}} = F_{\text{цб}}/e$ . Таким образом, частица движется как бы в скрещенных полях. Этот случай только что был рассмотрен. Частица должна дрейфовать в направлении, перпендикулярном как  $\mathbf{B}$ , так и  $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ , т. е. *перпендикулярно плоскости* (рис. 82). Скорость дрейфа легко найти. Известно, что центробежная сила определяется по формуле

$$F_{\text{цб}} = m_0 v_{||}^2 / R = eE_{\text{эф}}, \quad (37.15)$$

где  $v_{||}$  — составляющая скорости частицы в направлении магнитного поля. Подставляя  $E_{\text{эфф}}$  из (37.15) в (37.6), получим выражение для скорости дрейфа, обусловленного кривизной магнитной силовой линии:

$$v_d = \frac{m_0 v_{||}^2}{eBR} = \frac{2W_{||}}{eBR} = \frac{v_{||}^2}{\omega R}, \quad (37.16)$$

где  $W_{||} = m_0 v_{||}^2 / 2$  — кинетическая энергия движения вдоль силовой линии,  $\omega$  — круговая частота вращения частицы.

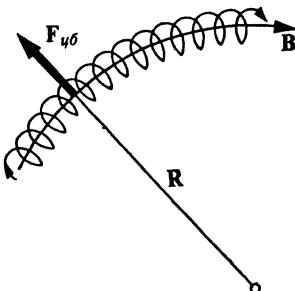
Этот дрейф складывается с дрейфом, обусловленным неоднородностью магнитного поля, скорость которого описывается формулой (37.13).

На основании изложенного можно сказать, что движение частицы в магнитном поле состоит из трех составляющих:

1) вращение вокруг силовой линии;

2) движение ведущего центра вдоль силовой линии;

3) дрейф ведущего центра в направлении, перпендикулярном магнитному полю и градиенту его абсолютной величины, т. е. плоскости, в которой вблизи данной точки лежит линия магнитной индукции.



## 82.

Дрейф заряженной частицы, обусловленный кривизной магнитной линии

Система координат, связанная с центром вращения частицы, является неинерциальной, и в ней возникает центробежная сила инерции  $F_{\text{ц.б}}$

?

1 В чем состоит механизм возникновения дрейфа в неоднородном магнитном поле? Зависит ли направление дрейфа от знака заряда? Как?

2 Каким образом кривизна линий магнитной индукции приводит к возникновению дрейфа заряженных частиц?

3 Из-за каких обстоятельств заряженная частица при движении вокруг силовой линии сходит с нее?

## 38. Адиабатическая инвариантность магнитного момента

**Магнитный момент.** Во многих практических важных случаях магнитное поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса траектории частицы. По аналогии с магнитным моментом кругового тока можно говорить о магнитном моменте частицы, движущейся в магнитном поле. Целесообразность введения такого понятия оправдывается тем фактом, что в медленно меняющихся магнитных полях этот магнитный момент сохраняет свое значение и его использование значительно упрощает анализ движения.

Магнитный момент  $M$  кругового тока силы  $I$ , по определению, равен

$$M = IS, \quad (38.1)$$

где  $S$  — площадь, обтекаемая током. Заряд  $|e|$ , движущийся по окружности радиуса  $R$  и имеющий период вращения  $T$ , аналогичен круговому току силы  $|e|/T$ . Следовательно, магнитный момент заряженной частицы в соответствии с формулой (38.1) может быть записан в виде

$$M = (|e|/T) \pi R^2. \quad (38.2)$$

Учитывая, что

$$T = 2\pi R/v_{\perp}, \quad R = mv_{\perp}/|e|B, \quad (38.3)$$

получаем окончательно для магнитного момента частицы следующее выражение:

$$M = (1/2)mv_{\perp}^2/B = W_{\perp}/B, \quad (38.4)$$

где  $W_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$  — кинетическая энергия, соответствующая составляющей скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

**Адиабатическая инвариантность магнитного момента.** Адиабатическая инвариантность магнитного момента означает сохранение его значения в магнитных полях, медленно изменяющихся либо во времени, либо в пространстве.

Рассмотрим сначала случай изменения магнитного поля во времени (рис. 83). Пусть поле  $B$  растет в указанном на рисунке направлении. Тогда, по закону электромагнитной индукции Фарадея, на частицу, движущуюся по окружности, действует вихревое электрическое поле  $E$ , направленное вдоль нее и равное

$$E = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{R}{2} \frac{dB}{dt}, \quad (38.5)$$

где учтено, что магнитный поток  $\Phi = \pi R^2 B$  (по условию, на расстояниях порядка радиуса орбиты величина поля меняется незначительно и, следовательно, поле можно считать постоянным). За один оборот частицы это поле сообщает ей энергию

$$\Delta \left( \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \right) = 2\pi RE |e| = |e|\pi R^2 (dB/dt). \quad (38.6)$$

**Медленность изменения по времени** означает, что за время одного оборота частицы по окружности величина поля меняется незначительно. За время одного оборота энергия частицы меняется мало и

поэтому можно разделить обе части равенства (38.6) на  $T$  и, учитывая (38.2), записать

$$\frac{\Delta (mv_{\perp}^2/2)}{T} \approx \frac{d}{dt} (mv_{\perp}^2/2) = \\ = \frac{|e| \pi R^2}{T} \frac{dB}{dt} = M \frac{dB}{dt}. \quad (38.7)$$

Выражая энергию  $mv_{\perp}^2/2$  по формуле (38.4), уравнение (38.7) представим в виде

$$\frac{d}{dt} (MB) = M \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда следует

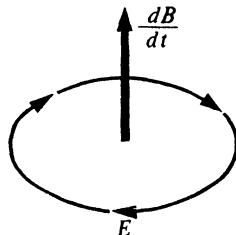
$$(dM/dt) = 0, \quad M = \text{const}, \quad (38.8)$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай пространственного изменения магнитного поля. Пусть частица движется в направлении изменения магнитного поля (рис. 84). Если оно усиливается вдоль оси  $z$ , то линии магнитной индукции в этом направлении сгущаются. Эти линии в данном случае имеют составляющую  $B_r$  вдоль радиуса  $R$ . Вследствие наличия скорости  $v_{\perp}$  радиальная составляющая  $B_r$  обусловливает силу Лоренца

$$F_{||} = e [v_{\perp}, B_r], \quad (38.9)$$

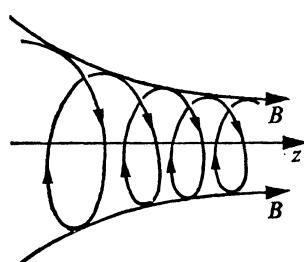
которая действует вдоль оси  $z$  противоположно направлению сгущения линий индукции, т. е. в сторону ослабления магнитного поля. Эта сила тормозит движение частицы. Для вычисления тормозящей силы (38.9) необходимо знать  $B_r$ . Учтем, что линии индукции не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий индукции, входящих в некоторый объем, равно числу выходящих, или, иначе, входящий в некоторый объем магнитный поток равен выходящему. Возьмем в качестве объема цилиндр радиуса  $R$  и толщиной  $\Delta z$ , ось которого совпадает с осью  $z$ .



### 83.

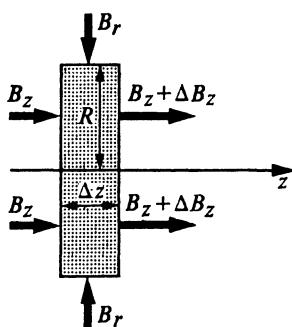
Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле

Направления изменений магнитного и электрического полей связаны правилом левого винта



### 84.

При движении заряженной частицы в область с усиливающимся магнитным полем ее скорость вдоль поля уменьшается, а линейная скорость вращательного движения увеличивается



85.

К вычислению радиальной составляющей магнитного поля

(рис. 85). Приравнивая входящий через левое основание и боковую поверхность цилиндра поток потоку, выходящему через правое основание цилиндра, получим

$$B_z \pi R^2 + B_r 2\pi R \Delta z = (B_z + \Delta B_z) \pi R^2. \quad (38.10)$$

Отсюда следует

$$B_r \approx \frac{R}{2} \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \approx \frac{R}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (38.11)$$

Поэтому сила (38.9), действующая вдоль оси  $z$ , равна

$$F_{||} = |e| v_{\perp} B_r = \frac{|e| 2\pi R}{T} \frac{R}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = M \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (38.12)$$

где учтено, что  $v_{\perp} = 2\pi R/T$ , и принято во внимание определение магнитного момента (38.2). Направление действия этой силы, как это видно на рис. 84, противоположно тому, в котором магнитное поле растет, т. е. в данном случае положительному направлению оси  $z$ . Поэтому уравнение для составляющей скорости  $v_z$  можно написать в виде

$$m \frac{dv_z}{dt} = -M \frac{\partial B_z}{\partial z} = -M \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (38.13)$$

где учтено, что в силу медленности изменения поля  $(\partial B_z / \partial z) \approx \partial B / \partial z$ , т. е. составляющая магнитного поля  $B_z$  заменена его полной величиной. Это означает, что линии магнитной индукции сгущаются не очень сильно, т. е. их наклон к оси  $z$  не очень велик. Знак минус в уравнении (38.13) обусловлен направлением действия силы.

Умножив обе части (38.13) на  $v_z$  и приняв во внимание равенства

$$\frac{dv_z}{dt} v_z = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_z^2}{2} \right); \quad \frac{\partial B}{\partial z} v_z = \frac{dB}{dt},$$

преобразуем (38.13) к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_z^2}{2} \right) = -M \frac{dB}{dt}. \quad (38.14)$$

!

**Адиабатическим называется изменение, происходящее достаточно медленно в сравнении с изменениями, характерными для рассматриваемого явления. Поэтому один и тот же процесс в одних случаях можно рассматривать как адиабатический, а в других — нетъз.**

Так как при движении в магнитном поле полная скорость частицы сохраняет свое значение, то

$$\frac{mv_z^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \text{const}$$

и формула (38.14) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} (MB) = M \frac{dB}{dt}, \quad (38.15)$$

где сделана замена  $(mv_{\perp}^2/2) = MB$  в соответствии с (38.4). Это уравнение совершенно аналогично (38.8), и из него следует

$$M = \text{const},$$

т. е. магнитный момент сохраняется также и при медленных (адиабатических) пространственных изменениях магнитного поля.

Таким образом, доказано, что

**магнитный момент  $M$ , определенный равенством (38.4), остается неизменным при движении частицы в случае медленных изменений магнитного поля как в пространстве, так и во времени.**

Напомним, что критерием медленности пространственного изменения магнитного поля является малость его изменений на расстояниях порядка радиуса вращения и перемещения за один оборот, а критерием медленности изменения во времени — малость его изменения в течение времени одного оборота. Постоянство магнитного момента при медленных изменениях магнитного поля иначе называется адиабатической инвариантностью.

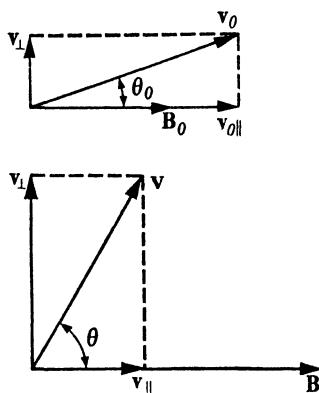
Она означает, что частицы движутся по поверхности магнитной трубы, т. е. трубы, поверхность которой образована линиями магнитной индукции (см. рис. 84). Чтобы в этом убедиться, надо принять во внимание, что, по определению силовой трубы, магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение трубы, не изменяется вдоль нее. Магнитный поток через поперечное сечение трубы может быть представлен следующим образом:

$$\Phi = \pi R^2 B = \frac{2\pi m}{e} \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{2\pi m}{e} M = \text{const} \cdot M. \quad (38.16)$$

Из этой формулы видно, что постоянство магнитного потока вдоль трубы эквивалентно постоянству магнитного момента частицы, которая движется по поверхности силовой трубы. Но поскольку постоянство магнитного момента при движении частицы уже доказано независимо, отсюда следует, что частица действительно движется по поверхности силовой трубы (см. рис. 84). Для полной характеристики движения частицы необходимо принять во внимание ее дрейф, рассмотренный в § 37. В результате дрейфа в неоднородном поле частица переходит с одной силовой трубы на другую, но так, чтобы магнитный поток, заключенный в этих трубках, был одинаков.

!

*От областей сильного увеличения магнитного поля происходит «отражение» частиц, траектории которых вьются вокруг силовых линий. Это явление используется для запирания заряженных частиц в конечных объемах.*



86.

Скорость заряженной частицы в магнитном поле не меняется. Поэтому при увеличении составляющей скорости, перпендикулярной магнитному полю, составляющая ее вдоль магнитного поля уменьшается

**Магнитные зеркала.** Тормозящая сила (38.9) уменьшает скорость  $v_{\parallel}$  частицы, движущейся в направлении возрастания магнитного поля. Если возрастание поля достаточно велико, то в результате торможения скорость  $v_{\parallel}$  обратится в нуль, а затем частица начнет двигаться в противоположном направлении. Таким образом, область увеличивающегося магнитного поля действует на частицу как «зеркало», от которого частица отражается. Поэтому говорят, что увеличивающееся магнитное поле является «магнитным зеркалом».

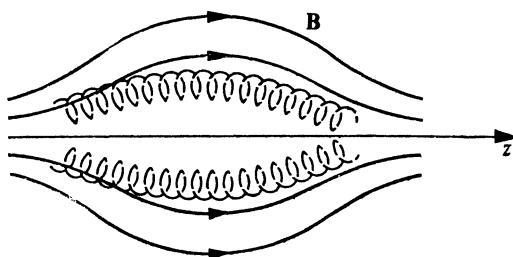
Процесс отражения от него можно также рассмотреть с точки зрения сохранения магнитного момента. Поскольку  $M = mv_{\perp}^2/2B$ , сохранение магнитного момента при движении в сторону увеличивающихся значений  $B$  магнитного поля означает, что при этом возрастает  $v_{\perp}^2$ . Но, с другой стороны, квадрат полной скорости  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$  также должен оставаться неизменным. Следовательно, при движении в сторону возрастающего магнитного поля величина  $v_{\parallel}^2$  должна уменьшаться, т. е. частица затормаживается.

Найдем область поля, в которой произойдет отражение частицы. Пусть в начальный момент времени полная скорость частицы  $v_0$  составляет с направлением магнитной индукции поля  $B_0$  угол  $\theta_0$  (рис. 86). В некоторый другой момент времени, когда частица переместилась в точку поля с другим значением индукции  $B$ , скорость ее остается без изменения, но угол  $\theta$  между  $B$  и  $v_0$  изменится. Это означает, что изменяются перпендикулярная  $v_{\perp}$  и параллельная полю  $v_{\parallel}$  составляющие скорости. Сохранение магнитного момента на основании (38.4) может быть выражено в виде равенства (рис. 86):

$$\sin^2 \theta_0 : B_0 = \sin^2 \theta : B. \quad (38.17)$$

Отражение частицы произойдет в точке, где  $\sin \theta = 1$ , т. е. магнитное поле имеет величину

$$B = B_0 / \sin^2 \theta_0. \quad (38.18)$$



87.

«Пробки» магнитной бутылки образуются сгущениями магнитных силовых линий, т. е. в местах усиления магнитного поля

В этом поле отражаются все частицы, у которых в начальный момент вектор скорости лежит вне конуса с углом  $\theta_0$  при вершине. От абсолютного значения скорости условие отражения не зависит. Все частицы, направления скоростей которых лежат внутри конуса с углом  $\theta_0$  при вершине, не испытывают отражения и проникают в область больших магнитных полей. Они могут отразиться в точках поля с большим значением  $B$ . Однако имеется некоторое максимальное значение  $B_{\max}$ . От этой области отразятся все частицы, скорости которых лежат вне конуса с углом  $\theta_{\min}$ , определенным равенством

$$\sin^2 \theta_{\min} = B_0 / B_{\max}. \quad (38.19)$$

Все частицы, направления скоростей которых лежат внутри конуса с углом  $\theta_{\min}$  при вершине, пройдут через область максимального поля и покинут рассматриваемую область, т. е. будут потеряны для этой области. Поэтому конус с углом  $\theta_{\min}$  при вершине в данной ситуации называют конусом потерь.

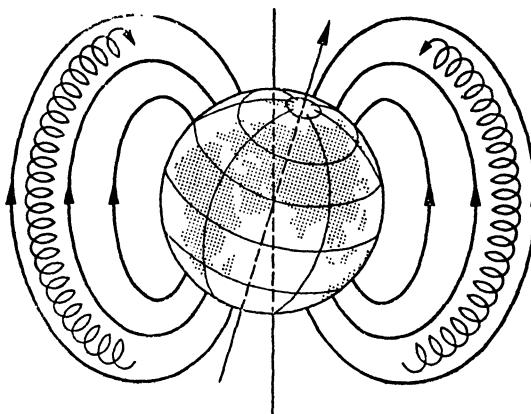
Явление отражения частиц от магнитных зеркал используется в устройствах для удержания заряженных частиц в ограниченной области пространства, например в термоядерных установках. В качестве примера можно указать на «магнитную бутылку» с двумя горлышками, роль «магнитных пробок» в которых выполняют магнитные зеркала (рис. 87). Общий характер движения частиц в бутылке ясен на основе высказанного:

!

*Существование конуса потерь значительно усложнило исследование по термоядерному управляемому синтезу.*

?

- 1      От какой энергии зависит магнитный момент вращения частицы в магнитном поле?
- 2      Что такое адиабатическая инвариантность магнитного момента?
- 3      Из каких соображений следует, что частицы движутся по поверхности магнитной трубы?
- 4      Как объясняется действие «магнитных зеркал» сохранением магнитного момента и непосредственным рассмотрением действующих на заряд сил со стороны магнитного поля?
- 5      Что такое конус потерь?



88.

Радиационные пояса Земли

!

*В магнитном поле Земли заряженные частицы, вращаясь вокруг линий индукции, перемещаются в меридиональном направлении с севера на юг и с юга на север, испытывая последовательные отражения от участков усиленного магнитного поля вблизи полюсов. Одновременно они смещаются с одного меридиона на другой, двигаясь вдоль параллелей вокруг Земли.*

частицы движутся вокруг линий индукции по спиралям, перемещаясь от одной магнитной пробки к другой. Вследствие дрейфа они переходят с одной линии индукции на другую, медленно обходя ось z. Если бы не было столкновения частиц между собой, то при одном отражении от магнитных пробок из бутылки вышли бы все частицы, скорости которых лежат в конусах потерь. Отраженные частицы, скорости которых лежат вне конусов потерь, удерживались бы в бутылке бесконечно долгое время. Однако в действительности частицы взаимодействуют друг с другом. В результате столкновений в конус потерь попадают новые частицы, которые очень быстро в свою очередь покидают «бутылку». Важнейшей проблемой управляемого термоядерного синтеза является проблема удержания частиц в ограниченном объеме достаточно продолжительное время. Однако до настоящего времени ее не удалось решить, поскольку частицы всегда находят способ покинуть область пространства, где должны произойти термоядерные реакции, значительно раньше, чем хотелось бы физикам.

**Радиационные пояса Земли.** Особенности движения заряженных частиц в магнитных полях обусловливают существ-

вование радиационных поясов Земли. Как известно, в пространстве близи Земли имеется магнитное поле. Линии магнитной индукции этого поля выходят из северного магнитного полюса и оканчиваются на южном (рис. 88). У магнитных полюсов происходит сгущение магнитных силовых линий, т. е. усиление магнитного поля. Поэтому области вблизи полюсов для заряженных частиц являются магнитными зеркалами. Заряженная частица движется по спирали вокруг линии индукции в меридиональном направлении от одного магнитного полюса к другому. Близи него она отражается и меняет направление своего движения на обратное. Вследствие дрейфа частица переходит с одной линии на другую, т. е. меняет свою долготу, обходя все возможные меридианы. Благодаря этому заряженные частицы длительное времядерживаются магнитным полем вблизи Земли, в результате чего образуются радиационные пояса, открытые в связи с полетами искусственных спутников. Радиационные пояса Земли оказывают влияние на ряд процессов на Земле и играют важную роль для космических полетов.

### 39. Движение заряженной частицы в поле электромагнитной волны

**Плоская электромагнитная волна.** В плоской электромагнитной волне электрическое и магнитное поля расположены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно скорости распространения, равной в вакууме скорости света. Если ось  $z$  направить вдоль распространения волны, то электрическое и магнитное поля ее можно представить следующим образом (рис. 89):

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \sin(\omega t - kz), \quad E_y = E_z = 0, \\ B_y &= B_0 \sin(\omega t - kz), \quad B_x = B_z = 0, \end{aligned} \quad (39.1)$$

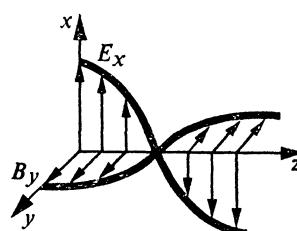
где  $\omega = 2\pi/T$  — круговая частота,  $T$  — период. Величина  $k = 2\pi/\lambda$  называется **волновым числом**,  $\lambda = cT$  — длина волны.

!

**Электромагнитная плоская волна не изменяет скорости заряженной частицы. Она лишь вызывает колебание скорости около средней с частотой волны, не изменения средней энергии частицы.**

?

- 1 | Как движутся заряженные частицы в радиационных поясах Земли?
- 2 | Под действием каких факторов частицы в радиационных поясах Земли перемещаются по долготе вокруг земного шара?



89.

**Плоская электромагнитная волна в некоторый момент времени**

В плоской электромагнитной волне амплитуды  $E_0$  и  $B_0$  связаны соотношением  $E_0 = cB_0$ , как это доказывается в теории электромагнитных волн.

**Уравнение движения.** На заряженную частицу электромагнитная волна действует как своим электрическим, так и магнитным полем. Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \quad (39.2)$$

для плоской электромагнитной волны в компонентах по осям координат расписывается в виде

$$\begin{aligned} F_x &= eE_x + e(v_y B_z - v_z B_y) = eE_0 \sin(\omega t - kz) - ezB_0 \sin(\omega t - kz), \\ F_y &= eE_y + e(v_z B_x - v_x B_z) = 0, \\ F_z &= eE_z + e(v_x B_y - v_y B_x) = exB_0 \sin(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (39.3)$$

Поэтому уравнения движения частицы имеют вид:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x = eE_0 \left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right) \sin(\omega t - kz), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y = 0, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z = eE_0 \frac{\dot{x}}{c} \sin(\omega t - kz), \end{aligned} \quad (39.4)$$

где учтено, что  $E_0 = cB_0$ . Если скорость частицы мала в сравнении со скоростью света [ $(\dot{z}/c) \ll 1$ ], то из этого условия следует

$$kz = \omega \int_0^t \frac{\dot{z}}{c} dt \ll \omega t, \quad (39.5)$$

где  $k = (2\pi/\lambda) = \omega/c$ . Поэтому в уравнениях движения (39.4) можно пренебречь величинами  $\dot{z}/c$  в сравнении с единицей и  $kz$  в сравнении с  $\omega t$ . Уравнения принимают вид

$$\ddot{x} = (eE_0/m) \sin \omega t, \quad \ddot{z} = (eE_0/m) \dot{x} \sin \omega t. \quad (39.6)$$

Интегрируя дважды первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(eE_0/m\omega) \cos \omega t + \dot{x}_0, \\ x &= -(eE_0/m\omega^2) \sin \omega t + \dot{x}_0 t + x_0, \end{aligned} \quad (39.7)$$

где  $\dot{x}_0$  —  $x$ -я составляющая скорости частицы в момент  $t = 0$ ,  $x_0$  — ее координата в тот же момент. Подставляя решение (39.7) во второе уравнение (39.6), имеем

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \frac{1}{\omega c} \sin 2\omega t + \frac{eE_0}{mc} \dot{x}_0 \sin \omega t. \quad (39.8)$$

В результате интегрирования этого уравнения находим

$$z = \frac{1}{8} \left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \frac{1}{\omega^3 c} \sin 2\omega t - \frac{eE_0}{mc\omega^2} \dot{x}_0 \sin \omega t + \dot{z}_0 t + z_0. \quad (39.9)$$

**Анализ движения.** Из решений (39.7) и (39.9) можно сделать следующие выводы. Если в начальный момент частица покоятся ( $\dot{z}_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ), то электромагнитная волна вызывает колебания частицы в окрестности ее положения. Какого-либо систематического удаления от начального положения нет. Если при  $t = 0$  частица обладает некоторой скоростью  $\dot{z}_0 \neq 0$ ,  $\dot{x}_0 \neq 0$ , то в последующем она будет удаляться от первоначального положения с этой скоростью, как средней. При этом частица будет совершать колебания. Таким образом, можно сказать, что электромагнитная волна не изменяет средней скорости движения частицы, но вызывает колебания скорости с частотой электромагнитной волны.

#### 40. Движения в переменном электрическом и постоянном магнитном полях

**Постановка задачи.** Пусть имеются переменное электрическое поле, частота которого  $\omega$ , и постоянное магнитное поле, направленные так, как указано на рис. 90, и заданные уравнениями:

$$\begin{aligned} E_x &= E = E_0 \cos \omega t, \quad E_y = E_z = 0, \\ B_z &= B_0, \quad B_x = B_y = 0. \end{aligned} \quad (40.1)$$

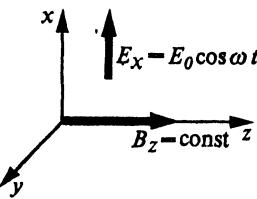
Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} = (eE_0/m) \cos \omega t + \omega_0 \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_0 \dot{x}, \quad (40.2)$$

где  $\omega_0 = eB_0/m$  — частота вращения частицы в магнитном поле  $B_0$ , называемая циклотронной частотой. Будем считать, что в момент  $t = 0$  частица покоятся в начале координат, т. е.  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ .

**Анализ различных случаев движения. Циклотронный резонанс.** Интегрируя уравнения (40.2) и учитывая указанные начальные условия, получаем:

$$\dot{x} = (eE_0/m\omega) \sin \omega t + \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\omega_0 x. \quad (40.3)$$



90.

Расположение системы координат относительно постоянного магнитного поля и переменного электрического поля, в которых рассматривается движение заряженной частицы

?

1 | Каково соотношение между векторами электрического и магнитного полей в плоской электромагнитной волне?

2 | При каком условии можно пренебречь пространственным изменением поля в волне по сравнению с его изменением по времени при решении уравнений движения?

!

Переменное электрическое поле при наличии постоянного магнитного поля в условиях циклотронного резонанса вызывает увеличение кинетической энергии заряженной частицы.

Подставляя выражение для  $x$  из (40.3) во второе уравнение (40.2), имеем

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{\omega_0}{\omega} \frac{eE_0}{m} \sin \omega t. \quad (40.4)$$

Характер движения частицы существенно зависит от соотношения между частотой  $\omega$  переменного поля и циклотронной частотой  $\omega_0$ . Существуют четыре важных случая:  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega \approx \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Рассмотрим каждый из них отдельно.

**Случай 1:**  $\omega \ll \omega_0$ . При этом условии электрическое поле меняется мало за период обращения частицы в магнитном поле. Поэтому электрическое поле практически можно считать постоянным при расчете движения. Величина  $\sin \omega t$  является медленно меняющейся функцией. Усреднив обе части уравнения (40.4) по многим периодам колебаний магнитного поля

$$\langle \ddot{y} \rangle = 0, \quad \langle \sin \omega t \rangle \approx \sin \omega t, \quad (40.5)$$

получим следующее равенство:

$$\langle y \rangle = -\frac{1}{\omega \omega_0} \frac{eE_0}{m} \sin \omega t. \quad (40.6)$$

Отсюда находим скорость смещения среднего положения частицы:

$$v_d = \frac{d}{dt} \langle y \rangle = -\frac{1}{\omega_0} \frac{eE_0}{m} \cos \omega t = -\frac{E_0}{B_0} \cos \omega t = -\frac{E}{B_0}. \quad (40.7)$$

Это есть обычный дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях, рассмотренный для случая постоянного электрического поля в § 37. Скорость дрейфа меняется с изменением величины  $E$  электрического поля, т. е. колеблется с частотой  $\omega$ .

**Случай 2:**  $\omega \gg \omega_0$ . При этом условии за один оборот частицы в магнитном поле электрическое поле меняется много раз. Поэтому вращение ее является медленным процессом, а изменение поля — быстрым. Усредним (40.4) по многим периодам колебаний электрического поля, которые в сумме составляют лишь небольшую часть периода обращения частицы. Очевидно, что при этом  $\langle \sin \omega t \rangle = 0$  и уравнение (40.4) принимает следующий вид:

$$\langle \ddot{y} \rangle + \omega_0^2 \langle y \rangle = 0. \quad (40.8)$$

Таким образом, какого-либо дрейфа частицы нет. Она колеблется с циклотронной частотой  $\omega_0$ .

**Случай 3:**  $\omega = \omega_0$ . При этом условии наблюдается явление, называемое циклотронным резонансом. Уравнения (40.3) принимают вид:

$$\dot{x} = (eE_0/m\omega_0) \sin \omega_0 t + \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\omega_0 x, \quad (40.9)$$

а вместо (40.4) получаем

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = - (eE_0/m) \sin \omega_0 t. \quad (40.10)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m\omega_0} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (40.11)$$

Отсюда с помощью второго уравнения (40.9) находим

$$x = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (40.12)$$

Таким образом, при циклотронном резонансе движение частицы является колебательным.

Вычислим ее кинетическую энергию:

$$W = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{8} \frac{e^2 E_0^2}{m} \left( t^2 + \frac{\sin^2 \omega_0 t}{\omega_0^2} + \frac{t \sin 2\omega_0 t}{\omega_0} \right). \quad (40.13)$$

Слагаемое, пропорциональное  $t^2$ , показывает, что энергия частицы неизменно увеличивается. Остальные слагаемые не имеют существенного значения — они характеризуют колебания энергии частицы вокруг увеличивающегося значения, определяемого членом  $t^2$ . Таким образом,

**при циклотронном резонансе энергия от переменного электрического поля передается частице.**

**Случай 4:**  $\omega \approx \omega_0$ . При этом условии нет точного циклотронного резонанса. Энергия от переменного электрического поля переходит к частице лишь до некоторого максимального значения. После этого частица начинает обратно отдавать энергию электрическому полю и т. д. Этот процесс обмена энергией является периодическим процессом, имеющим частоту

$$\Omega = |\omega - \omega_0|. \quad (40.14)$$

Не вдаваясь здесь в подробности, отметим лишь, что эта формула выражает частоту биений, которые получаются при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами (см. гл. 13).

Вычислим максимальную энергию частицы. Она приобретает энергию в течение половины периода, соответствующего частоте  $\Omega$ , т. е. в течение времени  $\pi/\Omega$ . За это время на нее действует среднее электрическое поле  $\langle E \rangle = E_0/2$ . Коэффициент  $1/2$  при амплитудном значении  $E_0$  поля получается потому, что вычисляется среднее значение поля за полупериод колебаний. Поэтому в течение полуperiода частица приобретает импульс  $p_{\max}$ , который в соответствии с уравнением движения Ньютона равен

$$p_{\max} = |e| \langle E \rangle \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi^2 |e| E_0}{2 |\omega - \omega_0|}. \quad (40.15)$$

Следовательно, максимальная энергия частицы

$$W_{\max} = \frac{p_{\max}^2}{2m} = \frac{\pi^2}{8} \frac{e^2 E_0^2}{m (\omega - \omega_0)^2}. \quad (40.16)$$

## 41. Ускорители заряженных частиц

Как было отмечено в § 29, при рассмотрении различных сил, имеющихся в природе, электромагнитные силы — единственныесилы, с помощью которых можно искусственно управлять движением частиц вещества. Поэтому вполне естественно, что предназначенные для этой цели приборы используют электромагнитные силы.

Для исследования строения материи, законов взаимодействия элементарных частиц и законов их взаимопревращения необходимы частицы больших энергий. Естественными источниками частиц с энергиями примерно до 10 млн. эВ являются радиоактивные элементы, один из представителей которых — радий — сыграл очень важную роль в физике. Однако эти энергии недостаточны для исследования многих физических явлений, когда требуются частицы с энергиями в сотни миллионов, миллиарды и десятки миллиардов электронвольт. Другим существенным недостатком радиоактивных элементов является малая интенсивность их потоков, в результате чего редкие события, которые бывают часто наиболее важными, очень трудно обнаружить, поскольку для их воспроизведения надо затратить очень много времени.

Другим важным естественным источником частиц высокой энергии являются космические лучи. В них встречаются частицы с чрезвычайно большими энергиями, вплоть до  $10^{17}$ — $10^{18}$  эВ и даже до  $10^{20}$  эВ. Получить в искусственных условиях такие энергии не представляется возможным ни сейчас, ни в недалеком будущем. В космических лучах присутствуют также частицы и меньших энергий. Однако интенсивность этих частиц очень мала и, чтобы наблюдать явления, происходящие с малой вероятностью, приходится ждать очень долгое время. Например, давно было установлено, что при определенных условиях должно произойти рождение пары частиц протон — антипротон. Однако наблюдать этот процесс в космических лучах не удалось. Это удалось лишь в ускорителях, разгоняющих частицы до достаточно больших энергий.

В ускорителях заряженных частиц используются главным образом два метода ускорения — резонансный и индукционный.

**Резонансный метод ускорения.** Магнитное поле изменяет лишь направление скорости заряженной частицы, но не абсолютное значение этой скорости, т. е. энергию частицы. Поэтому магнитное поле можно использовать только для управления ее траекторией, а не для сообщений ей энергии. Энергия частицы может быть изменена лишь электрическим полем. Частица с зарядом  $e$ , равным заряду электрона, проходя разность потенциалов  $U$ , приобретает (или будет приобретать) энергию  $eU$ . Практически можно создать разность потенциалов в несколько сотен тысяч вольт, а в специальных устройствах, называемых электростатическими генераторами, — в несколько миллионов вольт. Следовательно, таким путем частицы могут приобрести энергию лишь в несколько

миллионов электронвольт. Задача состоит в том, чтобы с помощью небольшой разности потенциалов сообщить частицам энергию, во много раз большую той, которую она получает при однократном прохождении этой разности потенциалов. Естественным решением этой задачи является идея многократного ускорения частицы одной и той же разностью потенциалов. Пусть имеется последовательность трубок (1—4), к которым подключены поочередно различные полюсы генератора переменного напряжения, в результате чего соседние трубки оказываются всегда заряженными разноименно (рис. 91). Внутри трубки, как известно, электрическое поле отсутствует, так что частица движется там без действия внешних сил. Между трубками имеется электрическое поле, которое может либо ускорить, либо замедлить частицу в зависимости от знака заряда и направления поля между ними. Пространство между трубками называется ускоряющим промежутком. Пусть положительно заряженная частица входит в ускоряющий промежуток I между первой и второй трубками, когда знаки потенциалов трубок совпадают с указанными на рис. 91. При прохождении этого промежутка частица получит прирост энергии  $eU$ , где  $U$  — разность потенциалов между трубками. Затем частица входит внутрь второй трубки, где на нее никакие силы не действуют, и энергия ее при этом не изменяется. Пройдя трубку 2, частица попадает в ускоряющий промежуток II. Если к этому времени потенциалы трубок не изменятся, то поле между трубками 2 и 3 будет тормозить

!

*Одна и та же небольшая разность потенциалов, пройденная заряженной частицей много раз, позволяет получить большое увеличение энергии частицы.*

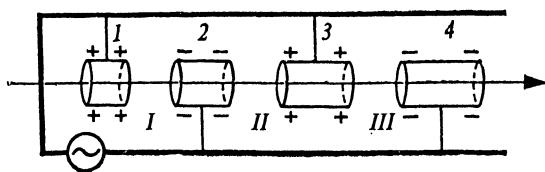
?

- 1      **Объясните принцип резонансного ускорения.**
- 2      **В чем состоит индукционный метод ускорения?**

91.

**Принцип резонансного ускорения заряженных частиц**

Напряжение на трубках изменяется таким образом, что частица, попадая в пространство между ними, всегда оказывается в ускоряющем электрическом поле



частицу и, пройдя этот промежуток, она потеряет энергию  $eU$ , т. е., попав внутрь трубки 3, будет иметь ту же энергию, которую она имела, проходя трубку 1. Таким образом, никакого ускорения частицы не приобрела. Чтобы не произошло торможения частицы в промежутке II, надо к моменту выхода частицы из трубки 2 изменить потенциалы всех трубок на обратные. Тогда в этом промежутке частица снова окажется в ускоряющем поле и после его прохождения получит новую порцию энергии  $eU$ . Поэтому, для того чтобы заряженная частица проходила все промежутки между трубками в ускоряющем поле, необходимо за время пролета частицы через трубку ее потенциал, а следовательно, и потенциалы соседних трубок изменить на обратные. Для этого необходимо, чтобы за время пролета трубки в генераторе напряжения совершилось полуцелое число колебаний, т. е.

$$\tau = \alpha (T/2), \quad (41.1)$$

где  $\tau$  — время пролета трубы,  $T$  — период напряжения генератора,  $\alpha = 1, 3, 5, 7, \dots$ . Это условие называется **условием резонанса**. При его соблюдении частица движется все время в резонансе с переменным электрическим полем, создаваемым генератором напряжения. Благодаря этому при прохождении всех промежутков она оказывается в ускоряющем поле и приобретает энергию.

В процессе ускорения скорость частицы увеличивается. Если период колебаний  $T$  в генераторе постоянен, необходимо подбирать длины последующих трубок таким образом, чтобы время их пролета при растущей скорости частицы удовлетворяло равенству (41.1). Нетрудно рассчитать закон изменения длины трубок.

Вместо последовательности трубок, изображенных на рис. 91, можно было бы ограничиться одним ускоряющим промежутком, например между первой и второй трубками. Для этого надо вторую трубку сделать достаточно длинной и, изогнув ее, например, по окружности, соединить ее конец с началом первой трубы. Магнитным полем соответствующей конфигурации можно заставить заряженную частицу двигаться внутри изогнутой трубы. Подбирая частоту напряжения таким образом, чтобы промежуток между трубками частица проходила в ускоряющем поле, мы получим циклический ускоритель типа синхротрона или синхрофазотрона. Слово «циклический» означает, что при ускорении частица движется по почти замкнутым траекториям. Ускоритель, у которого, как у изображенного на рис. 91, путь ускоряемой частицы является прямолинейным, называется линейным. Поэтому **резонансный метод ускорения может быть осуществлен как в циклических, так и в линейных ускорителях**.

**Индукционный метод ускорения.** При изменении магнитного поля возникает согласно закону электромагнитной индукции Фарадея вихревое электрическое поле. Связь между направлениями этих полей указана на рис. 83. Если в пространство между полями попадает

заряженная частица, то возникшее вихревое электрическое поле ускоряет ее, т. е. энергия частицы увеличивается, а изменяющееся магнитное поле искривляет ее траекторию. Можно добиться условия, при котором частица, ускоряясь электрическим полем, будет двигаться по окружности постоянного радиуса под влиянием переменного магнитного поля. Такое условие называется бетатронным. Оно будет выведено несколько позднее. Ускорение с использованием индукционного (по закону индукции Фарадея) электрического поля называется индукционным методом ускорения. Он осуществляется в бетатроне — ускорителе электронов, траектории которых являются окружностями. Поэтому бетатрон относится к циклическим индукционным ускорителям.

Существуют также линейные индукционные ускорители. В них ускоряемая частица движется по прямой линии под действием электрического поля, создаваемого по закону электромагнитной индукции за счет изменения магнитного поля.

**Циклотрон.** Простейшим ускорителем с использованием резонансного метода ускорения является циклотрон.

В однородном магнитном поле частота обращения частицы

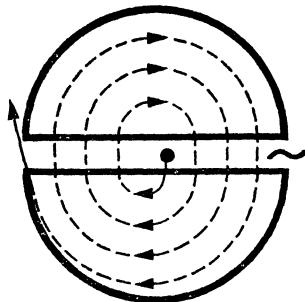
$$\omega = eB/m. \quad (41.2)$$

Если пренебречь зависимостью массы от скорости, то эту частоту можно считать постоянной. Это возможно лишь при малых скоростях частицы, когда  $(v^2/c^2) \ll 1$ . Равенство

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2(m_0 v^2/2)}{m_0 c^2} = \frac{2W_{\text{кин}}}{m_0 c^2} \quad (41.3)$$

показывает, что условие  $(v^2/c^2) \ll 1$  эквивалентно условию  $W_{\text{кин}} \ll \ll m_0 c^2$ , т. е. пренебречь зависимостью массы от скорости можно тогда, когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя. Энергия покоя электрона равна примерно 0,5 МэВ, протона — примерно 900 МэВ, т. е. почти 1 млрд. эВ. Поэтому при кинетической энергии в 1 млн. эВ протон имеет малую скорость, при которой зависимость массы от скорости несущественна, а электрон имеет очень большую скорость, при которой эта зависимость играет определяющую роль. Следовательно, если речь идет об энергиях в десятки миллионов электронвольт, то для тяжелых частиц, таких, как протон, можно пренебречь зависимостью массы от скорости, а для легких, таких, как электрон, — нельзя. В циклотроне используется постоянство частоты вращения частицы (41.2) в однородном магнитном поле и поэтому он пригоден лишь для ускорения тяжелых частиц до не слишком больших энергий. Для ускорения электронов циклотрон применять нельзя.

Схема циклотрона показана на рис. 92. Перпендикулярно плоскости чертежа приложено однородное магнитное поле, в котором заряженная частица движется с постоянной частотой (41.2), являющейся циклотронной. Это движение осуществляется внутри дуантов,



92.

Траектории частицы в циклотроне

?

- 1 Почему в циклотроне невозможно ускорять частицы до очень больших энергий?
- 2 В чем заключается механизм вертикальной фокусировки в ускоряющем промежутке?
- 3 Опишите механизм вертикальной фокусировки в ускоряющем промежутке за счет изменения электрического поля. В какой фазе изменения электрического поля должны проходить ускоряющий промежуток частицы, чтобы действие этого поля было фокусирующим?

!

**Циклотрон является нерелятивистским прибором и в нем нельзя получить частицы со скоростями, составляющими существенную долю скорости света.**

в зазоре между которыми приложено переменное электрическое напряжение с частотой, равной частоте обращения частицы в магнитном поле. Источник частиц расположен вблизи центра циклотрона.

Поле между дуантами ускоряет частицы, испускаемые источником. Попав в пространство внутри дуанта, частица движется по полуокружности определенного радиуса и через полупериод обращения снова оказывается между дуантами, где электрическое поле к этому времени изменяется на обратное. Вследствие этого частица опять ускоряется. Затем весь процесс повторяется снова. Каждый раз, проходя между дуантами, частица получает определенную порцию энергии и затем движется внутри них по полуокружностям увеличивающихся радиусов. Период обращения при этом остается постоянным. Частота переменного поля между дуантами также является постоянной. Максимальная энергия частицы ограничена величиной магнитного поля и радиусом траекторий в циклотроне. Частицы, достигшие максимальной энергии, с помощью соответствующих устройств выводятся из циклотрона для дальнейшего использования.

**Вертикальная устойчивость движения частиц в циклотроне.** Для того чтобы в процессе всего цикла ускорения частицы не попали на горизонтальные стенки дуантов, необходимо, чтобы при их отклонении от средней плоскости циклотрона возникали силы, стремящиеся вернуть эти частицы к средней плоскости, т. е. необходимо обеспечить вертикальную устойчивость движения.

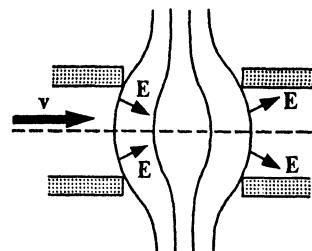
Имеются три фактора, обеспечивающие вертикальную устойчивость или фокусировку частиц в циклотроне. Первым фактором является фокусировка, обусловленная изменением скорости при прохождении ускоряющего промежутка между дуантами. На рис. 93 поверхности одинакового потенциала между ними пока-

заны сплошными линиями, а электрическое поле, направленное перпендикулярно этим поверхностям, — стрелками. Рассмотрим для определенности положительно заряженную частицу. Чтобы получить ускорение, она должна двигаться слева направо (рис. 93). Если частица движется строго в средней плоскости циклотрона, то на нее, кроме ускоряющего поля в направлении движения, никакие силы не действуют. Если же частица отклонилась от средней плоскости, то, как непосредственно видно на рис. 93, на нее до середины ускоряющего промежутка будет действовать еще сила, направленная к средней плоскости, а после середины — сила, направленная от средней плоскости. Таким образом, в первой половине ускоряющего промежутка имеется фокусирующая частицу сила, а во второй — дефокусирующая. Изменение импульса, которое частица получает под действием силы,  $F$ , равно

$$dp = F dt. \quad (41.4)$$

При прохождении ускоряющего промежутка скорость частицы возрастает. Следовательно, вторую половину этого промежутка частица проходит за меньшее время, чем первую. Поэтому, хотя дефокусирующие силы равны фокусирующим, импульс, сообщаемый частице дефокусирующими силами, меньше, чем импульс, сообщаемый фокусирующими силами. Общий результат действия сил при прохождении ускоряющего промежутка состоит в том, что она получает импульс, направленный к средней плоскости, т. е. фокусируется.

Вторым фактором является изменение электрического поля в процессе прохождения частицей промежутка между дуантами. Если частица проходит промежуток при росте электрического поля, то первую половину промежутка она пересекает при меньшем среднем ускоряющем поле, чем вторую.

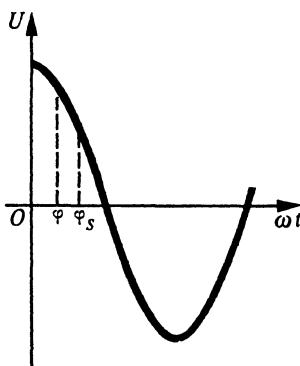


93.

Вертикальная фокусировка в циклотроне

!

*При движении всегда происходят случайные отклонения от идеальной траектории. Поэтому для осуществления некоторого движения недостаточно доказать возможность движения по идеальной траектории. Необходимо еще доказать устойчивость движения, т. е. доказать, что при небольшом отклонении от идеальной траектории частица будет и дальше удерживаться вблизи этой траектории.*

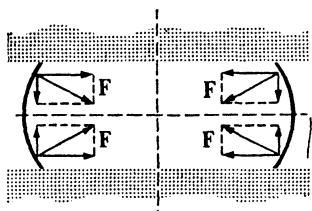


94.

Положительные фазы  $\varphi$  прохода заряженной частицы ускоряющего промежутка соответствуют уменьшению электрического поля

?

- 1 В чем состоит бета-тронное условие?
- 2 Какой фактор обуславливает предел энергиям, достижимым для электронов при ускорении в бетатроне?



95.

Вертикальная магнитная фокусировка в циклотроне

Благодаря этому фокусирующий эффект ослабляется относительно дефокусирующего и возникает дефокусирующий эффект. Если же частица проходит ускоряющий промежуток при уменьшающемся ускоряющем поле, то за счет изменения электрического поля возникает дополнительный фокусирующий эффект. Только в последнем случае частицы ускоряются устойчиво. На рис. 94 показана временная зависимость напряжения  $U$  на ускоряющем промежутке.

Пусть частица ускоряется при положительных значениях  $U$ . За начало отсчета фазы примем точку, когда разность потенциалов достигает максимального значения. Если частица пересекает промежуток не в этот момент, а раньше или позже, она приобретает энергию

$$\Delta W = eU \cos \varphi. \quad (41.5)$$

Угол  $\varphi$  называется фазой прохода частицы ускоряющего промежутка. Данный рост энергии может быть обеспечен как отрицательной фазой, так и равной ей по абсолютному значению положительной. Однако устойчивой будет только положительная фаза, когда величина поля уменьшается. Именно при таких фазах осуществляется ускорение в циклотроне.

Нетрудно видеть, что с ростом энергии частицы оба описанных фактора фокусировки ослабляются. Поэтому третьим фактором является дополнительная фокусировка магнитным полем. В связи с этим приходится отказаться от однородного магнитного поля, в котором линии индукции — прямые, перпендикулярные средней плоскости движения, параллельно которой к центру циклотрона направлена сила Лоренца. При отклонении частицы вверх или вниз со стороны однородного магнитного поля не возникает сил, стремящихся вернуть частицу к средней плоскости, т. е. в однородном магнитном поле отсутствует вертикальная магнитная фокусировка. Для осуществления такой фокусировки необходимо, чтобы линии маг-

нитной индукции имели бочкообразную форму с выпуклостью во внешнюю сторону от центра циклотрона (рис. 95). Сила Лоренца перпендикулярна магнитному полю. Как непосредственно видно на рис. 95, сила Лоренца  $F$  по обе стороны от средней плоскости имеет составляющие, направленные к ней. Следовательно, при такой конфигурации линий индукции имеется вертикальная фокусировка частиц: при отклонении от средней плоскости со стороны магнитного поля на частицу начинает действовать сила, стремящаяся ее вернуть обратно. Нетрудно видеть, что линии индукции выпуклостью обращены в сторону убывания магнитного поля. Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить магнитные поля между полюсами магнитов: у краев магнитов линии поля выпуклы. Таким образом, можно сказать, что вертикальная магнитная фокусировка достигается в магнитном поле, убывающем по радиусу.

Использование вертикальной магнитной фокусировки в циклотроне приводит к тому, что условия постоянства частоты обращения частиц не соблюдаются строго. Кроме того, постоянство этой частоты нарушается вследствие изменения массы, возрастающей с ростом энергии частиц. Но частота ускоряющего поля постоянна. Наступает момент, при котором резонанс расстраивается и частица, попадая в поле между дуантами, не ускоряется, а тормозится. Таким образом, можно сказать, что предел энергий, достижимых для частиц при ускорении в циклотроне, ограничен в основном релятивистским изменением массы со скоростью. Теоретически этот предел энергий достигает величины нескольких десятков миллионов электронвольт, практически он равен примерно  $15 \div 20$  МэВ.

**Бетатрон.** Бетатрон является единственным типом циклического ускорителя, в котором осуществляется индукционный метод ускорения, и в противоположность циклотрону предназначен для ускорения легких частиц — электронов, у которых существенно изменение массы со скоростью.

Условие, при котором ускоряемые электроны движутся по окружности постоянного радиуса, — бетатронное условие — может быть получено следующим образом. Пусть электрон движется по окружности постоянного радиуса  $r$  в растущем магнитном поле. Индукционное (вихревое) поле направлено в каждой точке по касательной к окружности этого радиуса, т. е. силовые линии индукционного электрического поля совпадают с окружностью. Обозначая импульс электрона через  $p$ , можно написать следующее уравнение движения вдоль окружности:

$$dp/dt = eE. \quad (41.6)$$

Это уравнение скалярное. Величины  $p$  и  $E$  в каждой точке окружности, по которой происходит движение, направлены по касательной к окружности. По закону электромагнитной индукции Фарадея, имеем

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (41.7)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, охватываемый орбитой электрона. Подставляя это выражение для  $E$  в уравнение (41.6) и интегрируя его по времени, находим:

$$\int_{t_0}^t \frac{dp}{dt} dt = \frac{e}{2\pi r} \int_{t_0}^t \frac{d\Phi}{dt} dt, \quad (41.8)$$

$$p_t - p_{t_0} = \frac{e}{2\pi r} (\Phi_t - \Phi_{t_0}), \quad (41.9)$$

где индексы  $t$  и  $t_0$  соответствуют моментам времени, при которых берется значение соответствующих величин, изменяющихся со временем. Учтем, что

$$p = mv = eBr, \quad (41.10)$$

$$\Phi = \pi r^2 \langle B \rangle, \quad (41.11)$$

где  $\langle B \rangle$  — среднее значение индукции магнитного поля, охватываемого орбитой электрона,  $B$  — индукция поля на этой орбите.

С учетом (41.10) и (41.11) уравнение (41.9) приобретает вид

$$B_t - B_{t_0} = \frac{1}{2} (\langle B_t \rangle - \langle B_{t_0} \rangle). \quad (41.12)$$

Полагая, что  $B_{t_0} = 0$ ,  $\langle B_{t_0} \rangle = 0$ , получаем **бетатронное условие**:

$$B_t = \frac{1}{2} \langle B_t \rangle, \quad (41.13)$$

т. е. поле на орбите должно составить половину среднего поля, охватываемого орбитой. При соблюдении этого условия электроны, ускоряясь вихревым электрическим полем, движутся по окружности постоянного радиуса. Чтобы обеспечить выполнение условия (41.13), необходимо добиться уменьшения магнитного поля от центра бетатрона к периферии. Для этого расстояние между полюсами магнитов увеличивается к периферии. На рис. 96 схематически показана форма электромагнитов бетатрона. Закон изменения магнитного поля во времени не играет роли. Поэтому достаточно подобрать форму полюсов магнитов, чтобы выполнялось условие (41.13), и можно производить ускорение при произвольном законе изменения магнитного поля во времени. Кроме того, видно, что в (41.13) не входит также и масса частицы. Следовательно, релятивистское изменение массы частицы со скоростью учитывается автоматически.

Вертикальная устойчивость движения электронов в бетатроне обеспечивается спаданием магнитного поля по радиусу. Необходимо еще позаботиться о радиальной устойчивости, т. е. добиться воз-

никновения сил, стремящихся вернуть частицу к движению по окружности постоянного радиуса, если по каким-либо причинам она сошла с этой окружности. Магнитное поле в теории ускорителей принято представлять в виде

$$B = B_0 (r_0/r)^n = \text{const}/r^n. \quad (41.14)$$

Это есть выражение для вертикальной составляющей магнитной индукции в средней плоскости ускорителя. Здесь  $r_0$  — радиус равновесной круговой орбиты,  $r$  — расстояние от центра ускорителя до точки орбиты. Величина  $n$  называется показателем спадания магнитного поля. Чтобы обеспечить вертикальную устойчивость, необходимо выполнение условия

$$n > 0. \quad (41.15)$$

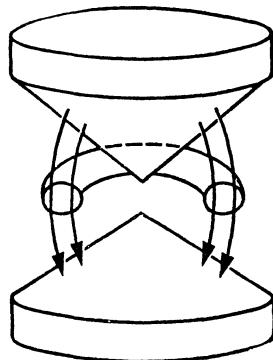
На частицу, движущуюся по окружности со скоростью  $v$ , со стороны магнитного поля действует центростремительная сила, равная

$$F_{\text{цс}} = evB = evB_0 (r_0/r)^n = \text{const}/r^n, \quad (41.16)$$

причем нас будут интересовать случаи  $0 < n < 1$  и  $n > 1$ . С другой стороны, равновесная центростремительная сила, необходимая для обеспечения движения по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v$ , равна

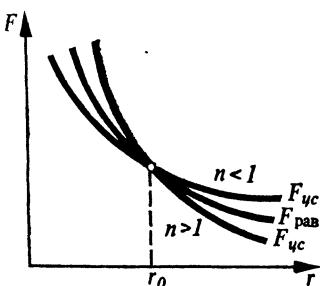
$$F_{\text{рав}} = mv^2/r = \text{const}/r. \quad (41.17)$$

Зависимость этих сил от радиуса изображена графически на рис. 97. В точке  $r_0$ , т. е. на равновесном радиусе, все три кривые пересекаются. Пусть по некоторой причине частица сошла с равновесной окружности, в результате чего ее расстояние от центра ускорителя изменилось, например увеличилось. Если  $n < 1$ , то при  $r > r_0$  центростремительная сила больше равновесной. Благодаря этому частица стремится вернуться на окружность радиуса  $r_0$ . Если же  $n > 1$ , то центростремительная сила меньше равновесной, в результате чего частица еще



96.

Схема устройства бетатрона



97.

К объяснению радиальной устойчивости в бетатроне

больше удаляется от центра окружности. Таким образом, радиальной устойчивостью это движение обладает только при  $n < 1$ . В случае  $n > 1$  наблюдается неустойчивость движения. Случай  $r_0 < r$  подтверждает это заключение. Учитывая также (41.15), можно условие устойчивости движения частицы в бетатроне записать в виде

$$0 < n < 1.$$

(41.18)

При выполнении этого условия частицы во время ускорения движутся вблизи окружности постоянного радиуса, совершая около нее небольшие колебания как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Эти колебания называются бетатронными.

Хотя при ускорении в бетатроне автоматически учитывается изменение массы со скоростью, получить сколь угодно большие энергии не удается. Предел достижимых энергий ограничен тормозным излучением. При движении по окружности электроны движутся с ускорением и, следовательно, излучают электромагнитные волны. Интенсивность излучения определяется формулой ( $v \approx c$ )

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{ce^2}{r_0^2} \left( \frac{E}{m_0c^2} \right)^4, \quad (41.19)$$

где  $E$  — полная энергия электронов. С ростом энергии величина излучения сильно возрастает. Это излучение, называемое синхронным, обладает рядом интересных особенностей. В частности, почти все излучение сосредоточено в узком конусе в направлении движения электрона. В излучении присутствуют все возможные длины волн. Максимальная интенсивность приходится на длины волн, которые могут находиться в области видимого света или быть даже короче. Поэтому излучение электрона подобно свету от прожектора, который движется по окружности и направляет узкий пучок света по касательной к окружности. Потери энергии электронов на излучение должны быть компенсированы за счет энергии электрического поля. Однако при энергии электронов в несколько сотен миллионов электронвольт такая компенсация становится невозможной. Бетатронное условие из-за излучения сильно нарушается, и электроны перестают двигаться по окружности постоянного радиуса. В результате бетатрон перестает работать. Практически бетатроны не строились на энергии, большие 300 МэВ. Для ускорения электронов до более высоких энергий они неприменимы.

**Синхротрон.** Для получения электронов с большей энергией приходится вернуться к резонансному принципу ускорения. Начиная с энергий  $4 \div 5$  МэВ скорость электрона очень мало отличается от скорости света, и ее можно считать постоянной. Поэтому, если электрон с энергией больше  $4 \div 5$  МэВ движется по окружности неизмененного радиуса, частота его вращения может считаться постоянной

пой. Вдоль траектории электрона, которая с помощью магнитного поля делается замкнутой, располагаются один или несколько ускоряющих промежутков, в которых приложено переменное электрическое поле. Поскольку частота вращения электрона по окружности постоянна, частота электрического поля на ускоряющих промежутках является постоянной. Для того чтобы при росте энергии электрона радиус его траектории оставался постоянным, необходимо увеличение магнитного поля.

Циклический ускоритель с переменным магнитным полем и ускоряющим электрическим полем постоянной частоты называется синхротроном (рис. 98). Между ростом энергии электрона и ростом величины магнитного поля соблюдается такое соотношение, что электрон все время движется по окружности постоянного радиуса. Магнитное поле создается не во всем пространстве, охватываемом орбитой электрона, а лишь в небольшом объеме вблизи равновесной орбиты. Радиальная и вертикальная устойчивости движения обеспечиваются так же, как в бетатроне, т. е. спаданием магнитного поля по радиусу с показателем спадания  $n$  ( $0 < n < 1$ ).

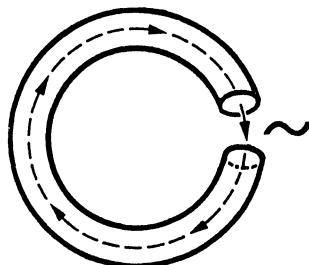
**Принцип автофазировки.** Пусть магнитное поле за время одного оборота частицы возрастает на  $\Delta B$ , тогда энергия частицы должна иметь приращение

$$\Delta E = ecr_0 \Delta B, \quad (41.20)$$

где учтено, что  $v \approx c$  и  $r_0 = \text{const}$ . Если амплитуда напряжения на ускоряющем промежутке равна  $U_0$ , то прирост энергии (41.20) частица получает при прохождении поля в фазе  $\varphi_s$  (см. рис. 94), определяемой условием

$$eU_0 \cos \varphi_s = \Delta E. \quad (41.21)$$

Фаза  $\varphi_s$  называется **равновесной**, а частица, проходящая электрическое поле при равновесной фазе, — **равновесной** частицей. Она движется по окружности постоян-



98.

Схема устройства синхротрона

?

1      Объясните принцип автофазировки. Вследствие каких процессов фаза частицы при ускорении в синхротроне колеблется около равновесного значения!

2      Какие факторы обеспечивают горизонтальную устойчивость движения в циклических ускорителях? Какие требования это налагает на закон изменения магнитного поля!

3      Что такое сильная фокусировка?

!

Соблюдение бетатронного условия обеспечивает такое соотношение между скоростями роста магнитного поля и энергии электрона, при котором радиус его орбиты сохраняется постоянным.

ного радиуса  $r_0$  и каждый раз проходит ускоряющее поле при одной и той же фазе  $\varphi_s$ .

Посмотрим, как будут вести себя частицы, которые попадают в переменное поле в другой фазе. Пусть некоторая частица прошла поле по каким-то причинам раньше равновесной, т. е. при  $\Phi_0 < \varphi_s$ , имея энергию, равную энергии равновесной частицы. Эта частица получит больший прирост энергии, чем равновесная, так как

$$eU_0 \cos \varphi_0 > eU_0 \cos \varphi_s. \quad (41.22)$$

Вследствие этого ее энергия станет больше, чем энергия равновесной частицы. В магнитном поле  $B = \text{const}/r^n$ ,  $0 < n < 1$ , при возрастании энергии частицы радиус кривизны ее траектории увеличивается. Поэтому рассматриваемая неравновесная частица будет двигаться по окружности большего радиуса, чем равновесная частица, и пройдет путь по окружности за большее время, поскольку ее скорость практически не изменилась и равна скорости равновесной частицы, т. е.  $v \approx c$ . Благодаря этому она придет на ускоряющий промежуток в фазе  $\varphi_1 > \varphi_0$ , т. е. ближе к равновесной фазе. В этой фазе неравновесная частица снова получит большее энергии, чем равновесная. Следовательно, радиус ее траектории еще больше возрастет, и она пройдет электрическое поле после следующего оборота в фазе  $\varphi_2 > \varphi_1$ , т. е. еще ближе к равновесной. Наконец, после некоторого числа оборотов частица пройдет переменное электрическое поле в равновесной фазе  $\varphi_n = \varphi_s$ . При этом прирост энергии этой частицы будет равен приросту энергии равновесной частицы.

Поскольку предыдущие проходы ускоряющего промежутка давали приrostы энергии больше приростов энергии равновесной частицы, энергия неравновесной частицы будет больше энергии равновесной и она будет двигаться по окружности большего радиуса, ее фаза будет продолжать увеличиваться:  $\varphi_{n+1} > \varphi_n$ ;  $\varphi_{n+2} > \varphi_{n+1}$  и т. д. Однако теперь прирост энергии неравновесной частицы при каждом проходе ускоряющего промежутка будет меньше, чем прирост энергии равновесной частицы. Разница в величинах энергии равновесной и неравновесной частиц постепенно уменьшается. После некоторого числа оборотов, когда фаза неравновесной частицы станет равной  $\varphi_{\max}$ , энергии той и другой частиц сравняются. При следующем проходе высокочастотного поля энергия неравновесной частицы станет меньше, чем равновесной, поскольку она получила меньший прирост энергии. Благодаря этому радиус движения неравновесной частицы станет меньше радиуса движения равновесной и, следовательно, очередной оборот она совершил за меньшее время. Фаза неравновесной частицы начнет уменьшаться и приближаться к равновесной фазе и т. д. В результате фаза неравновесных частиц будет колебаться около равновесной фазы. Эти колебания называются фазовыми. В среднем неравновесные частицы получают такой же прирост энергии, как и равновесные. Утверждение об устойчивости

колебания фазы около равновесного значения называется принципом автофазировки. Он играет важнейшую роль в ускорителях.

Как видно из описанного механизма автофазировки, значение равновесной фазы автоматически подбирается таким, чтобы прирост энергии соответствовал скорости роста магнитного поля: если она уменьшается, то равновесная фаза автоматически увеличивается, и наоборот. Поэтому в широких пределах закон роста магнитного поля является произвольным. Надо лишь не допускать слишком быстрого роста магнитного поля, потому что в этом случае даже фаза, близкая к нулю, не сможет обеспечить достаточно большой прирост энергии за оборот.

При нескольких ускоряющих промежутках за один оборот частице можно сообщить очень большую энергию. Поэтому величина потерь энергии на излучение не является для синхротронов существенным препятствием к достижению очень больших энергий. В электронных синхротронах достигнуты энергии около 6 млрд. эВ. Однако и для них есть предел энергиям. Он обусловливается квантовым характером излучения. Из-за случайного характера актов излучения в синхроне под их влиянием возникают фазовые и бетатронные колебания. Хотя они и затухают за счет радиационного трения, но все же затрудняют работу электронных ускорителей на очень большие энергии.

**Фазotron.** Как было сказано, циклотрон перестает работать потому, что частота обращения частицы изменяется при росте ее энергии. Пользуясь принципом автофазировки, эту трудность можно преодолеть, сделав переменной частоту ускоряющего поля. Релятивистское изменение массы ускоряемых частиц автоматически учитывается изменением частоты ускоряющего поля. Циклотрон с переменной частотой ускоряющего поля называется фазотроном. Магнитное поле в нем постоянно по времени. В фазотронах можно получить энергии в сотни миллионов электронвольт. Практически получены энергии около 700 млн. эВ. Дальнейшее увеличение энергии затруднительно по техническим причинам, поскольку приходится создавать магнитные поля на очень большой площади, что связано с большим весом магнитов и другими трудностями. Конфигурация магнитного поля в синхротроне более целесообразна: оно создается не по всей площади круга ускорителя, а лишь в узком кольце, где движутся ускоряемые частицы.

**Синхрофазotron.** Если в установке, подобной синхротрону, ускорять тяжелые частицы, то, несмотря на постоянный радиус траектории, частота вращения этих частиц является переменной, поскольку для тяжелых частиц скорость заметно изменяется при росте энергии до нескольких миллиардов электронвольт. Лишь при энергии в несколько миллиардов электронвольт их скорость становится столь близкой к скорости света, что ее дальнейшим изменением с кинематической точки зрения можно пренебречь. Подчеркнем здесь слово «кинематический», поскольку как рост массы, так и рост полной

энергии обуславливается изменением скорости частицы. Вблизи скорости света совершенно незаметное изменение скорости частицы приводит к громадным изменениям полной энергии частицы и ее массы.

При ускорении тяжелых частиц в установке, похожей на синхротрон, необходимо учесть изменение частоты вращения частиц. Чтобы частица при ускорении двигалась по окружности постоянного радиуса, магнитное поле в кольце, в пределах которого движутся частицы, также должно увеличиваться. Частота электрического поля также должна возрастать в соответствии с частотой вращения частиц. Такой ускоритель с переменным магнитным полем в кольцевой области, переменной частотой ускоряющего электрического поля и постоянным радиусом траектории частиц называется синхрофазотроном. Он применяется для ускорения тяжелых частиц, главным образом протонов.

Радиальная и вертикальная устойчивости в нем обеспечиваются конфигурацией магнитного поля, спадающего к периферии, как у бетатронов и синхротронов. Автофазировка делает колебания фазы устойчивыми, как это было объяснено для синхротрона.

Из формулы, связывающей радиус  $r$  кривизны орбиты с величиной магнитного поля, нетрудно получить следующую формулу ( $v \approx c$ ) для поля  $B = 10^4$  Гс:

$$r = (10/3)E, \quad (41.23)$$

где радиус выражен в метрах,  $E$  — в миллиардах электронвольт (БэВ). Отсюда видно, что ускоритель электронов на 1 БэВ имеет радиус примерно 3,5 м. Ускоритель протонов на энергию 10 БэВ имеет радиус примерно 35 м. Размер камеры, в которой производится ускорение, должен составлять примерно 5% от радиуса, чтобы частицы имели возможность колебаться около равновесной орбиты, не касаясь стенок. В связи с этим приходится создавать сильное магнитное поле в довольно больших объемах. Например, магнит синхрофазотрона в Дубне (СССР) на энергию 10 БэВ весит свыше 30 тыс. тонн. Вес магнита растет примерно пропорционально кубу энергии. Поэтому, чтобы построить ускоритель с энергией около 50 БэВ, необходимо иметь магнит весом много сотен тысяч тонн. Технически это весьма сложно и очень дорогостоящее.

**Принцип сильной фокусировки.** Для того чтобы уменьшить амплитуду колебаний частицы в окрестности равновесной орбиты и благодаря этому уменьшить объем, в котором надо создавать магнитное поле, и, следовательно, уменьшить вес магнита, можно воспользоваться принципом сильной, или жесткой, фокусировки. Суть этого принципа состоит в следующем. Вся окружность ускорителя разбивается на много секторов. Магнитное поле в секторах берется попеременно то очень сильно растущим, то очень сильно убывающим. Если поле определяется формулой (41.14), то в секторе, в котором поле сильно растет по радиусу,  $n \ll -1$ , а в соседних секторах

поле должно сильно убывать по радиусу и поэтому  $n \gg 1$ . Обычно  $n$  по абсолютному значению бывает равным нескольким десяткам или нескольким сотням.

Как показывает теория, при определенных соотношениях между длинами секторов и показателями  $n$  магнитного поля в секторах движение частицы является устойчивым, причем частица удерживается около равновесной орбиты очень большими средними силами и амплитуда ее колебаний оказывается очень малой. Например, в ускорителе со слабой фокусировкой на энергию 10 БэВ камера имеет радиальный размер около 1,5 м, а в ускорителе с сильной фокусировкой на энергию 30 БэВ достаточно сделать камеру радиального размера около 15 см. Это дает возможность значительно снизить вес магнита. Например, магнит синхрофазотрона с мягкой фокусировкой на энергию 10 БэВ весит около 30 тыс. тонн, а у синхрофазотрона с жесткой фокусировкой на энергию 30 БэВ — всего 4 тыс. тонн. Все синхротроны на энергии выше 10 БэВ строятся только с жесткой фокусировкой. В настоящее время в мире имеется несколько синхрофазотронов с жесткой фокусировкой на энергию около 30 млрд. эВ, по одному ускорителю — на 70 и 500 млрд. эВ.

**Линейные ускорители.** Простейшим линейным ускорителем является последовательность трубок, к которым приложено переменное напряжение (см. начало настоящего параграфа). Однако более распространенным является волноводный тип ускорителя. Он представляет собой трубку, вдоль которой распространяется электромагнитная волна соответствующей конфигурации. В волноводах могут возбуждаться волны так называемого  $E$ -типа, имеющие вдоль оси волновода составляющую напряженности электрического поля, которое может ускорить частицу в направлении этой оси. Скорость движения волны в волноводе регулируется с помощью диафрагм, поставленных в нем. Можно подобрать такие условия, чтобы частица, ускоряемая волной, как бы «сидела» на волне, т. е. в каждый момент имела такую скорость, какую имеет волна в волноводе. В результате этого на частицу все время действует ускоряющее поле волны и она приобретает значительную энергию.

Линейные ускорители для электронов позволяют избежать эффектов, связанных с излучением. Поэтому самый мощный ускоритель для электронов в настоящее время является линейным. Его длина около 3 км, а достижимая энергия около 20 БэВ.

Имеются также индукционные линейные ускорители. Вдоль их оси возбуждается индукционное электрическое поле, обусловленное изменением магнитного поля, которое создается соответствующим образом расположеными обмотками с током. Основное преимущество индукционных линейных ускорителей заключается в возможности создавать интенсивные потоки ускоряемых частиц.

# Глава 9

## СТОЛКНОВЕНИЯ

---

- 42. Характеристика процессов столкновения
- 43. Упругие столкновения
- 44. Неупругие столкновения
- 45. Реакции между субатомными частицами

Главный интерес при рассмотрении столкновения заключается в знании не самого процесса столкновения, а его результата. Задача теории — установить связь между характеристиками состояния частиц до и после их столкновения без ответа на вопрос, как эта связь осуществляется. Законы сохранения не управляют процессами столкновения, а лишь соблюдаются при их осуществлении.

---

### 42. Характеристика процессов столкновения

**Определение понятия столкновения.** Наиболее общим явлением, наблюдаемым в природе, является взаимодействие материальных тел. Бильярдные шары, сближаясь, в момент соприкосновения взаимодействуют друг с другом. В результате этого меняются скорости шаров, их кинетические энергии и в общем случае также их внутреннее состояние, например температура. О таком взаимодействии шаров говорят как об их столкновении.

Но понятие столкновения относится не только к взаимодействиям, осуществляющим посредством соприкосновения материальных тел. Комета, прилетавшая из глубины Вселенной и прошедшая в окрестности Солнца, меняет свою скорость и снова удаляется в глубины Вселенной в другом направлении. Этот процесс также является столкновением, хотя непосредственного соприкосновения между кометой и Солнцем не произошло, а осуществлено оно было посредством сил

тяготения. Характерная особенность этого взаимодействия, которая дает нам возможность рассматривать его как столкновение, заключается в том, что область пространства, в котором оно произошло, относительно мала. Заметное изменение скорости кометы происходит в области солнечной системы. Эта область велика с точки зрения земных масштабов, но мала с точки зрения астрономических масштабов, в частности в сравнении с теми расстояниями до глубин Вселенной, из которых, возможно, пришла комета. Поэтому процесс столкновения кометы с Солнцем выглядит так: в течение длительного времени, когда комета прошла громадное расстояние, она двигалась по прямой линии без взаимодействия с Солнцем; затем в небольшой области в окрестности Солнца, измеряемой лишь сотнями миллионов километров, происходит взаимодействие кометы с Солнцем, в результате которого скорость и некоторые другие характеристики кометы меняются, и после этого комета снова удаляется в глубины Вселенной, двигаясь прямолинейно, практически без всякого взаимодействия с Солнцем.

В качестве еще одного примера можно рассмотреть столкновение протона с ядром. При большом расстоянии между ними они оба движутся практически без взаимодействия, равномерно и прямолинейно. При достаточно малых расстояниях кулоновские силы отталкивания становятся достаточно большими, в результате чего скорости протона и ядра изменяются. Может произойти испускание квантов электромагнитного излучения, а если их энергия достаточно велика, то — образование других частиц, например мезонов, или распад ядра. Поэтому в результате этого взаимодействия, которое также происходит в сравнительно небольшой области пространства, в простейшем случае протон и ядро будут двигаться с другими, чем до столкновения, скоростями и энергиями, появятся несколько квантов электромагнитного излучения и, вообще говоря, породятся некоторые другие частицы.

Приведенные примеры позволяют дать следующее определение:

**Столкновением называется взаимодействие двух или большего числа материальных тел, частиц и т. д., которое происходит в относительно малой области пространства в течение относительно малого промежутка времени, так что вне этой области пространства и вне этого промежутка времени можно говорить о начальных состояниях тел, частиц и т. д. и об их конечных состояниях после взаимодействия как состояниях, в которых эти частицы, тела и т. д. не взаимодействуют.**

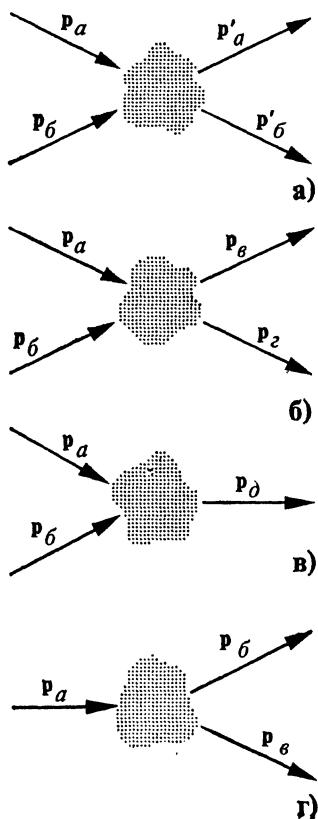
В механике тела и частицы, участвующие в столкновении, характеризуются импульсами, моментами импульса и энергиями, а сам процесс сводится к изменению этих величин. Можно сказать, что частицы обмениваются энергией и импульсом. Если в результате взаимодействия образовались новые частицы и исчезли некоторые из частиц, существовавших до столкновения, то произошла замена носителей энергии и импульса.

?

- 1 Знаете ли Вы общее определение столкновения! Что общего в столкновении элементарных частиц, бильярдных шаров и прохождении кометы вблизи Солнца!
- 2 Что понимается под состояниями до и после столкновения!

99.

Диаграмма различных процессов столкновения



Изображение процессов столкновений с помощью диаграмм. Общепринято в настоящее время процессы столкновения представлять в виде диаграмм. Частицы или тела, участвующие в столкновении, изображаются векторами их импульсов. Векторы импульсов частиц до и после столкновения направлены соответственно в символическое изображение области столкновения и из нее. Возможно, очевидно, громадное разнообразие процессов столкновений. На рис. 99 показаны наиболее характерные. Рис. 99, а соответствует случаю столкновения двух частиц  $a$  и  $b$  с импульсами  $p_a$  и  $p_b$ . После взаимодействия остались те же частицы, но их импульсы естественно изменились на  $p'_a$  и  $p'_b$ . Однако в результате столкновения вместо частиц  $a$  и  $b$  могли образоваться две другие частицы:  $\gamma$  и  $\delta$  (рис. 99, б), либо, например, одна частица  $\delta$  (рис. 99, в). Может случиться, что под влиянием некоторых процессов внутри частицы она распадается на две другие частицы:  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 99, г). Нет необходимости приводить все мыслимые диаграммы столкновений. Укажем лишь на возможность принципиально отличного от всех предыдущих процесса, в котором возникает промежуточное состояние (рис. 99, д). В этом случае процесс столкновения состоит из двух стадий: сначала частицы  $a$  и  $b$  образуют частицу  $\gamma$ , так называемую промежуточную, а затем она распадается на частицы  $\beta$  и  $\delta$ , которые в общем случае могут быть идентичными частицам  $a$  и  $b$ , но могут быть и другими. Таким образом, окончательный результат этого процесса эквивалентен столк-

новениям, изображенным на диаграммах рис. 99, а, б. Однако наличие промежуточного состояния, вообще говоря, оказывает влияние на ход процесса.

**Законы сохранения при столкновениях.** Процессы столкновения являются чрезвычайно сложными. Рассмотрим, например, простейший случай столкновения двух бильярдных шаров (рис. 99, а). В момент соприкосновения шаров происходит деформация. В результате часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации (мы говорим о переходе части кинетической энергии, потому что имеется в виду не обязательно лобовой удар шаров). Затем энергия упругой деформации снова превращается в кинетическую, однако не полностью — часть энергии превращается во внутреннюю, шары при этом нагреваются. Далее необходимо принять во внимание, что поверхности шаров не являются абсолютно гладкими и между ними возникают силы трения. Эти силы, с одной стороны, также приводят к превращению части энергии во внутреннюю, а с другой — вызывают определенное изменение во вращении шаров. Таким образом, даже в простейшем случае картина столкновения оказывается чрезвычайно сложной.

Однако главный интерес при рассмотрении столкновения заключается в знании не самого процесса, а результата. Ситуация до столкновения называется начальным состоянием, а после — конечным. Между величинами, характеризующими начальное и конечное состояния, соблюдаются вполне определенные соотношения, независимые от детального характера взаимодействия. Наличие этих соотношений обусловливается тем, что совокупность частиц, участвующих в столкновении, составляет изолированную систему, для которой справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента импульса (см. гл. 6). Следовательно, соотношения между величинами, характеризующими начальное и конечное состояния частицы, выражаются законами сохранения энергии, импульса и момента импульса при столкновении.

Законы сохранения сами по себе не дают возможности определить что произойдет при столкновении. Но если известно, что произойдет, они значительно облегчают анализ того, как это произойдет.

**Закон сохранения импульса.** Импульсы различных частиц до столкновения обозначим через  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а после — через  $p'_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Поскольку импульс замкнутой системы сохраняется, можем написать:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^k p'_j. \quad (42.1)$$

Ясно, что как число частиц, так и сорт частиц до и после столкновения могут быть различными. Этот закон справедлив в релятивистском и нерелятивистском случаях.

**Закон сохранения энергии.** Применение этого закона более сложно, чем закона сохранения импульса. Дело в том, что закон сохранения энергии был сформулирован (см. гл. 6) лишь применительно к формам энергии, рассматриваемым в механике. Поэтому в релятивистском случае надо учесть лишь кинетическую и потенциальную энергию, а в релятивистском случае — также и энергию покоя. Однако имеются и другие формы энергии, которые надо принять во внимание. Например, при столкновении биллярдных шаров, строго говоря, происходит их небольшое нагревание. Поэтому сумма кинетических энергий шаров до и после столкновения не одна и та же, т. е. кинетическая энергия при столкновении не сохраняется. Часть ее превращается во внутреннюю, связанную с теплом и локализованную внутри шара. Имеются и другие виды внутренней энергии. Взаимная потенциальная энергия частиц, составляющих шар, их энергия покоя также относятся к внутренней энергии. Поэтому, чтобы применить закон сохранения энергии, надо учесть внутреннюю энергию материальных тел или частиц, участвующих в столкновении. Однако потенциальную энергию взаимодействия между сталкивающимися частицами учитывать не надо, потому что и в начальном, и в конечном состоянии они считаются невзаимодействующими. Обозначив внутреннюю энергию частиц как  $E_{\text{вн}}$ , а кинетическую энергию поступательного движения тела как  $W_{\text{кин}}$ , закон сохранения энергии при столкновении можем записать в виде

$$\sum_{i=1}^n (E_{\text{вн}, i} + W_{\text{кин}, i}) = \sum_{j=1}^k (E'_{\text{вн}, j} + W'_{\text{кин}, j}). \quad (42.2)$$

Заметим, что кинетическую энергию вращательного движения удобнее относить к внутренней энергии.

В релятивистском случае вид уравнений (42.2) значительно проще. Дело в том, что релятивистская полная энергия тела, выражаемая формулой (28.10), включает в себя как кинетическую энергию, так и энергию покоя, в которую входят все формы внутренней энергии. Например, если при столкновении биллярдный шар нагреется, то это приведет к увеличению массы покоя и будет автоматически учтено соответствующим изменением его полной энергии. Поэтому в релятивистском случае уравнение (42.2) записывается так:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{j=1}^k E'_j, \quad (42.3)$$

где

$$E_i = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v_i^2/c^2} \quad (42.3a)$$

есть полная энергия  $i$ -й частицы, масса покоя которой  $m_{0i}$ . С учетом (42.3а) равенство (42.3) представим в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \sum_{j=1}^k \frac{m'_{0j}}{\sqrt{1-v'_j^2/c^2}}. \quad (42.4)$$

**Закон сохранения момента импульса.** При применении закона сохранения момента импульса надо учитывать, что тела и частицы могут обладать внутренним моментом импульса. У тел он обусловлен вращением. Микрочастицы также имеют внутренний момент импульса, называемый спином. Например, спином обладают электрон, протон и многие другие элементарные частицы. Объяснить наличие спина вращением элементарных частиц нельзя, как это было уже рассмотрено раньше. При столкновениях он должен быть учтен как внутренний момент импульса частицы. Поэтому, если через  $M_i$  обозначить моменты импульса частиц, участвующих в столкновении, а через  $M_{\text{вн}, i}$  их внутренние моменты, закон сохранения импульса при столкновении можно представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n (M_i + M_{\text{вн}, i}) = \sum_{j=1}^k (M'_j + M'_{\text{вн}, j}). \quad (42.5)$$

**Упругие и неупругие столкновения.** Процессы столкновения делятся на упругие и неупругие в соответствии с характером изменения внутренней энергии частиц при их взаимодействии. Если внутренняя энергия частиц при этом изменяется, то столкновение называется неупругим, если не изменяется, то столкновение упругое. Например, столкновение бильярдных шаров, в результате которого они несколько нагреваются, является неупругим, поскольку изменилась внутренняя энергия. Однако если бильярдный шар сделан из достаточно подходящего материала (например, слоновой кости), то его нагревание незначительно и можно с большой точностью считать, что оно вообще отсутствует. В этом предположении удар бильярдных шаров можно рассматривать как упругое столкновение. Иногда говорят об абсолютно упругом столкновении, чтобы подчеркнуть, что внутренняя энергия сталкивающихся частиц абсолютно точно неизменна. Говорят также об абсолютно неупругом столкновении, если в конечном состоянии вся энергия превратилась во внутреннюю. Например, лобовой удар двух шаров из мягкого материала одинаковой массы, которые после удара сливаются в одно покоящееся тело, является абсолютно неупругим столкновением.

**Система центра масс.** Рассмотрение столкновений значительно упрощается, если его проводить в системе центра масс (см. § 23). В этой системе законы сохранения энергии и момента импульса имеют такой же вид, как (42.3) и (42.5), а закон сохранения импульса (42.1), поскольку, по определению, сумма импульсов частиц в системе центра масс равна нулю, записывается в более простом виде:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^k \mathbf{p}'_j = 0. \quad (42.6)$$

### 43. Упругие столкновения

**Столкновения двух частиц в нерелятивистском случае.** Выберем систему координат так, чтобы одна из частиц, например вторая, до столкновения покоялась, т. е.  $\mathbf{p}_2 = 0$ . Тогда законы сохранения энергии и импульса запишутся следующим образом:

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\mathbf{p}'_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2^2}{2m_2}, \quad (43.1)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (43.2)$$

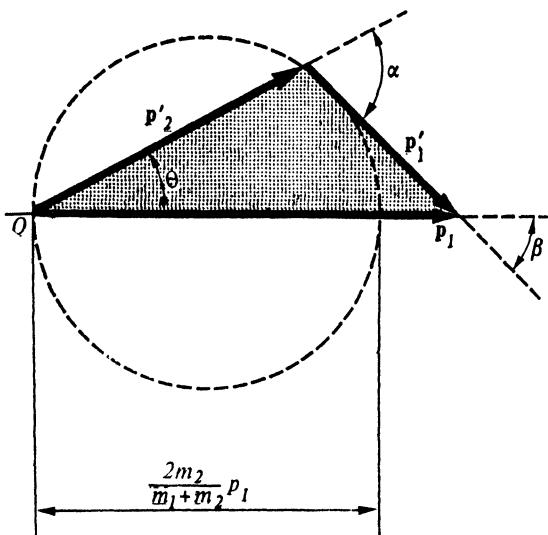
где кинетическая энергия выражена через импульс  $[(mv^2/2) = p^2/2m]$  и учтено, что при упругом столкновении внутренняя энергия не изменяется. Подставив значение  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2$  из (43.2) в уравнение (43.1), находим

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_2) = \mathbf{p}'_2^2 (m_1 + m_2)/2m_2. \quad (43.3)$$

Обозначим угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  через  $\theta$ . Тогда  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_2) = p_1 p_2 \cos \theta$  и из уравнения (43.3) получим следующее выражение для  $\mathbf{p}'_2$ , которое полностью решает рассматриваемую задачу:

$$p'_2 = 2[m_2/(m_1 + m_2)] p_1 \cos \theta. \quad (43.4)$$

Теперь можно осуществить простое геометрическое построение, которое позволит описать результат столкновения. Проведем из некоторой точки  $O$  вектор  $\mathbf{p}_1$ , изображающий импульс налетающей частицы (рис. 100). Затем построим окружность радиуса  $2[m_2/(m_1 + m_2)] p_1$  с центром, лежащим на прямой, совпадающей с вектором  $\mathbf{p}_1$  таким образом, чтобы окружность проходила через точку  $O$ . Поскольку угол вписанного в окружность треугольника, опирающегося на диаметр, равен  $\pi/2$ , все отрезки, проведенные из  $O$  к точкам окружности, удовлетворяют уравнению (43.4). Следовательно, эти отрезки дают импульс после столкновения той частицы, которая до столкновения покоялась. Из закона сохранения импульса (43.2)



100.

Графическое решение задачи на столкновение двух частиц при  $m_1 > m_2$

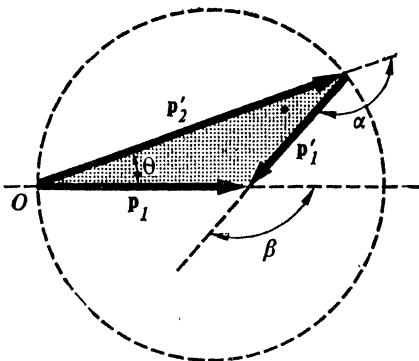
сразу следует, что импульс падающей частицы после столкновения дается построением, указанным на рис. 100. Угол между импульсами первой и второй частиц после столкновения равен  $\alpha$ . Угол  $\beta$  является углом отклонения налетающей частицы от направления движения до столкновения. Нетрудно чисто геометрически найти также величину  $p'_1$ . Таким образом, все величины, характеризующие столкновение, полностью определены. На рис. 100 изображен случай, когда  $2m_2/(m_1 + m_2) < 1$ , т. е. когда масса налетающей частицы больше массы покоящейся ( $m_1 > m_2$ ), которая называется мишенью. Из рис. 100 непосредственно видно, что угол разлета  $\alpha$  между частицами после столкновения изменяется от  $\pi/2$  до 0. Максимальное значение импульса  $p'_1$  будет тогда, когда мишень после столкновения движется почти перпендикулярно скорости налетающей частицы. Отметим, что налетающая частица не может изменить направление своего движения на произвольный угол. Существует максимальный угол  $\beta_{\max}$ . Отклониться больше,

!

*Вопрос о том, что происходит в области столкновения частиц, нас не интересует. Нам важно знать лишь, какая существует связь характеристик сталкивающихся частиц до и после столкновения.*

101.

Графическое решение задачи на столкновение двух частиц при  $m_1 < m_2$



!

*Под каким углом разлетаются после столкновения частицы одинаковой массы, если до столкновения одна из них покоялась?*

?

- 1 При каком условии угол разлета между частицами после упругого столкновения заключен в пределах от 0 до  $\pi/2$ ?
- 2 Когда падающая на мишень частица в результате упругого столкновения не может отклониться на любой угол и когда может?
- 3 Какими факторами определяется величина переданной при упругом столкновении энергии от движущейся частицы к мишени?

чем на этот угол, частица не может. Он получается на рис. 100 в том случае, когда линия  $p_1'$  касается окружности.

На рис. 101 выполнено геометрическое построение, описывающее столкновение, когда масса мишени больше массы падающей частицы ( $m_2 > m_1$ ). Угол разлета частиц после столкновения, как это непосредственно видно на рисунке, изменяется в пределах  $\pi/2 < \alpha < \pi$ . Угол  $\beta$  отклонения падающей частицы от первоначального направления изменяется от 0 до  $\pi$ , т. е. частица может отклониться незначительно, а может изменить направление своего движения на обратное.

В каждом из рассматриваемых случаев все характеристики столкновения определяются по углу  $\theta$ . Но каково его значение в некотором конкретном столкновении? На этот вопрос законы сохранения ответить не могут. Все зависит от условий столкновения и особенностей взаимодействия. Поэтому законы сохранения не дают сами по себе полного решения задачи о столкновении, но позволяют проанализировать его основные особенности.

**Лобовое столкновение.** На рис. 100 и 101 видно, что покоящаяся частица получает в результате столкновения максимальный импульс в том случае, когда

$\theta = 0$ . В этом случае столкновение называется лобовым или центральным ударом. Оно происходит, например, при движении бильярдных шаров навстречу друг другу вдоль линии, соединяющей их центры (эта линия не должна изменять свою ориентировку в пространстве в инерциальной системе координат).

Из (43.4) в этом случае сразу следует, что

$$\mathbf{p}'_2 = [2m_2/(m_1 + m_2)] \mathbf{p}_1. \quad (43.5)$$

Кинетическая энергия второй частицы после удара  $W'_2 = p_2'^2/2m_2$  выражается через кинетическую энергию первой частицы до удара  $W_1 = p_1^2/2m_1$  следующей формулой:

$$W'_2 = [4m_1m_2/(m_1 + m_2)^2] W_1, \quad (43.6)$$

как это непосредственно следует из (43.5). Отсюда видно, что максимальная передача энергии происходит при равенстве масс частиц ( $m_1 = m_2$ ). В этом случае

$$W'_2 = W_1, \quad (43.7)$$

т. е. вся энергия от первой частицы передается второй. Первая частица при этом останавливается. Это видно как из закона сохранения энергии (43.7), так и из уравнения (43.5), принимающего вид  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1$ , и в комбинации с законом сохранения импульса (43.2), приводящего к равенству  $\mathbf{p}'_1 = 0$ .

При значительном различии масс сталкивающихся частиц передаваемая энергия очень мала. Из (43.6) следует:

$$W'_2 \approx 4(m_2/m_1) W_1 \text{ при } m_1 \gg m_2, \quad (43.8a)$$

$$W'_2 \approx 4(m_1/m_2) W_1 \text{ при } m_2 \gg m_1, \quad (43.8b)$$

т. е. в обоих случаях  $W'_2 \ll W_1$ . Однако передача импульса не является малой. Из (43.5) видно, что, если масса падающей частицы много меньше массы покоящейся ( $m_1 \gg m_2$ ), покоящаяся частица после столкновения имеет импульс, много меньший, чем импульс падающей частицы [ $\mathbf{p}'_2 \approx (2m_2/m_1)\mathbf{p}_1$ ], однако скорость ее при этом не будет сильно отличаться от скорости падающей частицы. Учитывая, что  $\mathbf{p}'_2 = m_2\mathbf{v}'_2$  и  $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$ , для скоростей находим

$$\mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{v}_1. \quad (43.9)$$

В случае  $m_2 \gg m_1$  передача импульса от первой частицы ко второй значительна ( $\mathbf{p}'_2 \approx 2\mathbf{p}_1$ ). Однако, хотя импульс второй частицы в два раза больше, чем импульс первой, ее скорость очень мала в сравнении со скоростью первой частицы [ $\mathbf{v}'_2 \approx (2m_1/m_2)\mathbf{v}_1$ ]. Направление скорости первой частицы в результате столкновения меняется на обратное, а по абсолютной величине существенно не изменяется,

**Замедление нейтронов.** Особенности упругого удара имеют многие важные применения в науке и технике. Рассмотрим в качестве примера замедление нейтронов. При делении ядер урана на две примерно равные части выделяется большая энергия в виде кинетической энергии осколков деления. Одновременно при делении образуется один или несколько нейтронов. Само деление ядра урана происходит под действием нейтронов. При столкновении ядра урана с нейтроном в большинстве случаев происходит упругое столкновение, но иногда оно завершается захватом, в результате которого ядро урана делится. Вероятность этого захвата очень мала и увеличивается с уменьшением энергии нейтрона. Поэтому, чтобы обеспечить достаточно интенсивную цепную реакцию, т. е. чтобы выделяющиеся при делении ядра урана нейтроны вызывали достаточно интенсивное деление других его ядер, необходимо уменьшить кинетическую энергию нейтронов. При каждом упругом лобовом столкновении нейтронов с ядрами урана в соответствии с формулами (43.8) от нейтрона к ядру передается лишь часть (примерно 4/238) его энергии. Это очень маленькая передача, и нейтроны замедляются чрезвычайно медленно. Чтобы ускорить замедление, в зону атомного реактора, в которой происходит деление ядра, вводится специальное вещество — замедлитель. Ясно, что ядра замедлителя должны быть достаточно легкими. В качестве замедлителя употребляется, например, графит. Ядро углерода, входящего в графит, примерно лишь в 12 раз массивнее нейтрона. Поэтому при каждом лобовом столкновении нейтрона с ядром графита последнему передается примерно  $(4/12) = \frac{1}{3}$  часть энергии нейтрона и процесс замедления идет очень быстро.

**Комpton-эффект.** Рассмотрим аналогично столкновение двух частиц, обладающих релятивистскими скоростями. Если одну из частиц считать до столкновения покоящейся, а другую движущейся с релятивистской скоростью, то вид закона сохранения импульса (42.1) не изменится, а вместо закона сохранения энергии (42.2) необходимо написать закон сохранения полной энергии в виде

$$\frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + m_{02}c^2 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-v_1'^2/c^2}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}. \quad (43.10)$$

Мы не будем анализировать особенности решения этих уравнений в общем случае, поскольку это довольно громоздко. Вместо этого рассмотрим один конкретный процесс, который сыграл большую роль в физике, — эффект Комптона. Все материальные частицы обладают как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Это означает, что в одних обстоятельствах частица ведет себя как волна, а в других — как корпускула. Такими же свойствами обладает свет. Корпускулярные свойства света выражаются в том, что в определенных условиях излучение ведет себя как совокупность частиц — фотонов. Фотон несет с собой энергию  $\epsilon$  и импульс  $p$ , которые

связаны с частотой света  $\omega$  и длиной волны  $\lambda$  следующими формулами:

$$p = h\mathbf{k}, \quad \varepsilon = h\omega, \quad (43.11)$$

где  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , а  $h = 1,05 \cdot 10^{-23}$  Дж · с есть постоянная Планка. Корпускулярные свойства проявляются тем отчетливее, чем меньше длина волны. Фотоны, соответствующие длинам волн порядка ангстрема ( $1\text{\AA} = 10^{-8}$  см), называются  $\gamma$ -квантами. Корпускулярные свойства  $\gamma$ -квантов выражены очень ярко. При столкновении с электронами они ведут себя подобно частицам, энергия и импульс которых даются формулами (43.11).

Рассмотрим столкновение между покоящимся электроном и  $\gamma$ -квантом (рис. 102). Падающий квант до столкновения имеет импульс  $\mathbf{p}_1 = h\mathbf{k}$  и энергию  $\varepsilon_1 = h\omega$ , после столкновения с электроном, двигаясь под углом  $\beta$ , — импульс  $\mathbf{p}'_1 = h\mathbf{k}'$  и энергию  $\varepsilon'_1 = h\omega'$ . Энергия и импульс электрона после столкновения равны  $E'_2 = mc^2$  и  $\mathbf{p}'_2 = mv$ , до столкновения его энергия равна энергии покоя  $E_2 = m_0c^2$ , а импульс  $\mathbf{p}_2 = 0$ . Запишем законы сохранения энергии (43.10) и импульса (42.1) с учетом соотношений (43.11):

$$\begin{aligned} m_0c^2 + h\omega &= mc^2 + h\omega', \\ h\mathbf{k} &= h\mathbf{k}' + mv. \end{aligned} \quad (43.12)$$

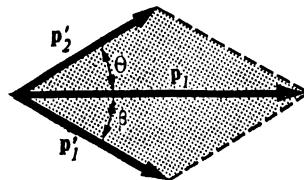
Перепишем эти равенства в виде

$$mc^2 = h(\omega - \omega') + m_0c^2, \quad mv = h(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

и возведем в квадрат:

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= h^2(\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + m_0^2c^4 + \\ &+ 2hm_0c^2(\omega - \omega'), \\ m^2v^2 &= h^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos\beta). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $k = (2\pi/\lambda) = (2\pi/cT) = \omega/c$ , где  $T$  — период колебаний световой волны, умножим второе



102.

К объяснению эффекта Комптона

?

- 1 | При каком условии замедление быстро движущихся частиц при упругих столкновениях является наиболее эффективным!
- 2 | Какие столкновения в комптон-эффекте не приводят практически к изменению частоты  $\gamma$ -квантов!

!

При столкновении  $\gamma$ -кванта с покоящимся свободным электроном происходит частичная передача электрону импульса и энергии  $\gamma$ -кванта. Вследствие этого изменяется направление движения  $\gamma$ -кванта и он теряет часть своей энергии.

равенство на  $c$  и, вычитая его почленно из первого, получаем

$$m^2 c^4 (1 - v^2/c^2) = m_0^2 c^4 - 2h^2 \omega \omega' (1 - \cos \beta) + 2hm_0 c^2 (\omega - \omega'). \quad (43.13)$$

Учитывая, что

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad 1 - \cos \beta = 2 \sin^2(\beta/2),$$

из (43.13) находим

$$\frac{c}{\omega'} - \frac{c}{\omega} = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2(\beta/2). \quad (43.14)$$

Длина волны связана с частотой соотношением  $(c/\omega) = \lambda/2\pi$ . Поэтому формула (43.14) окончательно принимает следующий вид:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\Lambda \sin^2(\beta/2), \quad (43.15)$$

где  $\Lambda = (2\pi h/m_0 c) = 2,42 \cdot 10^{-10}$  см называется комптоновской длиной волны электрона. Таким образом, получилось, что, если  $\gamma$ -квант сталкивается со свободным электроном и при этом отклоняется на угол  $\beta$ , его импульс изменяется в соответствии с законами упругого удара, причем это уменьшение импульса приводит к увеличению длины волны, которая дается формулой (43.15). Изменение длины волны  $\gamma$ -квантов можно непосредственно измерять. Наблюдения Комптона полностью подтвердили формулу (43.15). Тем самым были экспериментально подтверждены и те исходные положения, на которых базировался вывод (43.15), в частности формулы (43.11).

Конечно, столкновения  $\gamma$ -квантов возможны не только со свободными электронами, находящимися вне атомов, но и с электронами, входящими в атомы. Результат столкновения зависит от того, насколько сильно соответствующий электрон связан с атомом. Для внешних электронов, которые находятся далеко от ядра атома и для которых сила притяжения ядра экранируется электрическими зарядами электронов, более близких к ядру, эта сила связи очень слаба. Поэтому при столкновении  $\gamma$ -кванта с внешними электронами все происходит так, как будто электрон не связан с атомом, т. е. является свободным. В результате столкновения электрон отрывается от атома, а фотон рассеивается в соответствии с формулой (43.15). По-другому обстоит дело, когда  $\gamma$ -квант ударяется о внутренние электроны атома, которые находятся на небольшом расстоянии от ядра и связь которых с ядром весьма сильна. При этом электрон не может быть оторван от атома. Столкновение практически происходит не с электроном, а со всем атомом в целом. Законы сохранения (43.12) остаются, конечно, справедливыми, но только под  $m_0$

и  $m$  надо понимать не массу электрона, а массу всего атома, т. е. массу, во многие тысячи раз большую. Для изменения длины волны  $\gamma$ -кванта также получается формула (43.15), но  $m_0$  в ней является массой покоя атома. Отсюда следует, что практически  $\Delta\lambda = 0$ , т. е.  $\gamma$ -квант при столкновении не изменяет своего импульса, как это и должно быть при столкновении с очень большой массой. Поэтому в опытах Комптона под любым углом наблюдаются как  $\gamma$ -кванты, длины волн которых равны длинам волн падающих  $\gamma$ -квантов, так и  $\gamma$ -кванты, длина волн которых увеличилась в соответствии с формулой (43.15).

#### 44. Неупругие столкновения

**Общая характеристика неупругих столкновений.** Их основной особенностью является изменение внутренней энергии частиц или тел, участвующих в столкновении. Это означает, что при неупругих столкновениях происходит превращение кинетической энергии во внутреннюю или наоборот, а также внутренней энергии одной частицы во внутреннюю энергию другой. Частица или тело, внутренняя энергия которого изменилась, а следовательно изменилось и внутреннее состояние, становится уже другим телом или частицей или тем же телом или частицей, но в другом энергетическом состоянии. Поэтому при неупругих столкновениях происходит взаимопревращение частиц. Если, например, квант света поглощается атомом, то не только исчезает квант, но и атом переходит в другое энергетическое состояние. Многочисленные ядерные реакции являются такими неупругими процессами.

**Неупругие столкновения двух частиц.** При этом часть кинетической энергии частиц должна превратиться во внутреннюю или наоборот. Конечно, законы сохранения энергии и импульса в этом случае также справедливы. Но они не могут ничего сказать о том, какая часть кинетической энергии испытывает превращение во внутреннюю или наоборот. Это зависит от особенностей столкновения. Оно может быть почти упругим, когда лишь небольшая часть энергии участвует в указанном превращении, или почти абсолютно неупругим, когда почти вся кинетическая энергия превращается во внутреннюю: Представим себе, что мы можем менять упругие свойства покоящегося тела от абсолютно упругого состояния до абсолютно неупругого, когда налетающее на него тело просто слипается с ним. Тогда мы можем проследить столкновения при всех степенях «неупругости». Рассмотрим абсолютно неупругий удар. В этом случае в результате столкновения оба тела сливаются и движутся как одно тело. Считая, что второе тело массы  $m_2$  до столкновения покоялось, можно написать следующие законы сохранения:

$$E_{\text{вн}1} + E_{\text{вн}2} + W_1 = E'_{\text{вн}(1+2)} + W'_{(1+2)}, \quad (44.1)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_{(1+2)}, \quad (44.2)$$

где  $E_{\text{вн}1}$  и  $E_{\text{вн}2}$  — внутренняя энергия первого и второго тел до столкновения,  $W_1$  — кинетическая энергия движущегося тела,  $p_1$  — его импульс,  $E'_{\text{вн}(1+2)}$ ,  $W'_{(1+2)}$  и  $p'_{(1+2)}$  — внутренняя энергия, кинетическая энергия и импульс тела, получившегося после столкновения в результате слияния.

Если не учитывать соотношения между массой и энергией, то уравнение (44.2) дает возможность найти скорость тела, получившегося в результате слияния:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2, \quad (44.3)$$

откуда

$$v_2 = [m_1 / (m_1 + m_2)] v_1. \quad (44.4)$$

С помощью этих формул можно также вычислить кинетическую энергию  $\Delta W$ , которая превратилась во внутреннюю:

$$\Delta W = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_1. \quad (44.5)$$

Если масса покоящегося тела очень велика ( $m_2 \gg m_1$ ), то  $\Delta W \approx W_1$ , т. е. почти вся кинетическая энергия превращается во внутреннюю. В этом случае образовавшееся в результате слияния тело практически покоится. Если же масса покоящегося тела очень мала ( $m_2 \ll m_1$ ), то  $\Delta W \approx 0$ , т. е. не происходит заметного превращения кинетической энергии во внутреннюю. Образовавшееся в результате слияния тело движется практически с той же скоростью, с какой двигалось первое тело до столкновения.

**Поглощение фотона.** Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением, которое описывается диаграммой вида рис. 99, в. До поглощения имеются атом и фотон, после — только атом. Считая, что до поглощения атом покоится, применим законы сохранения энергии и импульса к этому процессу с учетом соотношений (43.11) для фотона:

$$M_0 c^2 + h\omega = M' c^2, \quad (44.6a)$$

$$h\omega/c = M' v'. \quad (44.6b)$$

Из (44.6a) получаем массу атома после поглощения фотона:

$$M' = M_0 + h\omega/c^2,$$

а из (44.6b) с учетом последнего равенства — скорость атома:

$$v' = ch\omega/(M_0 c^2 + h\omega). \quad (44.7)$$

Считая, что энергия фотона много меньше энергии покоя атома ( $h\omega \ll M_0 c^2$ ), эту формулу можно представить в более удобном виде:

$$v' \approx c \frac{h\omega}{M_0 c^2} \left( 1 - \frac{h\omega}{M_0 c^2} \right) \approx c \frac{h\omega}{M_0 c^2}. \quad (44.8)$$

Таким образом, после поглощения фотона атом обладает кинетической энергией

$$\Delta W = M_0 v'^2 / 2 = (h\omega)^2 / 2M_0 c^2. \quad (44.9)$$

Это означает, что во внутреннюю энергию атома превратилась не вся энергия фотона, а меньшая на величину (44.9). Часть энергии фотона  $\Delta W$  пошла на сообщение кинетической энергии атому.

**Испускание фотона.** Испускание фотона атомом также является типичным процессом столкновения, диаграмма которого изображена на рис. 99, г. Такой процесс называется обычно распадом. При испускании фотона внутренняя энергия атома изменяется, часть ее превращается в энергию фотона, а другая — в кинетическую энергию атома. Эта последняя называется энергией отдачи. Следовательно, энергия испущенного фотона меньше изменения внутренней энергии атома на величину  $\Delta W$ . Ее можно вычислить также по закону сохранения энергии и импульса, которые в данном случае имеют вид:

$$M_0 c^2 = M' c^2 + h\omega', \quad (44.10a)$$

$$0 = h\omega'/c + M' v'. \quad (44.10b)$$

Ясно, что  $\Delta W$  равно кинетической энергии атома после акта испускания фотона. Из (44.10b) получаем

$$\Delta W = M' v'^2 / 2 = (h\omega')^2 / 2M' c^2. \quad (44.11)$$

Величина  $M'$  может быть найдена из (44.10a), но при  $h\omega' \ll M_0$  она несущественно отличается от  $M_0$  и нет необходимости ее отличие от  $M_0$  учитывать, т. е. можно считать, что в (44.10) вместо  $M'$  стоит  $M_0$ .

Таким образом, при испускании фотона к нему переходит не вся внутренняя энергия атома, а при поглощении фотона не вся энергия фотона превращается во внутреннюю энергию атома.

## 45. Реакции между субатомными частицами

Как уже было отмечено, к неупругим столкновениям относятся все многочисленные превращения частиц друг в друга. Некоторые из этих превращений с участием фотонов рассмотрены в предыдущем параграфе. Остановимся еще на некоторых понятиях, связанных с этими процессами.

**Пороговая энергия.** Пусть частицы *a* и *b* в результате столкновения превращаются в частицы *v* и *g*. Столкновения принято обсуждать в системе центра масс. В этой системе закон сохранения импульса сводится к равенству суммы импульсов частиц нулю до и после столк-

новения и сейчас нас не интересует. Закон же сохранения энергии имеет следующий вид:

$$E_a + E_b + W_a + W_b = E'_a + E'_b + W'_a + W'_b, \quad (45.1)$$

где  $E$  означает внутренние энергии частиц, указанных соответствующим индексом,  $W$  — их кинетические энергии. Величина

$$Q = E_a + E_b - E'_a - E'_b = W'_a + W'_b - W_a - W_b \quad (45.2)$$

называется энергией реакции. Это есть величина изменения суммы кинетической энергии частиц при реакции или взятая с обратным знаком величина изменения внутренней энергии. Если кинетическая энергия продуктов реакции больше кинетической энергии исходных продуктов, то  $Q > 0$ . При  $Q < 0$  сумма внутренних энергий продуктов реакции больше, чем сумма внутренних энергий исходных частиц. Таким образом, при  $Q > 0$  происходит превращение внутренней энергии в кинетическую, а при  $Q < 0$ , наоборот, — поглощение кинетической энергии и ее переход во внутреннюю.

Пусть  $Q > 0$ . Тогда реакция возможна при любых кинетических энергиях частиц, включая и очень малые. В частности, она может происходить и при  $Q = 0$ .

Однако по-другому обстоит дело при  $Q < 0$ . В этом случае необходим минимум суммы кинетических энергий, при котором реакция возможна. Если этот минимум не достигнут, то реакция не начинается. Ясно, что этот минимум суммы кинетической энергии равен абсолютному значению  $|Q|$ . Он называется пороговой энергией реакции. Таким образом,

**пороговая энергия реакции — это такая минимальная кинетическая энергия реагирующих частиц, при которой реакция еще может произойти.**

**Энергия активации.** При  $Q > 0$  реакция может самопроизвольно осуществляться при любых кинетических энергиях, но это еще не значит, что она действительно произойдет. Например, если два протона достаточно сблизить, то они провзаимодействуют. В результате этого образуются дейтрон, позитрон, нейтрино и выделится еще кинетическая энергия, равная 1,19 МэВ. В этой реакции  $Q > 0$ . Однако, чтобы она началась, необходимо преодолеть силы кулоновского отталкивания протонов при их сближении.

**Протоны должны для этого обладать некоторой минимальной кинетической энергией, которая сохраняется и после реакции, но в реакции не участвует, обеспечивая лишь ее осуществление. Поэтому она называется энергией активации.**

**Переход в лабораторную систему.** Энергия активации и пороговая энергия определены в системе центра масс. Спрашивается, каким образом найти пороговую энергию в лабораторной системе, если известно ее значение в системе центра масс? Очевидно, необходимо осуществить переход из системы центра масс в лабораторную систему.

Рассмотрим этот переход на примере столкновения двух частиц. Ясно, что в общем случае следует пользоваться релятивистскими формулами. Величины, относящиеся к системе центра масс, будем обозначать индексами «ц», а в лабораторной системе «л». Пусть в лабораторной системе частица 2 покоятся, а частица 1 налетает на нее. В системе центра масс частицы движутся друг на встречу другу. В результате столкновения может произойти реакция с образованием частиц, внутренняя энергия которых в системе центра масс  $E_i^{(н)}$ . Пороговая энергия этой реакции равна  $Q$ , а внутренние энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс  $E_1^{(н)}$  и  $E_2^{(н)}$ . Тогда, очевидно, условие осуществления реакции в системе центра масс на основе (45.2) имеет следующий вид:

$$E^{(н)} = E_1^{(н)} + E_2^{(н)} + Q \geq \sum_i E_i^{(н)}. \quad (45.3)$$

Ясно, что совокупность двух частиц в системе центра масс, обладающая пороговой энергией  $Q$ , может рассматриваться как одна частица с внутренней энергией  $E^{(н)}$ , определенной равенством (45.3). При переходе в лабораторную систему эта «частица» имеет импульс  $p_1$ , равный импульсу движущейся в этой системе первой частицы, и собственную (внутреннюю) энергию  $E^{(н)}$ . Следовательно, при переходе в лабораторную систему  $E^{(н)}$  в (45.3) преобразуется в энергию

$$E^{(н)} = \sqrt{c^2 p_1^2 + (E^{(н)})^2}. \quad (45.4)$$

С другой стороны, суммарная энергия этих двух частиц, взятых по отдельности, может быть представлена в виде

$$E^{(н)} = \sqrt{c^2 p_1^2 + (E_1^{(н)})^2} + E_2^{(н)}. \quad (45.5)$$

Из уравнений (45.4) и (45.5) следует, что

$$(E^{(н)})^2 = (E_1^{(н)})^2 + (E_2^{(н)})^2 + 2E_2^{(н)} \sqrt{c^2 p_1^2 + (E_1^{(н)})^2}. \quad (45.6)$$

Кинетическая энергия первой частицы в лабораторной системе равна

$$W_1^{(н)} = \sqrt{c^2 p_1^2 + (E_1^{(н)})^2} - E_1^{(н)}. \quad (45.7)$$

Найдя из уравнения (45.6) величину  $\sqrt{c^2 p_1^2 + (E_1^{(н)})^2}$  и подставив это выражение в (45.7), получаем

$$W_1^{(н)} = \frac{(E^{(н)})^2 - (E_1^{(н)})^2 - (E_2^{(н)})^2}{2E_2^{(н)}} - E_1^{(н)} = \frac{(E^{(н)})^2 - (E_1^{(н)} + E_2^{(н)})^2}{2E_2^{(н)}}. \quad (45.8)$$

Используя (45.8), можно неравенство (45.3) представить в виде

$$W_1^{(н)} \geq \frac{(\sum E_i^{(н)})^2 - (E_1^{(н)} + E_2^{(н)})^2}{2E_2^{(н)}}. \quad (45.9)$$

Это есть искомое неравенство для вычисления пороговой энергии в лабораторной системе координат. Применим его для определения порога наиболее известных реакций с участием двух протонов.

**Порог рождения  $\pi^0$ -мезонов.** При столкновении двух протонов может происходить образование  $\pi^0$ -мезона по схеме

$$p + p \rightarrow p' + p' + \pi^0, \quad (45.10)$$

где  $p'$  — те же протоны, но с другими энергиями и импульсами. Собственная энергия протона равна  $E_{p0} = 980$  МэВ, а  $\pi^0$ -мезона —  $E_{\pi0} = 135$  МэВ. Поэтому согласно (45.9) найдем следующее значение пороговой энергии реакции:

$$W_1^{(\pi)} \geq \frac{(2E_{p0} + E_{\pi0})^2 - (2E_{p0})^2}{2E_{p0}} = 280 \text{ МэВ.} \quad (45.11)$$

**Порог рождения пары протон — антипротон.** При столкновении двух протонов может образоваться пара протон — антипротон по схеме

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}, \quad (45.12)$$

где  $\bar{p}$  — есть символ антипротона. Он имеет ту же собственную энергию, что и протон, поэтому для пороговой энергии этой реакции формула (45.9) дает

$$W_1^{(\pi)} \geq \frac{(4E_{p0})^2 - (2E_{p0})^2}{2E_{p0}} = 6E_{p0} \approx 6 \text{ ГэВ.} \quad (45.13)$$

# Глава 10

## ДИНАМИКА ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

- 
- 46. Нерелятивистские ракеты
  - 47. Релятивистские ракеты

**Р**еактивная сила прямо пропорциональна скорости истечения продуктов реакции из сопла ракеты и их массе, отнесенной к времени. Экономия в расходе массы может быть достигнута за счет увеличения скорости истечения продуктов реакции, а увеличение реактивной силы при неизменной скорости истечения продуктов реакции — за счет увеличения ежесекундного расхода массы.

---

### 46. Нерелятивистские ракеты

**Реактивное движение.** В ракетных двигателях сила тяги создается в результате извержения продуктов горения топлива в направлении, противоположном силе. Она возникает по закону Ньютона как сила реакции и поэтому называется реактивной, а двигатель — реактивным. Однако надо подчеркнуть, что всякий двигатель, создающий тягу, является, в сущности говоря, реактивным. Например, сила тяги обыкновенного пропеллерного самолета есть реактивная сила, возникающая в результате ускорения пропеллером массы воздуха в направлении, противоположном направлению движения самолета. Сила тяги пропеллерного самолета есть сила, с которой отбрасываемые пропеллером назад массы воздуха действуют на самолет. Она приложена к пропеллеру, который жестко соединен с самолетом. Железнодорожный состав, который трогается с места, также приходит в движение под действием реактивной тяги, которая создается в результате ускорения рельсов и земной по-

верхности в противоположном направлении, если движение рассматривать в инерциальной системе координат, связанной с неподвижными звездами. Конечно, практически заметить движение рельсов и земной поверхности невозможно ввиду их подавляющей большой массы и исчезающее малого ускорения.

Однако имеется одно существенное различие между реактивными движениями ракеты и других тел. В ракетном двигателе тяга создается извержением продуктов горения, которые до участия в создании тяги входят в массу ракеты. В других рассмотренных случаях этого нет. Например, отбрасываемый пропеллером самолет воздух ни в какой момент времени не является частью его массы. Поэтому, говоря о реактивном движении, мы имеем в виду ситуацию, которая существует в ракетном двигателе. Это означает, что рассматривается движение тел переменной массы, причем тяга создается в результате извержения части массы, принадлежащей телу.

**Уравнение Мещерского.** Как было отмечено в § 20, наиболее общим выражением третьего закона Ньютона является закон сохранения импульса для изолированной системы. Первая часть вывода уравнения движения будет проведена в такой форме, чтобы быть пригодной как в нерелятивистском случае, который будет рассмотрен в этом параграфе, так и релятивистском (он будет разобран в следующем параграфе).

Пусть ракета, имеющая в момент  $t$  массу  $M(t)$  и движущаяся со скоростью  $v$ , выбрасывает массу  $dM'$  со скоростью  $u$  (рис. 103). Здесь следует подчеркнуть, что  $M$  и  $dM'$  являются релятивистскими массами, а скорости  $v$  и  $u$  берутся относительно инерциальной системы координат, в которой рассматривается движение (а не относительно ракеты).

Закон сохранения массы имеет вид

$$dM + dM' = 0. \quad (46.1)$$

Очевидно, что  $dM < 0$ , поскольку масса ракеты уменьшается. В момент  $t$  полный импульс системы равен  $Mv$ , а в момент  $(t + dt)$  он выражается формулой  $(M + dM)(v + dv) + udM'$ . Тогда закон сохранения импульса данной изолированной системы запишется в виде  $(M + dM)(v + dv) + u dM' = Mv$ .

$$(46.2)$$

Отсюда следует равенство

$$M dv + v dM + u dM' = 0, \quad (46.3)$$

причем член  $dv dM$  отброшен как бесконечно малый член второго порядка малости. Принимая во внимание (46.1), получим уравнение движения

$$\frac{d}{dt} (Mv) = u \frac{dM}{dt},$$

(46.4)

которое справедливо как в релятивистском, так и нерелятивистском случае.

В случае малых скоростей для их сложения можно воспользоваться формулой классической механики и представить и в виде

$$u = u' + v, \quad (46.5)$$

где  $u'$  — скорость выброшенной массы относительно ракеты. Подставив (46.5) в (46.4) и продифференцировав левую часть (46.4) по времени, получим

$$M \frac{dv}{dt} = (u' - v) \frac{dM}{dt} = u' \frac{dM}{dt}. \quad (46.6)$$

Это есть уравнение Мещерского, которое описывает движение ракет с нерелятивистскими скоростями в отсутствие внешних сил.

Если на ракету действует сила  $F$ , то очевидно, что уравнение (46.6) примет следующий вид:

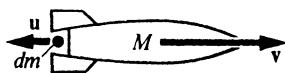
$$M \frac{dv}{dt} = F + u' \frac{dM}{dt}. \quad (46.7)$$

Обозначим ежесекундный расход топлива через  $\mu$ . Очевидно, что  $\mu = -dM/dt$ . Поэтому уравнение Мещерского можно также записать в виде

$$M \frac{dv}{dt} = F - \mu u'. \quad (46.8)$$

Величина  $\mu u'$  представляет реактивную силу. Если  $u'$  противоположно  $v$ , то ракета ускоряется, а если совпадает с  $v$ , то тормозится. При другом соотношении между ними происходит изменение скорости не только по абсолютному значению, но и направлению.

**Формула Циолковского.** Рассмотрим ускорение ракеты в прямолинейном движении, считая, что скорость выбрасывае-



103.

К выводу уравнения движения ракеты

?

1 Если в дне ведра с водой проделать отверстие, то из него вниз вытекает струя воды. Будет ли на ведро с водой со стороны этой струи действовать реактивная сила? Объясните ошибочность утверждительного ответа на этот вопрос.

2 От каких факторов зависит сила тяги ракетного двигателя?

3 Что такое характеристическая скорость космического полета?

!

Число независимых переменных, характеризующих некоторую систему, должно быть равно числу степеней свободы этой системы. Поэтому при описании движения абсолютно твердого тела надо иметь шесть независимых переменных. Для их определения необходимо иметь шесть независимых уравнений движения.

мых газов относительно ракеты постоянна. Уравнение (46.6) записется так:

$$M \frac{dv}{dt} = -u' \frac{dM}{dt}, \quad (46.9)$$

причем знак минус в правой части обусловлен тем, что скорость  $u'$  при ускорении противоположна скорости  $v$ . Обозначим через  $v_0$  и  $M_0$  скорость и массу ракеты перед началом ускорения. Тогда, переписав уравнение (46.9) в виде

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u'}, \quad (46.10)$$

и проинтегрировав это равенство, получим

$$\ln M - \ln M_0 = -\frac{v - v_0}{u'}. \quad (46.11)$$

Это и есть формула Циолковского, которую удобно представить в одном из следующих двух видов:

$$v - v_0 = u' \ln(M_0/M), \quad (46.12a)$$

$$M = M_0 e^{-(v - v_0)/u'}. \quad (46.12b)$$

Формула Циолковского (46.12a) показывает изменение скорости ракеты, когда ее масса изменится от  $M_0$  до  $M$ , а (46.12b) дает ответ на вопрос, какова будет масса ракеты, если ее скорость изменилась от  $v_0$  до  $v$ . Если ракета начинает ускоряться из состояния покоя, то  $v_0 = 0$ .

Наиболее важной проблемой является достижение максимальной скорости при минимальном расходе топлива, т.е. при минимальной разнице  $M_0$  и  $M$ . Из (46.12a) видно, что этого можно достигнуть только увеличением скорости  $u'$  истечения газов. Однако скорости истечения газов ограничены. Рассмотрим, например, химические топлива. Кинетическая энергия выбрасываемых ракетным двигателем частиц получается за счет химической энергии, выделяемой в камере двигателя при сгорании топлива. Если теплотворная способность топлива  $Q$ , а его масса  $m$ , то при сгорании выделяется энергия  $Qm$ . Считая, что вся эта энергия превращается в кинетическую энергию выбрасываемых из сопла частиц, суммарная масса которых  $m$ , по закону сохранения энергии имеем

$$Qm = mu'^2/2 \quad (46.13)$$

и, следовательно, скорость выброса равна

$$u' \approx \sqrt{2Q}. \quad (46.14)$$

Однако это сильно завышенное значение, потому что мы не учли, что часть энергии, образовавшейся при сгорании, теряется на излучение, нагревание стенок двигателя и т. д. Кроме того, выбрасываемые из ракетного двигателя частицы не движутся все строго в одном направлении, а расходятся в пределах некоторого конуса. Это обстоятельство также снижает величину достижимых значений  $u'$ . Поскольку у химических топлив  $Q$  имеет величину нескольких тысяч килокалорий на килограмм, для  $u'$  получим значения порядка нескольких тысяч метров в секунду, т. е. несколько километров в секунду. Практически при помощи химических топлив достигнуты скорости истечения  $4 \div 5$  км/с.

**Характеристическая скорость.** Для того чтобы тело могло покинуть пределы земного притяжения, ему необходимо сообщить скорость около 11,5 км/с (вторая космическая скорость). В случае ракеты такое значение должна иметь скорость в формулах (46.12) (при  $v_0 = 0$ ) в предположении, что топливо сгорело очень быстро и скорость приобретена ракетой непосредственно около поверхности Земли. По формулам (46.12) можно вычислить, какая часть первоначальной массы ракеты полетит в космос. Если считать, что скорость истечения газов  $u' \approx 4$  км/с, то  $M \approx M_0 e^{-3} \approx M_0 / 22$ , т. е. в космический полет отправится лишь около 4% первоначальной массы ракеты. Фактически ракета разгоняется значительно медленнее, чем мы допустили. Это еще больше ухудшает ситуацию, так как увеличивает расход топлива. Для уменьшения расхода топлива при ускорении ракеты в поле тяжести Земли необходимо сократить время ускорения, т. е. максимально увеличить ускорение. Это связано со значительными перегрузками. Поэтому приходится выбирать определенные оптимальные условия.

Если из космического пространства необходимо вернуться на Землю, то надо снова воспользоваться ракетным двигателем для торможения, чтобы благополучно приземлиться. Допустим, что в космическом пространстве под действием сил тяготения изменилось направление движения ракеты и она стала снова приближаться к Земле. Если у ракеты имеется специальное покрытие, предохраняющее ее от сгорания при разогревании из-за трения о воздух, то можно воспользоваться аэродинамическим торможением, т. е. погасить скорость торможением в атмосфере Земли. Но можно погасить скорость и включением ракетного двигателя. В этом случае для мягкой посадки потребуется уменьшить до нуля скорость 11,5 км/с. Это есть характеристическая скорость возвращения на Землю. Поэтому характеристическая скорость полета в космос вне пределов земного тяготения и возвращения обратно без использования аэродинамического торможения равна 23 км/с. Спрашивается, какая доля первоначальной массы вернется из такого полета? По формуле (46.12) находим  $M \approx M_0 e^{-6} \approx M_0 / 500$ .

Скорость, необходимая для преодоления притяжения Луны, равна примерно 2,5 км/с. Поэтому характеристическая скорость

посадки на Луну и подъема с ее поверхности равна 5 км/с, а полета на Луну и возвращения на Землю оценивается примерно в 28 км/с. Но здесь не учтена возможность осуществления маневра. Это заставляет несколько увеличить последнее значение. Но, с другой стороны, при возвращении на Землю можно воспользоваться аэродинамическим торможением, что позволяет несколько снизить эту величину. В результате имеем, что характеристическая скорость полета на Луну не очень сильно отличается от указанной (28 км/с). Характеристическая скорость полета на Марс и Венеру несколько больше. Если считать  $u' \approx 4$  км/с, то на Землю после полета на Луну будет возвращена примерно 1/1500 часть стартовой массы ракеты. Хотя эти величины являются грубой прикидкой, они дают достаточно хорошую оценку возможностей ракет с химическим топливом.

#### 47. Релятивистские ракеты

**Уравнение движения.** При выводе уравнения (46.4) было подчеркнуто, что оно справедливо как при малых, так и при больших скоростях. В релятивистском случае массу  $M$  надо считать релятивистской, т. е.

$$M = M'/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (47.1)$$

где  $M'$  — переменная масса покоя ракеты. (Мы обозначили ее буквой со штрихом, чтобы подчеркнуть, что это есть масса в движущейся системе координат, связанной с ракетой.) В процессе движения масса покоя ракеты уменьшается. С учетом сказанного уравнение (46.4) в релятивистском случае имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M'v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = u \frac{d}{dt} \left( \frac{M'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (47.2)$$

Нетрудно учесть также наличие внешних сил, действующих на ракету, но в этом нет необходимости. Преобразуем это уравнение к виду (46.6). Для этого продифференцируем левую часть по  $t$  и один из полученных членов, пропорциональный  $v$ , перенесем в правую часть. Тогда имеем

$$\frac{M'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{d}{dt} \left( \frac{M'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (47.3)$$

Оно полностью аналогично уравнению (46.6) с релятивистской массой ( $M = M_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ). Однако в (47.3) разность  $u - v$  не является скоростью истечения газов относительно ракеты, потому что в релятивистском случае для сложения скоростей надо пользоваться формулой (18.6).

**Зависимость конечной массы от скорости.** Для получения в релятивистском случае формулы, аналогичной формуле Циолковского, необходимо решить уравнение (47.3). Будем считать, что ускорение происходит в положительном направлении оси  $x$ , тогда уравнение (47.3) приобретает вид

$$\frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = (u_x - v) \frac{d}{dt} \left( \frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (47.4)$$

По формуле сложения скоростей (18.6) имеем для скорости выбрасываемых газов относительно ракеты

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}. \quad (47.5)$$

Далее учтем, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dM'}{dt} + \frac{M'}{c^2} \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}. \quad (47.6)$$

Следовательно, уравнение (47.4) после переноса второго члена (47.6) в левую часть и сокращения на общий множитель  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  принимает вид

$$\frac{M'}{1-v^2/c^2} \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} = (u_x - v) \frac{dM'}{dt}. \quad (47.7)$$

Теперь, заменив величину  $u_x - v$  по формуле (47.5) через скорость  $u'_x$ , получим после сокращения на общий множитель  $[1 - vu_x/c^2]$  релятивистское уравнение движения в следующем простом виде

$$M' \frac{dv}{dt} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) u'_x \frac{dM'}{dt}. \quad (47.8)$$

Примем во внимание, что для ускорения ракеты скорость выброса газов должна быть направлена против скорости движения ракеты, т. е.  $u'_x = -u'$ , где  $u'$  есть абсолютное значение этой скорости. Теперь можно переписать (47.8) в аналогичном уравнению (46.10) виде:

$$\frac{dM'}{M'} = - \frac{1}{u'} \frac{dv}{1-v^2/c^2}. \quad (47.9)$$

Пусть в начальный момент масса ракеты была  $M'_0$ , а скорость  $v_0$ . Как и в (46.10), проинтегрируем левую и правую части этого равенства в соответствующих пределах. Интеграл в правой части по  $v$  с учетом того, что

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-v/c} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+v/c},$$

является элементарным. В результате интегрирования получаем

$$\begin{aligned}\ln M' - \ln M'_0 &= -\frac{c}{2u'} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{v}{c} \right) - \ln \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \right\}_{v_0}^v = \\ &= -\frac{c}{2u'} \left\{ \ln \frac{1+v/c}{1-v/c} - \ln \frac{1+v_0/c}{1-v_0/c} \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\ln \frac{M'}{M'_0} = -\frac{c}{2u'} \ln \frac{(1+v/c)(1-v_0/c)}{(1-v/c)(1+v_0/c)},$$

или

$$\frac{M'}{M'_0} = \left\{ \frac{(1+v/c)(1-v_0/c)}{(1-v/c)(1+v_0/c)} \right\}^{-c/2u'}. \quad (47.10)$$

Эта формула для релятивистского случая заменяет формулы (46.12) для нерелятивистских ракет. Особенно простой вид, пригодный для анализа, она приобретает для  $v_0 = 0$ , т. е. когда разгон ракеты начинается из состояния покоя:

$M' = M'_0 \left( \frac{1-v/c}{1+v/c} \right)^{c/2u'}. \quad (47.11)$

В случае малых конечных скоростей ( $v \ll c$ ) эта формула переходит в (46.12б) для нерелятивистского случая ( $c v_0 = 0$ ). В самом деле, перепишем правую часть (47.11) при  $(v/c) \ll 1$  и  $u'/c \ll 1$  в виде

$$\left( \frac{c+v}{c-v} \right)^{-c/2u'} \approx \left[ \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \right)^{c/2v} \right]^{-v/u'} = e^{-v/u'}, \quad (47.12)$$

где учтено, что

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{1+v/c}{1-v/c} \approx \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \approx 1 + 2 \frac{v}{c},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Предположим, что ракету надо ускорить до скорости  $c/2$  с помощью химического топлива, когда  $u' = 4$  км/с. Какая доля первоначальной массы будет ускорена при этом? Учитывая, что  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с, из формулы (47.11) получаем

$$M' = M'_0 \left( \frac{1/2}{3/2} \right)^{3 \cdot 10^5 / 2 \cdot 4} \approx M'_0 / 3^{(3/8) \cdot 10^5} \approx M'_0 / 10^{2 \cdot 10^4}. \quad (47.13)$$

Представить себе число  $10^{20000}$  невозможно. Поэтому об ускорении ракет до релятивистских скоростей на химическом топливе не может быть и речи.

Однако и с другими видами топлива дело обстоит не намного лучше. Для ядерных ракет, использующих энергию деления,  $u' \approx 10^4$  км/с. В этом случае вместо (47.13) находим

$$M' = M'_0 / 3^{\frac{3 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4}} \approx M'_0 / 3^{15} \approx M'_0 / 10^6, \quad (47.14)$$

т. е. окончательной скорости  $c/2$  достигнет лишь примерно  $10^{-6}$  стартовой массы ракеты.

Поэтому более или менее обнадеживающих результатов в достижении релятивистских скоростей можно ожидать только в случае, если  $u'$  близко к скорости света. Это приводит к идеи создания реактивной тяги излучением фотонов. Такие, в настоящее время лишь теоретически мыслимые, ракеты называются фотонными.

**Фотонные ракеты.** Для фотонных ракет  $u' = c$  и, следовательно, уравнение (47.11) принимает вид

$$M' = M'_0 \left( \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2}. \quad (47.15)$$

Как видно из этой формулы, до скорости  $c/2$  было бы возможно ускорить массу  $M' = M'_0 / \sqrt{3}$ , т. е. больше, чем половину стартовой массы. Таким образом, эти ракеты были бы весьма эффективными. Пусть  $v$  отличается от скорости света на очень маленькую величину, например на  $10^{-4}$ , т. е.  $(v/c) \approx 1 - 10^{-4}$ . Тогда из (47.15) получаем

$$M' \approx M'_0 \cdot 10^{-2} / \sqrt{2}, \quad (47.16)$$

т. е. вполне приемлемый результат. Однако фотонные ракеты в настоящее время с технической точки зрения являются лишь фантазией.

# Глава 11

## ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

- 
- 48. Уравнения движения
  - 49. Момент инерции
  - 50. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела
  - 51. Плоское движение. Маятники
  - 52. Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы
- 

Уравнение движения центра масс и уравнение моментов системы материальных точек являются замкнутой системой уравнений движения твердого тела, т.е. с их помощью без каких-либо других дополнительных условий и уравнений можно полностью определить движение твердого тела в заданных внешних силовых полях. Необходимо лишь знать начальные условия движения.

---

### 48. Уравнения движения

Система уравнений. Твердое тело является системой материальных точек, расстояние между которыми постоянно. Поэтому все утверждения и уравнения § 23, касавшиеся системы материальных точек, справедливы и для твердого тела. Как было отмечено в § 23, уравнения (23.6) и (23.15), которые здесь необходимо еще раз выписать:

$$dp/dt = F, \quad (48.1)$$

$$dN/dt = M, \quad (48.2)$$

не являются в строгом смысле уравнениями движения системы материальных точек. Определить движение системы материальных точек — это значит указать движение каждой ее точки. Однако два векторных уравнения (48.1) и (48.2) не дают такой возможности даже для двух материальных точек, если только они не связаны жестко между собой. Чтобы найти движение системы материальных точек,

необходимо (48.1) и (48.2) дополнить уравнениями, учитывающими их взаимодействие. Поэтому уравнения (48.1) и (48.2), строго говоря, не являются замкнутой системой уравнений движения системы материальных точек в произвольном случае.

**Замкнутость системы уравнений.** Однако для твердого тела как системы материальных точек эти уравнения являются замкнутой системой уравнений движения, т. е. с помощью них без каких-либо других дополнительных условий и уравнений можно полностью найти движение твердого тела в заданных внешних силовых полях. Необходимо еще лишь знание начальных условий движения. Чтобы в этом убедиться, следует вспомнить основные положения кинематики твердого тела, изложенные в § 10. Ориентировка твердого тела в пространстве полностью определяется направлением осей прямоугольной декартовой системы координат, жестко связанной с телом, т. е. направлением единичных векторов  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  этой системы координат. В ней положение каждой точки тела фиксировано и задается либо радиусом-вектором  $r'$  относительно начала, либо декартовыми координатами точки  $(x', y', z')$ . Поскольку система этих координат жестко связана с телом, координаты каждой его точки имеют в ней постоянное значение. Ориентировка этой системы координат относительно инерциальной системы координат, в которой рассматривается движение тела и в которой справедливы уравнения (48.1) и (48.2), полностью определяется тремя углами Эйлера:  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  (см. рис. 19). Положение точки твердого тела, с которой связано начало системы координат  $(i', j', k')$ , задается радиусом-вектором  $r_0$  этой точки относительно инерциальной системы координат или декартовыми координатами этой точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Поэтому положение твердого тела как системы с шестью степенями свободы описывается шестью величинами  $(\varphi, \theta, \psi, x_0, y_0, z_0)$ . Скорость каждой точки тела слагается из поступательного движения со скоростью  $v_0 = dr/dt$  точки твердого тела, в которой находится начало координат  $(i', j', k')$ , и вращательного с мгновенной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через это начало, и выражается формулой (10.5), которую еще раз необходимо выписать:

$$v = v_0 + [\omega, r']. \quad (48.3)$$

Угловая скорость  $\omega$  выражается через производные по времени от углов Эйлера. Следовательно, скорость всех точек твердого тела полностью определяется их положением и производными по времени от величин, которые характеризуют положение точек. Отсюда следует, что  $p$ ,  $F$ ,  $N$  и  $M$ , входящие в (48.1) и (48.2), выражаются через те же величины. Уравнения (48.1) и (48.2) в координатах являются шестью скалярными уравнениями. Таким образом, имеется шесть уравнений для шести величин, характеризующих положение твердого тела, т. е. число уравнений равно числу неизвестных и поэтому (48.1) и (48.2) могут в полном смысле быть названы уравнениями

!

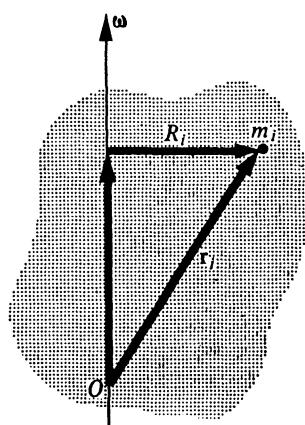
**Вектор момента импульса твердого тела, закрепленного в некоторой точке, не совпадает по направлению с вектором угловой скорости.** Связь между этими векторами описывается с помощью тензора инерции.

движения твердого тела. При этом надо лишь учесть, что под силами и моментами сил, стоящих в правой части этих уравнений, надо иметь в виду не только обычные силы и моменты обычных сил, но и силы реакций связей, наложенных на твердое тело, и их моменты.

**Выбор системы координат.** Выбор точки  $O'$ , с которой целесообразно связать систему координат ( $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ ), а также ориентировка этой системы относительно тела являются произвольными и диктуются лишь соображениями удобства. Удачный выбор позволяет существенно упростить эти уравнения, и позднее будет сделан для конкретных случаев движение. Один из удачных выборов точки  $O'$  был уже использован в § 23 — это центр масс. В этом случае (48.1) превращается в уравнение (23.10):

$$m(d\mathbf{v}_0/dt) = \mathbf{F}, \quad (48.4)$$

которое называется уравнением движения центра масс и аналогично уравнению движения материальной точки. (Реакции связей включены в  $\mathbf{F}$ .) Однако не всегда такой выбор точки  $O'$  в твердом теле является наиболее удачным, как это будет видно из последующего. Поскольку поступательное движение твердого тела не отличается от движения материальной точки, необходимо в первую очередь характеризовать вращение твердого тела вокруг оси.



104.

К понятию тензора инерции, характеризующего инерциальные свойства твердого тела

#### 49. Момент инерции

**Тензор инерции.** Будем считать, что тело состоит из отдельных материальных точек с массами  $m_i$ . Закрепим тело в точке  $O$  (рис. 104). Радиус-вектор точки  $m_i$  относительно  $O$  обозначим через  $r_i$ . Пусть  $\omega$  — мгновенная угловая скорость тела, тогда согласно (10.6) скорость  $i$ -й точки тела  $\mathbf{v}_i = [\omega, r_i]$ . Поэтому момент им-

пульса  $N$  всего тела относительно точки  $O$  равен

$$N = \sum [r_i, m_i v_i] = \sum m_i [r_i [\omega, r_i]] = \omega \sum m_i r_i^2 - \sum m_i r_i (\omega, r_i), \quad (49.1)$$

где использована формула разложения двойного векторного произведения  $[A, [B, C]] = B(A, C) - C(A, B)$ .

Векторное равенство (49.1) можно написать в виде трех проекций на оси координат:

$$\begin{aligned} N_x &= \omega_x \sum m_i r_i^2 - \sum m_i x_i (\omega, r_i), \\ N_y &= \omega_y \sum m_i r_i^2 - \sum m_i y_i (\omega, r_i), \\ N_z &= \omega_z \sum m_i r_i^2 - \sum m_i z_i (\omega, r_i). \end{aligned} \quad (49.2)$$

Учитывая, что  $(\omega, r_i) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$ , вместо (49.2) имеем:

$$\begin{aligned} N_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ N_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ N_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (49.3)$$

где

$$I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2), \quad I_{xy} = - \sum m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = - \sum m_i x_i z_i \quad (49.3a)$$

и аналогично выражаются другие величины:  $I_{yy}$ ,  $I_{yx}$ ,  $I_{yz}$  и т. д. Из (49.3а) непосредственно видно, что  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  и т. д. Поэтому из девяти величин  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ , ... различны лишь шесть. Величины  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  называют осевыми моментами инерции, а  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  и  $I_{yz} = I_{zy}$  — центробежными моментами инерции.

Таким образом, момент импульса тела весьма сложно зависит от распределения масс в теле и его направление не совпадает, вообще говоря, с угловой скоростью вращения тела. Совокупность величин

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (49.4)$$

называется тензором инерции. Величины  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  являются диагональными элементами тензора, а остальные — недиагональными. В данном случае величины, расположенные симметрично относительно диагонали, равны. Такой тензор называется симметричным.

**Главные оси тензора инерции.** Предположим, что все недиагональные элементы тензора равны нулю, а отличными от нуля

являются лишь диагональные и, следовательно, тензор имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_x & & 0 \\ & I_y & \\ 0 & & I_z \end{pmatrix} \quad (49.5)$$

При такой ситуации говорят, что оси тела, совпадающие с осями координат, являются главными осями инерции, а величины  $I_x = I_{xx}$ ,  $I_y = I_{yy}$ ,  $I_z = I_{zz}$  называют **главными моментами инерции**. О тензоре в этом случае говорят, что он приведен к диагональному виду. Таким образом, если оси системы координат направлены вдоль главных осей инерции тела, то центробежные моменты инерции отсутствуют.

Процесс нахождения главных осей сводится к математической процедуре диагонализации тензора. Здесь нет необходимости ее рассматривать. Отметим лишь результат: через любую точку твердого тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные оси. Главные моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  будут различны для различных точек тела. Если главные оси проведены через центр масс тела, они называются **центральными главными осями**, а тензор — **центральным тензором**. Таким образом, не имеет смысла говорить о главных моментах инерции тела, не указав точки тела, через которую проведены главные оси. При переходе от одной точки тела к другой главные оси, вообще говоря, меняют свое направление, а главные моменты — свою величину. Например, не имеет смысла начертить в теле ось и сказать, что она главная. Лишь когда речь идет о центральных главных осях и центральных главных моментах инерции, нет необходимости указывать точку тела, к которой они относятся, потому что по определению известно, что это — точка центра масс тела.

Особенно важное значение имеет осевой момент инерции, равный (рис. 105)

$$I = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum m_i R_i^2, \quad (49.6)$$

где  $R_i$  есть расстояние точки  $m_i$  от оси, поскольку во многих случаях он позволяет полностью описать динамику вращения твердого тела. Его называют также **моментом инерции тела относительно оси**.

**Найдение главных осей.** Главные оси во многих случаях могут быть найдены без громоздких математических расчетов, которые надо провести для диагонализации тензора инерции. Для этого иногда бывает достаточно воспользоваться простыми соображениями симметрии.

Пусть имеется плоская пластинка, толщина которой исчезающе мала. Точка, через которую проходят главные оси, лежит на пластинке.

Направим ось  $x$  перпендикулярно ей. Очевидно, что координаты  $x$  всех точек пластинки равны 0, т. е. все  $x_i = 0$ . В этом случае из формулы (49.3а) имеем:  $I_{xy} = 0$ ,  $I_{xz} = 0$ . Следовательно, любая ось, перпендикулярная этой пластинке, будет главной. Две другие главные оси расположены в плоскости пластинки взаимно перпендикулярно друг другу. Их направление зависит от формы пластиинки.

Рассмотрим случай круглой пластиинки (рис. 106) конечной толщины. Точка  $O$ , лежащая в средней плоскости пластиинки, есть точка, относительно которой надо найти главные оси. Очевидно, что одна главная ось направлена перпендикулярно плоскости пластиинки. Утверждается, что другой главной осью является ось, лежащая в средней плоскости и проходящая через данную точку и центр диска. Эта ось на рис. 106 взята за ось  $y$ . Убедимся в этом. Имеем:

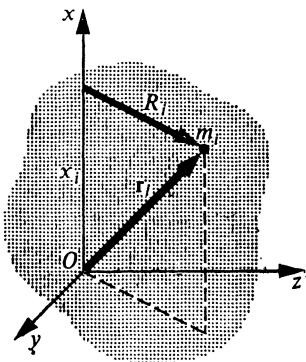
$$I_{yy} = \sum m_i (r_i^2 - y_i^2), \quad I_{yz} = \sum m_i y_i z_i,$$

$$I_{yx} = - \sum m_i y_i x_i.$$

Поскольку  $x_i = 0$ , то  $I_{yx} = 0$ . А при вычислении  $I_{yz}$  надо принять во внимание, что диск симметричен относительно оси  $y$ . Поэтому при каждом значении  $y$  имеется две симметричные точки, координаты  $z$  которых равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку. Следовательно, соответствующие члены в сумме для  $I_{yz}$  сократятся, и получается, что  $I_{yz} = 0$ . Таким образом, выбранная ось действительно является главной. Третья главная ось однозначно определяется двумя найденными, будучи перпендикулярна им обеим. Проверим, что ось  $z$  действительно является главной. Имеем:

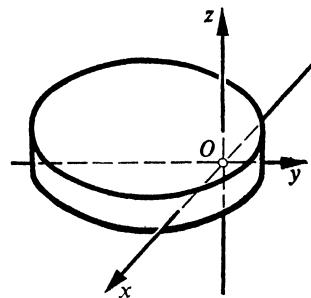
$$I_{zz} = \sum m_i (r_i^2 - z_i^2), \quad I_{zx} = - \sum m_i z_i x_i,$$

$$I_{zy} = - \sum m_i z_i y_i.$$



105.

Геометрический смысл величин, входящих в определение осевого момента инерции



106.

Главные оси круглой пластиинки, проходящие через точку средней плоскости, не совпадающую с центром

Так как  $x_i = 0$ , то  $I_{zx} = 0$ . А равенство  $I_{zy} = 0$  было только что доказано, поскольку  $I_{zy} = I_{yz}$ .

Если круглая пластинка имеет значительную толщину, то она называется **круглым цилиндром**. Все изложенные о главных осях пластинки соображения остаются, конечно, справедливыми и для цилиндра.

В шаре относительно любой его точки главные оси могут быть найдены следующим образом. Одна из главных осей проходит через центр шара, а две другие ориентированы произвольным образом в плоскости, перпендикулярной первой оси. Доказательство того, что данные оси являются главными, основывается на простых соображениях симметрии, из которых следует, что центробежные моменты  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  и другие в этом случае равны нулю.

Центральные главные оси определяются с помощью таких же соображений, но провести их надо через точку центра масс. В случае бесконечно тонкой пластинки одна из центральных главных осей перпендикулярна плоскости. Положение двух других центральных главных осей в плоскости пластинки зависит от ее формы. Для круглого диска — это любые две взаимно перпендикулярные оси. У цилиндра центр масс расположен на середине высоты в центре кругового сечения. Одна центральная главная ось совпадает с осью цилиндра, а две другие ориентированы произвольно в средней круговой плоскости цилиндра, взаимно перпендикулярно друг другу. В случае шара любые три взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр шара, являются его центральными главными осями.

**Вычисление момента инерции относительно оси.** Для этого используется формула (49.6). Однако удобнее применить интегрирование, переходя к непрерывному распределению масс. Пусть плотность тела есть  $\rho(x, y, z)$ . Тогда в элементе объема  $dV = dx dy dz$  заключена масса  $\rho dV$ . Если вычислять момент инерции тела относительно оси  $z$ , то формула (49.6) принимает следующий вид:

$$I_{zz} = \int \rho(x, y, z) (y^2 + x^2) dx dy dz \quad (49.7)$$

и интеграл распространяется на весь объем тела.

В качестве примера определим момент инерции однородного цилиндра радиуса  $R_0$  и высоты  $h$  относительно оси, совпадающей с его осью. Направим ось  $z$  системы координат вдоль оси цилиндра, а начало системы координат (точка  $O$ ) поместим на оси в середине высоты (рис. 107). Плотность цилиндра постоянна, т. е.  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Интеграл (49.7) записывается так:

$$I_{zz} = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_S (y^2 + x^2) dx dy, \quad (49.8)$$

где  $S$  — площадь сечения цилиндра. Вычисление удобно вести в цилиндрической системе координат, ось симметрии которой направлена вдоль оси  $z$ . Мы имеем:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2, \\ dx dy = r dr d\varphi.$$

Поэтому вместо (49.8) получаем

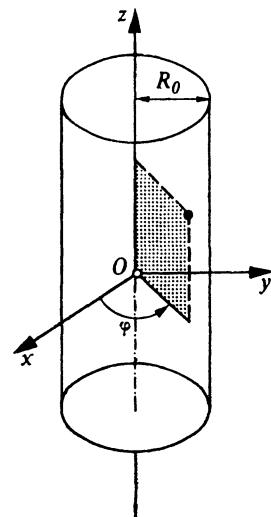
$$I_{zz} = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{R_0} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho_0 h \frac{R_0^4}{4} 2\pi. \quad (49.9)$$

Принимая во внимание, что объем цилиндра равен  $\pi R_0^2 h$  и, следовательно, величина  $m = \pi R_0^2 h \rho_0$  является его массой, окончательно находим

$$I_{zz} = m R_0^2 / 2. \quad (49.10)$$

Аналогично вычисляются и другие моменты. В этом следует поупражняться. В частности, момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, равен  $2mR_0^2/5$ , где  $m$  — масса шара,  $R_0$  — его радиус. Момент инерции тонкого диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, дается формулой (49.10), а его момент относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей в плоскости диска, равен  $mR_0^2/4$ .

**Теорема Гюйгенса.** Вычисление моментов инерции относительно оси во многих случаях облегчает теорема Гюйгенса, которая связывает моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела (рис. 108). Ось  $A_0B_0$  пусть будет осью, проходящей через центр масс. Радиус-вектор точки  $m_i$ , отсчитываемый от этой оси в плоскости, перпендикулярной оси, обозначим через  $R_i$ , а от оси  $AB$ , параллельной оси  $A_0B_0$ , но не проходящей через центр масс, — через  $r_i$ . Проведем от оси  $AB$  к оси  $A_0B_0$  в этой плоскости вектор  $a$ .

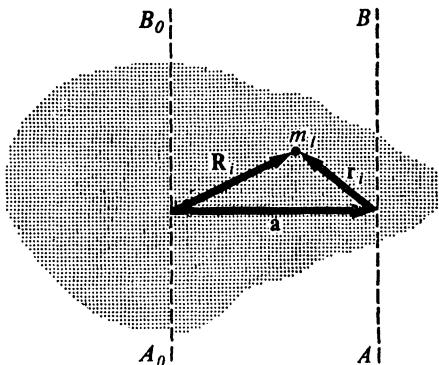


107.

Выбор системы координат для вычисления одного из главных моментов инерции цилиндра

!

Хотя известны строгие математические правила нахождения главных осей, во многих важных случаях найти эти оси удается из соображений симметрии, не прибегая к математическим расчетам.



108.

Геометрический смысл векторов, используемых при доказательстве теоремы Гюйгенса

?

- 1 Что такое осевые и центробежные моменты инерции?
- 2 Дайте определение главным осям тензора инерции. Какой вид имеет тензор инерции, если оси прямоугольной системы координат совпадают с главными осями тензора инерции?
- 3 Умеете ли Вы находить главные оси тензора инерции?
- 4 Что такое центральные главные оси тензора инерции?
- 5 Помогают ли соображения симметрии находить главные оси тензора инерции и каким образом?
- 6 В чем состоит теорема Гюйгенса?
- 7 Пусть дано семейство параллельных осей, проходящих через все возможные точки тела и вне его. Относительно какой из этих осей осевой момент инерции тела минимальен?

Этот вектор один и тот же во всех плоскостях, перпендикулярных оси. Пусть  $I_0$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, а  $I$  — относительно оси  $AB$ , не проходящей через центр масс. По определению моментов инерции имеем:

$$I_0 = \sum m_i R_i^2, \quad I = \sum m_i r_i^2. \quad (49.11)$$

На рис. 108 непосредственно видно, что  $r_i = a + R_i$  и, следовательно,  $r_i^2 = R_i^2 + a^2 + 2(a, R)$ . Поэтому получаем

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = \\ &= \sum m_i R_i^2 + a^2 \sum m_i + 2 \left( a, \sum m_i R_i \right). \end{aligned} \quad (49.12)$$

Учтем, что  $\sum m_i R_i = 0$  по определению оси, проходящей через центр масс, а  $\sum m_i = m$  есть масса тела. Поэтому (49.12) принимает вид

$$I = I_0 + ma^2. \quad (49.13)$$

Эта формула выражает теорему Гюйгенса. Зная момент инерции тела относительно некоторой оси, проходящей через центр масс, можно легко вычислить момент инерции относительно любой другой параллельной оси.

Рассмотрим, например, цилиндр, момент инерции которого относительно его

оси дается формулой (49.10). Центр масс цилиндра расположен па оси цилиндра и поэтому (49.10) есть момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Момент инерции цилиндра относительно оси  $AB$ , лежащей на поверхности цилиндра параллельно его оси, находим по формуле (49.13):

$$I = (mR_0^2/2) + mR_0^2 = (3/2) mR_0^2. \quad (49.14)$$

Если бы этот момент определять по формуле (49.7), то вычисления оказались бы значительно сложнее.

Момент шара относительно оси  $AB$ , касающейся его поверхности, также легко находится с помощью формулы (49.13):

$$I = \frac{2}{5} mR_0^2 + mR_0^2 = \frac{7}{5} mR_0^2, \quad (49.15)$$

где учтено, что момент шара относительно оси, проходящей через центр масс, равен  $2mR_0^2/5$ .

## 50. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

**Вычисление в координатах.** Уже неоднократно отмечалось, что векторные обозначения имеют большие преимущества наглядности. Но конкретные численные расчеты во многих случаях проще проводить в координатах, благодаря чему задача сводится к чисто арифметическим операциям.

Оси координат удобно нумеровать числами, как это было объяснено в § 6. Поэтому координаты точки ( $x, y, z$ ) будем обозначать как ( $x_1, x_2, x_3$ ), компоненты вектора ( $A_x, A_y, A_z$ ) — как ( $A_1, A_2, A_3$ ) и т. д. Формула (5.17) для скалярного произведения в этих обозначениях записывается так:

$$(A, B) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{\alpha} A_{\alpha}B_{\alpha}. \quad (50.1)$$

В вычислениях суммы такого вида встречаются довольно часто и поэтому условимся не выписывать каждый раз знак суммы, а всегда, когда в произведении встречаются две величины с одинаковым индексом, подразумевать суммирование по этим индексам. Например, формула (50.1) при таком соглашении записывается следующим образом:

$$(A, B) = A_{\alpha}B_{\alpha}. \quad (50.2)$$

Кроме того, в вычислениях полезно использовать символ Кронекера  $\delta_{\alpha\beta}$ , который определяется так:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (50.3)$$

С помощью этого символа удобно преобразовывать различные выражения, как это будет сейчас показано.

Компоненты тензора инерции  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  и другие обозначим соответственно как  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  и т. д., т. е. они имеют вид  $I_{\alpha\beta}$ , а формулы (49.3а) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum m_i (x_{iy}x_{iy} - x_{i1}^2), \quad I_{12} = - \sum m_i x_{i1}x_{i2}, \\ I_{13} &= - \sum m_i x_{i1}x_{i3}, \end{aligned} \quad (50.4)$$

где использовано условие (50.2) при записи  $r_i^2 = x_{i1}x_{i1} + x_{i2}x_{i2} + x_{i3}x_{i3} = x_{iy}x_{iy}$ ;  $\gamma$  означает индекс суммирования. Аналогичным образом выражаются и другие компоненты.

Равенства (49.3) принимают следующий вид:

$$N_\alpha = I_{\alpha\beta}\omega_\beta, \quad (50.5)$$

где  $\alpha = 1, 2, 3$ . Индекс  $\beta$  входит в произведение дважды и, следовательно, подразумевается суммирование по нему. Этот индекс называют иногда немым, потому что не играет роли, какой буквой его обозначить, лишь бы эта буква отличалась от других индексов, которые не входят в суммирование. Например, (50.5) можно записать как  $N_\alpha = I_{\alpha\gamma}\omega_\gamma$  или  $N_\alpha = I_{\alpha\epsilon}\omega_\epsilon$ .

Любую из компонент вектора  $A_\alpha$  можно выразить через другие компоненты с помощью символа (50.3) и условия суммирования:

$$A_\alpha = \delta_{\alpha\gamma} A_\gamma. \quad (50.6)$$

Если это равенство расписать подробно, то оно имеет такой вид:

$$A_\alpha = \delta_{\alpha 1} A_1 + \delta_{\alpha 2} A_2 + \delta_{\alpha 3} A_3. \quad (50.7)$$

Из символов  $\delta_{\alpha 1}$ ,  $\delta_{\alpha 2}$ ,  $\delta_{\alpha 3}$  отличным от нуля будет лишь тот, у которого  $\alpha$  равен другому индексу. Пусть, например,  $\alpha = 2$ , тогда из (50.7) получаем

$$A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 = A_2.$$

С помощью символа Кронекера выражения (50.4) для тензора инерции можно представить в следующем удобном для вычисления виде:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (x_{iy}x_{iy}\delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha}x_{i\beta}). \quad (50.8)$$

**Кинетическая энергия вращения.** Если переносная скорость твердого тела  $v_0 = 0$ , т. е. тело вращается с мгновенной скоростью  $\omega$ , проходящей через неподвижную точку тела, то скорость его точек

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_i] \quad (50.9)$$

и, следовательно, его кинетическая энергия равна

$$W = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i [\omega, r'_i]^2. \quad (50.10)$$

Используя формулу, известную в векторной алгебре, для квадрата векторного произведения:

$$([A, B], [C, D]) = (A, C)(B, D) - (A, D)(B, C),$$

можем написать

$$[\omega, r'_i]^2 = \omega^2 r'^2_i - (r'_i, \omega)^2. \quad (50.11)$$

С помощью правила суммирования и  $\delta$ -символа это выражение в координатах принимает вид

$$[\omega, r'_i]^2 = \omega_\alpha \omega_\beta x'_{i\beta} x'_{i\alpha} - \omega_\alpha x'_{i\alpha} \omega_\beta x'_{i\beta} = \omega_\alpha \omega_\beta (x'_{iy} x'_{iy} \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}). \quad (50.12)$$

Подставив эту формулу в (50.10) и учитывая (50.8), получим кинетическую энергию вращения:

$$W = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta. \quad (50.13)$$

Здесь  $I_{\alpha\beta}$  есть тензор инерции, отнесенный к осям координат, жестко связанным с телом и движущимся с ним. Начало системы координат покоится,  $\omega_\alpha$  являются компонентами мгновенной угловой скорости тела относительно осей координат.

Если оси движущейся системы координат направить вдоль главных осей инерции тела, в тензоре инерции останутся лишь диагональные компоненты, т. е.

$$I_{\alpha\beta} = I_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (50.14)$$

При таком выборе осей координат, жестко связанных с телом, выражение (50.13) для кинетической энергии упрощается:

$$W = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} I_\alpha \omega_\alpha^2. \quad (50.15)$$

Если мгновенная скорость вращения совпадает с направлением одной из главных осей, которой может быть, например, ось  $x$  движущейся системы, то, очевидно,  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  и формула (50.15) примет более простой вид:

$$W = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2. \quad (50.16)$$

Вообще говоря, при произвольном движении тела вектор угловой скорости  $\omega$  меняет свое направление и совпадает с направлением

одной из главных осей лишь в течение мгновения. Именно для него и справедлива эта формула. В следующее мгновение угловая скорость уже не будет совпадать с главной осью, и выражение для кинетической энергии снова приобретает вид (50.15). Формула (50.16) справедлива в течение времени, когда вектор угловой скорости совпадает с направлением главной оси. Например, если цилиндр вращается вокруг своей оси, которая неподвижна в пространстве, то ясно, что угловая скорость все время совпадает с направлением главной оси и поэтому формула (50.16) справедлива во все время вращения, а в качестве  $I_1$  берется выражение (49.11).

В том случае, если наряду с вращением тело имеет также и поступательную скорость  $v_0$ , скорость его точек определяется по формуле (48.3). Выражение для кинетической энергии усложняется. Подставляя (48.3) в формулу для кинетической энергии, получаем

$$W = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_0 + [\omega, r'_i])^2 = \\ = \frac{1}{2} (\sum m_i) v_0^2 + \frac{1}{2} \sum m_i [\omega, r'_i]^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \cdot 2 (v_0, [\omega, r'_i]). \quad (50.17)$$

Первое слагаемое представляет кинетическую энергию поступательного движения тела как целого со скоростью  $v_0$ , второе — кинетическую энергию вращения, которая только что была рассмотрена, а третье учитывает соотношение поступательной скорости и вращательной. Если начало движущейся системы координат поместить в центр масс тела, то  $\sum m_i r'_i = 0$  и, следовательно, последний член обратится в нуль. При таком выборе системы координат скорость  $v_0$  является скоростью центра масс тела, а формула для кинетической энергии примет следующий вид:

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta. \quad (50.18)$$

Все замечания, которые были сделаны относительно (50.13), справедливы и для соответствующей величины в формуле (50.18). В частности, если оси движущейся системы направлены вдоль главных осей тела, то кинетическая энергия

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

(50.18a)

Поэтому, например, кинетическая энергия цилиндра, катящегося со скоростью  $v_0$ , равной  $\omega R_0$ , будет

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m R_0^2}{2} \left( \frac{v_0}{R_0} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_0^2. \quad (50.19)$$

## 51. Плоское движение. Маятники

**Особенности динамики плоского движения.** Из кинематики плоского движения, изложенной в § 10, известно, что в этом случае все точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях. Поэтому достаточно рассмотреть движение какого-либо сечения тела в одной плоскости. Формула (48.3) для точек тела значительно упрощается, поскольку вектор угловой скорости всегда перпендикулярен плоскости и, следовательно, имеет постоянное направление. Поэтому если ось  $z'$  системы координат, связанной с телом, провести перпендикулярно плоскости движения, то угловая скорость вращения всегда будет направлена вдоль этой оси, т. е.  $\omega_z = \omega$ ,  $\omega_x = \omega_y = 0$ . Для того чтобы избежать учета центробежных моментов тензора инерции, целесообразно ось вращения провести через центр масс. Тогда необходимо принять во внимание лишь момент инерции относительно оси вращения:

$$\begin{aligned} N_z &= N = I_{zz}\omega_z = I\omega, \\ I_{zz} &= I, \quad \omega_z = \omega. \end{aligned} \tag{51.1}$$

Индексы  $z$  у величин нет необходимости ставить, поскольку ось  $z$  — единственная ось вращения. Силы, действующие на тело, параллельны плоскости  $(x, y)$ , а моменты сил  $M_z$  перпендикулярны ей. Таким образом, уравнения движения (48.1) и (48.2) для плоского движения приобретают следующий вид:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}, \tag{51.2}$$

$$I(d\omega/dt) = M, \tag{51.3}$$

где  $M = M_z$ ,  $\mathbf{p}$  — импульс.

Поскольку ось проходит через центр масс тела, уравнение (51.2) можно представить в виде (48.4) для движения центра масс в плоскости движения:

$$m(d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{F}. \tag{51.4}$$

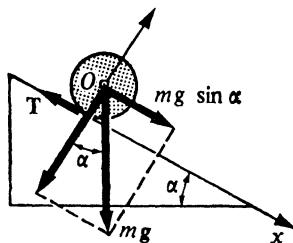
Для координат  $(x, y)$  центра масс это уравнение имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y. \tag{51.5}$$

Кинетическая энергия в этом случае выражается формулой (50.18а):

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{51.6}$$

**Скатывание цилиндра с наклонной плоскости.** Будем считать, что скатывание происходит без скольжения. Силы, действующие на цилиндр, указаны на рис. 109. Сила  $T$  есть сила трения, которая обеспечивает скатывание цилиндра без скольжения. Ось  $x$  удобно направить вдоль наклонной плоскости. Напишем уравнение движения для точки  $O$ , через которую проходит центральная главная ось

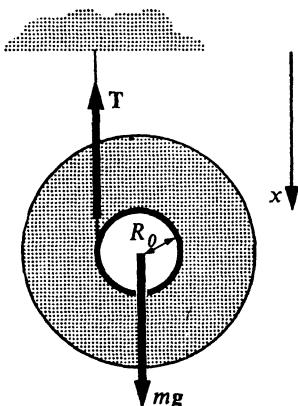


109.

**Скатывание цилиндра (без скольжения) с наклонной плоскости**

!

**Ускорение вращающегося диска в маятнике Максвелла постоянно и направлено все время вниз. В нижней точке, когда меняется направление скорости движения, происходит резкое увеличение силы натяжения нити.**



110.

**Маятник Максвелла**

инерции диска. Уравнения (51.5) и (51.3) имеют вид:

$$m \frac{dv_0}{dt} = mg \sin \alpha - T, \quad I_0 \frac{d\omega}{dt} = R_0 T, \quad (51.7)$$

где  $I_0 = mR_0^2/2$  и отсчет направлений вращения выбран так, чтобы  $\omega$  было положительным и увеличивалось при скатывании цилиндра.

Подставляя  $T$  из второго уравнения (51.7) в первое и учитывая, что  $v_0 = \omega R_0$  ( $R_0$  — радиус цилиндра), получим:

$$m \frac{dv_0}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{I_0}{R_0} \frac{dv_0}{dt}, \quad \text{или} \quad (51.8)$$

$$\frac{3}{2} m \frac{dv_0}{dt} = mg \sin \alpha; \quad (51.9)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (51.10)$$

Таким образом, центр цилиндра движется с постоянным ускорением  $\frac{2}{3} g \sin \alpha$ .

**Маятник Максвелла.** Маятник Максвелла представляет собой диск, подвешенный на нити. Нить намотана на ось диска (рис. 110). Уравнения движения маятника относительно центра масс имеют вид:

$$m \frac{dv_0}{dt} = mg - T, \quad I_0 \frac{d\omega}{dt} = R_0 T, \quad (51.11)$$

где  $R_0$  — радиус оси диска, на которую намотана нить,  $I_0$  — момент инерции всей системы относительно оси,  $T$  — сила натяжения.

В отношении сил и их моментов маятник Максвелла полностью аналогичен цилиндру, скатывающемуся с наклонной плоскости.

Таким образом, уравнения для маятника Максвелла имеют точно такой вид, как и уравнения для скатывания цилиндра с наклонной плоскостью, и решаются аналогично. Получаем

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{mg}{m + (I_0/R_0)}, \quad T = \frac{mg}{1 + (mR_0^2/I_0)}. \quad (51.12)$$

Проследим динамику маятника. Ускорение диска постоянно и всегда направлено вниз. Его величина тем меньше, чем больше центральный момент инерции  $I_0$ . При достаточно большом моменте инерции  $I_0$  диск будет иметь очень малое ускорение. В пределе при  $I_0 \rightarrow \infty$  ускорение  $(dv_0/dt) \rightarrow 0$ , а при  $I_0 \rightarrow 0$  диск падает как свободное тело. Сила натяжения нити изменяется в обратном порядке: чем больше момент инерции, т. е. меньше ускорение, тем сила натяжения больше. При  $I_0 \rightarrow \infty$  сила натяжения  $T \rightarrow mg$ ; это, очевидно, так и должно быть, потому что диск просто висит на нити без движения. При  $I_0 \rightarrow 0$  сила натяжения  $T \rightarrow 0$ . В этом случае диск свободно падает и поэтому нить не испытывает никакого натяжения.

Уравнения (51.11) и решение (51.12) не описывают поведения маятника в нижней мертвоточке, когда происходит переброс нити с одной стороны на другую сторону цилиндра. Диск продолжает вращаться в прежнем направлении, но теперь нить не разматывается с цилиндра, а наматывается на него. Для наматывания также справедливы уравнения (51.11) и решение (51.12). В процессе наматывания нити диск поднимается и его кинетическая энергия превращается в потенциальную, скорость подъема уменьшается. В течение времени переброса нити в нижней мертвоточке происходит изменение направления скорости  $v_0$  на обратное. Поэтому в это время центр масс диска испытывает большое ускорение. По третьему закону Ньютона, это приводит к большому натяжению нити. Если нить недостаточно прочна, то она может порваться.

**Физический маятник.** Физическим маятником называется твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси в поле тяготения (рис. 111). Движение маятника как целого отсутствует. Поэтому уравнение движения (48.1) нет необходимости

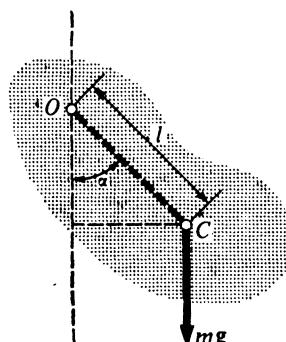
!

**Кинетическая энергия** маятнико<sup>го</sup> цилиндра слагается из кинетических энергий поступательного движения центра масс и вращения. Поэтому при сматывании по наклонной плоскости скорость центра масс цилиндра меньше, чем если бы он скользил без вращения.

?

1

Почему для плоского движения целесообразно уравнение движения и уравнение моментов записывать относительно точки, через которую проходит центральная ось, перпендикулярная плоскости движения!



111.

Физический маятник

писать. Уравнение моментов имеет следующий вид (рис. 111):

$$I(d\omega/dt) = -mgl \sin \alpha, \quad \omega = d\alpha/dt. \quad (51.13)$$

Знак минус в уравнении означает, что момент сил направлен против увеличения угла  $\alpha$ ;  $I$  есть момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Если угол отклонения мал, то с большой точностью можно считать, что  $\sin \alpha = \alpha$ , и переписать уравнение (51.13) в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0. \quad (51.14)$$

Решениями этого уравнения являются функции  $(mgl/I)^{1/2}t$  или  $\cos(mgl/I)^{1/2}t$ . Маятник совершает колебания с малой амплитудой, частота и период которых определяются формулами:

$$\Omega = \sqrt{mgl/I}, \quad T = 2\pi/\Omega = 2\pi\sqrt{I/mgl}. \quad (51.15)$$

Такие колебания называются гармоническими. Их свойства будут рассмотрены в гл. 13. Здесь же отметим лишь некоторые обстоятельства.

Пусть физический маятник состоит из материальной точки массы  $m$ , подвешенной на невесомом твердом стержне длиной  $l$  и колеблющейся около точки  $O$ . Такой маятник называется математическим. Заметив, что для него как твердого тела  $I = ml^2$ , из (51.15) находим период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{ml^2/mgl} = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (51.16)$$

Обозначим через  $I_0$  момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через его центр массы. По теореме Гюйгенса имеем  $I = I_0 + ml^2$ , и формула (51.15) для периода колебаний физического маятника принимает вид

$$T = 2\pi\sqrt{(I_0 + ml^2)/mgl} = 2\pi\sqrt{(I_0/mgl) + (l/g)}. \quad (51.17)$$

Сравнение формул (51.16) и (51.17) показывает, что математический маятник, длина которого равна расстоянию между точкой подвеса и центром масс физического маятника, имеет меньший период, чем физический маятник. Чтобы период колебаний математического маятника был равен периоду колебаний физического маятника, его длина должна быть больше. Длина математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний физического маятника, называется приведенной длиной соответствующего физического маятника. Из сравнения формул (51.16) и (51.17) видно, что приведенная длина физического маятника равна  $l_{\text{пр}} = (I/ml)$ . Точка физического маятника, расположенная на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от точки

подвеса на прямой, проходящей через центр тяжести, называется центром качаний. Если физический и математический маятники с приведенной длиной колеблются около одной и той же оси, то материальная точка математического маятника и центр качания физического маятника движутся синхронно, если их вначале однаково отклонить и одновременно отпустить колебаться.

Основное свойство центра качаний физического маятника состоит в том, что при подвесе маятника на ось, проходящую через этот центр, период колебаний не изменится. Таким образом, при переносе точки подвеса в центр качаний прежняя точка подвеса становится новым центром качаний, т. е. точка подвеса и центр качания обратимы. Доказательство следует непосредственно из теоремы Гюйгенса и формулы для периода колебания маятника.

Если амплитуды колебаний физического маятника не очень малы, то от уравнения (51.13) нельзя перейти к (51.14). В этом случае необходимо решать нелинейное уравнение (51.13):

$$\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\alpha} = -k \sin \alpha, \quad k = mgl/I. \quad (51.18)$$

При интегрировании отсчет удобно вести от положения максимального отклонения  $\alpha_0$ , когда скорость маятника равна нулю ( $\dot{\alpha}_0 = 0$ ). Имеем

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \ddot{\alpha} d\alpha = -k \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha. \quad (51.19)$$

Преобразуем подынтегральные выражения:

$$\ddot{\alpha} d\alpha = \ddot{\alpha} \dot{\alpha} dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \right) dt = d \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \right), \quad \sin \alpha d\alpha = -d \cos \alpha$$

и из (51.19) находим

$$\dot{\alpha}^2 = 2k(\cos \alpha - \cos \alpha_0). \quad (51.20)$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии для маятника.

Переписав уравнение (51.20) в виде

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{2k(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} = \sqrt{2k} dt, \quad (51.21)$$

можно интегрированием найти решение задачи в неявном виде:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2k(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} = \sqrt{2k} t.$$

Воспользовавшись формулой  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ , получаем

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2)}} = 2\sqrt{k}t. \quad (51.22)$$

Введем новую переменную интегрирования  $\theta$  с помощью соотношения

$$\sin \theta = \sin(\alpha/2)/\sin(\alpha_0/2). \quad (51.23)$$

Тогда равенство (51.22) принимает следующий вид:

$$\int_0^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \theta}} = \sqrt{k}t. \quad (51.24)$$

Интеграл, стоящий в левой части, называется эллиптическим. Он хорошо изучен. Составлены таблицы его значений, с помощью которых можно проанализировать колебания маятника с любыми углами отклонений. Однако для не слишком больших углов целесообразно представить этот интеграл приближенной аналитической формулой, удобной для анализа. В случае  $\sin^4(\alpha_0/2) \ll 1$  можно подынтегральное выражение (51.24) разложить в ряд и ограничиться двумя членами:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \theta}} &= \int_0^\beta d\theta \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \theta + \dots \right) = \\ &= \beta + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \left( \beta - \frac{\sin^2 \beta}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (51.25)$$

Таким образом, связь между временем колебания и углом отклонения маятника дается в виде

$$\beta + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \left( \beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) = \sqrt{k}t, \quad (51.26)$$

где  $\sin \beta$  определяется равенством (51.23):

$$\sin \beta = \sin(\alpha/2)/\sin(\alpha_0/2).$$

Отсюда видно, что когда угол отклонения  $\alpha$  изменяется от 0 до  $\alpha_0$ , т. е. проходит  $1/4$  периода  $T$  колебаний, величина  $\beta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$  и из уравнения (51.26) находим

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi/2}{2} \right) = \sqrt{k}(T/4),$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right). \quad (51.27)$$

Сравнивая эту формулу с (51.15) для периода малых колебаний и принимая во внимание выражение для  $k$  в (51.18), можно ее переписать в виде

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right), \quad (51.28)$$

где  $T_0 = 2\pi \sqrt{I/mgl}$  есть период малых колебаний.

Пусть, например, максимальное отклонение  $\alpha_0 = 60^\circ$ . Поскольку  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , то заключаем, что период больших колебаний маятника в этом случае отличается от периода малых колебаний примерно на 6 %. Отсюда можно сделать вывод, что линейное приближение довольно хорошо описывает движение физического маятника не только при очень малых углах отклонения, но и при достаточно заметных углах.

## 52. Движение твердого тела, закрепленного в точке. Гироскопы

Рассмотрение картины плоского движения упрощается тем обстоятельством, что вектор угловой скорости сохраняет в этом случае постоянное направление в пространстве, перпендикулярное плоскости движения, и не изменяет своей ориентировки относительно тела. При движении твердого тела около одной закрепленной точки все эти упрощающие обстоятельства исчезают: вектор угловой скорости, вообще говоря, изменяет направление в пространстве и свою ориентировку относительно тела, т. е. мгновенная ось вращения меняет свою ориентировку. Удобно рассматривать это движение в системе координат, жестко связанной с телом. Начало координат естественно поместить в точку закрепления тела. Она находится в покое. Получающиеся при этом уравнения движения называются уравнениями Эйлера.

**Уравнения Эйлера.** Уравнение движения центра масс тела имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = m \frac{d}{dt} ([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_0]) = \mathbf{F}, \quad (52.1)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор центра масс тела, проведенный из точки его закрепления. Реакции связей включены в  $\mathbf{F}$ .

Оси связанной с телом системы координат ( $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ ) удобно направить по главным осям инерции. В этом случае тензор инерции сводится к трем своим главным значениям  $I_1, I_2, I_3$ , а момент импульса приобретает простой вид:  $N_1 = I_1\omega_1, N_2 = I_2\omega_2, N_3 = I_3\omega_3$ , причем  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты угловой скорости относительно движущихся вместе с телом осей координат. В уравнении моментов

(48.2) производная  $d\mathbf{N}/dt$  вычисляется относительно инерциальной системы координат. Необходимо определить эту величину относительно движущейся системы координат, жестко связанной с телом.

Пусть некоторый вектор  $\mathbf{A}$  задан компонентами относительно системы координат  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}' A'_x + \mathbf{j}' A'_y + \mathbf{k}' A'_z. \quad (52.2)$$

С течением времени изменяются компоненты  $A'_x, A'_y, A'_z$  относительно движущихся осей координат и ориентировка осей координат относительно инерциальной системы отсчета. Имеем

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \mathbf{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \mathbf{k}' \frac{dA'_z}{dt} + \frac{d\mathbf{i}'}{dt} A'_x + \frac{d\mathbf{j}'}{dt} A'_y + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} A'_z. \quad (52.3)$$

Скорость точки вращающегося тела, радиус-вектор которой  $\mathbf{r}$ , равна  $(dr/dt) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ . Аналогично, следя за концом вектора  $\mathbf{i}'$ , проведенным из точки на оси вращения, находим  $(di'/dt) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}']$ . Такой же вид имеют производные от  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} A'_x + \frac{d\mathbf{j}'}{dt} A'_y + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} A'_z &= [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}' A'_x] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}' A'_y] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}' A'_z] = \\ &= [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}' A'_x + \mathbf{j}' A'_y + \mathbf{k}' A'_z] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (52.4)$$

Поэтому формула (52.3) может быть записана в виде

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}],}$$

где  $(\partial \mathbf{A} / \partial t) = \mathbf{i}' (dA'_x / dt) + \mathbf{j}' (dA'_y / dt) + \mathbf{k}' (dA'_z / dt)$  есть производная от  $\mathbf{A}$ , вычисленная в предположении, что оси  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$  неподвижны. Эта формула справедлива для любых векторов  $\mathbf{A}$ . Применим ее к величине  $\mathbf{N}$  в (48.2), можем представить уравнение моментов следующим образом:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}] = \mathbf{M}.} \quad (52.5)$$

Принимая во внимание, что  $N_x = I_x \omega_x, N_y = I_y \omega_y, N_z = I_z \omega_z$ , уравнение (52.5) перепишем в компонентах относительно дви-

жущейся системы координат:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned}} \quad (52.6)$$

Подчеркнем еще раз, что все величины в этом уравнении относены к движущимся осям координат, жестко связанным с телом, а штрихи же не проставлены лишь для упрощения написания формул.

Эти уравнения называют *уравнениями Эйлера*. Они в принципе всегда позволяют определить движение тела, закрепленного в одной точке, хотя практически решение может быть весьма сложным и трудновыполнимым.

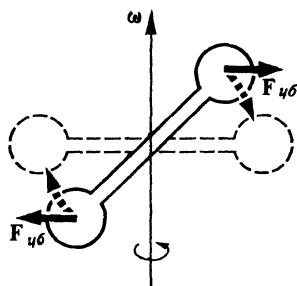
**Свободные оси.** Чтобы уравнения (52.6) полностью описывали движение без использования уравнения (52.1), необходимо за начало системы координат, в которой они написаны, взять центр масс тела и учесть, что момент реакции связей при этом равен нулю. Пусть на тело не действуют никакие силы и поэтому и моменты сил  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  равны нулю. Направим оси системы координат, жестко связанной с телом, по центральным главным осям. Следовательно,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  в (52.6) являются центральными главными моментами инерции тела. Вообще говоря, они не равны друг другу. Выясним, какое свободное движение тела возможно.

Из (52.6) сразу следует, что невозможно такое вращение тела, при котором угловая скорость сохраняет свое абсолютное значение и ориентировку относительно тела, но не совпадает по направлению ни с одной из центральных главных осей с разными моментами инерции. Допустим, что это возможно, т. е. что  $\omega_x = \text{const} \neq 0$ ,  $\omega_y = \text{const} \neq 0$ ,  $\omega_z = \text{const} \neq 0$ . Тогда из уравнений следует, что должно быть

$$(I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0, \quad (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0, \quad (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0. \quad (52.6a)$$

Эти соотношения можно одновременно удовлетворить только в том случае, если две компоненты угловой скорости одновременно равны нулю. А это означает, что угловая скорость совпадает по направлению с одной из центральных главных осей. Пусть, например,  $\omega_y = \omega_z = 0$ . Тогда (52.6a) будут удовлетворены. Угловая скорость направлена вдоль оси  $x$ , т. е. вдоль центральной главной оси.

Таким образом, свободное вращение твердого тела возможно лишь вокруг центральных главных осей. Эти оси называются *свободными*. Моменты инерции относительно этих осей, вообще говоря, различны. Можно доказать, что вращение тела будет *устойчивым*



112.

Ось, совпадающая с вектором угловой скорости, в данном случае не является свободной, потому что в системе координат, связанной с телом, имеются центробежные силы инерции, стремящиеся изменить направление этой оси в пространстве

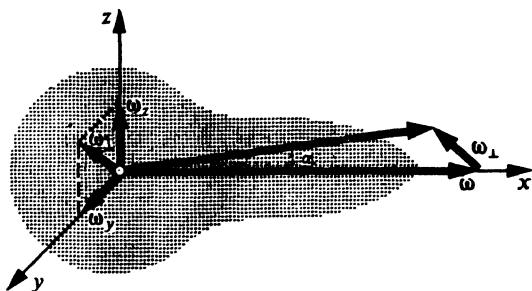
!

**Осами устойчивого свободного вращения твердого тела являются лишь главные центральные оси тензора инерции с максимальным и минимальным значениями момента инерции. Вращение вокруг главной центральной оси со средним моментом неустойчиво.**

только относительно центральной главной оси с максимальным или минимальным моментом инерции. Вращение вокруг центральной главной оси со средним моментом инерции неустойчиво. При небольшом случайному отклонении оси вращения от этого направления возникают силы, увеличивающие отклонение. Это обстоятельство можно наглядно продемонстрировать на таком опыте. У тела в виде прямоугольного параллелепипеда центральными главными осями являются три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его геометрический центр параллельно сторонам. Параллелепипед имеет наибольшие и наименьшие моменты инерции относительно осей, параллельных его самой длинной и самой короткой сторонам. Если его подбросить с одновременным вращением вокруг одной из этих осей, то движение происходит устойчиво с сохранением направления оси вращения. Если же его вращать вокруг оси, параллельной средней стороне, то устойчивого движения не получается и тело начинает беспорядочно кувыркаться.

Чтобы наглядно представить, почему свободные оси должны совпадать с центральными главными осями, возьмем тело в виде гантели. Проведем ось вращения в направлении, не совпадающем ни с одним из центральных главных направлений, например таким, которое указано на рис. 112.

Вопрос о силах инерции в неинерциальных системах координат подробно рассмотрен в гл. 14. Здесь нам достаточно отметить лишь хорошо известный факт существования центробежных сил инерции. Ясно, что при вращении продольная ось тела под действием этих сил стремится изменить свое направление в пространстве и занять положение, показанное на рис. 112 пунктиром. В этом положении вращение является устойчивым, и  $\omega$  совпадает с направлением центральной главной оси, относительно которой



113.

## К объяснению нутации

Ось вращения, вектор угловой скорости  $\omega$  и вектор  $N$  полного момента импульса лежат в одной плоскости, вращающейся со скоростью нутации вокруг последнего

тело обладает максимальным моментом инерции.

**Нутация.** Представим себе тело, которое обладает аксиальной симметрией относительно некоторой оси, т. е. является телом вращения (рис. 113). Ясно, что одна из центральных главных осей совпадает с осью симметрии, а две другие перпендикулярны ей. Ось  $x$  направим вдоль оси симметрии, а ось  $y$  и  $z$  — вдоль двух других центральных главных осей. Из условий симметрии следует, что  $I_x = I_1$ ,  $I_y = I_z = I_2$ . Уравнения (52.6) имеют вид:

$$I_1 \frac{d\omega_x}{dt} = 0,$$

$$I_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (I_1 - I_2) \omega_z \omega_x = 0, \quad (52.7)$$

$$I_2 \frac{d\omega_z}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_x \omega_y = 0.$$

Прежде всего из этих уравнений видно, что возможно движение, при котором  $\omega_x = \omega_1 = \text{const}$ ,  $\omega_y = \omega_z = 0$ , т. е. вращение вокруг оси симметрии тела с постоянной скоростью. Однако это не единственная возможность. Запишем второе и третье уравнения при условии  $\omega_x = \omega_1 = \text{const}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\omega_y/dt + \gamma \omega_z &= 0, \\ d\omega_z/dt - \gamma \omega_y &= 0, \end{aligned} \quad (52.8)$$

!

При вращении вокруг свободных осей не возникает сил, стремящихся изменить направление оси вращения или сместить ее параллельно самой себе в теле.

!

**Нутацией** называется движение оси вокруг вектора полного момента импульса.

где  $\gamma = (I_1 - I_2) \omega_1 / I_2$ . Эти уравнения имеют решение:

$$\omega_y = A \cos \gamma t, \quad \omega_z = A \sin \gamma t. \quad (52.9)$$

Вектор угловой скорости  $\omega_{\perp} = j\omega_y + k\omega_z$ , лежащий в плоскости  $(y, z)$ , вращается вокруг начала с круговой частотой  $\gamma$ . Полная угловая скорость

$$\omega = i\omega_1 + \omega_{\perp}. \quad (52.10)$$

Этот суммарный вектор движется вокруг оси  $x$  по поверхности конуса с углом  $\alpha$  при вершине ( $\operatorname{tg} \alpha = \omega_{\perp} / \omega_1$ ), т. е. угловая скорость вращения тела не совпадает с осью симметрии тела — осью  $x$ . Ось симметрии в свою очередь не остается неподвижной в пространстве. Она движется по поверхности конуса, ось которого неподвижна в пространстве, и совпадает с вектором полного момента импульса  $N$ , причем угловая скорость этого движения также равна  $\gamma$ . Следовательно, полное движение таково: плоскость, в которой лежат векторы мгновенной скорости  $\omega$  и ось симметрии, вращается с угловой скоростью  $\gamma$  вокруг вектора  $N$ , причем относительное положение вектора  $\omega$  и оси симметрии при этом не меняется. Это движение оси симметрии тела вокруг неподвижного в пространстве вектора полного момента импульса  $N$  называется нутацией,  $\gamma$  — скоростью нутации. При таком движении вектор  $\omega$  вращается вокруг оси симметрии с той же скоростью  $\gamma$ , как это было описано выше. Амплитуда нутации зависит от причин (начальных условий), которые ее вызвали. Но частота ее определяется только моментами инерции и угловой скоростью вращения вокруг оси симметрии. Тело может вращаться и без нутации, если его угловая скорость направлена строго по оси симметрии.

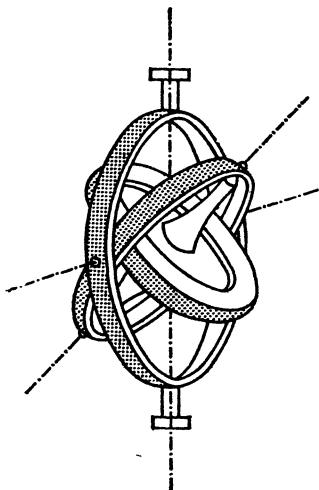
К телам вращения относится также шар. У него  $I_x = I_y = I_2$ , и поэтому  $\gamma = 0$ . Это означает, что у шара ось вращения всегда в отсутствие внешних сил сохраняет фиксированное положение относительно тела и никакой нутации быть не может. Это обусловлено тем, что любая ось, проведенная через центр шара, является центральной главной осью инерции. Однако если шар неоднороден, то нутация у него может быть. В частности, наблюдается нутация оси вращения Земли. Это доказывает, что земной шар нельзя рассматривать как однородный.

Для Земли моменты инерции относительно осей, лежащих в экваториальной плоскости, можно считать равными друг другу. В формулах (52.7) и (52.8) ось  $x$  считаем направленной вдоль оси вращения Земли. С учетом этого скорость нутации  $\gamma$ , как и в (52.8), равна  $\gamma = (I_1 - I_2) \omega_1 / I_2$ . Из измерений моментов инерции для Земли получено  $(I_1 - I_2) / I_2 \approx 1/300$ . Это означает, что период нутации земной оси должен быть примерно 300 дней, т. е. в течение 300 дней ось вращения совершают один оборот по поверхности конуса вокруг оси симметрии Земли. Эта ось находится из геодезических измерений,

а ось вращения — по наблюдению движения звезд. Она проходит через центр окружностей, которые описываются звездами в течение суток. Однако наблюдавшее движение значительно сложнее. Прежде всего оно нерегулярно, на него сильно влияют землетрясения и сезонные изменения, происходящие на поверхности Земли. Строго говоря, именно этими причинами обусловлена нутация оси вращения Земли, потому что в противном случае из-за потери энергии на преодоление вязкости ось вращения была бы совмещена с осью симметрии и никакой нутации не удалось бы наблюдать. В действительности период нутации равен примерно 440 дням, что обусловлено, по-видимому, неабсолютной жесткостью Земли. Максимальное расстояние точки земной поверхности, через которую проходит ось вращения, от точки, через которую проходит ось симметрии, на северном полюсе не превышает 5 м.

**Гироскопы.** Аксидально симметричное тело, приведенное в очень быстрое вращение вокруг своей оси симметрии, называется гироскопом. Примерами его могут служить волчок, диск, быстро врашающийся вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно поверхности. Гироскопом является также тело вращения, изображенное на рис. 113, при условии, что угловая скорость  $\omega_1$  достаточно велика.

**Прецессия гироскопа.** Предположим, что гироскоп закреплен в точке центра масс, но его ось может свободно поворачиваться в любом направлении. Такое закрепление осуществляют с помощью карданного подвеса (рис. 114), обеспечивающего свободное изменение ориентации оси гироскопа в трех взаимно перпендикулярных направлениях. На рисунках нет необходимости изображать карданный подвес (см. рис. 115). Пусть к гироскопу приложен момент внешних сил. Гироскоп вращается вокруг своей оси с очень большой угловой скоростью  $\omega$ , поэтому возможная нутация его оси вращения по поверхности конуса вокруг геометрической оси (см. рис. 113) очень мала. При рассмотрении движения оси гироскопа под действием момента внешних сил ею можно пренебречь. Поэтому будем считать, что ось вращения все время совпадает с осью симметрии гироскопа и момент импульса  $N = I\omega$ . Ось вращения совпадает с центральной осью инерции гироскопа, причем она выбирается так, чтобы быть устойчивой. Вокруг этой оси осуществляется свободное устойчивое вращение. Это направление оси устойчивого вращения сохраняется. Например, если, взявшись за основание карданного подвеса, изменять произвольным образом его ориентировку, то шарниры будут вращаться таким образом, чтобы ось сохраняла неизменное направление в пространстве. Поэтому если кардан укреплен на каком-либо теле, например на ракете, то при произвольном движении ракеты ось сохраняет неизменное направление в пространстве относительно системы неподвижных звезд. Находясь на ракете, в любой момент можно определить ее ориентировку в пространстве, зная положение ракеты относительно



114.

**Карданный подвес обеспечивает беспрепятственное изменение взаимной ориентировки тела и подвеса, с которым оно связано**

!

**Прецессией называется движение оси гироскопа под действием внешнего момента сил, приложенных к ней.**

оси. Это обстоятельство делает гироскоп важнейшим навигационным инструментом при полете ракет. Он является также главным элементом автопилота — устройства, которое обеспечивает автоматическое управление полетом самолета. Известны также многие другие его применения. О некоторых из них будет сказано позднее.

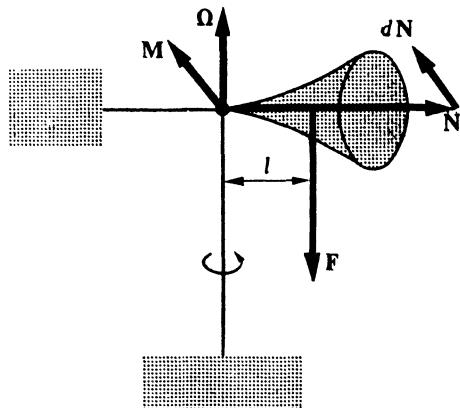
Допустим, что точка подвеса гироскопа не совпадает точно с его центром масс. Тогда при ускоренном движении кардана под действием сил инерции к оси гироскопа прилагается момент сил. Если кардан установлен на земле, то сила тяжести также создает момент сил, приложенных к оси гироскопа. При наличии момента сил эта ось начинает двигаться и изменяет свое направление в пространстве. Это движение под действием момента внешних сил называется прецессией гироскопа.

**Направление и скорость прецессии.** Основное свойство гироскопа, которое объясняет его поведение под действием сил, состоит в том, что вектор момента импульса  $N$  примерно совпадает с вектором угловой скорости  $\omega$ , направленным примерно вдоль центральной главной оси гироскопа, вокруг которой происходит вращение. Строго говоря, эти три вектора не совпадают. Однако отклонения от совпадения очень малы и ими будем пренебречь. Поэтому будем считать, что вектор  $N = I\omega$  всегда совпадает с центральной главной осью гироскопа. Такое совпадение обеспечивается гироскопическими силами. Их природа будет выяснена в гл. 14. Здесь же заметим лишь, что они обусловлены так называемыми кориолисовыми силами.

К гироскопу удобно применить уравнение моментов

$$dN/dt = M, \quad (52.11)$$

поскольку изменение  $N$  описывает непосредственно движение его оси. Зная  $M$ ,

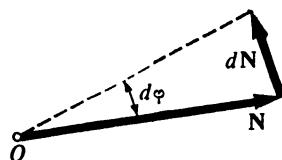


115.

## Прецессия гироскопа

Ось быстрого вращения гироскопа, вектор угловой скорости  $\omega$  и момент импульса  $N$  считаем совпадающими

всегда можно определить направление движения оси по соотношению  $dN = Mdt$ . На рис. 115 ось гироскопа расположена горизонтально, а сила  $F$  создает момент  $M = lF$ , перпендикулярный плоскости чертежа. Если бы гироскоп не находился в быстром вращении, то под действием силы  $F$  его ось должна была бы наклониться вправо. Но наличие вращения полностью изменяет результат действия силы. Поскольку  $dN = Mdt$ , конец оси начнет двигаться в горизонтальной плоскости. Если при этом  $F$  сохраняет постоянное значение (например, если  $F$  создается грузом, подвешенным к гироскопу на некотором расстоянии от точки опоры), то движение конца происходит с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Ось гироскопа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры гироскопа, с угловой скоростью прецессии. В результате прецессии полная скорость вращения  $\omega + \Omega$  не совпадает с осью гироскопа. Однако, ввиду того что  $\omega \gg \Omega$ , это несовпадение незначительно, и по-прежнему, несмотря на наличие прецессии, можно считать, что угловая скорость быстрого вращения все время совпадает с осью гироскопа и с моментом импульса  $N$ .



116.

Вектор  $N$  изменяется лишь по направлению, его абсолютное значение сохраняется

!

*Период гирокопического маятника характеризует способность его оси вращения сохранять неизменное направление в пространстве при действии на него момента внешних сил.*

Угловая скорость вращения легко может быть вычислена. На рис. 116 изображен ход прецессии гирокопа в горизонтальной плоскости. Точка  $O$  есть след оси прецессии. Очевидно, что  $dN = Mdt = Nd\phi$ . Отсюда согласно определению находим угловую скорость:

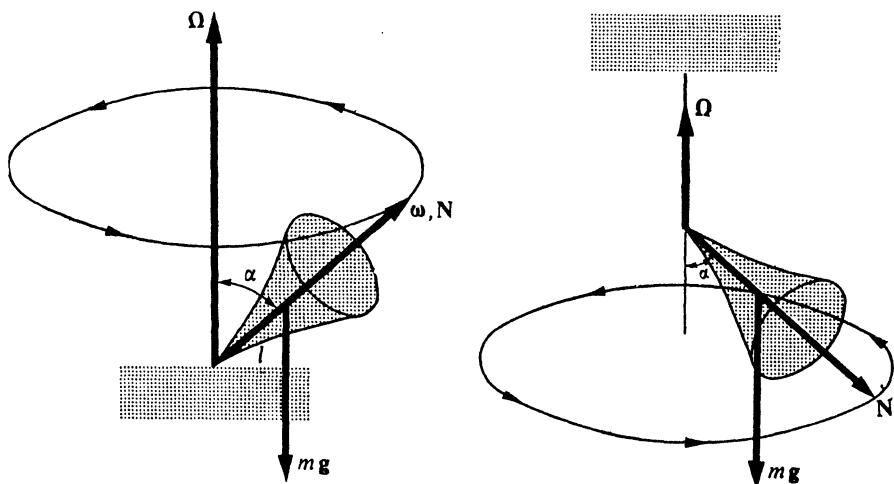
$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{N} = \frac{M}{I\omega}. \quad (52.12)$$

Характерной особенностью прецессии является то, что она не имеет «инерции» — прецессионное движение прекращается в момент прекращения действия момента сил, как это видно непосредственно из (52.11). Поэтому ее поведение аналогично не скорости, а ускорению, потому что ускорение прекращается одновременно с прекращением действия силы.

**Гирокопический маятник.** Рассмотрим случай, когда ось гирокопа закреплена в одной точке и подвешена за нить на ее конце (рис. 117; ср. с рис. 115). Кроме того, в этом случае ось расположена не горизонтально, а под углом  $\alpha$  к вер-

117.

Гирокопический маятник



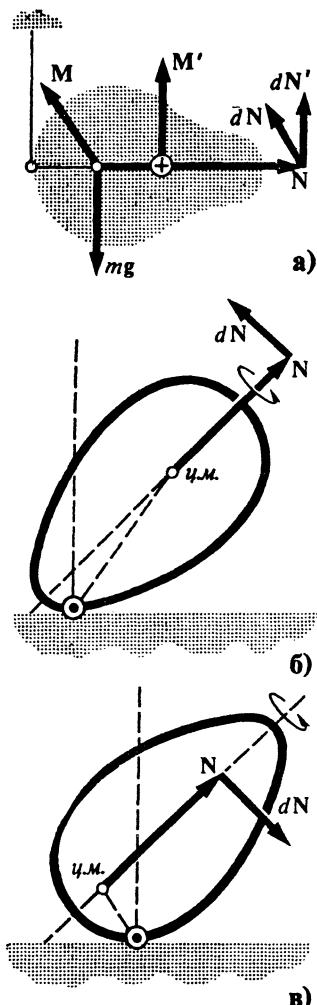
тикали. Непосредственно видно, что  $M = mgl \sin \alpha$ ,  $dN = -N \sin \alpha d\phi = mgl \sin \alpha dt$  и, следовательно,  $\Omega = (d\phi/dt) = (mgl/N)$ . Таким образом, угловая скорость не зависит от угла наклона оси гироскопа к вертикали. Это связано с тем, что при изменении угла изменяются одновременно момент силы и расстояние в горизонтальной плоскости от оси вращения до конца вектора  $N$ . Независимость скорости прецессии такого гироскопа от угла наклона его оси дало повод назвать его гироскопическим маятником. Период обращения этого маятника  $T = 2\pi/\Omega = 2\pi I\omega/mgl$  при достаточно больших значениях момента инерции  $I$  и угловой скорости вращения  $\omega$  и малой величине  $l$  может быть очень большим и составлять минуты и даже часы. Математический маятник с таким большим периодом имел бы громадную длину. Длина математического маятника, период колебаний которого равен периоду прецессии гироскопического маятника, называется приведенной длиной гироскопического маятника. Поскольку период математического маятника с длиной  $l_0$  равен  $T = 2\pi \sqrt{l_0/g}$ , приведенная длина рассмотренного гироскопического маятника равна  $l_0 = g(I\omega/mgl)$ , т. е. при достаточно больших  $I\omega$  и малых  $l$  может быть действительно очень большой.

**Яйцеобразный волчок.** Если волчок опирается на подставку очень острым концом, то его ось прецессирует, двигаясь по поверхности конуса, как это было только что рассмотрено. Это гироскопический маятник, но точка его опоры находится ниже центра массы.

Если же волчок опирается на достаточно широкий конец, так что нельзя считать, что он соприкасается с поверхностью в одной точке на оси вращения, явление значительно усложняется. Если волчок имеет яйцеобразную форму и при вращении опирается на поверхности своим более острым концом, то его ось стремится принять вертикальное положение, а при опоре на более тупой конец ось сначала опускается до горизонтального положения, а затем принимает вертикальное положение, но таким образом, чтобы вращение волчка продолжалось уже на более островом конце.

Такое поведение обусловливается действием сил трения (см. гл. 12), которые создают момент, вызывающий движение оси волчка в вертикальной плоскости. Пусть на гироскопический маятник действуют некоторые факторы, которые стремятся увеличить скорость его прецессии, например сила  $F$ , приложенная к оси в направлении ее прецессии (рис. 118, *a*). Нетрудно видеть, что эта сила создает относительно точки закрепления гироскопа момент  $M$ , направленный вверх, который и вызовет подъем оси гироскопа. Из аналогичного рассмотрения можно заключить, что факторы, приводящие к уменьшению скорости прецессии, приводят к опусканию оси.

Применим эти соображения к движению яйцеобразных волчков. На рис. 118, *b*, *c* изображен такой волчок, движущийся на островом и тупом концах. Соприкасаясь с поверхностью стола не по оси



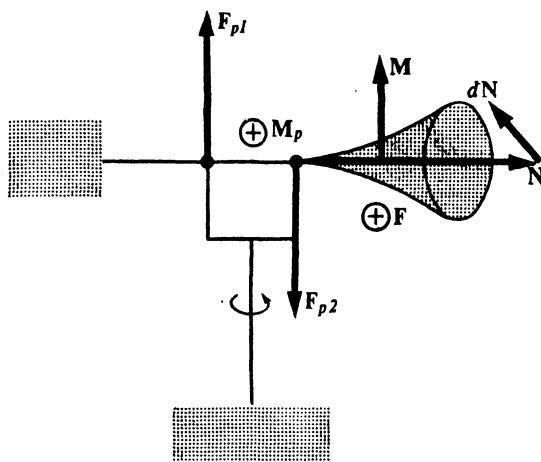
118.

Подъем и опускание оси яйцеобразного волчка

вращения, волчок начинает катиться по столу благодаря наличию сил трения в точке соприкосновения со столом. Непосредственно видно на рис. 118, б, что это качение приводит к дополнительному движению оси вращения в том же направлении, в каком она движется из-за прецессии, скорость прецессии при этом увеличивается и, следовательно, ось гироскопа будет подниматься. В случае на рис. 118, в картина движения волчка яйца изменяется. Здесь центр масс находится по другую сторону от вертикали в точке качения, а направление вращения гироскопа (т. е. направление  $N$ ) то же самое. Прецессия изменяется на обратную. Однако качение в этом случае вызывает дополнительное движение оси против направления прецессии, вследствие чего ось гироскопа будет опускаться.

К этим заключениям можно прийти также и непосредственно, рассматривая момент сил трения относительно центра масс волчка. В обоих случаях сила трения направлена перпендикулярно чертежу к нам (рис. 118, б, в). При движении на остром конце центр масс волчка находится справа от вертикали, проведенной через точку соприкосновения волчка со столом. Следовательно, момент силы трения относительно центра масс направлен так, что стремится повернуть вектор  $N$  к вертикали. Благодаря этому волчок стремится стать на острый конец. При движении на тупом конце центр масс волчка находится слева от вертикали, проведенной через точку соприкосновения волчка со столом. В этом случае момент силы трения относительно центра масс направлен так, что стремится повернуть вектор  $N$  к горизонтали.

Практически яйцеобразный волчок может устойчиво двигаться только при соприкосновении со столом острым концом. При соприкосновении тупым концом волчок движется неустойчиво и быстро становится на острый конец. Искусные де-



119.

## Движение несвободного гироскопа

монстраторы на лекциях очень красиво делают такого рода эксперименты.

**Несвободный гироскоп.** При закреплении только одной точки ось гироскопа может двигаться в любых направлениях. Поэтому такой гироскоп называют свободным. Если ось гироскопа закреплена в двух точках, то движения ее ограничены. Пусть, например, ось закреплена так, как показано на рис. 119; она может свободно вращаться в горизонтальной плоскости, но не может двигаться в вертикальной. Такой гироскоп называется несвободным. Движение несвободного гироскопа коренным образом отличается от движения свободного при том же самом моменте сил. Для анализа движения оси несвободного гироскопа необходимо принять во внимание момент, создаваемый силами реакции опоры в точках закрепления оси.

Если сила  $F$  горизонтальна (рис. 119), то она создает момент  $M$ , направленный вверх. Если бы гироскоп был свободным, под действием этого момента правый конец гироскопа должен подняться. Однако точки закрепления мешают этому. С их стороны на ось действуют силы реакции  $F_{p1}$  и  $F_{p2}$ , которые создают мо-

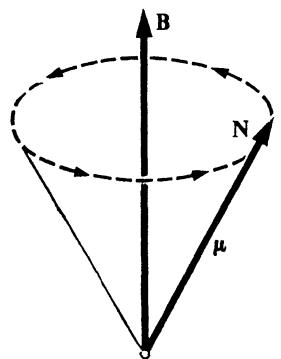
?

1      Что такое оси свободного вращения? Какие из них устойчивы?

2      В чем состоит нутация? От чего зависит скорость нутации? Почему однородный шар не может иметь нутационного движения?

3      Можете ли Вы нарисовать примерно картину, на которой полный момент импульса, мгновенная угловая скорость и ось симметрии лежат в одной плоскости, вращающейся со скоростью нутации вокруг вектора полного момента импульса?

4      Что такое прецессия гироскопа? Чем прецессия отличается от нутации?



120.

**Прецессия магнитного момента в магнитном поле**

?

- 1 При каких условиях можно считать, что вектор момента импульса гироскопа, мгновенная угловая скорость вращения и ось симметрии совпадают?
- 2 Как устроен карданный подвес?
- 3 Какие применения гироскопов Вы знаете?
- 4 От чего зависит скорость прецессии?
- 5 Можете ли Вы объяснить особенности поведения яйцеобразного волчка? Почему его ось меняет угол наклона к горизонту?
- 6 Почему несвободный гироскоп становится «послушным»?

мент  $M_p$ , перпендикулярный плоскости чертежа. Под действием этого момента правый конец оси гироскопа движется в горизонтальной плоскости в направлении первоначальной силы  $F$ . Поэтому несвободный гироскоп является послушным: его ось поворачивается туда, куда ее стремится повернуть внешняя сила. У свободного же гироскопа ось поворачивается в плоскости, перпендикулярной силе.

**Ларморова прецессия.** Электроны, движущиеся в атоме, аналогичны замкнутым точкам. Благодаря их движению возникает магнитный момент атома. С другой стороны, электроны обладают массой и вследствие их движения вокруг ядра возникает момент импульса атома. Магнитные и механические моменты, обусловленные движением электронов в атоме, называются **орбитальными**. Кроме того, как это уже было сказано ранее, каждый электрон обладает спином — собственным моментом импульса и соответствующим собственным магнитным моментом. Полный момент импульса атома является суммой орбитальных моментов и спинов всех электронов. Аналогично, полный магнитный момент атома равен сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов всех его электронов. Вообще говоря, полный магнитный момент атома не параллелен его полному моменту импульса. Однако спины электронов в атоме стремятся максимально компенсировать друг друга и поэтому в первом приближении не будем принимать во внимание собственные магнитные моменты и спины электронов. Тогда полный момент импульса атома  $N$  равен сумме орбитальных моментов импульса электронов, а его полный магнитный момент  $\mu$  — сумме орбитальных магнитных моментов электронов. В этом случае векторы  $N$  и  $\mu$  параллельны друг другу и соотношение между ними может быть представлено в виде

$$\mu = gN, \quad (52.13)$$

где  $g$  — коэффициент пропорциональности. В теории магнетизма доказывается, что на магнитный момент  $\mu$  в магнитном поле индукции  $B$  действует момент сил  $M = [\mu, B]$ . Следовательно, для движения механического момента атома в магнитном поле уравнение (52.11) принимает вид

$$dN/dt = g [N, B] = -g [B, N]. \quad (52.14)$$

Его сравнение с уравнением движения точек абсолютно твердого тела, врачающегося около оси со скоростью  $\omega$ :

$$v = d\mathbf{r}/dt = [\omega, \mathbf{r}],$$

показывает, что вектор  $N$  движется вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью  $\omega = -gB$  (рис. 120). Это движение называется ларморовой прецессией, названной так по имени ученого Лармора, выяснившего физическое значение этой прецессии. Она имеет важное значение в теории магнетизма. С ее помощью объясняется явление диамагнетизма.

# Глава 12

## ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

---

- 53. Силы трения
- 54. Движение при наличии сухого трения
- 55. Движение при наличии жидкого трения
- 56. Трение качения

**Т**рение возникает в результате многообразных процессов взаимодействия соприкасающихся поверхностей тел. Важными последствиями трения на практике являются нагревание тел и износ поверхностей.

---

### 53. Силы трения

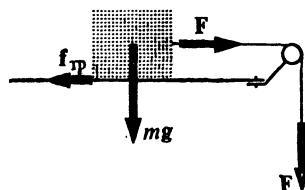
**Сухое трение.** Если два тела соприкасаются своими поверхностями под некоторым давлением и если по направлению, касательному к ним, приложить лишь небольшую силу, то никакого скольжения поверхностей не будет (рис. 121). Для того чтобы началось скольжение, сила должна иметь значение больше некоторой конечной минимальной величины. Следовательно, при соприкосновении тел под некоторым давлением между их поверхностями возникают силы, препятствующие их скользящему движению. Эти силы называются трением покоя. Скольжение начинается после того, как внешняя тангенциальная сила превзошла определенное значение. Таким образом, сила трения покоя  $f_{\text{пок}}$  изменяется от нуля до некоторого максимального значения  $f_{\text{пок}}^{\max}$  и равна внешней силе, которая приложена к телу. Она направлена противоположно внешней силе и уравновешивает ее, вследствие чего тела не приходят в движение и не происходит скольжения одной

поверхности по другой. Величина трения зависит от давления, материала тел и состояния поверхностей соприкосновения. У шероховатых поверхностей трение покоя больше, чем у хорошо отшлифованных.

После того как внешняя тангенциальная сила стала больше максимальной силы трения покоя, начинается скольжение вдоль по поверхности соприкосновения. В этом случае сила трения направлена против скорости. Ее численное значение для хорошо отполированных сухих металлических поверхностей при небольших скоростях практически не зависит от скорости и равно максимальной силе трения покоя. Таким образом, график зависимости силы трения от скорости имеет вид, изображенный на рис. 122, а. При всех скоростях  $v \neq 0$  сила трения имеет вполне определенное значение и направление. При  $v = 0$  ее величина не однозначна, а зависит от внешней силы.

Однако независимость силы трения от скорости соблюдается лишь при не очень больших скоростях, не для всех тел и не при всяких качествах обработки поверхностей. Во многих случаях график зависимости силы трения между твердыми поверхностями от скорости имеет вид, показанный на рис. 122, б: сначала при увеличении скорости до некоторого значения сила трения уменьшается в сравнении с трением покоя (для сокращения выражений вместо «максимальная сила трения покоя» говорят «сила трения покоя»), а затем возрастает.

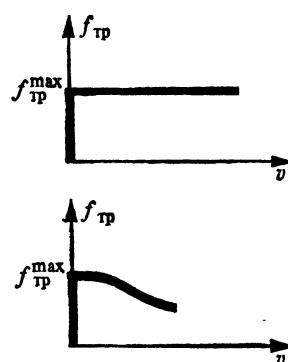
Наиболее характерной особенностью рассмотренной силы трения является наличие трения покоя: сила трения не обращается в нуль при нулевой относительной скорости соприкасающихся тел. Такое трение называется сухим. Сила трения в случае, изображенном на рис. 121, дается формулой  $f_{\text{тр}} = k'mg$ , причем  $k'$  называется коэффициентом



121.

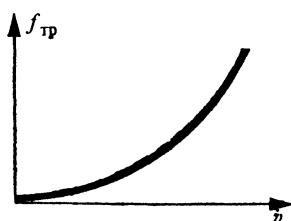
**Сухое трение**

Для него характерно наличие трения покоя



122.

Зависимость силы сухого трения от скорости. На оси ординат отложены силы против скорости



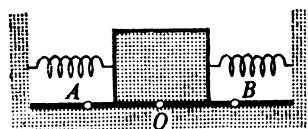
123.

**Зависимость силы жидкого трения от скорости.** На оси ординат отложены силы против скорости

Характерная особенность этого трения — исчезновение силы трения при нулевой скорости движения

!

**Явление застоя может существенно исказить результаты измерения физических величин с помощью приборов, если при движении их стрелок в осях вращения имеется сухое трение.**



124.

**Явление застоя**

**трения.** Он определяется экспериментально.

Возникновение сухого трения обусловлено взаимодействием молекул, атомов и электронов, находящихся вблизи поверхности соприкосновения, т. е. в конечном счете электромагнитным взаимодействием.

**Жидкое трение.** Если соприкасающиеся металлические поверхности хорошо смазать, то они начинают скользить уже при очень малых, практически равных нулю силах. Это объясняется тем, что между собой трутся не твердые металлические поверхности, а тонкие жидкие масляные пленки, которые налипают при смазке на поверхности. Такие силы трения, у которых трение покоя отсутствует, называются силами жидкого трения. Например, металлический шарик движется в газе или жидкости при самых малых силах. Между поверхностью шарика и газом или жидкостью возникают силы трения, которые стремятся противодействовать движению. Однако при стремлении скорости к нулю эта сила трения стремится к нулю, т. е. является силой жидкого трения.

Зависимость силы жидкого трения от скорости изображена на рис. 123. При достаточно малой скорости эта сила прямо пропорциональна скорости:  $f_{tr} = -kv$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от свойств жидкости или газа, геометрических характеристик тела, свойств его поверхности.

При движении твердых тел в жидкости или газе наряду с силой трения, которая в каждой точке направлена по касательной к поверхности тела, на тело в противоположном его скорости направлении действуют также силы другой природы, которые называются силами сопротивления. Они рассматриваются в механике сплошной среды. При решении задач на движение они учитываются также, как и силы жидкого трения, завися-

щие от скорости. Сила сопротивления увеличивается пропорционально квадрату скорости:  $f \sim v^2$ . Однако их роль существенна лишь при достаточно больших скоростях. При малых скоростях можно ограничиться учетом силы трения, пропорциональной первой степени скорости.

**Трение качения.** При качении сухого твердого колеса по твердой поверхности наряду с силой сухого трения возникает трение качения. Оно будет рассмотрено в § 56 вместе с другими вопросами качения.

**Работа сил трения.** Работа силы трения покоя равна нулю, поскольку перемещение отсутствует. При скольжении твердых поверхностей сила трения направлена против перемещения. Ее работа отрицательна. Вследствие этого кинетическая энергия трущихся тел превращается во внутреннюю — трущиеся поверхности нагреваются. Сила жидкого трения также производит отрицательную работу, при этом кинетическая энергия движущихся тел также превращается во внутреннюю и скорость тел уменьшается.

Таким образом, для движения при наличии трения закон сохранения энергии не может быть сформулирован в виде постоянства суммы кинетической и потенциальной энергий. При наличии трения эта сумма убывает, происходит превращение энергии во внутреннюю энергию трущихся тел.

Не следует думать, что трение преимущественно играет отрицательную роль для движения. Если бы не было трения, то необходимо было бы изменить весь уклад жизни. Можно сказать, что существующая техника базируется на наличии трения. Если бы его не было, то не смогли бы двигаться автомобили, люди не могли бы ходить по ровной поверхности земли, невозможно было бы безопасно сидеть на стуле и т. д.

#### 54. Движение при наличии сухого трения

В динамике учет сухого трения сводится к учету действия силы трения, направленной против скорости, и в этом смысле каких-либо необычных особенностей не представляет. Однако наличие трения покоя приводит к возникновению двух интересных явлений — явлений застоя и заноса.

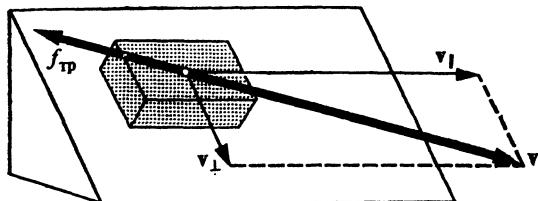
**Явление застоя.** Представим себе тело, которое с трением движется в горизонтальной плоскости под действием сил, показанных на рис. 124. В среднем положении тела равнодействующая сил, приложенных к телу со стороны пружин в горизонтальной плоскости, равна нулю. При отклонении положения тела от среднего возникает сила, стремящаяся вернуть его в это положение. Однако если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя, она не в состоянии сдвинуть тело. Поэтому равновесным является не только среднее положение тела в точке  $O$ , но и все другие положения в определенном интервале  $AB$  отклонений от среднего. Хотя

во всех этих положениях на тело со стороны пружины действует сила, тело остается в покое. Если тело отклонить за пределы интервала  $AB$  и отпустить, то под действием силы со стороны пружины оно придет в движение. В зависимости от величины первоначального отклонения тело совершил либо колебательное движение, либо просто движение в одном направлении, но через некоторое время остановится из-за потери энергии на трение. Остановка может произойти в любом положении в пределах интервала  $AB$ . Тело практически никогда не останавливается в среднем положении. Явление остановки и задержки тела в отклоненном от среднего положения, в котором действующая на него со стороны пружины сила не равна нулю, называется явлением застоя.

Ясно, что если бы трение между телом и горизонтальной плоскостью было жидким, явление застоя не наблюдалось бы, поскольку в этом случае сколь угодно малая сила со стороны пружины вызвала бы движение тела. Поэтому равновесным положением тела, при котором оно может покоиться, является единственное положение — среднее, когда равнодействующая сил со стороны пружины равна нулю.

Явление застоя имеет важное значение во многих случаях. В измерительных приборах обычно происходит сравнение измеряемой величины или ее известного действия с масштабом величины или масштабным действием, а результат считывается с помощью указателя в виде стрелки. Если в оси вращения стрелки имеется сухое трение, то она никогда не будет указывать точно на то деление шкалы, которое соответствует равенству измеряемой и масштабной величин. Это приводит к некоторой ошибке измерения, которая тем больше, чем больше сухое трение. Поэтому в измерительных приборах желательно максимально уменьшить сухое трение и приблизить условия к условиям жидкого трения.

**Явление заноса.** Пусть на наклонной плоскости покоится тело (рис. 125). Это означает, что максимальная сила трения покоя больше, чем сила  $F = mg \sin \alpha$ , стремящаяся вызвать соскальзывание с наклонной плоскости ( $\alpha$  — угол наклона плоскости к горизонту). Теперь приведем тело в движение со скоростью  $v$  поперек плоскости (рис. 125). Тело сразу же начнет соскальзывать с нее. Это вызвано тем, что, как только тело начнет двигаться в направлении скорости  $v_{\parallel}$  поперек наклонной плоскости, сила трения между плоскостью и телом будет направлена противоположно скорости. Следовательно, не будет никакой силы, которая противодействовала бы силе  $F = mg \sin \alpha$ , вызывающей соскальзывание. Благодаря этому появляется скорость  $v_{\perp}$  в направлении соскальзывания. Полная скорость движения тела по наклонной плоскости равна  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ . Сила трения  $f_{tr}$  направлена против скорости. Против силы  $mg \sin \alpha$  действует лишь составляющая сила трения  $f_{tr} \sin \beta$  ( $\tan \beta = v_{\perp}/v_{\parallel}$ ). Если она равна силе  $mg \sin \alpha$ , то дальнейшее увеличение скорости соскальзывания с наклонной плоскости прекратится и тело будет двигаться



125.

## Явление заноса

с постоянной скоростью  $v$ , направленной под углом  $\beta$  к горизонту. Для поддержания такого режима движения попереk наклонной плоскости должна действовать постоянная сила  $f \cos \beta$ , равная составляющей силы трения против скорости  $v_{\parallel}$ . Исчезновение силы трения покоя в направлении, перпендикулярном скорости, называется явлением заноса. Этим названием оно обязано наиболее известному своему проявлению — заносу автомобилей.

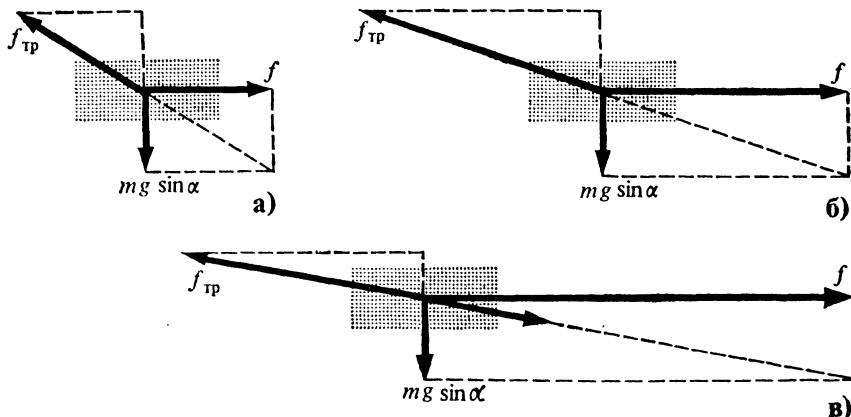
Представим себе, что на наклонной плоскости (рис. 125) стоит автомобиль, продольная ось которого горизонтальна. Между колесами автомобиля и плоскостью действует сила трения, благодаря которой автомобиль не соскальзывает с нее под действием силы  $F = mg \sin \alpha$ . Затем можно привести автомобиль в движение попереk наклонной плоскости в направлении скорости  $v_{\parallel}$ . Если это сделать очень осторожно, с достаточно малым ускорением, так чтобы в точках соприкосновения колес автомобиля с плоскостью не было проскальзывания, то сила трения покоя между ними будет существовать и будет уравновешивать силу  $F = mg \sin \alpha$ . Автомобиль благополучно без проскальзывания двигается попереk наклонной плоскости. Если же попытаться двигаться попереk наклонной плоскости с большим ускорением, форсировав мощность мотора, то между ведущими колесами автомобиля (обычно задними) и поверхностью начнется проскальзывание. Благодаря этому сила трения покоя, ко-

!

**Явление заноса возникает вследствие того, что сила трения скольжения всегда направлена против скорости, но не зависит существенно от ее абсолютного значения.**

?

- 1 Чему равна сила сухого трения, когда тело покоятся, и как она направлена?
- 2 Чему равна сила жидкого трения, когда скорость тела равна нулю?
- 3 Как сила сухого трения зависит от скорости?
- 4 Как сила жидкого трения зависит от скорости?



## 126.

**Изменение баланса сил при приближении к началу заноса**

торая уравновешивала составляющую силы тяжести вдоль наклонной плоскости, исчезает. Колеса начинают скользить вдоль нее. Если ведущими колесами являются задние, то движутся вдоль наклонной плоскости только они, в результате чего автомобиль разворачивает, или, как говорят, «заносит». Нетрудно видеть, что «занос» будет иметь место также и при резком торможении, когда начинается скользящее движение заторможенных колес по плоскости.

Не следует думать, что соскальзывание тела вдоль наклонной плоскости начинается лишь после образования скорости поперек наклонной плоскости. Рассмотрим баланс сил, действующих на тело после того, как к нему стали прилагать силу поперек наклонной плоскости (рис. 126). На рис. 126, а изображена ситуация, когда сила  $f$  не очень велика. Равнодействующая сил  $f$  и  $mg \sin \alpha$  уравновешивается силой трения покоя  $f_{tr}$ , которая меньше, чем максимальная сила трения покоя. Все эти силы лежат в наклонной плоскости. Увеличивая силу  $f$ , мы приходим к критической ситуации, показанной на рис. 126, б. Равнодействующая  $f$  и  $mg \sin \alpha$  достигает максимального значения силы трения покоя.

?

- 1 **Какую роль играет явление застоя при работе измерительных приборов?**
- 2 **В чем состоит явление заноса? В каких обстоятельствах оно опасно, в каких — полезно?**
- 3 **Откуда следует необходимость существования предельной скорости движения при наличии жидкого трения?**

При этом тело не двигается, поскольку все силы уравновешиваются друг друга. При дальнейшем небольшом увеличении силы  $f$  это равновесие нарушается (рис. 126, в): сила трения по-прежнему направлена противоположно результирующей силы  $f$  и  $mg \sin \alpha$ . Но поскольку она уже достигла максимального значения, она не равна результирующей и не может ее компенсировать. Но самое важное состоит в том, что в первую очередь нарушается компенсация силы  $mg \sin \alpha$ , а не силы  $f$ , как это видно на рис. 126, в: составляющая силы трения  $f_{\text{тр}}$  в направлении, противоположном  $f$ , компенсирует силу  $f$ , а составляющая в направлении, противоположном силе  $mg \sin \alpha$ , становится меньше, чем эта сила. Поэтому начинается скольжение тела вдоль наклонной плоскости, а отнюдь не его движение поперек плоскости в направлении силы  $f$ , как это могло показаться на первый взгляд при изложении сущности явления заноса. Но чистого скольжения вдоль наклонной плоскости не может произойти, потому что, как только оно начинается, сила трения должна переориентироваться противоположно скорости скольжения. В результате этого сила  $f$  оказывается нескомпенсированной, и должно начаться движение в направлении этой силы. Таким образом, одновременно начнется как скольжение, так и движение поперек наклонной плоскости. Обсуждение процесса как последовательности действия сил сделано лишь для более ясного понимания сущности физических явлений. Из состояния покоя тело начинает двигаться в направлении равнодействующей сил  $f$  и  $mg \sin \alpha$  при критической ситуации, изображенной на рис. 126, б, в которой эта равнодействующая достигает максимального значения трения покоя.

## 55. Движение при наличии жидкого трения

**Предельная скорость.** При сухом трении движение с ускорением происходит тогда, когда внешняя сила превосходит максимальное значение силы трения. В этих условиях при постоянной внешней силе скорость, которую может достигнуть тело, не ограничена (в нерелятивистском смысле). По-другому обстоит дело при наличии жидкого трения. В этом случае постоянная сила может ускорить тело лишь до определенной скорости, называемой предельной. При достижении ее сила трения  $f_{\text{тр}} = -kv$  уравновешивает внешнюю силу  $f$  и тело далее движется равномерно. Следовательно, предельная скорость  $v_{\text{пр}} = f/k$ .

**Формула Стокса.** Расчет силы жидкого трения является сложной задачей. Сила трения зависит от формы движущегося в жидкости тела и свойства жидкости, называемого вязкостью. Для небольших шарообразных тел эта сила может быть рассчитана по формуле Стокса:

$$f_{\text{тр}} = 6\pi\mu r_0 v,$$

(55.1)

!

**Характерная особенность движения при наличии сил жидкого трения, зависящих от скорости, заключается в достижении предельной скорости, определяемой величиной приложенной силы. При сухом трении предельной скорости не существует.**

где  $r_0$  — радиус шара,  $\mu$  — динамическая вязкость, или просто вязкость, значения которой для каждой жидкости известны. Вязкость характеризует силы жидкого трения между слоями жидкости, скользящими друг относительно друга. Формула Стокса имеет многочисленные применения. Если задана сила и измерена предельная скорость, то можно определить радиус шара. Если же известен радиус, то, измерив предельную скорость, находят силу.

**Приближение к предельной скорости.** Движение тела в одномерном пространстве при наличии сил жидкого трения описывается уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = f_0 - kv. \quad (55.2)$$

?

- 1 Чему примерно равна предельная скорость человека при падении в воздухе?  
 2 Можете ли Вы описать различие в динамике движения парашютиста при его выпрыгивании с аэростата и из быстро летящего самолета?

Силу  $f_0$  считаем постоянной. Пусть  $v = 0$  в момент  $t = 0$ . Интегрируя (55.2), получаем решение этого уравнения:

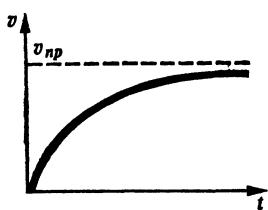
$$\int_0^v \frac{dv}{1 - (k/f_0) v} = \frac{f_0}{m} \int_0^t dt; \quad (55.3)$$

$$\frac{f_0}{k} \ln \left( 1 - \frac{k}{f_0} v \right) = \frac{f_0}{m} t,$$

или после потенцирования

$$v(t) = \frac{f_0}{k} (1 - e^{-(k/m)t}). \quad (55.4)$$

График этой функции изображен на рис. 127. Скорость  $v(t)$  увеличивается от 0 при  $t = 0$  до предельного значения  $v_{\text{пр}} = f_0/k$  по экспоненциальному закону. Экспонента очень резко зависит от своего показателя. Практически, после того как показатель экспоненты достиг значения  $-1$ , она очень быстро обращается в нуль. Поэтому можно считать, что скорость достигает предельного значения в течение времени  $t$ , за которое показатель экспоненты в формуле (55.4) становится равным  $-1$ , т. е. это значение может быть найдено из условия  $(kt/m) = 1$ ,



127.

Приближение скорости к предельному значению при наличии жидкого трения

откуда  $\tau = m/k$ . В вязких жидкостях тела с небольшой плотностью могут достигать критических скоростей очень быстро. В случае шарообразного тела по формуле Стокса имеем  $k = 6\pi\mu r_0$ . Так как объем шара равен  $4\pi r_0^3/3$ , то время достижения предельной скорости будет равно

$$\tau = \frac{m}{6\pi\mu r_0} = \frac{2}{9} \rho_0 \frac{r_0^2}{\mu},$$

где  $\rho_0$  — плотность тела. Для глицерина  $\mu \approx 14$  г/(см·с). Поэтому стальной шарик с плотностью  $\rho_0 \approx 8$  г/см<sup>3</sup> и радиусом  $r_0 = 1$  см достигает критической скорости в течение  $\tau \approx 0,13$  с. Если же  $r_0 = 1$  мм, то время уменьшается в 100 раз. В минеральном масле, у которого вязкость почти в 15 раз меньше, эти величины увеличиваются примерно в 15 раз. Таким образом, большой стальной шарик ( $r_0 = 1$  см) движется в масле с заметным ускорением примерно в течение 2 с. Шарик же с миллиметровым радиусом достигает предельной скорости почти за 0,02 с.

**Падение тел в воздухе.** При движении тел в воздухе с достаточно большими скоростями наряду с силами вязкого трения возникают силы аэродинамического происхождения, природа которых подробно рассматривается в курсе механики сплошных тел. Здесь заметим лишь, что сила сопротивления воздуха движению тел оказывается пропорциональной квадрату скорости. При свободном падении тела в воздухе в случае равенства силы тяжести тела силе сопротивления достигается предельная скорость. В качестве примера рассмотрим падение парашютиста от момента выбрасывания с аэростата до момента открытия парашюта (речь идет именно о выбрасывании с покоящегося в воздухе аэростата, а не с быстролетящего самолета). Как показывает опыт, предельная скорость падения человека в воздухе примерно 50 м/с. Это значение  $v_{\text{пр}}$  и будем принимать в дальнейшем, хотя оно в некоторых пределах зависит от роста и массы парашютиста, ориентировки его тела относительно направления движения, от атмосферных условий и т. д. Направим ось  $X$  по вертикали, вверх, а начало координат  $x = 0$  поместим на уровне Земли. Поскольку сила сопротивления воздуха при тех скоростях, с которыми мы в рассматриваемом случае имеем дело, пропорциональна квадрату скорости, уравнение движения можно записать в виде

$$m\dot{v} = m\ddot{x} = -mg + \kappa v^2, \quad (55.5)$$

где  $\kappa$  — коэффициент трения ( $\kappa > 0$ ). Считая известной предельную скорость  $v_{\text{пр}}$ , выразим через нее  $\kappa$ . Для равномерного движения с предельной скоростью имеем:

$$m\ddot{x} = 0 = -mg + \kappa v_{\text{пр}}^2, \quad \kappa = mg/v_{\text{пр}}^2.$$

С учетом этого выражения для  $\kappa$  уравнение (55.5) перепишем в виде  $\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{v_{\text{пп}}^2} (v_{\text{пп}}^2 - v^2)$ .

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\int_0^v \frac{dv}{v_{\text{пп}}^2 - v^2} = -\frac{g}{v_{\text{пп}}^2} \int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{2v_{\text{пп}}} \ln \frac{v_{\text{пп}} + v}{v_{\text{пп}} - v} = -\frac{g}{v_{\text{пп}}^2} t.$$

Потенцируя это выражение, находим

$$v = -v_{\text{пп}} \frac{1 - \exp(-2gt/v_{\text{пп}})}{1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})}. \quad (55.6)$$

Для начального периода падения, когда  $2gt/v_{\text{пп}} \ll 1$ , можно разложить экспоненты в ряд и ограничиться линейным по  $t$  членом:

$$\exp(-2gt/v_{\text{пп}}) \approx 1 - 2gt/v_{\text{пп}}. \quad (55.7)$$

В этом случае из формулы (55.6) имеем

$$v = -gt.$$

Это означает, что в начальной стадии практически происходит свободное падение, а сила сопротивления воздуха не играет существенной роли.

При дальнейшем увеличении скорости роль силы сопротивления воздуха возрастает и становится определяющей при скоростях, близких к предельным. В этом случае имеем  $(2gt/v_{\text{пп}}) \gg 1$  и можем пренебречь экспонентой в знаменателе формулы (55.6). Тогда она примет вид

$$(v_{\text{пп}} - v)/v_{\text{пп}} = \exp(-2gt/v_{\text{пп}}). \quad (55.8)$$

Таким образом, при  $t = 10$  с скорость отличается от предельной примерно на  $e^{-4} \approx 1/50$ , т. е. на 1 м/с. Поэтому можно считать, что парашютист достигает предельной скорости примерно через 10 с после начала падения. График скорости парашютиста в зависимости от времени падения показан на рис. 128.

Интегрируя обе части равенства (55.6) по времени, найдем путь, проходимый парашютистом при падении:

$$\begin{aligned} \int_0^t v dt &= -v_{\text{пп}} \int_0^t \frac{1 - \exp(-2gt/v_{\text{пп}})}{1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})} dt = \\ &= -v_{\text{пп}} \int_0^t \left( 1 - \frac{2 \exp(-2gt/v_{\text{пп}})}{1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})} \right) dt. \end{aligned} \quad (55.9)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} & \frac{\exp(-2gt/v_{\text{пп}})}{1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})} dt = \\ & = \frac{v_{\text{пп}}}{2g} d \ln [1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})]; \\ & v dt = dx, \end{aligned}$$

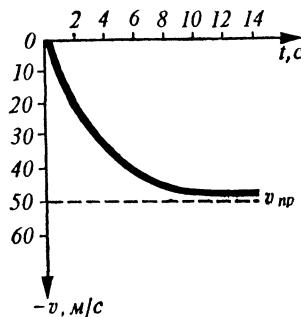
из (55.9) получаем

$$\begin{aligned} h_0 - x = & \\ & = v_{\text{пп}} \left[ t - \frac{v_{\text{пп}}}{g} \ln \frac{2}{1 + \exp(-2gt/v_{\text{пп}})} \right], \quad (55.10) \end{aligned}$$

где  $h_0$  есть высота, с которой начинается падение парашютиста. Из этой формулы определяем, что за 10 с парашютист пролетит около 350 м. Весь оставшийся путь до открытия парашюта он движется почти равномерно с предельной скоростью. Зависимость пути от времени показана на рис. 129.

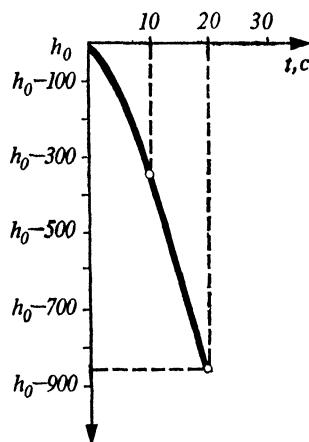
Предельная скорость снижения человека с открытым парашютом несколько меньше 10 м/с. Поэтому при открытии парашюта скорость парашютиста в короткий промежуток времени уменьшается от 50 м/с до примерно 10 м/с, что связано с возникновением больших ускорений и, следовательно, больших сил, действующих на парашютиста. Действие этих сил называется динамическим ударом.

При выпрыгивании парашютиста из быстролетящего самолета, скорость которого может достигать нескольких сотен метров в секунду, картина движения его коренным образом меняется. После выбрасывания парашютиста из самолета его скорость в короткий промежуток времени уменьшается от скорости самолета до примерно 50 м/с. Ускорение парашютиста при этом очень большое, а следовательно, большой и динамический удар. Поэтому при катапультировании из самолетов, летящих с большой скоростью, особенно из сверхзвуковых, принимаются специальные меры, обеспечивающие безопасность летчика непосредственно после момента катапультирования.



128.

Зависимость скорости свободного падения парашютиста от времени



129.

Зависимость пути при свободном падении парашютиста от времени

## 56. Трение качения

**Доказательство существования.** Пусть цилиндр скатывается с наклонной плоскости без скольжения. Динамика движения цилиндра при наличии лишь сил трения покоя была рассмотрена в § 51. Предположение о качении без скольжения означает, что соприкасающиеся точки цилиндра и плоскости не скользят друг относительно друга вдоль поверхности соприкосновения. Поэтому между ними действуют силы трения покоя. Именно силы трения покоя составляют тангенциальную силу  $T$  на рис. 109, которая вместе с силой  $mg \sin \alpha$  приводит к вращению цилиндра. Представим себе, что поверхность наклонной плоскости и цилиндр абсолютно недеформируемы. Тогда они должны соприкасаться между собой по геометрической линии. В этом случае никаких других сил, кроме силы  $T$  трения покоя, не возникает. На линии соприкосновения материальные частицы цилиндра и наклонной поверхности не испытывают взаимных перемещений в направлении силы трения. Поэтому работа силы трения равна нулю и никаких потерь на трение нет. Следовательно, качение без скольжения абсолютно недеформируемого цилиндра по абсолютно недеформируемой поверхности не должно сопровождаться потерей энергии на трение, хотя сила трения покоя существует и обеспечивает качение.

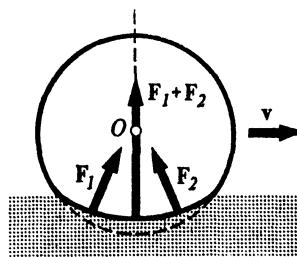
Если к оси цилиндра приложена очень большая сила, то качение без скольжения невозможно. В этом случае угловая скорость вращения цилиндра меньше, чем требуемая для обеспечения качения без скольжения, вращение цилиндра «не успевает» за перемещением его оси с линейной скоростью и начинается скольжение в местах соприкосновения цилиндра и плоскости. При скольжении сила трения равна максимальной силе трения покоя (если не учитывать возможной зависимости силы сухого трения от скорости). Однако, поскольку в этом случае частицы цилиндра и плоскости, соприкасающиеся друг с другом, взаимно перемещаются по линии действия сил трения, они производят отрицательную работу, вследствие чего кинетическая энергия превращается во внутреннюю. Это будет справедливо и в том случае, когда цилиндр и поверхность абсолютно недеформируемы.

Однако в реальных условиях имеются потери кинетической энергии даже при качении без скольжения. Например, цилиндр, катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости, в конце концов останавливается. Если при скатывании цилиндра с наклонной плоскости измерить очень точно его кинетическую энергию в конце скатывания, то она оказывается меньше той потенциальной энергии, которая превратилась в кинетическую, т. е. имеются потери энергии. Причины этих потерь — силы трения качения, которые не сводятся ни к трению покоя, ни к трению скольжения.

**Механизм возникновения.** Из изложенного ясно, что возникновение сил трения качения связано с деформацией. Однако нетрудно

видеть, что абсолютно упругие деформации не в состоянии привести к появлению каких-либо сил, тормозящих движение (рис. 130). Деформации подвергается как плоскость, так и колесо. Колесо несколько «сплющивается», что в увеличенном размере показано на рис. 130. Пунктиром обозначен нижний обод колеса при отсутствии его деформации. Силы  $F_1$  и  $F_2$  являются равнодействующими силами, приложенных к деформированному колесу со стороны участков деформированной поверхности впереди вертикальной линии и позади нее. Полная сила, действующая на колесо, равна  $F_1 + F_2$ , а момент сил относительно оси колеса равен сумме моментов сил  $F_1$  и  $F_2$ . Момент силы  $F_1$  стремится увеличить скорость вращения колеса, а момент силы  $F_2$  — уменьшить ее. При абсолютно упругой деформации вся картина сил симметрична относительно вертикальной линии, проходящей через ось колеса. Следовательно, моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  взаимно компенсируются, а суммарная сила  $F_1 + F_2$  проходит через центр колеса и имеет лишь вертикальную составляющую, которая уравновешивает его силу тяжести (и всего, что на него опирается). Никакой горизонтальной силы нет. Следовательно, не возникает и сила трения качения.

По-другому обстоит дело, если деформации не являются абсолютно упругими, как это имеет место в реальных ситуациях. В этом случае картина имеет вид, изображенный на рис. 131. Силы  $F_1$  и  $F_2$  различны. Сумма этих сил имеет как вертикальную составляющую, которая уравновешивает силу тяжести колеса, так и горизонтальную, направленную против скорости и являющуюся силой трения качения. Моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  направлены противоположно и не равны друг другу. Момент силы  $F_2$ , тормозящий вращение, больше момента силы  $F_1$ , его ускоряющего. Поэтому суммарный момент сил

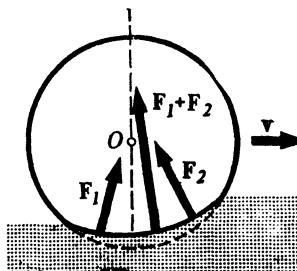


130.

При абсолютно упругой деформации равнодействующая сила  $F_1 + F_2$  проходит через ось колеса и трения качения не возникает

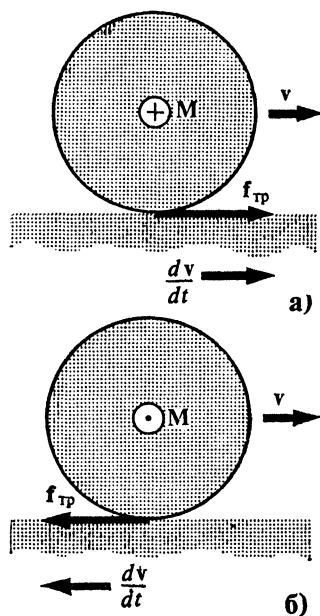
?

- 1 Почему отсутствует трение качения для абсолютно твердых тел?
- 2 Почему отсутствует трение качения, если деформации абсолютно упруги?



131.

При неупругой деформации равнодействующая сила  $F_1 + F_2$  не проходит через ось колеса, в результате чего возникает трение качения



132.

Схема сил, действующих на колесо самодвижущихся средств транспорта

?

- 1 От каких факторов зависит сила трения качения?
- 2 Пусть катящийся без скольжения цилиндр останавливается из-за потери энергии на преодоление сил трения качения. В какие формы энергии и каким путем превратилась кинетическая энергия катящегося цилиндра?

тормозит вращение колеса. В результате действия сил трения качения кинетическая энергия также превращается во внутреннюю через посредство неупругих деформаций.

Таким образом, сила трения качения и момент сил, замедляющий вращение колеса, возникают вследствие неупругого характера деформации колеса и поверхности качения в области их соприкосновения. Учет их влияния на движение каких-либо трудностей не представляет. Трудным является лишь определение этих сил и моментов. Обычно это делается экспериментально, и значения их в соответствующей форме даются в таблицах.

**Самодвижущиеся средства транспорта.** При рассмотрении движения автомобиляй, паровозов и других самодвижущихся средств транспорта возникают два новых вопроса: как происходит их разгон и торможение? Достаточно проанализировать эти вопросы на примере одного колеса. Если движение происходит без скольжения колес, то сил трения скольжения нет. Силы трения качения при этом всегда присутствуют и действуют, как только что описано. Однако существенной роли в разгоне экипажей и их торможении силы трения качения не играют. Главная роль при этом принадлежит силам трения покоя.

При разгоне экипажа к оси колеса со стороны мотора прилагается момент сил  $M$  (рис. 132, а). Однако силы трения покоя  $f_{tr}$  в точках соприкосновения колеса с дорогой препятствуют его вращению. В результате этого на колесо действует сила трения покоя, направленная в сторону движения.

При торможении картина обратная — момент сил тормозных колодок направлен таким образом (рис. 132, б), что возникающая при этом дополнительная сила трения покоя направлена против скорости экипажа. Эта дополнительная сила трения покоя суммируется с силой тре-

ния покоя, которая обеспечивает качение колеса без скольжения, когда на его ось не действуют никакие внутренние моменты сил.

Если полная сила трения покоя при взаимодействии колеса и дороги с учетом только что указанной дополнительной силы трения превосходит максимальную силу трения покоя, то колеса проскальзывают. Поэтому скольжение колес возникает как при желании слишком быстро разогнать машину, так и при стремлении слишком быстро затормозить ее. В обоих случаях явление заноса при попытке быстрого разгона или торможения может привести к плачевным результатам. Но даже если ничего подобного не произошло, быстрого разгона или торможения все равно не получится. Дело в том, что трение скольжения при увеличении относительной скорости скольжения поверхностей в большинстве случаев несколько уменьшается в сравнении с максимальным трением покоя. Поэтому при проскальзывании колеса максимально возможная сила разгона или торможения меньше, чем когда оно отсутствует. Следовательно, наиболее быстрый разгон и торможение возможны лишь при отсутствии проскальзывания колес. Опытный водитель всегда чувствует состояние сцепления колес с дорогой и никогда не допускает проскальзывания колес.

# Глава 13

## КОЛЕБАНИЯ

---

- 57. Гармонические колебания
  - 58. Собственные колебания
  - 59. Затухающие колебания
  - 60. Вынужденные колебания. Резонанс
  - 61. Автоколебания и параметрические колебания
  - 62. Колебания связанных систем
- 

Колебания являются наиболее общей формой движения динамических систем вблизи положения равновесия. При достаточно малых отклонениях от положения равновесия колебания бывают обычно гармоническими. Этим определяется их особая важность.

### 57. Гармонические колебания

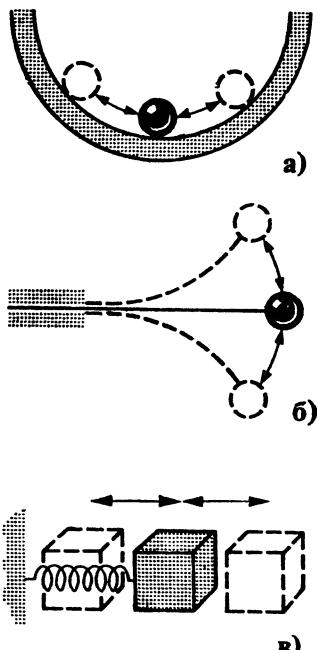
Роль гармонических колебаний в природе. Многие физические вопросы сводятся к исследованию поведения системы при небольших отклонениях от равновесного состояния, в котором она пребывает. Например, на дне шарообразной чаши покоится шарик (рис. 133, а). Спрашивается, каким будет его движение вдоль оси  $x$  после отклонения в некоторое положение от средней точки? Для ответа надо знать компоненту силы, действующей на шарик, когда он находится в точке с координатой  $x$ , т. е.  $f(x)$ , и решить уравнение движения  $m\ddot{x} = f(x)$ . Однако даже в этом простейшем случае зависимость силы  $f$  от расстояния довольно сложная и решение уравнения может составить значительные трудности. Но зачастую, даже если такое решение и удалось получить, оно оказывается настолько сложным, что очень трудно его проанализировать. В качестве другого примера возьмем шарик, укрепленный на длинной упругой пластине

(рис. 133, б). В положении равновесия пластина несколько изогнута и шарик покойится в некоторой точке. Спрашивается, как будет двигаться шарик в вертикальном направлении, если его отклонить от положения равновесия и отпустить? В этом случае сила, действующая на шарик, также выражается сложной функцией его отклонения от положения равновесия в вертикальном направлении и при решении задачи встречаются те же трудности, которые упомянуты в первом примере.

Однако в большинстве практических важных случаев нас интересует поведение системы не при всевозможных отклонениях от положения равновесия, а лишь при малых отклонениях. При этом условии вопрос значительно упрощается. Каким бы сложным ни был закон действия  $f(x)$ , эту функцию можно представить в виде ряда Тейлора:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \quad (57.1)$$

Это чисто математическое утверждение, и условия возможности такого разложения функции в ряд рассматриваются в математике. Нам достаточно заметить, что законы действия сил  $f(x)$ , встречающихся в физике, обычно удовлетворяют этим условиям. Очевидно,  $f(0) = 0$  ввиду того, что точка  $x = 0$  является точкой равновесия и, следовательно, сила в этой точке равна нулю. Далее возможны два случая: либо  $f'(0) \neq 0$ , либо  $f'(0) = 0$ . В первом случае член  $xf'(0)$  является главным членом разложения (57.1). Все последующие члены ряда пропорциональны  $x^2$ ,  $x^3$  и т. д. и при достаточно малом  $x$  сколь угодно малы в сравнении с первым членом. Поэтому при анализе достаточно малых отклонений  $x$  силу можно считать равной  $xf'(0)$ . Поскольку



133.

Колебание различных систем при малых отклонениях

точка  $x = 0$  — точка равновесия, сила  $xf'(0)$  должна быть направлена всегда к точке  $x = 0$ . Это означает, что  $f'(0) < 0$ . Если  $f'(0) = 0$ , то надо обратиться к третьему члену, пропорциональному  $x^2$ . Он должен быть равным нулю, если точка  $x = 0$  является равновесной точкой. Это следует из того обстоятельства, что этот член имеет один и тот же знак как при положительных, так и отрицательных значениях  $x$ . Поэтому сила, представляемая им, при отклонении точки в одну сторону от положения равновесия стремится ее возвратить обратно, но при отклонении в другую сторону, наоборот, стремится ее удалить от этого положения. Следовательно, если бы этот член не был равен нулю, точка  $x = 0$  не могла бы быть точкой равновесия. Поэтому этот член должен быть равным нулю, т. е.

$$f''(0) = 0.$$

Таким образом, следующим не равным нулю членом может быть  $x^3 f'''(0)/3!$ . При анализе малых отклонений в случае  $f'(0) = 0$  его необходимо использовать в качестве выражения для силы. Хотя он несколько сложнее члена  $xf'(0)$ , но все же достаточно прост в сравнении с исходной функцией  $f(x)$ . В этом случае колебания значительно усложняются, они становятся нелинейными. Основные особенности этих колебаний мы рассмотрим позднее.

Обычно в реальных физических системах отличным от нуля бывает член  $xf'(0)$ , а уравнение движения для малых отклонений  $x$  от положения равновесия имеет следующий вид:

$$m(d^2x/dt^2) = xf'(0) = -kx, \quad (57.2)$$

где учтено, что  $f'(0) < 0$ , и обозначено  $k = -f'(0) > 0$ .

Такого рода уравнение получается при рассмотрении многих физических явлений. В данном примере  $x$  является расстоянием от положения равновесия. Однако в качестве  $x$  мог бы быть, например, заряд конденсатора, включенного в цепь с индуктивностью. Если физические факторы таковы, что стремятся восстановить нулевое значение заряда на конденсаторе, то уравнение для малых отклонений заряда от нуля имеет вид (57.2).

Уравнение вида (57.2) называется уравнением гармонических колебаний, а система, осуществляющая эти малые колебания, называется линейным, или гармоническим, осциллятором. Хорошо известным примером такой системы может служить тело на упругой пружине (рис. 133, *a*). По закону Гука, при растяжении или сжатии пружины возникает противодействующая сила, пропорциональная растяжению или сжатию, т. е. выражение для силы со стороны пружины имеет вид  $f = -kx$ , и мы приходим к уравнению линейного осциллятора. Таким образом, тело, колеблющееся на пружине, является моделью линейного осциллятора.

Если в разложении для силы наряду с членом, пропорциональным первой степени отклонения, сохранить также и член, пропорциональный  $x^2$  или  $x^3$ , приводящий к нелинейности колебаний, то получающаяся при этом колебательная система называется **ангармоническим осциллятором**. Ее основные особенности будут рассмотрены в § 58.

Однако, как было показано, почти все физические системы при достаточно малых отклонениях ведут себя как линейные осцилляторы. Это связано с математической возможностью разложения силы в ряд по формуле (57.1). Спрашивается, в чем же тогда состоит физическое содержание закона Гука? Оно сотовит не в том, что сила пропорциональна отклонению, а в том, что этот закон силы спрavedлив в большой области отклонений. Иначе говоря, физическое содержание закона Гука состоит в утверждении, что в формальном математическом разложении (57.1) линейный член  $xf'(0)$  играет главную роль не только при очень малых величинах  $x$ , но и при достаточно больших.

Другим примером линейного осциллятора являются физический и математический маятники при достаточно малых углах отклонения, которые были рассмотрены в § 51. В качестве модели линейного осциллятора можно взять либо грузик на пружине (рис. 133, *в*), либо маятник.

Тот факт, что большинство физических систем при малых отклонениях ведут себя как линейные осцилляторы, обусловливает чрезвычайно большую важность изучения его движения для всех областей физики.

**Уравнение гармонических колебаний.** Уравнение (57.2) движения линейного осциллятора удобно представить в таком виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (57.3)$$

где  $\omega^2 = k/m > 0$ . Производные по времени обозначаются точками.

**Гармонические функции.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что решением уравнения (57.3) являются  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ . Это уравнение является линейным. Сумма решений линейного уравнения и произведение какого-либо решения на произвольную постоянную величину также составляет решение. Поэтому общее решение уравнения (57.3) имеет вид

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \quad (57.4)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные. Функция такого вида называется **гармонической**.

**Амплитуда, частота, фаза.** Выражение (57.4) целесообразно преобразовать к другому виду:

$$A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin \omega t + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos \omega t \right) = \\ = A (\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t) = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (57.5)$$

где положено  $\cos \varphi = A_1 / \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ,  $\sin \varphi = A_2 / \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ , и введено обозначение  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ . Таким образом, уравнение гармонических колебаний (57.4) может быть представлено в виде

$$x = A \sin (\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad x = B \cos (\omega t + \varphi_1). \quad (57.6)$$

График этой функции с обозначением входящих в (57.6) величин показан на рис. 134. Величина  $A$  называется амплитудой,  $\omega$  — частотой гармонического колебания, а величина, стоящая в аргументе синуса (или косинуса),  $\omega t + \varphi$  — фазой колебания. Значение фазы  $\varphi$  при  $t = 0$  называют начальной фазой или просто фазой. Как видно из (57.6), величина  $x$  повторяется через промежутки времени  $T = 2\pi/\omega$ . Такая функция называется периодической, а  $T$  — ее периодом. Поэтому гармонические колебания являются периодическими. Однако, конечно, не всякая периодическая функция является гармонической. Гармонической она будет лишь тогда, когда ее можно представить в виде (57.6) с определенными частотой, фазой и амплитудой.

**Представление гармонических колебаний в комплексной форме.** При изучении гармонических колебаний приходится их складывать, разлагать на составляющие, решать более сложные, чем (57.3), уравнения и т. д. Все это значительно упрощается, если воспользоваться теорией комплексных чисел и представлением гармонических колебаний в комплексной форме.

В декартовой системе координат действительная часть комплексного числа откладывается по оси абсцисс, а мнимая — по оси ординат (рис. 135). Далее используем формулу Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (i^2 = -1), \quad (57.7)$$

которая дает возможность выразить любое комплексное число  $z = x + iy$  в экспоненциальной форме (рис. 135):

$$z = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x. \quad (57.8)$$

Величина  $\rho$  называется модулем комплексного числа,  $\alpha$  — фазой.

Каждое комплексное число  $z$  может быть представлено на комплексной плоскости в виде вектора, проведенного из начала координат в точку с координатами  $(x, y)$ . Складываются комплексные числа по правилу параллелограмма. Поэтому для сокращения можно говорить о комплексных числах как о векторах, если речь идет об их сложении.

Умножение комплексных чисел лучше производить в комплексном виде:

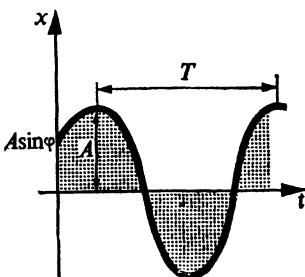
$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}, \\ z_1 &= \rho_1 e^{i\alpha_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}. \end{aligned} \quad (57.9)$$

Таким образом, при перемножении комплексных чисел модули перемножаются, а фазы складываются.

Здесь мы не будем более подробно останавливаться на изложении этих чисто математических вопросов. Для более полного ознакомления с ними можно обратиться к любому курсу по алгебре комплексных чисел.

Вместо действительной формы записи гармонических колебаний (57.6) можно воспользоваться комплексной формой:

$$\tilde{x} = A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (57.10)$$



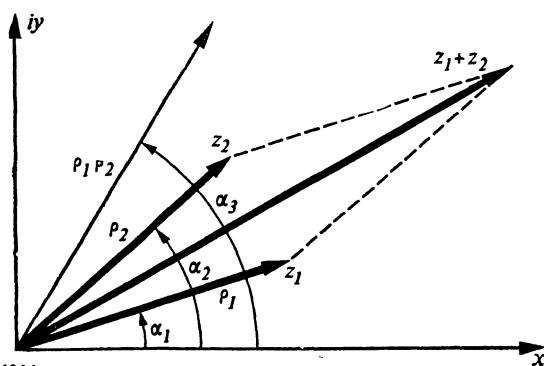
134.

График функции

гармонической

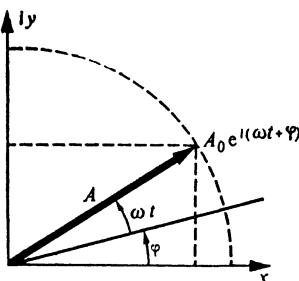
?

- 1 | Почему при равновесии системы в точке  $x=0$ , если  $f'(0)=0$ , то должно быть  $f''(0)=0$ ?
- 2 | Если в предыдущем случае  $f'(0)\neq 0$ , то может ли быть  $f''(0)\neq 0$ ?



135.

Графическое представление комплексных чисел и действий над ними



136.

Представление гармонических колебаний в комплексной форме

?

- 1 В чем состоит физическое содержание закона Гука?
- 2 При каких условиях анализ малых отклонений системы от положений равновесия не удается свести к учету линейного члена?
- 3 Чем определяются частота, амплитуда и фаза гармонических колебаний?

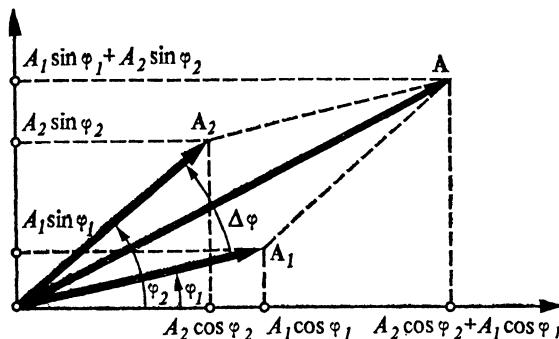
Величина  $\tilde{x}$  в (57.10) является комплексной и не может давать реального физического отклонения, которое характеризуется вещественной величиной  $x$  вида (57.6). Однако мнимая часть этой величины может рассматриваться как действительное гармоническое колебание (57.6), выражаемое синусом. С другой стороны, действительная часть (57.10), равная  $A \cos(\omega t + \phi)$ , также представляет собой вещественное гармоническое колебание. Поэтому гармоническое колебание можно записать в форме (57.10) и производить все необходимые расчеты и рассуждения. В окончательном результате для перехода к физическим величинам необходимо взять действительную или мнимую часть полученного выражения. Как это делается, будет видно на многих примерах в последующем.

График гармонического колебания в комплексной форме (57.10) изображен на рис. 136. Значение различных величин, входящих в формулу (57.10), видно непосредственно на рисунке:  $A$  — амплитуда,  $\phi$  — начальная фаза,  $\omega t + \phi$  — фаза колебания. Комплексный вектор  $A$  вращается вокруг начала координат против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  — период колебаний. Проекции вращающегося вектора  $A$  на горизонтальную и вертикальную оси являются действительными физическими колебаниями, которые нас интересуют.

**Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты.** Пусть даны два гармонических колебания с одинаковой частотой, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (57.11)$$

Требуется найти суммарное колебание  $x = x_1 + x_2$ . Гармонические колебания (57.11), будучи представленными в виде (57.10), составляют ее действительную часть. Поэтому искомый результат сло-



137.

Сложение гармонических колебаний, представленных в комплексной форме

жения колебаний (57.11) является действительной частью комплексного числа:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = \\ = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}). \quad (57.12)$$

Сложение двух величин в скобках легко производится в векторной форме (рис. 137). На рис. 137 непосредственно видно, что

$$A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A e^{i\varphi}, \quad (57.13)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (57.13a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (57.13b)$$

Следовательно, вместо (57.12) получим

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = A e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (57.14)$$

где  $A$  и  $\varphi$  определяются формулами (57.13а) и (57.13б). Отсюда следует, что сумма гармонических колебаний (57.11) дается формулой

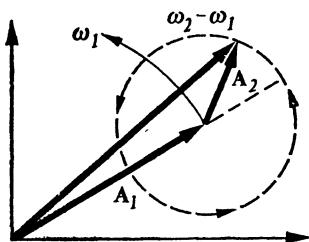
$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где величины  $A$  и  $\varphi$  имеют то же значение, что и в (57.14).

Свойства суммы гармонических колебаний можно выяснить непосредственно по рис. 137. Ясно, что вся картина, изображенная на рис. 137, благодаря наличию общего множителя  $e^{i\omega t}$  в (57.12) вращается вокруг начала координат по

!

*Реальное физическое колебание описывается либо действительной, либо мнимой частью колебания, представленного в комплексной форме. Удобство использования представления колебания в комплексной форме обусловливается легкостью и наглядностью операций над комплексными числами.*



138.

**Сложение гармонических колебаний с почти равными частотами ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ) в комплексном виде**

?

- 1 На чем основано представление гармонических колебаний в комплексной форме!
- 2 Как определить фазу и модуль комплексного числа!
- 3 Каково соотношение между сложением комплексных чисел и правилом сложения векторов?
- 4 Что происходит с фазами и модулями комплексных чисел при их перемножении?
- 5 Что такое биения? Являются ли биения гармоническими колебаниями?

часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$ . Амплитуда колебания достигает максимального значения при  $\varphi_2 = \varphi_1$  и равна  $A_1 + A_2$ . Минимальное значение амплитуды получается при  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi$ . В этом случае комплексные векторы, представляющие слагаемые колебания, направлены противоположно и поэтому минимальная амплитуда равна  $|A_2 - A_1|$ . Поведение фазы  $\varphi$  также наглядно прослеживается на векторной диаграмме рис. 137. Таким образом, суммой гармонических колебаний с одинаковой частотой является гармоническое колебание с той же частотой, амплитудой и фазой, определяемыми формулами (57.13а) и (57.13б).

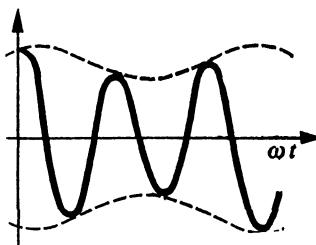
**Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения.** Обозначим частоты слагаемых колебаний через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и будем считать, что  $\omega_1 \approx \omega_2$ ,  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 \approx \omega_2$ . Уравнения колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (57.15)$$

Каждое из колебаний (57.15) представляем в комплексной форме (57.10), а сложение будем проводить по правилу сложения векторов, откладывая начало второго вектора от конца первого. Чтобы не усложнять написания формул, колебание  $x$  в комплексной форме (57.10) будет обозначаться той же буквой  $x$ , что и соответствующее ему вещественное колебание (57.6). Это не может вызвать недоразумений. Пусть для определенности  $A_1 > A_2$ . Тогда сумма векторов  $x_1$  и  $x_2$  в некоторый момент времени может быть представлена так, как изображено на рис. 138. С течением времени эта картина будет изменяться следующим образом: вектор  $x_1$  вращается вокруг начала координат с угловой частотой  $\omega_1$ , а вектор  $x_2$  — относительно положения вектора  $x_1$  вокруг его конца с частотой  $\omega_2 - \omega_1$ . Если

$\omega_2 > \omega_1$ , то его вращение вокруг конца вектора  $x_1$  будет происходить в том же направлении, что и вращение вектора  $x_1$  вокруг начала координат, как это изображено на рис. 138. При  $\omega_2 < \omega_1$  относительное вращение  $x_2$  изменяется на обратное.

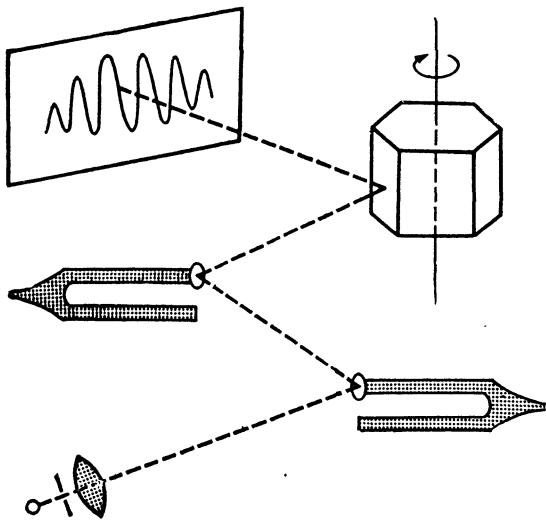
Изменение этой картины со временем состоит в следующем: поскольку  $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ , то вся картина быстро вращается вокруг начала координат, причем за один оборот взаимное расположение векторов  $x_1$  и  $x_2$  меняется совершенно незначительно. Поэтому в течение большого числа периодов это есть гармоническое колебание с частотой  $\omega$  и амплитудой, равной амплитуде  $x_1 + x_2$ . Однако, хотя и медленно, относительная ориентировка векторов  $x_1$  и  $x_2$  меняется. Поэтому амплитуда колебания медленно меняется с частотой  $|\omega_2 - \omega_1|$  от  $|A_1 + A_2|$  до  $|A_1 - A_2|$ . В итоге получаем, что суммой двух гармонических колебаний с близкими частотами является колебание с изменяющейся амплитудой. Оно лишь приблизительно



139.

Биения при сложении колебаний с близкими частотами

$$\text{Период биений } T = 2\pi / |\omega_2 - \omega_1|$$



140.

Биения звука от камертонов

Многогранная зеркальная призма, вращаясь, осуществляет развертку колеблющегося луча на неподвижный экран

гармоническое с частотой  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ , а его амплитуда изменяется по гармоническому закону с частотой  $|\omega_2 - \omega_1|$  от максимального значения  $A_1 + A_2$  до минимального  $A_1 - A_2$ . Вещественные составляющие этого колебания имеют вид, изображенный на рис. 139. Колебания амплитуды с частотой  $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$  называются биениями, а частота  $\Omega$  — частотой биений. Биения возникают при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами. Если амплитуды слагаемых колебаний примерно равны  $A_1 \approx A_2$ , то в минимуме амплитуды суммарного колебания почти равна нулю, т. е. это колебание почти полностью прекращается.

Если два камертонов заставить звучать с близкими частотами (рис. 140), то в результате сложения колебаний громкость звука, обусловленная амплитудой суммарного колебания, периодически меняется с частотой биений. Высота же звука, определяемая частотой суммарного колебания, не изменяется существенно, поскольку она близка к частотам складываемых колебаний, которые почти равны друг другу.

### 58. Собственные колебания

**Определение.** Собственными называются колебания системы под действием лишь внутренних сил без внешних воздействий. Рассмотренные в предыдущем параграфе гармонические колебания являются собственными колебаниями линейного осциллятора. В принципе собственные колебания могут быть и негармоническими. Но при достаточно малых отклонениях от положения равновесия в очень многих практически важных случаях они, как это было разобрано выше, сводятся к гармоническим.

**Начальные условия.** Гармоническое колебание полностью характеризуется частотой, амплитудой и начальной фазой. Частота зависит от физических свойств системы. Например, в случае линейного осциллятора в виде материальной точки, колеблющейся под действием упругих сил пружины, свойства упругости пружины учитываются коэффициентом упругости  $k$ , а свойства точки — ее массой  $m$ ;  $\omega = k/m$ .

Для определения амплитуды и начальной фазы колебаний надо знать положение и скорость материальной точки в некоторый момент времени. Если уравнение колебания выражается в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (58.1)$$

а координата и скорость в момент  $t = 0$  равны соответственно  $x_0$  и  $v_0$ , то на основании (58.1) можно написать:

$$x_0 = A \cos \varphi; \quad \dot{x}_0 = v_0 = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -A\omega \sin \varphi. \quad (58.2)$$

Из этих двух уравнений вычисляют неизвестные амплитуды и начальная фаза:

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -v_0/x_0\omega. \quad (58.3)$$

Таким образом, зная начальные условия, можно полностью найти гармоническое колебание.

**Энергия.** Представление о потенциальной энергии имеет смысл только тогда, когда силы потенциальны. В одномерных движениях между двумя точками существует только единственный путь. Следовательно, автоматически обеспечиваются условия потенциальности силы и всякую силу можно рассматривать как потенциальную, если она зависит только от координат. Последняя оговорка весьма существенна. Например, сила трения не является потенциальной силой также и в одномерном случае. Это обусловлено тем, что эта сила (ее направление) зависит от скорости (направления скорости).

В случае линейного осциллятора удобно считать, что потенциальная энергия точки равна нулю в положении равновесия (в начале координат). Тогда, учитывая, что  $F = -kx$ , и принимая во внимание формулу (27.20), связывающую потенциальную энергию  $U$  и силу, сразу находим для потенциальной энергии линейного осциллятора следующее выражение:

$$U(x) = kx^2/2 = m\omega^2x^2/2, \quad (58.4)$$

а закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2x^2}{2} = \text{const}. \quad (58.5)$$

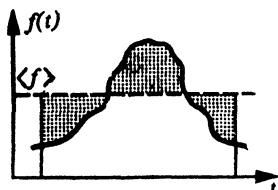
Конечно, этот закон можно получить непосредственно из уравнения движения (57.2), если его обе части умножить на  $\dot{x}$  и затем поступить так же, как при переходе от (27.1) к (27.5).

Из закона сохранения энергии (58.5) можно сделать два важных заключения.

1. Максимальная кинетическая энергия осциллятора равна его максимальной потенциальной энергии. Это очевидно, поскольку максимальную потенциальную энергию осциллятор имеет при смещении колеблющейся точки в крайнее положение, когда ее скорость (а следовательно, и кинетическая энергия) равна нулю. Максимальной кинетической энергией осциллятор обладает в момент прохода точки равновесного положения ( $x = 0$ ), когда потенциальная энергия равна нулю. Поэтому, обозначая максимальную скорость через  $V$ , можем написать

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2. \quad (58.6)$$

2. Средняя кинетическая энергия осциллятора равна его средней потенциальной энергии.

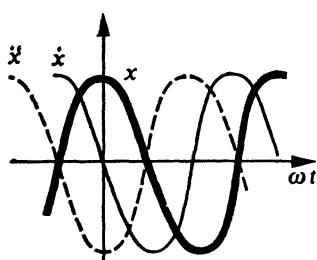


141.

Определение среднего по времени

?

- 1 Знаете ли Вы соотношение между кинетической и потенциальной энергиями в гармонических колебаниях?
- 2 Как между собой связаны амплитуды скорости и отклонения в гармоническом колебании?
- 3 Что происходит с частотой собственных колебаний при увеличении массы колеблющейся точки?



142.

Графики смещения, скорости и ускорения при гармоническом колебании

Прежде всего надо определить, что такое средняя величина. Если некоторая рассматриваемая величина  $f$  зависит от времени, т. е. является функцией времени, то среднее значение этой величины в промежутке времени между моментами  $t_1$  и  $t_2$  дается формулой

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (58.7)$$

Если  $f(t)$  представить на графике (рис. 141), то среднее значение  $\langle f \rangle_t$  соответствует высоте прямоугольника, площадь которого равна площади между кривой  $f(t)$  и осью  $t$  на интервале между  $t_1$  и  $t_2$ . Напомним, что площадь под осью  $t$  считается отрицательной.

Поскольку закон движения для линейного осциллятора описывается формулой  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $(58.8)$

его скорость равна

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad (58.9)$$

выражения для потенциальной и кинетической энергий имеют следующий вид:

$$W(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi),$$

$$U(t) = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (58.10)$$

В качестве промежутка времени, на котором определяется среднее, берется период одного колебания. Вычисление средних значений  $\langle W \rangle$  и  $\langle U \rangle$  сводится к нахождению средних значений от  $\cos^2(\omega t + \varphi)$  и  $\sin^2(\omega t + \varphi)$ . Оно элементарно:

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{T} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) \right]_0^T = \frac{1}{2}, \quad (58.11)$$

где  $T$  — период колебания,  $\omega T = 2\pi$ . Аналогично получим

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{2}. \quad (58.12)$$

Формулы (58.11) и (58.12) являются важными, и их следует хорошо помнить. С учетом (58.11), (58.12) из (58.10) следует

$$\boxed{\langle W \rangle_t = \langle U \rangle_t}, \quad (58.13)$$

т. е. средняя кинетическая энергия осциллятора равна средней потенциальной. У знака среднего в (58.13) подставлен индекс  $t$ , чтобы подчеркнуть, что речь идет о среднем по времени.

Когда говорится о среднем значении величины, всегда должно быть ясно, об усреднении по какой переменной идет речь, потому что при усреднении по некоторой другой переменной, вообще говоря, получается совсем другой результат. Однако в большинстве случаев ясно, по какой переменной производится усреднение, и никакого индекса у знака усреднения не ставится.

**Соотношение между смещением, скоростью и ускорением.** Отклонение и скорость даются формулами (58.8) и (58.9), а ускорение равно

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (58.14)$$

Изобразим их графики на одном и том же чертеже (рис. 142). По оси ординат откладываются величины различных размерностей. Поэтому выбором масштаба амплитуды соответствующих колебаний всегда можно сделать равными, как это и изображено на рис. 142. Отклонение, скорость и ускорение представляются совершенно одинаковыми кривыми, но сдвинутыми друг относительно друга в направлении оси  $\omega t$ . Непосредственно видно, что кривая скорости вмещена относительно кривой отклонения на величину  $\Delta(\omega t) = \pi/2$  влево, а кривая ускорения точно на такую величину сдвинута относительно кривой скорости. Поэтому говорят, что в гармоническом колебании скорость опережает по фазе на  $\pi/2$  смещение, а ускорение опережает по фазе на  $\pi/2$  скорость. Таким образом, ускорение опережает смещение по фазе на  $\pi$ . Конечно, можно сказать, например, что смещение отстает от скорости по фазе на  $\pi/2$  и т. д.

**Нелинейные колебания.** Если в разложении (57.1) для силы наряду с линейным членом  $x f'(0)$  существует также и следующий член, например  $x^2 f''(0)/2!$ , то вместо (57.2) необходимо рассмотреть следующее уравнение движения:

$$m d^2x/dt^2 = x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0). \quad (58.15)$$

При обсуждении разложения силы в ряд (57.1) было отмечено, что если система колеблется около устойчивого равновесия  $x = 0$ , то

при  $f'(0) = 0$  обязательно должно быть, чтобы и  $f''(0) = 0$ . В противном случае точка  $x = 0$  не может быть точкой устойчивого равновесия. Очевидно, если  $f'(0) \neq 0$ , то должно быть  $f'(0) < 0$  и, кроме того, производная  $f''(0)$  не обязана быть равной нулю и может иметь любой знак. Именно этот случай и рассматривается в (58.15). Кроме того, предполагается, что величина  $f''(0)$  очень малая и поэтому последний член справа в (58.15) является малым в сравнении с другими членами. Разделим уравнение (58.15) на  $t$  и перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 x^2, \quad (58.16)$$

где аналогично (57.3) приняты обозначения:

$$\omega_0^2 = -\frac{f'(0)}{m}, \quad \varepsilon = \frac{f''(0)}{2m\omega_0^2} = -\frac{f''(0)}{2f'(0)}. \quad (58.16a)$$

Величина  $\varepsilon$  является параметром малости члена, пропорционального квадрату смещения. Как это непосредственно видно в (58.16), она имеет размерность, обратную длине, и поэтому может быть представлена в виде  $\varepsilon = 1/L$ , где  $L$  — большая длина. Теперь можно более ясно определить смысл малости величины  $\varepsilon$ : если смещения  $x$  достаточно малы и удовлетворяют соотношению  $x \ll L = 1/\varepsilon$ , то член в правой части (58.16) можно рассматривать как малый. В данном случае этот член называется **возмущением**, а метод, с помощью которого находится приближенное решение уравнения, — **методом, или теорией возмущений**. Рассмотрим на примере уравнения (58.16) сущность этой теории и основные особенности нелинейных колебаний.

При  $\varepsilon = 0$ , т. е. когда возмущение отсутствует, система совершает гармонические колебания. Пусть в этом случае гармоническое колебание имеет вид

$$x_0(t) = A_0 \sin \omega_0 t. \quad (58.17)$$

Это колебание называется **невозмущенным движением**. Для рассматриваемой правой части (58.16) в качестве возмущения необходимо, чтобы амплитуда  $A_0$  не была слишком большой. Она должна удовлетворять условию  $\varepsilon A_0 \ll 1$ . В противном случае нельзя применять теорию возмущений. Решение при наличии возмущения, т. е. при  $\varepsilon \neq 0$ , можно представить в виде

$$x = A_0 \sin \omega_0 t + x_1(t), \quad (58.18)$$

где  $x_1(t)$  есть поправка к невозмущенному движению. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $x_1(t)$  также должна стремиться к нулю. Поэтому  $x_1(t)$  является малой величиной в сравнении с отклонениями при невозмущенном движении, т. е. имеет место соотношение  $|x_1| \ll A_0$ . Под-

ставляя выражение (58.18) для  $x$  в уравнение (58.16), получаем следующее уравнение для  $x_1(t)$ :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon \omega_0^2 (A_0^2 \sin^2 \omega_0 t + 2A_0 x_1 \sin \omega_0 t + x_1^2). \quad (58.19)$$

Второе и третье слагаемые в скобках в правой части много меньше первого слагаемого в силу неравенства  $|x_1| \ll A_0$ . Поэтому ими можно пренебречь в сравнении с первым слагаемым и записать уравнение (58.19) в виде

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} A_0^2 (1 - \cos 2\omega_0 t), \quad (58.20)$$

где использована формула  $\sin^2 \omega_0 t = (1/2)(1 - \cos 2\omega_0 t)$ . Решение этого уравнения будем искать в форме

$$x_1 = a_1 + b_1 \cos 2\omega_0 t, \quad (58.21)$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — постоянные. Подставляя (58.21) в (58.20), находим

$$\omega_0^2 a_1 + b_1 (-4\omega_0^2 + \omega_0^2) \cos 2\omega_0 t = \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} A_0^2 - \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} A_0^2 \cos 2\omega_0 t. \quad (58.22)$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, коэффициенты при  $\cos 2\omega_0 t$  в правой и левой частях его должны быть равны друг другу. Из этого условия получаем:

$$b_1 (-4\omega_0^2 + \omega_0^2) = -\frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} A_0^2, \quad (58.23)$$

$$b_1 = \varepsilon A_0^2 / 6. \quad (58.24)$$

При этом значении  $b_1$  члены, зависящие от времени, в (58.22) сокращаются. Оставшиеся члены дадут уравнение, из которого найдем, что

$$a_1 = \varepsilon A_0^2 / 2. \quad (58.25)$$

Следовательно, решение (58.18) с учетом первой поправки может быть записано в виде

$$x = A_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon A_0^2 + \frac{1}{6} \varepsilon A_0^2 \cos 2\omega_0 t. \quad (58.26)$$

Наиболее существенной особенностью этого решения является присутствие члена с  $\cos 2\omega_0 t$ . Он показывает, что благодаря наличию в силе нелинейного члена, пропорционального  $x^2$ , в колебаниях появился член с удвоенной частотой  $2\omega_0$ , называемый второй гармоникой. При отсутствии нелинейного члена в колебаниях имеется лишь член с основной частотой  $\omega_0$ . Если продолжить решение уравнения (58.16) и найти следующие более малые поправки, то можно убедиться, что они содержат более высокие частоты  $n\omega_0$ , кратные основной, иначе говоря, содержат высшие гармоники. Поэтому можно сказать,

что наиболее характерным следствием наличия нелинейности в силе является возникновение высших гармоник в колебаниях.

Далее из (58.26) видно, что оба составляющих колебания с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$  происходят не около точки  $x = 0$ , а около точки  $x = -(1/2)\varepsilon A_0^2$ , т. е. наличие нелинейного члена, пропорционального  $x^2$ , сдвигает точку равновесия, около которой происходят колебания. Этот результат вполне понятен, если учесть, что сила, пропорциональная  $x^2$ , направлена все время в одну и ту же сторону и, следовательно, неизбежно должна сдвинуть точку, около которой совершаются колебания.

Тем же путем можно рассмотреть случай, когда в разложении (57.1) для силы отсутствует член с  $x^2$  [т. е. когда  $f''(0) = 0$ ] и необходимо учесть член, пропорциональный  $x^3$ . В этом случае вместо (58.15) имеем следующее уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = xf'(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0), \quad (58.27)$$

которое может быть представлено в аналогичном (58.16) виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \eta \omega_0^2 x^3, \quad (58.28)$$

где

$$\omega_0^2 = -\frac{f'(0)}{m}, \quad \eta = \frac{f'''(0)}{6m\omega_0^2} = -\frac{f'''(0)}{6f'(0)}. \quad (58.28a)$$

Параметром малости является величина  $\eta$ . При  $\eta \rightarrow 0$  решение (58.28) должно стремиться к гармоническому колебанию с частотой  $\omega_0$ . Решение этого уравнения методом теории возмущений производится абсолютно так же, как это было сделано выше. Наряду с основной частотой  $\omega_0$  в первом приближении появится высшая гармоника, но не с удвоенной частотой, а с утроенной. Это является следствием тригонометрической формулы

$$\sin^3 \omega_0 t = \frac{1}{4} (3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t). \quad (58.29)$$

Сила, пропорциональная  $x^3$ , при равных по модулю положительных и отрицательных значениях  $x$  имеет одну и ту же абсолютную величину, но противоположное направление. Это означает, что эта сила является либо силой притяжения к точке  $x = 0$ , либо силой отталкивания от нее, действующей совершенно симметрично относительно этой точки. Поэтому никакого сдвига точки, около которой совершаются колебания, не происходит, как это было в предыдущем случае. Колебания с частотами  $\omega_0$  и  $3\omega_0$  совершаются около точки  $x = 0$ .

Эти примеры показывают, что наиболее важной особенностью нелинейных колебаний является возникновение высших гармоник. Какие именно гармоники порождаются, зависит от характера нелинейности силы.

## 59. Затухающие колебания

**Трение.** Собственные колебания линейного осциллятора происходят в отсутствие внешних сил. Энергия его колебаний сохраняется, а следовательно, и амплитуда колебаний не изменяется. Собственные колебания являются незатухающими.

При наличии трения, являющегося внешней силой, энергия колебаний линейного осциллятора уменьшается, а следовательно уменьшается и амплитуда колебаний. Колебания при наличии трения становятся затухающими. Нетрудно видеть, что и частота колебаний должна изменяться. Сила трения действует против скорости. Следовательно, для линейного осциллятора ее действие эквивалентно уменьшению возвращающей силы, т. е. упругости пружины (уменьшение величины  $k$ ). Поскольку  $\omega = k/m$ , это означает, что частота колебаний должна уменьшаться, а период увеличиваться.

При увеличении трения период колебания может увеличиться до сколь угодно большого значения. При достаточно большом трении вообще никакого колебания происходит не будет, потому что вся энергия осциллятора расходуется на преодоление сил трения на очень коротком пути, составляющем лишь часть колебания.

**Уравнение движения.** Рассмотрим силу жидкого трения. В правую часть уравнения движения надо добавить силу жидкого трения, и оно приобретает следующий вид:

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad (59.1)$$

где  $b$  — коэффициент трения, о смысле которого говорилось в § 53. Это уравнение удобно переписать таким образом:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (59.2)$$

где  $\gamma = b/2m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$ .

**Частота и декремент затухания.** Решение уравнения (59.2) удобно искать в виде

$$x = A_0 e^{i\beta t}. \quad (59.3)$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}(e^{i\beta t}) = -i\beta e^{i\beta t}, \quad \frac{d^2}{dt^2}(e^{i\beta t}) = -\beta^2 e^{i\beta t}, \quad (59.4)$$

и подставляя (59.3) в (59.2), находим

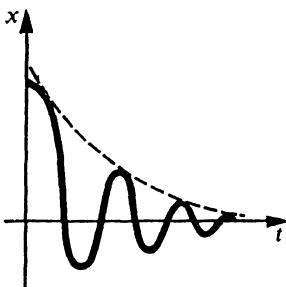
$$A_0 e^{i\beta t} (-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = 0. \quad (59.5)$$

Сомножитель  $A_0 \exp(i\beta t)$  не равен нулю. Следовательно, равным нулю должен быть другой сомножитель:

$$-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2 = 0. \quad (59.6)$$

Это квадратное уравнение относительно  $\beta$ . Его решения выражаются известной формулой

$$\beta = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\gamma \pm \Omega; \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (59.7)$$



143.

График затухающих колебаний

Подставляя эти значения для  $\beta$  в (59.3), находим искомое решение:

$$x = A e^{-\gamma t} e^{\pm i\Omega t}. \quad (59.8)$$

Наличие знаков « $\pm$ » в решении отражает тот факт, что уравнение (59.2) является уравнением второго порядка и, следовательно, должно иметь два независимых решения, которые получаются при различных знаках.

При не очень больших коэффициентах трения

$$\gamma = (b/2m) < \omega_0. \quad (59.9)$$

В этом случае  $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$  и, следовательно,  $\Omega$  является вещественной величиной. Поэтому  $\exp(i\Omega t)$  есть гармоническая функция. В вещественном виде колебание, описываемое равенством (59.8), представляется формулой

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos \Omega t, \quad (59.10)$$

?

- 1 | Какой смысл имеет понятие периода затухающих колебаний, хотя они непериодические!
- 2 | Из каких соображений можно заключить, что частота затухающих колебаний должна быть больше частоты соответствующих собственных колебаний без затухания!
- 3 | Что такое логарифмический декремент затухания?

причем взята действительная часть комплексного колебания (59.8). Это есть колебание, амплитуда которого уменьшается, а частота  $\Omega$  постоянна. График этого колебания изображен на рис. 143.

Это колебание не является периодическим и тем более оно не является гармоническим. Период гармонических (периодических) колебаний определяется как время, через которое колебание повторяется. В случае (59.10) колебания не повторяются, поэтому понятие периода теряет смысл. Тем не менее удобно говорить о периоде этих колебаний, понимая под периодом промежутки времени, через которые смещение обращается в нуль. В этом же смысле можно использовать представление о частоте колебаний  $\Omega = 2\pi/T$ . За амплитуду колебаний принимается величина  $A = A_0 e^{-\gamma t}$ , даваемая формулой (59.10) и имеющая смысл максимальных отклонений при последовательных колебаниях.

Из формулы (59.10) видно, что амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,7$  раза в течение времени

$$\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma.$$

(59.11)

В § 55 говорилось об экспоненциально быстром уменьшении физических величин. На основании сказанного там естественно назвать время  $\tau_{\text{зат}}$  временем затухания. Величина  $\gamma$  называется декрементом затухания.

**Логарифмический декремент затухания.** Сам по себе декремент затухания  $\gamma$  не очень много говорит об интенсивности затухания колебаний. Например, в течение времени  $\Delta t$  амплитуда уменьшается в  $e^{\gamma \Delta t}$  раз. Но в зависимости от периода колебаний за это время происходит различное число колебаний. Если колебаний произошло много, то за каждое колебание имело место небольшое изменение амплитуды. Если же колебаний произошло немного, то за каждое колебание амплитуда изменялась значительно. Ясно, что в первом случае в определенном смысле колебания затухают медленнее, чем во втором.

Поэтому величину затухания необходимо отнести к естественному масштабу времени колебания, т. е. к периоду колебаний. Интенсивность затухания характеризуется затуханием их амплитуды за один период колебания и поэтому вместо декремента затухания  $\gamma$  удобно пользоваться так называемым логарифмическим декрементом затухания.

Найдем амплитуды колебаний в два последовательных промежутка времени, разделенных периодом колебания  $T$ :

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma t_1}, \quad A_2 = A_0 e^{-\gamma(t_1 + T)} \quad (59.12)$$

Отсюда следует

$$A_1/A_2 = e^{\gamma T}. \quad (59.13)$$

Поэтому изменение амплитуды колебаний за период характеризуется величиной  $\theta = \gamma T$ , называемой логарифмическим декрементом затухания. Из (59.13) находим

$$\theta = \ln(A_1/A_2).$$

(59.14)

Логарифмический декремент затухания есть логарифм отношения амплитуд колебаний через один период.

**Логарифмическому декременту затухания можно дать и другую интерпретацию.** Рассмотрим уменьшение амплитуды колебаний в течение  $N$  периодов, т. е. за время  $NT$ . Вместо формул (59.12) можно написать

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma t_1}, \quad A_{N+1} = A_0 e^{-\gamma(t_1 + NT)}.$$

(59.15)

Поэтому отношение амплитуд, разделенных интервалом времени в  $N$  периодов, равно

$$A_{N+1}/A_1 = e^{\gamma NT} = e^{N\theta}. \quad (59.16)$$

При  $N\theta = 1$  амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Поэтому можно сказать, что логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = 1/N \quad (59.17)$$

называется величина, обратная числу периодов, в течение которых амплитуда затухает в  $e$  раз. Такая интерпретация дает очень наглядное представление об интенсивности затухания: амплитуда затухает в  $e$  раз в течение числа колебаний, равного обратной величине логарифмического декремента затуханий. Если, например,  $\theta = 0,01$ , то колебания затухают лишь примерно после 100 колебаний. В течение 10 колебаний амплитуда изменяется очень мало, примерно на  $1/10$  своего первоначального значения. Благодаря этому при рассмотрении процессов, происходящих лишь в течение небольшого числа периодов, в первом приближении можно считать колебания незатухающими.

По-другому обстоит дело при большем логарифмическом декременте затухания. Если  $\theta = 0,1$ , то уже после 10 колебаний они полностью затухнут. За несколько колебаний затухание уже значительно. Поэтому при рассмотрении процессов, происходящих даже в течение нескольких периодов, нельзя в качестве приближения считать колебания незатухающими.

Случай большого трения ( $\gamma \gg \omega_0$ ). При увеличении трения период колебания увеличивается. При большом трении движение вообще перестает быть колебательным. Это наступает при условии

$$\gamma = \omega_0, \quad b = 2\sqrt{km}. \quad (59.18)$$

При дальнейшем увеличении трения  $\gamma > \omega_0$ . Полагая  $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i\delta$ , где  $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  является вещественной величиной, можно формулу (59.3) представить в виде

$$x = A_0 e^{-(\gamma \pm \delta)t}, \quad (59.19)$$

причем очевидно, что  $\gamma \pm \delta = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$ . Эта простая экспоненциальная функция никакого колебания не содержит. Ее график приведен на рис. 144.

Все эти явления очень хорошо демонстрируются на колебаниях маятника, помещенного в жидкости с различной вязкостью. Если вязкость очень велика (например, в глицерине), то маятник из

отклоненного положения медленно опускается к среднему положению. Это движение ни в каком смысле не напоминает колебание.

**Расчет затухания исходя из потерь энергии на трение.** Как уже было отмечено, энергия колебаний осциллятора расходуется на преодоление сил трения и вследствие этого уменьшается. Поэтому закон уменьшения амплитуды можно найти, исходя непосредственно из работы сил трения. Работа сил трения за один период колебаний равна

$$\Delta W = -b \int \dot{x} dx = -b \int_0^T \dot{x}^2 dt = \\ = -b \int_0^T V^2 \sin^2 \omega t dt = -\frac{bV^2}{2} T, \quad (59.20)$$

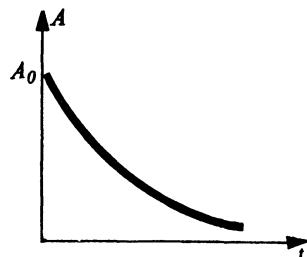
где учтено, что рассматривается случай малого затухания, так что в течение одного периода можно пренебречь в первом приближении изменением амплитуды  $V$  колебаний скорости. С другой стороны, потеря энергии на совершение работы против сил трения за один период есть разность кинетических энергий частицы через один период, равная

$$\Delta W = \frac{m}{2} (V_1^2 - V_2^2) \approx \\ \approx \frac{m}{2} (V_1 - V_2)(V_1 + V_2) \approx \frac{m}{2} 2V \Delta V, \quad (59.21)$$

где принята во внимание малость уменьшения амплитуды за один период колебаний. Приравнивая правые части соотношений (58.21) и (58.20), получаем

$$-\frac{bV}{2} T = mV \Delta V \text{ или } \frac{\Delta V}{T} = -\frac{b}{2m} V. \quad (59.22)$$

Период  $T$  при слабом затухании является малым промежутком времени в сравнении с тем, когда затухание заметно. В течение времени  $T$  изменение амплитуды скорости колебаний  $\Delta V$  мало. Поэтому в (59.22) можно считать, что  $(\Delta V/T) \approx dV/dt$ , и тогда



144.

Случай очень большого трения

Практически никаких колебаний нет

!

Обратная величина логарифмического декремента затухания равна числу периодов, в течение которых амплитуда затухает в  $e$  раз. Чем больше логарифмический декремент, тем сильнее затухание колебаний.

?

1 | Какие важные особенности затухания колебаний характеризуются декрементом затухания?

2 | При каком условии затухающее колебание вырождается в экспоненциальное уменьшение отклонения от положения равновесия без какого-либо колебательного движения?

получаем уравнение для изменения амплитуды скорости колебаний со временем:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma V. \quad (59.23)$$

где учтено, что  $(b/2m) = \gamma$  есть декремент затухания. Хорошо известно, что решение уравнения (59.23) имеет вид

$$V = V_0 e^{-\gamma t}. \quad (59.24)$$

Это затухание амплитуды скорости полностью соответствует затуханию амплитуды смещения, которое дается формулой (59.10), выведенной при строгом решении уравнений движения. Поэтому проведенный расчет показывает, что энергия осциллятора действительно расходуется на преодоление сил трения.

## 60. Вынужденные колебания. Резонанс

**Внешняя сила.** Наряду с трением на линейный осциллятор может действовать какая-либо другая внешняя сила. Характер движения линейного осциллятора при этом изменится в зависимости от особенностей действующей силы.

Наиболее важным является случай гармонической внешней силы. В дальнейшем будет показано, что более сложные случаи изменения внешней силы со временем сводятся к этому простейшему. Поэтому будем считать, что внешняя сила действует на линейный осциллятор по следующему закону:

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (60.1)$$

где  $F_0$  — амплитуда силы,  $\omega$  — ее частота.

**Уравнение движения.** Вместо (59.2) движение описывается следующим уравнением:

$$m\ddot{x} = -kx - bx + F_0 \cos \omega t. \quad (60.2)$$

Разделив обе части на  $m$ , получим уравнение в виде, аналогичном (59.2):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t, \quad (60.3)$$

где величины  $\gamma$  и  $\omega_0$  имеют те же значения, что и в (59.2).

**Переходный режим.** Если считать, что внешняя периодическая сила начала действовать на линейный осциллятор в некоторый момент времени, то его движение в течение определенного промежутка времени зависит от движения в момент начала действия силы. Однако с течением времени влияние начальных условий ослабевает и движение осциллятора переходит в режим установившихся гармонических колебаний. Каковы бы ни были условия в момент начала действия внешней силы, после некоторого промежутка времени осциллятор будет совершать одни и те же установившиеся гармо-

нические колебания. Процесс установления колебаний называется переходным режимом.

При рассмотрении переходного режима самым важным является вопрос о его продолжительности. Она определяется временем затухания колебаний, которые имелись в момент начала действия внешней силы. Это время нам известно — оно равно  $\tau = 1/\gamma$ . Это есть тот промежуток времени, после которого можно забыть о первоначально существовавших колебаниях и рассматривать только установленные под действием внешней силы колебания. С другой стороны, если начальных колебаний не было, то вынужденные колебания не мгновенно достигнут своей стационарной величины. Можно показать, что время установления стационарного режима вынужденных колебаний после начала действия силы также равно  $\tau = 1/\gamma$ .

**Установившиеся вынужденные колебания.** В этом случае надо считать, что сила  $F_0 \cos \omega t$  начала действовать очень давно, т. е. в бесконечно далекий прошедший момент времени. Таким образом, принимаем, что уравнение (60.3) справедливо для всех моментов времени. Для его решения опять удобно воспользоваться комплексной формой гармонических колебаний, записав в этой форме силу, стоящую в правой части. Уравнение (60.3) принимает следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\dot{y}x + \omega_0^2 x = (F_0/m) e^{i\omega t}, \quad (60.4)$$

а его решение дается действительной частью решения уравнения (60.4). Это решение ищем в виде

$$x = A e^{i\beta t}. \quad (60.5)$$

Здесь  $A$  не является, вообще говоря, действительной величиной. Подставляя это выражение в (60.4), получим

$$A e^{i\beta t} (-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = (F_0/m) e^{i\omega t}. \quad (60.6)$$

Это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, т. е. время  $t$  должно исключаться из него. Из этого условия следует, что  $\beta = \omega_0$ . Найдя из (60.6) величину  $A$  и умножив ее числитель и знаменатель на  $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega$ , можем написать

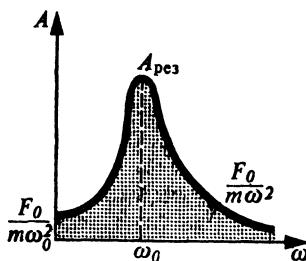
$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (60.7)$$

Комплексное число (60.7) удобнее представить в экспоненциальной форме [см. (57.8)]:

$$A = A_0 e^{i\varphi}, \quad (60.8)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (60.8a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (60.8b)$$



145.

**Амплитудная резонансная кривая**

При небольшом затухании резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$  близка к собственной  $\omega_0$ .

!

*Резонанс наступает тогда, когда в системе возникают условия для наиболее эффективной передачи энергии от источника внешней силы и колеблющейся системе.*

?

- 1 Что такое переходный режим и чем определяется его продолжительность?
- 2 Чему равна частота вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии?
- 3 Какие особенности амплитудной резонансной кривой Вы можете указать?
- 4 Какое свойство резонансной кривой характеризует добротность?

Следовательно, решение (60.5) в комплексной форме имеет вид

$$x = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (60.9)$$

а его действительная часть, являющаяся решением уравнения (60.3), равна

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (60.10)$$

где  $A_0$  и  $\varphi$  даются формулами (60.8а) и (60.8б), а  $\omega$  — частота внешней силы.

Таким образом, под влиянием внешней гармонической силы осциллятор совершает вынужденные гармонические колебания с частотой этой силы. Фаза и амплитуда этих колебаний определяются как свойствами силы, так и характеристиками осциллятора. Рассмотрим изменение фазы и амплитуды вынужденных колебаний.

**Амплитудная резонансная кривая.** Кривая, описывающая зависимость амплитуды вынужденных установившихся колебаний от частоты внешней силы, называется амплитудной резонансной кривой. Ее аналитическое выражение дается формулой (60.8а), а графическое изображение приведено на рис. 145.

Максимального значения амплитуда достигает при частоте внешней силы, близкой к частоте собственных колебаний осциллятора ( $\omega \approx \omega_0$ ). Колебания с максимальной амплитудой называются резонансными, а само явление «раскачки» колебаний до максимальной амплитуды при  $\omega \approx \omega_0$  называется резонансом. Частота  $\omega_0$  в этом случае называется резонансной. При отклонении частоты внешней силы от резонансной амплитуда резко уменьшается.

Рассмотрим физическую картину явления в различных областях частот. Наибольший интерес представляют колебания при малом трении. Поэтому будем предполагать, что  $\gamma \ll \omega_0$ .

**Случай 1:**  $\omega \ll \omega_0$ . Из формулы (60.8а) получаем для амплитуды следующее выражение:

$$A_0 \text{stat} \approx F_0/m\omega_0^2. \quad (60.11)$$

Физический смысл этого результата состоит в следующем. При очень малой частоте внешней силы она действует на систему как постоянная статическая сила. Поэтому максимальное смещение (амплитуда) равно смещению (60.11) под действием статической силы  $F_0$ , т. е.  $x_{\max} = (F_0/k) = (F_0/m\omega_0^2)$ , где  $k = m\omega_0^2$  — коэффициент упругости возвращающей силы. Из условия  $\omega \ll \omega_0$  следует, что в уравнении движения (60.3) член  $\ddot{x}$ , обусловленный ускорением, и член  $2\gamma\dot{x}$ , означающий скорость, много меньше члена  $\omega_0^2x$ , связанного с упругой силой, поскольку  $\dot{x} \approx \omega x$ ,  $\ddot{x} \approx -\omega^2x$ . Поэтому уравнение движения сводится к следующему:

$$\omega_0^2x = (F_0/m) \cos \omega t, \quad (60.12)$$

решение которого имеет вид

$$x = (F_0/m\omega_0^2) \cos \omega t. \quad (60.12a)$$

Это означает, что в каждый момент смещение является таким, каким оно должно быть, если бы сила не изменялась со временем и равнялась ее мгновенному значению. Силы трения роли не играют.

**Случай 2:**  $\omega \gg \omega_0$ . Из формулы (60.8а) получаем для амплитуды следующее выражение:

$$A \approx F_0/m\omega^2. \quad (60.13)$$

Физический смысл этого результата состоит в следующем. При очень большой частоте внешней силы член, обусловленный ускорением  $\ddot{x}$ , много больше каждого из членов, связанного со скоростью и упругой силой, потому что  $|\ddot{x}| \approx |\omega^2x| \gg |\omega_0^2x|$ ;  $|\dot{x}| \approx |\omega x| \gg |\dot{2\gamma x}| \approx |2\gamma\omega x|$ . Поэтому уравнение движения (60.3) принимает вид

$$\ddot{x} \approx (F_0/m) \cos \omega t, \quad (60.14)$$

а решение его представляется формулой

$$x \approx -(F_0/m\omega^2) \cos \omega t. \quad (60.14a)$$

Таким образом, силы упругости и силы трения в сравнении с внешней силой не играют никакой роли в колебаниях. Внешняя сила действует на осциллятор так, как если бы никаких сил упругости и сил трения не было.

**Случай 3:**  $\omega \approx \omega_0$ . Это есть случай резонанса. При резонансе амплитуда имеет максимальное значение, для которого из формулы (60.8а) при условии  $\gamma \ll \omega_0$  получаем

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0}. \quad (60.15)$$

Физический смысл этого результата заключается в следующем. Член, связанный с ускорением, равен члену, обусловленному упругой силой, т. е.  $\ddot{x} = -\omega^2x = -\omega_0^2x$ . Это означает, что ускорение

создается силой упругости, а внешняя сила и сила трения взаимно компенсируются. Уравнение (60.3) имеет вид

$$2\gamma \dot{x} = (F_0/m) \cos \omega_0 t, \quad (60.16)$$

и его решение записывается следующим образом:

$$x = (F_0/2\gamma m\omega_0) \sin \omega_0 t. \quad (60.16a)$$

Строго говоря, максимум амплитуды достигается не точно при  $\omega = \omega_0$ , а вблизи этого значения. Точное значение может быть найдено по общему правилу путем приравнивания производной от  $A_0$  в (60.8а) по  $\omega$  нулю. Однако при не очень большом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , смещение максимума от  $\omega = \omega_0$  весьма незначительно и не имеет смысла принимать его во внимание.

**Добротность.** Важной характеристикой свойств осциллятора является рост амплитуды его колебаний в резонансе в сравнении со статическим ее значением, т. е. со смещением под действием постоянной силы. Из формул (60.11) и (60.15) следует:

$$Q = \frac{A_0 \text{рез}}{A_0 \text{стат}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\theta}, \quad (60.17)$$

где  $\theta$  — логарифмический декремент затухания. Величина  $Q$  называется добротностью системы. Добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы.

Из формулы (60.17) видно, что чем меньше затухание осциллятора, тем более энергично он раскачивается в резонансе, поскольку  $A_0 \text{рез} = A_0 \text{стат} Q = A_0 \text{стат} (\pi/\theta)$ , как видно из (60.17).

Важной характеристикой резонансных свойств является не только увеличение амплитуды в резонансе, но и интенсивность этого увеличения. Другими словами, важно не только значение резонансной амплитуды, но и насколько энергично уменьшается эта амплитуда при отклонении от резонансной частоты. Это свойство характеризуется понятием полуширины резонансной кривой. Однако эта величина определяется не относительно амплитуды колебаний, а относительно квадрата амплитуды. Это связано с тем, что такая важнейшая характеристика линейного осциллятора, как энергия, дается не амплитудой смещения, а ее квадратом. Вид резонансной кривой квадрата амплитуды аналогичен рис. 145. Эта кривая изображена на рис. 146 вместе с указанием полуширины резонансной кривой: полушириной резонансной кривой называется расстояние в частотах  $\Delta\omega$  от частоты резонанса ( $\omega = \omega_0$ ) до той частоты, где квадрат амплитуды убывает в 2 раза. Нетрудно вычислить эту полуширину.

Вблизи резонанса  $\omega = \omega_0$  можно считать

$$\begin{aligned} A_0^2 &= \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \\ &= \left(\frac{F_0}{m}\right) \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \approx \\ &\approx \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{4\omega_0^2 (\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}, \end{aligned} \quad (60.18)$$

где учтены частоты, близкие к резонансной, когда  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega \approx \omega_0$ . Поскольку в резонансе  $A_0^2_{\text{рез}} = (F_0/m)^2/4\gamma^2\omega_0^2$ , условие уменьшения амплитуды в два раза в сравнении с резонансным принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\gamma^2\omega_0^2} = \frac{1}{4\omega_0^2 (\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (60.19)$$

и, следовательно, для полуширины резонансной кривой находим

$$\Delta\omega = \gamma, \quad (60.20)$$

т. е. полуширина равна декременту затухания: чем меньше затухание, тем меньше ширина и острее резонансная кривая.

Более удобно формулу (60.20) выразить через логарифмический декремент затухания и добротность. Разделим обе части (60.20) на  $\omega_0$  и учтем (60.17):

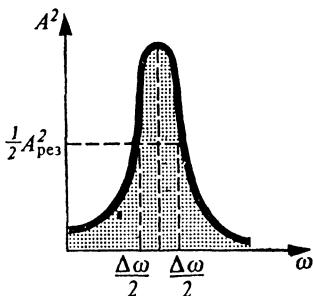
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\gamma T}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{1}{Q}, \quad (60.21)$$

или

$$2\Delta\omega = \omega_0/Q. \quad (60.22)$$

Таким образом, ширина  $2\Delta\omega$  резонансной кривой равна частоте резонанса, деленной на добротность.

При увеличении добротности возрастает резонансная амплитуда и уменьшается ширина резонансного максимума. Однако, как это следует из (60.17) и сказанного выше о переходном режиме, с увеличением



146.

Резонансная кривая квадрата амплитуды

По ней определяется ширина резонанса  $\Delta\omega/2$

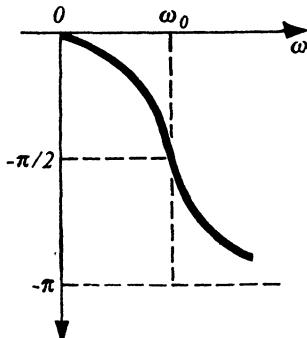
?

1 | Если затухание мало, то что происходит с фазой вблизи резонанса? Как ведет себя фаза при несколько большем затухании?

!

Добротность, равная обратной величине логарифмического декремента затухания, умноженной на  $\pi$ , характеризует интенсивность «раскачки» колебаний в резонансе и его остроту. Добротность показывает, во сколько раз амплитуда в резонансе больше амплитуды статического отклонения при одной и той же амплитуде силы.

Ширина резонансной кривой определяется относительно не амплитуды колебания, а квадрат амплитуды.



147.

### Фазовая резонансная кривая

При малом затухании в очень малом интервале частот вблизи резонансной фаза быстро меняется от значений, близких к нулю, до значений, близких к  $\pi$ , т. е. на резонансной частоте происходит «переворот» фазы

!

*Ускорение всегда отстает по фазе от силы и тем больше, чем больше ее частота. При резонансе отставание равно  $\pi/2$ .*

?

- 1 При каком условии анализ воздействия на систему периодической, но не гармонической, силы сводится к простому применению результатов анализа для гармонической силы?
- 2 Чем в принципе определяется характер воздействия на систему непериодической силы?

добротности возрастает время установления вынужденных колебаний.

**Фазовая резонансная кривая.** Другой важной характеристикой вынужденных колебаний является соотношение их фазы и фазы внешней силы. В формуле (60.10) для смещения это соотношение определяется величиной  $\phi$ , поскольку зависимость силы от времени дается функцией  $\cos \omega t$ . Если  $\phi < 0$ , то смещение запаздывает по фазе от внешней силы. Зависимость фазы  $\phi$  от частоты, выражаемая формулой (60.8б), называется фазовой резонансной кривой (рис. 147).

При очень малых частотах  $\omega \ll \omega_0$  фаза  $\phi$  мала и отрицательна. Это означает, что смещение отстает по фазе от силы на очень небольшую величину: с возрастанием частоты отставание смещения по фазе от силы увеличивается. При резонансе смещение отстает от силы по фазе на  $\pi/2$ . Это означает, что в тот момент, когда сила достигает максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально. При дальнейшем возрастании частоты отставание смещения от силы продолжает увеличиваться и при очень больших частотах  $\omega \gg \omega_0$  приближается к  $\pi$ . Иначе можно сказать, что смещение и сила направлены почти противоположно, поскольку  $\cos(\omega t - \pi) = -\cos \omega t$ . Поэтому, когда, например, сила достигает максимального положительного значения, смещение имеет максимальное отрицательное значение. Затем сила и смещение изменяются в противоположных направлениях, проходя нулевое значение почти одновременно.

Эти фазовые соотношения между смещением и силой позволяют более глубоко понять сущность явления резонанса. Как было отмечено в § 57, скорость опережает смещение на  $\pi/2$ . С другой стороны, при резонансе сила опережает смещение также на  $\pi/2$ . Следовательно, скорость и сила колеблются в одной фазе, т. е. сила все

время совпадает по направлению со скоростью. Поэтому работа внешней силы достигает максимального значения. Если резонанса нет, то часть времени сила совпадает по направлению со скоростью и, следовательно, энергия осциллятора увеличивается, а часть времени действует против скорости и, следовательно, его энергия уменьшается. Поэтому резонанс характеризуется наличием максимально возможных благоприятных условий для передачи энергии от источника внешней силы к осциллятору. Самые неблагоприятные условия передачи энергии от источника внешней силы к осциллятору имеют место при  $\omega \ll \omega_0$  и  $\omega \gg \omega_0$ , когда фазы силы и скорости отличаются почти на  $\pi/2$ . Это означает, что сила примерно половину времени направлена противоположно скорости и половину времени совпадает с ней. Таким образом, в среднем осциллятору от источника внешней силы передается незначительная энергия за период колебаний и поэтому амплитуда колебаний в этих случаях очень мала.

**Периодическая, но не гармоническая сила.** Если действующая на осциллятор внешняя сила  $F_{0f}(t)$  является периодической с периодом  $T$ , то по известным из математического анализа формулам ее можно представить в виде ряда Фурье, каждый член которого является гармонической функцией:

$$F_{0f}(t) = F_0 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (60.23)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ . Эта сила действует на осциллятор вместо силы (60.1) и входит в правую часть уравнения (60.3).

Для нахождения результата ее действия никаких новых расчетов делать не требуется. Достаточно учесть, что уравнение (60.3) является линейным и, следовательно, его решение может быть представлено как сумма решений уравнений, в правой части которых стоит один из членов суммы (60.23). Другими словами, каждое из слагаемых гармонических сил в (60.23) действует на линейный осциллятор независимо. Это действие уже изучено. Полное колебание слагается из суммы колебаний, вызываемых отдельными гармоническими силами в (60.23).

Наиболее сильное влияние на осциллятор оказывают те члены суммы (60.23), частоты которых лежат вблизи резонансной частоты, т. е. у которых  $n\omega \approx \omega_0$ . Если таких частот нет, то периодическая сила  $F_{0f}(t)$  не вызывает сильного роста амплитуды колебаний осциллятора. Если же такие частоты есть, то наблюдается явление резонанса. Резонансная амплитуда, ширина резонансной линии и сдвиг фаз находятся по рассмотренным выше формулам. Абсолютное значение резонансной амплитуды зависит от коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  в соответствующих членах суммы (60.23). Если эти члены очень малы, то рост резонансной амплитуды даже в сотни раз не приведет к существенному увеличению суммарной амплитуды

колебаний. В этом случае резонансные члены в (60.23) не имеют значения.

Если же коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  в резонансных членах не очень малы, то соответствующие резонансные амплитуды играют определяющую роль в характере действия силы  $F_{of}(t)$  на осциллятор.

Как уже было отмечено, большинство физических систем при малом отклонении от положения равновесия ведут себя как линейные осцилляторы. Например, вершины строительных конструкций (башен, домов), мосты разных конструкций и т. д. колеблются как линейные осцилляторы. Вращающиеся валы машины испытывают крутильные колебания, которые также являются колебаниями линейного осциллятора (угловое ускорение  $\ddot{\alpha}$  при отклонении от положения равновесия пропорционально углу отклонения, т. е.  $\ddot{\alpha} \sim \alpha$ ). Кроме того, эти системы часто подвергаются воздействию периодических сил. Например, вал машины испытывает периодические усилия со стороны поршней в результате сгорания топлива в цилиндрах, на различные части моста действует почти периодическое изменение давления от последовательности автомашин, идущих друг за другом более или менее регулярно, периодические шаги пешеходов и т. д. Чтобы проанализировать результат этих периодических воздействий, необходимо произвести спектральный анализ сил, т. е. представить силы в виде (60.23) и посмотреть, с какими амплитудами  $a_n$  и  $b_n$  в этом разложении присутствуют различные гармонические составляющие силы. Затем надо проанализировать, с какими собственными частотами  $\omega_{0i}$  может колебаться система. Вообще говоря, реальная система обладает не одной собственной частотой, а несколькими или даже бесконечным числом, т. е. ее при малых отклонениях не всегда можно представить в виде одного линейного осциллятора. Может случиться, что при малых отклонениях система ведет себя как совокупность линейных осцилляторов с различными собственными частотами. Каждый из них под действием соответствующих гармонических составляющих силы может начать резонансные колебания. Например, мост может совершать вертикальные колебания, горизонтальные смещения поперек своей длины, колебания вдоль своей длины и т. д. Собственные частоты колебаний различны и у каждого вида колебаний имеется не одна собственная частота. Все собственные частоты надо принять во внимание при анализе действия внешней периодической силы. Конструкторская работа частично состоит в том, чтобы избежать резонансного действия внешних сил на систему. Не менее важной задачей в других случаях является обеспечение резонансного воздействия внешних сил на систему. Например, в радиотехнике при приеме радиосигналов необходимо добиться их резонансного воздействия на колебательные контуры радиоприемника. В обоих случаях задача сводится к исследованию вынужденных колебаний линейного осциллятора под действием внешней периодической силы.

Следует также принять во внимание возможную связь различных линейных осцилляторов друг с другом. Это будет сделано при рассмотрении колебаний связанных систем.

**Важное свойство гармонических функций.** При анализе вынужденных колебаний под действием гармонической силы было установлено, что смещение описывается гармонической функцией, сдвинутой по фазе относительно силы. Таким образом, зависимость силы от времени без искажения превращается в такую же зависимость смещения линейного осциллятора от времени. Однако если сила не гармоническая, а лишь периодическая, выражаемая формулой (60.23), то зависимость смещения от времени может существенно отличаться от зависимости силы от времени. Это видно непосредственно из (60.23), поскольку каждый из членов этой суммы в суммарную амплитуду колебаний дает вклад, отличающийся друг от друга как ростом соответствующих амплитуд, так и различными фазами. Поэтому суммарное отклонение не напоминает, вообще говоря, по форме силу (60.23). Важное свойство гармонических функций состоит в том, что из всех периодических сил, действующих на линейный осциллятор, только гармонические силы вызывают смещение, изменяющееся по тому же закону, что и действующая сила.

**Непериодическая сила.** Периодическая сила, действие которой на линейный осциллятор было только что рассмотрено, является идеализированным представлением, которое в реальных условиях никогда не осуществляется. Чтобы быть периодической в строгом смысле этого слова, сила должна действовать периодически в течение бесконечного времени. Если же действие силы имеет начало и конец, то, строго говоря, она не является периодической. Тем не менее реальные силы, имеющие периодический характер и действующие в течение конечного промежутка времени, с успехом можно рассматривать как периодические. Для этого сила должна действовать «достаточно продолжительно». Чтобы получить критерий «достаточной продолжительности», проанализируем гармонические силы.

После начала действия гармонической силы (60.1) для установления вынужденных стационарных колебаний требуется время  $\tau = 1/\gamma$ . Если воздействие силы продолжается значительно дольше этого времени и система совершает достаточно много колебаний, то результат является таким же, как если бы оно продолжалось бесконечно долгое время. Следовательно, при этом условии можно считать, что сила является гармонической, и не принимать во внимание ее ограниченность во времени.

Периодическая сила также имеет начало и конец и в строгом смысле не является периодической. Однако, аналогично случаю гармонической силы, ее можно рассматривать как периодическую, если время  $\tau$  установления вынужденных колебаний много меньше времени действия силы. По истечении времени  $\tau$  колебания приобретают свой стационарный характер и дело происходит так, как если бы

они существовали бесконечно, т. е. можно считать, что сила является строго периодической.

Под непериодической силой понимается такая, в пределах времени существования которой невозможно установить какое-то периодическое изменение. Результат ее воздействия может быть выяснен с помощью только что изложенных соображений. Пусть продолжительность  $T$  действия силы значительно больше времени  $\tau$  установления колебаний в системе. Тогда по истечении  $\tau$  в системе установится некоторый стационарный режим, в котором не произойдет каких-либо существенных изменений в последующий промежуток времени  $T - \tau$ . Поэтому естественно рассматривать процесс как периодический с периодом  $T$ . Представим эту силу в виде (60.23). Очевидно, что составляющие силы, соответствующие членам  $n \geq 1$ , за время  $T$  успевают сделать много колебаний, причем стационарный режим для них устанавливается в течение времени нескольких первых колебаний. Поэтому для этих составляющих полностью применимы все выводы о действии периодической силы. Если частоты попадают в резонансную область, то амплитуда соответствующих колебаний сильно возрастает. Ввиду того, что в этом случае может быть  $\omega \ll \omega_0$  ( $\omega = 2\pi/T$ ), вблизи резонансного значения  $n\omega = \omega_0$  могут находиться частоты многих членов (60.23). Соответствующие почти резонансные колебания складываются друг с другом. С другой стороны, в этом случае первые члены суммы (60.23) с  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеют частоты, много меньшие резонансной. Для таких частот справедливо уравнение (60.12), когда отклонение как бы мгновенно следует за силой. Таким образом, если непериодическая сила существует много дольше времени установления колебаний и периода резонансных колебаний, то процесс рассматривается совершенно аналогично случаю периодической силы. Стого говоря, при таком подходе будет допущена некоторая ошибка, потому что в начале и конце действия силы состояние движения осциллятора не будет полностью одинаковым. Поэтому к периоду  $T$  следовало бы добавить время затухания  $\tau$ , чтобы второй «воображаемый период» начался так же, как и первый, когда колебания до начала действия силы отсутствуют. Но  $\tau \ll T$ , и это уточнение больших изменений не несет. С математической точки зрения для более строгого решения задачи следует перейти к непрерывному спектру, а именно считать, что период действия силы  $T \rightarrow \infty$ . Тогда вместо выражения силы в виде (60.23) как суммы по частотам ее можно представить в виде интеграла по частотам:

$$F_0 f(t) = F_0 \int_0^{\infty} (a_{\omega} \cos \omega t + b_{\omega} \sin \omega t) d\omega, \quad (60.24)$$

который известен как интеграл Фурье. В этом случае частоты принимают не дискретные, а всевозможные непрерывно изменяющиеся

значения. Величины  $a_\omega$  и  $b_\omega$  характеризуют амплитуды силы и называются плотностью амплитуд. Величина  $a_\omega d\omega$  есть суммарная амплитуда тех составляющих силы, изменяющихся по закону  $\cos \omega t$ , частоты которых лежат между  $\omega$  и  $(\omega + d\omega)$ . Аналогичный смысл имеет величина  $b_\omega d\omega$ , связанная с колебаниями по закону  $\sin \omega t$ . Вынужденные колебания в своем составе также содержат всевозможные частоты, плотности амплитуд которых соответствующим образом связаны с плотностью амплитуд силы тех же частот. Компоненты силы с частотами, лежащими в области резонанса, вызывают сильное увеличение амплитуд смещения. Физическое содержание явлений при непрерывном спектре не отличается существенно от случая дискретного спектра.

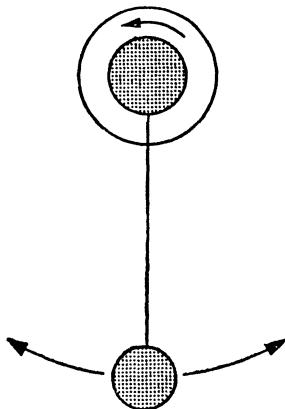
Если время действия  $T$  внешней силы меньше, чем время установления вынужденных колебаний  $\tau = 1/\gamma$ , то представления, основанные на картине установившихся вынужденных колебаний, применять нельзя. В этом случае необходимо исследовать движение осциллятора в переходном режиме.

**Резонанс при нелинейных колебаниях.** Важнейшей особенностью вынужденных нелинейных колебаний являются резонансы на комбинационных частотах. Как было отмечено в § 58, в нелинейных колебаниях наряду с основной частотой  $\omega_0$  присутствуют высшие гармоники с частотами  $n\omega_0$ . Под действием внешней гармонической силы с частотой  $\omega$  резонанс наступает не только на основной частоте, когда  $\omega \approx \omega_0$ , но и на частотах высших гармоник, когда  $\omega \approx n\omega_0$ . В спектре произвольной периодической силы наряду с основной частотой  $\omega$  присутствуют высшие гармоники с частотами  $m\omega$ . Поэтому резонанс может наступить при частотах, удовлетворяющих условию  $m\omega = n\omega_0$ , т. е. при различных комбинациях основных частот. Конечно, роль того или иного резонанса зависит от его амплитуды, а последняя зависит от характеристик как нелинейной системы, так и силы. Если амплитуда мала, то резонанс нет необходимости принимать во внимание.

## 61. Автоколебания и параметрические колебания

**Определение.** Из-за потери энергии на трение собственные колебания постепенно затухают. Если к осциллятору подводить энергию от источника внешней гармонической силы, то он начнет колебаться с частотой этой силы, которая, вообще говоря, отличается от собственной частоты осциллятора.

Однако можно создать устройства, в которых осциллятор сам регулирует подвод энергии из внешнего источника таким образом, чтобы компенсировать потери энергии на трение. За период колебаний из внешнего источника энергия, приобретаемая осциллятором, равна энергии, затрачиваемой на преодоление сил трения. В результате осциллятор совершает незатухающие колебания. Такие самоподдерживающиеся колебания называются автоколебаниями. Если трение



148.

Маятник, подвешенный на вращающуюся ось, является простейшей автоколебательной системой

!

Для осуществления автоколебаний необходимо иметь внешний источник энергии. Колеблющаяся система сама в нужном темпе берет энергию от этого источника, чтобы колебания ее были незатухающими.

невелико, то за один период в систему поступает лишь небольшая доля полной энергии осциллятора. В этом случае автоколебания с очень большой точностью являются гармоническими и их частота очень близка к частоте собственных колебаний. Если же силы трения велики, то за один период в систему подводится значительная часть полной энергии осциллятора и поэтому колебания сильно отличаются от гармонических, хотя и являются периодическими. Период этих колебаний не совпадает с периодом собственных колебаний осциллятора.

**Автоколебания маятника.** Рассмотрим колебания маятника, подвешенного на оси во вращающейся втулке (рис. 148), и превращение его энергии в различных случаях. Пусть маятник покоятся. Тогда вращающаяся втулка в результате скольжения относительно оси совершают работу на преодоление сил трения. Эта работа полностью превращается во внутреннюю энергию, и в результате ось и втулка нагреваются. Источником энергии, превращенной во внутреннюю, является машина, приводящая во вращение втулку.

Пусть теперь маятник колеблется. В тот полупериод колебаний маятника, когда направления вращения оси маятника и втулки совпадают, силы трения совпадают по направлению с движением точек поверхности оси. Поэтому эти силы вызывают усиление колебаний маятника. С другой стороны, энергия, превратившаяся во внутреннюю, за время полуperiода колебаний в сравнении со случаем покоящегося маятника уменьшается ввиду того, что относительное перемещение трущихся поверхностей (внешняя поверхность оси и внутренняя поверхность втулки) уменьшается. Поэтому лишь часть энергии от машины, вращающей втулку, превращается во внутреннюю, а другая часть идет на увеличение энергии колебаний маятника.

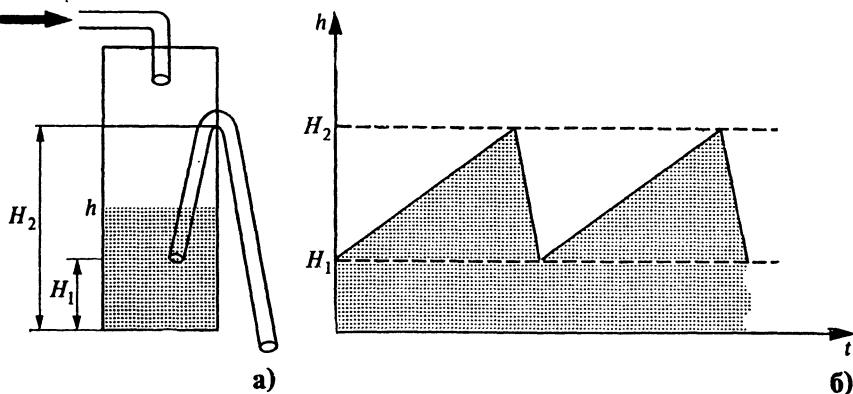
В другой полупериод колебаний маятника, когда направления вращения его оси и оси втулки противоположны, силы трения действуют против направления движения маятника. Поэтому они тормозят его движение и энергия колебаний маятника превращается во внутреннюю. Энергия от машины, вращающей втулку, в этом случае также полностью превращается во внутреннюю. Полный результат превращений энергии в течение периода колебаний определяется характером зависимости сил трения от скорости.

Если силы трения не зависят от скорости, то энергия, приобретаемая маятником в полупериоде колебаний, когда направления вращения его оси и вала совпадают, равна энергии, теряемой им на работу против сил трения в другом полупериоде. В этом случае вращение втулки не вносит каких-либо изменений в колебания маятника в сравнении со случаем невращающейся втулки.

Если сила трения увеличивается с возрастанием скорости, то энергия, приобретаемая маятником за полупериод колебаний, когда направления вращения его оси и вала совпадают, меньше энергии, теряемой им на работу против сил трения в другом полупериоде, поскольку во втором полупериоде относительные скорости больше, а следовательно, и силы трения больше, чем в первом полупериоде. В этом случае вращение втулки увеличивает затухание колебаний маятника.

Если сила трения уменьшается с увеличением скорости, то энергия, приобретаемая маятником в полупериоде колебаний, когда направления вращения его оси и вала совпадают, больше энергии, теряемой им на работу против сил трения в другом полупериоде, поскольку во втором полупериоде относительные скорости больше, а следовательно силы трения меньше, чем в первом полупериоде. Таким образом, вращение втулки приводит к увеличению амплитуды колебаний маятника. Однако при этом возрастают потери энергии маятника на трение о воздух. Когда поступающая в маятник энергия за период становится равной энергии, теряемой на трение, наступает режим колебаний с постоянными амплитудой и частотой, называемой автоколебательным режимом. Если потери на трение за один период невелики в сравнении с полной энергией колебаний маятника и амплитуда колебаний достаточно мала, то эти колебания являются гармоническими, а их частота равна собственной частоте колебаний маятника.

Автоколебания широко применяются в технике. Хорошо известным примером являются маятниковые часы. В них сообщение энергии маятнику происходит толчками в результате приложения усилий к маятнику со стороны пружины или подвешенных гирь в моменты времени, определяемые колебаниями самого маятника. В электрическом звонке колебания молоточка включают и выключают электрический ток, который сообщает энергию системе звонка, благодаря чему поддерживаются автоколебания молоточка.



## 149.

**Релаксационные колебания высоты столба жидкости**

?

- 1 Чем автоколебания отличаются от вынужденных колебаний?
- 2 При наличии ветра вершины деревьев колеблются. Являются эти колебания вынужденными или автоколебаниями?
- 3 Можете ли Вы доказать прямым расчетом соблюдение закона сохранения энергии в параметрическом возбуждении колебаний на примере раскачивания качелях?

**Релаксационные колебания.** Эти колебания являются частным случаем автоколебаний, однако характер изменения величин со временем очень своеобразен: в течение сравнительно длительного времени в системе медленно накапливаются изменения, затем очень резко, почти скачком, происходит изменение ее состояния и она возвращается в первоначальное состояние; затем снова накапливаются медленные изменения и т. д.

Известный с древних времен пример таких колебаний показан на рис. 149, а. В сосуд введена широкая трубка-сифон, по которой вода может вытекать из сосуда. Наливается в сосуд вода из крана тонкой струей. Благодаря этому уровень воды в сосуде медленно повышается. Когда уровень достигает нижней стенки сифонной трубки в ее верхней части (высота  $H_2$ ), вода начнет переливаться наружу, увлекает за собой воздух и заполняет все сечение сифона в верхней части. После этого она выливается из сифонной трубки по всему поперечному сечению, т. е. очень быстро, поскольку это сечение большое. Уровень воды в сосуде резко понижается до нижнего конца сифонной трубки внутри сосуда (высота  $H_1$ ). После этого начинается новый цикл заполнения водой. График изменения высоты уровня воды в сосуде изображен на рис. 149, б. Видно, что

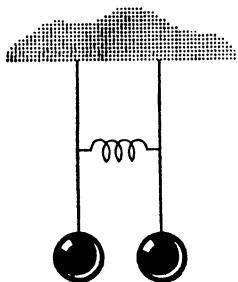
эти колебания носят разрывный характер: в верхней и нижней точках скорость изменения  $h$  скачком меняет свой знак на обратный — от положительного значения при росте  $h$  на отрицательное значение в верхней точке, когда начинается выливание жидкости через сифонную трубку.

**Параметрическое возбуждение колебаний.** Свойства колеблющихся систем описываются величинами, называемыми параметрами. Например, математический маятник характеризуется одним параметром — его длиной. При изменении этого параметра изменяются колебательные свойства маятника, а именно частота собственных колебаний. Если этот параметр изменять в определенном такте с колебаниями, то можно сообщить маятнику энергию и тем самым увеличить амплитуду его колебаний либо просто поддерживать колебания в незатухающем режиме. Такое возбуждение и поддержание колебаний называется параметрическим.

Хорошо известным примером параметрического возбуждения и поддерживания колебаний является качание на качелях. Когда качели находятся в верхней точке, качающийся на них приседает, а когда качели проходят нижнюю точку, он снова выпрямляется. В результате приседания в верхних точках совершается меньшая по абсолютному значению работа, чем работа при подъеме в нижней точке. Разность работ, по закону сохранения, равна разности энергий качаний, и качели раскачиваются. Если эта энергия затрачивается полностью на работу силы трения, то качания поддерживаются в незатухающем режиме.

## 62. Колебания связанных систем

**Системы со многими степенями свободы.** Если система обладает несколькими степенями свободы, то при малых отклонениях от положения равновесия возможны одновременно колебания по всем степеням свободы. Например, в упомянутом выше случае колебания моста одной из степеней свободы является его колебание в вертикальной плоскости, а другой — в горизонтальном направлении. Есть, конечно, и другие степени свободы. Обычный маятник может колебаться в двух взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях, проходящих через точку подвеса. Поэтому он имеет две степени свободы. Если колебания, соответствующие каждой из степеней свободы, независимы друг от друга, т. е. не могут обмениваться друг с другом энергией, то рассмотрение движения системы с несколькими степенями свободы является чисто кинематической задачей: зная движение по каждой степени свободы, надо произвести кинематическое сложение движений. Хотя суммарное движение и может быть при этом весьма сложным, оно не содержит в себе с динамической точки зрения никаких новых физических закономерностей. Лишь наличие связи различных степеней свободы между собой придает колебанию системы со многими степенями свободы новые физические закономерности.



150.

## Колебания связанных систем

!

*В связанной системе через связи происходит обмен энергией между ее частями.*

**Связанные системы.** Связанной системой называется система со многими степенями свободы, между которыми имеются связи, обеспечивающие возможность обмена энергией. В качестве примера рассмотрим два маятника, соединенных между собой пружиной, осуществляющей эту связь (рис. 150). Эта система может колебаться в вертикальной плоскости, в которой в состоянии равновесия находятся маятники и пружина, также в перпендикулярных этой плоскости направлениях. Всего имеются четыре степени свободы, связанные между собой. Если один из маятников вывести из положения равновесия, отклонив его одновременно и в плоскости маятников, и в перпендикулярном этой плоскости направлении, то после начала колебания начнет раскачиваться второй маятник по своим степеням свободы. Колебания маятников изменяются по амплитудам. В целом наблюдается довольно сложная картина движения маятников и передачи энергии от одного маятника к другому.

**Нормальные колебания.** Несмотря на сложность движения двух связанных маятников, оно всегда может быть представлено как суперпозиция четырех гармонических колебаний, частоты которых называются нормальными частотами связанный системы. Число нормальных частот равно числу степеней свободы. В данном случае имеем четыре нормальных частоты. Рассмотрим, чем они определяются и как могут быть найдены.

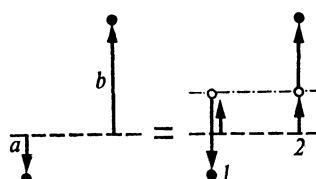
Прежде всего опишем колебания маятников в вертикальной плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей их точки подвеса. Каждый из маятников в этой плоскости может занимать некоторое положение. Состояние системы характеризуется положением обоих маятников. Рассмотрим простейшие состояния системы: 1) оба маятника отклонены от положения равновесия в одну и ту же сторону на один и тот же угол, 2) маятники отклонены

в разные стороны на один и тот же угол. Эти простейшие отклонения называются нормальными. Любое возможное отклонение маятников может быть представлено в виде суммы их одинаковых отклонений в одну сторону и разные стороны, или, иначе, любое состояние системы в указанном выше смысле является суперпозицией состояний (1) и (2). Доказательство этого утверждения легко выполнить с помощью графика на рис. 151. Пунктиром указана средняя линия равновесия. Величины  $a$  и  $b$  означают отклонения маятников от положения равновесия ( $b > a$ ). После знака равенства изображены те комбинации отклонений 1 и 2, которые в сумме дают исходные отклонения маятников.

Если маятники отклонить одинаково в одну сторону и отпустить, то они колеблются с некоторой частотой  $\omega_1$ , которая называется нормальной. Частота колебаний маятников, отклоненных одинаково в противоположных направлениях, является другой нормальной частотой  $\omega_2$ . Произвольное колебание двух маятников в указанных направлениях в соответствии с разложением, изображенным на рис. 151, может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний с нормальными частотами.

Аналогичным образом рассматриваются колебания маятников в вертикальной плоскости, проходящей через линию, соединяющую их точки подвеса. Нормальными колебаниями здесь являются колебания маятников, отклоняющихся на один угол в одну сторону и в разные стороны. Все рассуждения здесь аналогичны предшествующему случаю. Следовательно, колебания двух связанных маятников в этом направлении также могут быть представлены в виде суммы двух колебаний с нормальными частотами, равными частотам соответствующих нормальных колебаний.

Полное движение двух маятников с четырьмя степенями свободы являются



151.

Представление произвольного отклонения двух маятников в виде суммы двух нормальных отклонений

?

1 | Какая особенность системы со многими степенями свободы делает ее связанный системой?

2 | Что такое нормальные колебания связанный системы?

?

- 1 Сколько нормальных колебаний имеет связанная система?
- 2 Как с помощью нормальных колебаний представляется произвольное колебание связанной системы?

суперпозицией четырех нормальных колебаний с соответствующими нормальными частотами. В данном случае не все из этих нормальных частот различны, но это ни в какой степени не изменяет существа дела.

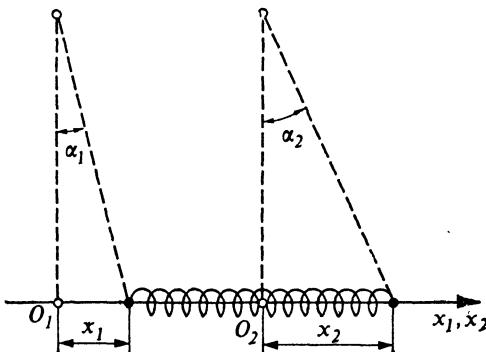
Таким образом, задача исследования связанных систем сводится к нахождению их нормальных колебаний и нормальных частот. Иногда простые соображения позволяют указать нормальные колебания, как это было в только что рассмотренном случае. Две из нормальных частот являются просто частотой собственных колебаний маятника (с учетом или без учета массы пружины и высоты ее подвеса), а две другие — частотами колебаний маятников при наличии дополнительной силы упругости со стороны пружины при симметричных отклонениях маятников от положения равновесия в противоположных направлениях.

В большинстве же случаев задача оказывается значительно сложнее. Существуют общие методы нахождения нормальных частот, на изложении которых мы здесь не имеем возможности остановиться.

**Колебания связанных систем.** Теперь выполним подробно математическое описание колебаний связанных систем на примере связанных маятников, ограничиваясь случаем двух степеней свободы. Будем считать, что маятники колеблются в одной

152.

К расчету отклонений при колебаниях связанных систем



и той же плоскости, совпадающей с вертикальной плоскостью, проходящей через точки подвеса и положение равновесия материальных точек математических маятников (рис. 152). При малых колебаниях можно пренебречь вертикальными смещениями точек и рассматривать их движение вдоль одной прямой. Положение колеблющихся точек характеризуется их смещениями  $x_1$  и  $x_2$  от своих положений равновесия, обозначенных буквами  $O_1$  и  $O_2$ . Когда точки находятся одновременно в положениях равновесия, соединяющая их пружина не деформирована и не действует на точки с какими-либо силами.

Обозначим частоту нормального колебания маятников, когда они колеблются синхронно (в одной и той же фазе), через  $\omega_1$ , а когда в противофазе — через  $\omega_2$ . Ясно, что  $\omega_2 > \omega_1$ . Общее колебание системы является суперпозицией двух нормальных колебаний. В соответствии со сказанным выше о способе разложения произвольного движения связанных маятников можем написать:

$$\begin{aligned}x_1 &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\x_2 &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_2) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_1).\end{aligned}\quad (62.1)$$

Четыре неизвестные постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются из начальных условий, выражающих значения отклонений  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  и скоростей  $\dot{x}_{10}$ ,  $\dot{x}_{20}$  в начальный момент времени, например  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}x_{10} &= A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2, \quad x_{20} = A \sin \varphi_1 - B \sin \varphi_2; \\ \dot{x}_{10} &= A\omega \cos \varphi_1 + B\omega \cos \varphi_2, \quad \dot{x}_{20} = A\omega \cos \varphi_1 - B\omega \cos \varphi_2.\end{aligned}\quad (62.2)$$

Найдя из уравнений (62.2) величины  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , мы полностью опишем движение с помощью формул (62.1).

Теперь решим ту же задачу, применяя непосредственно динамические законы движения. Запишем уравнения движения заданных математических маятников, считая их длину  $l$  одинаковой:

$$\ddot{\alpha}_1 = -(g/l) \alpha_1, \quad \ddot{\alpha}_2 = -(g/l) \alpha_2, \quad (62.3)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы отклонения каждого из заданных маятников от вертикалей. Отклонения от положения равновесия связаны с углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  очевидными соотношениями (рис. 152):  $x_1 = \alpha_1 l$ ,  $x_2 = \alpha_2 l$ . Поэтому уравнения движения материальных точек без учета их связи пружиной имеют вид:

$$\ddot{x}_1 = -(g/l) x_1, \quad \ddot{x}_2 = -(g/l) x_2. \quad (62.4)$$

При деформации пружины возникают силы, пропорциональные удлинению (закона Гука). Удлинение пружины есть  $x_2 - x_1$  и потому силы, действующие на материальные точки, равны

$$F_1 = -F_2 = k(x_2 - x_1), \quad (62.5)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Поэтому уравнения движения точек с учетом сил связи посредством пружины имеют вид:

$$\ddot{x}_1 = -(g/l)x_1 + (k/m)(x_2 - x_1), \quad \ddot{x}_2 = -(g/l)x_2 - (k/m)(x_2 - x_1), \quad (62.6)$$

где  $m$  — одинаковая масса материальных точек. Проще всего эти два связанных уравнения решить следующим образом. Складывая их левые и правые части, а затем вычитая, получим:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -(g/l)(x_1 + x_2),$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -(g/l)(x_1 - x_2) - (2k/m)(x_1 - x_2).$$

Таким образом, уравнение для суммы и разности отклонений маятников имеет вид уравнений свободных гармонических колебаний:

$$(x_1 + x_2)'' + \omega_1^2(x_1 + x_2) = 0, \quad (x_1 - x_2)'' + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0, \quad (62.7)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{(g/l)}, \quad \omega_2 = \sqrt{(g/l) + (2k/m)}. \quad (62.7a)$$

Решение этих уравнений хорошо известно:

$$x_1 + x_2 = A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_1 - x_2 = B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (62.8)$$

Отсюда для отклонений  $x_1$  и  $x_2$  путем сложения и вычитания левых и правых частей получаем:

$$x_1 = (1/2)A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + (1/2)B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2 = (1/2)A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - (1/2)B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Эти формулы, как и следовало ожидать, совпадают с формулами (62.1), если положить  $A = A_0/2$ ,  $B = B_0/2$ . Поэтому величины  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , определенные формулами (62.7a), являются нормальными частотами колебаний рассматриваемой связанной системы с двумя степенями свободы.

# Глава 14

## НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

---

- 63. Силы инерции
  - 64. Неинерциальные системы, движущиеся прямолинейно-поступательно
  - 65. Невесомость. Принцип эквивалентности
  - 66. Неинерциальные вращающиеся системы координат
  - 67. Гироколические силы
- 

**В** неинерциальных системах отсчета существуют силы инерции. Они реальны и имеют многообразные проявления и важные практические применения. Однако использование понятия сил инерции при анализе движений в инерциальных системах отсчета является ошибочным, так как в них эти силы отсутствуют.

### 63. Силы инерции

**Определение неинерциальных систем.** Неинерциальной системой отсчета называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной. Система отсчета связана с телом отсчета, которое, по определению, принимается за абсолютно твердое. Ускоренное движение твердого тела включает в себя ускорение как поступательного движения, так и вращения. Поэтому простейшими неинерциальными системами отсчета являются системы, движущиеся ускоренно прямолинейно, и вращающиеся системы.

**Время и пространство в неинерциальных системах отсчета.** Чтобы описать движение в некоторой системе отсчета, необходимо разъяснить содержание высказывания о том, что такие-то события произошли в таких-то точках в такие-то моменты времени. Для этого прежде всего надо, чтобы в системе отсчета существовало единое время в том смысле, как это было изложено в § 7. В неинерциальных системах отсчета единого времени в ука-

заниом в § 7 смысле не существует. Поэтому не ясно, как можно измерять длительность процессов, начинающихся в одной точке и заканчивающихся в другой. Понятие длительности таких процессов теряет смысл, поскольку скорость хода часов в различных точках различна. Усложняется также проблема измерения и сравнения длии. Например, трудно определить понятие длины движущегося тела, если не ясно, что такоe одновременность в различных точках.

Эти трудности можно частично обойти, если принять во внимание, что интервал собственного времени не зависит от ускорения. Поэтому для анализа пространственно-временных соотношений в некоторой бесконечно малой пространственно-временной области неинерциальной системы отсчета можно воспользоваться пространственно-временными соотношениями инерциальной системы отсчета, которая движется с той же скоростью, но без ускорения, как и соответствующая бесконечно малая область неинерциальной системы. Такая инерциальная система отсчета называется *сопровождающей*. Таким путем удается установить зависимость между физическими величинами, если они определяются пространственно-временными соотношениями в бесконечно малой области, а затем распространить их на конечные области. Такой путь сложен и здесь не будет использован.

Мы ограничимся рассмотрением движения с малыми скоростями, когда все эти трудности не возникают и можно использовать преобразования Галилея, считая, что пространственно-временные соотношения в неинерциальной системе таковы же, как если бы она была инерциальной.

**Силы инерции.** В инерциальных системах координат единственной причиной ускоренного движения тела являются силы, действующие на него со стороны других тел. Сила всегда есть результат взаимодействия материальных тел.

В неинерциальных системах можно ускорить тело простым изменением состояния движения системы отсчета. Рассмотрим, например, неинерциальную систему отсчета, связанную с автомобилем. При изменении скорости его относительно поверхности Земли в этой системе отсчета все небесные тела испытывают соответствующие ускорения. Ясно, что эти ускорения не являются результатом действия на небесные тела каких-либо сил со стороны других тел. Таким образом, в неинерциальных системах отсчета существуют ускорения, которые не связаны с силами такого же характера, какие известны в инерциальных системах отсчета. Благодаря этому первый закон Ньютона в них не имеет смысла. Третий закон Ньютона в отношении взаимодействия материальных тел, вообще говоря, выполняется. Однако, поскольку в неинерциальных системах отсчета ускорения тел вызываются не только «обычными» силами взаимодействия между материальными телами, проявления третьего закона Ньютона настолько искажаются, что он также утрачивает ясное физическое содержание.

При построении теории движения в неинерциальных системах в принципе можно было бы идти по пути коренного изменения представлений, выработанных в инерциальных системах, а именно можно было бы принять, что ускорения тел вызываются не только силами, но и некоторыми другими факторами, которые ничего общего с силами не имеют. Однако исторически был выбран иной путь — эти другие факторы были признаны силами, которые находятся с ускорениями в таких же соотношениях, как и обычные силы. При этом предполагается, что в неинерциальных системах, так же как и инерциальных, ускорения вызываются только силами, но паряду с «обычными» силами взаимодействия существуют еще силы особой природы, называемые силами инерции. Второй закон Ньютона формулируется без изменения, но паряду с силами взаимодействия необходимо учесть силы инерции. Существование сил инерции обусловливается ускорением движения неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной. Силы инерции берутся такими, чтобы обеспечить в неинерциальной системе отсчета те ускорения, которые фактически имеются, но обычными силами взаимодействия объясняются лишь частично. Поэтому второй закон Ньютона в неинерциальных системах имеет следующий вид:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}, \quad (63.1)$$

где  $\mathbf{w}'$  — ускорение в неинерциальной системе отсчета,  $\mathbf{F}$  — «обычные» силы как результат взаимодействия,  $\mathbf{F}_{\text{ин}}$  — силы инерции.

**О реальности существования сил инерции.** Являются ли силы инерции реальными силами? Они реальны в том же смысле, в каком являются реальными ускорения в неинерциальных системах координат, для описания которых они введены. Они реальны также и в более глубоком смысле: при рассмотрении физических явлений в неинерциальных системах можно указать конкретные физические последствия действия сил инерции. Например, в вагоне поезда силы инерции могут привести кувечьям пассажиров, т. е. к весьма реальному и осозаемому результату. Поэтому силы инерции столь же реальны, как реален факт равномерного и прямолинейного движения тел в инерциальных системах координат, если отсутствуют «обычные» силы взаимодействия, как это формулируется в первом законе Ньютона.

**Нахождение сил инерции.** Чтобы можно было описать движение тел в неинерциальной системе отсчета с помощью уравнения (63.1), необходимо указать способ определения сил инерции, которые фигурируют в правой части этого уравнения. Силы инерции характеризуют ту часть ускорения тела, которая обусловливается ускоренным движением системы отсчета относительно инерциальной

системы координат. Запишем уравнения движения некоторого тела в неинерциальной и инерциальной системах координат:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}, \quad (63.2)$$

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (63.3)$$

где учтено, что «обычные» силы взаимодействия  $\mathbf{F}$  одинаковы в обеих системах координат;  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{w}'$  — ускорения соответственно в неинерциальной и инерциальной системах координат.

Из уравнений (63.2) и (63.3) для силы инерции получаем

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = m(\mathbf{w}' - \mathbf{w}). \quad (63.4)$$

Обычно при рассмотрении неинерциальных систем отсчета используется следующая терминология. Ускорение  $\mathbf{w}$  относительно инерциальной системы отсчета называется **абсолютным**, а ускорение  $\mathbf{w}'$  относительно неинерциальной системы отсчета — **относительным**. Формула (63.4) показывает, что силы инерции обусловливают разность между относительным и абсолютным ускорениями. Отсюда ясно, что силы инерции существуют только в неинерциальных системах координат. Введение этих сил в уравнения движения, использование их при объяснении физических явлений и т. д. в неинерциальных системах координат является правильным и необходимым. Однако использование понятия сил инерции при анализе движений в инерциальных системах координат является ошибочным, поскольку в них эти силы отсутствуют.

## 64. Неинерциальные системы, движущиеся прямолинейно-поступательно

**Выражение для сил инерции.** Пусть неинерциальная система движется прямолинейно вдоль оси  $x$  инерциальной системы (рис. 153). Ясно, что связь между координатами дается формулами:

$$x = x_0 + x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (64.1)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}, \quad v = v_0 + v', \quad (64.2)$$

где  $v = dx/dt$ ,  $v_0 = dx_0/dt$ ,  $v' = dx'/dt$  называются соответственно **абсолютной**, **переносной** и **относительной скоростями**.

Переходя в (64.2) к ускорениям, находим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dv'}{dt}, \quad w = w_0 + w', \quad (64.3)$$

где

$$w = dv/dt, \quad w_0 = dv_0/dt, \quad w' = dv'/dt \quad (64.4)$$

называются соответственно **абсолютным**, **переносным** и **относительным ускорениями**. Следовательно, в соответствии с определением (63.4) выражение для сил инерции в движущейся прямолинейно неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$F_{\text{ин}} = m(w' - w) = -mw_0, \quad (64.5)$$

или в векторной форме

$$\boxed{F_{\text{ин}} = -mw_0,} \quad (64.6)$$

т. е. сила инерции направлена противоположно переносному ускорению неинерциальной системы.

**Маятник на тележке.** Рассмотрим равновесное состояние маятника в неинерциальной системе координат, движущейся в горизонтальном направлении с поступательным ускорением  $w_0$  (рис. 154). Силы, действующие на маятник, указаны непосредственно на рисунке. Уравнение движения маятника имеет вид

$$mw' = T + P + F_{\text{ин}} = \\ = T + P - mw_0 = 0, \quad (64.7)$$

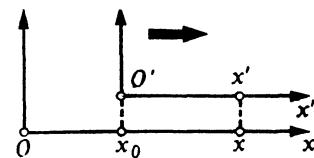
т. е.  $w' = 0$ . Ясно также, что  $\tan \alpha = -w_0/g$ , где  $\alpha$  — угол между подвесом маятника и вертикалью.

В инерциальной системе координат действующие силы и уравнение движения изменяются (рис. 155). Сила инерции в этом случае отсутствует, имеются только сила  $T$  со стороны натянутой нити и сила тяжести  $P = mg$ . Условие равновесия гласит:

$$mw = T + P = mw_0. \quad (64.8)$$

Очевидно также, что  $\tan \alpha = w_0/g$ .

**Маятник Любимова.** Очень эффектной демонстрацией явлений в прямолинейно движущихся неинерциальных системах является маятник Любимова. Маятник подведен на массивной рамке, которая может свободно падать, скользя по вер-

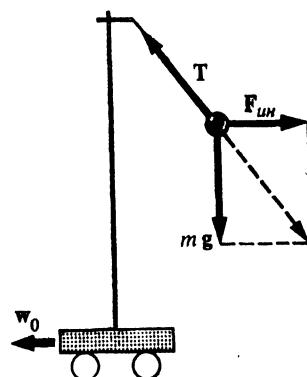


153.

Неинерциальная система, движущаяся прямолинейно

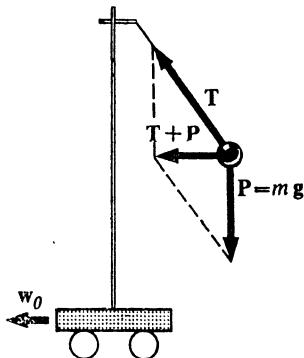
!

*Силы инерции существуют лишь в неинерциальных системах отсчета. В инерциальных системах никаких сил инерции нет.*



154.

Равновесие маятника в неинерциальной системе отсчета



155.

**Равновесие ускоренно движущегося маятника в инерциальной системе отсчета**

!

**Невесомость наступает при условии, когда инертная и гравитационная массы равны. В настоящее время это равенство проверено экспериментально с очень большой точностью.**

?

- 1 Когда и почему возникает необходимость рассматривать силы инерции?
- 2 В чем заключается общий метод определения сил инерции?
- 3 Какие силы инерции существуют в поступательно движущихся неинерциальных системах?

тикальным направляющим тросам, трение о которые очень мало (рис. 156, а). Когда рамка покоятся, маятник совершает собственные колебания. Рамка может быть приведена в состояние свободного падения в любой фазе колебаний маятника. Движение его при свободном падении рамки зависит от того, в какой фазе колебаний началось свободное падение. Если маятник в момент начала свободного падения находится в точке максимального отклонения, то он остается в этой точке неподвижным относительно рамки. Если же он в указанный момент находился не в точке максимального отклонения, то он имеет относительно рамки некоторую скорость. При падении рамки абсолютное значение этой скорости относительно рамки не изменяется, меняется лишь ее направление относительно рамки. В результате маятник вращается равномерно вокруг точки подвеса.

Рассмотрим это явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с рамкой (рис. 156, б). Уравнение движения имеет вид

$$mw' = T + P + F_{\text{ин}} = \\ = T + mg - mg = T. \quad (64.9)$$

Таким образом, это есть движение материальной точки под действием сил натяжения нити по окружности с центром в точке ее закрепления. Движение происходит по окружности с линейной скоростью, равной начальной. Сила натяжения нити является той центростремительной силой, которая обеспечивает равномерное движение маятника по окружности и равна  $mv'^2/l$ , где  $l$  — длина подвеса маятника, а  $v'$  есть скорость движения маятника относительно рамки.

В инерциальной системе координат силы инерции отсутствуют. Силы, действующие на маятник, показаны на рис. 156, в — это силы натяжения нити и тяжести. Уравнение движения имеет вид

$$mw = P + T = mg + T. \quad (64.10)$$

Чтобы найти решение уравнения (64.10), представим полное ускорение маятника как сумму двух ускорений:  $w = w_1 + w_2$  и тогда (64.10) может быть записано в виде совокупности двух уравнений:

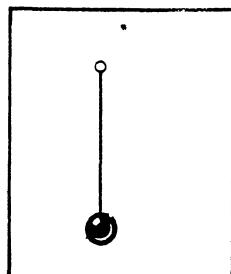
$$mw_1 = T, \quad mw_2 = mg, \quad (64.11)$$

второе из которых имеет решение  $w_2 = g$ , т. е. описывает свободное падение маятника, а первое полностью совпадает с (64.9) и описывает вращение вокруг точки подвеса.

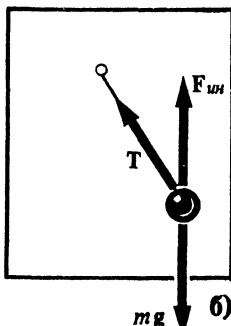
В приведенных примерах анализ движения был одинаково прост и нагляден как в неинерциальной системе координат, так и в инерциальной. Это объясняется тем, что примеры были выбраны именно такими с целью иллюстрации соотношения между инерциальными и неинерциальными системами. Однако очень часто решение задачи в неинерциальной системе оказывается значительно более простым, чем в инерциальной. Например, анализ скатывания цилиндра с наклонной плоскости, которая находится в равнотускоренном движении в произвольном направлении, значительно проще в неинерциальной системе координат, связанной с наклонной плоскостью, чем в инерциальной системе, в которой плоскость движется ускоренно.

## 65. Невесомость. Принцип эквивалентности

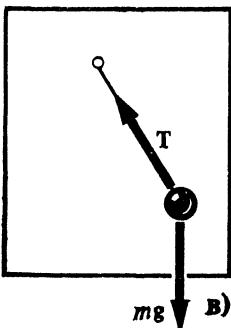
**Невесомость.** Как было видно на примере маятника Любимова, в свободно падающей неинерциальной системе отсчета силы инерции полностью компенсируют действие силы тяжести и движение происходит так, как если бы не было ни сил инерции, ни сил тяжести. Наступает состояние невесомости. Этим обстоятельством широко пользуются для создания в земных условиях состояния невесомости, например для тренировки космонавтов. Для этого в полете летчик в нуж-



а)



б)



в)

156.

Схема сил, действующих на маятник Любимова в системах отсчета:

б — неинерциальной, связанной с маятником; в — инерциальной, в которой маятник падает с ускорением свободного падения; а — маятник в положении равновесия

ном темпе переводит самолет в режим пикирования так, чтобы ускорение самолета к земле было равно ускорению силы тяжести. При этом космонавты испытывают состояние невесомости и имеют возможность отработать приемы передвижения по кабине, выполнять различные действия и т. д.

**Гравитационная и инертная массы.** Наступление состояния невесомости при свободном падении обусловлено весьма важным физическим фактором, а именно равенством инертной и гравитационной масс тела. Инертная масса характеризует инертные свойства тела, а гравитационная масса — силу, с которой тела притягиваются по закону Ньютона. Гравитационная масса имеет такой же смысл, как, например, электрический заряд при рассмотрении электромагнитных взаимодействий. Вообще говоря, ни откуда не следует, что гравитационная и инертная массы тела должны быть пропорциональными, или, что то же самое, равными друг другу (если две физические величины пропорциональны друг другу, то подходящим выбором единиц измерения можно их сделать равными друг другу). Докажем, что **инертная и гравитационная массы тела пропорциональны друг другу**. Сила, действующая со стороны Земли, гравитационная масса которой  $M_g$ , на некоторое тело, гравитационная масса которого  $m_g$ , на поверхности Земли равна

$$F = G \frac{m_g M_g}{R^2}, \quad (65.1)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $R$  — радиус Земли. Если инертная масса тела есть  $m$ , то под действием силы (65.1) оно приобретает ускорение

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_g m_g}{R^2 m} = \text{const} \cdot \frac{m_g}{m}. \quad (65.2)$$

Поскольку ускорение  $g$  для всех тел у поверхности Земли одинаково, то отношение их инертных и гравитационных масс одинаково, т. е. инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу. Соответствующим выбором единиц измерения можно их сделать равными друг другу и говорить о массе вообще, не уточняя, о какой именно массе идет речь. Именно благодаря тому обстоятельству, что гравитационная и инертная массы равны друг другу, при свободном падении силы инерции и силы тяжести компенсируют друг друга и исключаются из рассмотрения.

Ввиду того, что равенство инертной и гравитационной масс имеет важное значение, оно было весьма тщательно проверено в различных экспериментах. К настоящему времени можно считать доказанным, что эти массы равны друг другу с точностью, не меньшей, чем  $10^{-12}$  их величины, т. е.  $| (m_g - m) / m_g | \leqslant 10^{-12}$ .

Равенство инертной и гравитационной масс имеет и другое следствие: если система отсчета находится в равноускоренном прямолинейном движении относительно инерциальной системы отсчета

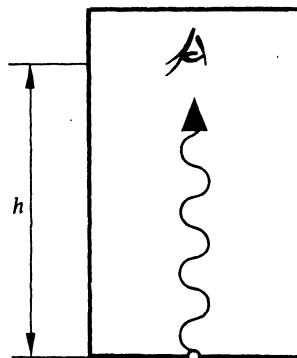
(в которой, по определению, отсутствуют поля тяготения), то явления в ней протекают так, как если бы имелось поле тяготения, ускорение свободного падения в котором равно ускорению системы отсчета. Для механических явлений это очевидно. Обобщение этого утверждения на все физические явления называется принципом эквивалентности.

**Принцип эквивалентности.** Принципом эквивалентности называется утверждение о том, что в некоторой системе отсчета наличие ускорения ее неотличимо от присутствия соответствующего поля тяготения.

Конкретное поле тяготения меняется при переходе от одной точки пространства к другой. Поэтому, вообще говоря, нельзя подобрать какую-то систему отсчета, которая движется таким образом, что ее ускорение в каждой точке пространства эквивалентно по своему действию с имеющимся там полем тяготения. Однако если необходимо рассмотреть поле тяготения в достаточно малой области пространства, то в первом приближении его можно считать постоянным в этой области. Поэтому в достаточно малой области пространства всегда можно воспользоваться принципом эквивалентности и сделать определенное заключение о ходе процессов. Проиллюстрируем это на красном смещении.

**Красное смещение.** В § 31 было рассмотрено отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. Однако поле тяготения оказывает также и другое важное действие на свет — изменяет его частоту. Неизбежность изменения частоты света в поле тяготения следует из принципа эквивалентности.

Представим себе следующий опыт в поле тяготения Земли. Из некоторой точки испускается луч света частоты  $\omega$ , распространяющийся в вертикальном направлении (рис. 157). Спрашивается, какой будет частота света на высоте  $h$ ? На этот



157.

К расчету величины красного смещения

!

Выражение «красное смещение» применяется в двух значениях: в одном — это эффект Доплера при удаляющемся источнике излучения (например, красное смещение в спектрах удаленных галактик), в другом — когда изменение частоты обусловлено полем тяготения.

вопрос ответить из общих соображений нельзя, поскольку неизвестно действие силы тяжести на частоту. Ответ можно дать с помощью принципа эквивалентности, исходя из того, что в отсутствие силы тяжести частота при распространении не изменяется.

Рассмотрим этот опыт в системе координат, которая свободно падает в однородном поле тяжести. В этой системе координат отсутствуют какие-либо силы и все процессы внутри системы происходят так же, как в инерциальной системе. Поэтому частота света при распространении не изменяется. Это означает, что наблюдатель, покоящийся в этой системе координат в точке на высоте  $h$ , должен воспринимать ту же частоту, которая была излучена в точке  $O$  той же системы координат.

Теперь проанализируем тот же опыт из лабораторной системы координат, связанной с Землей, в которой неинерциальная система координат свободно падает. Будем считать, что в момент испускания луча в точке  $O$  скорость этой системы равна нулю (но ускорение, конечно, не равно нулю, а равно ускорению свободного падения). За время  $\Delta t = h/c$  распространения луча от точки  $O$  до точки наблюдения на высоте  $h$  свободно падающая система координат приобретает скорость  $v = g\Delta t = gh/c$ . Следовательно, благодаря эффекту Доплера находящийся в этой системе наблюдатель должен воспринять излучение большей частоты, чем частота испущенного в точке  $O$  света на  $\Delta\omega = \omega(v/c)$ . Однако нам известно из анализа в неинерциальной системе, что он не наблюдает никакого изменения частоты. Отсюда можно заключить, что в процессе распространения света между точкой  $O$  и точкой на высоте  $h$  произошло уменьшение частоты испущенного света на величину  $\Delta\omega = -\omega gh/c^2$ . Для видимого света это означает сдвиг соответствующей частоты в сторону красного света спектра. Поэтому эффект уменьшения частоты света при распространении против силы тяжести называется красным смещением.

Величина его в земных условиях очень мала. При разности высот в 10 м для красного смещения получаем следующую оценку:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{10 \cdot 10}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 10^{-15}. \quad (65.3)$$

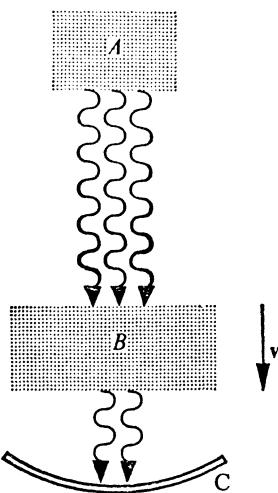
Заметить такое изменение частоты — примерно то же самое, что заметить недостачу одной секунды в ста миллионах лет. Тем не менее в 1960 г. удалось это ничтожное в земных условиях красное смещение надежно зафиксировать. Для этого был использован эффект Мёссбауэра, который заключается в том, что при определенных условиях фотоны излучаются практически без отдачи. Вопрос об отдаче при излучении был рассмотрен в § 44. Условие этого излучения без отдачи состоит в том, что импульс отдачи при излучении фотона воспринимается не отдельным атомом, а целой решеткой атомов. Эффект Мёссбауэра в том и состоит, что такие условия воз-

можны. Благодаря излучению без отдачи ширина линии излучения получается очень маленькой, т. е. испускаемые фотонами имеют разброс частоты в очень малой области. С другой стороны, поглощение фотона также произойдет только тогда, когда его частота почти точно равна частоте испускания без отдачи.

Пусть вещество *A* (рис. 158) излучает без отдачи фотоны некоторой частоты, а такое же вещество *B* при тех же условиях может поглощать фотоны той же частоты. Некоторое число фотонов проходит вещество *B*, не будучи поглощенными, и попадает на чувствительный приемник *C*, регистрирующий это число.

Допустим, что по каким-то причинам во время распространения фотонов между *A* и *B* их частота изменилась. Тогда они не смогут поглощаться веществом *B* и их число, попадающее на приемник *C*, резко возрастает. Таким образом, легко обнаруживается малейшее изменение частоты фотона при распространении между *A* и *B*. На той же установке можно измерить, на сколько изменилась частота излучения фотонов. Для этого необходимо вещество *B* перемещать по линии распространения луча с такой скоростью *v*, чтобы благодаря эффекту Доплера частота падающего на него света снова стала равной частоте резонансного поглощения. В этот момент снова резко возрастет поглощение и упадет интенсивность излучения, воспринимаемого приемником *C*. Эффект этот очень резко выражен, и скорость *v* фиксируется с большой точностью. Благодаря этому удается с большой точностью измерить изменение частоты света при распространении от *A* к *B*. В опытах 1960 г., повторенных затем неоднократно, высота источника *A* над детектором *B* составляла примерно 15 м. Красное смещение было уверенно зафиксировано и подтвердило формулу (65.3).

Сущность красного смещения можно также понять, применяя к фотонам света



158.

Схема опыта по обнаружению красного смещения в земных условиях

?

- 1 Какой физический фактор обуславливает возникновение невесомости при свободном падении?
- 2 Что такое гравитационная масса? Какие опыты показывают пропорциональность инертной и гравитационной масс?
- 3 В чем состоит принцип эквивалентности?
- 4 Что такое гравитационное красное смещение? Можете ли Вы вычислить его величину в простейшем случае с помощью принципа эквивалентности?
- 5 Какие экспериментальные доказательства гравитационного красного смещения Вы знаете?

понятие потенциальной энергии, как это было сделано в § 44. Энергия  $\epsilon$  фотона связана с частотной формулой  $\epsilon = h\omega$ . Фотон не может находиться в покое, и его масса покоя равна нулю. Масса же движущегося фотона по соотношению между массой и энергией равна  $h\omega/c^2$ . Следовательно, закон сохранения энергии фотона, движущегося в поле тяжести массы  $m$ , может быть записан в виде

$$h\omega - G \frac{(h\omega/c^2) m}{r} = h\omega_0, \quad (65.4)$$

где второй член левой части представляет потенциальную энергию фотона, находящегося на расстоянии  $r$  от шарообразной массы  $m$ ,  $\omega_0$  есть частота фотона на бесконечном расстоянии ( $r = \infty$ ). Отсюда получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - Gm/c^2 r}, \quad (65.5)$$

т. е. при удалении от тела, создающего поле тяготения, частота света уменьшается. Это и есть эффект красного смещения. При «падении» фотона на тело его частота увеличивается. Следует также отметить, что критическим значением радиуса тела в формуле (65.5), при котором она теряет смысл, является такое, которое обращает знаменатель в нуль. Но это значение радиуса равно гравитационному:  $r_{rp} = \sqrt{Gm/c^2}$ , о котором говорилось в § 30 в связи с «черными дырами».

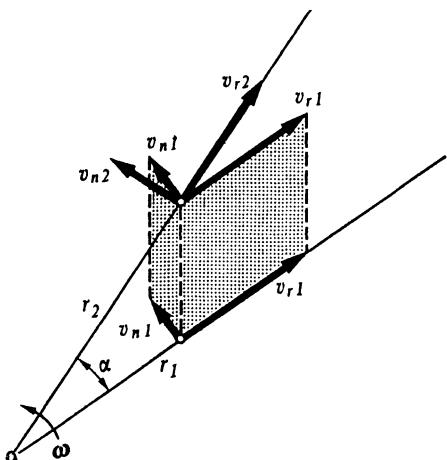
Красное смещение заметно при наблюдении излучения звезд, поскольку звезда имеет более сильное поле тяготения, чем Земля. Например, имеющиеся данные по излучению Сириуса подтверждают формулу красного смещения.

Не следует путать красное смещение, которое вызвано полем тяготения, с космологическим красным смещением, обусловленным расширением Вселенной.

## 66. Неинерциальные врачающиеся системы координат

**Кориолисово ускорение.** При рассмотрении неинерциальных систем координат, движущихся по прямой линии, соотношения между абсолютной, переносной и относительной скоростями и соответствующими ускорениями были совершенно одинаковыми [см. (64.2) и (64.3)]. У врачающихся систем дело обстоит сложнее. Отличие обусловливается тем, что переносная скорость различных точек врачающейся системы координат различна. Абсолютная скорость по-прежнему является суммой переносной и относительной скоростей:

$$v = v_0 + v', \quad (66.1)$$



159.

Ускорение Кориолиса обусловлено различным значением переносного ускорения в разных точках неинерциальной системы

а абсолютное ускорение в таком простом виде не представляется.

При перемещении из одной точки вращающейся системы координат в другую изменяется переносная скорость точки. Поэтому, если даже относительная скорость точки при движении не меняется, она должна испытывать ускорение, отличное от переносного. Это приводит к тому, что для вращающихся систем координат в выражение для абсолютного ускорения помимо суммы переносного и относительного ускорения входит еще одно ускорение  $w_K$ , называемое кориолисовым:

$$w = w_0 + w' + w_K. \quad (66.2)$$

**Выражение для кориолисова ускорения.** Для выяснения физической сущности кориолисова ускорения рассмотрим движение в плоскости вращения. Прежде всего нас интересует движение точки с постоянной относительной скоростью вдоль радиуса (рис. 159). На рис. 159 указаны положения точки в два момента времени, разделенных промежутком  $\Delta t$ , в течение которого радиус повернется

!

*Кориолисова сила, как сила инерции, направлена противоположно кориолисовому ускорению и приложена к телу.*

!

*Возможность разложения угловой скорости на составляющие обусловлена векторной природой угловой скорости.*

на угол  $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ . Скорость вдоль радиуса  $v_r$ , изменяется за это время по направлению, а скорость  $v_n$ , перпендикулярная радиусу, изменяется как по направлению, так и по абсолютному значению. Полное изменение составляющей скорости, перпендикулярной радиусу, равно

$$\begin{aligned}\Delta v_n &= v_{n2} - v_{n1} \cos \alpha + v_r \Delta\alpha = \omega r_1 - \omega r_2 \cos \alpha + v_r \Delta\alpha \approx \\ &\approx \omega(r_2 - r_1) + v_r \omega \Delta t = \omega \Delta r + v_r \omega \Delta t,\end{aligned}\quad (66.3)$$

где учтено, что  $\cos \alpha \approx 1$ .

Следовательно, кориолисово ускорение

$$w_K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \omega \frac{dr}{dt} + v_r \omega = 2v_r \omega. \quad (66.4)$$

В векторном виде это выражение, как это непосредственно видно из соотношения направлений различных величин на рис. 159, можно представить следующим образом:

$$w_K = 2[\omega, v'], \quad (66.5)$$

где  $v'$  — относительная скорость, в данном случае направленная вдоль радиуса.

В случае движения точки перпендикулярно радиусу, т. е. по окружности, относительная скорость  $v' = \omega r$ , а угловая скорость вращения точки в неподвижной системе координат равна  $\omega + \omega'$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращающейся системы координат. Для абсолютного ускорения получаем следующее выражение:

$$w = (\omega + \omega')^2 r = \omega^2 r + \omega'^2 r + 2\omega\omega' r. \quad (66.6)$$

Первый член в правой части представляет переносное ускорение, второй член — относительное ускорение. Последний член  $2\omega\omega' r = 2\omega v'$  является кориолисовым ускорением. Все ускорения в (66.6) направлены вдоль радиуса к центру вращения. С учетом направления кориолисова ускорение в (66.6) может быть записано в виде

$w_K = 2[\omega, v'],$

(66.7)

где  $v'$  — относительная скорость, в данном случае направленная перпендикулярно радиусу.

Произвольная скорость может быть выражена в виде суммы слагающих, направленных по радиусу и перпендикулярно ему, и для обеих составляющих справедлива одна и та же формула вида (66.7). Отсюда следует, что формула (66.7) справедлива для кориолисова ускорения при произвольном направлении относительной скорости.

Если скорость направлена параллельно оси вращения, то никакого кориолисова ускорения не возникает: поскольку при этом соседние точки траектории имеют одинаковую переносную скорость.

Можно получить выражение для кориолисова ускорения более формальным путем — прямым вычислением абсолютного ускорения. Записав радиус-вектор движущейся точки в виде

$$\mathbf{r} = i'x' + j'y' + k'z' \quad (66.8)$$

и дифференцируя по  $t$  с учетом зависимости  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  от времени так же, как это было сделано в § 52, получим для абсолютной скорости следующее выражение:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] + \mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad (66.9)$$

где  $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \mathbf{v}_0$  — переносная скорость, а

$$\mathbf{v}' = v'_x i' + v'_y j' + v'_z k' \quad (66.10)$$

— относительная скорость. Отсюда находим абсолютное ускорение:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'] + \mathbf{w}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'], \quad (66.11)$$

причем угловая скорость вращения считается постоянной и учтено что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{dv'_x}{dt} i' + \frac{dv'_y}{dt} j' + \frac{dv'_z}{dt} k' + v_x \frac{di'}{dt} + v_y \frac{dj'}{dt} + v_z \frac{dk'}{dt} = \\ &= \mathbf{w}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']. \end{aligned} \quad (66.12)$$

Поэтому абсолютное ускорение

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}' + \mathbf{w}_K, \quad (66.13)$$

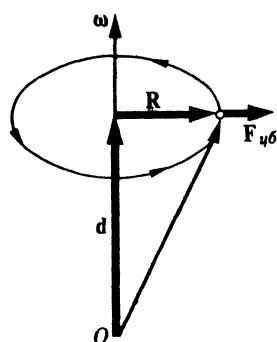
где  $\mathbf{w}_0 = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_0] = [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]]$  — переносное ускорение,  $\mathbf{w}' = \frac{dv'_x}{dt} i' + \frac{dv'_y}{dt} j' + \frac{dv'_z}{dt} k'$  — относительное ускорение,  $\mathbf{w}_K = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$  — кориолисово ускорение. Переносное ускорение целесообразно представить в виде

$$\mathbf{w}_0 = [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) - \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}^2 = \boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{d} - \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}, \quad (66.14)$$

где  $\mathbf{R}$  есть вектор, перпендикулярный оси вращения (рис. 160). Таким образом, переносное ускорение является центростремительным (напомним, что угловая скорость вращения считается постоянной).

**Силы инерции во вращающейся системе координат.** По общей формуле (63.4) можно найти силы инерции во вращающейся системе координат с учетом (66.13) для абсолютного ускорения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{in} &= m(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = m(-\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_K) \Rightarrow \\ &= m\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R} - 2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] = \mathbf{F}_{in, 6} + \mathbf{F}_K. \end{aligned} \quad (66.15)$$



Сила инерции, связанная с переносным ускорением,

$$F_{\text{ц.б}} = m\omega^2 R \quad (66.16)$$

называется центробежной силой инерции. Она направлена вдоль радиуса от оси вращения. Сила инерции, связанная с кoriолисовым ускорением,

$$F_K = -2m[\omega, v] \quad (66.17)$$

### 160.

Центробежная сила инерции

?

- 1      Какие силы инерции возникают во вращающейся неинерциальной системе координат?
- 2      Какие факторы обуславливают возникновение сил Кориолиса?
- 3      Производят ли работы силы Кориолиса? Центробежные силы?

называется силой Кориолиса. Она перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы угловой и относительной скоростей. Если эти векторы совпадают по направлению, то ускорение Кориолиса равно нулю.

Равновесие маятника на вращающемся диске. В качестве примера рассмотрим равновесное положение маятника на вращающемся диске (рис. 161, а). В неинерциальной системе координат на маятник действует центробежная сила инерции. Сила Кориолиса в положении равновесия отсутствует, и, следовательно, относительная скорость равна нулю ( $v' = 0$ ). Уравнение движения имеет вид

$$mw' = T + mg + F_{\text{ц.б}} = 0. \quad (66.18)$$

В инерциальной системе отсчета уравнение движения маятника, находящегося в равновесии, таково (рис. 161, б):

$$mw = T + mg. \quad (66.19)$$

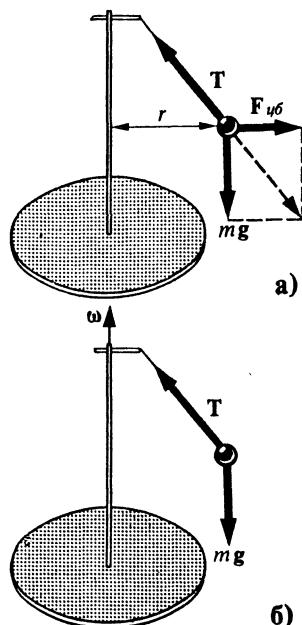
Непосредственно на рис. 161 видно, что  $\tan \alpha = \omega^2 r / g$ ,  $w = \omega^2 r$  ( $\alpha$  — угол между вертикалью и подвесом маятника).

Движение тела вдоль вращающегося стержня. Пусть жесткий стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов (рис. 162). К оси вращения тело прикреплено пружиной, и сила со стороны пружины пропорциональна расстоянию тела от оси вращения ( $f = -kr$ ).

Если  $k = m\omega^2$ , то центробежная сила инерции  $F_{цб} = m\omega^2r$  на любом расстоянии от оси вращения уравновешивается силой пружины. В этом случае тело вдоль стержня движется с постоянной скоростью  $v'$  (относительно стержня). Стержень несколько изгибается (рис. 162). Рассмотрим движение и силы в инерциальной (неподвижной) и неинерциальной (связанной со стержнем) системах координат.

В инерциальной системе координат на тело действуют две силы (рис. 162, а): 1) центростремительная сила  $f_{цс}$  со стороны пружины, направленная в каждый момент к оси вращения и равная  $m\omega^2r$ . Эта сила обеспечивает движение тела вокруг оси вращения; 2) сила со стороны изогнутого стержня  $F_{деф}$  (эта изогнутость для очень жесткого стержня может быть сколь угодно малой, но сила имеет конечное значение), которая сообщает телу ускорение  $w_K$ , являющееся кориолисовым. Это обычная сила, обусловленная деформацией стержня.

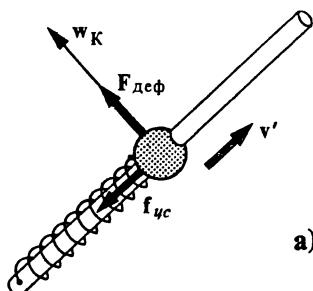
В неинерциальной системе координат, связанной с вращающимся стержнем, имеются четыре силы, которые взаимно уравновешиваются, в результате чего тело движется в этой системе равномерно, без ускорений (рис. 162, б): 1) центробежная сила инерции  $F_{цб} = m\omega^2r$ , направлена вдоль стержня от оси вращения; 2) центростремительная сила  $f_{цс}$  со стороны пружины, равная  $kr = m\omega^2r$  и направленная вдоль стержня к оси вращения; 3) кориолисова сила инерции  $F_K$ , приложенная к телу. Следует подчеркнуть, что эта сила приложена именно к телу, а не к стержню. Он изогнут за счет обычного взаимодействия деформированных тел, а не потому, что к нему приложена сила Кориолиса. Ситуация здесь совершенно аналогична случаю тела, лежащего на столе: сила тяжести приложена к телу, а на стол со стороны тела действует сила, обусловленная его деформацией, а отнюдь не сила тяжести; 4) со-



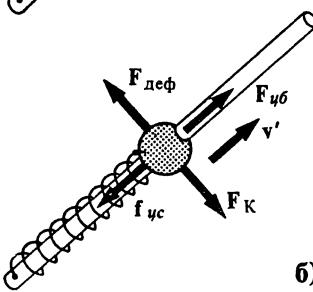
161.

Равновесие маятника во вращающейся системе отсчета:

а — в неинерциальной; б — инерциальной



a)



б)

162.

Сила Кориолиса  $F_K$  приложена к телу и направлена противоположно кориолисову ускорению  $w_K$

?

- 1 | Какие два типа траекторий при колебаниях маятника Фуко можно осуществить и как?
- 2 | Можете ли Вы указать проявления сил инерции при движении тел вблизи земной поверхности?

стороны изогнутого стержня к телу приложена сила  $F_{\text{деф}}$ , обусловленная деформацией штанги. Эта сила равна силе Кориолиса, но противоположна ей по направлению.

Неинерциальная система координат, связанная с поверхностью Земли. Поскольку Земля вращается, система координат, связанная с ее поверхностью, является неинерциальной вращающейся системой координат.

Угловую скорость вращения в любой точке поверхности удобно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие (рис. 163):  $\omega = \omega_b + \omega_r$ . На широте  $\varphi$  эти составляющие равны соответственно:  $\omega_r = \omega \cos \varphi$ ,  $\omega_b = \omega \sin \varphi$ .

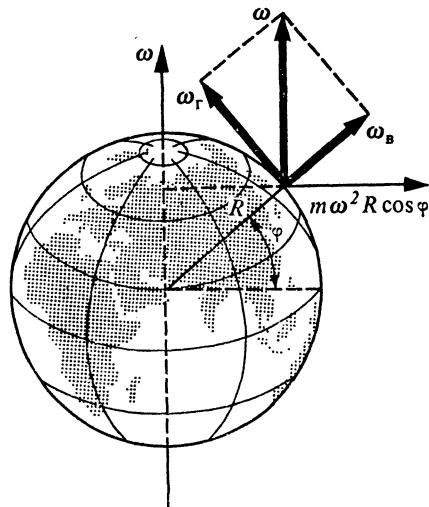
Центробежная сила инерции, равная  $m\omega^2 R \cos \varphi$ , где  $R$  — радиус Земли, лежит в плоскости меридiana. В северном полушарии она отклонена от вертикали к югу на угол  $\varphi$ , в южном — к северу на тот же угол. Таким образом, вертикальная составляющая этой силы изменяет силу тяжести, а ее горизонтальная составляющая направлена по касательной к поверхности Земли вдоль меридiana к экватору.

Сила Кориолиса зависит от относительной скорости тела. Эту скорость удобно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие:  $v' = v_b + v_r$ . Тогда сила Кориолиса может быть представлена в виде

$$F_K = -2m[\omega_b + \omega_r, v_b + v_r] = \\ = -2m[\omega_b, v_r] - 2m[\omega_r, v_b] - \\ - 2m[\omega_r, v_r], \quad (66.20)$$

где учтено, что  $[\omega_b, v_b] = 0$ .

Вертикальная составляющая скорости  $v_b$  обуславливает возникновение составляющей силы Кориолиса  $-2m[\omega_r, v_b]$  в горизонтальной плоскости перпендикулярно плоскости меридiana. Если тело движется вверх, то сила направлена на запад, а если вниз — то на восток. Поэ-



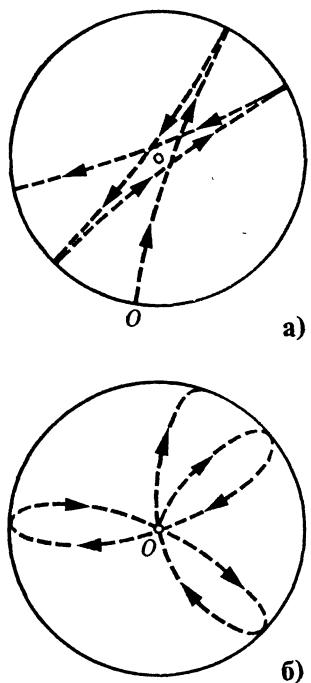
163.

Система координат, связанная с поверхностью Земли

тому свободно падающее с достаточно большой высоты тело отклоняется на восток от вертикали, направленной в центр Земли. Эта сила, отклоняющая тело от вертикали, очевидно, равна  $2m\omega \cos \varphi v_b'$ .

Горизонтальная составляющая скорости  $v_g'$  обусловливает возникновение двух составляющих силы Кориолиса. Составляющая, равная  $-2m[\omega_r, v_g']$ , зависит от горизонтальной составляющей угловой скорости вращения Земли и направлена вертикально. Эта сила либо прижимает тело к Земле, либо, наоборот, стремится удалить его от поверхности Земли в зависимости от направлений векторов  $\omega_r$  и  $v_g'$ . Эту силу необходимо принимать во внимание при движении тел на достаточно большие расстояния, например при полете баллистических ракет.

Вторая составляющая силы Кориолиса, связанная с горизонтальной составляющей скорости движения  $v_g'$ , равна  $-2m[\omega_b, v_g']$ . Она является горизонтальной силой, перпендикулярной скорости. Если смотреть вдоль скорости, то в северном полушарии она всегда направлена вправо. Вследствие этого, например, у рек в се-



164.

Кривые, описываемые концом маятника Фуко, в случаях, если он начал движение (точка  $O$ ) из отклоненного положения без начальной скорости (а) и из положения равновесия с некоторой начальной скоростью (б)

верном полушарии правый берег подмыт сильнее, чем левый. Сила Кориолиса, приложенная к движущимся молекулам воды, сообщает им ускорение, направленное к правому берегу. В результате этого вода приобретает некоторую скорость к берегу и набегает на него. Аналогичным образом объясняется неодинаковое изнашивание рельсов двухколейной железной дороги, если поезда движутся по ним в одном направлении. Важным проявлением действия этой составляющей силы Кориолиса является изменение положения плоскости колебаний маятника относительно поверхности Земли.

**Маятник Фуко.** Рассмотрим колебание маятника с учетом действия на него горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Проекция материальной точки маятника на горизонтальную плоскость движется по кривым, показанным на рис. 164. Различие кривых объясняется следующим образом.

Если маятник отклонен от положения равновесия и отпущен с нулевой начальной скоростью относительно наблюдателя, движущегося вместе с Землей, то он начинает двигаться к центру равновесия. Однако сила Кориолиса отклоняет его вправо и он не проходит через центральную точку. В результате проекция материальной точки маятника движется по кривой, показанной на рис. 164, а.

Однако можно привести маятник в движение другим способом: сообщить ему скорость в точке равновесия. Характер его движения при этом изменится. При удалении от центра сила Кориолиса сообщает ему ускорение вправо. Благодаря этому к моменту отклонения маятника в крайнее положение, когда его скорость вдоль радиуса от центра качания обращается в нуль, он приобретает максимальную скорость в направлении перпендикулярном радиусу. В результате этого траектория маятника касается окружности, радиус которой равен максимальному сме-

щению его от положения равновесия. При этом движение проекции происходит по траектории, изображенной на рис. 164, б.

Отклонение направления качаний маятника за одно колебание очень невелико. Весь процесс представляется как вращение плоскости качаний маятника вокруг вертикали.

Колебания маятника Фуко можно рассмотреть также в инерциальной системе координат, связанной с неподвижными звездами. Относительно неподвижных звезд плоскость колебания маятника сохраняет свое положение неизменным. В результате вращения Земли меняется положение плоскости качаний маятника относительно ее поверхности, которое фиксируется маятником Фуко. На полюсе это изменение легко себе представить. Для произвольной точки земной поверхности это сделать несколько труднее, но дело происходит точно так же, как и на полюсе, только угловой скоростью вращения является  $\omega_b$ .

Угловая скорость вращения плоскости качаний маятника равна  $\omega_b$ . Поэтому на полюсе один оборот совершается за сутки, а на широте  $\phi$  — за  $1/\sin \phi$  суток. На экваторе плоскость качаний маятника Фуко не вращается.

**Законы сохранения в неинерциальных системах.** При рассмотрении законов сохранения энергии, импульса и момента импульса в гл. 6 было подчеркнуто, что в механике они являются математическим следствием уравнений движения.

Энергия, импульс и момент импульса системы материальных точек сохраняют свое значение для замкнутых систем, т. е. в том случае, если нет внешних сил и момента внешних сил. Если имеются внешние силы, то энергия, импульс и момент импульса системы изменяются.

В неинерциальных системах отсчета наряду с «обычными» силами действуют силы инерции. Эти силы всегда являются внешними по отношению к рассматриваемым телам. Следовательно, в этих системах не существует замкнутых систем материальных тел и поэтому нет законов сохранения энергии, импульса и момента импульса в обычном смысле.

Однако нет никаких препятствий включить силы инерции в число сил системы и считать после этого систему замкнутой. Силы инерции в соответствии с уравнением (63.2) должны учитыватьсь точно так же, как обычные силы. В частности, при расчете изменения энергии необходимо учитывать работу сил инерции, принимать во внимание момент сил инерции в уравнении моментов и т. д.

Характер законов сохранения в неинерциальных системах зависит от свойств сил инерции. Во вращающейся с постоянной угловой скоростью неинерциальной системе координат силы инерции, связанные с переносным ускорением, являются центральными силами (точнее, осевыми, направленными по прямой от оси вращения). Как было уже показано ранее, центральные силы всегда потен-

циальны. С другой стороны, сила инерции Кориолиса перпендикулярна скорости частицы и поэтому не совершает работы. Следовательно, во вращающейся с постоянной скоростью неинерциальной системе отсчета справедлив закон сохранения энергии, если только паряду с обычной потенциальной энергией принять во внимание потенциальную энергию, связанную с силами инерции. Нетрудно видеть, что закон сохранения энергии может быть также сформулирован и в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно, равномерно и прямолинейно, если только учесть работу сил инерции.

При рассмотрении изменения импульса и момента импульса необходимо включить в уравнения силы инерции и их момент. Для обеспечения сохранения этих величин надо, чтобы силы инерции удовлетворяли тем же требованиям, которым должны удовлетворять с точки зрения законов сохранения в инерциальных системах обычные силы.

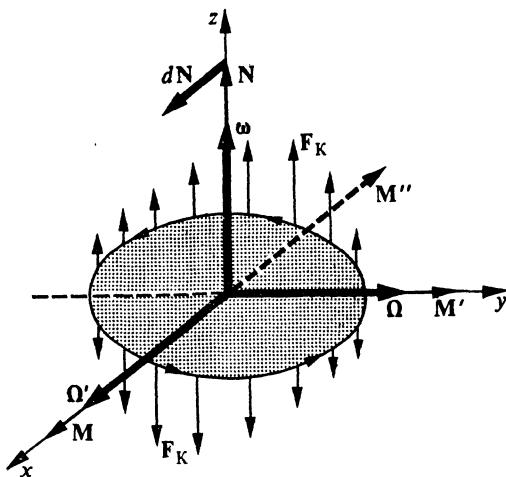
## 67. Гирокопические силы

В § 52 было рассмотрено движение гироскопов. Теперь обсудим природу гирокопических сил. Они обусловлены силами Кориолиса.

Пусть имеется вращающийся диск (рис. 165), угловая скорость вращения которого совпадает с осью  $z$ . Будем считать диск состоящим из материальных точек массы  $m$ . Приложим к диску момент сил  $M$ , направленный в сторону положительных значений оси  $x$ . Под действием этого момента диск стремится начать вращаться вокруг оси  $x$  с некоторой угловой скоростью  $\Omega'$ . Благодаря этому на движущиеся точки диска начинают действовать силы Кориолиса  $F_K = -2m [\Omega', v']$ . Они создают момент сил вдоль оси  $y$ , приводящий к вращению диска вокруг этой оси с угловой скоростью  $\Omega$ , в результате чего вектор момента импульса  $N$  движется в направлении вектора  $M$ , т. е. осуществляется то прецессионное движение, которое совершает ось гироскопа под действием приложенного к ней внешнего момента. Поэтому можно сказать, что гирокопические силы являются силами Кориолиса.

Чтобы проследить более подробно процесс возникновения гирокопических сил, выведем их величину, исходя непосредственно из расчета сил Кориолиса. На рис. 166 показано распределение скоростей точек движущегося диска со стороны положительных значений оси  $z$ . Силы Кориолиса в различных точках диска сверху от оси  $y$  направлены перпендикулярно плоскости чертежа к нам, а ниже оси  $y$  — от нас. Далее, учитывая, что  $F_K = -2m [\Omega', v']$  и  $v' = \omega r$ , можно для сил Кориолиса в точке  $(r, \phi)$  написать следующее выражение:

$$F_K = 2m\Omega'v' \sin \phi = 2m\Omega'\omega r \sin \phi. \quad (67.1)$$



165.

Гироскопические силы обусловлены силами Кориолиса

Поэтому для момента силы Кориолиса рассматриваемой точки относительно оси  $y$  получаем такую формулу:

$$M'_y = 2m\Omega'\omega r^2 \sin^2 \varphi. \quad (67.2)$$

Учитывая, что за один оборот среднее значение  $\langle \sin^2 \varphi \rangle = 1/2$ , можно написать выражение для  $\langle M'_y \rangle$ :

$$\langle M'_y \rangle = mr^2\Omega'\omega = N\Omega', \quad (67.3)$$

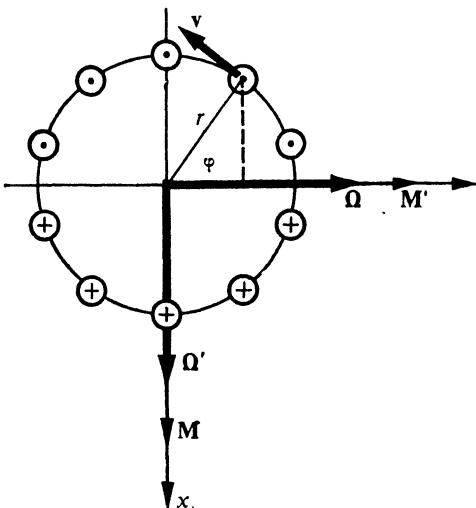
где принято во внимание, что  $mr^2 = I$  есть момент инерции материальной точки относительно оси вращения, а  $N = I\omega$  — момент импульса вращающейся точки относительно той же оси. Если произвести суммирование по всем точкам диска, то формула (67.3) не изменится, надо лишь в ней под  $\langle M'_y \rangle$  понимать полный момент сил Кориолиса, действующих на диск, относительно оси  $y$ . Величина  $N$  в этом случае означает момент импульса диска. Силы Кориолиса, как это видно на рис. 165, создают также моменты сил относительно оси  $x$ , но сумма этих моментов равна нулю и, следовательно, их можно не учитывать.

?

1

Можете ли Вы объяснить возникновения гироскопических сил? Какова природа гироскопических сил?

2



166.

К расчету момента сил Ко-риолиса

?

- 1 Чем уравновешивается момент внешних сил при прецессии гироскопа?
- 2 Можете ли Вы объяснить, почему прецессионное движение гироскопа неинерциально, т. е. прецессия прекращается мгновенно, как только прекращает действовать момент внешних сил, вызывающих прецессию?

Под влиянием момента сил  $\langle M' \rangle$  диск начинает вращаться вокруг оси  $y$ . Это вращение, аналогично предыдущему, приводит к возникновению момента сил Кориолиса относительно оси  $x$  по направлению, противоположному первоначально приложенному моменту сил. Угловая скорость вращения увеличивается до тех пор, пока возникший относительно оси  $x$  момент сил Кориолиса не скомпенсирует первоначально приложенный момент. Для этого в соответствии с (67.3) должно быть выполнено соотношение

$$M = N\Omega, \quad (67.4)$$

где  $M$  — момент внешних сил относительно оси  $x$ ,  $\Omega$  — угловая скорость вращения диска вокруг оси  $y$ . Таким образом, момент сил относительно оси  $x$  никакого вращения диска вокруг этой оси не вызывает, а вызывает вращение вокруг оси  $y$ . Как видно на рис. 166, конец вектора  $N$  движется в направлении вектора  $M$ . Учитывая, что  $\Omega = d\alpha/dt$ ,  $dN = N d\alpha$  (см. рис. 165), можно соотношение (67.4) переписать в виде  $M = dN/dt$  или, принимая во внимание пространственные на-

правления векторов, непосредственно видные на рис. 165, в векторной форме:

$$d\mathbf{N}/dt = \mathbf{M}. \quad (67.5)$$

Это уравнение моментов, с помощью которого в § 52 было подробно рассмотрено движение гирокопа.

Таким образом, можно сказать, что прецессионное движение оси гирокопа вызывается силами Кориолиса. При установившейся прецессии угловая скорость движения оси гирокопа обуславливает возникновение момента сил Кориолиса, который равен моменту внешних сил, действующих на гирокоп, но направлен противоположно и их уравновешивает.

# ЗАДАЧИ

---

## К главе 2

**2.1.** Радиусы-векторы трех последовательных вершин правильного шестиугольника равны  $\mathbf{r}_1 = 0$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$ . Найдите радиусы-векторы остальных вершин.

**2.2.** Найдите углы между пепулевыми векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в случаях:

- $3\mathbf{A} + 5\mathbf{B} = 0$ ;
- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ ;
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ ,  $|\mathbf{B}| = 2 |\mathbf{A}|$ ;
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ .

**2.3.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на поверхности сферы единичного радиуса с центром в точке  $O$ . Углы  $BOC$ ,  $COA$  и  $AOB$  обозначены соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Найдите угол между плоскостями  $OAB$  и  $OAC$ .

**2.4.** Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор движущейся точки,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ . Докажите, что  $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}/r^3$ .

**2.5.** Камень должен перелететь через два забора высотами  $h_1$  и  $h_2 > h_1$  со стороны забора меньшей высоты. Расстояние между верхними точками заборов, вблизи которых проходит траектория камня, равно  $l$ . Найдите минимальную начальную скорость камня.

**2.6.** Стержень длиной  $l$  скользит своими концами по направляющим, составляющим между собой прямой угол. Какую кривую описывает точка стержня, находящаяся на расстоянии  $\alpha l$  ( $\alpha < 1$ ) от одного из его концов?

**2.7.** С поверхности земли бросают с минимально допустимой скоростью камень через препятствие высотой  $h$ , находящееся на расстоянии  $l$  от точки броска. На каком расстоянии от препятствия камень упадет на землю после перелета через него?

**2.8.** Снаряд выпускают со скоростью  $u$  по цели, лежащей в той же горизонтальной плоскости, что и пушка. При паводке допущены ошибки, составляющие  $\epsilon$  радиан в угле наклона ствола и  $2\epsilon$  радиан в направлении на цель в горизонтальной плоскости. На каком расстоянии от цели упадет снаряд?

**2.9.** От колеса радиусом  $a$  у автомобиля, движущегося со скоростью  $u$ , отскакивают комки грязи ( $u^2 \geq ga$ ). Найдите максимальную высоту, на которую они забрасываются.

**2.10.** Камень бросают с поверхности земли со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к поверхности. Приняв точку броска за начало полярной системы координат  $(r, \theta)$ , где  $r$  — расстояние от 0 до камня,  $\theta$  — угол между поверхностью земли и радиусом-вектором камня, найдите уравнение траектории камня.

**2.11.** Стержень длиной  $l$  скользит своими концами по направляющим, составляющим между собой прямой угол. В некоторый момент времени скорость одного из концов стержня равна  $v$ , а угол между стержнем и направляющей, по которой скользит другой конец стержня, равен  $\theta$ . На каком расстоянии от первого конца стержня находится точка, движущаяся с минимальной скоростью, и чему равна эта скорость?

**2.12.** В пространстве между коаксиальными круглыми цилиндрами радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) помещен цилиндр радиусом  $(r_2 - r_1)/2$ . Внутренний и внешний цилиндры вращаются вокруг их оси с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Предполагая, что между соприкасающимися поверхностями цилиндра радиусом  $(r_2 - r_1)/2$  и коаксиальных цилиндров нет проскальзывания, найдите угловую скорость вращения цилиндра радиусом  $(r_2 - r_1)/2$  вокруг его оси и угловую скорость вращения точек его оси вокруг оси коаксиальных цилиндров.

**2.13.** Твердое тело, одна из точек которого закреплена в начале декартовой системы координат, последовательными вращениями вокруг оси  $X$  на угол  $\pi/2$  и вокруг оси  $Y$  на угол  $\pi/2$  приведено в новое положение. Как надо направить ось вращения и на какой угол повернуть тело вокруг этой оси, чтобы осуществить такой же перевод тела в новое положение одним вращением?

**2.14.** Твердое тело поворачивается на угол  $\phi$  вокруг оси, проходящей через начало координат. Единичный вектор  $n$  направлен по оси вращения. Направления вращения и вектора  $n$  связаны правилом правого винта. Найдите радиус-вектор некоторой точки тела после перевода тела, если до поворота он был равен  $r$ .

**2.15.** Частица движется на плоскости с постоянным радиальным ускорением  $a$ , направленным от центра, и с нормальным ускорением  $2v\omega$ , где  $\omega$  — положительная постоянная,  $v$  — скорость частицы. Принимая направление ускорения в начале системы координат в качестве полярной оси, получите уравнение траектории частицы.

**2.16.** Два колеса радиусом  $r_0$  каждый насыжены на ось длиной  $l$ . Колеса на оси могут вращаться независимо. Они катятся по горизонтальной поверхности без проскальзывания, причем скорости центров колес равны  $v_1$  и  $v_2$ . Найдите модули угловых скоростей колес.

**2.17.** В пространстве между двумя концентрическими сферами радиусами  $r_1$  и  $r_2 > r_1$  находится шар радиусом  $(r_2 - r_1)/2$ . Концентрические сферы вращаются с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а шар катится между сферами без скольжения. Какую кривую описывает центр шара и с какой угловой скоростью он движется?

**2.18.** В самолете, летящем горизонтально и прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ , через промежуток времени  $t$  в зрительную трубу производятся два наблюдения одного и того же предмета на Земле. Известно, что предмет расположен в вертикальной плоскости, проведенной через траекторию полета самолета. Наблюдаемый предмет неподвижен относительно Земли. Углы между вертикалью и направлением зрительной трубы на предмет в моменты наблюдения равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Найдите высоту полета самолета.

**2.19.** Прямолинейный отрезок  $AB$  движется в плоскости. Скорости его концов в некоторый момент времени образуют с прямой  $AB$  углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Модуль скорости точки  $A$  равен  $v$ . Определите модуль скорости точки  $B$ .

**2.20.** По неподвижному обручу радиусом  $R_1$  с угловой скоростью  $\omega$  катится без скольжения обруч радиусом  $R_2$ , причем центры обрущей находятся по разные стороны от точки их соприкосновения. Определите скорость перемещения точки соприкосновения по неподвижному обручу.

**2.21.** Решите задачу 2.20 для случая, когда центры обрущей лежат по одну и ту же сторону от точки соприкосновения и  $R_2 < R_1$ .

**2.22.** Цилиндр радиусом  $R$  вращается без скольжения между двумя параллельными досками, которые движутся в одном и том же направлении перпендикулярно образующим цилиндра со скоростями  $v_1$  и  $v_2 > v_1$  вдоль своих длии. Найдите угловую скорость вращения цилиндра и скорость его оси.

## К главе 3

**3.1.** Самолет пролетает расстояние  $l$  в северном направлении за время  $t_1$  и в обратном направлении за время  $t_2$ , так как дует северо-восточный ветер. Найдите скорость самолета при отсутствии ветра и скорость ветра.

**3.2.** При отсутствии ветра скорость самолета  $v$  и дальность полета  $l$ . Какова дальность полета, если дует встречный ветер со скоростью  $u$ , направленной под углом  $\phi$  к траектории движения самолета относительно земли?

## К главе 4

**4.1.** Две материальные точки, покоящиеся на оси  $X$  неподвижной системы координат на расстоянии 100 м друг от друга, начинают одновременно ускоряться по одинаковому закону в направлении положительных значений оси  $X$ . Ускорение одновременно прекращается, когда скорости точек достигают значения  $v = (1 - 2 \cdot 10^{-4})\text{с}$ . Каково расстояние между точками в системе координат, в которой они покоятся?

**4.2.** Протон пролетает расстояние  $l = 1,5 \cdot 10^8$  км между Солнцем и Землей со скоростью  $v = \frac{4}{5} c$ . Каким представляется это расстояние в системе координат, связанный с протоном? Какое время необходимо на прохождение этого расстояния в системах координат, связанных с Землей и протоном?

**4.3.** Два прожектора испускают узкие пучки света в противоположных направлениях. С какой скоростью эти прожекторы должны двигаться в направлении, перпендикулярном лучам, чтобы пучки света были направлены под прямым углом друг к другу?

**4.4.** Две частицы, движущиеся друг за другом со скоростью  $v = \frac{3}{5} c$ , попадают на мишень с интервалом времени  $10^{-7}$  с. Найти расстояние между частицами в лабораторной системе координат и в системе координат, связанный с частицами.

**4.5.** В точках  $(x'_1, 0, 0)$  и  $(x'_2, 0, 0)$  в системе  $K'$  находятся часы  $A'$  и  $B'$  ( $x'_2 - x'_1 = l$ ), а в точках  $(x_1, 0, 0)$  и  $(x_2, 0, 0)$  в системе  $K$  — часы  $A$  и  $B$  ( $x_2 - x_1 = l$ ). Система  $K'$  движется относительно  $K$  в направлении положительных значений оси  $X$  со скоростью  $v$ . В момент пространственного совмещения часы  $B'$  и  $A$  показывают одинаковое время (например,  $t' = t = 0$ ). Каковы показания часов  $A$  и  $A'$  при их пространственном совмещении и часов  $B$  и  $B'$  при их пространственном совмещении?

**4.6.** Ракета движется прямолинейно с постоянным ускорением  $a$ , измеренным ее пассажирами по акселерометру, находящемуся на ракете. Какой путь пройдет ракета в лабораторной системе координат до достижения скорости  $v$ ?

**4.7.** Два масштаба с одинаковой собственной длиной  $l$  движутся вдоль оси  $X$  навстречу друг другу с равными скоростями  $v$ . Какова длина одного из масштабов в системе координат, связанный с другим масштабом?

**4.8.** Поезд движется со скоростью  $v$  относительно полотна железной дороги. Вдоль поезда в направлении его движения летит птица с той же скоростью  $v$  относительно поезда. В том же направлении летит самолет с такой же скоростью  $v$  относительно птицы. Какова скорость самолета относительно полотна железной дороги?

## К главе 5

**5.1.** Кольцо может скользить без трения вдоль недеформируемого прута. Прут вращается с угловой скоростью  $\omega$  в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно длине прута. Расстояние от оси вращения до кольца обозначим  $r$ . Считая, что при  $t = 0$  кольцо покоятся в точке  $r = 0$  и прут от оси вращения направлен вертикально вниз, найдите  $r(t)$ .

**5.2.** Плоское основание круглого прямого цилиндра радиусом  $r_0$  жестко скреплено с горизонтальной поверхностью стола. Тонкая невесомая и нерастяжимая нить длиной  $2l$  жестко закреплена на поверхности цилиндра в его основании и тую намотана на цилиндр у основания на длине  $l$  (толщиной нити пренебрегаем). На другом конце нити укреплен груз массой  $m$ , который может двигаться в горизонтальной плоскости так, что нить все время находится под воздействием силы натяжения. В начальный момент  $t = 0$  грузу сообщается скорость  $u$  перпендикулярно не намотанной на цилиндр части нити в таком направлении, чтобы при движении груза нить разматывалась. Через какое время нить размотается и какова при этом зависимость натяжения нити от времени?

**5.3.** Человек бросает вертикально вверх ядро массой  $m$  с плеча. При затрате определенных усилий ядро при броске на Земле поднимается на высоту 4 м над ее поверхностью. Длина руки человека 0,75 м, высота человека до плеча 1,5 м. На какую высоту этот человек забросит ядро на поверхности Луны при тех же условиях? Ускорение свободного падения на Луне примерно в шесть раз меньше, чем на Земле.

**5.4.** Материальная точка начинает скользить без трения по поверхности жестко закрепленной сферы с ее верхней точки. Положение скользящей точки может быть охарактеризовано углом  $\theta$  между вертикалью и радиусом-вектором точки с началом в центре сферы. При каком значении  $\theta$  материальная точка теряет контакт с поверхностью сферы и начинает двигаться свободно под действием силы тяжести?

**5.5.** Две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены нерастяжимой невесомой нитью, продетой через кольцо массой  $m_3$ , и лежат рядом на горизонтальном столе, а кольцо висит на нитях, спускающихся через край стола. Нити подходят по перпендикуляру к краю стола. Трение отсутствует. Найдите ускорение кольца.

**5.6.** Абсолютно жесткая прямая трубка  $OA$  длиной  $l$  вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $O$ , с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Из точки  $O$  по трубке начинает скользить шарик с начальной скоростью  $u$  без трения. Найдите угол между направлением трубки и направлением шарика в тот момент, когда шарик вылетает из трубы.

**5.7.** Две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены абсолютно жестким невесомым прутом и лежат на горизонтальной абсолютно гладкой поверхности. К точке массой  $m_1$  прикладывается импульсная сила  $\tilde{F}$  в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с линией, соединяющей точки, в которых расположены массы  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите модули скоростей масс  $m_1$  и  $m_2$  непосредственно после удара. (Импульсная сила — сила, которая в течение очень короткого времени  $\delta t$  сообщает системе импульс  $\tilde{F} = F \delta t$  в направлении силы  $F$ .)

## К главе 6

**6.1.** Вычислите значение интеграла  $\int\limits_L xy^2 dy$ , где  $L$  — окружность  $x^2 +$

$+ y^2 = 1$ , проходимая при интегрировании против часовой стрелки.

**6.2.** Вычислите работу силы  $\mathbf{F} = \mathbf{i}_x y^2 + \mathbf{i}_y x^2$  по полуокружности  $y = \sqrt{1 - x^2}$  между точками  $(0, -1)$  и  $(0, 1)$ .

**6.3.** Найдите длину винтовой линии, заданной параметрически:  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = t$  при  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**6.4.** Человек массой  $m_1$  стоит в неподвижном лифте массой  $m_2$ , уравновешенном противовесом массой  $m_1 + m_2$ . Человек подпрыгивает в лифте с таким же усилием, при котором в условиях прыжка на поверхности земли его центр масс переместился бы вверх на высоту  $h$ . На сколько переместится его центр масс относительно пола лифта? Массами тросов и блоков в механизме лифта и трением пренебречь.

**6.5.** Выразите импульс частицы через ее кинетическую энергию  $E_k$  и массу  $m_0$ .

**6.6.** Выразите скорость частицы через ее импульс и массу покоя.

**6.7.** Найдите скорость частицы с зарядом  $e$  и массой  $m_0$  после прохождения разности потенциалов  $U$ .

**6.8.** Чему равна энергия связи ядра лития, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, если известно, что его масса равна  $1,16445 \cdot 10^{-26}$  кг. Массы протона и нейтрона равны соответственно  $1,67265 \cdot 10^{-27}$  кг и  $1,67495 \cdot 10^{-27}$  кг.

**6.9.** В лабораторной системе координат вдоль одной линии павстречу друг другу движутся с релятивистскими скоростями две частицы, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ . Полные энергии частиц равны  $E_1$  и  $E_2$ . Найдите энергию  $E'_1$  частицы в системе координат, в которой вторая частица поконится ( $E'_2 = m_2 c^2$ ).

**6.10.** Покоящаяся частица массой  $m_1$  распадается на две частицы, массы которых  $m_2$  и  $m_3$ . Найдите энергию образовавшихся частиц и модули их противоположных направлений импульсов.

## К главе 7

**7.1.** Найдите отношение времен прохождения участков эллиптической орбиты, разграничиваемых малой полуосью эллипса.

**7.2.** Найдите разность времен прохождения участков эллиптической орбиты Земли, разграничиваемых малой полуосью эллипса. Эксцентриситет земной орбиты  $e = 0,017$ .

**7.3.** Период обращения тела по круговой орбите около центра тяготения равен  $T$ . Вычислите время падения тела с орбиты на центр тяготения, если бы скорость тела мгновенно стала равной нулю.

**7.4.** Тело движется по круговой орбите радиусом  $r$  около центра тяготения. Период обращения  $T$ . В некоторой точке орбиты направление скорости мгновенно изменяется на угол, меньший  $\pi$ , без изменения модуля скорости. По какой траектории и с каким периодом будет двигаться тело после этого?

**7.5.** Минимальное расстояние  $l$  приближения кометы к Солнцу меньше, чем радиус земной орбиты  $r_3$  (т.е.  $l < r_3$ ). В течение какого времени расстояние от кометы до Солнца меньше  $r_3$ ?

**7.6.** При движении тела в центральном поле тяготения производится мгновенное изменение значения его скорости на  $\delta v_1$  в перигелии ( $r_1$ ) и на  $\delta v_2$  в афелии ( $r_2$ ) без изменения направления. У новой орбиты значения  $r_1$  и  $r_2$  будут иными. Чему равны  $\delta r_1$  и  $\delta r_2$ ?

**7.7.** Снаряд выстреливается с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью  $v$ . При достижении верхней точки траектории он в результате внутреннего взрыва распадается на две равные части, движущиеся в начальный момент со скоростями  $u$ . Каково максимальное расстояние между точками падения этих частей снаряда на землю?

## К главе 8

**8.1.** Точечный источник испускает частицы массой  $m$  и зарядом  $e$  в узком конусе, параллельно оси которого направлен вектор индукции  $\mathbf{B}$  однородного магнитного поля. Принимая, что компоненты скорости всех частиц, параллельные вектору индукции, одинаковы и равны  $v$ , найдите расстояние от источника до точки, в которой частицы фокусируются.

**8.2.** Чему равна длина пробега до остановки релятивистской частицы с зарядом  $e$  в тормозящем однородном электрическом поле напряженностью  $E$ ? Скорость частицы коллинеарна вектору  $\mathbf{E}$ , начальная полная энергия частицы  $W$ , ее масса  $m_0$ .

## К главе 9

**9.1.** Покоящаяся частица массой  $m_0$  распадается на две частицы с массами  $m_{10}$  и  $m_{20}$ . Найдите кинетическую энергию продуктов распада.

**9.2.** Частица с массой  $m_{01}$  и энергией  $E$  падает на покоящуюся частицу с массой  $m_{02}$ . Найдите скорость системы центра масс.

**9.3.** Частица с массой  $m_{01}$ , движущаяся со скоростью  $v$ , падает на покоящуюся частицу массой  $m_{02}$ . Удар абсолютно неупругий. Найдите массу и скорость образовавшейся в результате удара частицы.

**9.4.** Частица с массой  $m_0$  упруго сталкивается с покоящейся частицей той же массы и рассеивается на угол  $\theta$ . Найдите кинетическую энергию частицы после рассеяния, если до рассеяния она была  $E_k$ .

## К главе 10

**10.1.** Капля дождя начинает в момент  $t = 0$  падать в воздухе, содержащем покоящиеся пары воды. Во время падения из-за конденсации пара на капле масса последней возрастает по закону  $m = m_0 + \alpha t$ . На движущуюся каплю действует сила трения  $F_{tp} = -mkv$ . Найдите скорость  $v(t)$  капли.

**10.2.** Два экипажа с пассажирами общей массой  $M$  каждый движутся по горизонтальной поверхности без трения с начальной скоростью  $v_0$ . Сверху вертикально падает снег. Масса снега, падающего на экипаж в секунду, равна  $a$ . В одном экипаже снег после попадания в него остается там лежать. В другом экипаже пассажиры немедленно сбрасывают попавший в экипаж снег в направлении, перпендикулярном скорости движения. Какой путь будет пройден экипажами за время  $t$ ?

## К главе 11

**11.1.** Ребра прямоугольного однородного параллелепипеда массой  $m$  направлены по осям прямоугольной декартовой системы координат, начало которой совпадает с одной из вершин. Длины ребер параллелепипеда вдоль осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найдите моменты инерции  $J_{xx}$  и  $J_{yz}$ .

**11.2.** Два однородных прямых круглых цилиндров одинакового радиуса с одинаковой массой  $m$  покоятся на горизонтальной поверхности, причем оси цилиндров параллельны, а их поверхности не соприкасаются. Сверху на цилиндрах, перпендикулярно их длине, лежит прямая балка массой  $M$ . Центры масс цилиндров и балки лежат в одной и той же вертикальной плоскости. На балку действует сила  $F$ , направленная параллельно ее длине по линии, проходящей через центр масс балки. Чему равно ускорение балки, если нигде нет скольжения между соприкасающимися поверхностями?

**11.3.** Однородный шар массой  $m$  и радиусом  $r_1$  опирается в положении неустойчивого равновесия на поверхность жестко закрепленного шара радиусом  $r_2 > r_1$ . Линия, соединяющая центры шаров, вертикальна. Потеряв положение неустойчивого равновесия, верхний шар радиусом  $r_1$  начинает скатываться без скольжения по поверхности нижнего шара радиусом  $r_2$ . Угол между вертикалью и линией, соединяющей центры шаров, обозначим  $\theta$ . При каком угле  $\theta$  давление в точке соприкосновения шаров исчезает?

**11.4.** Однородный диск массой  $m$  подвешен в вертикальной плоскости к точкам  $A$  и  $B$  на окружности диска на двух вертикальных нитях. Точки  $A$  и  $B$  находятся на одном и том же горизонтальном уровне, а дуга  $AB$  окружности опирается на угол  $2\alpha$  с вершиной в центре диска. Найдите силу натяжения одной из нитей непосредственно после момента обрыва другой.

**11.5.** Однородный прямоугольный параллелепипед с ребрами  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, параллельной главной диагонали, но проходящей через вершину, не лежащую на этой главной диагонали. Найдите кинетическую энергию параллелепипеда.

## К главе 12

**12.1.** Из начала системы координат  $r = 0$  под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости при  $t = 0$  брошено тело массой  $m$  с начальной скоростью  $u$ . Сила трения тела о воздух принята равной  $F_{tp} = -mkv$ . Найдите  $r = r(t)$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Найдите уравнение траектории, направив ось  $X$  горизонтально, а ось  $Y$  вертикально.

**12.2.** Камень бросают в горизонтальном направлении с начальной скоростью  $u$  с высокой башни. Сила трения камня о воздух равна  $-mkv$ . Камень падает на землю на расстоянии  $l$  от основания башни. Найдите высоту башни.

**12.3.** Однородная твердая полусфера радиусом  $r$  опирается на горизонтальную поверхность в точке своей выпуклой стороны. Найдите частоту малых колебаний полусферы около положения равновесия в случаях, когда в ее контакте с горизонтальной поверхностью полностью отсутствует трение и когда полностью отсутствует проскальзывание.

**12.4.** На горизонтальной площадке находятся однородный куб массой  $m_1$  с длиной ребра  $l$  и однородный круглый цилиндр диаметром  $d$  и длиной  $l$ . Ось цилиндра горизонтальна. Боковая поверхность цилиндра соприкасается по всей длине с одной из граней куба. Площадка постепенно наклоняется вокруг оси, параллельной линии контакта между кубом и цилиндром, в сторону куба. Угол наклона между поверхностью площадки и горизонтальной плоскостью  $\alpha$ . Коэффициент трения в каждом из контактов  $k$ . При каком значении  $\alpha$  начнется соскальзывание куба с наклонной плоскости?

**12.5.** Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью  $u$ . Сила трения  $F_{tp} = -mkv$ . Через какой промежуток времени тело остановится?

**12.6.** Круглый цилиндр скатывается без скольжения с наклонной поверхности, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ . Каково ускорение центра масс цилиндра вдоль наклонной поверхности, когда поверхность движется с ускорением  $a$ : а) в вертикальном направлении; б) в горизонтальном направлении в сторону подъема поверхности?

**12.7.** Тело свободно падает в среде, причем  $v = 0$  при  $t = 0$ . Сила сопротивления среды равна  $-m(av + bv^2)$ , где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные. Найдите скорость тела в момент времени  $t$  и путь, пройденный за это время.

## К главе 13

**13.1.** Две пружины одинаковой длиной  $l$ , жесткости которых  $D_1$  и  $D_2$ , могут образовать комбинацию из двух пружин той же длиной  $l$  (параллельное соединение) и комбинацию из двух пружин длиной  $2l$  (последовательное соединение). Найдите круговые частоты колебаний груза массой  $m$ , подвешенного к нижнему концу пружин в этих комбинациях, если их верхние концы жестко закреплены.

**13.2.** На нижнем конце невесомой пружины, жесткость которой  $D_1$ , подвешен невесомый шкив, а верхний конец пружины жестко закреплен. Через шкив перекинута невесомая упругая нить жесткостью  $D_2$ . Один конец нити прикреплен жестко к земле, а на втором конце подведен груз массой  $m$ . В состоянии равновесия пружина и оба прямолинейных участка нити вертикальны. Силами трения можно пренебречь. Найдите круговую частоту малых гармонических колебаний груза, при которых нить все время вертикальна и находится в натянутом состоянии.

**13.3.** В равновесном состоянии грузик, висящий на нижнем конце упругой нити, растягивает ее на  $\Delta l$ . Верхний конец нити колебается по вертикали, причем его отклонение от равновесного положения описывается формулой  $A \sin \omega_0 t$ . Положительное значение отклонений отсчитывается вниз. Предполагая, что нить все время остается натянутой, найдите уравнение движения грузика, обозначив  $x$  его отклонение от равновесного положения.

**13.4.** На горизонтальном стержне без трения может скользить кольцо массой  $m_1$ . К кольцу подвешен на нерастяжимой невесомой нити длиной  $l$  точечный груз массой  $m_2$ . Определите частоту малых гармонических колебаний системы.

**13.5.** По диаметру Земли, моделируемой однородным шаром, прошверлен желоб, в котором может двигаться материальная точка. Найдите период колебаний точки в желобе около центра Земли. Ускорение свободного падения на поверхности Земли и радиус Земли обозначены  $g, r$ .

**13.6.** Ареометр массой  $m$  с цилиндрической трубкой диаметром  $d$  плавает в жидкости плотностью  $\rho$  и приводится толчком в вертикальном направлении в движение. Найдите частоту малых колебаний ареометра. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра не учитывать.

**13.7.** Однородная палочка подвешена горизонтально за концы с помощью двух вертикальных нитей одинаковой длиной  $l$ . В состоянии равновесия обе нити параллельны. Найдите период  $T$  малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через ее середину.

**13.8.** Круглое кольцо радиусом  $r$  вращается вокруг своего диаметра, направленного по вертикали, с угловой скоростью  $\omega$ . По кольцу может без трения скользить шарик массой  $m$ . Положение шарика характеризуется углом  $\theta$  между направлением по вертикали вниз и направлением радиуса-вектора шарика с началом в центре кольца. При каком угле  $\theta$  шарик находится в устойчивом равновесии и какова частота его малых колебаний около положения равновесия?

## К главе 14

**14.1.** На широте  $\phi = 60^\circ$  произведен выстрел по мишени в горизонтальном направлении. Начальная скорость снаряда 1 км/с, расстояние до мишени 1 км. Мишень расположена точно на северо-западе. Сопротивлением воздуха пренебречь. При расчете забыли учесть поправку на силы инерции. На сколько снаряд отклонится от цели в горизонтальном и вертикальном направлениях?

**14.2.** Скорость течения реки в северном полушарии равна  $v'$ . Каков угол наклона  $\alpha$  поверхности воды к горизонту на широте  $\phi$ ?

**14.3.** Через блок перекинута перастяжимая невесомая нить, к концам которой подвешены грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . Трение между нитью и блоком отсутствует. Блок движется в горизонтальном направлении с ускорением  $a$ . Какова сила натяжения нити?

**14.4.** В вершинах равностороннего треугольника со стороной  $l$  помещены точечные массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , взаимодействующие по закону Ньютона. С какой угловой скоростью должна вращаться система и как располагаться ось вращения, чтобы относительное расположение масс не изменилось?

## Ответы

$$\mathbf{2.1.} \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_5 = 2\mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{r}_6 = \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2.$$

- 2.2.** а)  $\pi$ ; б)  $\frac{2\pi}{3}$ ; в) в любом угле;  
г) 0 или  $\pi$ .

$$\mathbf{2.3.} \quad \arccos \left( \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \right).$$

$$\mathbf{2.5.} \quad \sqrt{g(h_1 + h_2 + l)}.$$

- 2.6.** Дугу эллипса с полуосами  $\alpha l$  и  $(1 - \alpha)l$ .

$$2.7. \frac{lh}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

$$2.8. \frac{2u^2\varepsilon}{g}.$$

$$2.9. \frac{a+a^2g}{2u^2} + \frac{u^2}{2g}.$$

$$2.10. r = \frac{2u^2 \cos \alpha \sin(a - \theta)}{g \cos^2 \theta}.$$

$$2.11. l \cos^2 \theta, v \sin \theta.$$

$$2.12. \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}; \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}.$$

$$2.13. i_x + i_y - i_z; \frac{2\pi}{3}.$$

$$2.14. \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{n} \times \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \varphi).$$

$$2.15. r = \frac{a(1 - \cos \varphi)}{\omega^2}.$$

$$2.16. \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2}{l^2} + \frac{v_1^2}{r_0^2}}; \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2}{l^2} + \frac{v_2^2}{r_0^2}}.$$

$$2.17. \text{Окружность; } \frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{r_1 + r_2}.$$

$$2.18. \frac{vt}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

$$2.19. \frac{v \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

$$2.20. \frac{\omega R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$2.21. \frac{\omega R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

$$2.22. \frac{v_2 - v_1}{2R}; \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

$$3.1. l \sqrt{\frac{\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}}{2}}; \frac{l \left( \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right)}{\sqrt{2}}.$$

$$3.2. \frac{l(v^2 - u^2)}{\sqrt{v(v^2 - u^2 \sin^2 \phi)}}.$$

$$4.1. 5000 \text{ м.}$$

$$4.2. l' = 0,9 \cdot 10^8 \text{ км}; \tau_3 = 625 \text{ с}; \tau_p = 375 \text{ с.}$$

$$4.3. c/\sqrt{2}.$$

$$4.4. 18 \text{ м}; 22,5 \text{ м.}$$

$$4.5. t_A = \frac{l}{v \sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}}; t'_{A'} = \frac{l}{v}; t_B = \frac{l}{v};$$

$$t'_{B'} = \frac{l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}.$$

$$4.6. c^2 \frac{\left( 1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)}{a}.$$

$$4.7. l \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) / \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right).$$

$$4.8. \frac{c \left\{ 1 - \left[ \left( 1 - \frac{v}{c} \right) / \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \right]^3 \right\}}{1 + \left[ \left( 1 - \frac{v}{c} \right) / \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \right]^3}.$$

$$5.1. \frac{g}{2\omega^2} (\operatorname{ch} \omega t - \cos \omega t).$$

$$5.2. \frac{3l^2}{2r_0 u}; \frac{mu^2}{\sqrt{l^2 + 2r_0 u t}}.$$

$$5.3. 16,5 \text{ м.}$$

$$5.4. \arccos(2/3).$$

$$5.5. \frac{m_3(m_1 + m_2)g}{4m_1m_2 + m_3(m_1 + m_2)}.$$

$$5.6. \operatorname{arctg} \frac{l\omega}{\sqrt{u^2 + l^2\omega^2}}.$$

$$5.7. \left[ \left( \frac{\tilde{F} \cos \alpha}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{F} \sin \alpha}{m_1} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\frac{\tilde{F} \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

$$6.1. \pi/4.$$

$$6.2. 4/3.$$

$$6.3. 2\pi\sqrt{2}.$$

$$6.4. \frac{2h(m_1 + m_2)}{m_1 + 2m_2}.$$

$$6.5. \frac{\sqrt{E_{\kappa}(E_{\kappa} + 2m_0c^2)}}{c}.$$

$$6.6. cp / \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

$$6.7. c \frac{\sqrt{eU(eU + 2m_0c^2)}}{eU + m_0c^2}.$$

$$6.8. 0,0631 \cdot 10^{-10} \text{Дж} = 39,4 \text{ МэВ.}$$

$$6.9. \frac{1}{m_2} \left( \sqrt{\left(\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2\right) \left(\frac{E_2^2}{c^2} - m_2^2 c^2\right)} + \frac{E_1 E_2}{c^2} \right).$$

$$6.10. E_2 = \frac{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - m_3^2 c^2}{2m_1};$$

$$E_3 = \frac{m_1^2 c^2 + m_3^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2m_1};$$

$$p_2 = p_3 = \frac{E_2^2 - m_2^2 c^4}{c^2}.$$

$$7.1. \frac{\pi + 2e}{\pi - 2e}.$$

7.2.  $\approx 4$  сут.

$$7.3. T \sqrt{2} / 8.$$

7.4. По эллипсу с осью  $2r$ ;  $T$ .

$$7.5. \sqrt{2 \left(1 - \frac{l}{r_3}\right)} \frac{1 + \frac{2l}{r_3}}{3\pi} \text{ года.}$$

$$7.6. \delta r_1 = \frac{4\delta v_2 r_1}{(1+e)v_2}; \delta r_2 = \frac{4\delta v_1 r_2}{(1-e)v_1}.$$

7.7.  $2uv/g$  при  $u \leqslant v$ ;  $(u^2 + v^2)/g$  при  $u \geqslant v$ .

$$8.1. \frac{2\pi mv}{eB}.$$

$$8.2. \frac{W - m_0 c^2}{|e|E}.$$

$$9.1. \frac{[(m_0 - m_{10})^2 - m_{02}^2]c^2}{2m_0};$$

$$\frac{[(m_0 - m_{20})^2 - m_{01}^2]c^2}{2m_0}.$$

$$9.2. \frac{c\sqrt{E^2 - m_{01}^2 c^4}}{E + m_{02} c^2}.$$

$$9.3. \frac{\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + 2m_{01}m_{02}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \frac{m_{01}v}{m_{01} + m_{02}\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$9.4. \frac{E_{\kappa} \cos^2 \theta}{1 + E_{\kappa} \sin^2 \theta / (2m_0 c^2)}.$$

$$10.1. \frac{g}{k} - \frac{g[\alpha - m_0 k) e^{-kt}]}{k^2(m_0 + \alpha t)}.$$

$$10.2. \frac{Mv_0}{a} \ln \left( \frac{M + at}{M} \right); \\ \frac{Mv_0}{a} (1 - e^{-(a/M)t}).$$

$$11.1. \frac{m(b^2 + c^2)}{3}; -\frac{mbc}{4}.$$

$$11.2. \frac{F}{M + \frac{3m}{4}}.$$

$$11.3. \arccos (10/17).$$

$$11.4. \frac{mg}{1 + 2\sin^2 \alpha}.$$

$$11.5. \frac{m\omega^2(b^2c^2 + 7a^2c^2 + 7a^2b^2)}{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

$$12.1. \mathbf{r} = \frac{\mathbf{g}^2}{2} + \frac{1}{k} (\mathbf{u} - \frac{\mathbf{g}}{k})(1 - e^{-kt});$$

$$y = \frac{g}{k^2} \ln \left( 1 - \frac{kx}{u \cos \alpha} \right) + x \left( \lg \alpha + \frac{g}{ku \cos \alpha} \right).$$

**12.2.**  $\frac{g}{k} \ln \left( \frac{u}{u - kl} \right) - \frac{gl}{u}.$

**12.3.**  $\sqrt{\frac{120g}{119r}}, \sqrt{\frac{15g}{26r}}.$

**12.4.**  $\operatorname{arctg} \frac{km_1}{m_1 + (1-k)m_2}.$

**12.5.**  $\frac{m}{k} \ln \left( 1 + \frac{ku}{mg} \right).$

**12.6.**  $\frac{2}{3}(g+a)\sin\alpha, \frac{2}{3}(g\sin\alpha + a\cos\alpha).$

**12.7.**  $\frac{A}{b} \operatorname{th} B - \frac{a}{2b}; \frac{1}{b} \ln \left( \frac{\operatorname{ch} B}{\operatorname{ch} \alpha} \right) - \frac{at}{2b},$

где  $A = \sqrt{bg + \frac{a^2}{4}}$ ,  $\operatorname{th} \alpha = \frac{a}{2A}$ ,  $B = ct + \alpha$ .

**13.1.**  $\sqrt{\frac{D_1 + D_2}{m}}, \left[ D_1^{-1} + D_2^{-1} \right] m^{-1/2}.$

**13.2.**  $\sqrt{\frac{D_1 D_2}{m(4D_2 + D_1)}}.$

**13.3.**  $\ddot{x} + \frac{g}{\Delta l} x = \frac{gA}{\Delta l} \sin \omega_0 t.$

**13.4.**  $\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}.$

**13.5.**  $\sqrt{\frac{g}{r}}.$

**13.6.**  $\frac{d}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho g}{m}}.$

**13.7.**  $2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}.$

**13.8.**  $\arccos \frac{g}{r\omega^2}; \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{a^2 \omega^4}}.$

**14.1.** 5,8 см; 2,4 см.

**14.2.**  $\operatorname{arctg} \left( 2\omega \sin \frac{\varphi v'}{g} \right).$

**14.3.**  $\frac{2m_1 m_2 \sqrt{g^2 + a^2}}{m_1 + m_2}.$

**14.4.**  $\sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{l^3}};$  ось вращения проходит через центр масс перпендикулярно плоскости треугольника.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Приложение 1. Единицы СИ, используемые в книге

Величина			Единица	
наименование	размерность	основное обозначение	наименование	обозначение
<i>Основные единицы</i>				
Длина	$L$	$l$	метр	м
Маса	$M$	$m$	килограмм	кг
Время	$T$	$t$	секунда	с
Сила тока	$I$	$I$	ампер	А
Термодинамическая температура	$\Theta$	$T$	kelvin	К
Количество вещества	$N$	$n$	моль	моль
Сила света	$J$	$I$	кандела	кд
<i>Производные единицы</i>				
Площадь	$L^2$	$S$	квадратный метр	$m^2$
Объем	$L^3$	$V$	кубический метр	$m^3$
Плоский угол	безразмерная	$\alpha, \phi$	радиан	рад
Телесный угол	безразмерная	$\Omega$	стериadian	ср
Период колебаний	$T$	$T$	секунда	с
Частота периодического процесса	$T^{-1}$	$v$	герц	Гц
Частота круговая	$T^{-1}$	$\omega$	секунда в минус первой степени	$s^{-1}$
Угловая скорость	$T^{-1}$	$\omega$	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	$T^{-2}$	$\alpha$	радиан на секунду в квадрате	$rad/s^2$
Скорость	$LT^{-1}$	$v, u$	метр в секунду	$m/s$
Ускорение	$LT^{-2}$	$a$	метр на секунду в квадрате	$m/s^2$
Плотность	$L^{-3} M$	$\rho$	килограмм на кубический метр	$kg/m^3$
Импульс (количество движения)	$LMT^{-1}$	$p$	килограмм-метр в секунду	$kg \cdot m/s$
Сила	$LMT^{-2}$	$F$	ньютон	Н
Давление	$L^{-1} M T^{-2}$	$p$	паскаль	Па

Продолжение табл.

Величина			Единица	
наименование	размерность	основное обозначение	наименование	обозначение
Момент силы	$L^2 MT^{-2}$	$M$	ньютон-метр	$N \cdot m$
Момент импульса	$L^2 MT^{-1}$	$L$	килограмм-метр в квадрате в секунду	$kg \cdot m^2/s$
Момент инерции	$L^2 M$	$J$	килограмм-метр в квадрате	$kg \cdot m^2$
Работа	$L^2 MT^{-2}$	$A$	дюйль	$Dj$
Энергия	$L^2 MT^{-2}$	$E$	дюйль	$Dj$
Потенциальная энергия	$L^2 MT^{-2}$	$E_p$	дюйль	$Dj$
Кинетическая энергия	$L^2 MT^{-2}$	$E_k$	дюйль	$Dj$
Мощность	$L^2 MT^{-3}$	$P$	ватт	$W$
Фаза гармонических колебаний	безразмерная	$\phi$		
Коэффициент затухания	$T^{-1}$	$\gamma$	секунда в минус первой степени	$s^{-1}$
Логарифмический декремент затухания	безразмерная	$\theta$		
Добротность	безразмерная	$Q$		
Жесткость	$MT^{-2}$	$D$	килограмм на секунду в квадрате	$kg/s^2$
Коэффициент трения	$MT^{-1}$	$\beta$	килограмм в секунду	$kg/s$
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3} I^{-1}$	$E$	вольт на метр	$V/m$
Магнитная индукция	$MT^{-2} I^{-1}$	$B$	tesla	$Tl$

## Приложение 2. Физические постоянные, встречающиеся в книге

Наименование	Обозначение	Числовое значение
Скорость света в вакууме	$c$	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с (точно)}$
Ускорение свободного падения	$g$	$9,80665 \text{ м/с}^2$
Элементарный электрический заряд	$e$	$1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса электрона	$m_e$	$9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	$m_p$	$1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса нейтрона	$m_n$	$1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$

*Учебное издание*

**Матвеев Алексей Николаевич**

**МЕХАНИКА  
И ТЕОРИЯ  
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

*Учебник для студентов  
высших учебных заведений*

Ответственный редактор Е. С. Придасова  
Технический редактор Л. Б. Чуева

Оригинал-макет подготовлен ООО «Бета-Фрейм»

Подписано в печать 25.12.2002. Формат 60×90  $\frac{1}{16}$ .  
Гарнитура «Обыкновенная». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 27,00. Тираж 5000 экз. Заказ № 695.

Качество печати соответствует качеству диапозитивов,  
предоставленных издательством.

ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».

Изд. лиц. ИД № 02795 от 11.09.2000.  
105066, Москва, ул. Доброслободская, 5а.  
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 150-52-11  
Internet: [www.onyx.ru](http://www.onyx.ru); e-mail: [mail@onyx.ru](mailto:mail@onyx.ru)

ООО «Издательство «Мир и Образование».  
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.  
109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.  
Тел./факс (095) 928-78-26  
E-mail: [mir-obrazovanie@rambler.ru](mailto:mir-obrazovanie@rambler.ru)

ФГУП Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат  
детской литературы им. 50-летия СССР Министерства Российской Федерации  
по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.  
170040, г. Тверь, проспект 50-летия Октября, 46.

