

# ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

С. П. СТРЕЛКОВ

---

## МЕХАНИКА

Издание третье, переработанное

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1975

530

С 84

УДК 530.10

20302—131  
С 053(02)-75 101-75

© Главная редакция  
физико-математической л  
издательства «Наука», 19  
с изменениями.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции . . . . .	8
Введение . . . . .	9
Часть первая	
МЕХАНИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ	
Г л а в а I. Кинематика точки . . . . .	19
§ 1. О движении тел . . . . .	19
§ 2. Движение точки по прямой . . . . .	20
§ 3. Скорость точки при движении по прямой . . . . .	21
§ 4. Связь между скоростью и пройденным расстоянием . . . . .	25
§ 5. Ускорение при движении точки по прямой . . . . .	27
§ 6. Движение точки в пространстве . . . . .	29
§ 7. Основные свойства векторов . . . . .	31
§ 8. Скорость точки . . . . .	36
§ 9. Ускорение точки, движущейся по плоскости. Центростремительное ускорение . . . . .	39
§ 10. Ускорение при движении точки в пространстве . . . . .	44
§ 11. Пространство, время и системы отсчета . . . . .	47
Г л а в а II. Основные законы движения — законы динамики . . . . .	49
§ 12. Движение и взаимодействие тел . . . . .	49
§ 13. Сила . . . . .	51
§ 14. Способы измерения постоянных сил . . . . .	52
§ 15. Условия равновесия сил, действующих на точку . . . . .	54
§ 16. Сила и движение (первый закон Ньютона) . . . . .	58
§ 17. Второй закон динамики Ньютона . . . . .	61
§ 18. Масса тела . . . . .	63
§ 19. Общая форма второго закона Ньютона . . . . .	66
§ 20. Третий закон Ньютона . . . . .	67
§ 21. Силы, второй и третий законы Ньютона . . . . .	69
§ 22. Движение тела под действием заданных сил . . . . .	76
§ 23. Несвободные движения тела . . . . .	82
Г л а в а III. Количество движения системы тел . . . . .	92
§ 24. Закон сохранения количества движения . . . . .	92
§ 25. Передача количества движения одним телом другому . . . . .	96
§ 26. Импульс силы . . . . .	100
§ 27. Законы движения тел с переменной массой . . . . .	102

<b>Г л а в а IV. Работа и энергия . . . . .</b>	<b>110</b>
§ 28. Понятие об энергии . . . . .	110
§ 29. Работа и энергия . . . . .	111
§ 30. Работа силы . . . . .	113
§ 31. Потенциальная энергия деформации . . . . .	115
§ 32. Кинетическая энергия тела . . . . .	116
§ 33. Полностью неупругий удар двух тел . . . . .	117
§ 34. Упругий удар . . . . .	119
§ 35. Удар неупругих тел . . . . .	127
§ 36. Потенциальная энергия . . . . .	128
§ 37. Изменение энергии тела в поле сил тяготения. Закон сохранения энергии . . . . .	133
<b>Г л а в а V. Силы трения . . . . .</b>	<b>136</b>
§ 38. Различные виды сил трения . . . . .	136
§ 39. Вязкое трение . . . . .	138
§ 40. Падение шарика в вязкой среде . . . . .	140
§ 41. Сухое трение . . . . .	143
§ 42. Сила трения скольжения . . . . .	145
<b>Г л а в а VI. Относительное движение . . . . .</b>	<b>150</b>
§ 43. Инерциальные системы отсчета . . . . .	150
§ 44. Движение тела в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции . . . . .	152
§ 45. Силы инерции, действующие на покоящееся тело во врачающейся системе отсчета . . . . .	155
§ 46. Явление невесомости . . . . .	156
§ 47. Связь между векторами угловой и линейной скоростей точки . . . . .	159
§ 48. Силы инерции, действующие на тело, которое движется во врачающейся системе отсчета . . . . .	160
§ 49. Влияние вращения Земли на движение тел. Маятник Фуко . . . . .	168
<b>Г л а в а VII. Движение твердого тела . . . . .</b>	<b>175</b>
§ 50. Поступательное и вращательное движение твердого тела . . . . .	175
§ 51. Условия равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось . . . . .	178
§ 52. Закон динамики вращения тела вокруг неподвижной оси . . . . .	180
§ 53. Момент количества движения . . . . .	184
§ 54. Кинетическая энергия вращающегося тела . . . . .	187
§ 55. Центр тяжести и центр инерции твердого тела . . . . .	191
§ 56. Закон движения центра инерции тела . . . . .	194
§ 57. Плоское движение тела . . . . .	200
§ 58. Качение цилиндра по плоскости. Маятник Максвелла . . . . .	206
§ 59. Моменты инерции некоторых тел. Теорема Гюйгенса — Штейнера . . . . .	211
§ 60. Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное и вращательное движение . . . . .	215
§ 61. Оси свободного вращения . . . . .	217
§ 62. Кинематика движения твердого тела . . . . .	220
§ 63. Момент силы относительно точки и момент количества движения твердого тела . . . . .	225
§ 64. Момент количества движения (импульса) твердого тела и момент инерции . . . . .	227
§ 65. Основной закон динамики твердого тела . . . . .	235
§ 66. Гирокопы . . . . .	239
§ 67. Движение оси гирокопа . . . . .	242
§ 68. Гирокопические силы . . . . .	247
§ 69. Вращение оси несвободного гирокопа . . . . .	249
§ 70. Движение свободного гирокопа . . . . .	251
§ 71. К объяснению «гирокопических» сил . . . . .	254

<b>Г л а в а VIII. Трение при качении . . . . .</b>	<b>257</b>
§ 72. Силы, возникающие при качении. Силы трения скольжения при качении цилиндра . . . . .	257
§ 73. Трение сцепления при качении . . . . .	260
§ 74. Торможение и явление заноса . . . . .	261
§ 75. Трение качения . . . . .	263
<b>Г л а в а IX. Тяготение тел . . . . .</b>	<b>268</b>
§ 76. Закон всемирного тяготения . . . . .	268
§ 77. Масса «инертная» и масса «тяготения» . . . . .	271
§ 78. Потенциальная энергия тяготения . . . . .	273
§ 79. Основные законы небесной механики . . . . .	274
§ 80. Движение спутников Земли и космических снарядов . . . . .	278
 Часть вторая	
<b>МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ</b>	
<b>Г л а в а X. Механика деформируемых твердых тел . . . . .</b>	<b>282</b>
§ 81. Понятие об упругом теле. Силы и деформации при растяжении . . . . .	282
§ 82. Картина явлений в деформируемом теле. Свойства материалов . . . . .	288
§ 83. Внутренние силы и напряжения . . . . .	291
§ 84. Напряжения и деформации при сдвиге . . . . .	293
§ 85. Напряжения в упругом теле. Общий случай . . . . .	297
§ 86. Малые деформации тела . . . . .	302
§ 87. Зависимость между напряжениями и деформациями . . . . .	306
§ 88. Потенциальная энергия деформации . . . . .	312
§ 89. Усилия и деформации при изгибе стержней (балок) . . . . .	314
§ 90. Определение прогибов балки . . . . .	320
§ 91. О деформации опор . . . . .	324
§ 92. Перегрузки, невесомость и напряжения . . . . .	329
<b>Г л а в а XI. Жидкие и газообразные тела в состоянии равновесия . . . . .</b>	<b>333</b>
§ 93. Твердые, жидкие и газообразные тела . . . . .	333
§ 94. Понятие о давлении . . . . .	334
§ 95. Связь между плотностью газа и давлением . . . . .	338
§ 96. Распределение давления в покоящейся жидкости . . . . .	339
§ 97. Распределение давления в газе . . . . .	341
§ 98. Равновесие тел, плавающих на поверхности жидкости . . . . .	343
§ 99. Условия равновесия тела, погруженного в жидкость или газ . . . . .	344
<b>Г л а в а XII. Течение жидких и газообразных тел . . . . .</b>	<b>346</b>
§ 100. Стационарное течение жидкости . . . . .	346
§ 101. Основной закон динамики для частицы идеальной жидкости . . . . .	350
§ 102. Уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости . . . . .	354
§ 103. Истечение жидкости из сосуда . . . . .	356
§ 104. Давление жидкости, текущей по трубе переменного сечения . . . . .	359
§ 105. Истечение жидкости или газа, находящихся под давлением в сосуде . . . . .	360
§ 106. Давление в критической точке обтекаемого тела . . . . .	363
§ 107. Изменение давления поперек трубок тока . . . . .	366
§ 108. Распределение давления во вращающейся жидкости . . . . .	368
§ 109. Количество движения жидкости и газа . . . . .	370
§ 110. Сила реакции текущей воды . . . . .	371
§ 111. Течение вязкой жидкости в трубе . . . . .	376

<b>Г л а в а XIII. Действие потока жидкости или газа на тело . . . . .</b>	<b>382</b>
§ 112. Лобовое сопротивление тел в потоке . . . . .	382
§ 113. Закон механического подобия при обтекании тел . . . . .	387
§ 114. Пограничный слой . . . . .	390
§ 115. Измерение сил, действующих на тело в потоке . . . . .	393
§ 116. Подъемная сила крыла самолета . . . . .	395
§ 117. Обтекание крыла жидкостью. Циркуляция и подъемная сила . . . . .	397
§ 118. Зависимость подъемной силы крыла от угла атаки. Лобовое сопротивление крыла . . . . .	403
§ 119. Силы, возникающие при движении самолета . . . . .	406
§ 120. Распространение возмущений давления в сжимаемой жидкости (газе) и движение тела со сверхзвуковой скоростью . . . . .	407
§ 121. Волны при большом изменении давления и движение тела с большой скоростью . . . . .	413
§ 122. Сверхзвуковой поток в трубе . . . . .	416

Часть третья

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ.  
ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

<b>Г л а в а XIV. Колебания . . . . .</b>	<b>420</b>
§ 123. Периодические процессы . . . . .	420
§ 124. Гармонические колебания . . . . .	421
§ 125. Собственные колебания и изменение энергии во время колебаний . . . . .	428
§ 126. Затухающие собственные колебания . . . . .	432
§ 127. Вынужденные колебания и резонанс . . . . .	437
§ 128. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты . . . . .	440
§ 129. Колебания вала с диском . . . . .	445
§ 130. Переходные процессы и сложные колебания. Гармонический анализ . . . . .	449
§ 131. Автоколебания . . . . .	454
§ 132. Собственные колебания системы со многими степенями свободы . . . . .	459
§ 133. Теоретический анализ биений . . . . .	462
§ 134. Собственные частоты связанных маятников . . . . .	464
§ 135. Собственные колебания трех связанных маятников . . . . .	466
§ 136. Вынужденные колебания в сложных системах . . . . .	468
<b>Г л а в а XV. Колебания сплошной среды . . . . .</b>	<b>472</b>
§ 137. Волны . . . . .	472
§ 138. Плоская синусоидальная звуковая волна . . . . .	478
§ 139. Энергия звуковой волны . . . . .	481
§ 140. Плоские волны в газе и упругой однородной среде . . . . .	484
§ 141. Наложение волн (интерференция) . . . . .	488
§ 142. Отражение волн . . . . .	491
§ 143. Собственные колебания струны и воздуха в трубе . . . . .	496
<b>Г л а в а XVI. Элементы акустики . . . . .</b>	<b>503</b>
§ 144. Основные явления . . . . .	503
§ 145. Отражение звуковых волн от преломлений . . . . .	504
§ 146. Распространение звуковых волн . . . . .	507
§ 147. Слух . . . . .	508
§ 148. Ультразвуковые колебания . . . . .	510

## ОГЛАВЛЕНИЕ

7

Г л а в а XVII. Основы специальной теории относительности . . . . .	511
§ 149. Принцип относительности Галилея . . . . .	511
§ 150. Постоянство скорости света . . . . .	515
§ 151. Одновременность событий . . . . .	516
§ 152. Преобразование Лоренца . . . . .	519
§ 153. Следствия лоренцевых преобразований . . . . .	521
§ 154. Количество движения (импульс) . . . . .	529
§ 155. Зависимость массы от скорости движения . . . . .	531
§ 156. Преобразование импульса и массы . . . . .	533
§ 157. Энергия . . . . .	536
§ 158. Количество движения и энергия системы частиц . . . . .	540
§ 159. Инварианты . . . . .	542
§ 160. Четырехвектор и интервал . . . . .	544
§ 161. Механика теории относительности . . . . .	548
§ 162. Теория упругого удара двух частиц . . . . .	554

## ОТ РЕДАКЦИИ

Книга С. П. Стрелкова «Механика» — первая часть курса общей физики — предназначена для студентов физических и физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов.

Книга написана на основе курса лекций, читавшихся автором в течение многих лет на физическом факультете МГУ и слушателям факультета повышения квалификации преподавателей вузов при физическом факультете МГУ; кроме того, автором использован опыт семинарских и практических занятий.

Первое издание книги относится к 1956 г. Во втором издании, вышедшем в 1965 г., автор, совершенствуя курс, расширил некоторые параграфы, относящиеся к разделам, которые стали актуальными (таким как движение спутников, космических снарядов, невесомость, движение со сверхзвуковыми скоростями), в курс были введены основы специальной теории относительности.

Завершить третье издание книги автору уже не пришлось, однако он успел провести основную работу по его подготовке. В третьем издании, в соответствии с возросшими требованиями современной программы и повышением уровня преподавания физики и математики в средней школе, сделан ряд добавлений теоретического характера. Так, например, дано понятие о тензорном характере момента инерции и об основных тензорах механики изотропного упругого тела, расширена и переработана глава, посвященная специальной теории относительности, и т. д. Однако в книге сохранена та наглядная физическая трактовка главных явлений и закономерностей механики, которая характерна для прошлых изданий.

При подготовке настоящего издания большое участие в его переработке и дополнении принял многолетний сотрудник автора книги А. А. Харламов. Им осуществлены также окончательная подготовка рукописи к печати и просмотр корректур.

## ВВЕДЕНИЕ

Физика — одна из основных естественных наук, в которых изучаются законы неживой природы.

Мир представляет собой совокупность материальных тел, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Все наблюдаемые явления и процессы, совершающиеся в природе, происходят по определенным законам. Раскрытие и изучение закономерной связи между различными процессами и явлениями представляют главную цель всякой отрасли науки. Анализ законов движения и взаимодействия тел и законов электромагнитных явлений относится к области физики.

Круг явлений, изучаемых в физике, или условные границы этой науки определить очень трудно; можно сказать только одно: новые открытия, новые области технических приложений расширяют эти границы с каждым годом. За последнее время интенсивно разрабатываются новые разделы физики, такие, как, например, физика плазмы, физика элементарных частиц, физика полупроводников, биофизика, физика твердого тела и т. д. Все это находит отражение в курсе общей физики, но основной его задачей является *подготовка к изучению новых разделов современной физики*. Детальное изучение этих разделов физики в основном идет в специальных курсах и лабораториях, которые по плану следуют за курсом общей физики. Без знания основных законов и явлений, относящихся к общей физике, нельзя приступить к изучению специальных курсов.

Курс общей физики обычно делится на несколько разделов:  
1) механика, 2) молекулярная физика, 3) электричество и магнетизм,  
4) оптика и 5) атомная и ядерная физика.

Движение материи имеет различные формы: механическую, электромагнитную, тепловую и т. д. Простейшим видом движения материи является механическая форма движения: перемещение различных тел относительно друг друга и изменение формы тела. Законы механического движения изучаются в первом разделе физики — в *механике*. Изучение остальных отделов физики невозможно без знания механики, так как перемещения имеют место почти при всех физических явлениях.

В специальных курсах механику обычно делят на *три* части: кинематику, статику и динамику. В кинематике рассматривается движение тел вне связи с причинами, которые вызывают это движение или изменяют его. В статике изучаются законы равновесия системы тел. В динамике — законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют движение тел. Если нам известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому в физике обычно не рассматривают законов статики отдельно от законов динамики.

Начиная изучение механики в общем курсе физики, мы считаем необходимым сделать несколько очень кратких общих замечаний, относящихся к предмету физики и методам физических исследований, а также привести определения некоторых основных понятий.

**Физическое явление.** Физическое явление (или процесс) — это совокупность закономерно связанных изменений, происходящих с определенными телами с течением времени. Все изменения, происходящие при физических явлениях, оцениваются *количественно*, посредством измерений.

**Физический опыт.** Закономерные связи между различными изменениями, происходящими с телами, изучаются посредством *наблюдений явлений*, происходящих в природе, как в их естественном виде, так и посредством специальных лабораторных опытов, в которых обеспечены определенные условия протекания явлений, где изучаемая связь выявляется наиболее четко и ясно. Лабораторные и технические опыты, наблюдения явлений природы являются основой всех положений физической науки и основным критерием правильности наших суждений о закономерностях того или иного процесса или явления. Согласие результатов научного анализа с результатами опыта есть критерий истинности и справедливости наших познаний об окружающей природе.

**Физические измерения и физические величины.** Физика принадлежит к классу так называемых точных наук, где количественное определение происходящих изменений играет главную роль. В физических исследованиях определяются различные физические величины, такие, например, как сила, скорость, длина, разность потенциалов и т. д. *Физические величины* определяют свойства тел или характеристики процесса, изменения которых всегда нужно устанавливать количественно, посредством измерений, т. е. посредством сравнения данной величины с определенной величиной того же рода, принятой за *единицу*.

Точное и правильное измерение физических величин во время наблюдений и опытов составляет главную часть всякого научного исследования в физике.

**Физические законы.** Все явления и процессы находятся в определенной причинной связи друг с другом. На основе наблюдений

и опытов ученые раскрывают закономерные связи и устанавливают определенную причинную взаимосвязь между изменениями различных величин.

На основе анализа результатов наблюдений и опытов устанавливаются основные закономерности общего характера, которым подчиняется течение различных процессов. Эти общие закономерности называются *физическими законами* и служат основным исходным положением при анализе каждого конкретного явления.

**Абстракции и упрощения.** При анализе сложных процессов, где трудно проследить и выяснить основные причинные связи и закономерности вследствие наличия целого ряда дополнительных связей и зависимостей, стараются прежде всего отделить *главные* закономерности и связи от *второстепенных*. Что в данном процессе является главным, а что второстепенным — это устанавливают сравнительным опытом. Например, в лабораторных опытах наблюдают, что падение стального шарика одинаково происходит и в воздухе и в пустоте, следовательно, сила трения воздуха очень мало сказывается на движении шарика, и падение шарика в воздухе можно считать равноускоренным движением под действием только силы тяжести, и т. п. Анализируя явление, выделяют основное, главное, отвлекаются от второстепенного, несущественного; тем самым создают некоторую условную *схему* явления, пользуясь научными *абстракциями*. Абстракции — это такие понятия, которые отображают только некоторые определенные свойства предметов или некоторые определенные характеристики процесса. Абстракциями являются, например, материальная точка, прямая линия, приложенная в точке сила, жидкость без вязкости и т. д.

При применении тех или иных абстракций и схем, отображающих действительный процесс только частично или отображающих только определенную сторону явления, следует всегда помнить об ограниченности схематических представлений и абстракций.

Так, например, в механике при анализе движения тел пользуются понятием материальной точки, но нельзя просто сказать, что данное тело можно считать материальной точкой; нужно обязательно прибавить, в каком движении это тело можно считать точкой. Например, годичное движение Земли вокруг Солнца можно представлять как движение материальной точки, но движение молекулы не всегда можно представлять как движение точки. Материальная точка — абстракция, при помощи которой определяются некоторые черты движения тела; так, например, считая Землю материальной точкой, мы правильно отображаем движение Земли по орбите, но при этом совсем не можем отобразить вращение Земли вокруг своей оси, и т. п.

Если замечается какое-либо расхождение между результатами теоретического анализа и опытом, то всегда следует тщательно проверить законность и допустимость тех упрощений, которые были

сделаны при выборе схемы. Например, во многих явлениях можно считать воду несжимаемой — при значительном изменении давления объем воды изменяется настолько мало, что при небольших изменениях давления можно не считаться с изменениями объема; однако при анализе явления распространения звуковых волн в воде сжимаемость воды учитывать надо, хотя изменения давления при звуковых волнах не так велики. При анализе процессов и явлений нужно в каждом конкретном случае точно знать, какие стороны явления отображаются данной схемой и когда, в какой мере допустимо без ошибки пользоваться данной абстракцией.

При выборе схемы явления нужно очень осторожно подходить к оценке большого и малого. Если установлено, что данная величина очень велика, то обязательно должно быть четко указано, по сравнению с какой величиной данная имеет большое значение, так, например, при падении шарика в комнате сила трения о воздух мала по сравнению с силой тяжести.

В одних опытах и явлениях имеют существенное значение и малые изменения некоторых величин, в других, наоборот, даже заметные изменения не сказываются на ходе опыта или явления. Только тщательная и многократная проверка различными опытами и вычислениями убеждает нас в правильности сделанных допущений.

**Экспериментальное и теоретическое исследования.** Физика — наука опытная, основные сведения, с которыми она оперирует, и заключения, к которым физики приходят, получаются из опыта, в результате эксперимента. Однако без теоретического анализа, производимого главным образом средствами и методами математики, невозможно было бы никакое детальное исследование неизвестных закономерностей.

При рассмотрении более или менее сложных явлений и процессов физики прибегают к построению схематических моделей, отображающих и учитывающих основные факторы и предполагаемые закономерности явления. Принимая во внимание общие теоретические предположения и известные сведения об аналогичных явлениях, ученые предлагают такую модель, которая допускает применение методов математического анализа для выяснения как основных закономерностей, так и дополнительных деталей исследуемого процесса.

Выводы, полученные посредством теоретического расчета и выраженные в количественных соотношениях, далее проверяются измерениями при наблюдениях и лабораторных экспериментах. Результаты сравнения подтверждают или опровергают точность и адекватность исследуемой модели. Во всяком случае такое сравнение способствует построению более совершенной модели, которая в свою очередь подвергается математическому анализу и последующей экспериментальной проверке, и т. д.

Такое последовательное взаимодействие теоретического и экспериментального исследований представляет непрерывный процесс и

ведет к все более полному познанию закономерностей изучаемых явлений. История физических открытий показывает убедительные примеры чрезвычайно продуктивного взаимодействия теоретиков и экспериментаторов.

За последние десятилетия процесс исследований такого рода значительно ускоряется. Совершенствуются методы экспериментальных исследований и применяются эффективные средства прикладной математики в виде современных, все более и более совершенных электронных вычислительных машин.

**Длина и время.** В разных физических явлениях мы встречаемся с различными физическими величинами. Но почти во всех явлениях мы встречаем, кроме других, две величины — *длину* и *время*. Поэтому можно считать длину и время особыми физическими величинами

Длина является мерой протяженности тел, время — мерой длительности процессов и явлений. Определение этих величин тесно связано с понятиями пространства и времени в философском смысле. С точки зрения диалектического материализма пространство и время суть формы существования материи. Вне времени и пространства нет материи, нет явлений.

Всякое тело имеет определенные размеры. Размеры тела определяются величинами длины, площади и объема, представление о которых известно из геометрии.

Основной величиной, с помощью которой определяют пространственные свойства тел, является *длина отрезка*, принятого за единицу. В физике за единицу длины принимают *метр* — расстояние между двумя метками на стержне-эталоне; площадь и объем измеряются соответственно квадратным и кубическим метром.

Движение тел происходит относительно друг друга, иными словами, при движении происходит изменение взаимного расположения тел или различных частей одного тела (деформация).

В каждом движении принимают участие по крайней мере два тела, поэтому для описания движения можно принять одно из тел за *тело отсчета*. За тело отсчета принципиально может быть принято любое тело.

Систему отсчета, связанную с некоторым телом отсчета, можно представить себе, например, в виде прямоугольной системы координат. Положение всех точек пространства однозначно определено относительно трех воображаемых жестких, взаимно перпендикулярных, прямых стержней, связанных неизменно с телом отсчета и проходящих через некоторую известную точку, которая называется *началом* системы координат. Длина отрезков стержней должна быть измерена определенной единицей длины. Тогда каждая точка пространства будет определена *тремя* числами — *координатами*, которые указывают *численное значение* расстояний вдоль оси каж-

дого стержня от начала до конца перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию оси стержня.

Как показывает опыт, при движении, рассматриваемых в нашем курсе механики, свойства пространства не зависят от выбранного тела отсчета и направления движения. Иначе говоря, при переходе от одной системы отсчета к другой необходимо учитывать только геометрические свойства системы отсчета, а не физические свойства тел, связанных с системой отсчета. Но, как известно из более глубоких исследований, такое представление о пространстве не всегда правильно: при анализе движений тел в некоторых явлениях, рассмотрение которых выходит за рамки нашего курса, необходимо учитывать соответствующие изменения свойств пространства, зависящие от свойств материальных тел (теория относительности).

Механическое движение — это изменение положения тела в пространстве со временем. Время, как уже было сказано, — мера длительности процесса. Поэтому величину прошедшего времени можно измерять длительностью какого-либо процесса (или явления).

Измерение времени может быть произведено с помощью такого процесса, который периодически повторяется (часы). Равномерность и периодичность устанавливаются опытом на основании сравнения длительности протекания различных процессов. Время, за которое происходит некоторый определенный процесс, принимают за единицу. В физике обычно за единицу времени принимают секунду —  $\frac{1}{86\,400}$  средних солнечных суток, т. е. времени полного оборота Земли вокруг своей оси.

Опыт показывает, что при анализе движений тел с малой скоростью — очень малой по сравнению со скоростью света ( $3 \cdot 10^{10}$  см/с) — можно считать, что время не зависит от свойств тел и их движения (абсолютное время по Ньютону). При этих условиях можно полагать, что имеет место *единое* течение времени для различных процессов и явлений вне зависимости от характера явления и свойств тел, принимающих участие в этом явлении. Специальные исследования показывают, что длительность одного и того же процесса, отнесенного к различным движущимся относительно друг друга системам отсчета, зависит от относительного движения этих систем. Следовательно, для движений тел с любыми скоростями *нет* единого времени для различных систем отсчета (теория относительности Эйнштейна). Однако это различие практически ничтожно при обычных скоростях движения, достаточно малых по сравнению со скоростью света.

Не входя в подробности, связанные с теорией относительности, мы считаем нужным упомянуть, что абсолютное, неизменное и одинаковое время для различных систем — это абстракция, допустимость которой вполне оправдывается опытами, в которых движения

систем отсчета относительно друг друга происходят со скоростями, значительно меньшими скорости света. Мерой ошибки, возникающей при применении этой абстракции, может служить величина  $\beta = v^2/c^2$  ( $v$  — скорость движения системы отсчета,  $c$  — скорость света). Допущение абсолютного и неизменного времени для движущихся систем тем правильнее, чем меньше  $\beta$  по сравнению с единицей.

**Размерность физических величин.** Всякая физическая величина определяется на основании закономерностей, полученных из опыта. Численное значение физической величины получается в результате измерения — сравнения ее с неким эталоном, принятым за единицу. Вообще выбор эталона или единицы измерения произволен. Вполне мыслимо, что для каждой физической величины выбрана своя условная единица совершенно независимо от выбора единиц для других величин. Однако по ряду причин в физике так не поступают и произвольно устанавливают единицы только для некоторых основных величин, тогда единицы всех остальных величин будут зависеть от основных. В этом случае основные единицы будут *простыми*, а все остальные — *сложными*. Действительно, пользуясь известными физическими законами, можно найти зависимость единиц производных физических величин от основных. Зависимость эта будет определена, если каждый раз будет указано, каким образом выбраны коэффициенты пропорциональности в формулах, выражающих физическую закономерность. При определении единиц сложных величин стараются выбирать эти коэффициенты пропорциональности как можно проще.

В механике за основные единицы принимают единицы длины и времени, например *метр* и *секунду* (1 м, 1 с). Кроме того, вводят в качестве основной еще одну единицу — единицу массы — *килограмм* или *грамм* (1 кг, 1 г).

Возможны различные *системы единиц*, каждая из которых определяется выбором основных единиц. В настоящее время в физике принято пользоваться единицами *системы СИ* (от слов: система интернациональная).

В данной книге мы будем пользоваться системами единиц СИ и СГС.

Поскольку в настоящее время существует обширная техническая литература и технические справочники, где принята техническая система единиц, то в ряде случаев для справок значения физических величин приводятся и в технической системе.

Единицы всех сложных физических величин зависят от выбора основных единиц. Формулы, которые указывают связь между единицами сложных величин и основных, называются формулами размерностей. Каждая величина имеет определенную *размерность*, на основании которой можно судить об изменении единицы сложной величины вследствие изменения величин основных единиц. Так,

например, если время обозначить через  $t$ , а длину — через  $l$ , то размерность ускорения  $a$  будет

$$[a] = l t^{-2}.$$

Это значит, что при увеличении единицы пути в  $n$  раз увеличится в  $n$  раз и единица ускорения. При увеличении в  $m$  раз единицы времени уменьшится в  $m^2$  раз единица ускорения. Формулы размерностей единиц сложных величин отображают закономерности, связывающие физические величины.

**Физика и техника.** Физика очень тесно связана со всеми естественными науками и особенно с техническими отраслями знания. Физические законы являются основными положениями целого ряда технических наук.

Открытия и исследования новых разделов физики ведут к возникновению новых отраслей техники. Машиностроение опирается на законы механики, электротехники и радиотехники — на законы электромагнитных явлений, и т. д. Достижения физики используются в технике для решения практических задач; так, например, работа промышленных электростанций на атомной энергии говорит о новой области техники — атомной энергетике, мысль о которой еще 30 лет назад казалась фантазией, хотя об огромных запасах внутриатомной энергии физики узнали примерно 70 лет назад. Исследования в области физики твердого тела привели к созданию бурно развивающейся техники полупроводников, которая переводит на новую, значительно более высокую ступень радиотехнику, технику связи, технику быстродействующих вычислительных машин и т. д. Развитие технических наук, со своей стороны, содействует усовершенствованию методов исследования в физике; например, в радиоастрономии радиотехнические средства наблюдения дали новые эффективные средства изучения астрофизических явлений, создание мощных ускорителей заряженных частиц стало возможным только при высоком уровне техники, и т. п. Космические исследования ставят все новые и новые задачи перед физикой, расширяя и уточняя наши представления о законах природы.

**Математика и физика.** Развитие математики и физики (а также других естественных наук) очень тесно связано друг с другом. Без знания математики нельзя изучать физику хотя бы потому, что все закономерности в физике выражаются посредством чисел. Только с помощью математического аппарата можно проанализировать сложные закономерности, которые имеют место в физических явлениях.

Разработка математических методов всегда преследует, в том или ином виде, цель практическую — дать средство анализа закономерностей природы. Поэтому изучение физики тесно связано с изучением математики даже в той части физики, которую называют общей и экспериментальной.

**Из истории механики.** Приступая к изучению механики, полезно кратко вспомнить основные вехи истории механики. Развитие механики неразрывно связано с историей культуры человеческого общества.

Сохранившиеся до нашего времени египетские пирамиды и другие остатки древних сооружений заставляют нас предполагать, что у древних народов имелись определенные познания об основных законах равновесия, без знания которых невозможны были бы такие величественные сооружения. Греческий философ Аристотель (384—322 гг. до н. э.) в своем труде «Физика» подытожил познания древних в области механики; но основной закон, связывающий силу и движение, был им сформулирован неправильно, это было выяснено на 19 столетий позднее. Закон равновесия рычага — главный закон, на котором основано устройство всех машин, и законы равновесия плавающих тел были совершенно четко указаны знаменитым Архимедом (III век до н. э.). С этого времени и начинается развитие механики как науки в полном смысле этого слова. Ученые средних веков получили новые сведения о равновесии тел и о свойствах их, но и они продолжали придерживаться ложного представления Аристотеля об основном законе движения тел.

Только в XVII веке Г. Галилей (1564—1642) правильно раскрыл основной закон движения тел. Зная этот закон и достижения современных ему ученых, великий И. Ньютон (1643—1727) через несколько десятилетий распознал основные закономерности механического движения и изложил их в такой ясной и сжатой форме, которая и до сих пор употребляется как при решении практических и технических задач, так и в научных исследованиях.

Последующие исследователи придали более общую форму основным закономерностям механики и усовершенствовали методы анализа сложных механических явлений. О выдающихся результатах этих исследований, к которым прежде всего относятся труды Л. Эйлера, Д. Бернулли, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа и других знаменитых ученых, будет идти речь в курсах теоретической механики.

Новый этап развития механики начался с фундаментальных работ А. Эйнштейна (1879—1956) и его предшественников. Эти работы представляют собой значительное обобщение законов механики, включающее законы движения тел с любой скоростью, меньшей скорости света, и теперь можно считать механику Ньютона частью механики Эйнштейна.

Законы движения и взаимодействия частиц, входящих в состав атомов и молекул, а также движений, происходящих в очень малой области пространства (размерами порядка  $10^{-10}$  м), принципиально отличаются от законов классической механики, от законов движения

так называемых макроскопических тел, содержащих огромное число молекул. Законы внутриатомных и внутримолекулярных явлений составляют содержание *квантовой* (или *волновой*) механики. Следует отметить, что квантовая механика, так же как и механика Эйнштейна, включает и классическую механику Ньютона при определенных известных условиях, которым удовлетворяют рассматриваемые явления.

Неоценимы заслуги целого ряда поколений инженеров и механиков, открытия которых в значительной степени определили уровень современной техники, а практические результаты доказали достоверность наших знаний в области механики. Исследования ученых XIX столетия и нынешнего значительно расширили круг знаний в области механических явлений.

## МЕХАНИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### Глава I

#### КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

##### § 1. О движении тел

Если посмотреть внимательно на движение какого-либо тела, например на катящееся колесо, на движущийся автомобиль, на падающую дробинку или скользящего по льду конькобежца и т. п., прежде всего нам бросается в глаза разнообразие и сложность движения этих тел. Любое тело — колесо, автомобиль, двигатель

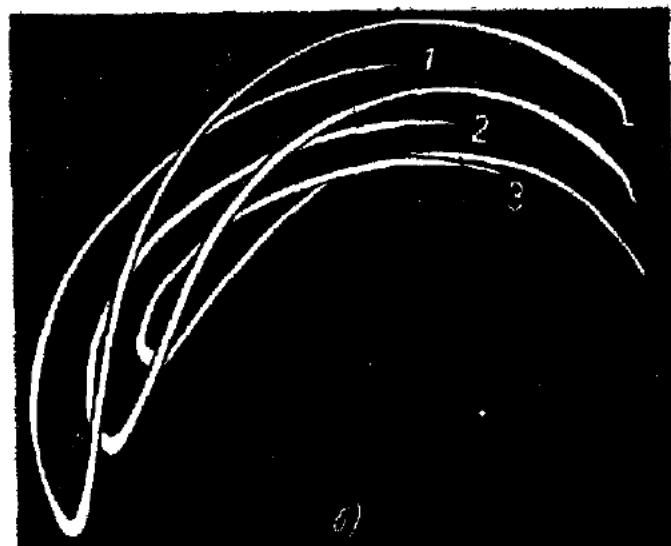
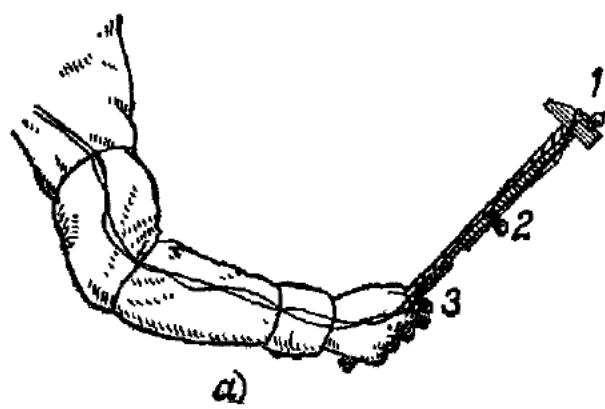


Рис. 1.

и т. д. — можно мысленно разбить на части, и каждая часть будет двигаться отлично от всех остальных.

Для определения движения отдельных частей можно поступить, например, так: прикрепить к какой-либо части тела маленькую светящуюся лампочку и снимать неподвижным фотоаппаратом движущееся тело, причем экспозицию подбирать таким образом, чтобы на снимке оставался только след светящейся лампочки. Зная время и масштаб съемки, можно таким образом изучать сложные движения. Например, на рис. 1, б показан снимок следов трех лампочек, размещенных на рукоятке молотка, которым рабочий забивает гвоздь

(рис. 1, а) Расставляя различно лампочки, фотографируя их с разных сторон, заставляя лампочку светиться прерывисто, изучают движения различных тел, которые при движении деформируются, изменяют свою форму

Каждая отдельная лампочка и связанная с ней частица тела совершает движение по определенной линии, размеры лампочки настолько малы, что на фотографии мы отмечаем только линию, которую прочертит лампочка, эта линия представляет собой проекцию движения лампочки на плоскость фотопластиинки. Следовательно, для того чтобы знать законы движения сложного тела, части которого совершают различные движения, нужно сначала изучить законы движения отдельных частиц тела.

В тех случаях, когда положение частицы тела (или всего тела) однозначно определяется положением точки на линии, в механике пользуются понятием материальной точки. Материальной точкой можно считать и небольшую частицу тела, размеры которой достаточно малы по сравнению с размерами всего тела, и даже все тело, если размеры его очень малы по сравнению с расстоянием, проходимым телом в данном явлении. Так, например, годичное движение Земли вокруг Солнца можно рассматривать как движение материальной точки. Поступательное движение твердого тела всегда может быть отображено движением материальной точки, так как положение одной частицы определяет в этом случае положение всего тела. Зная законы движения материальной точки, мы приступаем к изучению законов движения твердых и деформируемых тел. Эти тела можно представлять себе как совокупность отдельных, связанных между собой материальных точек.

В дальнейшем мы будем говорить просто о движении *точки*, опуская слово «материальная».

## § 2. Движение точки по прямой

Самое простое движение точки — движение ее по прямой линии. С течением времени точка смещается вдоль прямой линии, удаляется от какой-либо заданной точки на данной линии или приближается к ней. Прямая линия в данном случае принята за систему отсчета, относительно которой и рассматривается здесь движение точки.

Если известна координата  $x$  (расстояние движущейся точки от некоторой избранной точки  $O$  на прямой) как функция времени  $t$ , то известен закон движения точки по прямой. Для анализа удобно изобразить зависимость координаты  $x$  от времени  $t$  графически (рис. 2), отложив по оси ординат координату  $x$  в определенном масштабе, а по оси абсцисс — время  $t$ , приняв определенный отрезок равным единице времени. По графику рис. 2 можно полностью установить, как происходило движение данной точки. Если с увели-

чением  $t$  кривая  $x(t)$  поднимается вверх, точка удаляется от  $O$ , и чем круче кривая поднимается, тем быстрее точка удаляется от  $O$ , участки кривой, параллельные оси абсцисс, соответствуют остановке точки, падение кривой вниз — приближению точки к  $O$ , и т. д.

Для получения графика движения тела, перемещающегося по прямой и рассматриваемого как материальная точка, необходимо произвести измерения расстояния  $x$  в известные моменты времени  $t$ . Измерения  $x$  можно сделать различными способами, например: можно сделать в определенные моменты времени мгновенные фотографии движущегося тела неподвижным фотоаппаратом; можно снабдить движущееся тело таким приспособлением, которое через определенное время будет делать отметки на неподвижном теле, вдоль которого происходит движение, и т. п.

Заметим, что таким образом мы определяем координату  $x$ , которую имеет точка в данный момент  $t$ , а не путь, пройденный точкой.

Путь, пройденный точкой, можно определить по ее координате только в том случае, если точка движется в одном направлении. Например, при движении, соответствующем графику рис. 2, точка не может иметь координату, большую  $x_0$ , однако после момента  $t_0$  путь  $S(t)$ , пройденный точкой, будет больше величины  $x_0$ , а координата  $x$ , наоборот, меньше  $x_0$ . Если фиксировать в определенные моменты времени показания счетчика оборотов колеса автомашины, то получится с известной точностью зависимость пути автомобиля от времени. При движении в одном направлении это дает координату движения, при движении же в обратном направлении путь продолжает возрастать, а координата уменьшается.

Зависимость координаты от времени полностью определяет движение точки по прямой, однако в механике важно знать еще две величины: *скорость* и *ускорение*.

### § 3. Скорость точки при движении по прямой

Скорость точки есть физическая величина, определяющая изменение координаты с течением времени. Величина *средней скорости* численно равна отношению пройденного точкой расстояния ко времени, за которое это расстояние было пройдено. Пусть в момент  $t_1$  тело было в точке  $x_1$ , а в момент  $t_2$  — в точке  $x_2$ ; следовательно, перемещение его равно  $x_2 - x_1$ , тогда средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.1)$$

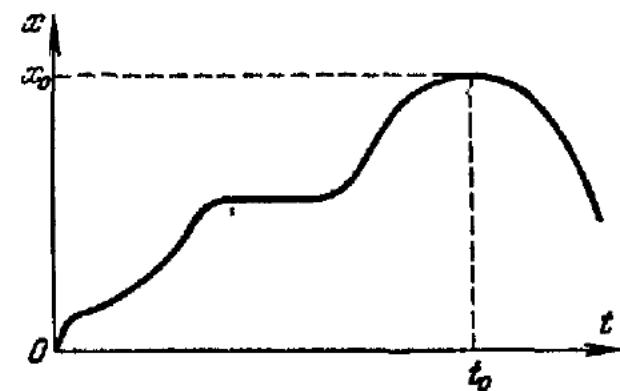


Рис. 2

Перемещения измеряются единицами длины (сантиметр, метр, километр, фут и т. д.), а время измеряется единицами времени (секунда, минута, час и т. д.). Скорость — сложная физическая величина, это не расстояние и не время, это величина, измеряемая *собственной единицей*, которая зависит от выбора единицы длины и единицы времени.

Размерность скорости равна отношению двух величин — длины и времени:

$$[v] = l t^{-1} . \quad (3.2)$$

Скорость измеряется в см/с, или в м/с, или в км/ч и т. д.

Очевидно, что средняя скорость зависит от промежутка времени, за который мы ее определяем. Если средняя скорость для любого промежутка времени при данном движении *одинакова*, то это движение происходит с постоянной скоростью и называется *равномерным*.

На графике зависимости координаты от времени равномерное движение представляется прямой линией. Заметим, что при равномерном движении от начала координат нет разницы между величиной координаты и величиной пути.

При неравномерном движении средняя скорость не будет постоянной величиной, она различна для одного и того же движения в зависимости от того, за какой отрезок времени мы ее определяем. Средняя скорость не указывает нам изменений движения тела в различных местах пути, поэтому для более полной характеристики движения вводят *мгновенное значение* скорости в данный момент времени, или скорость точки в данный момент  $t$ .

Представим себе, что определено перемещение

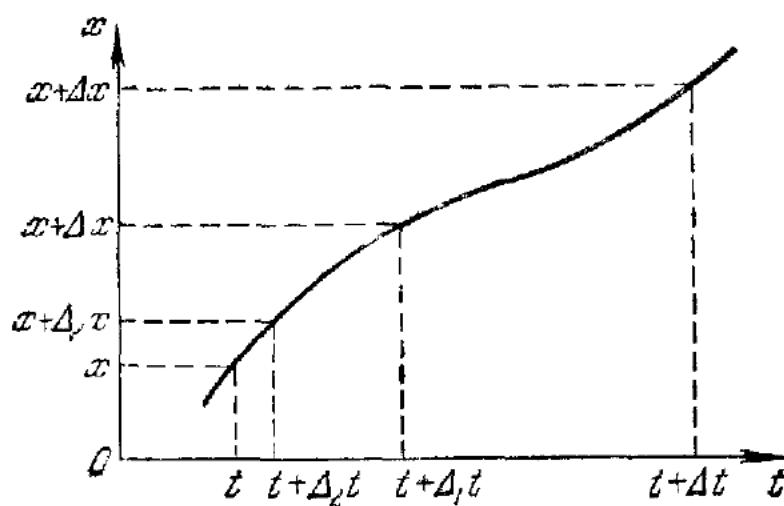


Рис. 3.

$\Delta x$ , которое точка совершила за небольшой промежуток времени  $\Delta t$ , тогда средняя скорость на этом участке будет иметь значение

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Пусть в момент времени  $t$  точка имела координату  $x$  (рис. 3), а в момент времени  $t + \Delta t$  — координату  $x + \Delta x$ . Представим себе, что произведен ряд измерений  $\Delta x$  при различных  $t + \Delta t$ , последовательно уменьшающихся: при  $t + \Delta_1 t$ , при  $t + \Delta_2 t$  и т. д. Очевидно, что если различные значения  $\Delta_i t$  и соответствующие им  $\Delta_i x$  настолько малы, что движение на участке  $\Delta_i x$  можно считать почти равномерным, то получатся одинаковые значения величины скорости

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

при достаточно малом значении  $\Delta t$ . Это значение скорости и есть скорость точки в данный момент времени  $t$ , — точнее, вблизи данного момента.

Более строгое в математическом смысле определение скорости точки в момент  $t$  записывается так:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Это означает: скорость есть тот предел (limitis), к которому стремится отношение приращения координаты  $\Delta x$  к соответствующему приращению времени  $\Delta t$  при условии, что  $\Delta t$  стремится к нулю. В математике этот предел называется производной от координаты  $x$  по времени и обозначается так:

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

В этом выражении  $dt$  по определению равно  $\Delta t$ , а  $dx$  отличается от соответствующего  $\Delta x$  на величины, пропорциональные  $dt^2$ ,  $dt^3$  и т. д. (рис. 4). Математически выражения (3.3) и (3.4) показывают, что величина скорости равна производной от координаты по времени. Можно представить равенство (3.4) и так:

$$dx = v dt, \quad (3.5)$$

или: достаточно малое приращение координаты равно произведению скорости на приращение времени.

По графику зависимости координаты движущейся точки от времени принципиально можно найти величину скорости и вычеркнуть график ее зависимости от времени. Пусть график  $x(t)$  задан в определенном масштабе на рис. 5, а. Полагаем, что ось абсцисс  $t$  можно разделить на такие малые участки  $dt$ , над которыми отрезок кривой  $x(t)$  с большой степенью точности можно считать отрезком

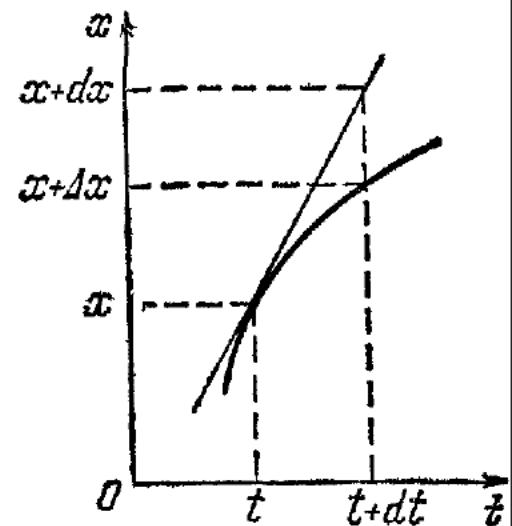


Рис. 4.

касательной<sup>1)</sup>); тогда тангенс угла наклона касательной  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dt}$  и даст численное значение скорости в единицах, которые определяются единицами длины и времени.

Очевидно, что при тех значениях времени, при которых кривая  $x(t)$  — почти прямая (или совсем прямая), промежутки  $dt$  можно брать и не очень малыми, но там, где кривая  $x(t)$  резко изгибаются, промежутки  $dt$  должны быть очень малы для точного определения  $\frac{dx}{dt} = v$ , что практически сделать трудно, и поэтому точность определения скорости по графику для этих моментов времени может быть недостаточной.

На рис. 5, б показаны значения скорости  $v(t)$ , соответствующие графику движения  $x(t)$  (см. рис. 5, а), в том же масштабе времени. Из сравнения графиков видно, что в моменты времени, соответствующие наибольшим значениям скорости  $v(t)$ , наблюдается наибольший рост координаты  $x(t)$ , т. е. наибольшая крутизна подъема кривой на графике  $x(t)$ .

Значение скорости точки в данный момент можно найти, отмечая координаты, измеренные через малые отрезки времени,

как было только что указано, но практически, конечно, этот способ очень мало пригоден. Поэтому существует целый ряд специальных приборов, которые непосредственно измеряют значение скорости движущейся материальной точки. Так, например, скорость движения автомобиля показывается особым прибором — спидометром (от английского speed — скорость).

Физическая величина — скорость точки в данный момент — определяет быстроту изменения координаты со временем. Существование такой физической величины, как скорость точки в данный момент, связано с непрерывностью изменения координаты с течением времени и с наличием закономерной связи между изменением

<sup>1)</sup> Касательной к кривой линии в данной ее точке называют предельное положение, которое занимает прямая линия, проходящая через данную точку, при условии, что вторая точка пересечения кривой этой линией беспрепятственно приближается к первой.

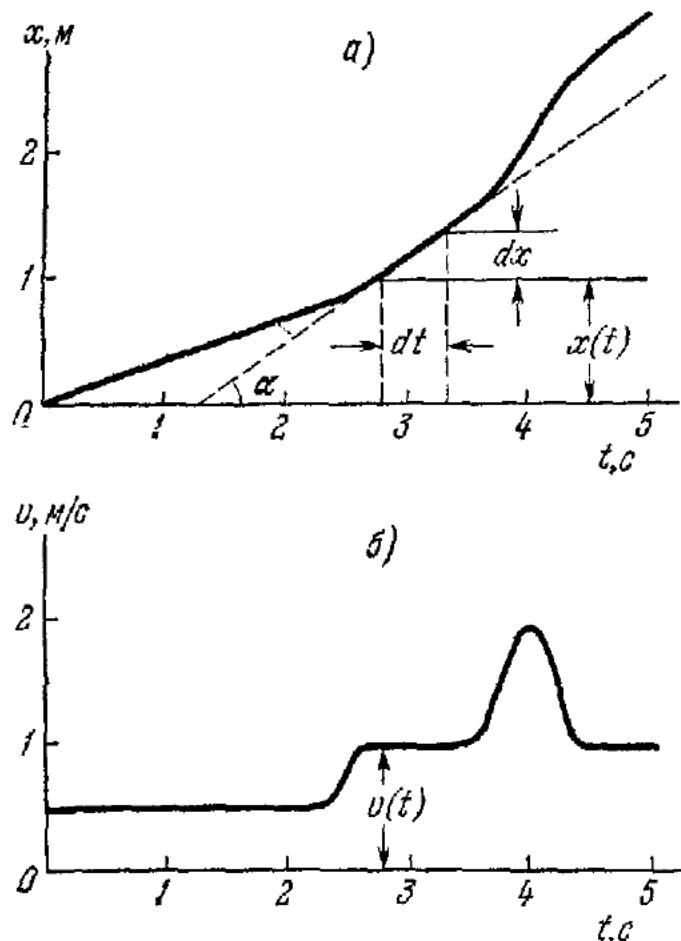


Рис. 5.

этих величин. Величина скорости определяется разницей в положениях движущейся точки в двух точках пространства, в которых она находится в два различных сколь угодно близких момента времени.

Точное определение мгновенного значения скорости было дано Ньютоном; пользуясь этим определением, он разработал основы анализа бесконечно малых величин.

#### § 4. Связь между скоростью и пройденным расстоянием

Расстояние, пройденное точкой за отрезок времени  $t_2 - t_1$  при постоянной скорости  $v_0$ , очевидно, равно произведению скорости  $v_0$  на время  $t_2 - t_1$ :

$$x_2 - x_1 = v_0 (t_2 - t_1). \quad (4.1)$$

При непостоянной скорости движения точки это выражение лишено смысла. Если известна средняя скорость  $v_{\text{ср}}$  за время  $t_2 - t_1$ , то пройденное расстояние будет выражаться формулой, аналогичной (4.1), в которой вместо  $v_0$  будет стоять  $v_{\text{ср}}$ .

В случае, когда средняя скорость неизвестна, вычисление расстояния, пройденного телом, нужно производить особым способом, который основан на том, что всякое движение за достаточно малый промежуток времени можно всегда с достаточной точностью полагать равномерным. Поэтому для определения расстояния  $dx$ , которое тело пройдет за достаточно малый промежуток времени  $dt$ , нужно скорость  $v$  в данный момент времени  $t$  умножить на соответствующее приращение времени  $dt$ . Это произведение, равное  $v dt$ , равно приращению координаты  $dx$  за время  $dt$ :

$$dx = v dt. \quad (4.2)$$

Затем предположим, что мы разбили весь промежуток времени  $t_2 - t_1$  на бесконечно большое число малых промежутков  $dt$ . Каждому малому промежутку  $dt$  соответствует свое малое приращение  $dx$ . Расстояние  $x_2 - x_1$ , пройденное за время  $t_2 - t_1$ , можно записать в виде суммы всех  $dx$ . Такая сумма называется *интегралом* и записывается в виде

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Вместо  $dx$  под знак интеграла подставим, равную ему величину  $v dt$  и будем суммировать по времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Тогда отрезок, пройденный телом за время  $t_2 - t_1$ , можно записать в таком виде:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

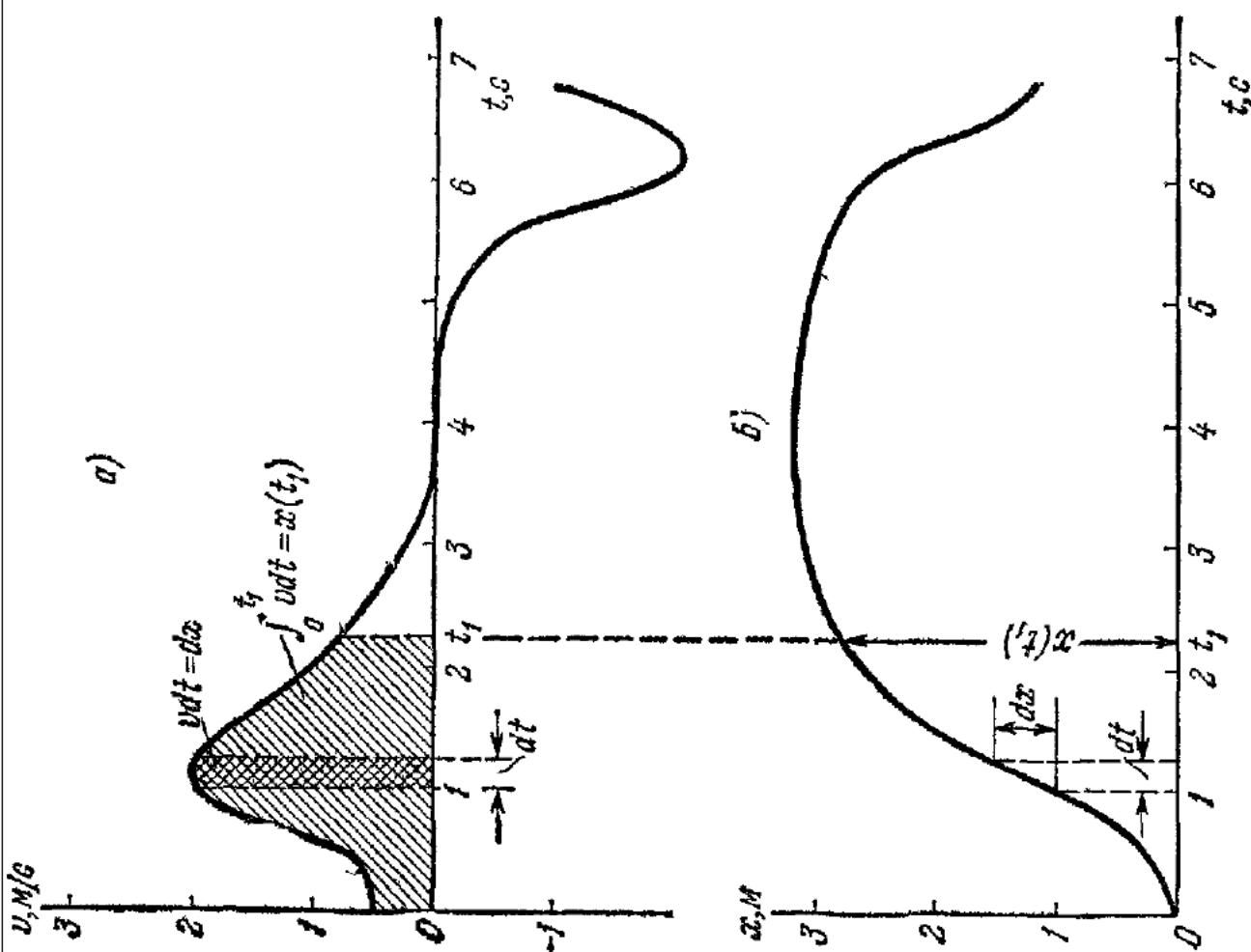


Рис. 7.

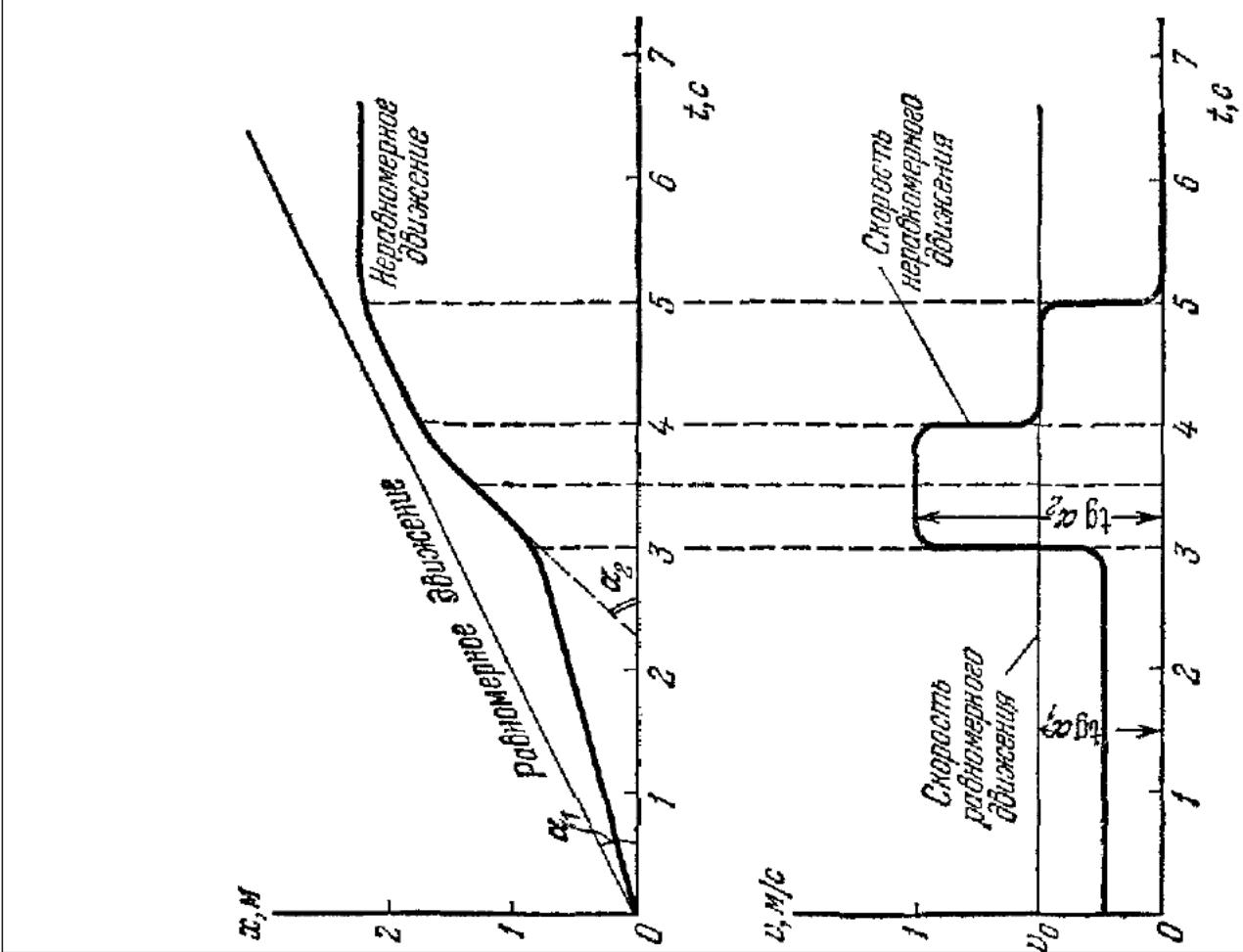


Рис. 6.

Вычисление величины  $x_2 - x_1$  по известной величине скорости  $v(t)$  представляет задачу интегрального исчисления. Интегрирование представляет собой действие, обратное дифференцированию, т. е. получению производной. Величина пройденного расстояния равна интегралу от скорости  $v$  по времени  $t$ . Закономерная связь трех физических величин — координаты, времени и скорости — математически определяется производной и интегралом.

На рис. 6 показаны графики координат и скорости для двух движений — равномерного и неравномерного. Если нам известен график скорости движения  $v(t)$ , то по нему можно найти график  $x(t)$ <sup>1)</sup> для этого же движения, и притом практически достаточно точно. На рис. 7, а в определенном масштабе дано построение зависимости скорости  $v$  как функции  $t$ . Возьмем отрезок  $dt$ , тогда площадь  $v dt$  (густо заштрихованная на рис. 7, а), вычисленная в тех же единицах масштабов, в которых отложены величины по осям, будет численно равна приращению  $x(t)$  за время  $dt$  (рис. 7, б). Координата точки, в момент времени  $t_1$  равная  $x(t_1)$ , очевидно, будет равна всей площади, ограниченной кривой  $v(t)$  на участке  $0 - t_1$ , так как

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} dx = \int_0^{t_1} v dt.$$

Таким образом, вычисляя площадь под кривой  $v(t)$  на участке от  $t = 0$  до  $t = t_2$ , мы можем определить координату  $x$  в любой момент времени  $t_2$ . Результат численного интегрирования изображен на рис. 7, б. Такое определение площади практически можно сделать достаточно точно, и поэтому способ определения координаты по заданной графически скорости значительно более точен, чем способ определения скорости по заданному графику координаты.

## § 5. Ускорение при движении точки по прямой

При неравномерном движении точка имеет переменную скорость, которую, подобно координате, можно рассматривать как функцию времени. Величина скорости указывает на быстроту возрастания перемещения тела. На быстроту же изменения скорости указывает величина ускорения.

Ускорение, которое тело имеет в данный момент, определяют так: пусть в момент времени  $t$  скорость имеет величину  $v$ , а в момент  $t + dt$  скорость имеет значение  $v + dv$ , где  $dv$  — бесконечно малая величина; отношение

$$\omega = \frac{dv}{dt} \quad (5.1)$$

называют *ускорением*. Величина ускорения равна производной от скорости по времени.

<sup>1)</sup> Если известно положение точки в какой-то определенный момент времени.

Размерность ускорения равна отношению размерностей скорости и времени:

$$[w] = \frac{[v]}{[t]} = l t^{-2}. \quad (5.2)$$

Если скорость измеряется в м/с, а время — в секундах, то ускорение будет измеряться в м/с<sup>2</sup>. Единицы скорости и ускорения, как правило, не имеют названия. Только в морском деле употребляется единица скорости, имеющая особое название «узел», равная скорости, при которой одна морская миля (1,853 км) проходится за один час. В технике иногда ускорение выражают в долях ускорения свободного падения тела в безвоздушном пространстве у поверхности Земли, тогда величину ускорения, равную 981 см/с<sup>2</sup>, принимают за единицу. При обычных расчетах в физике и технике величины единиц скорости и ускорения зависят от выбора основных единиц: длины и времени.

При движении с постоянным ускорением скорость возрастает (или убывает) равномерно со временем, а координата растет со временем (или убывает) по квадратичному закону. Примером движения тела с постоянным ускорением по прямой является падение его на Землю.

Еще Галилей, анализируя свои опыты с падением тел в воздухе, утверждал, что ускорение всех тел,

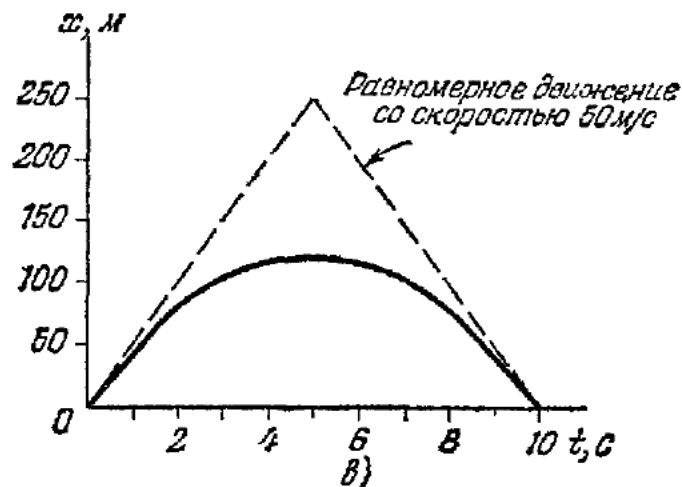
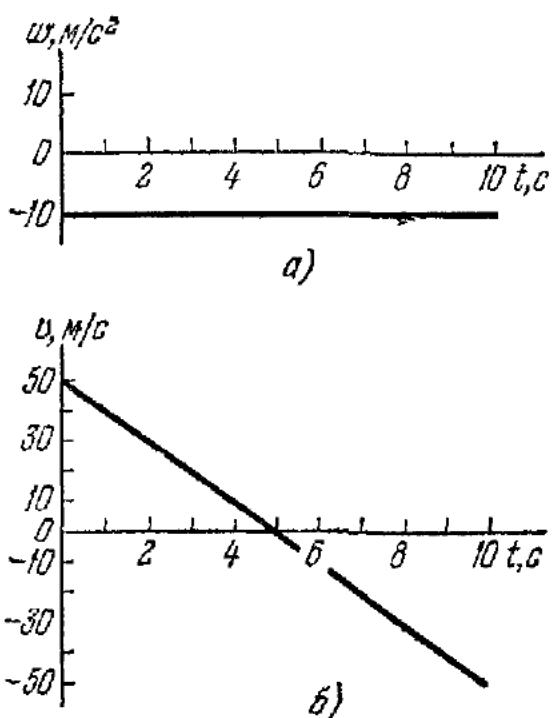


Рис. 8.

брошенных вверх (вблизи поверхности Земли), как во время полета вверх, так и при падении *одинаково* (при условии отсутствия влияния воздуха). Это ускорение зависит от широты данной местности и на широте Москвы равно примерно 9,81503 м/с<sup>2</sup>. Графики ускорения, скорости и координаты тела, брошенного вертикально вверх в пустоте, показаны на рис. 8.

Падение тела в пустоте — это пример движения с постоянным ускорением. Если же ускорение с течением времени изменяется, то,

следовательно, и скорость будет как-то изменяться, причем она не будет меняться по линейному закону, как это имеет место при движении с постоянным ускорением. Рассуждая так же, как и в случае переменной скорости, можно установить, что *изменение скорости за некоторое время будет равно интегралу от ускорения по времени*.

Ускорение можно определить и так: *ускорение — «скорость изменения скорости*. Понятно, что слово *скорость* имеет в данном случае различные значения, поэтому мы и поставили одно из них, выражающее быстроту изменения скорости, в кавычки; пользуясь математическими терминами, слова «*скорость изменения*» можно заменить словом «*производная*».

Математические понятия производной и интеграла были введены Ньютоном для того, чтобы правильно представить законы неравномерного движения тела по прямой. Без этих математических понятий трудно, и часто даже невозможно, разобраться в закономерностях сложных механических движений. Поэтому изучение механики сложных движений тесно связано с развитием математических наук.

## § 6. Движение точки в пространстве

При движении точки вдоль прямой линии направление движения точки в пространстве задано положением этой прямой. Направление движения вдоль заданной прямой может изменяться, при этом изменяется знак скорости. Обычно считают скорость положительной величиной, если положительная координата возрастает с увеличением времени.

Любое движение точки относительно других тел можно представить себе как перемещение ее относительно *системы отсчета*, имеющей три взаимно перпендикулярные координатные оси. Например, для определения движения дробинки относительно стен и пола комнаты за координатные оси можно принять линии пересечения стен и пола, сходящиеся в одном из нижних углов комнаты. Комната представляет тело отсчета, а выбранная нами система осей — систему отсчета, имеющую начало в определенном нижнем углу комнаты.

Расстояния от начала координат до концов перпендикуляров, опущенных на координатные оси из рассматриваемой точки, будем отмечать числами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , причем  $x$  — координата вдоль одной горизонтальной оси,  $y$  — вдоль другой горизонтальной оси, а  $z$  — координата вдоль вертикальной оси (рис. 9).

Если  $x_1$  и  $y_1$  — координаты точки в плоскости, то положение дробинки на полу однозначно определяется двумя координатами  $x_1$  и  $y_1$  и любое движение ее в этой плоскости может быть описано двумя функциями:

$$x_1(t), \quad y_1(t).$$

Положение точки в любом месте комнаты определится как положение относительно системы отсчета, образованной тремя взаимно перпендикулярными координатными осями, и будет точно определено тремя числами:  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ , где  $z_1$  — расстояние точки от пола, а  $x_1$  и  $y_1$  — координаты в горизонтальной плоскости конца отвеса, опущенного из данной точки. Числа  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  — координаты точки в пространстве.

При любом движении точки относительно системы отсчета (например, при движении дробинки относительно комнаты) будут, вообще говоря, одновременно изменяться три числа, три координаты, и поэтому общее движение точки математически может быть описано тремя функциями времени:

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t).$$

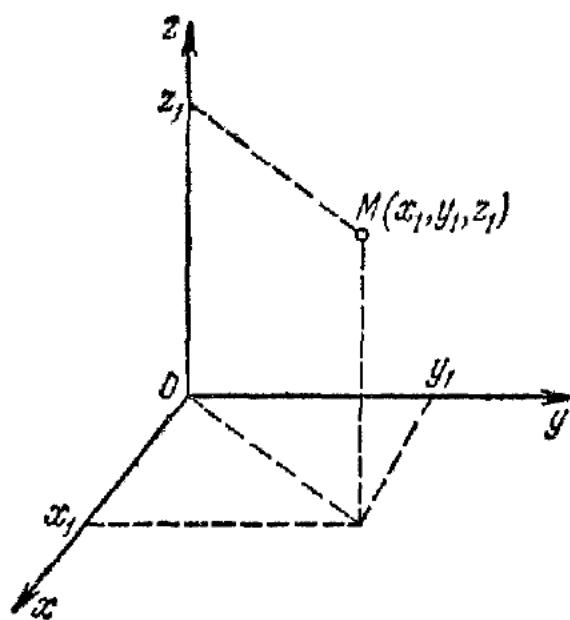


Рис. 9.

Все точки пространства, через которые пройдет движущаяся точка, образуют кривую линию, которая называется *траекторией*. Длину расстояния, пройденного точкой вдоль траектории, называют *величиной пути*. Например, можно говорить о траектории автомобиля, движущегося по городу; очевидно, это будет довольно сложная кривая. Траектория — это кривая, которую «прочертила» точка в пространстве, кривая, по которой двигался автомобиль, а величина пути — это число показываемых счетчиком километров, пройденных автомобилем.

При движении точка перемещается со временем из одних точек пространства в другие, лежащие на траектории. Перемещение точки  $ds$  за малое время  $dt$  определяется не только величиной скорости, но и направлением скорости в пространстве. Скорость тела в данный момент направлена туда, куда тело перемещается в этот же момент.

Скорость точки, движущейся в пространстве, определяется не только отношением  $\frac{ds}{dt}$ , где  $ds$  — длина отрезка траектории, пройденного за время  $dt$ , но и направлением, совпадающим с направлением бесконечно малого отрезка траектории  $ds$ . Для математических операций с такими физическими величинами, которые характеризуются определенным направлением в пространстве и называются *векторными величинами*, в математике разработаны особые правила, основные из которых приведены в следующем параграфе.

## § 7. Основные свойства векторов

Геометрический образ *вектора* — это направленный отрезок прямой, определенным образом ориентированный в пространстве. Перемещение точки в пространстве за любой промежуток времени можно изобразить вектором. Например, в момент  $t_1$  точка была в точке  $A$ , а в момент  $t_2$  — в точке  $B$  (рис. 10, а); тогда перемещение за время  $t_2 - t_1$  изобразится вектором  $\vec{AB}$ <sup>1)</sup>.

Отметим, что вектор перемещения только в случае прямолинейного движения будет совпадать с траекторией движущейся точки. При криволинейном движении траекторией точки является кривая, проходящая через точки  $A$  и  $B$  (пунктир на рис. 10, а).

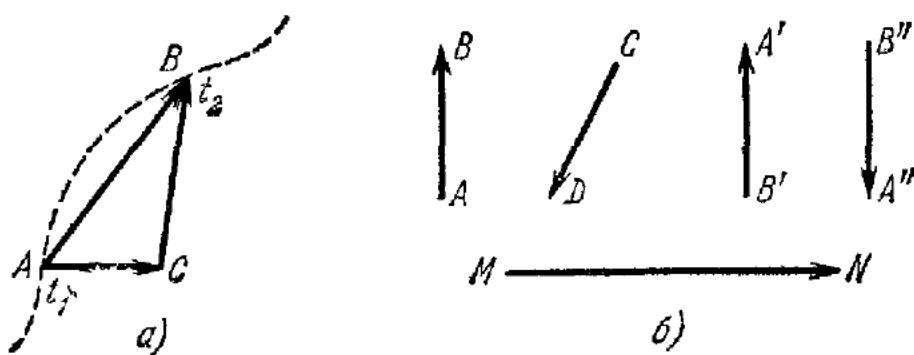


Рис. 10.

Векторы считаются одинаковыми, когда они представляются равными параллельными отрезками и направлены в одну сторону. На рис. 10, б показаны различные векторы, лежащие в плоскости чертежа. Длина отрезка, измеренная в определенном масштабе, равна *абсолютной величине*, или *модулю* вектора<sup>2)</sup>, а расположение отрезка и стрелка обозначают его направление. Так, векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  имеют одинаковые абсолютные величины, но различные направления, вектор  $\vec{AB}$  не равен вектору  $\vec{CD}$ . Векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{MN}$  отличаются как по направлению, так и по величине. Векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{B'A'}$  равны, т. е. они равны по абсолютной величине и совпадают по направлению.

Допустим, что точка переместилась на отрезок  $\vec{AB}$  (рис. 10, а), перешла из точки  $A$  в точку  $B$ . Такое перемещение точки можно рассматривать как сумму двух перемещений; допустим, что из точки  $A$  произошло перемещение в некоторую произвольную точку  $C$  (это перемещение изображено вектором  $\vec{AC}$ ), а затем из точки  $C$  — в точку  $B$  (соответствующее перемещение изображено вектором  $\vec{CB}$ ).

<sup>1)</sup> Стрелка над  $\vec{AB}$  обозначает вектор, направленный от  $A$  к  $B$ .

<sup>2)</sup> Абсолютная величина вектора  $\vec{AB}$  (или модуль его) обозначается  $|\vec{AB}|$  или просто  $AB$  (без стрелки сверху).

Следовательно, перемещение  $\vec{AB}$  равно сумме перемещений  $\vec{AC}$  и  $\vec{CB}$ , или векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{CB}$  в сумме дают вектор  $\vec{AB}$ . Векторы складываются геометрически: сумма двух векторов равна диагонали параллелограмма, сторонами которого являются складываемые векторы. По этому же правилу происходит и вычитание векторов:

вектор  $\vec{CB}$  равен разности векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , из перемещения  $\vec{AB}$  нужно вычесть перемещение  $\vec{AC}$ , в результате получится перемещение  $\vec{CB}$ .

Векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{CB}$  называются *составляющими* вектора  $\vec{AB}$ . Сумму нескольких векторов можно получить следующим по-

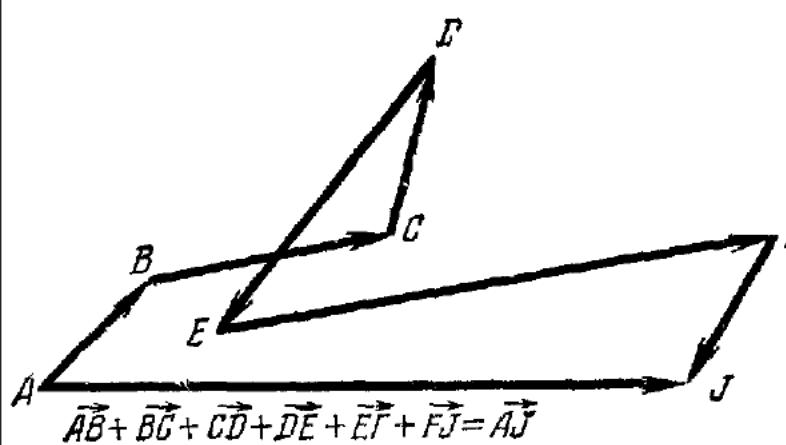


Рис. 11.

строением «цепочки векторов» (рис. 11): поочередно все складываемые векторы выстраиваются таким образом, что к концу первого вектора приставлено начало второго, к концу второго — начало третьего и т. д., затем соединяют начало первого и конец последнего. Вектор, соединяющий начало первого вектора и конец «цепочки», представляет сумму всех векторов.

Совершенно очевидно, что по известным составляющим векторам всегда можно определить их сумму. Обычно при вычислениях с векторными величинами удобно представлять векторы их составляющими по заданным определенным направлениям. Поясним это вначале для векторов, лежащих в плоскости (рис. 12). Выберем на плоскости прямоугольную систему координат  $x, y$ , тогда любой вектор <sup>1)</sup>  $\mathbf{a}$  можно представить как сумму

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{a}_x$  — вектор, направленный вдоль оси  $x$  и называемый *составляющей* вектора  $\mathbf{a}$  по оси  $x$ ; аналогично  $\mathbf{a}_y$  — составляющая по оси  $y$ . Очевидно, две составляющие вектора однозначно определяют его величину и направление. (Иногда вместо составляющих вводят *проекции* вектора на заданные направления, или *компоненты* вдоль осей.)

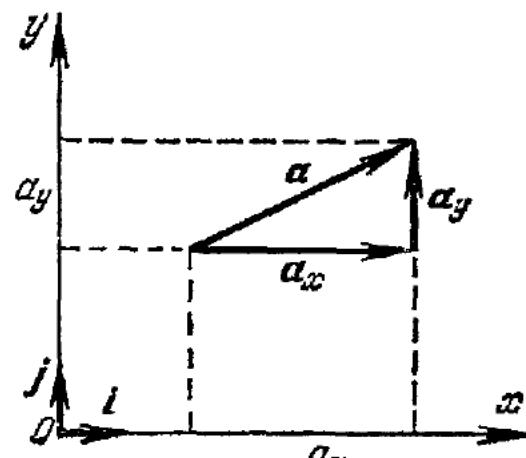


Рис. 12.

<sup>1)</sup> Будем далее обозначать вектор одной полужирной буквой, а его модуль — той же самой буквой обычным шрифтом или полужирной буквой между вертикальными черточками:  $| \mathbf{a} |$ .

Обозначим через  $\mathbf{i}$  единичный вектор вдоль оси  $x$ , а через  $\mathbf{j}$  — единичный вектор вдоль оси  $y$ . Единичным вектором по определению называют вектор, модуль которого равен единице. Единичный вектор указывает только определенное направление в пространстве. Тогда составляющие можно записать так:

$$\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = a_y \mathbf{j}, \quad (7.2)$$

где  $a_x$  и  $a_y$  — уже не векторы, а обычные числа — *скаляры*, которыми представляются величины, не имеющие направления в пространстве, например время, координата и т. д. Числа  $a_x$  и  $a_y$  называются проекциями  $\mathbf{a}$  на определенные направления, указанные векторами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , или просто проекциями вектора на данные координатные оси  $x$  и  $y$ . В практических задачах мы всегда будем определять векторные величины относительно каких-то определенных прямоугольных координатных осей, относительно какой-то избранной системы отсчета, которая задается направлением единичных векторов  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ .

Модуль (или длина) вектора  $\mathbf{a}$ , лежащего в плоскости, равен

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (7.3)$$

Принимая во внимание формулы (7.2) и (7.1), можно записать:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}. \quad (7.4)$$

Эти формулы пригодны для любого вектора  $\mathbf{a}$ , лежащего в плоскости.

Если вектор  $\mathbf{a}$  расположен в пространстве, то его можно относить к прямоугольной координатной системе  $x, y, z$ . Единичный вектор вдоль оси  $z$ , перпендикулярный к векторам  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , обозначают обычно буквой  $\mathbf{k}$ . Тогда, рассуждая аналогичным образом, можем записать вектор  $\mathbf{a}$  через составляющие так:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (7.5)$$

где  $a_z$  — составляющая вдоль оси  $z$ , или, переписывая составляющие через проекции  $a_x, a_y, a_z$ , так:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (7.6)$$

Модуль вектора  $\mathbf{a}$  будет равен

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7.7)$$

Приведем основные правила умножения векторных величин. Умножение вектора  $\mathbf{a}$  на число  $\beta$  записывается так:  $\beta \mathbf{a}$ , и означает увеличение модуля вектора в  $\beta$  раз с сохранением его направления, если  $\beta > 0$ , и изменением направления на обратное, если  $\beta < 0$ . Различают два вида умножения векторов: *скалярное* и *векторное*; в первом случае произведение векторов — скаляр, во втором — вектор.

*Скалярное произведение* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по определению равно произведению модулей этих векторов на косинус угла  $\alpha$  между ними. Обозначается скалярное произведение так:

$$\mathbf{ab} = ab \cos \alpha; \quad (7.8)$$

оно равно модулю одного вектора, умноженному на проекцию на него другого вектора. Например, если один вектор представляет силу, а другой — перемещение, то работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Очевидно,  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ .

Скалярное произведение обладает *свойством распределительности*:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Оно доказывается просто (рис. 13):

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = am, \quad \mathbf{ab} = an, \quad \mathbf{ac} = a(m - n).$$

Принимая во внимание это свойство, можно доказать, что

$$\mathbf{ab} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (7.9)$$

учитывая, что  $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$  и  $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$ . Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих проекций на оси координат.

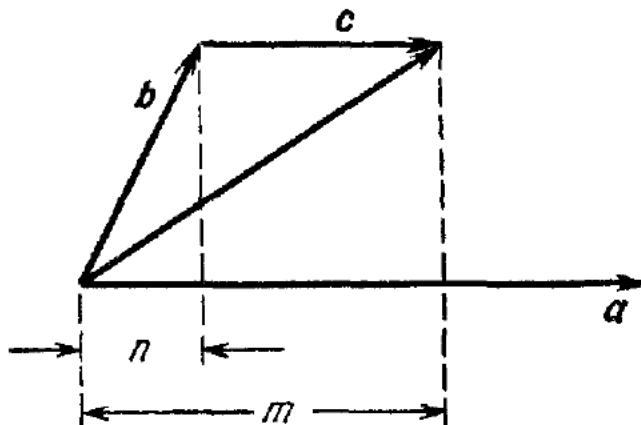


Рис. 13.

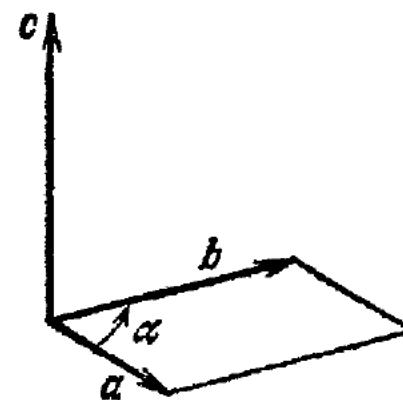


Рис. 14.

*Векторное произведение* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по определению равно вектору  $\mathbf{c}$ , нормальному к плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , модуль которого равен  $ab \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами-сомножителями. Векторное произведение обозначается так:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}].$$

Направление вектора  $\mathbf{c}$  выбирается по *правилу правого (стандартного) винта*: если в гайке, закрепленной в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , вращать этот винт по направлению от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$ , то винт продвинется в направлении вектора  $\mathbf{c}$  (рис. 14). Отсюда следует, что векторное произ-

ведение, в отличие от скалярного, зависит от порядка сомножителей; говорят, что векторное произведение некоммутативно, т. е.

$$[ab] = -[ba].$$

Из определения векторного произведения следует, что модуль вектора  $c$  численно равен площади параллелограмма, образованного векторами  $a$  и  $b$ .

В векторной алгебре доказывается *свойство распределительности* векторного произведения:

$$[a(b+c)] = [ab] + [ac].$$

Здесь следует соблюдать порядок сомножителей.

Принимая во внимание это свойство, можно вывести несколько сложное (на первый взгляд) выражение для векторного произведения через произведение проекций сомножителей:

$$\begin{aligned} c = [ab] &= [(a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k)] = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k. \end{aligned} \quad (7.10)$$

При выводе следует учитывать, что (рис. 15)

$$\begin{aligned} [ij] &= -[ji] = k, \quad [jk] = -[kj] = i, \\ [ki] &= -[ik] = j, \quad [ii] = [jj] = [kk] = 0. \end{aligned}$$

Полезно записать равенство (7.10) в проекциях:

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Формулы (7.11) легко запомнить, если обратить внимание на то, что чередование индексов  $x, y, z$  во всех столбцах идет по кругу (см. рис. 15).

Подчеркнем еще раз разницу между скалярной и векторной величинами: значение скалярной величины представляется *одним* числом, значение векторной величины в пространстве представляется *тремя* числами.

Более общее определение векторной величины такое: *вектор — упорядоченная совокупность трех чисел (представляющих собой физические величины), зависящих от системы координат и изменяющихся при повороте системы отсчета так же, как изменяются координаты точки*. При параллельном переносе системы координат проекции (компоненты) вектора не изменяются, они изменяются только при повороте системы координат. В физике мы будем часто встречаться с векторными величинами, например, перемещение, скорость, ускорение, сила и т. д. являются векторными величинами.

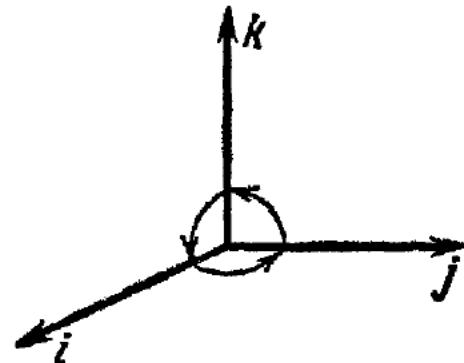


Рис. 15.

## § 8. Скорость точки

На достаточно малом участке пути любое движение точки можно считать прямолинейным. Точка, движущаяся по кривой линии (рис. 16), за очень малое время  $dt$  проходит достаточно малый отрезок и совершает перемещение  $dS$ . Перемещение  $dS$  следует считать вектором, направленным в сторону движения вдоль касательной к траектории.

Тогда в соответствии с (3.5) можно определить вектор скорости  $v$  из следующего равенства:

$$dS = v dt; \quad (8.1)$$

так как  $dt$  — скаляр, то вектор  $v$  совпадает по направлению с  $dS$ . Теперь можно сказать, что скорость представляет отношение

$$\frac{dS}{dt} = v.$$

Скорость есть векторная физическая величина, имеющая то же направление, что и касательная к траектории. Поэтому скорость

можно изображать отрезками-векторами на чертежах и рисунках, предварительно условившись относительно масштаба единицы скорости. Сложение и вычитание скоростей следует производить, как сложение и вычитание векторов.

Вектор скорости  $v$  совпадает по направлению с вектором достаточно малого смещения точки  $dS$  за достаточно малое время  $dt$ . Перемещение  $dS$  и скорость  $v$  — совершенно различные величины, они имеют только

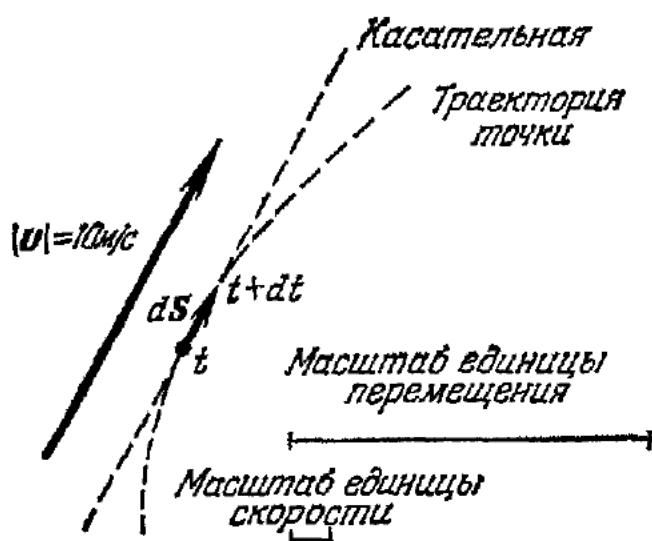


Рис. 16.

общее направление в пространстве. Отрезок  $dS$  на рис. 16 представляет в определенном масштабе длину фактического перемещения точки за время  $dt$ , а отрезок, обозначенный через  $v$ , условно изображает скорость в своем масштабе: единица длины отрезка соответствует определенной единице скорости.

Для примера на рис. 16 показаны масштабы единиц перемещения и скорости; в дальнейшем масштабы различных векторных величин не будут указываться на чертежах, но необходимо всегда помнить, что для каждой величины имеется свой определенный масштаб.

При любом движении точки по кривой линии изменяется как направление скорости, так и ее абсолютная величина. Скорость остается неизменной только в том случае, если остаются неизмен-

ными ее абсолютная величина и направление. Движение с постоянной, неизменной скоростью есть равномерное и прямолинейное движение. Движение по кривой линии есть движение с переменной скоростью.

Анализируя скорость какого-либо простого движения, можно представлять ее как векторную сумму двух или более составляющих скорости. Например, шарик движется по горизонтальной плоскости; координатные оси  $x$  и  $y$  лежат в этой плоскости. Вектор скорости  $v$  имеет в некоторый момент совершенно определенное направление относительно координатных осей  $x$  и  $y$ , которое определяется углом  $\alpha$  между направлениями скорости и оси  $x$ . Можно найти величину и направление вектора скорости, если указаны проекции вектора скорости вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Можно считать, что вектор  $v$  слагается из двух векторов (рис. 17), один из которых направлен по оси  $x$ , другой — по оси  $y$ :

$$v = v_x i + v_y j, \quad (8.2)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  — проекции вектора скорости на координатные оси, а  $i$  и  $j$  — единичные векторы тех же осей. Вектор  $v_x i$  представляет составляющую скорости вдоль оси  $x$ , вектор  $v_y j$  — вдоль оси  $y$ . Если, например, окажется, что одна из составляющих равна нулю, то это означает, что скорость  $v$  направлена параллельно другой координатной оси. Модуль вектора скорости

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (8.3)$$

а угол  $\alpha$  между вектором скорости и осью  $x$ , очевидно, равен

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x}. \quad (8.4)$$

Составляющая вектора скорости представляет собой скорость проекции движущейся точки на данную координатную ось и называется просто скоростью вдоль координатной оси. Зная скорости вдоль двух координатных осей, можно вычислить величину и направление скорости в плоскости.

Составляющая скорости вдоль определенной оси представляет собой скорость проекции тела на данную ось, ее можно наглядно представить себе как скорость тени движущегося тела. Например, на столе по рельсам в определенном направлении катится тележка, освещаемая источником света, расположенным где-то вдали от стола, почти в плоскости движения тележки, так, что лучи идут параллельно оси  $x$  (на рис. 18 изображен вид сверху). Тогда тень от вертикального стержня, закрепленного на тележке, отбрасываемая на экран, поставленный перпендикулярно к оси  $x$ , будет двигаться по экрану с некоторой

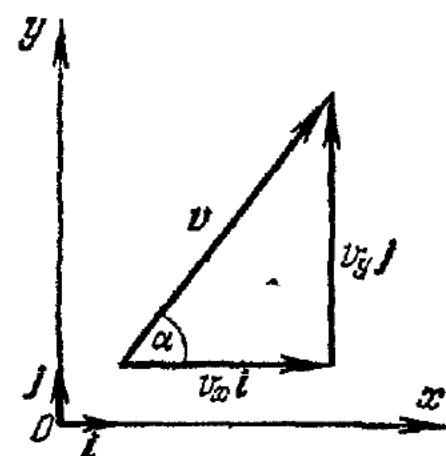


Рис. 17.

скоростью  $v_y$ . Очевидно, что скорость движения тени есть составляющая скорости стержня по направлению оси  $y$ . Зная скорости тени на двух перпендикулярно расположенных экранах, мы определим величину и направление скорости движения стержня по столу.

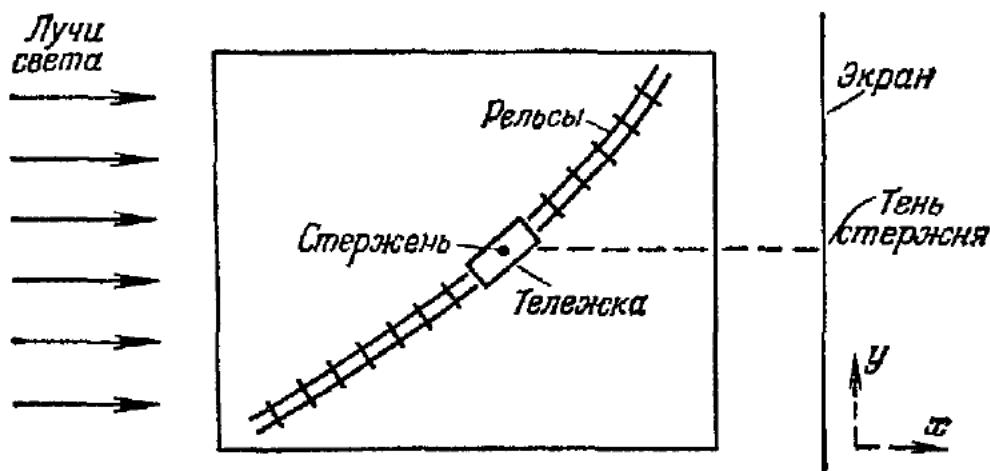


Рис. 18.

При движении точки в пространстве вектор-отрезок  $d\mathbf{S}$  определяется однозначно тремя его проекциями на координатные оси,

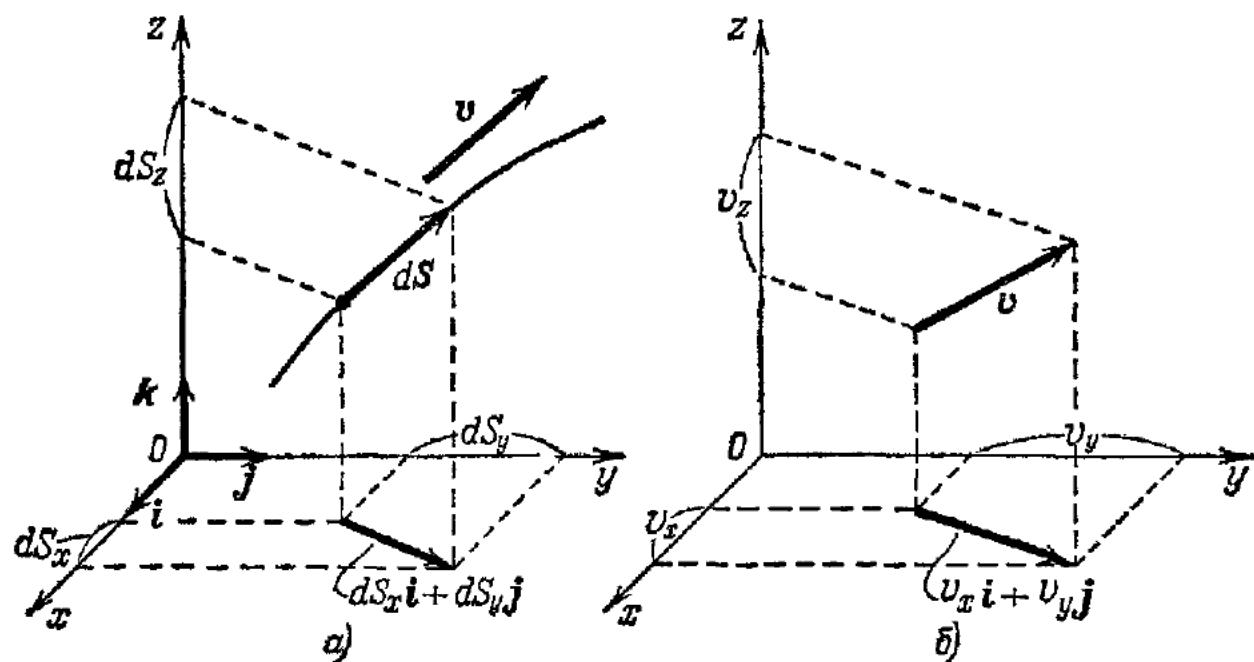


Рис. 19.

которые можно взять прямоугольными (рис. 19, а). Вектор  $d\mathbf{S}$  можно записать так:

$$d\mathbf{S} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}, \quad (8.5)$$

где  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  — проекции вектора  $d\mathbf{S}$  на оси координат; отсюда вектор скорости будет

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad (8.6)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  — проекции вектора скорости на соответствующие оси координат. Проекции вектора скорости на оси координат равны производным от проекций точки на данную ось, или просто производным от координат движущейся точки. Скорость точки в пространстве можно представлять как сумму двух скоростей: 1) скорости проекции точки на горизонтальную плоскость  $xOy$ , равной  $v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ , и 2) скорости проекции точки на вертикаль, равной  $v_z\mathbf{k}$  (рис. 19, б). Обычно говорят короче, например: скорость самолета имеет две составляющие — горизонтальную и вертикальную.

Абсолютная величина скорости  $v$  выражается через ее проекции следующим образом:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (8.7)$$

в чем легко убедиться, рассматривая рис. 19. Во время любого движения точки в пространстве в общем случае все проекции ее перемещения изменяются, т. е. *скорость меняется как по абсолютной величине, так и по направлению*.

## § 9. Ускорение точки, движущейся по плоскости.

### Центростремительное ускорение

Ускорение — физическая величина, определяющая изменение скорости в данный момент. Пусть скорость автомобиля, выезжающего из ворот (рис. 20), будет в момент времени  $t$  равна  $\mathbf{v}$ . Вектор скорости, ради наглядности, изображен рядом с автомобилем, а также (в определенном масштабе) показан отдельно в правой части рисунка. В момент времени  $t + dt$  скорость имеет значение  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , где  $d\mathbf{v}$  — вектор приращения скорости за время  $dt$ .

Можно сказать и так: к вектору скорости  $\mathbf{v}$  прибавился за время  $dt$  вектор  $d\mathbf{v}$ , и в результате автомобиль имеет скорость  $\mathbf{v}_1$ . Направление вектора  $d\mathbf{v}$  в общем случае не совпадает с направлением скорости  $\mathbf{v}$ .

Если  $dt$  представляет достаточно малую величину, то  $d\mathbf{v}$  также будет достаточно малой векторной величиной и отношение этих величин

$$\omega = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (9.1)$$

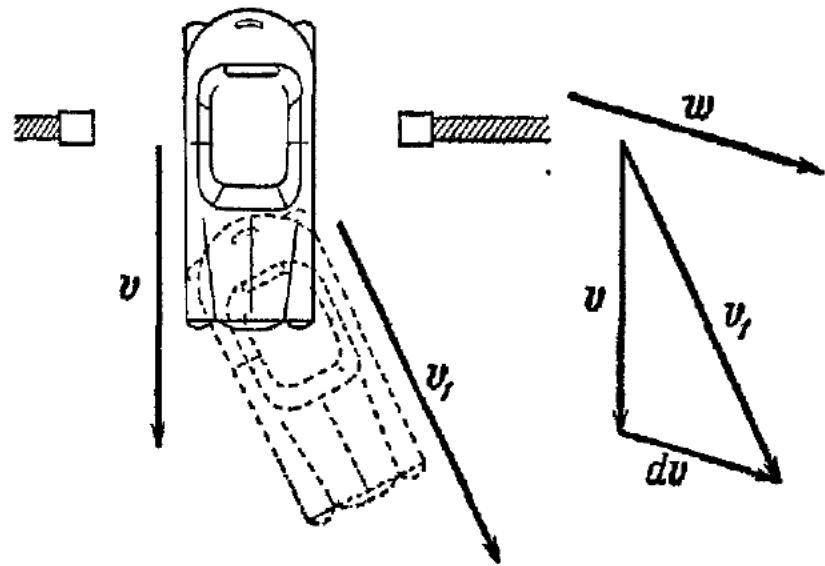


Рис. 20.

будет новой физической *векторной* величиной, называемой ускорением и совпадающей по направлению с  $d\mathbf{v}$ . Ускорение определяет быстроту и направление изменения вектора скорости. Для определения величины ускорения  $\mathbf{w}$  мы должны найти приращение вектора  $\mathbf{v}$  за время  $dt$  и разделить его на время  $dt$ .

При равномерном движении точки по кругу абсолютная величина скорости остается неизменной, но направление ее непрерывно изменяется. Следовательно, вектор скорости не остается постоянным, а получает приращение.

Взяв два вектора скорости тела через небольшой промежуток времени  $\Delta t$  и вычитая первое значение скорости из последующего, получим приращение  $\Delta \mathbf{v}$  (рис. 21). Для определения приращения

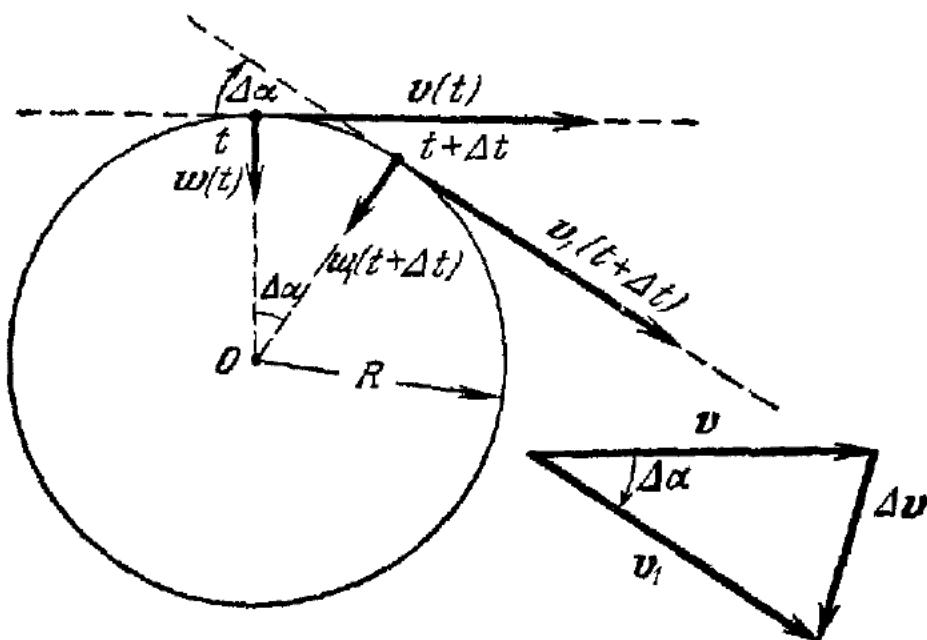


Рис. 21.

скорости строим в соответствующем масштабе отрезки, равные и совпадающие по направлению с векторами скорости  $\mathbf{v}$  (в момент времени  $t$ ) и  $\mathbf{v}_1$  (в момент времени  $t + \Delta t$ ). Направления этих векторов совпадают с направлением касательной к окружности в той точке окружности, где находится точка в данный момент. Затем вычитаем вектор  $\mathbf{v}$  из вектора  $\mathbf{v}_1$  и получаем вектор  $\Delta \mathbf{v}$ . Очевидно, что вектор  $\Delta \mathbf{v}$  не будет перпендикулярен ни к начальному значению  $\mathbf{v}$ , ни к конечному  $\mathbf{v}_1$ . Однако если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то и  $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$ , и направление вектора  $\Delta \mathbf{v}$  в пределе, при  $\Delta t \rightarrow 0$ , стремится к перпендикуляру к вектору скорости  $\mathbf{v}$ . Следовательно, достаточно малое приращение вектора  $d\mathbf{v}$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{v}$ , ускорение  $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  перпендикулярно к скорости и направлено к центру круга.

Величину ускорения можно связать с величиной скорости  $v$  движения по кругу и величиной радиуса  $R$ . Из чертежа (рис. 21) видно, что при очень малом  $\Delta \alpha$

$$|\Delta \mathbf{v}| = \Delta v \approx v \Delta \alpha; \quad (9.2)$$

путь, пройденный точкой за время  $\Delta t$ , равен

$$v \Delta t \approx R \Delta\alpha. \quad (9.3)$$

Исключая из этих двух уравнений  $\Delta\alpha$ , получаем

$$\Delta v \approx \frac{v^2}{R} \Delta t, \quad (9.4)$$

или

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{R},$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{R}. \quad (9.5)$$

Величина ускорения тела, движущегося равномерно по кругу, численно равна квадрату скорости, деленному на величину радиуса.

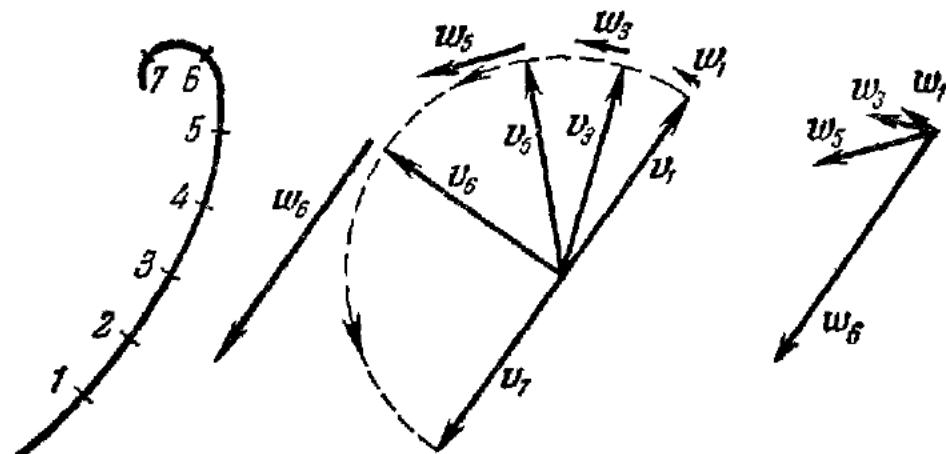


Рис. 22.

Такое ускорение направлено к центру и называется *центростремительным*.

Рассмотрим любое движение точки в плоскости с постоянной по модулю скоростью. Например, тело движется вдоль плоской кривой с постоянной по абсолютной величине скоростью (рис. 22) от точки 1 к точке 7. На рисунке рядом с траекторией вычерчены векторы скорости  $v_i$  для различных моментов времени  $t_i$ , рядом с векторами скорости вычерчены для тех же моментов времени векторы ускорения  $w_i$ . Видно, что ускорение возрастает с увеличением кривизны траектории. Ускорение во всех точках перпендикулярно к скорости, так как точка движется вдоль траектории равномерно.

Для сравнения на рис. 23 показано движение по плоской кривой, когда скорость возрастает по абсолютной величине, и рядом — значения векторов скорости и ускорения в отдельные моменты времени, когда точка находится в определенных, отмеченных на чертеже точках траектории. Точки 1, 2, 3, ..., так же как и на рис. 22,

соответствуют положениям тела через равные промежутки времени.

В этом случае ускорение не перпендикулярно, а наклонено под некоторым углом к скорости. Поэтому обычно различают две составляющие ускорения: одна направлена вдоль скорости — *касательная* составляющая ускорения, вторая, перпендикулярная к скорости, — *нормальная* составляющая ускорения (касательную составляющую называют иногда *тangentialной*).

Если известны законы, по которым изменяются с течением времени величина и направление скорости, то можно определить ускорение в любой момент времени.

Ускорение, как и всякий вектор, можно представить в виде суммы составляющих по осям координат. Например, если вектор ускорения лежит в плоскости  $(x, y)$ , его величину можно записать так:

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j}, \quad (9.6)$$

Рис. 23.

где  $w_x$  и  $w_y$  — проекции вектора  $\mathbf{w}$  на оси координат, а векторы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , как и раньше, — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ .

Проекции ускорения  $w_x$  и  $w_y$  равны производным от проекций скорости:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}. \quad (9.7)$$

Действительно, пусть вектор скорости

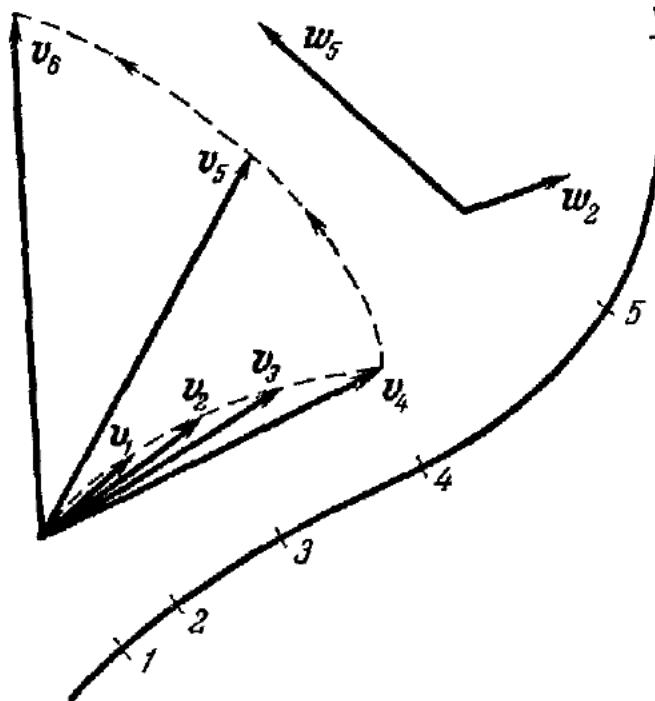
$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}.$$

Полагая  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  неизменными, дифференцируем обе части:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j}. \quad (9.8)$$

Сравнивая (9.8) с (9.6), получаем (9.7).

**Пример 1** Рассмотреть, как зависят от времени проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси координат, когда точка равномерно движется со скоростью  $v_0$  по кругу с радиусом  $R$ . На рис. 24 показаны графики проекций скорости и ускорения точки при этом движении.



**Пример 2** Определить ускорение точки, движущейся по кругу радиуса  $R$ , если абсолютная величина скорости растет со временем по закону  $v = bt$

Пусть в момент  $t$  скорость имеет значение  $v_1$ , а в момент  $t + \Delta t$  — значение  $v_2$  (рис. 25, a), вектор  $v_2$  повернут на очень малый угол  $\Delta\alpha$  относительно  $v_1$  и имеет большую абсолютную величину. Отметим на отрезке вектора  $v_2$  точку  $A$  так, что длина  $OC = OA$ . Если бы скорость оставалась постоянной по абсолютной величине, то в момент  $t + \Delta t$  она представлялась бы вектором  $\overrightarrow{OA}$ ; следовательно, увеличение абсолютного значения скорости за время  $\Delta t$  изображено абсолютной величиной вектора  $|\vec{AB}| = \Delta v_t$ ; это увеличение, очевидно, равно

$$v_2 - v_1 = b(t + \Delta t) - bt = b\Delta t,$$

или

$$\Delta v_t = b\Delta t. \quad (9.9)$$

Приращение скорости за промежуток времени  $\Delta t$ , равное  $\Delta v = v_2 - v_1$ , можно представить как сумму двух векторов  $\Delta v_n$  и  $\Delta v_t$  (рис. 25, a), т. е.

$$\Delta v = \Delta v_n + \Delta v_t.$$

Абсолютная величина вектора  $\Delta v_n$  равна  $\Delta v_n \approx \Delta\alpha \cdot v$ , и так же, как при

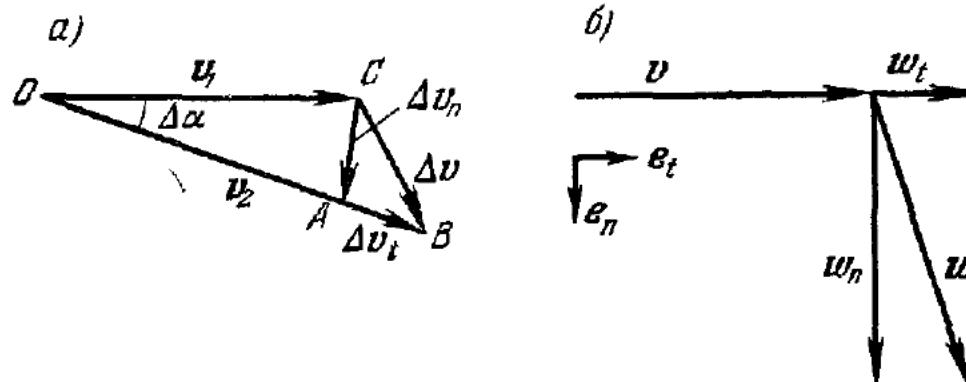


Рис. 25.

равномерном движении (см. формулу (9.4)), ее можно выразить следующим образом.

$$\Delta v_n \approx \frac{v^2}{R} \Delta t. \quad (9.10)$$

Среднее ускорение точки за время  $\Delta t$  будет равно

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \frac{\Delta v_t}{\Delta t},$$

а ускорение в момент  $t$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t}. \quad (9.11)$$

Посмотрим, каков будет предел абсолютных величин этих векторов при  $\Delta t \rightarrow 0$ ; из формул (9.9) и (9.10) находим

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = b, \quad \frac{\Delta v_n}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда очевидно, что в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dv_t}{dt} = b, \quad \frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{R}. \quad (9.12)$$

Теперь посмотрим, каково будет направление векторов  $\Delta v_n$  и  $\Delta v_t$ ; в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  (или  $\Delta \alpha \rightarrow 0$ ) направление вектора  $\Delta v_n$  будет стремиться к перпендикуляру к  $v$ , а  $\Delta v_t$  будет стремиться к направлению вектора  $v$  (рис. 25, б). Если обозначим единичный вектор вдоль  $v$  (по касательной к траектории) через  $e_t$ , а перпендикулярный к нему и направленный по радиусу к центру круга через  $e_n$ , то выражение для ускорения (9.11) с учетом (9.12) примет вид

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} e_n + b e_t. \quad (9.13)$$

Нормальная составляющая ускорения  $w_n = \frac{v^2}{R} e_n$ , касательная составляющая ускорения  $w_t = \frac{dv_t}{dt} e_t = b e_t$ .

Заметим, что нормальная составляющая ускорения  $w_n$  всегда будет иметь такую же величину, как и при равномерном движении. Вектор  $w$  направлен не к центру круга, а как-то под углом к вектору скорости, вперед по движению точки. Очевидно, что при замедленном движении по кругу вектор ускорения будет направлен также под острым углом к вектору скорости, но назад.

Касательная составляющая ускорения  $w_t$  определяет величину изменения модуля скорости движения, а нормальная составляющая  $w_n$  определяет изменение направления скорости движения точки  $v$ .

## § 10. Ускорение при движении точки в пространстве

В предыдущем параграфе мы рассмотрели основные соотношения между векторами скорости и ускорения и их проекциями и составляющими только для того случая, когда векторы скорости и ускорения лежат все время в одной плоскости (плоское движение точки).

Совершенно аналогично можно разобрать и те случаи, когда вектор скорости как угодно ориентирован в пространстве, при любом движении точки в пространстве. В этом случае движение точки происходит относительно системы отсчета, связанной с прямоугольными осями координат ( $x, y, z$ ), и поэтому, так же как и вектор скорости, ускорение можно разложить на сумму составляющих по этим трем координатным осям, а именно:

$$w = w_x i + w_y j + w_z k, \quad (10.1)$$

где  $k$  — единичный вектор по оси  $z$ .

Связь между проекциями скорости и ускорения (см. (9.7)) будет:

$$\omega_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \omega_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \omega_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (10.2)$$

При анализе движения можно выбирать и другие координатные системы отсчета и рассматривать проекции векторов скорости и ускорения на соответствующие координатные оси. Мы обычно будем пользоваться прямоугольной системой координат.

Если известна зависимость от времени координат движущейся точки  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ , то, дифференцируя каждую координату, можно найти проекции вектора скорости, а следовательно, и полное значение вектора скорости; затем, дифференцируя проекции скорости на оси координат, можно найти проекции ускорения, а по ним и вектор ускорения.

Обратные операции (например, по данному вектору скорости найти координаты движущейся точки) сложнее, они сводятся к интегрированию проекций скорости по времени. Если же по заданному ускорению нужно найти координаты, то интегрирование необходимо проделать дважды: вначале по проекциям ускорения найти проекции скорости, а затем уже по проекциям скорости найти координаты движущейся точки как функцию времени.

**Пример** Точка движется в пространстве с постоянным ускорением  $\omega$  (рис. 26), движение свое она начинает в момент  $t = 0$  с какой-то точки оси  $z$  ( $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 \neq 0$ ) со скоростью  $v_0$ , параллельной плоскости  $(x, y)$  (проекции скорости в начальный момент:  $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0y} \neq 0$ ,  $v_{0z} \neq 0$ ). Пусть ускорение направлено вдоль оси  $z$ ,

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \quad \omega_y = 0, \\ v_z &= -a \end{aligned} \quad (10.3)$$

Проекции ускорения на оси  $x$  и  $y$  все время остаются равными нулю, следовательно, проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  будут все время постоянными, т. е.

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} \quad (10.4)$$

в любой момент времени  $t$ . Будет изменяться только проекция скорости на ось  $z$ . На основе (10.2) можем записать:

$$\frac{dv_z}{dt} = \omega_z, \quad v_z = \int_0^t \omega_z dt. \quad (10.5)$$

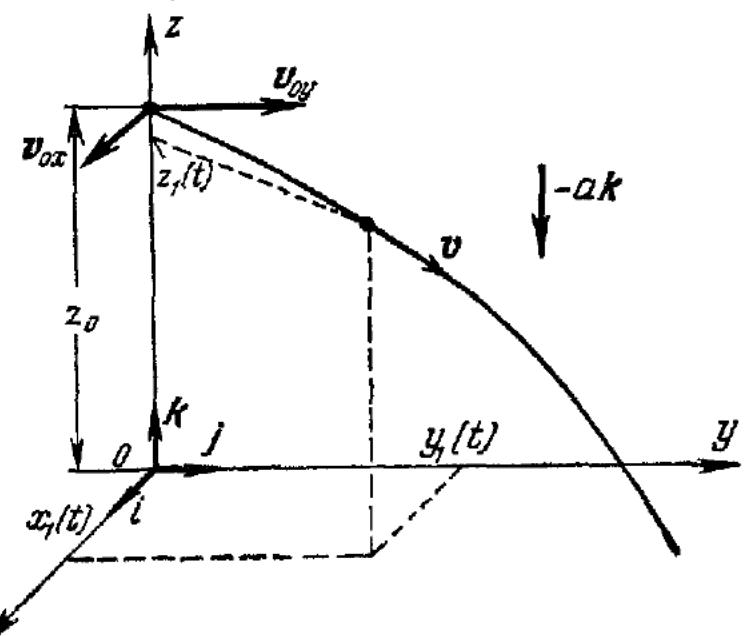


Рис. 26.

Проекция ускорения  $\omega_z = -a$  остается все время постоянной. Проекция точки на ось  $z$  движется равномерно ускоренно. Координата  $z$  определяется так:

$$\frac{dz_1}{dt} = v_z = - \int_0^t a dt = -at, \quad z_1 - z_0 = \int_0^t v_z dt = - \int_0^t at dt = -\frac{at^2}{2}. \quad (10.6)$$

Остальные две координаты точки,  $x$  и  $y$ , найдутся из условия, что проекции скорости на эти оси остаются постоянными.

$$\frac{dx_1}{dt} = v_x = v_{0x}, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_y = v_{0y};$$

отсюда

$$x_1 = \int_0^t v_{0x} dt = v_{0x} t, \quad y_1 = \int_0^t v_{0y} dt = v_{0y} t. \quad (10.7)$$

Таким образом, выражения (10.6) и (10.7) дают изменения всех координат при движении точки с постоянным ускорением  $\omega_z$ .

Движение с постоянным ускорением  $\omega$ , направленным как угодно, можно записать в векторном виде. Полагаем, что движущаяся точка в момент времени  $t$  находится в конце вектора  $r(t)$ , проведенного из некоторой постоянной точки  $O$ .

Скорость движущейся точки  $v = \frac{dr}{dt}$  и ускорение  $\omega = \frac{dv}{dt}$ . Отсюда  $dv = \omega dt$ . Так как  $\omega = \text{const}$ , то

$$v - v_0 = \int_0^t \omega d\xi = \omega t, \quad (10.8)$$

где  $v_0$  — скорость при  $t = 0$ , или

$$v = v_0 + \omega t.$$

Положение точки  $r$  на основе равенства  $dr = v dt$  можно записать так:

$$r - r_0 = \int_0^t v d\xi,$$

где  $r_0$  — положение при  $t = 0$ . Учитывая равенство для скорости  $v$ , получаем

$$r = \omega \int_0^t \xi d\xi + v_0 \int_0^t d\xi + r_0,$$

или

$$r = \frac{1}{2} \omega t^2 + v_0 t + r_0. \quad (10.9)$$

Равенство (10.9) — это общее векторное равенство, представляющее движение точки (частицы) с постоянным ускорением  $\omega$  из точки  $r_0$  с начальной скоростью  $v_0$ . Это равенство наглядно показывает всю кинематику движения: скорость растет линейно со временем в направлении  $\omega$ , вектор положения  $r$  увеличивается линейно в направлении  $v_0$  и квадратично — в направлении  $\omega$ . Относительное положение векторов показано на рис. 27 для случая, когда векторы  $r_0$ ,  $v_0$ ,  $\omega$  лежат в одной плоскости.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общих кинематических закономерностей движения точки в пространстве. Координаты, векторы положения, скорости и ускорения — это величины, изменения которых полностью описывают движение. Если известна зависимость

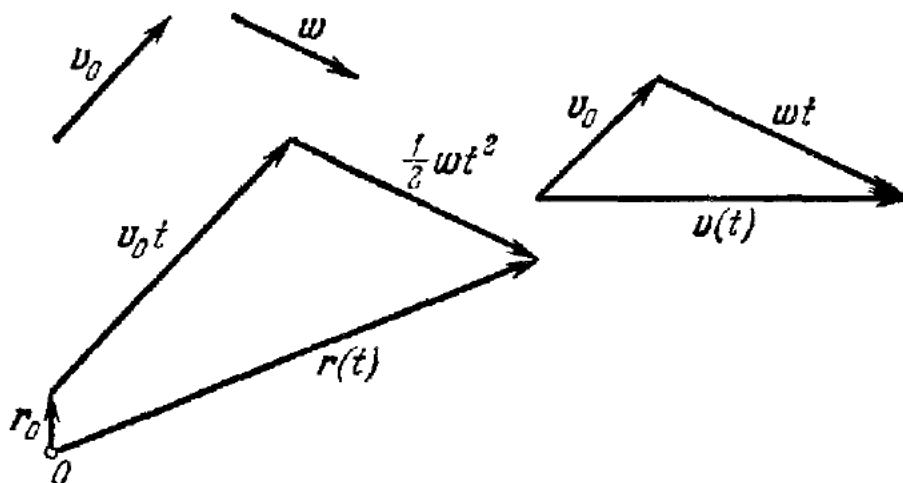


Рис. 27.

от времени одной кинематической векторной величины — скорости или ускорения, то можно найти по этой зависимости другую и координаты движения точки.

Далее мы узнаем, что законы движения точки очень важны и при анализе произвольных движений любого тела.

## § 11. Пространство, время и системы отсчета

До сих пор мы не останавливались на понятиях пространства и времени, полагаясь на известные из курса средней школы представления.

Иногда говорят: механическое движение есть перемещение тела в пространстве с течением времени. Это определение нуждается в существенном уточнении. Следует сказать так: при механическом движении происходит перемещение одних тел относительно других. Если имеется одно-единственное тело, то говорить о его перемещении бессмысленно. Всегда происходит перемещение одного тела относительно другого. Поэтому систему отсчета, относительно которой происходит перемещение, следует назвать *телом отсчета*, фактически ведь всегда система отсчета связана с каким-то телом или телами. В отсутствие тел нельзя себе представить пространства.

Пространство и время — формы существования материи. Введенное Ньютоном представление об *абсолютном*, неподвижном и пустом пространстве лишено смысла. Понятия пространства, его геометрических элементов (точка, линия, поверхность, объем) возникли как абстракции свойств материальных, почти неизменных тел. В механике Ньютона считается, что пространство однородно во всех своих частях и *изотропно* (т. е. свойства его не зависят от направления); иначе говоря, предполагается, что физическое пространство такое

же, каким его представляет геометрия Евклида. Для тех механических явлений, которые рассматриваются в нашем курсе, с огромной степенью точности пространство можно полагать евклидовым. Допущение об однородности и изотропности пространства при анализе этих явлений вполне приемлемо. Но предположение о существовании абсолютно неподвижного, ни с чем не связанного пространства неверно: пространство мы всегда мыслим связанным с определенными телами, телами отсчета.

По Ньютону, время — *абсолютная длительность*, существующая независимо от тел. Это также трудно обосновать; длительность неотделима от материи, поскольку время есть форма существования материи.

В рамках одной системы отсчета можно установить одну меру длительности для всех процессов и явлений, утверждать, что существует одно единое время. Однако, как показано в теории относительности, одновременные события, происходящие в разных местах одной системы отсчета, будут происходить в разные моменты времени, если рассматривать их относительно другой движущейся системы отсчета. Следовательно, течение времени связано с относительным движением систем отсчета; нет единого, абсолютного времени для всех систем отсчета. Все эти положения являются следствием постоянства скорости света во всех системах отсчета. Длительность процессов связана с движением, понятие времени неотделимо от движений тел относительно друг друга.

Но при медленных относительных движениях, когда скорость очень мала по сравнению со скоростью света, зависимость времени от относительного движения системы отсчета практически ничтожна и ею вполне можно пренебречь. Поэтому почти для всех явлений и задач, рассматриваемых в этой книге, можно считать вполне допустимым представление Ньютона об абсолютном и едином времени. В тех же случаях, когда этого сделать нельзя, это будет особо оговорено.

## Глава II

# ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ — ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

## § 12. Движение и взаимодействие тел

Взаимодействие — вот первое, что выступает перед нами, когда мы рассматриваем движущуюся материю в целом с точки зрения теперешнего естествознания.

Ф. Энгельс, Диалектика природы (Госполитиздат, 1965, стр 199)

Наблюдая и изучая движение различных тел, мы приходим к выводу, что движение какого-либо тела вызывается или изменяется в результате взаимодействия его с другими телами. Стоящую на земле тележку рабочий приводит в движение, катит и останавливает. Рабочий сообщил движение тележке относительно земли, он же и

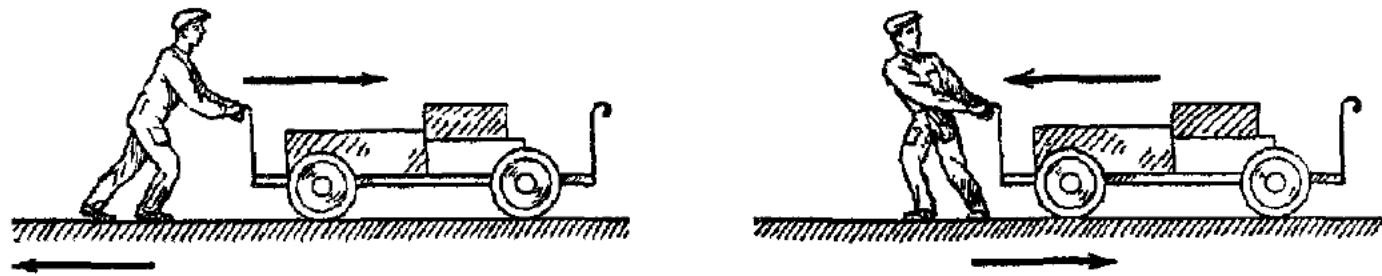


Рис. 28.

прекратил это движение, остановил тележку. Паровоз «трогает» вагоны с места, тянет вагоны за собой, «везет» вагоны. Человек берет камень в руки и бросает, человек сообщает движение камню, камень движется относительно земли и останавливается вследствие взаимодействия с воздухом, с почвой. Таких примеров можно привести сколько угодно. Всюду мы наблюдаем взаимодействие тел, по крайней мере двух тел. Например, когда рабочий катит тележку, имеет место взаимодействие трех тел: рабочий, тележка и земля; рабочий упирается в землю, когда катит тележку или останавливает ее (рис. 28).

Законы динамики устанавливают связь между движением тела и причинами, которые вызвали или изменили это движение.

Начинать изучение законов механики нужно с рассмотрения самых простых движений, доступных непосредственному наблюдению. Поэтому вначале рассмотрим движение тел относительно земной поверхности, полагая, пока без должных оснований, Землю неподвижной. Найдя общие законы этих движений, можно сделать определенные выводы о влиянии движения Земли относительно Солнца на рассматриваемые движения и проверить эти выводы опытами. Целый ряд опытов, о которых будет сказано ниже, подтвердит верность найденных законов для любых движений тел. Поэтому динамические закономерности, установленные для движения тел относительно земной поверхности, можно распространить и на движение небесных тел, на этом основании произвести теоретические расчеты и опять проверить следствия расчетов наблюдениями. Забегая вперед, скажем, что такую проверку сделал еще сам Ньютона, и с тех пор физические исследования и астрономические наблюдения блестяще подтверждают справедливость найденных таким путем законов динамики.

Движения тел относительно друг друга имеют самый различный характер, который, вообще говоря, с течением времени изменяется. Эти изменения происходят различным образом: например, тело находилось в покое и начало двигаться, получило движение, получило некоторую скорость, затем остановилось, пришло в состояние покоя; или тело двигалось с определенной скоростью, а затем в результате воздействия скорость тела увеличилась, оно стало двигаться быстрее; или тело двигалось на восток, а затем стало двигаться на юг, и т. д.

Во всех случаях изменение движения сопровождается прежде всего определенным изменением вектора скорости тела: скорость тела меняет свою величину, или свое направление, или и то и другое вместе. Следовательно, можно предполагать, что взаимодействия, вызывающие изменение скорости тела, закономерно связаны с последней.

Эта мысль возникает прежде всего, когда пытаются найти законы движения тел. Она может быть сформулирована так: *воздействия других тел на данное определяют его скорость*.

Примерно таким и было представление древних ученых об основном законе движения, о котором мы знаем из «Физики» Аристотеля. Аристотель разделял все движения на естественные и насильственные; к естественным он относил движение вверх и вниз, к насильственным — все остальные, которые продолжаются до тех пор, пока, как мы скажем теперь, есть воздействие.

Мысль о связи между внешними воздействиями и скоростью тела, безусловно, правильна, если ее понимать так: внешние воздействия каким-то образом определяют скорость тела. Но следующая фор-

мулировка, которую можно сделать на основании аристотелевских представлений о причинах движения тел: воздействие на тело в данный момент определяет скорость в этот же момент времени, — совершенно неправильна. Галилей на основании тщательного анализа результатов своих опытов решительно отверг эту формулировку и пришел к выводу: *если на тело нет внешних воздействий, то оно может двигаться с любой постоянной скоростью или пребывать в состоянии покоя.*

Это утверждение составляет основу открытого Галилеем первого закона динамики, который мы подробно рассмотрим в § 16.

Но прежде чем приступить к анализу этих положений и сформулировать законы динамики, необходимо рассмотреть основную механическую характеристику воздействия тел — *физическую силу*.

### § 13. Сила

Человек, для того чтобы поднять ведро воды и удержать его рукой, должен приложить к ведру «силу» своей руки; он чувствует силу, с которой он тянет ведро вверх, или силу, с которой ведро тянет его руку вниз. Когда рабочий толкает груженую тележку, то он прикладывает силу своих рук для того, чтобы сдвинуть с места тележку и катить ее, чтобы сообщить ей скорость (см. рис. 28). При этих действиях человек испытывает определенное ощущение усилия в своем теле, и сила, на которую мы указывали в только что приведенных примерах, связана с этими ощущениями.

Но в механике *под силой понимают не физиологическое ощущение усилия, а физическую причину, изменяющую состояние движения тел и возникающую в результате взаимодействия двух тел*. Физическую силу, о которой идет речь в механике, ни в коем случае нельзя смешивать и связывать с ощущением усилия человека. Например, рабочий, толкая тележку, действует на тележку определенной силой, это связано с ощущением усилия в его мускулах. Характер движения тележки связан закономерно не с ощущением рабочего, а с величиной силы, приложенной к тележке со стороны рабочего. Если такая же сила будет приложена к тележке и со стороны другого тела, например трактора, автомашины, то и движение тележки останется тем же.

Сила пороховых газов выталкивает снаряд из канала орудия, сила паровоза приводит в движение вагоны, сила течения реки вращает водяное колесо. Здесь всюду идет речь о силе физической как о причине, изменяющей движение тела.

До сих пор мы подчеркивали, что физическая сила связана с изменением движения тела; однако часто встречается особый частный случай, в котором действие силы не вызывает движения тела, вернее — изменения движения тела, по крайней мере заметного при обычном наблюдении. Например, к тележке приложена недоста-

точия сила и тележка не движется, несмотря на то, что на нее действует сила. Человек держит в руке ведро, на это ведро действует некоторая сила, а оно находится в покое.

В таких случаях на тело, кроме указанной силы, действуют еще другие силы, действие которых «уничтожает» действие упомянутой силы.

Если на тело некоторое время действует только одна сила, то оно не может находиться в покое — это очевидно из первого закона динамики. С другой стороны, если тело находится в состоянии покоя, то все силы, действующие на него, *уравновешиваются*, или сумма всех сил равна нулю. Нужно заметить, что хотя под действием уравновешенных сил тело не будет изменять состояния покоя, но оно будет *деформироваться* (изменять свою форму) под действием этих сил. В тех случаях, когда между деформацией и силами существует закономерная и однозначная связь, деформации определенных тел (пружин, динамометров и т. д.) могут служить мерой величины сил.

Часть механики, в которой изучаются законы равновесия сил, действующих на тело, называется *статикой*. Законы статики представляют собой частный случай законов динамики, но они значительно проще. Поэтому иногда начинают изучение механики со статики. Такой порядок изложения соответствует и историческому порядку развития механической науки: законы статики стали известны значительно раньше законов динамики.

### § 14. Способы измерения постоянных сил

В статике силы остаются постоянными по времени и поэтому их легче определять и измерять. Мерой силы в статике обычно является сила веса какого-то определенного тела. *Силой веса или просто весом называется такая сила, с которой покоящееся тело действует на другое тело, удерживающее его от падения.*

*Силой веса или просто весом называется такая сила, с которой покоящееся тело действует на другое тело, удерживающее его от падения.*

Если тело поконится относительно земли, то оно действует на подставку (подвес) с определенной, присущей данному телу силой. Еще в древние времена человек научился измерять силу веса различных тел, сравнивая ее при помощи весов с силой веса некоторого определенного тела, вес которого принимался за единицу.

Как известно, простейшие рычажные весы устроены так: к равноплечему рычагу, свободно вращающемуся около середины, подвешиваются тела, вес которых желают сравнить (схема весов показана на рис. 29). Если равноплечий рычаг, к которому подвешены тела, находится в равновесии и занимает горизонтальное положение, то силы

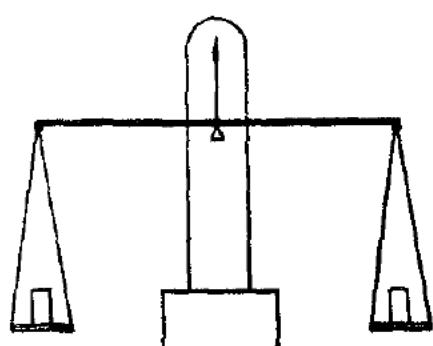


Рис. 29.

веса тел, подвешенных к разным концам рычага, одинаковы. Таким образом, принципиально можно измерить силу веса любого тела.

Международным соглашением за единицу силы был принят вес некоторого определенного тела — эталона. Этот эталон, состоящий из сплава платины с иридием, хранится в Севре, близ Парижа. Так как сила веса зависит от географического положения того места, где измеряется сила веса данного тела, то за единицу силы приняли вес тела-эталона в том месте, где он хранится. Эта единица силы была названа *килограмм-силой* (кгс). В системе СИ принята другая единица силы, называемая *ньютоном* (Н), которая меньше килограмма в 9,80665 раза. В системе СГС единицей силы является дина: 1 дина =  $10^{-5}$  Н (см. § 18).

Сила веса есть векторная физическая величина. Например, на веревке висит кипа хлопка (рис. 30). Сила веса **G** направлена вниз; ее величина и направление изображены отрезком, направленным вниз, длина отрезка в определенном масштабе соответствует величине силы веса. В этом примере, кроме силы веса, мы можем указать на силу натяжения веревки — силу, с которой веревка действует на кипу хлопка; эта сила изображена на рис. 30 отрезком **F**. Силы **F** и **G** равны по величине и противоположны по направлению.

Если бы мы точно измерили длину веревки до того, как на нее повесили груз, и в то время, когда он висит, мы заметили бы, что веревка несколько вытянулась. Деформация веревки закономерно связана с силой натяжения веревки. Связь между силой и деформацией зависит от физических свойств веревки и от величины деформации. Если величина деформации однозначно связана с величиной действующей на тело силы, то такая деформация называется *упругой*.

Примером тела, имеющего значительные упругие деформации, является стальная пружина. Возьмем стальную пружину, закрепим ее одним концом (рис. 31), а к другому концу будем подвешивать грузы различного веса и в то же время измерять деформацию (удлинение) пружины по неподвижной шкале. Если удлинение  $\Delta l$  пружины определяется только весом **G** подвешенного к ней груза (при неизменных остальных условиях), то деформации такой пружины являются упругими. Поэтому упругую стальную пружину и применяют в качестве основного элемента для приборов, измеряющих

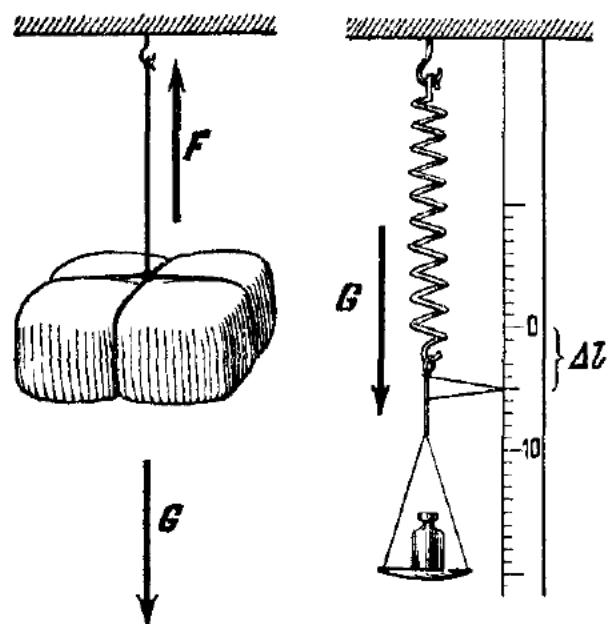


Рис. 30.

Рис. 31.

величину силы. Такие приборы называются *пружинными динамометрами* или пружинными весами.

График, показывающий зависимость между силой  $F$ , растягивающей пружину динамометра, и удлинением  $\Delta l$  пружины, представлен на рис. 32, а. Зависимость между силой и деформацией

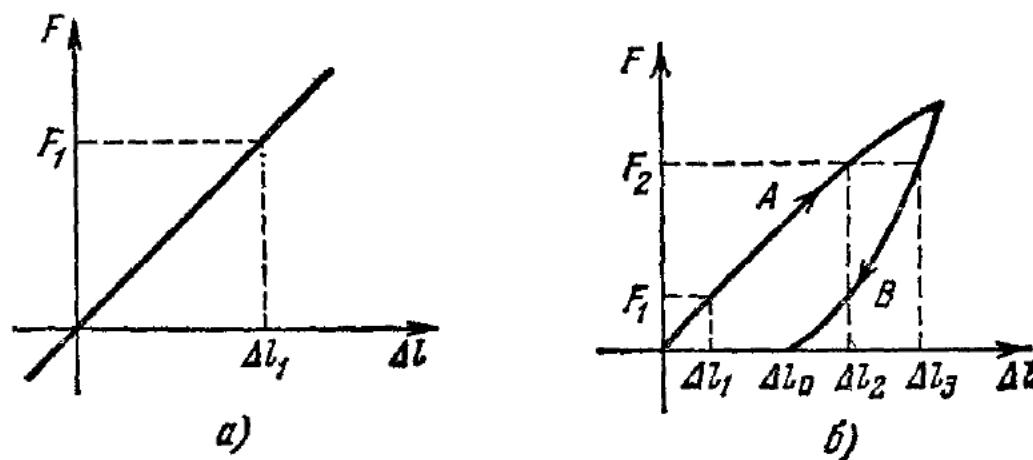


Рис. 32.

представляется на этом графике одной прямой линией, совершенно независимо от того, какая сила действовала на пружину ранее; деформация ее  $\Delta l_1$  определяется только величиной силы  $F_1$ , действующей в данный момент, причем величина силы  $F_1$  пропорциональна деформации  $\Delta l_1$ .

Деформации тела будут *неупругими*, если зависимость между силой и деформацией нельзя представить одной линией.

Если мы будем определять зависимость силы от удлинения при увеличении силы, то получим кривую  $A$  (рис. 32, б), где значению силы  $F_1$  будет соответствовать  $\Delta l_1$ , а значению  $F_2$  — удлинение  $\Delta l_2$ . Так дойдем до некоторой максимальной нагрузки (силы), которая не отмечена на рис. 32, б. Делая отсчеты силы и удлинения при уменьшении нагрузки от максимальной, мы получим совсем иную кривую  $B$ , на которой силе  $F_2$  будет соответствовать  $\Delta l_3$ , а силе  $F_1$  — удлинение  $\Delta l_2$ . Когда мы снимем нагрузку, удлинение  $\Delta l_0$  не будет равно нулю — оно представляет *остаточную* деформацию. Поэтому такая пружина непригодна для измерения сил, и в динамометрах всегда употребляются хорошие стальные пружины, показывающие однозначную зависимость силы от деформации и имеющие ничтожно малые остаточные деформации.

### § 15. Условия равновесия сил, действующих на точку

Имея набор грузов (гири, разновески), можно проградуировать пружинные динамометры. Точность измерения сил пружинными весами, если не принимать особых мер, обычно невелика, она значительно меньше точности измерения рычажными весами. Однако работать с пружинными динамометрами удобнее и проще, поэтому ими часто пользуются как в технике, так и при демонстрации физических опытов.

По одному проградуированному пружинному динамометру мы можем проградуировать все имеющиеся у нас динамометры. Для этого соединим концы пружин двух динамометров нитью и будем

постепенно растягивать нить; тогда в состоянии покоя оба динамометра должны показывать одинаковую величину. На любую частицу нити, находящуюся в покое, действуют две равные и противоположно направленные силы  $F$  и  $F_1$ . Векторное равенство сил можно записать так:

$$F + F_1 = 0. \quad (15.1)$$

Зная цену делений одного динамометра, мы нанесем соответствующие определенным силам деления и на шкалу другого динамометра.

Прикрепив с помощью нити крючок динамометра к неподвижному телу, например к гвоздю, вбитому в стол (рис. 33), можно определить величину и направление силы, с которой рука, растягивающая динамометр, действует на гвоздь (направление действия

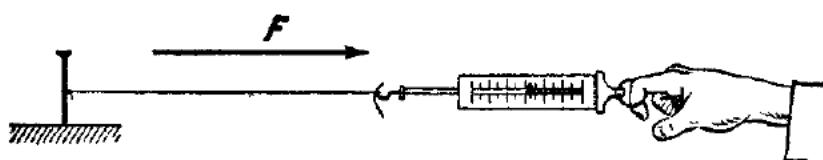


Рис. 33.

силы совпадает с направлением нити). Таким образом, для определения силы нужно всегда указать не только величину силы, но и направление ее действия в пространстве. *Сила есть векторная физическая величина.*

Если на одну точку действует несколько сил в разных направлениях, то можно действие их заменить действием одной силы, которая называется *равнодействующей*. Величина и направление равнодействующей определяются, как и для всех векторных величин, по правилу сложения векторов.

Справедливость этого можно показать простыми опытами с динамометрами. Возьмем несколько проградуированных динамометров. Положим на стол лист бумаги (рис. 34), над которым возвышается гвоздь, вбитый в стол, на гвоздь наденем небольшое кольцо с прикрепленными к нему тремя нитями. Привяжем концы двух нитей к крючкам динамометров *B* и *C* и, растянув их, закрепим неподвижно колечки этих динамометров. Теперь на кольцо в точке *O* действуют две силы под каким-то углом; такие две силы никогда не могут обеспечить равновесия кольца: как только мы вынем гвоздь, равновесие нарушится.

Прочертим на листе бумаги направления действия сил и отложим от точки *O* отрезки *OB* и *OC* (рис. 35, *a*), длины которых в определенном масштабе пропорциональны показаниям соответствующих динамометров *B* и *C*. Построим отрезок *OD*, равный диагонали параллелограмма, и продолжим через точку *O* линию *OD*. Затем привяжем к третьей нити динамометр *A*, направим нить вдоль линии *OD*, натянем эту нить с силой, пропорциональной величине

отрезка  $OD$ , и укрепим корпус динамометра  $A$  (см. рис. 34). Вынув гвоздь из кольца, убедимся в том, что кольцо останется в равновесии; следовательно, сила, измеряемая динамометром  $A$ , уравновесила действие сил, измеряемых динамометрами  $B$  и  $C$ . Очевидно, что три вектора, соответствующие силам  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , образуют на чертеже замкнутый треугольник (рис. 35, б). Равенство нулю всех сил, действующих на точку  $O$ , можно записать так:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \quad (15.2)$$

При равенстве нулю суммы трех сил, действующих на точку, сила, направленная противоположно любой из трех сил, равна сумме (равнодействующей) двух остальных.

Заметим, что мы могли бы вместо пружинных динамометров взять блоки и грузы

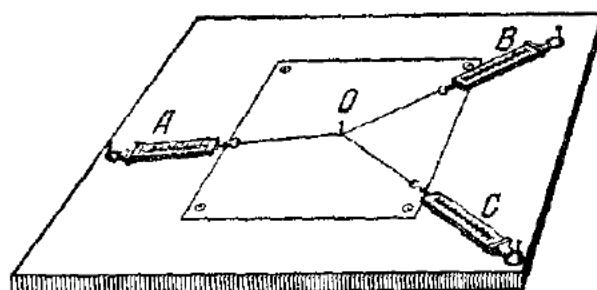


Рис. 34.

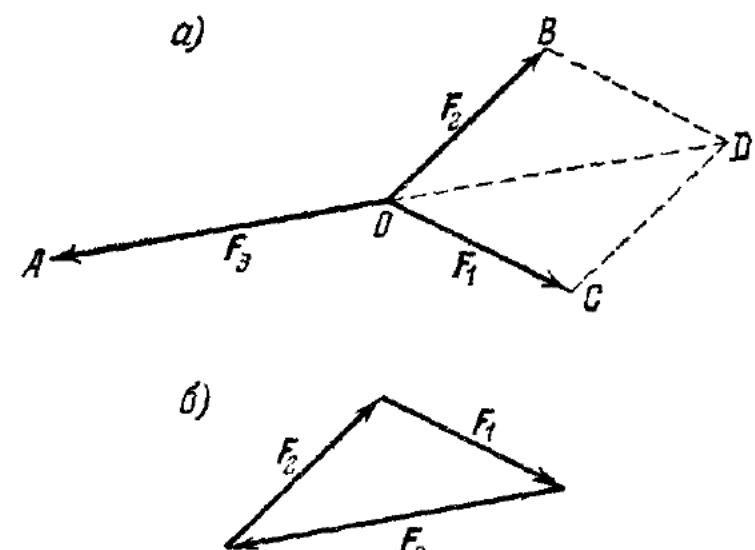


Рис. 35.

и с их помощью осуществить опыт, подобный представленному на рис. 34. Только необходимо обращать особое внимание на качество блоков: блоки должны иметь небольшое трение в осях, иначе результаты будут недостаточно точны.

Если к трем силам, действующим на точку и лежащим в одной плоскости, как было в нашем опыте (см. рис. 34), мы прибавим еще одну силу, лежащую в той же плоскости, то всегда можно подобрать величины натяжения нитей так, что действия четырех сил на кольцо уравновесятся. В этом случае чертеж векторов сил будет представлен замкнутым четырехугольником.

Таким же путем можно добавить и пятую силу и вообще сколько угодно сил; все эти силы, действующие на одну точку и лежащие в одной плоскости, могут уравновешиваться.

Условия равновесия формулируются так: *при равновесии сил, лежащих в плоскости и действующих под разными углами на одну точку, векторы, изображающие эти силы, образуют замкнутый многоугольник*.

Это условие справедливо и для сил, не лежащих в одной плоскости, но действующих на одну точку, только многоугольник в этом случае будет пространственным (рис. 36).

Две силы, действующие под углом на одну точку, *не могут* уравновесить друг друга ни при каких условиях. Так же и три силы, не лежащие в одной плоскости, не могут уравновесить друг друга ни при каких условиях. В самом деле, пусть три силы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  (рис. 37) действуют на одну точку и не лежат в одной плоскости. Через направления любых двух сил можно провести плоскость. Допустим, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  лежат в плоскости  $A$ ; тогда вектор силы  $\mathbf{c}$  можно разбить на два:  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\perp} + \mathbf{c}_{\parallel}$ ;  $\mathbf{c}_{\perp}$  перпендикулярен к плоскости  $A$ , а  $\mathbf{c}_{\parallel}$  лежит в этой плоскости. Сумма трех сил  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}_{\parallel}$  лежит в плоскости  $A$  и не может быть уравновешена силой  $\mathbf{c}_{\perp}$ .

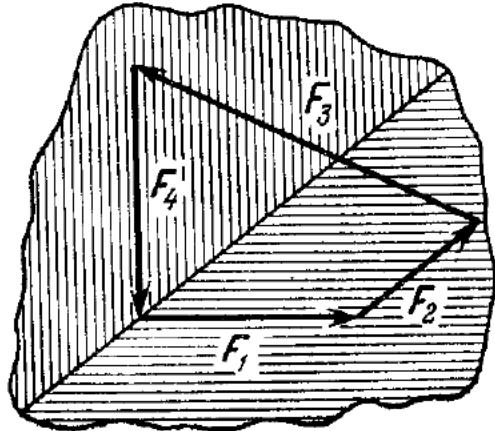


Рис. 36.

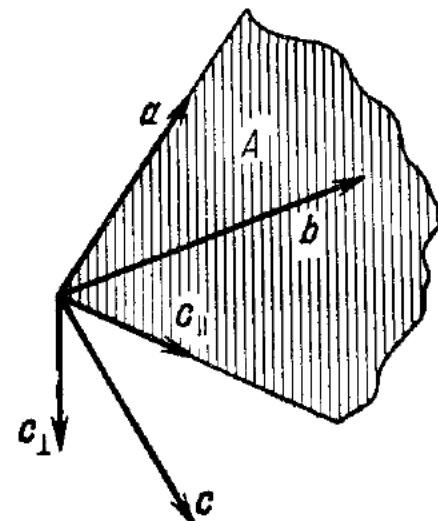


Рис. 37.

направленной перпендикулярно к этой плоскости. Четыре (и больше) силы, действующие на точку, принципиально *могут* уравновеситься. Вообще, силы, действующие на точку, находятся в равновесии только тогда, когда соответствующие им векторы образуют замкнутый (в общем случае пространственный) многоугольник. Проекция замкнутой линии на любую ось всегда равна нулю. Поэтому условие равновесия сил, действующих на одну точку, формулируют так: *сумма проекций всех сил на каждую из трех взаимно перпендикулярных осей должна быть равна нулю*.

Пусть на точку действуют силы  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ , проекции их на ось  $x$  будут  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  соответственно, и аналогично обозначим проекции этих сил на ось  $y$  через  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ , а на ось  $z$  — через  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ . Тогда условия равновесия можно записать так:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n &= \sum_{i=1}^n X_i = 0, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n &= \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n &= \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \end{aligned} \quad (15.3)$$

где  $\sum_{i=1}^n$  — знак, который обозначает суммирование величин, стоящих за ним и имеющих различные индексы  $i$ , причем индекс  $i$  принимает все значения  $1, 2, 3, \dots, n$ . Условия (15.3) совершенно эквивалентны векторному равенству

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = 0. \quad (15.4)$$

Если условия равновесия всех сил, действующих на точку, не удовлетворяются, то возникает движение. Таким образом действие сил на точку связано с ее движением, мы рассмотрим в следующих параграфах.

Заметим пока, что при рассмотрении действия силы мы не отмечали никаких свойств тела, рассматриваемого как материальная точка. Мы предполагали только, что это тело не разрушается при действии данных сил. Несомненно, что тело как-то деформируется, но мы не учитываем этих деформаций.

Вообще, в чем же проявляется действие постоянных сил на любое покоящееся тело? Оно проявляется в определенной деформации различных частей этого тела. Конечно, в момент приложения силы, в те промежутки времени, когда возникла деформация, отдельные части тела перемещались, тогда имело место движение. Но затем установилось равновесие, наступил покой всех частей тела. Поэтому в состоянии покоя действие сил проявляется только в деформации тела. Но по известной деформации определить действующие силы можно только в том случае, когда деформации тела упруги. В противоположном случае этого сделать нельзя без специальных дополнительных исследований, так как тогда между силами и деформациями имеет место сложная зависимость.

## § 16. Сила и движение (первый закон Ньютона)

Как уже было сказано (см. § 13), под силой мы понимаем физическую причину, изменяющую состояние движения и возникающую в результате взаимодействия тел. Теперь, после рассмотрения условия равновесия сил (§ 15), можно уточнить определение силы: *сила — физическая величина, характеризующая взаимодействие по крайней мере двух тел, определяющая изменение состояния движения тела, или изменение формы тела, или то и другое вместе*. Механическое взаимодействие между одним телом и остальными или воздействие остальных на данное тело теперь могут быть определены при помощи сил, с которыми все остальные тела действуют на данное.

Введением понятия силы мы фактически разделяем механическую задачу о движении или о деформации нескольких взаимодействующих тел на две: в первой — определяем силы, действу-

ющие на каждое тело, во второй — движение (или деформацию) данного тела под действием уже известных сил.

Мы знаем, как измерить и определить силу в статике, но не знаем, как связана эта сила (ее величина и направление) с изменением движения тела, с изменением состояния движения, — это и представляет *основную задачу динамики*.

Прежде чем перейти к рассмотрению этой задачи, заметим, что заранее нам не известно, что сила, измеренная динамометром (или весами), будет как-то влиять на движение тела. Только опыты с измерениями сил динамометрами при движении тел убеждают нас в существовании определенной закономерной связи между силами, действующими на тело, и его движением.

Основная задача динамики — раскрыть закономерность связи между силами и движением — была решена в полной мере впервые Ньютоном на основании упомянутого в § 12 закона инерции Галилея. Этот закон называется *первым законом Ньютона* и формулируется так: *всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не вызовут изменения этого состояния*<sup>1)</sup>.

В первом законе Ньютона, прежде всего, имеется утверждение, что покой и равномерное и прямолинейное движение тела — одно и то же механическое состояние тела. Затем в нем дана оценка действия силы: только сила может изменить состояние покоя и равномерного прямолинейного движения тела. В отсутствие сил, в отсутствие внешних воздействий тело движется по прямой с постоянной скоростью.

Это на первый взгляд кажется странным, потому что не всегда заранее известны все силы, действующие на тело. Например, вагон поезда движется прямолинейно и равномерно, следовательно, все силы, приложенные к вагону, в сумме равны нулю. Действительно, сила, тянувшая вагон вперед, в этом случае в точности равна силе, тянувшей вагон назад. Нас сейчас пока не интересует, что тянувшая сила приложена со стороны идущего впереди вагона, а сила, тянувшая назад, состоит из силы сопротивления воздуха, силы трения колес и т. д. Но в сумме силы, тянувшие вперед и назад, равны нулю, так как тело движется прямолинейно и равномерно. Этот вывод сделан на основании первого закона динамики.

Во время падения тела в пустоте на него действует только одна сила, сила тяготения, поэтому тело, также по первому закону, не может двигаться равномерно, скорость его не может быть

<sup>1)</sup> Формулировка, данная этому закону Ньютоном, в переводе акад. А. Н. Крылова такова: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние». Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII (И. Ньютон, Математические начала натуральной философии), Изд-во АН СССР, 1936, стр. 39.

постоянной, что находится в полном согласии с результатом наблюдений.

Иногда говорят, что при равномерном и прямолинейном движении тело движется по инерции. Это не следует понимать так, что тело движется вследствие инерции. Для того чтобы тело сохраняло состояние прямолинейного и равномерного движения, не нужно никаких причин. Равномерное и прямолинейное движение тела (движение по инерции) и покой — это естественные состояния всякого тела, освобожденного от внешних воздействий или находящегося под действием таких внешних сил, сумма которых равна нулю. Силы, действующие на равномерно и прямолинейно движущийся вагон, равны нулю, и поэтому вагон продолжает свое движение, движение по инерции. Подчеркнем, что здесь всюду идет речь о силах, действующих на тело в данный момент, здесь мы совсем не рассматриваем тех сил, которые когда-то действовали на вагон и привели его в состояние равномерного движения.

Движение по инерции — свойство всех материальных тел, — еще так можно формулировать закон Галилея — Ньютона. Инерция тела — не причина его движения, а его свойство.

Галилей говорит: «Степень скорости, обнаруживаемая телом<sup>1)</sup>, ненарушимо лежит в самой его природе, в то время как причины ускорения или замедления являются внешними...» (курсив наш. — С. С.) (Г. Галилей, Избр. труды, т. 2, «Беседы», «Наука», 1964, стр. 282).

Интересно проследить пути, которыми Галилей пришел к открытию закона инерции. Он опроверг ложное мнение Аристотеля, господствовавшее в современной ему науке, что тяжелые тела должны падать быстрее, чем легкие. На основании своих исследований Галилей нашел опытным путем законы падения тел в воздухе, он изучил движение тел по наклонной плоскости и пришел к выводу, что в отсутствие сопротивления воздуха все тела должны падать одинаково.

Впоследствии этот вывод Ньютон подтвердил прямым опытом, наблюдая падение тел в трубке, из которой предварительно был выкачен воздух. Этот

опыт теперь часто демонстрируется на лекциях по физике.

Справедливость анализа результата своих опытов Галилей подтверждал еще следующим рассуждением. Допустим, что в согласии с положением Аристотеля тяжелое тело *A* падает быстрее легкого *B* (рис. 38). Теперь соединим, свяжем оба тела нитью, в результате получится более тяжелое тело, которое должно падать быстрее тела *A*; но ведь легкое тело *B*

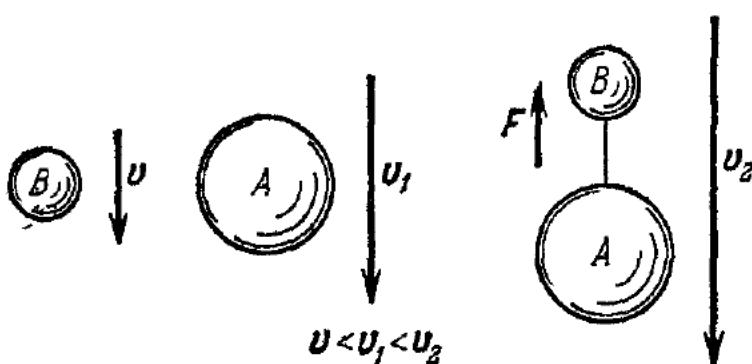


Рис. 38.

само по себе должно падать медленнее, следовательно, при падении связанного тела тело *B* должно отставать и нить должна быть натянута. Сила натяжения нити *F*, таким образом, будет тянуть тело *A* вверх, а тело *B* — вниз. Тело *A* при наличии дополнительной силы, действующей на это тело вверх, увеличит скорость своего падения вниз. Этого не может быть и по положению Аристотеля, которое мы допускали правильным. Следовательно, положение Аристотеля неверно.

В отсутствие воздуха все тела падают равномерно ускоренно, и ускорение при падении для всех тел одинаково в данном месте поверхности

<sup>1)</sup> Смысл этого выражения можно передать так: свойство тела сохранять постоянную скорость.

Земли. Во время падения тел с небольшой высоты сила тяготения остается постоянной и ускорение также остается постоянным, а скорость непрерывно возрастает. Опыты с движением тел по наклонной плоскости убеждают нас в том, что ускорение движущихся по ней гел пропорционально слагающей силы тяжести, направленной вдоль плоскости. Следовательно, при наклоне, равном нулю, т. е. на горизонтальной плоскости, без трения тело будет двигаться с любой постоянной скоростью или оставаться в покое. Поэтому, если сила отсутствует, то скорость тела остается постоянной. Отметим, что на основании этих же опытов Галилей заключил, что сила тяжести, которую до этого определяли только при помощи весов (или ее составляющая вдоль наклонной плоскости), пропорциональна ускорению тела.

## § 17. Второй закон динамики Ньютона

Первый закон утверждает: если на тело будут действовать силы, то движение не будет равномерным и прямолинейным. Каким же будет движение под действием сил? На это дает ответ второй закон динамики.

Ради простоты изложения вначале дадим не совсем общую формулировку второго закона динамики: *произведение величины массы тела на его ускорение пропорционально величине действующей на данное тело силы. Направления силы и ускорения совпадают.*

Общую формулировку, данную самим Ньютоном, мы приведем дальше.

Второй закон связывает между собой три величины: силу, ускорение и массу. Физическое значение и способы определения величин силы и ускорения мы уже выяснили ранее. Далее (§ 18) определим значение третьей основной механической величины — массы, анализируя опыты с движением различных тел под действием сил.

Прилагая силы различной величины к одному и тому же телу и измеряя ускорение, вызываемое действием этих сил, придем к выводу, что ускорение пропорционально приложенной к телу силе. Допустим, что к тележке, стоящей на рельсах, приложена сила натяжения нити  $F$ ; нить натягивается грузом  $G$ , подвешенным на другом конце перекинутой через блок нити (рис. 39). Сила натяжения нити измеряется пружинным динамометром. Отмечая во время движения величину силы и измеряя расстояние, которое тележка проходит за определенное время, мы найдем закономерную связь между ускорением и силой.

Прежде всего установим характер движения тележки под действием постоянной силы, отмечаемой динамометром. Пуская тележку от некоторой метки  $A$ , найдем расстояния  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , которые проходит тележка за 1, 2, 3, ... интервала времени при одной и той же величине силы  $F_0$ <sup>1)</sup>. В результате опыта найдем, что

<sup>1)</sup> Груз  $G$  во время этих опытов не меняется.

отношение расстояний  $S_1 : S_2 : S_3 : \dots$  пропорционально отношениям квадратов целых чисел  $1 : 2^2 : 3^2 : \dots$ . Подобное изменение расстояния со временем соответствует формуле для пути при равноускоренном движении:

$$S = \frac{at^2}{2},$$

где  $a$  — ускорение, а  $t$  — время. Следовательно, движение тележки под действием постоянной силы будет равноускоренным.

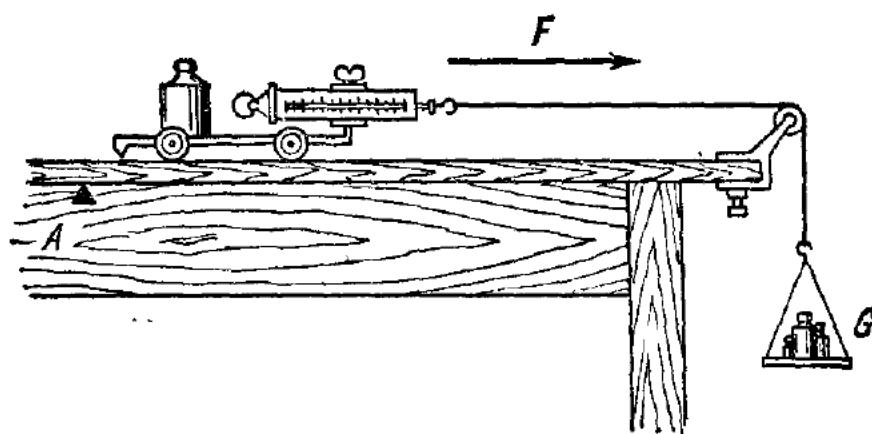


Рис. 39.

Теперь найдем зависимость величины ускорения от величины действующей силы. Изменим  $G$  так, что при движении динамометр будет показывать, например, в полтора раза большую силу,  $\frac{3}{2}F_0$ . Опять так же найдем, что движение будет равноускоренным, но расстояния  $S'_1, S'_2, S'_3, \dots$ , проходимые тележкой за 1, 2, 3, ... интервала времени, будут также в полтора раза больше соответствующих отрезков  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , которые тележка проходила при действии силы  $F_0$  за те же промежутки времени. При равноускоренном движении расстояние, проходимое телом за одно и то же время, пропорционально величине ускорения ( $S = \frac{at^2}{2}$ ). Как бы мы ни изменяли силу  $F$ , каждый раз расстояние, пройденное тележкой за определенное время, будет пропорционально  $F$ . Результаты опытов можно в общем виде записать так:

$$F = ka \quad (17.1)$$

— сила пропорциональна ускорению и, наоборот, ускорение пропорционально силе.

Следовательно, эти опыты доказывают справедливость второго закона динамики в той его части, где утверждается, что сила пропорциональна ускорению.

Отметим, что в этих опытах воспроизводится основная идея классических исследований Галилея движения тела по наклонной плоскости, с тем только отличием, что здесь ускоряющая сила

измеряется пружинным динамометром во время движения, а там она могла быть измерена только при покое.

При опытах мы должны принять меры, чтобы воздействия на тележку со стороны остальных тел, рельсов и воздуха, были сравнительно малы. В этом можно убедиться с помощью следующих опытов: отсоединим нить от динамометра тележки и будем измерять расстояния, которые проходит тележка за два последовательных одинаковых промежутка времени после толчка рукой. Скорость тележки будем выбирать примерно такой, какой она была в опытах с ускоряющейся тележкой. Если участки, которые тележка проходит за одинаковые интервалы времени после толчка, будут примерно одинаковы, то, в соответствии с первым законом, воздействия на тележку достаточно малы по сравнению с действующей силой натяжения нити.

Хотя воздействия и имеются, но величина их достаточно мала; поэтому результаты наших измерений, сделанных с определенной точностью, вполне подтверждают справедливость второго закона динамики. Забегая вперед, заметим, что если бы мы повысили точность измерений сил, расстояний и времени, но при этом измерили бы и воздействия (силы) со стороны воздуха и рельсов, то также только подтвердили бы справедливость второго закона динамики.

## § 18. Масса тела

Произведем опыты с тележкой, которая движется ускоренно под действием постоянной силы  $F_0$ , причем в каждом опыте будем менять нагрузку тележки и измерять ее ускорение. Результаты первых опытов покажут, что ускорение, вызываемое той же силой, уменьшается с увеличением нагрузки. Следовательно, ускорение, которое получает тело под действием данной силы, зависит не только от величины силы, но и от некоторого физического свойства ускоряемого тела, изменяющегося с изменением количества вещества, составляющего тело. Это свойство называется *инертностью*. Чем больше инертность тела, тем меньшее ускорение оно получает под действием постоянной силы. Инертность возрастает с увеличением нагрузки, с увеличением количества вещества, составляющего данное тело. Инертность тела проявляется только в динамических явлениях, и поэтому она для обычных тел может быть определена из динамических опытов с ускоряющимися телами.

Мерой инертности тела является физическая величина, называемая *массой* тела. Нагружая тележку, мы увеличиваем ее массу, вследствие чего уменьшается ускорение, получаемое тележкой под действием той же силы. Величину массы тела можно определить, производя опыты с ускорением данного тела определенной силой и учитывая второй закон динамики. Найденную таким путем величину следовало бы называть *инертной массой*. Далее мы не всегда будем повторять слово «инертная», но следует помнить, что далее всюду под словом «масса» подразумевается инертная масса, если нет соответствующего примечания.

Можно принять массу некоторого тела за единицу *инертной массы* и с ней уже сравнивать массу всех остальных тел. Между-

народным соглашением за единицу массы в системе СИ принятая масса международного прототипа килограмма (см. стр. 53). Эта единица массы носит название *килограмм* (кг). В физике часто пользуются единицей, в тысячу раз меньшей килограмма массы, — *граммом* (г).

Теперь сделаем опыты, в которых будем сообщать ускорение различным телам силой постоянной величины. Как было уже сказано, ускорение зависит не только от величины силы, но и от инертности тела, или от величины его инертной массы. Из второго закона следует, что при таких опытах ускорение тела будет обратно пропорционально его инертной массе. Пусть на тело единичной массы действует сила  $F_0$  и тело получает ускорение  $a_1$ . Тело неизвестной массы под действием той же силы получает ускорение  $a_2$ . Тогда по второму закону

$$F_0 = km_1 a_1 = km_2 a_2, \quad (18.1)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий только от выбора единиц. Из последнего равенства следует:

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}. \quad (18.2)$$

Таким способом принципиально можно измерить величину массы любого тела. Далее будут указаны и другие способы измерения массы тела, которые, по существу, связаны с изложенным способом.

Теперь представим себе, что аналогичные опыты производятся с таким телом на гладкой горизонтальной поверхности. Пусть в этих опытах каждый раз направление горизонтальной силы, приложенной к телу, будет различным относительно тела; это можно сделать изменением направления действия силы или каким угодно предварительным поворотом самого тела. В результате установим, что, какую бы горизонтальную силу ни прикладывали к телу, как бы тело ни поворачивали, ускорение всегда будет пропорционально действующей силе и направление ускорения всегда будет совпадать с направлением действующей силы. Следовательно, *масса — скалярная величина*.

Обозначив величину инертной массы тела через  $m$ , можно записать второй закон динамики так:

$$F = kma, \quad (18.3)$$

где  $F$  — сила (вектор),  $a$  — ускорение (вектор), а  $k$  — некоторый коэффициент, зависящий от выбора единиц. Наличие коэффициента, зависящего от величины и размерности выбранных единиц, в одном из основных законов физики представляет существенные неудобства. Поэтому обычно выбирают величину единицы массы

(и ее размерность) так, чтобы коэффициент был безразмерен и имел величину, равную единице,  $k = 1$ .

Так, принимая в формуле (18.3) за единицу массы 1 кг, за единицу ускорения 1 м/с<sup>2</sup> и полагая  $k = 1$ , получим производную в системе СИ единицу силы *ньютон* (Н):

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2.$$

Система СИ принята в СССР как предпочтительная. В этой системе в качестве основных, кроме кг, м, с, принимаются: единица тока 1 А (*ампер*), единица термодинамической температуры 1 К (*кельвин*), единица силы света 1 кд (*кандела*), единица количества вещества 1 моль.

В физике используются и другие системы единиц. Так, например, принимая за основные единицы массу в 1 г, длину в 1 см и время в 1 с, величину единицы силы подбирают так, чтобы коэффициент  $k$  во втором законе Ньютона имел величину, равную безразмерной единице. Такую систему называют СГС (сантиметр, грамм, секунда). В этой системе сила также является производной величиной и формула ее размерности запишется так:

$$[F] = \text{г} \cdot \text{см}/\text{с}^2. \quad (18.4)$$

Такая единица силы носит название *дина* (дин).

В технике предпочитают техническую систему единиц, в которой за основные приняты: килограмм-сила (кгс), метр (м), секунда (с). Единица массы является производной величиной и выбирается также из условия равенства единице коэффициента  $k$  в законе Ньютона. Единица массы равна массе такого тела, которому сила в один килограмм сообщает ускорение в 1 м/с<sup>2</sup>. Очевидно, что техническая единица массы (т. е. м.) равна массе тела в 9,81 кг.

Анализ опытов, которые были рассмотрены в этом параграфе, и всех механических явлений при движении с малыми скоростями показывает, что масса тела — величина постоянная. Однако, как показали исследования очень быстрых частиц, скорость движения которых близка к скорости света, масса любого тела не остается постоянной, она зависит от скорости движения. В современной механике Эйнштейна показано, что масса равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (18.5)$$

где  $m_0$  — постоянная масса тела, которой оно обладает при  $v \sim 0$ . Так как при обычных движениях  $v \ll c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с, то для них с очень большой точностью можно считать массу постоянной величиной (подробнее об этом см. далее, в § 155).

## § 19. Общая форма второго закона Ньютона

Ньютоном второй закон динамики был дан в более общей форме, иначе, чем это было сделано в предыдущих параграфах. Для характеристики механического состояния при движении тела вводится еще одна величина — *количество движения* тела (или *импульс*). Количество движения тела — векторная физическая величина, численно равная произведению массы на скорость и имеющая направление, совпадающее с направлением скорости тела. Если количество движения тела с массой  $m$  обозначим  $K$ , то при скорости  $v$

$$K = mv. \quad (19.1)$$

Единица количества движения не имеет специального названия. В системе СИ количество движения имеет размерность кг·м/с. Так, например, если тело массы 10 кг движется со скоростью 2 м/с, то оно имеет количество движения

$$10 \text{ кг} \cdot 2 \text{ м/с} = 20 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ньютон сформулировал второй закон динамики так: «*Изменение количества движения пропорционально действующей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует*»<sup>1)</sup>.

Пользуясь современным языком, эту формулировку лучше записать так: *производная от количества движения тела равна<sup>2)</sup> по величине действующей силе и совпадает с ней по направлению*.

Если  $K$  — количество движения тела,  $F$  — действующая сила, то в любой момент времени

$$F = \frac{dK}{dt}, \text{ или } F = \frac{d}{dt}(mv). \quad (19.2)$$

И только в том случае, когда масса тела остается постоянной во времени, можно величину массы вынести за знак производной и написать:

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (19.3)$$

где  $\frac{dv}{dt}$  есть ускорение тела. Следовательно, только в частном случае, правда, наиболее часто встречающемся, прежняя формулировка остается правильной.

При переменной во время движения массе тела необходимо пользоваться вторым законом в общей форме (с количеством движения), которая правильно отображает динамические закономерности во всех случаях движения материальной точки.

<sup>1)</sup> Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, Изд-во АН СССР, 1936, стр. 40.

<sup>2)</sup> Если все величины измерены в одной системе единиц.

Общая форма второго закона динамики оказалась справедливой и в теории относительности. Как сказано ранее, по этой теории масса зависит от модуля скорости движения тела (18.5). Поэтому справедливо выражение (19.2), а не (19.3). Здесь закон динамики формулируется так:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m\mathbf{a}. \quad (19.4)$$

С изменением величины скорости изменяется масса  $m$ , и в общем случае сила  $\mathbf{F}$  не совпадает по направлению с ускорением  $\mathbf{a}$  и ускорение не пропорционально силе.

Как будет показано дальше (§ 156), только в случае, когда сила направлена вдоль направления скорости  $\mathbf{v}$  или когда сила нормальна к скорости, ускорение  $\mathbf{a}$  и сила  $\mathbf{F}$  совпадают по направлению. В остальных случаях положение примерно такое, как показано на рис. 40. В механике Ньютона  $\frac{dm}{dt} v \ll ma$ , ведь сама масса  $m$  будет очень мало отличаться от постоянной  $m_0$ . Даже при такой огромной земной скорости, как космическая ( $v = 30$  км/с), отношение  $v/c = 10^{-4}$ , и поэтому масса отличается от  $m_0$  на  $5 \cdot 10^{-9}$  долю единицы. При обычных «технических» скоростях эта доля значительно меньше. Конечно, мы не имеем в виду скорости частиц в ускорителях и т. п. Там  $v$  близка к  $c$  и поэтому механика Ньютона должна быть заменена более точной механикой Эйнштейна.

В первом и втором законах Ньютона идет речь только о силе, действующей на данное (одно) тело, нет упоминания о других телах, со стороны которых эта сила исходит. Сила характеризует взаимодействие по крайней мере двух тел; роль второго тела в динамических явлениях отражена третьим законом Ньютона, который, по существу, неотделим от первых двух.

## § 20. Третий закон Ньютона

Третий закон динамики Ньютон сформулировал так: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие; иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны»<sup>1</sup>).

В первом и втором законах речь шла о силе, действующей на данное тело, и о результатах действия этой силы, совершенно безотносительно к тому, со стороны какого тела действует сила, каково

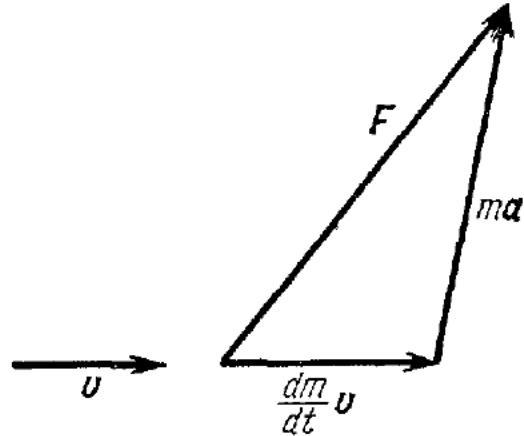


Рис. 40.

<sup>1)</sup> Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, Изд-во АН СССР, 1936, стр. 41.

происхождение действующей силы. В действительности изменение состояния движения тела происходит только в результате взаимодействия нескольких тел. В каждом конкретном случае, указывая на силу, мы всегда указываем два тела: тело, на которое действует сила, и тело, со стороны которого действует сила.

Если сила, действующая на некоторое тело  $A$ , приложена со стороны второго тела  $B$ , то будем обозначать эту силу через  $F_{AB}$ .

Третий закон утверждает: если тело  $B$  действует на тело  $A$  с силой  $F_{AB}$ , то в свою очередь тело  $A$  обязательно действует на

тело  $B$  с силой  $F_{BA}$ , равной по величине и противоположной по знаку силе  $F_{AB}$ ; обе силы направлены вдоль одной прямой. Третий закон отражает тот факт, что *сила есть результат взаимодействия двух различных тел*.

Только для анализа явления и определения движения тела в первых двух законах рассматривалась одна сторона этого взаимодействия. На самом деле всегда<sup>1</sup> существует взаимодействие и нет силы без противодействующей силы. Очевидно, что названия «действие» и «противодействие» — чисто условные, каждое из них можно считать или тем, или другим.

Например, на ладони руки лежит гиря, ладонь действует на гирю с силой  $F_{лг}$ , направленной вверх и приложенной к гире, а гиря в свою очередь действует на ладонь с силой  $F_{гл}$ , направленной вниз и приложенной к ладони (рис. 41). Теперь будем поднимать и опускать ладонь вверх и вниз. По третьему закону

$$F_{лг} + F_{гл} = 0. \quad (20.1)$$

Это равенство имеет место *всегда*, вне зависимости от того, поконится или движется ладонь с грузом.

Третий закон ничего не говорит о величине сил, а только о том, что они равны. Здесь очень важно отметить, что в третьем законе идет речь о силах, приложенных к *различным* телам.

В случае взаимодействия движущихся электрических зарядов дело обстоит сложнее. Например, при рассмотрении сил взаимодействия между двумя зарядами, движущимися так, как показано на рис. 42, электрическое взаимодействие зарядов удовлетворяет третьему закону Ньютона, но магнитное — не удовлетворяет. Магнитное поле заряда 2 в точке, где находится заряд 1, рав-

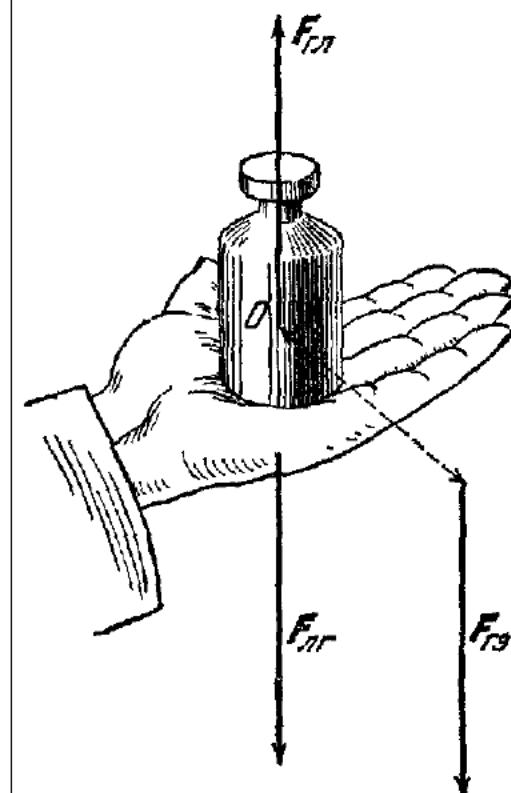


Рис. 41.

<sup>1</sup>) В инерциальных системах отсчета, см § 44.

но нулю — силы действия заряда 2 на заряд 1 нет; магнитное поле заряда 1 в точке, где находится заряд 2, отлично от нуля — сила действия заряда 1 на заряд 2 есть, и направлена она нормально к плоскости чертежа

Дело здесь в том, что при рассмотрении взаимодействия движущихся зарядов необходимо учитывать импульс электромагнитного поля, что и делается в электродинамике.

Три основных закона динамики, сформулированные Ньютоном, были известны до него. Он сам утверждал: «Я излагал начала, принятые математиками и подтверждаемые многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами..., Галилей нашел, что падение тел пропорционально квадрату времени... Из этих же двух законов и из третьего кавалер Христофор Врен, Иоанн Уаллис и Христиан Гюйгенс, величайшие геометры нашего времени, вывели законы удара и отражений тел. .» (перевод акад. А. Н. Крылова<sup>1</sup>)).

Но до Ньютона не было представления о том, что эти три закона являются основой всей механики. Только Ньютон, исследуя и анализируя движения всевозможных тел, указал, что все сколь угодно сложные механические явления подчинены трем законам динамики, и только ему удалось построить на фундаменте этих законов стройное здание механики как научной дисциплины. Поэтому название законов динамики вполне справедливо связывают с именем Ньютона.

## § 21. Силы, второй и третий законы Ньютона

При изучении движений тел, при решении механических задач возникают недоразумения вследствие того, что не сразу уясняется различие закономерностей, вытекающих из второго и третьего законов динамики. Покажем это на примерах.

Анализ каждой механической задачи начинается с того, что устанавливают, какие силы и со стороны каких тел действуют на данное тело и чем они определяются. Затем, пользуясь вторым законом, определяют ускорение тела, учитывая те условия, которые налагает на эти силы третий закон, если в том есть необходимость. Рассмотрим несколько задач.

1). Гиря лежит на ладони. Предположим, что ладонь движется каким-то образом. Определим силы, действующие на ладонь и гирю, и найдем ускорение гири.

Равенство (20.1) написано на основании третьего закона, и оно ничем пока не может помочь нам при определении ускорения гири. Для определения ускорения нужно знать все остальные силы,

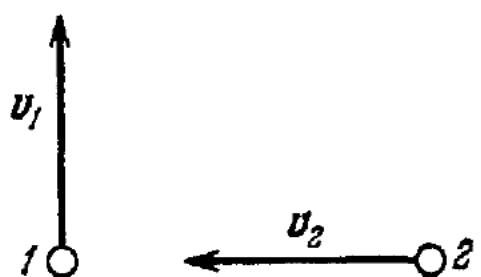


Рис. 42.

<sup>1</sup>) Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, Изд-во АН СССР, 1936, стр 50, 51.

приложенные к гире со стороны других тел. На гирю, кроме силы руки  $F_{\text{гл}}$ , действует еще сила тяжести, т. е. сила взаимодействия ее с Землей<sup>1)</sup>, которую мы обозначим  $F_{\text{гз}}$ . Теперь можно найти ускорение гири. К гире приложена сила, равная сумме двух сил, которая по второму закону будет равна произведению массы гири на ее ускорение:

$$F_{\text{гз}} + F_{\text{гл}} = m_{\text{г}} a_{\text{г}}. \quad (21.1)$$

Следовательно, если сила тяжести  $F_{\text{гз}}$  больше силы руки  $F_{\text{гл}}$ , то ускорение гири направлено к Земле; если, наоборот, сила руки больше силы тяжести, то ускорение тела направлено вверх.

Величина и направление сил определяют только ускорение, а не скорость, так что сказать, в каком направлении движется гиря при  $F_{\text{гз}} > F_{\text{гл}}$ , нельзя: она может двигаться с ускорением вниз или с замедлением вверх. Точнее, если ускорение направлено вниз, то скорость может быть направлена как угодно: вверх, вниз и даже в сторону. Направление скорости в данный момент вообще не связано с направлением ускорения, но ускорение совершенно однозначно определяется действующими силами.

Если ускорение гири равно нулю, то, следовательно, сумма сил, действующих на гирю, равна нулю; другими словами, сила действия ладони на гирю  $F_{\text{гл}}$  равна и противоположна силе тяжести  $F_{\text{гз}}$ . Гиря при этом условии может покоиться или двигаться прямолинейно и равномерно с любой скоростью.

2) На штативе висит на пружине груз (рис. 43). Будем считать, что штатив, к которому прикреплена пружина, составляет одно целое со столом, стоящим неподвижно на Земле. Поэтому рассмотрим три тела: груз, пружину и Землю (вместе со столом и штативом). Между этими телами имеет место силовое взаимодействие, которое условно показано на рис. 44, где все три тела нарисованы отдельно. Со стороны Земли на груз действует сила  $F_{\text{гз}}$  (сила тяжести груза), а на пружину — сила  $F_{\text{пз}}$  (сила тяжести пружины). Со стороны груза на пружину действует сила  $F_{\text{пг}}$ , а со стороны штатива (Земли) — сила  $F_{\text{пш}}$ . По третьему закону всегда должны выполняться следующие равенства:

$$F_{\text{гз}} + F_{\text{зг}} = 0; \quad F_{\text{пг}} + F_{\text{гп}} = 0; \quad F_{\text{пш}} + F_{\text{шп}} = 0, \quad (21.2)$$

а по второму закону

$$\begin{aligned} F_{\text{гз}} + F_{\text{гп}} &= m_{\text{г}} a_{\text{г}}, \\ F_{\text{пш}} + F_{\text{шп}} + F_{\text{пз}} &= m_{\text{п}} a_{\text{п}}, \\ F_{\text{шп}} + F_{\text{зг}} + F_{\text{зп}} &= m_{\text{з}} a_{\text{з}}, \end{aligned} \quad (21.3)$$

<sup>1)</sup> Сила сопротивления воздуха очень мала, и ею можно в этих рассуждениях пренебречь.

где  $m_r$ ,  $m_n$ ,  $m_3$  — соответственно массы груза, пружины и Земли, а  $a_r$ ,  $a_n$ ,  $a_3$  — их ускорения. Но так как система отсчета у нас связана с Землей, то ускорение  $a_3 = 0$ <sup>1)</sup>. Обычно масса пружины или вес ее очень малы по сравнению с массой или весом груза, поэтому во многих задачах можно считать  $m_n = 0$  и  $F_{n\pi} = F_{n\Gamma} = 0$ . Тогда уравнения (21.3), выражающие второй закон Ньютона, можно записать так:

$$\begin{aligned} F_{r\pi} + F_{r\Gamma} &= m_r a_r, \quad F_{n\pi} + F_{n\Gamma} = 0, \\ F_{n\pi} + F_{n\Gamma} &= m_n a_n. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Для пружины (только потому, что величиной ее массы можно пренебречь)

$$F_{n\pi} + F_{n\Gamma} = 0 \quad (21.5)$$

на основании второго закона. Условие (21.5) означает, что сила натяжения

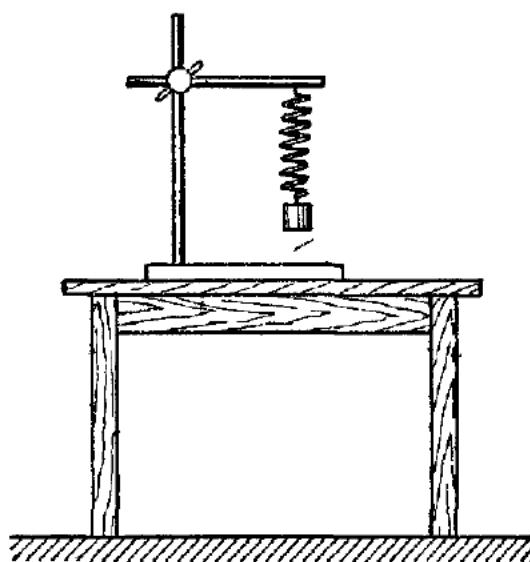


Рис. 43.

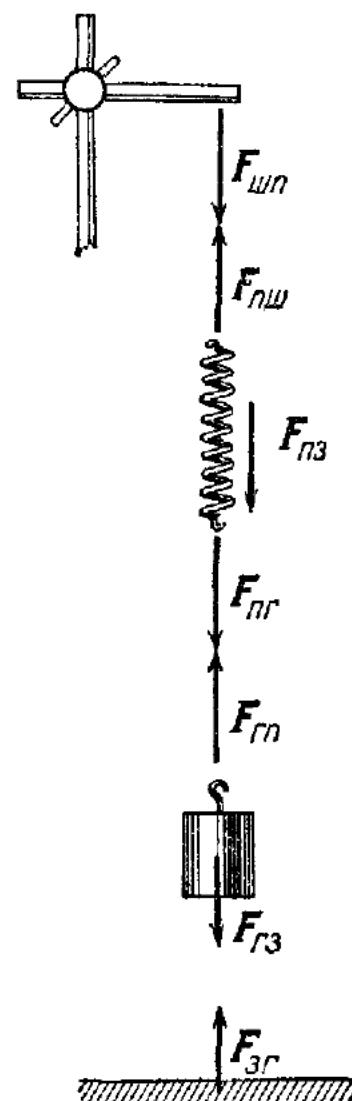


Рис. 44.

пружины («безмассовой») всегда, при любых условиях, на обоих концах одинакова. Сила, действующая на один конец пружины, в точности равна силе, действующей на другой ее конец. А по третьему закону эти силы равны по величине тем силам ( $F_{n\pi}$ ,  $F_{r\pi}$ ), с которыми пружина действует на растягивающие ее тела. Таким образом, «невесомая» пружина<sup>2)</sup> «передает» силу без изменения, вне зависимости от того, движется она или нет. Поэтому мы всегда и говорим о натяжении пружины или нити как о силе, действующей с любого конца пружины или нити.

<sup>1)</sup> Отсюда не следует, что  $m_3 a_3 = 0$ , так как  $m_3$  очень велика ( $m_3 \rightarrow \infty$ ).

<sup>2)</sup> Вообще любое «безмассовое» тело; например, такими можно считать в наших опытах нити.

Сила  $F_{\text{тз}}$ , действующая на груз со стороны Земли (сила тяготения), уже не будет равна силе  $F_{\text{рп}}$ , с которой пружина действует на груз. Разность этих сил определяет ускорение груза. Заметим, что если в данный момент  $F_{\text{рп}} > F_{\text{тз}}$ , сила пружины больше силы тяготения, то это не означает, что груз движется вверх, а только то, что ускорение направлено вверх. Сила пружины  $F_{\text{рп}}$  и сила тяготения  $F_{\text{тз}}$  не равны друг другу (по второму закону). Разность этих сил и обеспечивает соответствующее ускорение груза.

В состоянии покоя груза (и пружины) ускорения пружины и гири равны нулю:  $a_{\text{р}} = a_{\text{п}} = 0$ . Тогда в первых двух уравнениях (21.3) справа будут стоять нули. Сила пружины  $F_{\text{рп}}$ , действующая на гирю, будет равна по величине силе тяготения  $F_{\text{тз}}$ , а также по третьему закону — силе, с которой груз тянет пружину  $F_{\text{пг}}$  и которую мы называем силой веса. Таким образом, в состоянии покоя три различные силы одинаковы по абсолютной величине:  $F_{\text{тз}}$  — сила тяготения,  $F_{\text{рп}}$  — сила натяжения пружины и  $F_{\text{пг}}$  — сила веса груза. Силы веса и тяготения просто равны,  $F_{\text{тз}} = F_{\text{пг}}$ .

Заметим, что если нельзя пренебречь весом пружины (вернее, силой тяжести  $F_{\text{пз}}$ ), то и в статике силы натяжения с различных концов пружины будут различны. По второму уравнению из (21.3) в этом случае, при  $a_{\text{п}} = 0$ ,

$$F_{\text{пш}} + F_{\text{пг}} = -F_{\text{из}}. \quad (21.6)$$

Сила натяжения пружины сверху  $F_{\text{пш}}$  будет больше силы натяжения пружины снизу  $F_{\text{пг}}$  на величину силы тяготения пружины  $F_{\text{пз}}$ .

Если же вес пружины очень мал по сравнению с весом груза, то можно пренебречь силой  $F_{\text{пз}}$  ( $F_{\text{пз}} = 0$ ). Тогда при статических условиях (при покоящемся грузе) все силы, которые мы рассматривали, будут равны друг другу по величине. Кроме равенств (21.3), справедливых всегда, будут иметь место и равенства, получившиеся из уравнений (21.3):

$$F_{\text{тз}} + F_{\text{рп}} = 0, \quad F_{\text{пш}} + F_{\text{пг}} = 0, \quad F_{\text{шп}} + F_{\text{зг}} = 0. \quad (21.7)$$

Только в этом случае все шесть сил, сил взаимодействия между тремя телами: Земля, груз и пружина, равны по величине; три из них,  $F_{\text{тз}}$ ,  $F_{\text{шп}}$ ,  $F_{\text{пг}}$ , направлены вниз, остальные — вверх.

Подчеркнем еще раз: по третьему закону равенство сил, приложенных к различным телам, имеет место всегда. Равенство нулю суммы сил, приложенных к одному телу, справедливо только для тел, находящихся в состоянии покоя или равномерного и прямоугольинейного движения (согласно второму закону).

Приближенное равенство сил, приложенных к одному телу, имеет место в том частном случае, когда массой тела, на которое действуют силы, можно пренебречь, — вернее, тогда, когда произведение массы на ускорение для данного тела очень мало по срав-

нению с величиной каждой из действующих сил. Например, в опытах с ускорением тележки (см. рис. 39) мы пренебрегали массой пружины динамометра и поэтому считали, что показания динамометра такие же, как и в статике.

При ударах, когда имеют место очень большие ускорения, не всегда можно пренебречь малой массой.

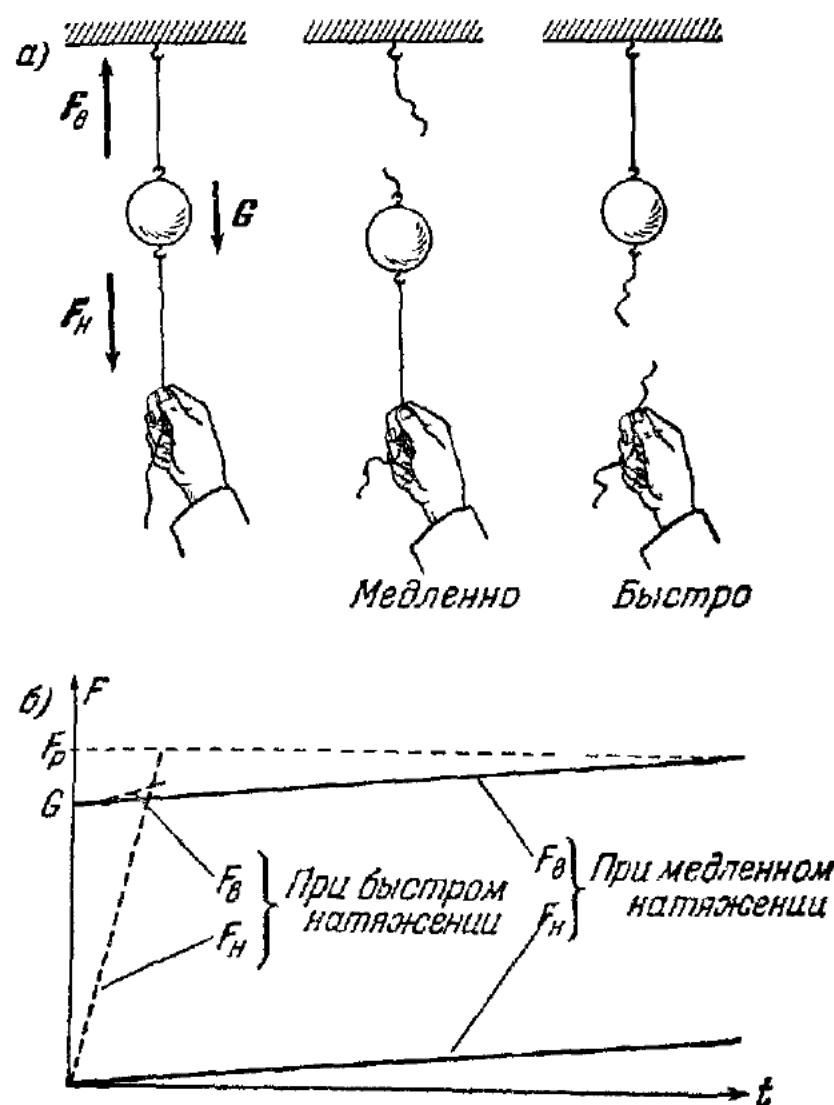


Рис. 45.

3) Влияние инертности тела на передачу силы. На нити висит груз с массой  $m$ , к которому снизу привязана нить такой же толщины, что и сверху (рис. 45, а). Если мы будем медленно, постепенно натягивать нижнюю нить, то оборвется верхняя нить. Если же рывком дернем за нижнюю нить, то очень легко оборвем нижнюю.

Очевидно, что сила натяжения нижней нити  $F_H$  (сила, с которой нить действует на груз) и сила натяжения верхней нити  $F_B$  должны вместе с силой тяготения груза  $G$  быть равны массе его  $m$ , умноженной на ускорение груза  $a$ :

$$F_H + F_B + G = ma. \quad (21.8)$$

Сила  $F_v$  направлена вверх, а остальные — вниз. Ускорение  $a$  при натяжении нижней нити также направлено вниз. Следовательно, равенство (21.8) можно записать так:

$$F_u - F_v + G = ma,$$

или

$$F_u - F_v = ma - G. \quad (21.9)$$

Нити считаем невесомыми, поэтому остальные силы здесь не выписываем. При медленном натяжении нити явление происходит «почти статически», ускорение  $a$  груза ничтожно мало, и равенство (21.9) в этом случае сводится к следующему:

$$F_v - F_u = G. \quad (21.10)$$

Сила натяжения верхней нити  $F_v$  всегда больше силы натяжения  $F_u$  нижней нити на величину  $G$ .

Совсем иная картина будет в момент резкого рывка нижней нити. Тогда верхняя нить должна очень быстро растянуться для того, чтобы она действовала на груз с увеличенной силой, соответствующей увеличению натяжения нижней нити. Поэтому во время рывка груз будет иметь какое-то ускорение  $a$  вниз, тем большее, чем большая сила  $F_u$  действует снизу. В этом случае сила натяжения нижней нити  $F_u$  может быть больше натяжения верхней нити  $F_v$ . Как это видно из равенства (21.9), если  $ma > G$ , то  $F_u > F_v$ . Если разность натяжения нитей и сила тяготения сообщают грузу ускорение  $a$ , большее ускорения силы тяжести, то натяжение нижней нити больше натяжения верхней.

Заметим, что перемещение массы груза ничтожно, а ускорение может быть очень велико, ибо время, за которое груз ускоряется, достаточно мало.

Полезно рассмотреть график изменения сил во времени при медленном натяжении и при рывке (рис. 45, б). При медленном натяжении нити обе силы примерно одинаково нарастают, но сила натяжения верхней нити  $F_v$  все время больше  $F_u$  на величину силы веса груза. При быстром нарастании силы натяжения нижней нити она быстро достигает значения  $F_p$ , при котором нить разрушается, в то время как сила натяжения верхней нити сравнительно медленно нарастает. Отметим, что при объяснении этих опытов существенное значение имеет растяжение верхней нити: увеличение длины верхней нити, хоть и очень малое, необходимо для того, чтобы сила натяжения ее увеличивалась. При рывке, пока деформация верхней нити нарастает, натяжение нижней достигает предельного значения; инерция груза не допускает быстрого перемещения тела, точнее, требует для этого такой большей силы, которой не может сообщить ему нижняя нить. Из ана-

лиза очевидно, что описанные опыты всегда будут удачны при достаточно длинной верхней нити.

4) Лошадь и сани. Обычно при изучении третьего закона приводят пример с лошадью, тянувшей за собой сани, и ставят такой вопрос: сани действуют на лошадь с такой же силой, с какой и лошадь действует на сани; но почему же лошадь тянет сани, а не наоборот?

После разобранных примеров очевидно, что третий закон не поможет решить вопрос об ускорении тела. Здесь постановка вопроса неверна. В данном случае идет речь о равенстве сил, действующих на разные тела, и отсюда нельзя сделать никаких выводов об ускорении лошади и саней. Нужно узнать остальные силы, действующие на лошадь и сани, и только тогда можно определить ускорение тел (лошади и саней).

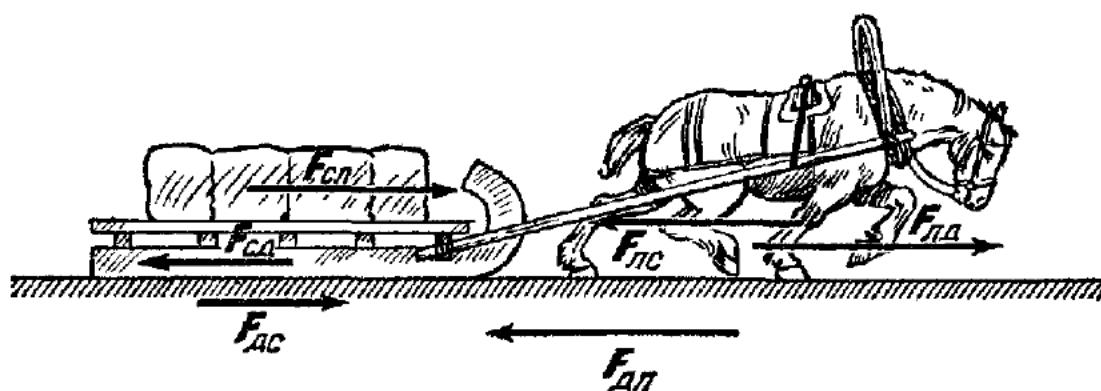


Рис. 46.

На рис. 46 показаны все силы, действующие в этом случае на все три тела (саны, лошадь, дорога); они вычерчены так же, как это было сделано в первом примере. Силы  $F_{лд}$  и  $F_{сл}$  характеризуют взаимодействие лошади и саней ( $F_{лд} = F_{сл}$ ), силы  $F_{дс}$  и  $F_{сд}$  — силы трения между санями и дорогой ( $F_{дс} = F_{сд}$ ), силы  $F_{лл}$  и  $F_{дл}$  — силы сцепления между лошадью и дорогой ( $F_{лл} = F_{дл}$ ). Каждое равенство представляет всегда равные силы, противоположно направленные и приложенные к различным взаимодействующим телам (по третьему закону). Если  $F_{лд} > F_{сд}$ , т. е. сила, приложенная к лошади со стороны дороги ( $F_{лд}$ ), больше силы трения саней ( $F_{сд}$ ), то сани и лошадь имеют ускорение, направленное вперед (по второму закону). Силы  $F_{сл}$  и  $F_{лл}$  ничего не могут изменить. Если  $F_{лд} < F_{сд}$ , то лошадь и сани имеют ускорение назад. Только при равномерном движении все силы, указанные на рис. 46, равны по величине.

Читателю предлагается разобрать в этом случае, какие силы равны согласно третьему закону, какие равны согласно второму.

Все эти примеры показывают, что третий закон динамики отражает прежде всего тот факт, что причиной изменения состояния движения какого-либо тела обязательно является по крайней мере одно другое тело, испытывающее на себе при этом воздействие со

стороны первого тела. Это означает, что движение какого-либо тела возникает или прекращается вследствие взаимодействия с каким-либо другим телом; движение, так сказать, *передается* от одного тела к другому.

## § 22. Движение тела под действием заданных сил

Простейшим примером такого движения является свободное «падение» тела, движение тела в поле сил тяготения. *Силовым полем называется пространство, в каждой точке которого на частицу (тело), помещенную в эту точку, действует определенная сила.*

Вообще векторным физическим полем называют такую область пространства, каждой точке которой соответствует известная векторная физическая величина. Так, например, вокруг неподвижных заряженных электрическим тел возникает постоянное электрическое поле вектора напряженности  $E$ . Каждой точке пространства соответствует вектор  $E$ , который определяет силу

$$F = eE, \quad (22.1)$$

действующую на точечный заряд  $e$ , находящийся в этой точке пространства.

Вокруг неподвижных проводников с постоянным током возникает магнитное поле вектора индукции  $B$ , который определяет силу

$$F = e[vB], \quad (22.2)$$

действующую на точечный электрический заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $v$  и находящийся в той точке пространства, где вектор индукции имеет величину  $B$ . Заметим, что если измерять величины в единицах системы СИ ( $[e] = A \cdot c$ ;  $[E] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{A} \cdot \text{с}^3}$ ;  $[B] = \frac{\text{кг}}{\text{A} \cdot \text{с}}$ ), то сила будет измеряться в ньютонах.

При движении заряженной частицы в однородном электрическом поле  $E$  на нее действует постоянная, одинаковая во всех точках сила  $F$ , так как в однородном поле вектор  $E$  одинаков во всех точках поля. Следовательно, движение будет происходить с постоянным ускорением.

Аналогичным образом происходит движение тела в поле тяжести вблизи поверхности Земли. Если размеры области пространства малы по сравнению с радиусом Земли, то поле тяжести можно считать однородным. В этом случае движение тела происходит с постоянным ускорением  $g$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ). В однородном постоянном электрическом поле движение заряженной частицы происходит с постоянным ускорением

$$w = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (22.3)$$

Такие движения мы рассматривали в § 10.

И в том, и в другом случае траектория движения частицы лежит в плоскости, проходящей через точку положения частицы в момент  $t = 0$  и векторы  $\omega$  и  $v_0$ , проведенные из этой точки. Траектория представляет собой *параболу*. Действительно, возьмем уравнение движения (10.9) в векторном виде и запишем его в проекциях, предполагая, что начало координат лежит в точке  $r_0$  и движение происходит в плоскости  $(x, z)$ . Тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = xi + zk, \quad v_0 = v_x i + v_z k, \quad \omega = -\omega k,$$

ускорение направлено в сторону отрицательных значений  $z$ . Уравнения движения в проекциях на оси  $x$  и  $z$  имеют вид:

$$x = v_x t, \quad z = v_z t - \frac{1}{2} \omega t^2. \quad (22.4)$$

Это — уравнения параболы в плоскости  $(x, z)$ , проходящей через начало координат (при  $t = 0$ ). Исключая из двух уравнений время  $t$ , получим траекторию движения в координатах  $x$  и  $z$  (рис. 47):

$$z = \frac{v_z}{v_x} x - \frac{\omega}{2v_x} x^2. \quad (22.5)$$

Это — уравнение параболы, вершина которой лежит в точке  $x_1, z_1$ . Время  $t_1$ , за которое частица достигает высшей точки, вершины параболы, определяется из условия:  $\frac{dz}{dt} = 0$  в момент  $t_1$ , или

$$\frac{dz}{dt} = v_z - \omega t_1 = 0, \quad t_1 = \frac{v_z}{\omega}.$$

Подставляя  $t_1$  в уравнения (22.4), находим координаты вершины параболы:

$$x_1 = \frac{v_x v_z}{\omega}, \quad z_1 = \frac{v_z^2}{2\omega}.$$

При падении вниз частица пересечет ось  $x$  на расстоянии  $2x_1 = 2v_x t_1 = \frac{2v_x v_z}{\omega}$  (« дальность »). Можно показать, что при заданной величине  $v_0$  максимальная дальность достигается в случае  $v_x = v_z = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0$  и равна  $v_0^2/\omega$ ; максимальная высота равна  $v_0^2/2\omega$  при  $v_x = 0$  и  $v_z = v_0$ .

Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Электрическое поле действует на покоящийся заряд так же, как на движущийся: сила не

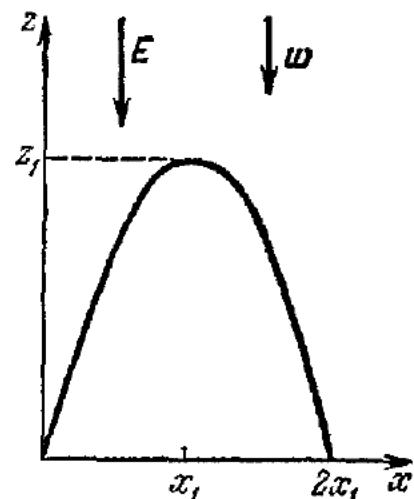


Рис. 47.

зависит от скорости движения заряда, а только от его положения. Сила всегда направлена по вектору поля  $E$ .

Совсем иное положение имеет место в том случае, когда заряженная частица движется в магнитном поле. В магнитном поле на частицу действует сила только тогда, когда скорость ее  $v \neq 0$ , на покоящуюся частицу магнитное поле не действует.

По формуле (22.2) сила  $F$  равна заряду  $e$ , умноженному на векторное произведение скорости  $v$  на вектор магнитной индукции  $B$ . Значит, сила  $F$  нормальна к плоскости, проходящей через векторы  $v$  и  $B$ , и равна

$$F = evB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $v$  и  $B$ . Направление силы  $F$  определяется *правилом правого винта*: если правый винт поворачивать в гайке, закрепленной в плоскости векторов  $v$  и  $B$ , от вектора  $v$  до вектора  $B$  в направлении меньшего угла  $\alpha$  между ними, то винт передвинется в направлении силы  $F$  (см. рис. 14).

Следовательно, если скорость  $v$  совпадает по направлению с вектором  $B$ , то сила  $F = 0$ , поле не действует в этом случае и на движущуюся частицу. Сила  $F$  всегда нормальна к скорости  $v$ , и поэтому ее действие не изменяет величины (модуля) скорости  $v$ . Вектор скорости под действием  $F$  только поворачивается, как при равномерном движении по кругу.

Поэтому при движении частицы в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  движение можно представить состоящим из двух частей. Разложим скорость частицы  $v$  на две составляющие:

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp},$$

где  $v_{\parallel}$  параллельна вектору магнитной индукции  $B$  и  $v_{\perp}$  нормальна к нему; тогда

$$F = e[vB] = e[(v_{\parallel} + v_{\perp})B] = e[v_{\perp}B], \quad (22.6)$$

так как  $[v_{\parallel} B] = 0$

Ускорение  $F/m$  всегда нормально к  $B$ , поэтому составляющая скорости частицы  $v_{\perp}$  не будет изменяться со временем и в направлении  $B$  частица движется с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$ . С другой стороны, составляющая скорости  $v_{\perp}$  в плоскости, нормальной к  $B$ , изменяется так, что ускорение, по (22.6) равное  $\frac{e[v_{\perp}B]}{m}$ , всегда перпендикулярно к  $v_{\perp}$  и имеет величину

$$\frac{e}{m} v_{\perp} B. \quad (22.7)$$

Следовательно, модуль  $v_{\perp}$  не изменяется. Частица будет двигаться так, что ее проекция на плоскость, нормальную к  $B$ , будет совершать равномерное движение по кругу радиуса  $R$  с линейной скоростью  $v_{\perp}$ . Радиус круга  $R$  определится из условия равенства центро-

стремительного ускорения и (22.7):

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{e}{m} v_{\perp} B;$$

отсюда

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB}. \quad (22.8)$$

Время одного оборота

$$\tau = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (22.9)$$

Оно не зависит от  $v_{\perp}$  и определяется только величиной поля  $B$  и отношением  $e/m$  частицы.

Поэтому результирующее движение слагается из двух: равномерного движения со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль линии, параллельной  $B$ , и равномерного движения по кругу радиуса  $R$  с постоянной по величине скоростью  $v_{\perp}$ . Результирующее движение будет винтовым (рис. 48).

Во время движения составляющая скорости  $v_{\parallel}$  не изменяется ни по величине, ни по направлению, а  $v_{\perp}$  не изменяется по величине, но все время меняет направление.

Уравнения движения частицы можно найти следующим путем. Допустим, что  $B = Bi$ ,  $B_y = B_z = 0$ , поле направлено по оси  $x$ ; тогда

$$\mathbf{v}_1 = v_x i, \quad \mathbf{v}_{\perp} = v_y j + v_z k.$$

Величины  $v_x$  и  $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$  — постоянные, они определяются начальным значением вектора скорости  $\mathbf{v}_0$ .

Если частица со скоростью  $\mathbf{v}_0$  находилась в момент  $t = 0$  в начале координат и

$$\mathbf{v}_0 = v_x i + v_y j,$$

то координата  $x$  изменяется по закону

$$x = v_x t. \quad (22.10)$$

Проекция частицы на плоскость ( $y, z$ ) представляет собой движение по кругу радиуса  $R$  (22.8) со скоростью  $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ . Скорость  $v_{\perp}$  частицы при  $t = 0$  равна

$$v_{\perp} = v_y j,$$

т. е. нормальная составляющая начальной скорости направлена по оси  $y$ ; тогда значения проекций скорости  $v_{\perp}$  на оси  $y$  и  $z$ , как видно из рис. 49, будут изменяться по закону

$$v_y = v_{\perp} \cos \frac{v_{\perp}}{R} t, \quad v_z = v_{\perp} \sin \frac{v_{\perp}}{R} t. \quad (22.11)$$

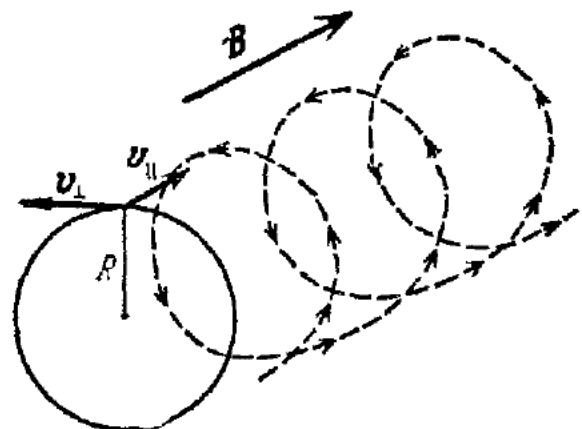


Рис. 48.

Величина  $\phi = \frac{v_{\perp}}{R}t$  представляет собой угол, на который за время  $t$  поворачивается радиус-вектор, проведенный из центра  $A$  к проекции частицы на плоскость ( $y$ ,  $z$ ). Здесь можно ввести понятие угловой скорости вращения, т. е. скорости изменения угла  $\phi$ ; она, по определению, равна

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_{\perp}}{R}. \quad (22.12)$$

Теперь можно записать и изменение координат частицы  $y$  и  $z$ , учитывая (22.11) и (22.12).

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t v_y dt_1 = v_{\perp} \int_0^t \cos \omega t_1 dt_1 = R \sin \omega t, \\ z(t) &= \int_0^t v_z dt_1 = v_{\perp} \int_0^t \sin \omega t_1 dt_1 = R(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (22.13)$$

Окончательно, равенства (22.10) и (22.13) представляют движение заряженной частицы из начала координат с начальной скоростью  $v_0 = v_x i + v_{\perp} j$  в однородном магнитном поле  $B = Bi$ .

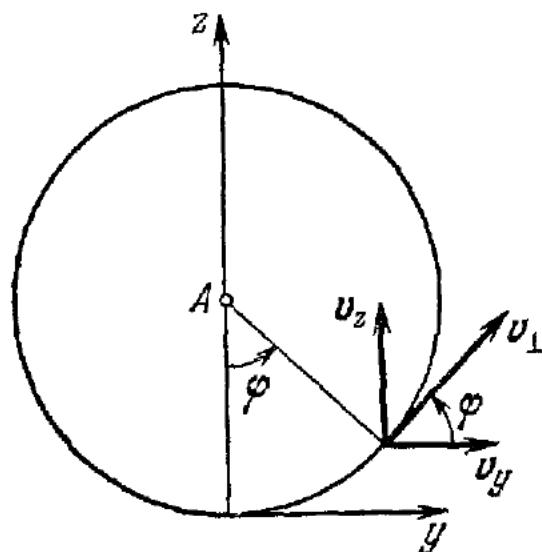


Рис. 49.

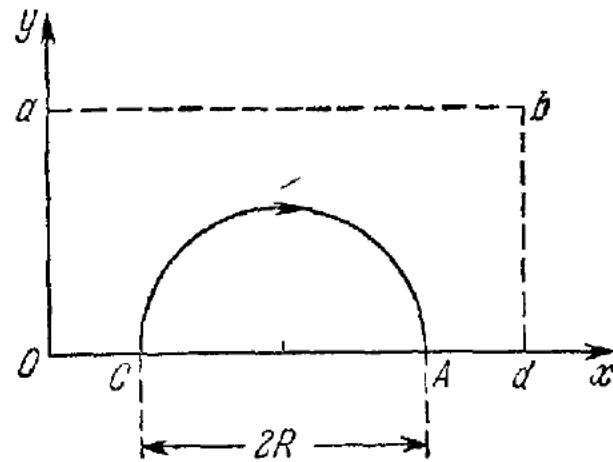


Рис. 50.

Заметим, что величина радиуса вращения  $R$  и начальная скорость  $v_0$  определяют отношение  $e/m$  заряженной частицы. На этой зависимости основаны приборы для определения  $e/m$ . Схему одного из простейших устройств можно представить в таком виде.

Пусть однородное поле направлено по оси  $z$  и занимает некоторую область  $Oabd$  вблизи начала координат (рис. 50). В эту область в точке  $C$  влетает заряженная частица со скоростью  $v_0$ , направленной параллельно оси  $y$ . Описав полукруг радиуса  $R$  под действием поля  $B$ , частица выходит из области поля в точке  $A$ . Измеряя расстояние  $CA = 2R$  и зная величину  $v_0$ , по (22.8) находят

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0}{BR} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \right]. \quad (22.14)$$

Движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях, в каждой точке которых векторы  $E$  и  $B$  совпадают по направлению,

Частицы, влетающие в поле с некоторой скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к  $E$ , будут отклоняться: под действием  $E$  — в направлении вектора поля, а под действием  $B$  — в сторону, в плоскости, нормальной к вектору поля. Определим эти отклонения, полагая, что длина участка поля вдоль  $v_0$ , равная  $l$ , очень мала по сравнению с радиусом закругления  $R$  траектории частицы в магнитном поле с индукцией  $B$ , или  $l \ll R = \frac{mv_0}{eB}$ .

Пусть частицы влетают в начале координат в область поля в отрицательном направлении оси  $x$ , а векторы  $E$  и  $B$  поля направлены по оси  $z$ . Каковы будут координаты частиц  $y$  и  $z$  на расстоянии  $l$  от начала координат  $O$  в плоскости, нормальной к оси  $x$ ?

С помощью (22.3) и (22.4) и учитывая, что  $t = l/v_0$ , рассчитаем отклонение частиц под действием электрического поля  $E$  вдоль оси  $z$ :

$$z = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}. \quad (22.15)$$

Отклонение вдоль оси  $y$  под действием магнитного поля  $B$  вычислим приближенно ( $l \ll R$ ) (рис. 51):

$$y = R(1 - \cos \alpha).$$

Полагая угол  $\alpha$  достаточно малым, можно приближенно записать:

$$R\alpha \approx l, \quad 1 - \cos \alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Поэтому, учитывая (22.8), находим

$$y \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{eBl^2}{2mv_0}. \quad (22.16)$$

Из (22.15) и (22.16) видно, что отношение

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{E} v_0 = \operatorname{ctg} \beta \quad (22.17)$$

может быть использовано для определения скорости  $v_0$  при известных  $E$  и  $B$ .

Если исключить из уравнений (22.15) и (22.16) скорость частиц  $v_0$ , то получим

$$y^2 = \frac{eB^2 l^2}{2mE} z, \quad (22.18)$$

т. е. уравнение параболы.

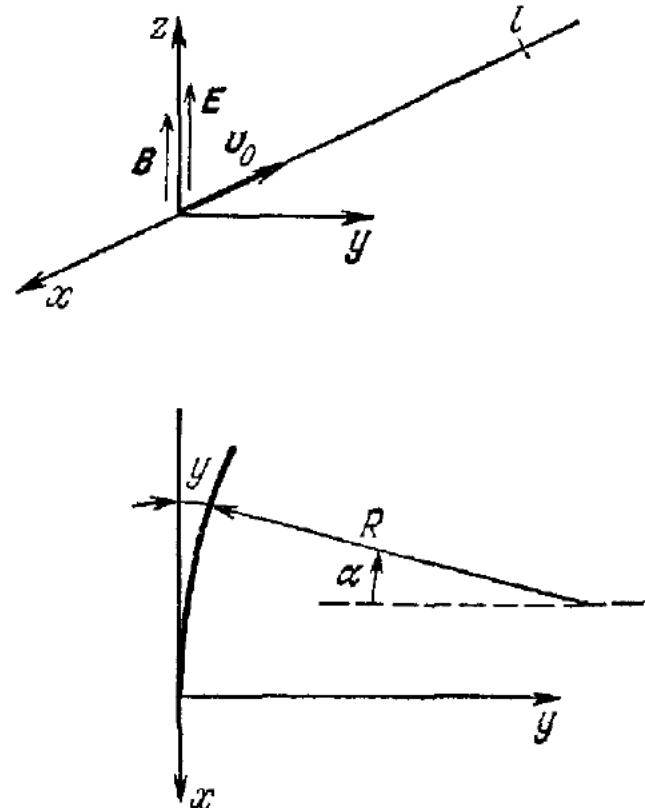


Рис. 51.

Частицы с различными скоростями  $v_0$ , но с одинаковым отношением  $e/m$  лежат на одной параболе (рис. 52). С другой стороны, точки, лежащие на прямой  $z = y \operatorname{tg} \beta$ , соответствуют одной и той же для любых частиц скорости, равной  $v_0 = \frac{E}{B} \operatorname{ctg} \beta$ , как видно из (22.17).

Эти закономерности и были положены в основу устройств, позволяющих измерять отношение  $e/m$  для заряженных частиц. Приборами, построенными на этом принципе, впервые обнаружены изотопы химических элементов. Отклонения от закона парабол (22.18), наблюдаемые для очень быстрых частиц, указывают на релятивистское изменение массы с изменением скорости движения.

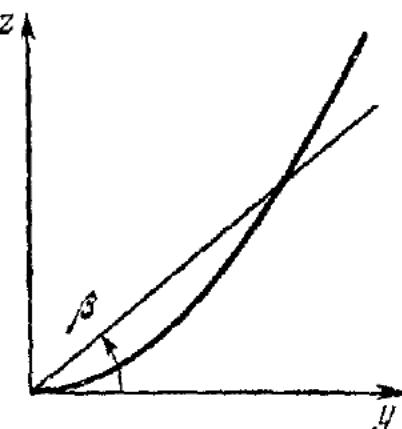


Рис. 52.

### § 23. Несвободные движения тела

Под *свободным движением* понимается движение тела под действием определенных сил, когда на траекторию и скорость тела не наложено заранее никаких ограничений. Свободное движение начинается из известного положения при данной начальной скорости.

В других задачах механики мы встречаемся с *несвободными движениями* тела, при которых на траекторию тела заранее наложены определенные ограничения<sup>1)</sup>. Например, скользывание тела по наклонной плоскости, движение вагона по рельсам, движение шарика, привязанного к нити, по кругу, качение шара по горизонтальной плоскости, движение двух связанных нитью тел — все это несвободные движения. Тело, скользящее по наклонной плоскости, во время своего движения обязательно остается на этой плоскости, шар также остается на горизонтальной плоскости, и т. д.

На несвободное движение тела наложены, вне зависимости от величины действующих на него сил, определенные условия, которые в механике называют *связями*. Связи, наложенные на движение какого-то тела, осуществляются «недеформируемыми» телами, чаще всего поверхностью таких тел. Хотя при движении одних тел по поверхности других тела, определяющие связь, деформируются, но эти деформации настолько малы, что ими вполне можно пренебречь и считать траекторию движения в определенном смысле заданной, не зависящей от величины действующих сил.

<sup>1)</sup> Ограничения могут быть наложены и на скорость тела.

При несвободном движении тела на него, кроме внешних (заданных, известных) сил, действуют еще силы со стороны тел, осуществляющих связь; эти силы называются *реакциями связи*.

Задачу о движении тела при наличии связей решают иными путями, чем задачу о движении свободного тела, так как реакции не известны заранее. Поэтому при составлении уравнений движения тела, кроме известных, заданных сил, учитывают и неизвестные реакции связей. Потом из условий задачи, например на основании известной формы траектории, находят дополнительные уравнения, с помощью которых можно определить и неизвестные реакции, и ускорение тела.

Путь решения всех динамических задач принципиально прост: обозначить неизвестные величины, составить уравнения движения, пользуясь вторым и третьим законами динамики, и учесть при этом условия, налагаемые на движение связями. Таким путем всегда получим достаточное количество независимых уравнений для определения неизвестных величин. Как это делается, лучше всего показать на примерах. Ряд типичных примеров несвободного движения мы разберем ниже, постепенно переходя от простых к более сложным. Рассмотрим следующие случаи.

1) Движение тела по кругу в горизонтальной плоскости. Шарик, привязанный к нити, совершает движение по кругу (рис. 53). Сила действия нити на шарик (реакция связи)  $F$  зависит от абсолютной величины скорости  $v$ , с которой шарик движется по кругу.

При наблюдении движения шарика обычно величина силы  $F$  не известна, известна только скорость  $v$  и радиус  $R$ . Отсюда можно найти ускорение  $\omega$  шарика. Как известно (§ 9), центростремительное ускорение равно  $\frac{v^2}{R}$ . Поэтому утверждаем, что нить, если она не разорвалась, действует на шарик с силой  $F$ , равной  $\frac{mv^2}{R}$ . Сила  $F$  —

реакция связи, она зависит от формы траектории движения ( $R$ ), от массы движущегося тела ( $m$ ) и от скорости ( $v$ ). Сила реакции связи (в данном случае сила натяжения нити) сообщает шарику центростремительное ускорение.

Иногда величина реакции связи совершенно не связана с характером движения тела, но для понимания силового взаимодействия тел при движении она существенна. Например, при скольжении тела по горизонтальной плоскости без трения о плоскость сила реакции связи всегда направлена перпендикулярно к плоскости, нормально

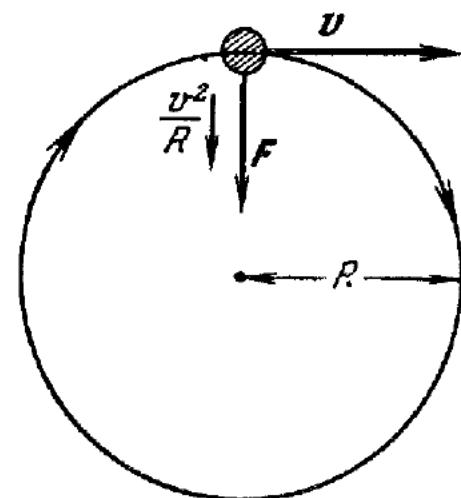


Рис. 53.

к возможным перемещениям тела, поэтому она не связана ни с ускорением тела, ни с его скоростью. Но сила тяжести и нормальные к плоскости составляющие других сил уравновешиваются силой реакции связи.

Так же обстоит дело и при соскальзывании тела по наклонной плоскости без трения о плоскость (рис. 54). Если трения между телом и плоскостью нет, то силы взаимодействия тела и плоскости нормальны к плоскости: реакция связи нормальна к поверхности связи.

Такие связи, при которых реакция связи всегда нормальна к перемещению тела, называются *идеальными связями*.

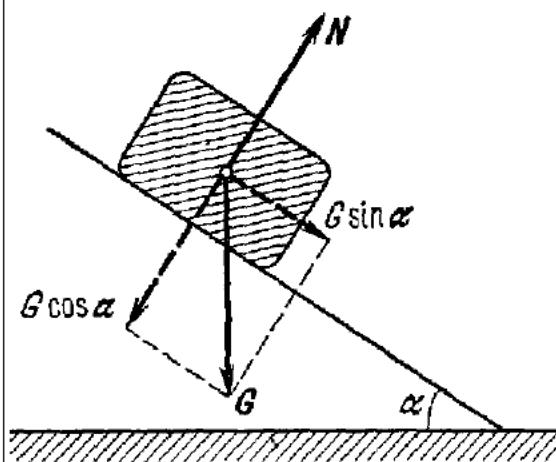


Рис. 54.

таким образом, движение тела по идеальной наклонной плоскости. Какие силы действуют на тело, находящееся в данный момент на наклонной плоскости? — Сила тяготения  $G$  и реакция наклонной плоскости  $N$ . Так как силы трения нет (плоскость идеальная), то реакция  $N$  нормальна к плоскости. Обе силы приложены к телу, только под действием этих двух сил тело будет двигаться по наклонной плоскости. Разбирается только случай, когда тело, двигаясь, прилегает все время к наклонной плоскости. Поэтому сумма составляющих всех сил в направлении, перпендикулярном к плоскости скольжения, должна быть равна нулю.

Заменим силу тяготения  $G$  двумя ее составляющими: нормальной составляющей  $G \cos \alpha$  и параллельной составляющей  $G \sin \alpha$  (см. рис. 54). Так как ускорение направлено параллельно плоскости скольжения, то

$$N = G \cos \alpha. \quad (23.1)$$

Следовательно, реакция  $N$  не влияет на ускорение тела, движущегося по плоскости, но она обеспечивает движение вдоль плоскости.

Составляющая силы тяготения  $G \sin \alpha$ , параллельная плоскости и направленная вниз, определит ускорение тела. Действительно,

$$M \frac{dv}{dt} = G \sin \alpha = Mg \sin \alpha, \quad \frac{dv}{dt} = g \sin \alpha, \quad (23.2)$$

где  $M$  — масса тела. Следовательно, ускорение постоянно во времени и характер движения по наклонной плоскости без трения будет примерно такой же, как и при свободном падении тел, только величина ускорения меньше.

При малом ускорении можно производить с достаточной точностью измерения пути и времени; поэтому при изучении законов

падения тел пользуются, как это делал Галилей, наклонной плоскостью.

В данном случае сила реакции связи (23.1) не изменяется при движении тела, она зависит только от действующей на тело силы тяготения и угла наклона плоскости.

3) Движение тела по искривленному пути. В других, более сложных случаях величина реакций связи существенно зависит от движения тела, как это видно в первом примере при движении шарика по кругу. Найдем реакции связи для паровоза, идущего по искривленному горизонтальному пути. Пусть скорость

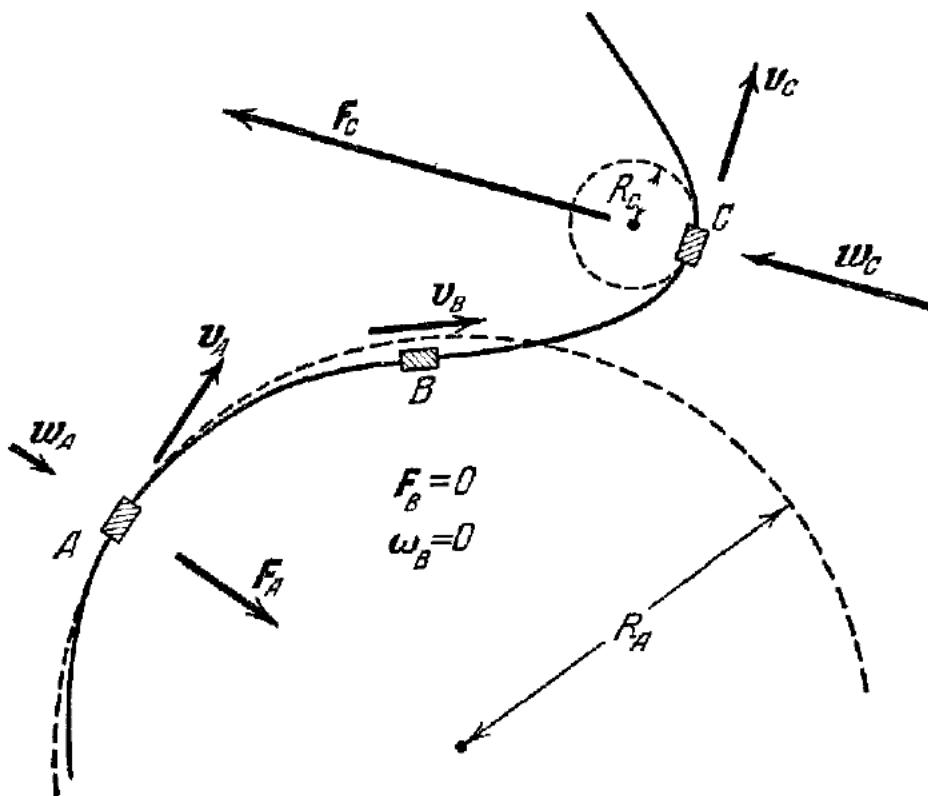


Рис. 55.

паровоза  $v$  постоянна по абсолютной величине, но направление скорости вообще изменяется, следовательно, паровоз имеет ускорение (рис. 55). Определив это ускорение  $w$  и зная массу паровоза  $M$ , найдем ускоряющую силу, нормальную к пути, которая является результатом бокового давления рельсов на реборды колес паровоза. Так как скорость паровоза не изменяется по величине, то ускорение обязательно перпендикулярно к скорости, перпендикулярно к рельсам. В каждый данный момент можно заменить участок пути, по которому идет паровоз, очень малым участком круга с определенным радиусом  $R$  и движение паровоза — движением по кругу с таким радиусом (рис. 56, а). Тогда ускорение паровоза  $w$  (рис. 56, б) направлено внутрь круга и равно

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{d\alpha}{dt} = v \frac{dS}{dt} \frac{1}{R} = \frac{v^2}{R}, \quad (23.3)$$

где  $R$  — радиус круга,  $dS$  — приращение пути за время  $dt$ .

Сила реакции связи, изменяющая скорость паровоза, имеет в точке пути  $A$  (см. рис. 55) величину

$$F_A = M \frac{v^2}{R_A}, \quad (23.4)$$

где  $R_A$  – радиус закругления пути в данной точке. В точке  $B$   $R_B \rightarrow \infty$ , так как в данном месте путь прямой, на паровоз не действует никакая горизонтальная сила со стороны рельсов, горизонтальная составляющая реакции связи равна нулю. В точке  $C$  сила

бокового давления рельсов  $F_C$  имеет противоположное направление, и величина ее зависит от радиуса закругления в данной точке.

Заметим, что приведенные рассуждения справедливы, если скорость движения и не будет постоянна по величине. Только тогда ускорение паровоза уже не будет нормально к рельсам, но связь нормальной к линии рельсов

компоненты ускорения со скоростью  $v$  в данный момент останется той же самой (см. формулу (23.3)), а следовательно, и сила бокового давления рельсов на колеса также определится формулой (23.4).

Движение паровоза в каждый данный момент представляет собой движение по некоторому кругу, размеры которого определяются кривизной пути в данном месте. (В математике кривизной кривой в данной точке называют величину, обратную радиусу круга, соприкасающегося с кривой в этой точке.) Поэтому силу бокового давления рельсов на колеса паровоза, которая сообщает ускорение, направленное к некоторому центру, как и при движении по кругу, можно назвать *центростремительной силой*. Разница заключается только в том, что при движении тела по кругу центр, к которому направлена центростремительная сила, постоянен и не меняется со временем. В общем же случае при движении тела по заданной кривой, как это имеет место в рассматриваемом примере с движением паровоза, центр, к которому направлена эта сила, вообще меняет свое положение от точки к точке и лежит на линии, перпендикулярной к касательной в данной точке кривой<sup>1)</sup>.

При анализе движения при заданных связях предполагается, что прочность тел, осуществляющих связь, достаточна. Если тело, служащее связью, не сможет сообщить движущемуся телу необхо-

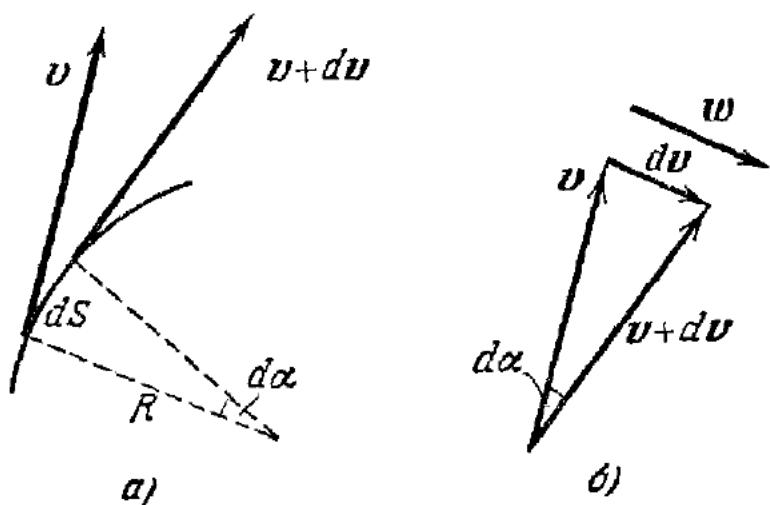


Рис. 56.

<sup>1)</sup> Эта линия называется *нормалью* к кривой в данной точке.

димую силу, то связь нарушается. Например, если рельс испорчен, то паровоз на закруглениях при достаточной скорости сойдет с пути.

При ускорении или при торможении поезда есть еще силы, действующие на паровоз со стороны рельсов, которые ускоряют и замедляют его вдоль направления рельса. Они представляют собой силы трения, или силы сцепления колеса с рельсом. Эти силы — также результат взаимодействия рельсов и паровоза, однако они не «принуждают» паровоз оставаться на рельсах, поэтому их не относят к реакциям связи, хотя принципиальной разницы с точки зрения динамики между этими силами нет никакой. Силы сцепления рельсов и колес определяются давлением пара в цилиндрах паровоза, но они не могут быть больше определенной величины. Эта величина зависит от веса паровоза и от материала, из которого сделаны рельсы и колеса паровоза. Если к колесам будет приложена достаточно большая сила, то колеса будут «буксовать», не будут катиться по рельсам. О силах сцепления и силах трения подробнее будет сказано в гл. VIII.

4) Движение автомобиля по мосту. Рассмотрим еще один пример — автомобиль, идущий по выпуклому мосту (рис. 57); здесь реакции связи зависят и от скорости движения, и

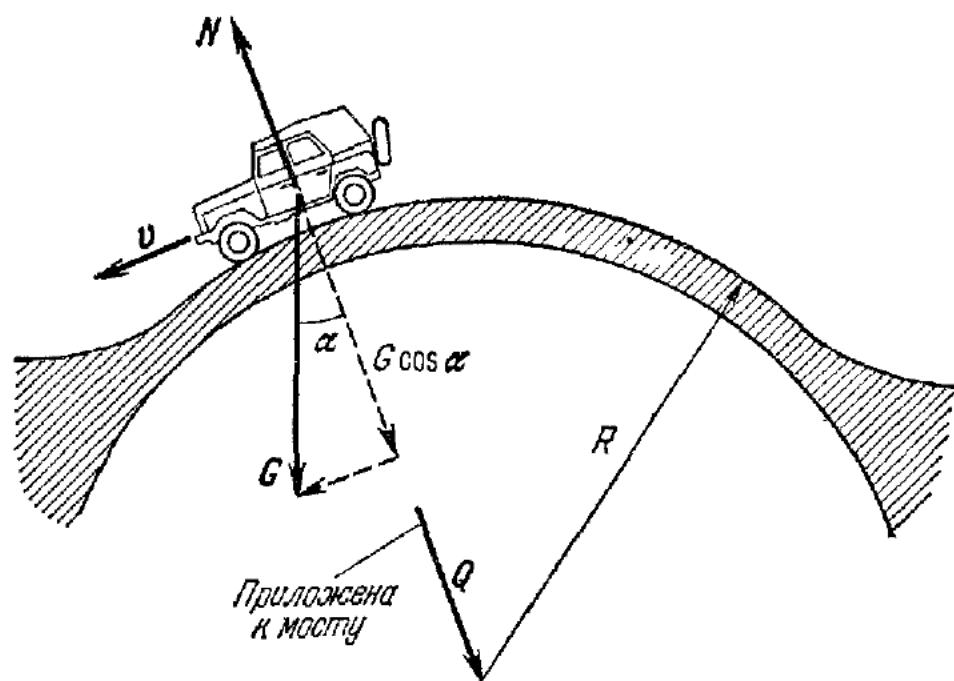


Рис. 57.

от действующих на тело сил. Не будем учитывать сил трения о мост; тогда сила нормального давления моста на автомобиль  $N$  вместе с составляющей силы тяжести по нормали к мосту в данном месте  $G \cos \alpha$  сообщает автомобилю центростремительное ускорение  $\frac{v^2}{R}$ , где  $v$  — скорость автомобиля, а  $R$  — радиус моста. По второму закону динамики

$$\frac{mv^2}{R} = G \cos \alpha - N, \quad (23.5)$$

где  $m$  — масса автомобиля. Отсюда сила реакции связи равна

$$N = G \cos \alpha - \frac{mv^2}{R},$$

т. е. она зависит и от действующих сил ( $G \cos \alpha$ ), и от скорости  $v$ , и от формы пути ( $R$ ), и от массы тела ( $m$ ).

Заметим, что все силы, рассмотренные нами, приложены к автомобилю — движущемуся телу; к мосту (к связи) приложена только сила давления автомобиля на мост  $Q$ , по третьему закону Ньютона равная и противоположная  $N$ .

Аналогичный анализ можно провести и для того случая, когда лыжник, съезжая с горы, находится в таком положении,

которое показано на рис. 58; тогда сила давления лыжника на землю  $Q$  будет больше силы его веса  $G$ .

Итак, при анализе несвободных движений тела мы вводим, кроме известных, заданных сил (например, силы тяготения в рассмотренных примерах), еще неизвестные силы, реакции связей, и составляем уравнения динамики. Ускорение находим из других условий задачи, например по скорости и форме пути тела. Зная ускорение, массу

тела и действующие на него силы, мы можем определить, если это необходимо, реакции связей.

В приведенных выше примерах связи определяют траекторию движения тела. Но возможны связи или ограничения, наложенные на движение тела, совсем иного типа, например связи, имеющие место в тех случаях, когда все или несколько тел просто связаны нерастяжимыми нитями или недеформируемыми стержнями. И здесь силы натяжения нитей между телами можно рассматривать как реакции связей. Если заранее известно, что все связанные тела имеют одинаковое ускорение, то всю систему тел можно рассматривать как одно тело и учитывать только внешние силы, действующие на систему. Однако, если нужно знать величину натяжения нитей (величину реакций), то необходимо составлять уравнения с учетом этих сил.

Разберем еще два примера движения со связью: один простой, другой более сложный.

5) Движение связанных тележек. По рельсам движутся две тележки, соединенные друг с другом нитью и ускоряемые действием силы тяжести груза  $G$  (рис. 59). Массы тележек равны  $M_1$  и  $M_2$ , массой нити и массой блока  $A$  можно пренебречь.

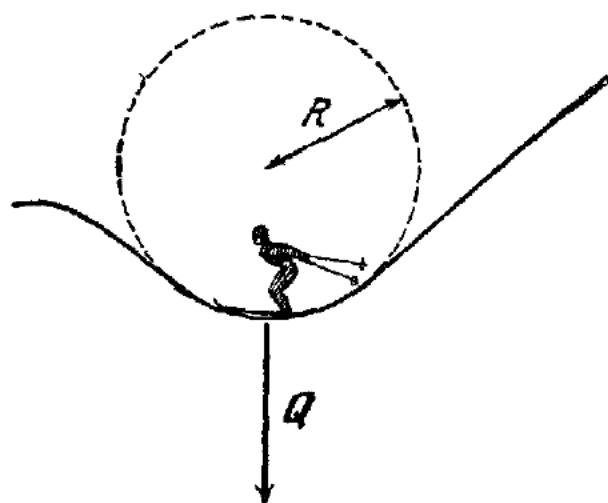


Рис. 58.

Рельсы расположены горизонтально, поэтому силы тяжести тележек и силы, действующие на тележки со стороны рельсов (если силами трения можно пренебречь), будут перпендикулярны к направлению возможного движения тележек, и их можно не рассматривать при определении ускорения тележек. Реакции рельсов не влияют на ускорение системы. Нити полагаем нерастяжимыми, следовательно, скорость и ускорение всех трех тел (две тележки и груз) будут одинаковыми по величине — это и есть условие, накладываемое связью на движение тележек.

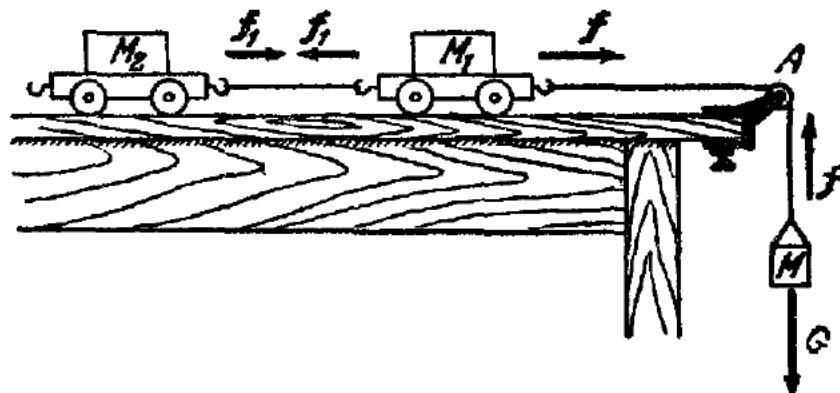


Рис. 59

Обозначим величину силы натяжения нити между грузом и первой тележкой через  $f$ , а силу натяжения нити, связывающей тележки, — через  $f_1$ , силу тяжести груза — через  $G$ . Учтем то, что нить не имеет массы и может только тянуть. Напишем уравнения динамики для каждого тела в отдельности.

Для груза:

$$M \frac{dv}{dt} = G - f, \quad (23.6)$$

для первой тележки:

$$M_1 \frac{dv}{dt} = f - f_1, \quad (23.7)$$

для второй тележки:

$$M_2 \frac{dv}{dt} = f_1. \quad (23.8)$$

Мы выписали уравнения движения для каждого тела отдельно. Однако поскольку нити нерастяжимы, то можно было бы рассматривать все три тела как одну единую систему; тогда силы натяжения нитей были бы внутренними силами и не играли бы никакой роли при определении ускорения всей системы, но масса всей движущейся системы была бы равна  $M_1 + M_2 + M$ , а внешняя действующая сила была бы равна только силе тяготения  $G$ . Действительно, сложив уравнения (23.6), (23.7) и (23.8), получаем

$$(M_1 + M_2 + M) \frac{dv}{dt} = G. \quad (23.9)$$

Так как  $G = Mg$ , где  $g$  — ускорение, вызываемое силой тяжести, то ускорение тележек и груза будет:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{M}{M + M_1 + M_2}. \quad (23.10)$$

Заметим, что ускорение системы тел будет постоянным, а скорость зависит еще от времени и от начальных условий, точнее — от времени и от скорости, которую тележка имела в начальный<sup>1)</sup> момент времени.

Если же необходимо определить силы натяжения нитей (что очень часто бывает важно знать), то необходимо в уравнения (23.6), (23.7) и (23.8) подставить величину ускорения, найденную из уравнения (23.10). Очевидно, что натяжение нити, на которой висит груз, будет всегда больше натяжения второй нити.

б) Движение трех грузов, подвешенных на блоках. Определить ускорение грузов и натяжения нерастяжимых нитей в системе, показанной на рис. 60; блоки и нити считать невесомыми, трение не учитывать.

Обозначим натяжения нитей через  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ , а координаты грузов — через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , как указано на рис. 60. Считая положительным направление оси координат вниз, запишем уравнения динамики для всех грузов:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - f_1, \quad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - f_2, \\ m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - f_3, \quad (23.11)$$

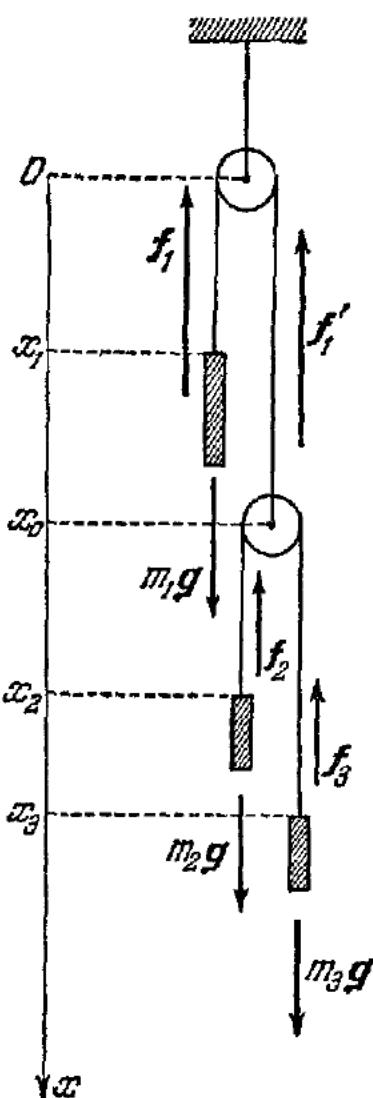


Рис. 60.

где  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  — массы грузов,  $g$  — ускорение силы тяжести. Так как блоки не имеют массы, то силы натяжения нитей должны удовлетворять следующим равенствам:

$$f_2 = f_3, \quad f_1 = f'_1 = f_2 + f_3. \quad (23.12)$$

Теперь учтем условия, накладываемые связями на движения трех грузов. Так как нити нерастяжимы, то

$$x_1 + x_0 + \pi r = l_1, \quad x_2 - x_0 + x_3 - x_0 + \pi r = l_2, \quad (23.13)$$

<sup>1)</sup> Начальным моментом считаем тот момент времени, после которого на систему извне действует только сила  $G$ .

где  $l_1$  и  $l_2$  — длины нитей,  $x_0$  — координата оси подвижного блока,  $r$  — радиус блоков. Исключая из уравнений (23.13) величину  $x_0$ , получаем условие, накладываемое связью на координаты всех тел:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2l_1 + l_2 - 3\pi r. \quad (23.14)$$

Это условие связывает и скорости, и ускорения всех тел. Если про-дифференцируем уравнение (23.14) дважды, то получим соотношение между ускорениями грузов, определяемое связью:

$$2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{d^2x_3}{dt^2} = 0. \quad (23.15)$$

Теперь шесть уравнений (23.11), (23.12) и (23.15) содержат шесть неизвестных: три ускорения и три силы реакции (натяжение нитей). Решив эти уравнения, найдем ускорения грузов. Вычитая из первого уравнения (23.11) два последующих и учитывая равенства (23.12), получаем

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = (m_1 - m_2 - m_3) g. \quad (23.16)$$

Вычитая из второго уравнения (23.11) третье, получим

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = (m_2 - m_3) g. \quad (23.17)$$

Решая три уравнения (23.15), (23.16) и (23.17) с тремя неизвестными, получим окончательно

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{(m_1m_3 - 3m_1m_2 + 4m_2m_3) g}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3}. \quad (23.18)$$

Подставляя это в уравнение (23.17), найдем  $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ , а затем найдем и  $\frac{d^2x_1}{dt^2}$  из уравнения (23.15). Если необходимо знать натяжение нитей, то полученные ускорения следует подставить в уравнения движения (23.11).

Не составляя уравнений динамики (23.11) для каждого груза, решать подобную задачу трудно, так как трудно «сообразить» сразу условие (23.15) между ускорениями, накладываемое связями. Частые ошибки при решении этой задачи возникают из-за неправильного учета знаков (для сил и ускорений), поэтому обращаем внимание читателя на то, что все величины (силы и ускорения), направленные вниз, мы считали положительными. Каково действительное направление ускорения, мы узнаем только в результате решения уравнения (23.18).

## Г л а в а III

### КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ

#### § 24. Закон сохранения количества движения

Применение второго и третьего законов динамики к системе, состоящей из нескольких взаимодействующих тел, приводит к очень важным выводам, из которых следует **закон сохранения (или постоянства) количества движения**.

Рассмотрим сначала, ради простоты рассуждений, только два взаимодействующих тела, например, два шарика, лежащих на горизонтальной поверхности из стекла, причем между шариками

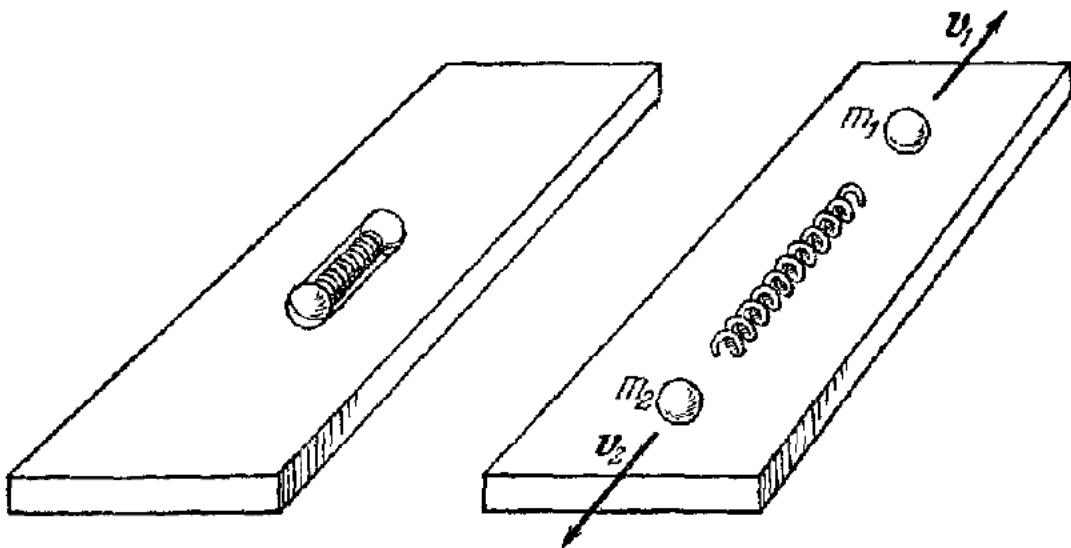


Рис. 61.

находится сжатая пружина (рис. 61). Предполагаем, что силой трения шариков о стекло можно пренебречь. Два шарика связаны ниткой так, что пружина зажата между ними. Массы шариков равны  $m_1$  и  $m_2$ , а масса пружины очень мала, поэтому будем считать ее равной нулю (этого можно было бы и не делать, но тогда нужно учитывать взаимодействие трех тел). Если в некоторый момент пережечь нить, то пружина будет действовать на шарик  $m_1$  с силой  $\mathbf{F}_{12}$ , а на шарик  $m_2$  — с равной и противоположной силой  $\mathbf{F}_{21}$ . Масса пружины ничтожна, поэтому можно сказать, что первый шарик действует на второй через пружину и что

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (24.1)$$

Действительно, по третьему закону динамики равны и противоположны следующие силы:

$$\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{f}_{n1} = 0, \quad \mathbf{F}_{2n} + \mathbf{f}_{n2} = 0,$$

где  $\mathbf{f}_{n1}$  и  $\mathbf{f}_{n2}$  — силы действия шариков на пружину и  $\mathbf{F}_{1n}$  и  $\mathbf{F}_{2n}$  — силы действия пружины на шарики. Но так как масса пружины принята равной нулю, то по второму закону динамики будет

$$\mathbf{f}_{n1} + \mathbf{f}_{n2} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_{2n} = 0,$$

и очевидно, что

$$\mathbf{F}_{1n} = \mathbf{F}_{12}, \quad \mathbf{F}_{2n} = \mathbf{F}_{21}.$$

Отсюда получается равенство (24.1). На массу  $m_1$  действует сила  $\mathbf{F}_{12}$ , на массу  $m_2$  — сила  $\mathbf{F}_{21}$ . Под действием этих сил шарики получат ускорения  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , которые определяются из следующих уравнений:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}. \quad (24.2)$$

Складывая эти равенства и учитывая (24.1), получаем

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0. \quad (24.3)$$

Вспомним, что  $m_1 \mathbf{v}_1$  есть количество движения первого шарика и  $m_2 \mathbf{v}_2$  — второго, а ускорения

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}; \quad (24.4)$$

подставляя эти выражения в уравнение (24.3), получаем

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0. \quad (24.5)$$

Подчеркнем прежде всего: вывод уравнения (24.5) не зависит от величины и характера сил взаимодействия между шариками; важно, что эти силы всегда удовлетворяют условию (24.1). Равенство (24.5) означает, что сумма количеств движения шариков остается *постоянной* и во время действия расталкивающей пружины, и после, до тех пор, пока на шарики не подействуют внешние силы.

Это заключение справедливо и для двух любых тел, ибо мы рассматривали шарики только ради наглядности.

Следовательно, *количество движения системы, состоящей из двух тел, под действием сил взаимодействия этих тел не может изменяться*.

Представим себе некоторое количество тел, изолированных от всех остальных тел и образующих одну механическую систему;

тогда силы взаимодействия этих тел суть силы *внутренние*<sup>1)</sup> по отношению к данной системе. Если изолированная система содержит большое количество тел, то закон сохранения количества движения имеет место для системы в целом. Действительно, пусть система

состоит из трех тел с массами  $m_1, m_2, m_3$  (рис. 62). Тогда для первого тела можно написать уравнение

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13},$$

для второго

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23},$$

для третьего

$$m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32}.$$

Сложив все три уравнения и учитывая третий закон динамики, получаем

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3) = 0, \quad (24.6)$$

где, как обычно,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  означают ускорения каждого из тел, а  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  — соответственно их скорости.

Обозначим сумму количеств движения всех тел через  $K$ , тогда закон постоянства количества движения (24.6) можно записать так:

$$\frac{dK}{dt} = 0,$$

или

$$K = \text{const}. \quad (24.7)$$

*Количество движения системы тел под действием внутренних сил не может изменяться.*

Закон постоянства количества движения легко можно вывести и для любого числа тел, образующих изолированную систему. Количество движения системы  $K$  — это векторная сумма количеств движения всех тел, входящих в систему:

$$K = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i. \quad (24.8)$$

<sup>1)</sup> Внутренние силы — силы, действующие между телами, образующими изолированную систему.

По третьему закону динамики все *внутренние* силы удовлетворяют условию

$$f_{ki} + f_{ik} = 0 \quad (24.9)$$

для любых значений индексов  $k$  и  $i$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  и  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , где  $n$  — число тел, входящих в систему.

Если на тела не действуют внешние силы, то для каждого тела можно написать:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n f_{ik}, \quad (24.10)$$

где  $m_i$  — масса какого-то  $i$ -го тела,  $\mathbf{v}_i$  — его скорость, а  $\sum_{k=1}^n f_{ik}$  — сила, действующая на него со стороны остальных тел. Теперь сложим уравнения (24.10) для всех тел и получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ik}. \quad (24.11)$$

По условию (24.9) сумма всех внутренних сил равна нулю, тогда

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = 0. \quad (24.12)$$

Это и выражает закон постоянства количества движения системы тел, движущихся при наличии только внутренних сил. Его можно записать и в виде формулы (24.7).

Подведем итог сказанному. Закон сохранения количества движения имеет место в случае взаимодействия многих тел: количество движения системы этих тел остается *постоянным*, если *внешние* силы, силы со стороны тел, не входящих в систему, отсутствуют.

Количество движения, или импульс, — *векторная величина*, следовательно, постоянными остаются и абсолютная величина количества движения, и его направление. Количество движения каждого тела системы может меняться, но общее количество движения системы остается *постоянным*.

Количество движения любого тела не может измениться без того, чтобы не изменить на такую же величину количество движения остальных тел системы. *Количество движения только передается от одного тела к другому и никогда не уничтожается*, или: *количество движения любой изолированной системы тел — векторная величина — остается всегда неизменным*.

Само понятие о количестве движения тела было введено Декартом, им же философски был сформулирован и принцип сохранения,

или неизменности, количества движения тел Вселенной. Впоследствии между учеными долго продолжался спор, какую из величин,  $mv$  или  $mv^2$ , считать мерой количества движения; только после того, как был сформулирован закон сохранения энергии (см. § 37), этот спор прекратился. Окончательное выяснение этого вопроса с предельной ясностью было дано Ф. Энгельсом в его известной статье «Мера движения. — Работа»<sup>1)</sup>.

### § 25. Передача количества движения одним телом другому

Во время силового взаимодействия двух тел всегда происходит передача количества движения от одного тела к другому. При взаимодействии характер изменения сил может быть очень сложным, и анализ явления представляет трудную задачу. Применение же в этих случаях закона сохранения количества движения позволяет просто определить результат взаимодействия, без детального изучения сил, действовавших между телами. Как это делается, лучше всего показать на примерах.

1) Человек вбегает на тележку. Вбегая на платформу, стоящую на рельсах (рис. 63), человек имеет скорость  $v_0$

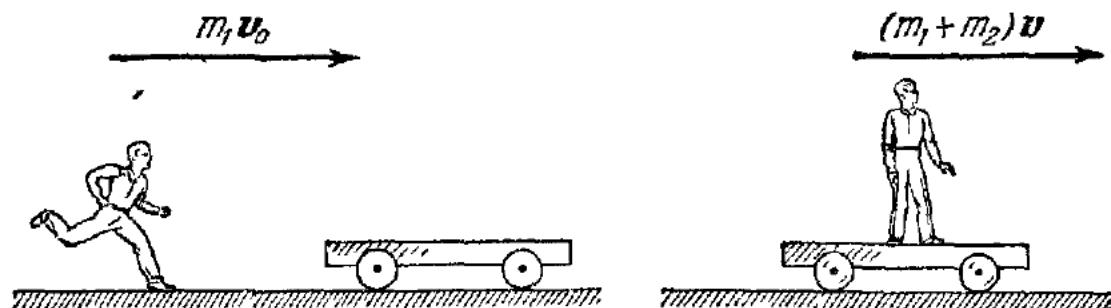


Рис. 63.

и количество движения  $K = m_1 v_0$ , где  $m_1$  — масса человека. Тележка стоит, ее количество движения равно нулю. Вбегая на тележку, человек останавливается на ней, между тележкой и ступнями человека возникли силы; сила, действующая на человека, затормозила его, а сила (противодействующая), приложенная к тележке, сообщила ей движение. Действие этих сил прекратится, когда человек и тележка будут иметь одинаковую скорость, т. е. когда человек остановится на тележке. Если силы трения тележки о рельсы малы и трением о воздух можно пренебречь, то количество движения системы (тележка и человек) не изменится вследствие взаимодействия между ними. Количество движения человека  $m_1 v_0$  перераспределится: тележка получит часть количества движения, которое имел человек, вбегая на нее. Скорость, которую приобре-

<sup>1)</sup> Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1965, стр. 67.

тает человек и тележка, можно определить из закона сохранения количества движения. Она будет равна

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad (25.1)$$

Ответ не зависит от длительности действия сил между ногами человека и тележкой и от того, как во времени изменяются эти силы. Между человеком и тележкой произошел полностью неупругий удар.

*Полностью неупругим ударом называется такое взаимодействие двух тел, имеющих разную скорость, после которого они имеют одинаковую скорость.*

Каков механизм удара, как действовали силы во времени и какова их величина — все это для определения скорости после удара совершенно не важно.

Иногда можно услышать возражения от тех, кто впервые знакомится с положением, что количество движения всегда передается от одного тела к другому. Чаще всего эти возражения делаются в виде примеров, которые якобы опровергают это положение. Рассмотрим один из таких примеров.

2) Мальчик бросает снежок в стену. Допустим, что снежок, который бросил мальчик, ударившись о стену, прилипает или падает на землю около нее. Мальчик «сообщил» снежку количество движения  $K = mv$ , снежок ударился о стену и «потерял» количество движения. Куда «пропало», кому передано количество движения снежка?

Для того чтобы ясно представить себе процесс передачи количества движения, будем полагать, что мальчик и стена находятся на лодке и мальчик бросает комок глины в стену, причём вначале все было в покое (рис. 64). Лодка играет здесь такую же роль, как и Земля в предыдущем примере. После броска количество движения комка, полученное им в результате взаимодействия с мальчиком, стоящим на лодке, «возьмется» у системы «мальчик — лодка», и, следовательно, вся эта система во время полета комка глины будет иметь противоположное количество движения, равное по величине  $K = mv$ . Количество движения системы «лодка, мальчик и комок» постоянно и равно нулю.

При неупругом ударе комка о стену произойдет взаимодействие комка с лодкой через стену, но теперь они оба имеют равные и противоположные количества движения, которые, сложившись,

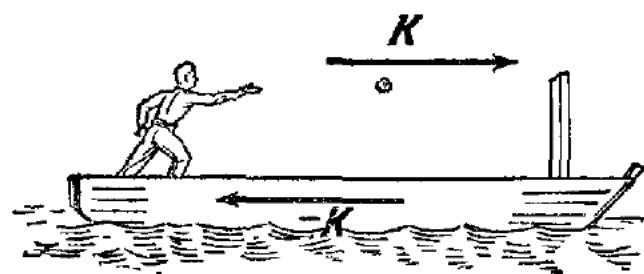


Рис. 64.

дают нулевое количество движения. Следовательно, во время полета комка глины лодка двигалась от толчка мальчика, бросающего комок, и останавливалась после удара комка о стену. По законам динамики количества движения при ударе и толчке равны и противоположны, поэтому никакого «уничтожения» или «создания» количества движения здесь не происходит.

Отметим еще, что в нашем рассуждении ничего не изменится, если лодка до броска двигалась: вся система имела отличное от нуля количество движения, после броска количество движения системы «мальчик — лодка» изменилось на количество движения комка, а после удара его о стену это же количество вернулось. При этом направления движения лодки и полета комка могут быть какими угодно.

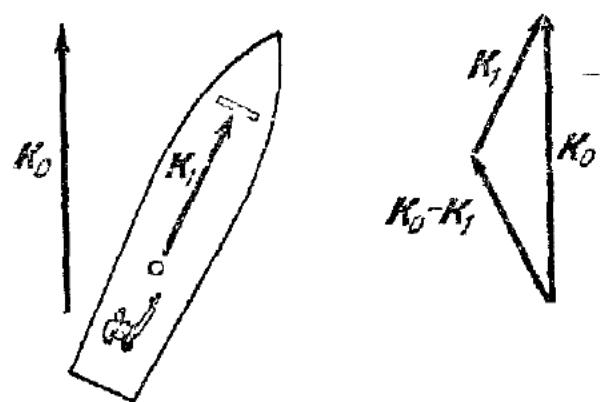


Рис. 65

Пусть количество движения всей системы до броска было  $K_0$ , изобразим его соответствующим вектором на чертеже (рис. 65); если количество движения комка  $K_1$ , то у лодки осталось количество движения  $K_0 - K_1$ , при ударе комка о стену вся система вновь имеет количество движения  $K_0$ .

Очевидно, что система «мальчик — лодка» потеряет количество движения, если комок глины не

попадет в стену, а упадет в воду. Тогда у системы останется количество движения  $K_0 - K_1$ , а количество движения  $K_1$  будет передано воде. Но, если включить в систему Землю, то опять можно установить, что количество движения сохраняется.

Так же можно толковать явления в том случае, когда снежок, брошенный мальчиком, ударяется в стену, «передает» количество движения стене (Земле), которое в свое время «возникло» в результате взаимодействия мальчика с Землей.

Ради простоты рассуждения мы полагали, что удар о стену был полностью неупругий, т. е. комок не отскакивал назад после удара от стены, прилипал к ней или падал возле. То же самое будет и при упругом ударе, когда комок отскочит назад от стены. Правда, после этого удара лодка пойдет вперед, но количество движения системы «лодка, мальчик и комок» останется неизменным, и действительно, как только комок упадет в лодку и остановится, так вся система будет в покое. Кроме того, в приведенных рассуждениях считалось, что нет сил трения лодки о воду (или сил сопротивления движению). Однако если бы мы учли эти силы взаимодействия и включили бы в систему тел воду, то опять так же доказали бы, что количество движения постоянно.

3) Измерение массы. Опыты с расталкиванием шариков пружинкой указывают на возможность сравнивания (или

измерения) таким способом массы двух тел. Действительно, будем наблюдать движение, которое получают два тела под действием сил взаимодействия между двумя этими телами, определим опытным путем скорости, полученные телами в результате взаимодействия, и на основании закона сохранения количества движения найдем отношение масс этих двух тел из отношения скоростей. Например, если один из шариков, расталкиваемых пружинкой, будет иметь единичную массу, то обратное отношение абсолютных величин скоростей шариков определит массу второго шарика в этих единицах.

Практически, может быть, удобнее делать такие опыты с тележками, которые находятся на рельсах и расталкиваются буферами (рис. 66). Прижав тележки друг к другу, отпускаем их и отмечаем

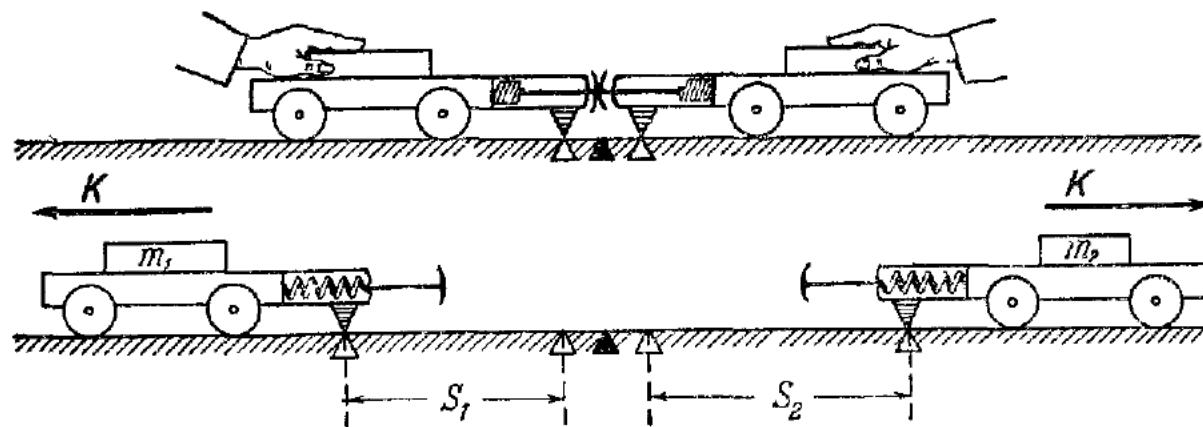


Рис. 66

расстояния  $S_1$  и  $S_2$ , пройденные тележками за одинаковые интервалы времени. Расстояния  $S_1$  и  $S_2$  пропорциональны скоростям тележек, и, следовательно, они будут обратно пропорциональны массам этих тележек  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (25\ 2)$$

4) Полностью неупругий удар двух шаров. Пусть два шара с массами  $m_1$  и  $m_2$  во время полета со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно сталкиваются в некоторый момент, «сцепляются» и дальше летят как одно тело (рис. 67). Здесь произошел полностью неупругий удар. Движение шаров после удара определить очень нетрудно, если известны количества движения обоих шаров до удара. Пусть количество движения первого шара будет  $K_1 = m_1 v_1$ , а второго  $K_2 = m_2 v_2$ , тогда после удара количество движения будет  $K_1 + K_2 = K$ . Направление полета шаров изменится, но количество движения системы шаров не изменится. Скорость шаров  $v$  после полностью неупротого удара будет равна

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (25\ 3)$$

Снаряд во время полета разрывается на две части; и в этом случае количество движения не изменяется при взрыве: векторная сумма количеств движения осколков будет равна количеству движения снаряда, если пренебречь действием сил сопротивления воздуха во время разрыва. То же самое можно сказать и в случае, когда снаряд разрывается на большее количество осколков.

Примеров, подобных изложенным, можно привести из обыденной жизни и техники очень много. Рекомендуем отыскать эти

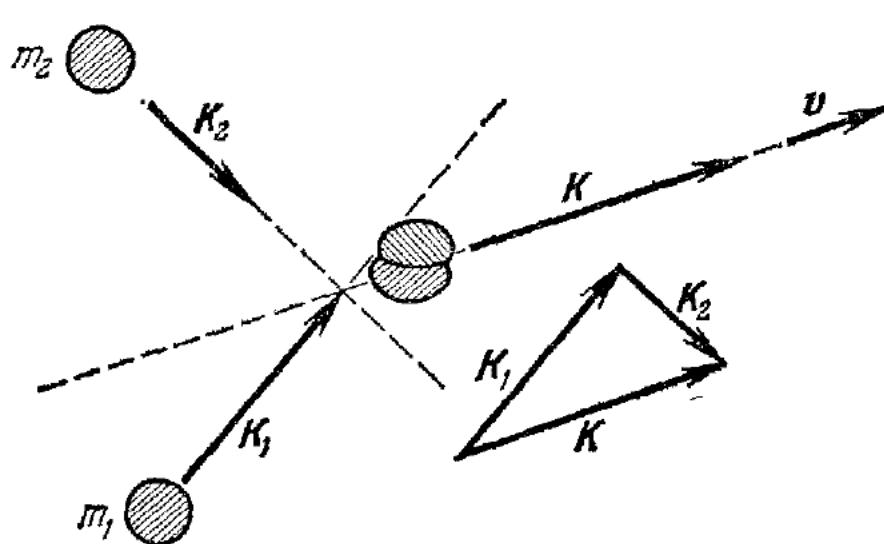


Рис. 67.

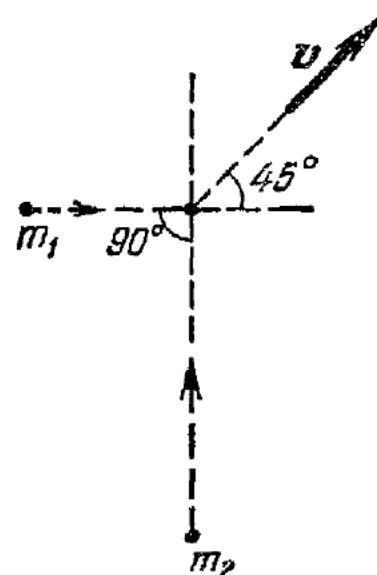


Рис. 68.

примеры. Отметим, что при решении механических задач всегда следует проверять, не может ли быть решена данная задача на основе закона сохранения количества движения. В таком случае нам не нужно знать, как действовали силы между телами во времени и как они приложены, и поэтому решение задач с помощью закона постоянства количества движения получается значительно проще.

В качестве упражнения предлагается определить по рис. 68 отношение величин количеств движения и отношение масс неупруго соударяющихся двух материальных точек, если на чертеже даны в определенном масштабе положения масс  $m_1$  и  $m_2$  в некоторый момент перед ударом и указаны направления движения.

### § 26. Импульс силы

Второй закон Ньютона (§ 19) можно записать таким образом:

$$d(mv) = F dt, \quad (26.1)$$

и читается он так: *приращение количества движения за время  $dt$  равно импульсу силы  $F$  за это же время  $dt$* . Векторную физическую величину  $F dt$  называют импульсом силы за время  $dt$ . Импульс силы  $F dt$  есть бесконечно малая величина, которая характеризует действие силы за промежуток времени  $dt$ .

Если рассматривать действие переменной силы не за время  $dt$ , а за промежуток времени  $t_2 - t_1$ , то необходимо этот промежуток времени разделить на бесконечно малые промежутки  $dt$ , определить импульсы  $F dt$  за каждый промежуток  $dt$  и сложить их все. Такую сумму называют интегралом и, как известно, обозначают так:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = P. \quad (26.2)$$

Векторная величина  $P$  есть импульс силы  $F$  за время  $t_2 - t_1$ . Если сила постоянна по величине и направлению, то

$$P = F(t_2 - t_1), \quad (26.3)$$

т. е. импульс силы равен произведению постоянной силы на время, в течение которого она действовала.

Мы можем взять интеграл от обеих частей равенства (26.1):

$$\int_{t_1}^{t_2} d(mv) = \int_{t_1}^{t_2} F dt = P. \quad (26.4)$$

Если скорость тела в момент  $t_1$  была  $v_1$ , а в момент  $t_2$  стала  $v_2$ , то выражение (26.4) можно записать так:

$$mv_2 - mv_1 = P. \quad (26.5)$$

Действительно,  $d(mv)$  есть бесконечно малое приращение количества движения за время  $dt$ ; если соберем все эти приращения за время  $t_2 - t_1$  и сложим, то, очевидно, получим приращение за время  $t_2 - t_1$ , равное  $mv_2 - mv_1$ .

Таким образом, *приращение количества движения за какое-то время равно импульсу действующей силы за то же время*.

Например, камень весом 1 Н падает на землю. Импульс силы тяжести, действующей на камень, за 5 секунд равен  $P = 5 \text{ Н}\cdot\text{с}$ , на столько же возросло и количество движения камня по направлению к земле. Следовательно, за 5 секунд произошло приращение скорости камня, по формуле (26.5) равное

$$v_2 - v_1 = \frac{P}{m} = e \frac{5 \text{ Н}\cdot\text{с}}{\frac{1}{9,81} \text{ кг}} \approx e \cdot 50 \text{ м/с},$$

где  $e$  — единичный вектор, направленный вертикально вниз. Ответ, полученный здесь, совершенно не зависит от того, падает ли камень вертикально или летит по параболе; важно лишь, что в течение 5 секунд на него действовала только сила тяжести.

В этом примере следует помнить, что масса тела весом в 1 Н равна  $\frac{1}{9,81}$  кг.

Хотя приращение количества движения в точности равно импульсу действующей силы (речь идет о приращении, вызываемом только этой же силой), однако приращение количества движения

и импульс силы следует различать, имея в виду те случаи, когда на тело действуют еще и другие силы. Например, рабочий толкает вагонетку, оставаясь на месте. Приращение количества движения вагонетки равно импульсу силы  $P$  рабочего, если пренебречь силой трения. Вагонетка со своей стороны сообщила рабочему импульс  $-P$ , но у рабочего нет приращения количества движения, он остался на месте.

Импульс есть, а приращения нет только потому, что на рабочего действуют еще и другие силы: силы, приложенные к нему со стороны Земли, которые сообщили ему за это время импульс противоположного направления. Если бы на рабочего не действовали силы со стороны Земли, то он получил бы такое же количество движения, поэтому иногда говорят, что импульс есть *возможное* приращение количества движения тела, если бы на него действовал только один данный импульс.

Но мы всегда будем говорить о *действительном*, а не о возможном количестве движения тела и о *действительном* импульсе силы, действующей на тело. Поэтому между этими величинами есть существенная разница, заключающаяся в том, что наличие определенного импульса силы, действующей на тело, не означает приращения на такую же величину количества движения.

Только в том случае, когда определяют *импульс равнодействующей* всех сил, действующих на тело за определенное время, можно считать: приращение количества движения равно (по величине и направлению) импульсу равнодействующей всех сил за это же время. Поэтому можно говорить, что приращение количества движения и импульс равнодействующей всех сил — одно и то же.

В следующем параграфе закон сохранения количества движения будет применен для анализа движения тела с переменной массой.

## § 27. Законы движения тел с переменной массой

Есть такие явления, в которых при движении тел их масса изменяется. Тело при движении теряет какую-то долю своей массы, от него отделяются частицы вещества, составляющие это тело, или, наоборот, к нему прибавляются новые частицы, например: движение автомобиля, поливающего улицы водой; движение поезда, с которого разбрасывают вдоль пути песок (балласт); погрузка и выгрузка платформы на ходу; движение ракеты, выбрасывающей струю газов, которые образуются при сгорании топлива или пороха, и т. д. Закономерности этих явлений мы и рассмотрим здесь.

Во всех этих случаях во время движения может изменяться не только скорость, но и масса движущегося тела. Общие законы механики движения в этом случае были исследованы И. В. Мещерским и К. Э. Циолковским; последний применил их для разработки технического проекта реактивного космического корабля.

Рассмотрим движение автомобиля, разбрасывающего воду для поливки улицы (рис. 69). Пусть струя воды имеет относительно автомобиля постоянную скорость  $c$ , совпадающую по направлению со скоростью автомобиля  $v$  относительно дороги. Сила, действующая на автомобиль вследствие сцепления колеса с полотном дороги при работе мотора, равна  $F$  и направлена вперед. Сила  $F$  — внешняя сила по отношению к автомобилю, она приложена со стороны Земли. Расход воды будет постоянным во времени, если скорость истечения  $c$  и площадь сечения сопла, из которого выбрасывается вода, остаются неизменными.

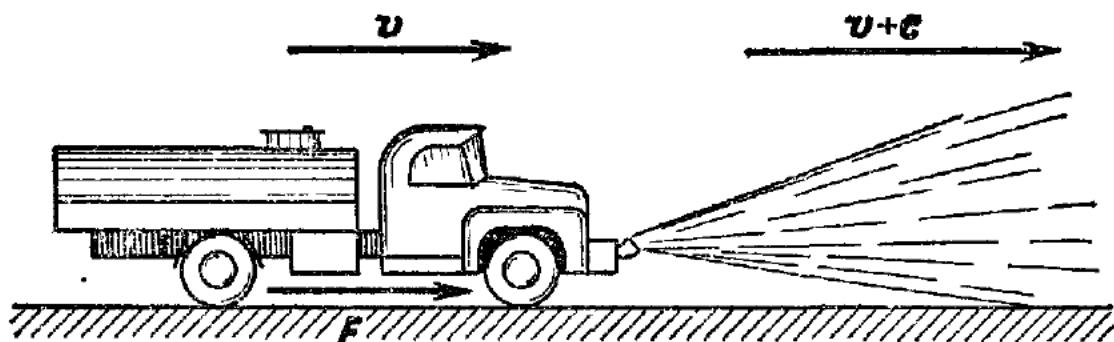


Рис. 69.

Обозначим массу выбрасываемой ежесекундно воды через  $\mu$ ; тогда  $M$  — масса автомобиля вместе с водой — будет равномерно убывать с течением времени и скорость изменения массы будет равна

$$-\frac{dM}{dt} = \mu, \quad (27.1)$$

или закон сохранения массы можно записать так:

$$dM + \mu dt = 0, \quad (27.2)$$

где  $dM$  — убыль массы автомобиля с водой за  $dt$  и  $\mu dt$  — масса воды, вытекающая за  $dt$ . В уравнении (27.1) знак минус поставлен, чтобы подчеркнуть, что масса  $M$  убывает; ежесекундный расход воды  $\mu$  считаем положительной величиной.

Применим к системе тел (автомобиль и выбрасываемая вода) закон изменения количества движения, который гласит, что изменение количества движения равно импульсу внешних сил<sup>1)</sup>.

Пусть в момент  $t$  автомобиль имеет массу  $M$  и скорость  $v$ , количество движения в этот момент равно  $Mv$ . Через некоторое время  $dt$ , в момент  $t + dt$ , масса автомобиля будет  $M - \mu dt$ , а скорость его движения  $v + dv$ ; масса выброшенной за  $dt$  воды будет  $\mu dt$ , и скорость ее движения относительно Земли  $v + c$ . Тогда количество движения в момент  $t + dt$  равно

$$(M - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v + c).$$

<sup>1)</sup> В данном примере все векторы направлены по одной прямой. Проектируя их на эту прямую, можно воспользоваться скалярной записью.

Вычитая из последнего выражения  $Mv$ , получим изменение количества движения за время  $dt$  и приравняем его импульсу внешней силы  $F dt$ . Пренебрегая бесконечно малым членом второго порядка  $\mu dt dv$ , получим

$$M dv + \mu c dt = F dt,$$

или

$$M \frac{dv}{dt} = F - \mu c. \quad (27.3)$$

Уравнение (27.3) представляет *уравнение Мещерского* для тела, выбрасывающего часть своей массы вперед со скоростью  $c$  при

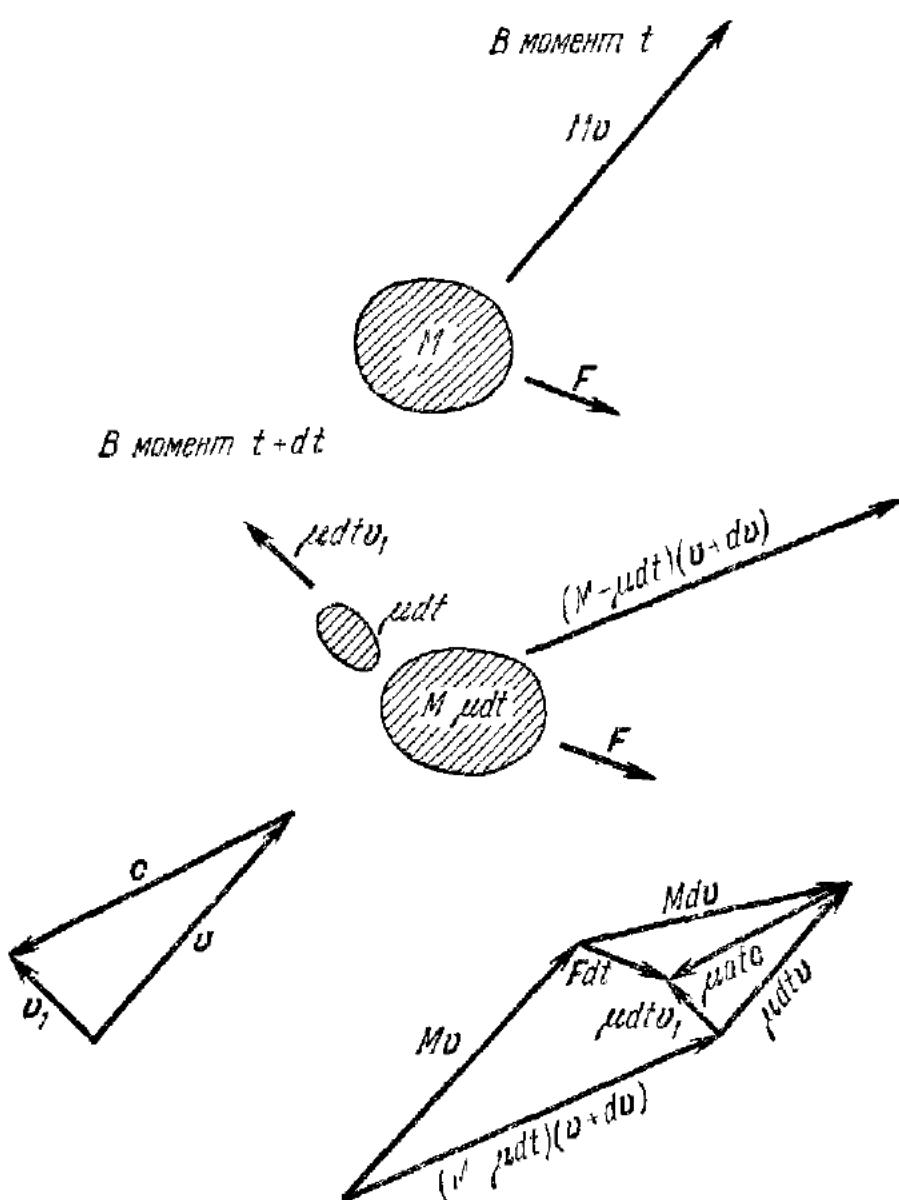


Рис. 70

ежесекундном расходе  $\mu$ . Уравнение можно теперь прочитать так: произведение массы на ускорение тела равно действующей силе  $F$  минус *реактивная сила* выбрасываемой массы, которая равна произведению расхода массы  $\mu$  на скорость относительного движения  $c$  выбрасываемых частиц.

Реактивная сила возникает вследствие того, что выбрасываемым частицам сообщают скорость  $c$ . Частицы воды находились в покое относительно автомобиля, но некоторой силой им сообщено ускорение относительно автомобиля, благодаря которому они получили скорость  $c$ . Сила, противодействующая этой силе, по третьему закону динамики приложена к автомобилю и направлена в сторону, противоположную скорости выброшенной воды; она и есть реактивная сила.

Можно доказать в самом общем случае, что когда тело выбрасывает ежесекундно частицы массой  $\mu$  с как угодно направленной относительно себя скоростью  $c$ , то реактивная сила равна  $f_p = -\mu c$ . Приведем это доказательство. От тела за время  $dt$  отделяется частица массы  $\mu dt$  и, отделившись, имеет скорость  $v_1$  относительно Земли (рис. 70). В момент времени  $t$  тело имело количество движения

$$Mv.$$

В следующий момент времени  $t + dt$  оставшееся тело имеет количество движения

$$(M - \mu dt)(v + dv).$$

Скорость тела изменяется за это время на  $dv$ , отделившаяся масса  $\mu dt$  имеет количество движения

$$\mu dt v_1.$$

Следовательно, изменение количества движения всей системы за время  $dt$  будет

$$(M - \mu dt)(v + dv) + \mu dt v_1 - Mv = Mdv + \mu dt(v_1 - v) - \mu dt dv.$$

По второму закону динамики изменение количества движения равно импульсу внешней силы  $F$ , действующей на тело за это время. Поэтому

$$Mdv + \mu dt(v_1 - v) = Fdt,$$

так как членом второго порядка малости  $\mu dt dv$  можно пренебречь. Разделив на  $dt$  обе части равенства и перенося член с  $\mu$  вправо, получаем

$$M \frac{dv}{dt} = F + \mu(v - v_1).$$

Если  $c$  — относительная скорость отделившейся частицы, то  $v + c = v_1$ , или  $v - v_1 = -c$ , поэтому

$$M \frac{dv}{dt} = F - \mu c. \quad (27.4)$$

Реактивная сила направлена *противоположно* скорости, с которой выбрасываемые частицы покидают тело.

Например, при движении реактивного снаряда у поверхности Земли (рис. 71) внешняя сила  $F$  будет слагаться из силы притяжения Земли  $G$  и силы сопротивления воздуха  $X$ , а ускорение снаряда будет зависеть еще и от величины и направления реактивной силы  $-\mu c$ .

Изменяя во время движения величину и направление реактивной силы относительно снаряда, можно управлять его полетом.

Отметим, что если бы мы рассматривали не выбрасывание частиц, а присоединение их к движущемуся телу, вследствие чего его масса увеличивалась бы, то уравнение (27.4) также имело бы место,

только с тем отличием, что знак реактивной силы  $\mu c$  был бы противоположный, а именно:

$$M \frac{dv}{dt} = F + \mu c, \quad (27.5)$$

где  $c$  — скорость присоединяющихся частиц относительно тела. Предлагаем вывести эту формулу в качестве упражнения.

Пользуясь формулой (27.4), можно определить силу тяги самолетного турбореактивного (или воздушно-реактивного) двигателя,



Рис. 72.

который на своем пути во время полета забирает воздух, сжимает его, сжигает в нем топливо и выбрасывает его с большой скоростью назад в виде раскаленных газов. В турбореактивном двигателе имеется сжимающий воздух компрессор, который приводится в движение турбиной, находящейся в струе выбрасываемых газов (рис. 72).

В воздушно-реактивном двигателе нет компрессора и турбины. Он представляет собой трубу переменного сечения, где сжигается топливо в воздухе, который засасывается и сжимается вследствие движения самолета (рис. 73). Воздушно-реактивный двигатель может дать силу тяги только при движении самолета, в то время как турбореактивный, засасывая воздух компрессором, дает силу тяги и при стоянке самолета.

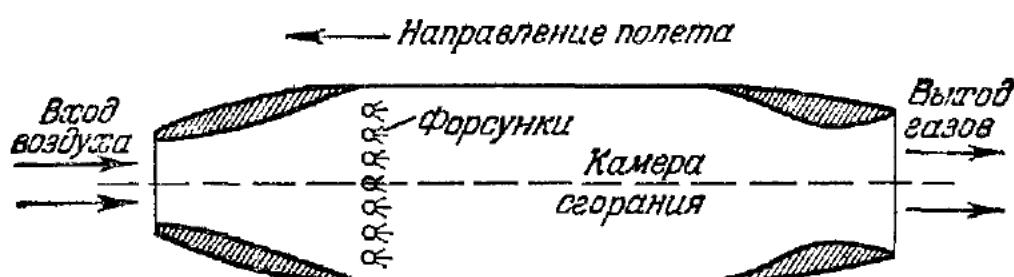


Рис. 73.

Очевидно, что, сколько воздуха реактивный двигатель захватит за единицу времени, столько же и выбросит. Пусть самолет летит со скоростью  $v$ , при этом двигатель забирает и выбрасывает ежесекундно  $\mu_v$ . Двигатель выбрасывает газы со скоростью  $c$  вместе с топливом, ежесекундный расход которого равен  $\mu_t$ . Так как воздух в атмосфере был в покое, то при заборе воздуха на самолет будет действовать назад реактивная сила  $\mu_v v$ . При выталкивании струи газов (воздуха с продуктами сгорания) действует вперед реактивная сила, равная  $(\mu_v + \mu_t) c$ . Следовательно, результирующая реактивная сила турбореактивного (или воздушно-реактивного) двигателя, направленная вперед, будет равна

$$\mu_v (c - v) + \mu_t c.$$

Практически  $\mu_t \ll \mu_v$ , поэтому приближенно довольно точно можно считать, что реактивная сила турбореактивного или воздушно-реактивного двигателя будет равна

$$\mu_v (c - v).$$

Движение самолета с таким двигателем приближенно можно считать движением тела с постоянной массой, если пренебречь выгоранием топлива. Из последнего выражения видно: для получения силы тяги необходимо, чтобы скорость  $c$ , скорость вылетающих частиц, была бы больше скорости полета  $v$ . Для увеличения силы тяги двигателя необходимо увеличивать и скорость вылетающих газов, и расход воздуха через двигатель. Какие бы сложные процессы ни происходили в двигателе: забор воздуха, работа компрессора, сгорание топлива, работа газовой турбины и т. д., для определения силы тяги необходимо знать только две величины:  $\mu_v$  и скорость  $c$ .

Величину силы тяги можно оценить еще и так: ежесекундно масса воздуха  $\mu_v$  получает относительно Земли количество движения  $\mu_v(c - v)$  под действием сил со стороны самолета. Следовательно, по закону сохранения количества движения на такую же величину должно за секунду возрасти и количество движения самолета относительно Земли; поэтому  $\mu_v(c - v)$  равно импульсу силы тяги реактивного двигателя за секунду, а импульс силы за секунду равен самой силе.

Все изложенное относится к любому реактивному двигателю на воде, где вместо воздуха засасывают и выбрасывают воду.

Иная картина будет для *ракетного* двигателя — порохового или жидкостного. В этом случае и горючее и окислитель находятся в летящем аппарате, поэтому сила тяги ракетного двигателя *всегда* равна  $-\mu c$ , какова бы ни была скорость полета аппарата, на котором установлен двигатель; сила тяги не зависит от окружающей среды и имеет место при полете в пустоте.

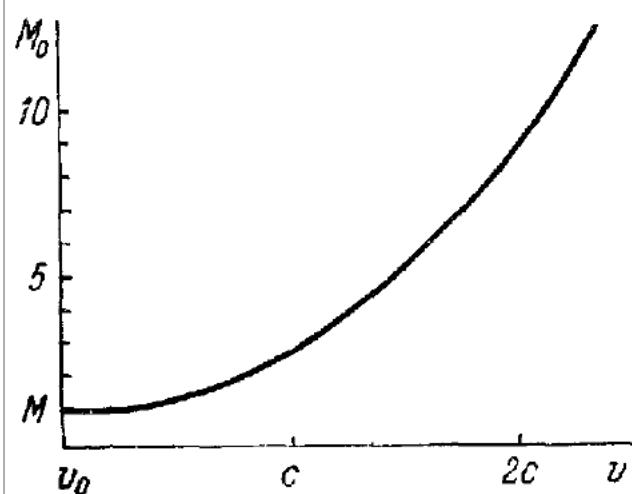


Рис. 74.

Зависимость скорости ракеты от времени и связь ее с массой можно вывести из формулы (27.4) при условии, что движение происходит только при наличии реактивной силы. Пусть в начальный момент масса ракеты равна  $M_0$ ; тогда в момент времени  $t$  она будет равна  $M = M_0 - \mu t$ . По формуле (27.4) можно написать:

$$M \frac{dv}{dt} = \mu c, \quad \text{или} \quad (M_0 - \mu t) dv = \mu c dt, \quad (27.6)$$

учитывая, что скорость выходящих газов ракеты  $c$  всегда направлена назад по касательной к траектории. Если последнее уравнение переписать следующим образом:

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu dt}{M_0 - \mu t},$$

то правую и левую части легко проинтегрировать. Тогда

$$\frac{1}{c} (v - v_0) = \int_0^t \frac{\mu dt}{M_0 - \mu t} = \ln M_0 - \ln (M_0 - \mu t) = \ln \frac{M_0}{M_0 - \mu t} = \ln \frac{M_0}{M}.$$

Отсюда

$$v - v_0 = -c \ln \left( 1 - \frac{\mu t}{M_0} \right)$$

и

$$M_0 = M \exp \left( \frac{v - v_0}{c} \right). \quad (27.7)$$

Это и есть формула Циолковского. График последней показан на рис. 74. Если массе  $M$  требуется сообщить скорость  $v$ , то начальная масса ракеты должна быть равна  $M_0$  при начальной скорости  $v_0$ , которая, в частности, может быть равной пулю. С увеличением расчетной скорости  $v$  начальная масса  $M_0$  экспоненциально возрастает. При  $(v - v_0) \gg c$  отношение  $M_0/M$  получается очень большим. Это и создает основные технические трудности при построении космических ракет, достигающих скорости порядка 10 км/с. Увеличение скорости выходящих газов позволяет значительно уменьшить начальную массу и тем самым облегчает задачу конструкторов.

При движении ракеты в плотных слоях атмосферы необходимо преодолеть силы сопротивления воздуха, и поэтому начальная масса ракеты должна быть еще больше рассчитанной выше; однако если ракета проходит плотные слои атмосферы при небольшой скорости, где силы сопротивления относительно невелики, то соответствующее увеличение массы  $M_0$  мало.

## Глава IV

### РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

#### § 28. Понятие об энергии

Количество движения можно считать некоторой определенной мерой механического движения тела. Однако не во всех случаях такая мера пригодна для оценки изменений движения тела. Например, при полностью неупругом ударе двух одинаковых, летящих навстречу друг другу шаров происходит «исчезновение» движения. До удара шары двигались, обладали движением, после — шары покоятся, они не имеют движения. Закон сохранения количества движения остается справедливым: до удара шары имели равные и противоположные направленные количества движения, количество движения системы было равно нулю, и после удара количество движения также осталось равным нулю. Применять закон сохранения количества движения к одному шару нельзя, ибо на него во время удара действует внешняя сила — сила давления другого шара.

Состояние двух шаров принципиально изменилось после удара: шары двигались, обладали механическим движением; после удара наступил покой, движение каждого из шаров прекратилось, шары потеряли движение, и, кроме того, как показывает опыт, температура каждого из шаров увеличилась после удара. Следовательно, количество движения (закон сохранения количества движения) в данном случае не служит мерой изменения механического состояния тела. То, что шары нагрелись при ударе, имеет принципиальное значение: механическое движение шаров «исчезло», но вместо него возникла новая форма движения материи — тепло. Опыты показали, что количество тепла, которое получается в результате удара двух шаров, не пропорционально сумме тех количеств движения, которыми обладали шары до удара в отдельности. Да ведь так и сравнивать нельзя: количество движения — векторная величина, и векторная сумма количеств движения обоих шаров равна нулю. Так как количество тепла — скаляр, то, может быть, следовало бы сравнивать сумму модулей количеств движения шаров

с количеством полученного тепла. Но, как показывает опыт, и сумма модулей количеств движения шаров не будет пропорциональна количеству полученного тепла. Следовательно, должна быть иная мера механического движения тела, кроме количества движения, особенно необходимая там, где происходит превращение механического движения тела в другие виды движения материи.

Такой мерой, пригодной во всех случаях, является *энергия*. При всех превращениях материи энергия остается неизменной. Так как движение материи вечно, то, следовательно, *энергия — количественная мера движения материи во всех формах этого движения*.

Принципиальный для нас вопрос о том, как численно связана энергия движущегося тела с другими физическими величинами, характеризующими его механическое движение и движение в других формах, окончательно был выяснен в науке примерно сто лет назад. После этого закон сохранения энергии известен как *основной закон природы*.

Прежде чем говорить о мере энергии механического движения, необходимо предварительно остановиться на важной физической величине — *работе*, которая играет главную роль при передаче механического движения и энергии от одного тела к другому.

## § 29. Работа и энергия

Возьмем два примера, в которых имеется действие силы, но нет изменения количества движения. Первый пример: тело лежит на столе. Второй пример: паровоз на прямолинейном пути равномерно, с постоянной скоростью гоняя вагоны. И в первом, и во втором случае на тело и на вагоны действует внешняя сила: в одном случае сила тяжести действует на покоящееся тело, в другом — сила тяги паровоза действует некоторое время на вагоны. В обоих примерах не происходит изменения количества движения: тело покойится, а вагоны продолжают движение с постоянной скоростью. Почему не происходит изменения количества движения в обоих случаях, это нам ясно: на тело и на вагоны действуют другие силы, и равнодействующая всех сил в каждом случае равна нулю.

Но есть принципиальная разница в явлениях, описанных в этих двух примерах. В первом, когда тело лежит на столе, сила действует на него постоянно, но при этом никаких изменений ни в самом теле, ни в окружающих телах не происходит. Во втором — сила также действует постоянно, также не происходит изменений количества движения, но здесь действие силы связано с определенными, довольно сложными процессами в окружающих телах. Для того чтобы сила тяжести действовала на тело, Земля, со стороны которой действует сила, не должна претерпевать никаких измене-

ний. Для того чтобы сила паровоза действовала на вагоны, необходимы определенное давление пара в котле и расход этого пара, необходим непрерывный расход топлива и воды. Паровозу для создания силы тяги необходимо сообщить определенное количество энергии, которое получается в результате сгорания топлива. В этом случае непрерывное действие силы тяги связано с целым рядом сложных процессов в окружающих тела.

Но какая разница в явлениях, описанных в этих двух примерах, с точки зрения механики? Разница заключается только в том, что в первом случае точка приложения силы *остается в покое*, во втором точка приложения силы (тяги) *движется* с некоторой скоростью. Опыт показывает, что количество сожженного в паровозе топлива за некоторое время при прочих равных условиях пропорционально произведению силы тяги на путь, который прошел паровоз за то же время. Поэтому во всех аналогичных явлениях существенную роль играет физическая величина, называемая *работой* и измеряемая *произведением силы на путь*; работа служит мерой передачи движения (в общем смысле) от одного тела к другому посредством силы.

Таким образом, *работа является мерой передачи движения от одного тела к другому, или мерой перехода энергии от одного тела к другому*. По определению Ф. Энгельса, «...работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны»<sup>1)</sup>.

Как следует из основных положений материалистической философии, движение материи вечно, только формы движения материи разнообразны. В природе непрерывно идут процессы, в которых происходит переход из одной формы движения в другую. Следовательно, существует общая для всех явлений мера движения материи, одинаковая для всех форм движения материи; такой мерой, как уже сказано, и является *энергия* данного тела (или системы тел).

Еще древние философы выдвигали мысль о неуничтожаемости движения материи, и эта мысль служила основанием философских учений таких великих умов более позднего времени, как Р. Декарт, М. В. Ломоносов и др., но только в XIX веке универсальный закон, получивший название *закона сохранения энергии*, был признан всеми учеными, и в первую очередь физиками, в качестве основного закона природы.

Каждое тело или система тел обладает определенным запасом энергии. Во всех процессах и явлениях имеет место переход энергии от одного тела к другому или от одних частей тела к другим. В физике формы движения тел (материи) могут быть различными (механическая, тепловая, электромагнитная и т. д.), но *энергия* —

<sup>1)</sup> Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1965, стр. 78.

*единая количественная мера движения материи во всех формах проявления этого движения.*

При одних природных явлениях форма движения материи не изменяется: горячее тело нагревает холодное, камень летит вверх, а затем падает на землю, и т. д. При других — имеет место переход из одной формы движения в другую: пуля ударяет в доску и застrelивает там, нагреваясь, — механическое движение превратилось в тепловую форму движения материи; паровоз везет вагоны — тепловая форма движения, возникающая в результате горения угля, превращается в механическую; шарик катится по столу и останавливается — механическая форма превратилась в тепловую, и т. д. Но во всех этих случаях количество энергии, отданной (в той или другой форме) другому телу, в точности равно количеству энергии, полученной вторым телом.

Обычно говорят: «механическая энергия», «тепловая энергия», «электромагнитная энергия» и т. д.; это следует понимать как величину энергии, соответствующей механической форме движения данного тела, величину энергии, соответствующей тепловой форме движения, и т. д. Нет различных видов энергии: есть различные формы движения материи, энергия есть единая мера движения материи. Только ради сокращения будем говорить, как указано выше, о «механической энергии», о «тепловой энергии» и т. д.

В тех же случаях, когда мы имеем дело только с механической формой движения или явлениями и процессами, в которых происходит переход из механической формы движения в какую-либо другую или обратно, рассмотренная нами ранее величина — работа, измеряемая произведением силы на путь (на перемещение точки приложения силы), — является мерой количества переданной энергии. Поэтому основная единица энергии обычно выбирается равной единице работы.

В системе СИ за единицу работы и энергии принимают 1 джоуль (Дж), равный работе силы в 1 ньютон на пути в 1 метр. В физической системе СГС за единицу работы и энергии принимают 1 эрг, равный работе, которую совершает сила в 1 дине на пути в 1 сантиметр. Легко подсчитать, что

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг.}$$

## § 30. Работа силы

Всегда, когда сила действует на движущееся тело и направление силы и скорости движения совпадают, происходит переход энергии от тела, со стороны которого действует сила, к тому, на которое она действует. В этом случае работу силы считают *положительной*. Положительное значение работы соответствует переходу энергии со стороны «двигающего» тела к телу «движимому».

Если же направления силы и перемещения противоположны, то энергия переходит, наоборот, к тому телу, со стороны которого действует сила. Работу силы в этом случае считают *отрицательной*.

В случае же, когда направления силы и перемещения различны, величина работы равна проекции силы на направление смещения, умноженной на величину смещения, или: величина работы равна *скалярному произведению* вектора силы на вектор смещения.

Так, например, если тело 1 действует на тело 2 с силой  $F_{21}$  и тело 2 совершило перемещение  $dS_2$ , то тело 1 совершило работу над телом 2, величина которой равна

$$dA = F_{21} dS_2, \quad (30.1)$$

или скалярному произведению вектора силы на вектор пути. Если  $dA > 0$ , то это означает, что тело 1 передало энергию телу 2; если  $dA < 0$ , то тело 2 передало энергию телу 1. Если перемещение  $dS_2$  перпендикулярино к силе  $F_{21}$ , то  $dA = 0$ , между телами не происходит обмена энергией. Работу совершают только составляющая

силы на направление перемещения; поэтому работу можно записать так:

$$dA = F_{21} dS_2 \cos \alpha, \quad (30.2)$$

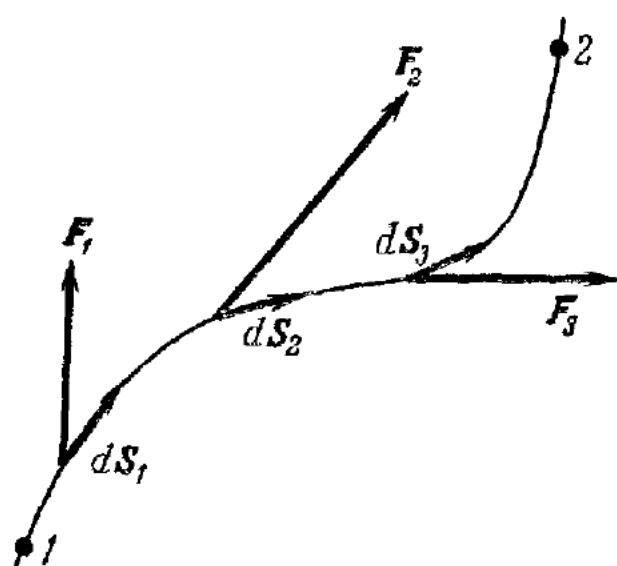


Рис. 75.

где  $\alpha$  — угол между силой  $F_{21}$  и направлением смещения  $dS_2$ .

Когда сила изменяется при перемещении точки приложения, изменяется как по величине, так и по направлению, то нужно вычислить элементарную работу  $dA$  на каждом бесконечно малом участке пути  $dS$ , равную  $dA = F dS$ , а затем сложить значения всех элемен-

ментарных работ вдоль всего участка пути, например от точки 1 до точки 2 (рис. 75). Иначе говоря, нужно проинтегрировать  $F$  по  $dS$  от точки 1 до точки 2.

Таким образом, работу силы  $F$  вдоль пути между точками 1 и 2 обозначают так:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F dS. \quad (30.3)$$

Как найти значение величины  $A$  в данном конкретном случае? Ответ на этот вопрос можно дать только после того, как будет известно изменение  $F$  вдоль пути.

### § 31. Потенциальная энергия деформации

В случае, когда тело деформируется под действием какой-то внешней силы, точка приложения деформирующей силы перемещается и система, со стороны которой действует сила, совершает работу, являющуюся мерой энергии, перешедшей к деформируемому телу. Если деформируют *упругое тело*, то работа идет на увеличение запаса энергии деформированного тела, которая называется *потенциальной энергией деформации*.

Действительно, для упругого тела величины деформации и силы связаны однозначно, независимо от направления изменения деформации. Так, например, деформируя тело, сжимая его на величину  $dS$ , мы затратили энергию, равную  $dA = F dS$ . Если предоставим телу возможность обратно расширяться на величину  $dS$ , то оно будет действовать на этом участке с силой  $F$  той же величины, но противоположного направления и совершая работу той же величины  $dA$ . При этом оно передаст энергию деформации тому телу, на которое сжатое тело действовало при расширении. Очевидно, что потенциальная энергия деформации упругого тела может быть целиком превращена в работу.

Обычно величина деформации закономерно связана с величиной действующей силы; величина силы будет меняться с изменением деформации, и величина работы не будет равна произведению силы на путь, ибо сила переменна и зависит от смещения, прошедшего точкой приложения силы. В том случае, когда деформация пропорциональна действующей силе, легко подсчитать работу, которую нужно затратить для осуществления заданной деформации. Допустим, нужно растянуть пружину (рис. 76), для которой

$$F = kx, \quad (31.1)$$

где  $F$  — сила, приложенная к пружине,  $x$  — удлинение пружины под действием этой силы,  $k$  — постоянный коэффициент, называемый *коэффициентом жесткости* (или просто *жесткостью*) пружины. Коэффициент  $k$  имеет размерность Н/м и численно равен силе, которая нужна для деформации пружины на единицу длины. Работа, которую нужно совершить при растяжении пружины от удлинения  $x$  до удлинения  $x + dx$ , очевидно, будет равна  $Fdx$ , или  $kx dx$ . Следовательно, вся работа при растяжении от  $x = 0$  до  $x = x_0$  будет равна

$$A = \int_0^{x_0} F dx = k \int_0^{x_0} x dx = \frac{1}{2} kx_0^2, \quad (31.2)$$

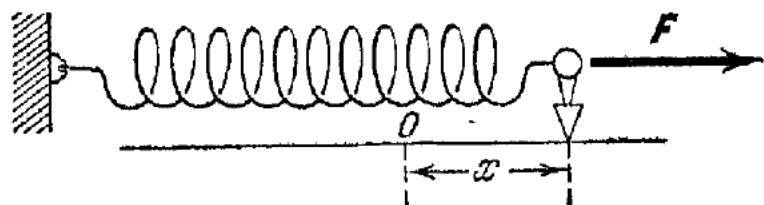


Рис. 76.

и эта работа равна потенциальной энергии пружины, растянутой (или сжатой) на величину  $x_0$  и обладающей жесткостью  $k$ .

Силу сжатой пружины можно заставить действовать на какое-то тело, которое будет двигаться, и при этом пружина будет разжиматься. При идеально упругой пружине сила действия ее определяется равенством (31.1), и поэтому работа пружины при разжимании будет равняться работе, затраченной на ее сжатие; энергия сжатой пружины полностью перейдет к телу, на которое действовала пружина, разжимаясь.

### § 32. Кинетическая энергия тела

Когда сила действует на тело и тело движется под действием этой силы, точка приложения силы перемещается, система, со стороны которой действует сила, совершает работу, энергия движущегося тела возрастает на величину проделанной работы. Всякое движущееся тело представляет собой самую простую форму движения материи; мерой этого движения является некоторый запас энергии движения, его и называют *кинетической энергией*.

Величину кинетической энергии, или энергии движения тела, можно определить по величине работы, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение тела. Пусть сила  $\mathbf{F}$  действует на тело массы  $m$  и вызывает его движение со скоростью  $\mathbf{v}_0$  из состояния покоя; тогда работа силы  $\mathbf{F}$  на всем пути, который тело прошло за время возрастания его скорости от нуля до значения  $\mathbf{v}_0$ , привела на увеличение кинетической энергии тела. По второму закону динамики всегда

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad (32.1)$$

умножим обе части равенства на  $dS$  — приращение пути, пройденного телом:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dS = \mathbf{F} dS = dA. \quad (32.2)$$

Вспомним, что  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , поэтому равенство (32.2) можно записать так:

$$m\mathbf{v} d\mathbf{v} = \mathbf{F} dS. \quad (32.3)$$

В этом равенстве стоит скалярное произведение вектора  $\mathbf{v}$  на вектор  $d\mathbf{v}$ , или  $v dv \cos \alpha$ . Величина  $dv \cos \alpha = dv_S$  есть проекция приращения скорости на ее направление (направление касательной к траектории тела) или на направление вектора  $dS$  в данном месте. Следовательно,  $dv_S$  есть увеличение модуля вектора скорости за время  $dt$ . Поэтому равенство (32.3) можно записать так:

$$mv dv_S = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \mathbf{F} dS. \quad (32.4)$$

Теперь проинтегрируем правую и левую части равенства (32.4) при возрастании скорости от нуля до  $v_0$ :

$$m \int_0^t d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_0^t \mathbf{F} dS = A, \quad A = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (32.5)$$

Таким образом, для тела массы  $m$ , движущегося со скоростью  $v_0$ , кинетическая энергия равна

$$\frac{mv_0^2}{2}.$$

Система, со стороны которой действует сила  $\mathbf{F}$ ,двигающая тело, совершаet работу; она передает некоторую энергию телу. Наоборот, когда тело, имевшее скорость, замедляется или останавливается, тормозящая его сила тоже совершает работу, но работа здесь отрицательная (смещение и сила направлены в различные стороны), тормозящее тело получило энергию, равную уменьшению кинетической энергии двигавшегося тела. Двигавшееся тело передало энергию телу, которое его затормозило. В какую форму превратилась кинетическая энергия — это зависит от физических условий.

Например, пуля ударяет в доску и застревает в ней, доска получает сильный толчок и начинает двигаться. Кинетическая энергия пули в этом случае превратилась в тепло и в кинетическую энергию движения доски после удара пули. Такой удар пули является примером неупругого удара. При неупругом ударе часть кинетической энергии обращается в тепловую энергию. При полностью неупругом ударе, если оба тела после удара неподвижны, вся кинетическая энергия обращается в тепло.

### § 33. Полностью неупругий удар двух тел

Тело массы  $m_1$  движется со скоростью  $v_1$  и ударяется о тело массы  $m_2$ , имевшее скорость  $v_2$ . Если после удара оба тела имеют одинаковую скорость  $v$ , то такой удар называется *полностью неупругим*<sup>1)</sup>. Скорость движения тел  $v$  после полностью неупругого удара можно определить на основании закона сохранения количества движения, как было указано в § 25. Скорость после удара по величине и направлению будет согласно формуле (25.3) равна

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (33.1)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости до удара тел, имеющих соответственно

<sup>1)</sup> Правильнее было бы сказать: «удар полностью неупругих тел», но обычно принято такое сокращенное название удара.

массы  $m_1$  и  $m_2$ . Кинетическая энергия тел после удара будет иметь следующую величину<sup>1)</sup>:

$$E_n = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (33.2)$$

А до удара кинетическая энергия обоих тел была равна

$$E_d = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (33.3)$$

Определим «потери» механической энергии, или ту часть энергии, которая во время удара перешла в тепловую форму; из равенства (33.3) вычтем (33.2):

$$E_d - E_n = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (33.4)$$

Величина  $v_1 - v_2$  представляет относительную скорость движения тел до удара. Поэтому энергия, перешедшая в тепло, зависит от соотношения масс соударяющихся тел  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  и от относительной скорости движения их до удара. Энергию «потерь» можно рассматривать как кинетическую энергию некоторой *эффективной массы*

$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

движущейся с относительной скоростью  $v' = v_1 - v_2$ . В таком виде формула для определения «потерь» механической энергии при полностью неупругом ударе легко запоминается и удобна для анализа и вычислений.

Например, если одно из тел очень велико по сравнению с другим ( $m_2 \gg m_1$ ), то

$$m_0 = \frac{m_1}{1 + (m_1/m_2)} \approx m_1$$

и потери механической энергии равны кинетической энергии относительного движения малого тела.

Количество тепла, выделившегося при ударе неразорвавшегося снаряда о броню движущегося танка (или самолета) и застрявшего в ней, будет практически равно кинетической энергии снаряда. При определении кинетической энергии снаряда следует брать его скорость относительно брони.

Механические явления, имеющие место при выстреле из незакрепленного орудия (рис. 77) или при разрыве снаряда и т. п., аналогичны тем, которые происходят при неупругом ударе, но направление хода процессов различно. В этих случаях два тела

<sup>1)</sup> Заметим, что  $v^2 = v^2$ .

(или большее их число) имели до взрыва одинаковую скорость и некоторую кинетическую энергию. Во время взрыва заряда снаряд и орудие под действием давления пороховых газов получают различные скорости и некоторую кинетическую энергию. Если известны массы снаряда и орудия, скорость до выстрела и количество

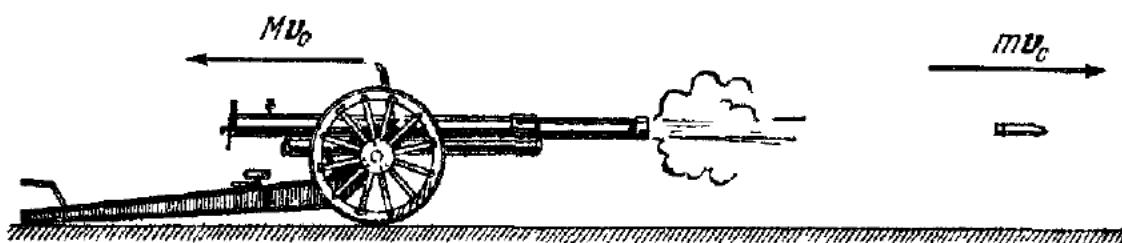


Рис. 77.

механической энергии, полученной вследствие выстрела, то на основании закона сохранения энергии и закона сохранения количества движения можно вычислить скорость снаряда и орудия после выстрела.

### § 34. Упругий удар

При упругом соударении двух тел, например двух костяных или стальных твердо закаленных шариков, происходит упругая деформация шариков, поверхности соударяющихся тел вдавливаются и сила давления вследствие деформации шариков изменяет их скорость.

Анализ явлений, имеющих место при ударе упругих сплошных тел, довольно сложен, поэтому вначале рассмотрим самый простой случай — *центральный удар* двух однородных шаров. Центральным называют такой удар, при котором скорости соударяющихся шаров до удара совпадают по направлению с линией, соединяющей центры шаров (рис. 78, а).

Процесс соударения происходит примерно следующим образом. Во время сближения шаров (рис. 78, б) силы, действующие на них ( $F_1$  и  $F_2$ ), увеличиваются с увеличением деформации, пока скорости обоих шаров не сравняются (рис. 78, в). В этот момент

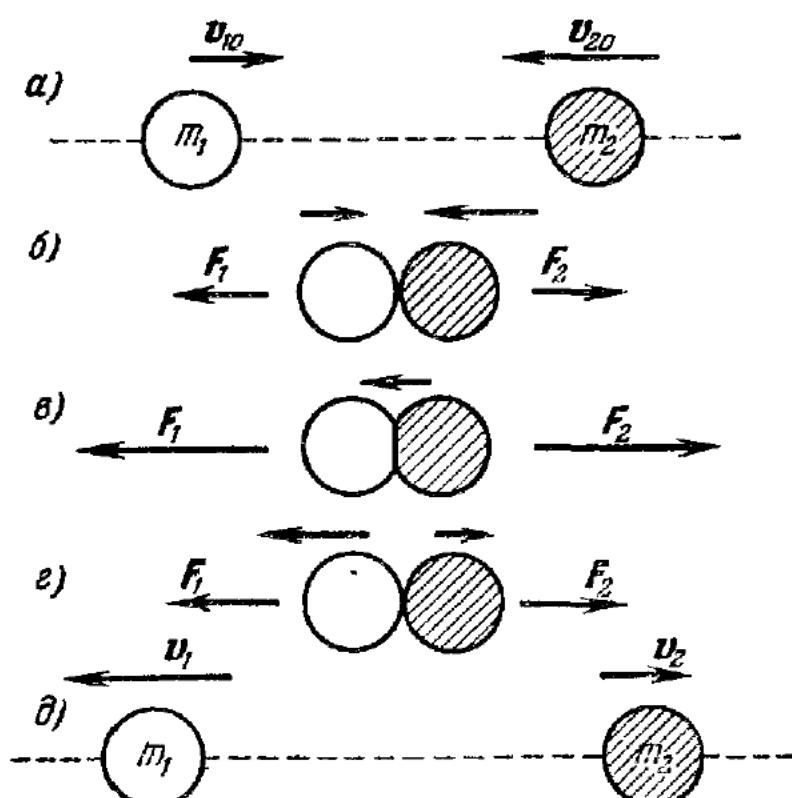


Рис. 78.

деформации достигают максимума, а затем они начинают уменьшаться, при этом силы деформации расталкивают шары (рис. 78, г) до тех пор, пока они не разойдутся; далее шары будут двигаться с различными скоростями (рис. 78, д).

Детальный анализ деформации шаров при ударе представляет очень сложную задачу. Однако можно довольно просто определить скорости шаров после удара при известных величинах масс шаров и их скоростей до удара, когда нет перехода механической энергии в тепловую. Действительно, в этом случае за первую половину времени удара (при сближении тел) происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию деформации, а за вторую половину времени удара (при удалении тел) потенциальная энергия целиком обратно переходит в кинетическую.

Поэтому на основании закона постоянства количества движения и закона сохранения энергии можно написать:

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (34.1)$$

и

$$\frac{1}{2} (m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2) = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2), \quad (34.2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы шаров,  $\mathbf{v}_{10}$  и  $\mathbf{v}_{20}$  — их скорости до удара, а  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — после удара.

Векторы скорости шаров после упругого удара будут лежать на линии центров шаров, потому что силы взаимодействия во время удара вследствие симметрии будут направлены по этой же прямой. Уравнения (34.1) и (34.2) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} m_1 (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) &= m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}), \\ m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) &= m_2 (v_2^2 - v_{20}^2). \end{aligned} \quad (34.3)$$

Разделив второе уравнение на первое, получаем

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \quad (34.4)$$

Умножив уравнение (34.4) на  $m_1$  и сложив с первым из уравнений (34.3), определим скорость второго тела после удара:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{2m_1 \mathbf{v}_{10} - (m_1 - m_2) \mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (34.5)$$

Формулу для определения скорости первого тела после удара можно получить просто, если сменить индексы 1 на 2 и 2 на 1 в формуле (34.5):

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2m_2 \mathbf{v}_{20} - (m_2 - m_1) \mathbf{v}_{10}}{m_2 + m_1}. \quad (34.6)$$

Если массы шаров одинаковы и один из них находится в покое, например  $\mathbf{v}_{20} = 0$ , то после удара скорость первого шара будет

равна нулю, а второй шар будет двигаться со скоростью первого  $v_{10}$ .

Но такой же результат можно получить непосредственно из законов сохранения количества движения и энергии. Действительно, так как массы шаров одинаковы, то закон сохранения количества движения требует, чтобы сумма скоростей обоих шаров после удара равнялась скорости первого шара до удара. Закон сохранения энергии требует, чтобы сумма квадратов скоростей после удара равнялась квадрату скорости до удара. Одновременное выполнение этих двух условий возможно только в том случае, когда после удара скорость одного из шаров равна нулю, а равняться нулю может только скорость движавшегося до удара первого шара, ибо только он замедляется во время удара.

При центральном упругом ударе одинаковых по массе однородных шаров они «обмениваются» скоростями. Действительно, положим в формулах (34.5) и (34.6)  $m_1 = m_2 = m$ , получим

$$v_2 = v_{10}, \quad v_1 = v_{20}. \quad (34.7)$$

Сущность механизма упругого удара двух шаров можно представить себе достаточно ясно, если рассмотреть соударение двух твердых шаров «через» пружину.

Пусть к одному из шаров прикреплена пружина, масса которой мала по сравнению с массой каждого из шаров («невесомая» пружина); начальные скорости шаров направлены по линии центров, так что сила сжатой пружины также совпадает с центральной линией. Значения величин указаны на рис. 79.

Результаты действия упругих сил деформации шаров при ударе такие же, как и результаты действия пружины, масса которой почти равна нулю. Кинетическая энергия движения системы до удара  $\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = 0,0540$  Дж. Во время соударения нарастает потенциальная энергия, пружина сжимается до тех пор, пока скорости шаров не сравняются, за это время первый шар замедляется, а второй ускоряется. Скорость шаров в этот момент

$$v = \frac{K}{m_1 + m_2} = \frac{0,14}{0,3} \approx 0,467 \text{ м/с}$$

и максимальная потенциальная энергия пружины равна

$$0,0540 - \frac{0,3 \cdot 0,467^2}{2} \approx 0,0215 \text{ Дж.}$$

Затем пружина начинает разжиматься; очевидно, что при этом сила пружины замедляет первый шар, сообщая ему в противоположном направлении скорость  $-0,0667$  м/с, и ускоряет второй шар до скорости  $0,733$  м/с; эти величины можно определить по формулам (34.5) и (34.6).

Скорости шаров после удара не зависят от жесткости пружины. Важно только то, что пружина идеально упругая, после удара она не имеет энергии.

Но время соударения, время сжатия и обратного расширения пружины существенно зависит от жесткости пружины и массы шаров. Чем жестче пружина, тем меньше время соударения. Можно показать, что время соударения при одних и тех же массах будет пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{k}}$ , где  $k$  — коэффициент жесткости пружины.

Так как при ударе действуют только расталкивающие силы (а не притягивающие!), то приращение скорости каждого шара вследствие удара направлено всегда от второго шара.

Если при ударе возникли бы притягивающие силы, то было бы наоборот: приращение скорости каждого шара после удара было бы направлено ко второму шару. Такой удар двух шаров можно осуществить при помощи «невесомой» нити. Пусть два шара связаны такой нитью и одному из них сообщается скорость (рис. 80, а), как только нить вытянется, произойдет удар, при котором будут действовать силы притяжения. Если нить идеально упругая, то движение будет сложным: когда скорости обоих тел сравняются

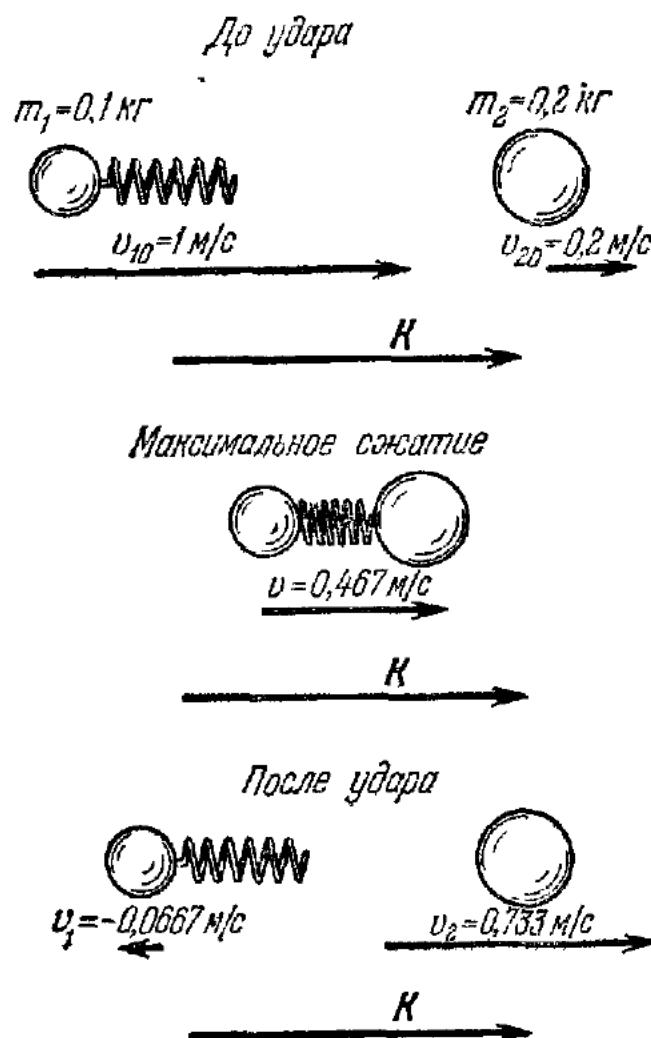


Рис. 79.

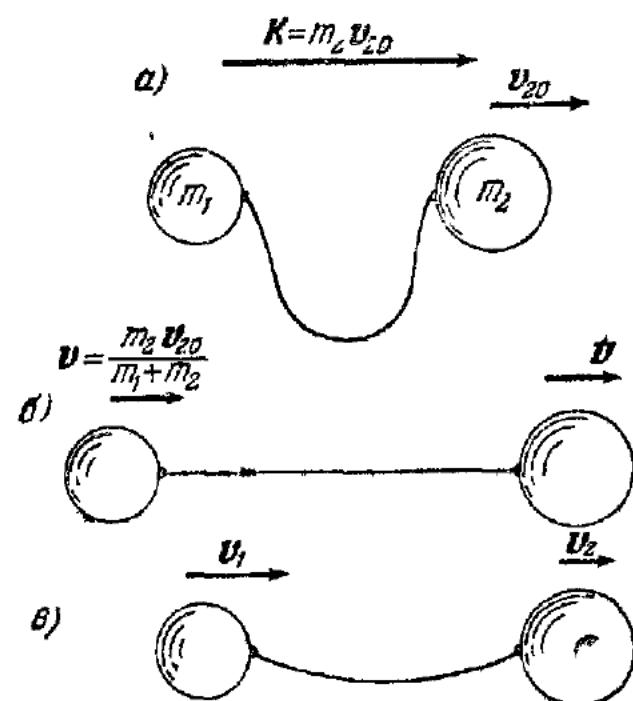


Рис. 80.

(рис. 80, б), нить будет растянута на максимальную величину, затем нить будет сокращаться, убыстряя  $m_1$  и замедляя  $m_2$ , до тех пор, пока длина ее не достигнет первоначального значения. В этот момент масса  $m_1$  будет двигаться быстрее массы  $m_2$ , и нить не окажет никакого влияния на дальнейшее движение шаров, которые будут сближаться с постоянной скоростью (рис. 80, в).

Мы подробно рассмотрели центральный удар двух шаров. Такова же будет картина удара двух любых тел, если начальная скорость направлена вдоль линии, соединяющей центры масс этих тел, и если силы взаимодействия направлены вдоль этой же линии центров. В противном случае удар будет представлять сложное явление, анализ которого выходит за рамки нашего курса.

Картина соударения при нецентральном ударе шаров будет совсем иная. Здесь во время удара имеет место как приближение центров шаров друг к другу вследствие деформации их, так и «скольжение» поверхности одного шара относительно другого. Для того чтобы представить себе механизм удара, разложим векторы скоро-

стей обоих шаров до удара на направление линии центров шаров и на направление, перпендикулярное к этой линии (рис. 81).

Очевидно, что вследствие «скольжения» поверхности шаров возникнут силы трения  $F_t$  и  $F'_t$ , которые вместе с упругими силами взаимодействия  $F_y$  и  $F'_y$  определят изменение скорости шаров после удара. Кроме того, силы трения вызовут вращение шаров

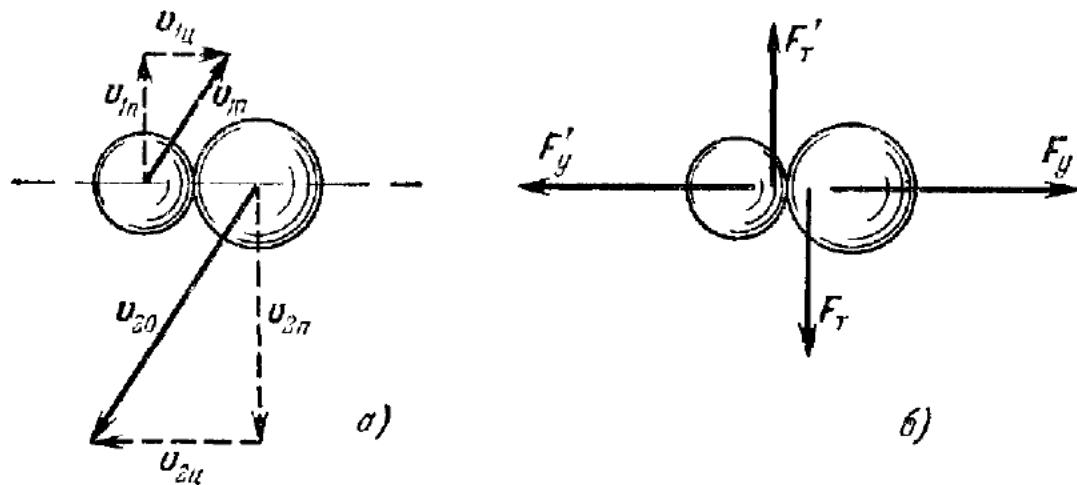


Рис. 81.

вокруг центра. Только в том случае, когда силы трения  $F_t$  очень малы по сравнению с упругими силами  $F_y$ , т. е.  $F_t \ll F_y$ , можно пренебречь действием сил трения.

Теперь сравнительно просто решить задачу об ударе. Действительно, при этом условии величины нормальных составляющих скорости шаров  $v_{1n}$ ,  $v_{2n}$  не изменяются при ударе, а две составляющие скорости вдоль линии центров после удара можно будет определить на основании закона сохранения количества движения и закона сохранения энергии таким же путем, как и при центральном ударе. Запишем эти уравнения:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} &= m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n}, \\ m_1 (v_{1n}^2 + v_{1u}^2) + m_2 (v_{2n}^2 + v_{2u}^2) &= m_1 (v'_{1n}^2 + v'_{1u}^2) + m_2 (v'_{2n}^2 + v'_{2u}^2); \end{aligned} \quad (34.8)$$

здесь неизвестны только две величины:  $v'_{1u}$  и  $v'_{2u}$ .

Общие закономерности удара шаров в этом случае можно найти следующим путем. Предположим, что до удара (рис. 82) шар 2 покойится, а шар 1 движется <sup>1)</sup>. Сила взаимодействия в момент удара проходит через центры шаров (нет трения), и ее направление зависит от «прицельного» расстояния  $\delta$ , равного расстоянию центра покоящегося шара от линии полета центра другого шара (до удара). Плоскость чертежа совпадает с плоскостью, проходящей через центры шаров и вектор скорости шара 1.

<sup>1)</sup> Это предположение не является ограничением. Всегда можно выбрать систему отсчета, движущуюся со скоростью шара 2 до удара, и рассматривать движение относительно этой системы (см. § 43).

Удар произойдет при условии  $\delta < r_1 + r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы шаров. Угол  $\theta$  зависит от  $\delta$  и  $r_1 + r_2$ . Составляющая количества движения шара 1 (ударяющего), нормальная к  $F$  (к силе взаимодействия), остается неизменной. Составляющие количества движения шаров по направлению силы  $F$  изменяются в соответствии с законами центрального удара.

По закону постоянства количества движения

$$K = K_1 + K_2, \quad (34.9)$$

где  $K$  — количество движения

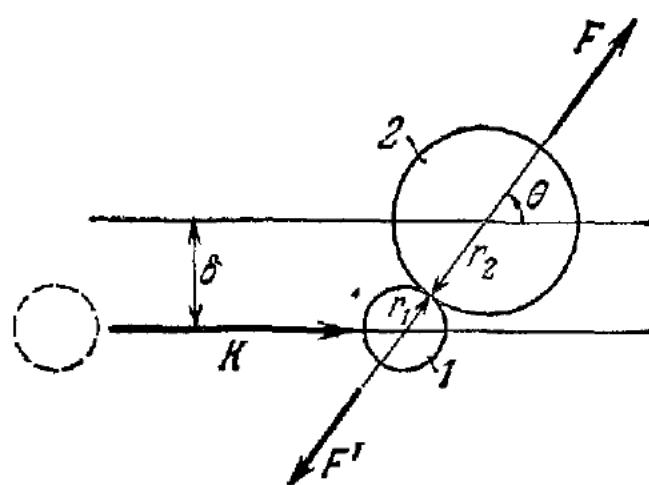


Рис. 82.

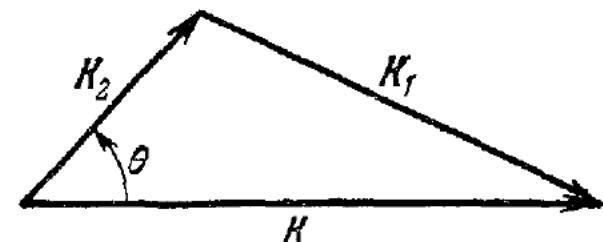


Рис. 83.

шара 1 до удара,  $K_1$  и  $K_2$  — количества движения шаров 1 и 2 после удара соответственно.

Закон сохранения энергии можно записать так:

$$\frac{K^2}{m_1} = \frac{K_1^2}{m_1} + \frac{K_2^2}{m_2}, \quad (34.10)$$

так как  $K = mv$  и  $mv^2 = K^2/m$  для любого тела.

Допустим, что  $K_2$  составляет угол  $\theta$  с вектором  $K$ , т. е. поконвившийся шар отскочит под углом  $\theta$  к начальной скорости первого шара; тогда из треугольника на рис. 83 следует:

$$K_1^2 = K_2^2 + K^2 - 2KK_2 \cos \theta.$$

Учитывая постоянство энергии (34.10), исключаем  $K_1$  и получаем

$$K_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} K \cos \theta = \beta K \cos \theta, \quad \beta = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}. \quad (34.11)$$

Отсюда видно общее соотношение между  $K_2$  и  $K$  в зависимости от угла  $\theta$  и отношения масс  $m_1/m_2$ .

Следует различать два случая:  $m_1 > m_2$  и  $m_1 < m_2$ . В первом случае  $\beta < 1$ , тяжелый шар ударяет легкий и связь между  $K_2$  и  $K$  показана на рис. 84: конец вектора  $K_2$  описывает окружность диаметром  $\beta K$ . Оба шара после удара летят в сторону начального движения первого шара. Величина угла  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ . Угол отклонения первого шара может изменяться от 0 до некоторого  $\Phi_{\max}$ . Одному значению  $\phi$ , вообще, соответствуют два значения  $\theta$ .

Точка *B* представляет центральный удар, оба шара летят после удара по одному направлению (рассмотренный ранее случай). Точка *A* представляет «промах» (шары не задели друг друга).

Во втором случае, при  $m_1 < m_2$ , легкий шар ударяет тяжелый. Картина возможных количеств движений шаров после удара показана на рис. 85. Здесь  $\beta > 1$  и шар *I* после удара может лететь назад. Угол отклонения налетающего шара  $\varphi$

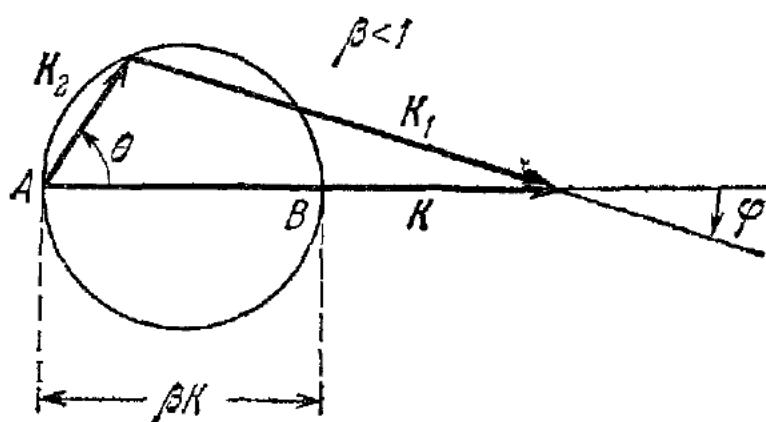


Рис. 84.

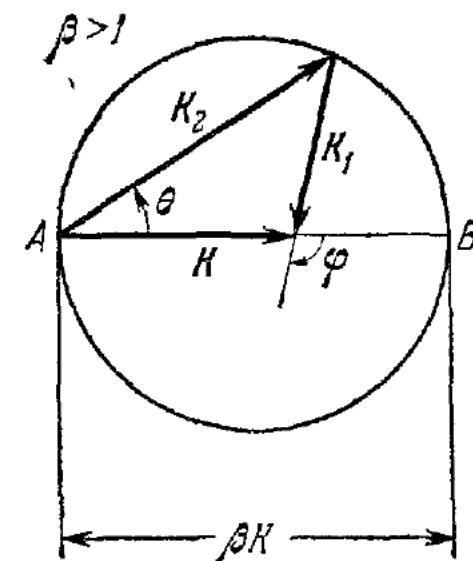


Рис. 85.

изменяется от 0 до  $\pi$ . Точка *B* представляет центральный удар. Каждому значению  $\varphi$  соответствует только одно значение  $\theta$ .

Картина возможных количеств движения в промежуточном случае одинаковых по массе шаров,  $m_1 = m_2$ , показана на рис. 86. Угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ . При центральном ударе шар *I* останавливается, а шар *2* с той же скоростью движется далее (точка *B*). Угол «разлета» шаров  $\theta + \varphi$  всегда равен  $\pi/2$ .

Угол  $\theta$  нетрудно связать с прицельным расстоянием  $\delta$  и показать (см. рис. 82), что

$$(r_1 + r_2) \sin \theta = \delta. \quad (34.12)$$

Зная  $\delta$ , диаметры шаров и их массы, найдем  $\theta$  и  $\beta$ , по данному  $K$  определим  $K_2$  и  $K_1$ , которые в свою очередь определяют скорости и направления шаров после удара. Таким образом, задача упругого соударения двух шаров решена.

Важно отметить, что основа решения задачи следует из двух законов сохранения — энергии и количества движения. Поэтому все выводы, показанные на рисунках и полученные из (34.11), применимы к упругому удару двух частиц (рассматриваемых как материальные точки). Не зная механизма взаимодействия частиц при ударе, мы полагаем, что их кинетическая энергия после удара

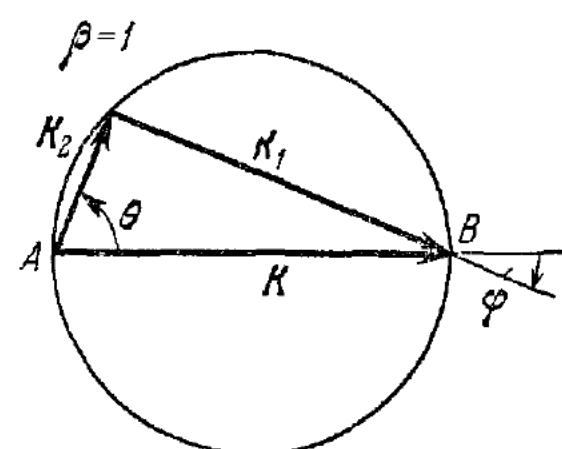


Рис. 86.

равна кинетической энергии до удара. Неизменность кинетической энергии при ударе можно считать условием упругого удара частиц. Для «точечных частиц» это условие соблюдается, если отталкивающие силы однозначно зависят от расстояния между ними и направлены по соединяющей их линии (см. § 36).

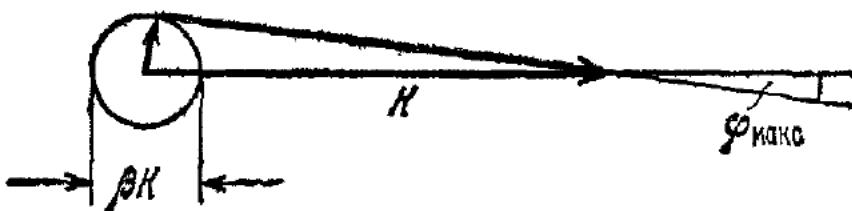


Рис. 87.

Соотношение (34.12) справедливо только для шаров, но для любых частиц величину  $\theta$  можно определить по прициальному расстоянию  $\beta$ , если известна зависимость сил отталкивания от расстояния между частицами. Общая же картина всех возможных ударов частиц представлена формулой (34.11), она ясно видна на рисунках. В некоторых задачах ею вполне можно ограничиться. Например,

при ударах очень тяжелой частицей ( $m_1 \gg m_2$ ) можно по максимальному углу отклонения  $\Phi_{\max}$  определить величину отношения масс. Легко убедиться, рассматривая рис. 87, что

$$\Phi_{\max} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{m_2}{m_1}.$$

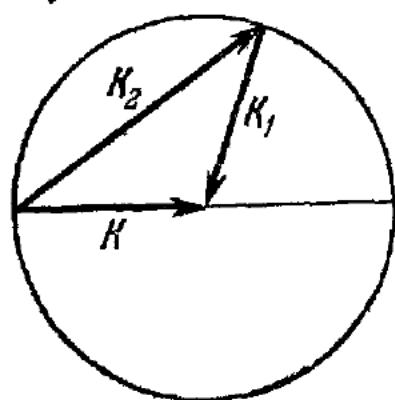


Рис. 88.

При ударах очень легкой частицей ( $m_1 \ll m_2$ ) картина импульсов показана на рис. 88 (здесь  $\beta \approx 2$ ). В случае лобового удара ( $\theta = 0$ )  $K_2 \approx 2K$  и  $K_1 \approx -K$ . При любом ударе, когда  $K_1 \approx K$ , скорость легкой частицы почти не изменяется по величине, она меняет только направление. Скорость тяжелой частицы после удара не больше

$$v_2 = \frac{2K}{m_2} = \frac{2m_1}{m_2} v$$

( $v$  — начальная скорость ударяющей частицы). Последний случай в пределе ( $m_1/m_2 \rightarrow 0, v_2/v \rightarrow 0$ ) дает картину упругого удара о неподвижную стенку.

Аналогия соударения шаров и частиц верна тогда, когда нет сил трения при соприкосновении шаров, когда шары и после удара не врашаются, движутся поступательно. Точнее следует сказать: когда вращение шаров не изменяется при ударе.

### § 35. Удар неупругих тел

Рассмотренный в предыдущем параграфе упругий удар, при котором не происходит «потерь» механической энергии, следовало бы назвать идеально упругим ударом, ибо в действительности всегда имеют место «потери» механической энергии — переход части ее в тепло. Однако если эти «потери» очень малы, то рассмотренная нами картина идеально упругого удара достаточно хорошо отображает действительный процесс.

Но при обычном неупругом ударе, когда «потери» механической энергии заметны, картина явления будет несколько иная.

Принципиальное отличие ударов различного вида можно представить себе, анализируя удар шаров через пружину (см. рис. 79). Полностью неупругий удар аналогичен удару о пружину, которая, достигнув максимального своего сжатия, сломалась, или удару о такую пружину, которая может только сжиматься, но не может разжиматься; например, у пружины есть такая защелка, которая не мешает ей сжиматься, но не позволяет разжиматься. В этом случае потенциальная энергия сжатой пружины будет равна «потерям» кинетической энергии.

Удар обычных неупругих тел соответствует какому-то промежуточному случаю между идеально упругим и полностью неупругим ударами. Ему аналогичен удар двух шаров через неупругую пружину, которая, сжавшись за первую половину времени удара до некоторой величины, не примет своих первоначальных размеров после удара; или расталкивающая сила во время сжатия будет больше, чем за вторую половину времени удара при расширении пружины. Часть потенциальной энергии сжатия пружины перейдет в тепло и не будет обращена в кинетическую энергию движения. Следовательно, закон сохранения механической энергии в этом случае нельзя применять. Условие равенства скоростей после удара здесь также не будет иметь места, как это было при полностью неупругом ударе, так как после удара оба тела движутся с различными скоростями.

Неупругий удар можно было бы характеризовать той долей энергии деформации, которая обращается в тепло за время удара. Но еще Ньютона было найдено, что при неупругом ударе шаров из определенного материала величины относительных скоростей до и после удара находятся в постоянном отношении, и поэтому такой удар лучше характеризовать *коэффициентом восстановления относительной скорости после удара*:

$$e = \frac{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10}|}, \quad (35.1)$$

где  $\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10}$  — относительная скорость до удара, а  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  — после удара. Опыт показывает, что с некоторой степенью точности можно

считать величину  $e$  постоянной и зависящей только от материала соударяющихся шаров.

Легко убедиться, что при идеально упругом ударе относительная скорость остается той же самой по величине, но меняет свой знак; действительно, из уравнения (34.4) следует:

$$v_{10} - v_{20} = -(v_1 - v_2). \quad (35.2)$$

Коэффициент восстановления всегда меньше единицы, ибо при упругом ударе он равен единице, при полностью неупругом ударе равен нулю, так как в этом случае  $v_2 - v_1 = 0$ . Ньютон нашел, что для стекла  $e = 15/16$ , для железа  $5/9$  и т. д. Зная коэффициент  $e$ , можно подсчитать скорости движения шаров после удара и «потери» энергии, как это было сделано при полностью неупругом ударе двух тел в § 33.

### § 36. Потенциальная энергия

На тело, находящееся у поверхности Земли, все время действует сила тяготения, направленная к центру Земли. Следовательно, при изменении расстояния тела от поверхности Земли, — точнее, от ее центра, — сила тяготения, или сила тяжести, будет совершать работу.

Если какое-нибудь устройство поднимает тело вверх, то оно совершает работу. Наоборот, если тело свободно падает, его расстояние от земной поверхности уменьшается, сила тяготения совершает работу, которая в этом случае равна увеличению кинетической энергии тела. Тело, движущееся около Земли, перемещается в силовом поле тяготения (или тяжести) Земли. Перемещение тела в поле тяготения Земли, вообще говоря, всегда связано с работой сил тяготения: тело, перемещаясь из одной точки в другую, или требует затраты энергии, или может отдать энергию. Отсюда можно заключить, что перемещение тела связано с изменением энергии.

Для определения этой энергии необходимо подсчитать работу сил тяготения при перемещении тела из одной точки пространства в другую и установить зависимость этой работы от изменения положения тела относительно Земли.

Вначале рассмотрим простейший случай: тело массы  $m$  поднялось на высоту  $h$  под действием постоянной, направленной вверх силы  $F$ . Тогда работа действующей силы будет равна  $Fh$ . Приращение кинетической энергии тела подсчитаем на основании уравнения

$$F - F_t = m \frac{dv}{dt}, \quad (36.1)$$

где  $F_t = mg$  — сила тяготения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $v$  — скорость. Умножим обе части (36.1) на приращение пути  $dS$

и проинтегрируем от 0 до  $h$ , тогда <sup>1)</sup>

$$F \int_0^h dS - mg \int_0^h dS = m \int_0^h v dv,$$

или

$$Fh = mgh + \frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \quad (36.2)$$

где  $v_k$  — скорость в конце пути,  $v_0$  — скорость в начале его. Следовательно, работа силы  $F$  на расстоянии  $h$  равна изменению кинетической энергии  $\frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$  плюс работа силы тяжести на пути  $h$ , равная  $mgh$ . К такому же выводу мы приDEM и в более общем случае, когда внешняя сила изменяется с расстоянием по любому известному закону, только величину работы внешней силы  $F$  следует определять по формуле

$$\int_0^h F dh.$$

Если кинетическая энергия в начале пути  $\frac{mv_0^2}{2}$  равна кинетической энергии в конце пути  $\frac{mv_k^2}{2}$ , или  $v_0 = v_k$ , то работа внешней силы равна работе силы тяжести. Это справедливо и при  $v_0 = v_k = 0$ , следовательно, система, переносящая тело каким угодно образом прямолинейно вверх, совершил определенную работу  $mgh$ , которая зависит только от расстояния  $h$  и величины силы тяготения  $mg$ .

Теперь подсчитаем работу, которую нужно затратить для того, чтобы поднять тело на высоту  $h$  не по вертикальному пути, а по любому пути, конечная точка которого  $B$  лежит выше начальной точки  $A$  на расстоянии  $h$  (рис. 89). Определим работу силы  $F$ , направленной как-то вверх и меняющейся вдоль пути от точки  $A$  до точки  $B$ .

Работа внешней силы  $\int_A^B F dS$  будет равна  $mgh$  плюс изменение кинетической энергии.

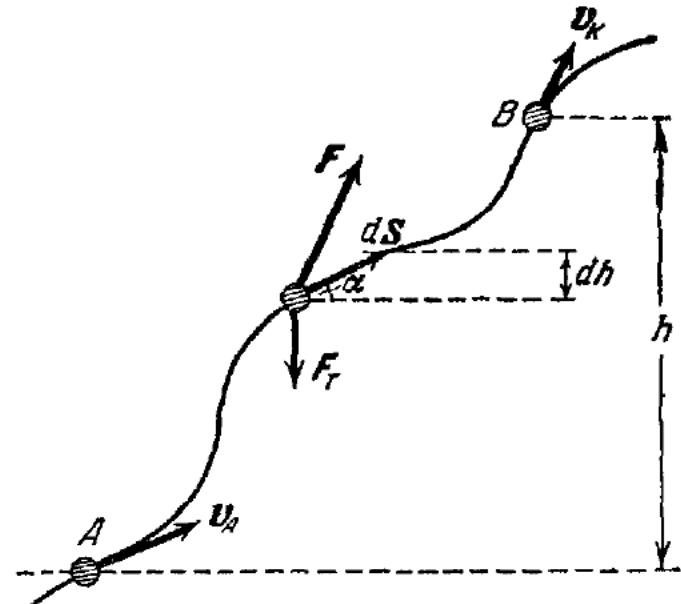


Рис. 89.

<sup>1)</sup> Принимая во внимание, что  $\frac{dS}{dt} = v$ .

Действительно, принимая во внимание обозначения рис. 89, напишем уравнение динамики в таком же виде, как и уравнение (36.1), и умножим его скалярно на  $dS$ ; получим

$$\mathbf{F} dS + \mathbf{F}_t dS = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dS, \quad (36.3)$$

или

$$\mathbf{F} dS = -\mathbf{F}_t dS + m\mathbf{v} d\mathbf{v} = -\mathbf{F}_t dS + d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Работа силы  $\mathbf{F}$  на участке  $AB$  равна интегралу от этого выражения:

$$\int_A^B \mathbf{F} dS = - \int_A^B \mathbf{F}_t dS + \frac{mv_K^2}{2} - \frac{mv_H^2}{2}. \quad (36.4)$$

Замечая, что  $\mathbf{F}_t dS = -mg dh$ , находим

$$\int_A^B \mathbf{F} dS = mg(h_B - h_A) + \frac{mv_K^2}{2} - \frac{mv_H^2}{2}, \quad (36.5)$$

где  $h_B - h_A = h$ .

Таким образом, доказано, что если кинетическая энергия в начале и в конце пути одинакова, например, если скорости в точках  $A$  и  $B$  равны нулю, то работа внешней силы равна работе силы тяжести при спуске с высоты  $h$ .

При перемещении тела массы  $m$  по *любому* пути из точки  $A$  в точку  $B$  (любую точку, которая лежит в горизонтальной плоскости, проходящей на высоте  $h$  над точкой  $A$ ) какая-то система тел должна затратить энергию, равную  $mgh$ . Наоборот, при перемещении тела массы  $m$  из точки  $B$  в любую точку  $A$ , лежащую в горизонтальной плоскости, расположенной ниже точки  $B$  на расстоянии  $h$ , тело (вернее, система тело — Земля) совершил работу, равную  $mgh$ , или отдаст энергию  $mgh$ .

Таким образом, перемещение тела в поле тяготения Земли связано с определенной затратой (или получением) энергии; величина этой энергии зависит только от высоты положения тела над горизонтом и от величины его массы и *не зависит от пути*, по которому тело переходит с одного уровня на другой. Значит, система тело — Земля обладает определенным запасом потенциальной энергии  $U$ , величина которой равна  $U = mgh + \text{const}$ . Потенциальную энергию можно определить с точностью до некоторой произвольной постоянной величины, которая равна потенциальной энергии при  $h = 0$ .

Потенциальная энергия тела в поле тяготения<sup>1)</sup> зависит от положения тела относительно Земли, а именно от *высоты* над по-

<sup>1)</sup> Более подробно о силах тяготения см. § 76.

верхностью Земли. Точнее, потенциальная энергия тяготения системы двух тел «Земля + тяжелое тело» зависит от *взаимного расположения* этих тел — от расстояния между центрами масс этих тел. Такое определение пригодно и в том случае, когда  $h$  велико, т. е. сравнимо с радиусом Земли, так как при таких расстояниях нельзя считать  $g$  величиной постоянной, ускорение силы тяготения будет уменьшаться с увеличением  $h$  и выражение для потенциальной энергии будет иметь другой вид (см. § 78).

Потенциальная энергия деформации упругого тела, например потенциальная энергия упругой пружины, также зависит от взаимного расположения отдельных частей этого тела.

В общем случае потенциальная энергия сил тяготения двух тел определяется равенством (36.5), но, сравнивая (36.4) и (36.5), лучше определить ее так:

$$U_B - U_A = mg(h_B - h_A) = - \int_A^B \mathbf{F}_t dS. \quad (36.6)$$

Или: работа сил тяготения (взаимодействия) двух тел с обратным знаком равна приращению потенциальной энергии.

Определение (36.6) справедливо для любых сил взаимодействия между двумя телами (частицами), если под величиной  $\mathbf{F}_t$  понимать силу взаимодействия. Но следует подчеркнуть, что такое определение имеет смысл только в том случае, когда работа  $\int_A^B \mathbf{F}_t dS$  не зависит от формы пути, соединяющего точки  $A$  и  $B$ . Только при этом условии система двух тел обладает потенциальной энергией.

Положительная работа внутренних сил (сил взаимодействия) происходит за счет уменьшения потенциальной энергии, и, наоборот, отрицательная работа этих сил означает увеличение потенциальной энергии системы.

Можно показать, что система материальных частиц (достаточно малых тел) обладает потенциальной энергией, если силы взаимодействия зависят только от расстояния между двумя частицами и направлены по линии, их соединяющей.

Пусть одна частица находится в начале вектора  $\mathbf{r}$ , а другая — в конце и первая действует на вторую с силой  $f(r)\mathbf{r}$ , а на первую частицу действует сила, противоположная по направлению.

Допустим, что первая частица поконится, а вторая перемещается из точки  $\mathbf{r}_A$  в точку  $\mathbf{r}_B$  по некоторому пути. Тогда, если работа

$$-\int_A^B f(r) \mathbf{r} dS$$

не зависит от вида пути, то она будет равна  $U_B - U_A$ . Произведение  $\mathbf{r} d\mathbf{S} = r dr$ , где  $dr$  — приращение модуля  $\mathbf{r}$  (рис. 90); поэтому интеграл

$$\int_A^B f(r) \mathbf{r} d\mathbf{S} = \int_A^B f(r) r dr \quad (36.7)$$

является только функцией  $r_A$  и  $r_B$ , т. е. зависит только от изменения расстояния между двумя частицами, он одинаков по любому

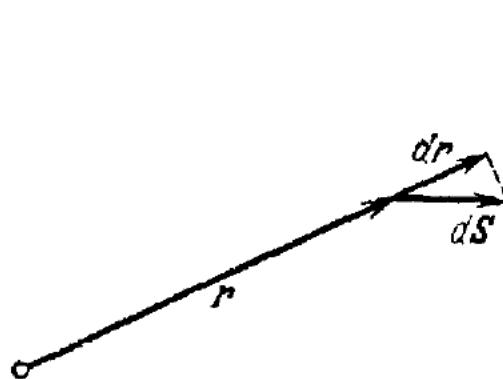


Рис. 90.

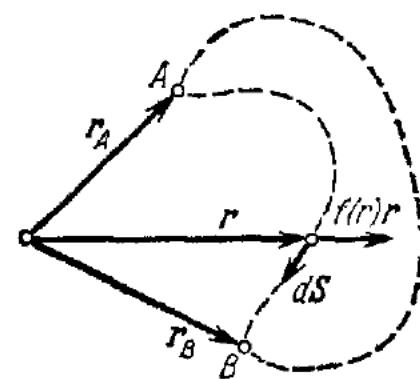


Рис. 91.

пути, соединяющему точки  $A$  и  $B$  (рис. 91). Очевидно, интеграл (36.7) равен нулю при  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$ . Когда известна функция  $f(r)$  и интеграл (36.7) можно вычислить, тогда, в соответствии с (36.6), он равен изменению потенциальной энергии двух частиц, или

$$-\int_A^B f(r) r dr = U_B - U_A. \quad (36.8)$$

Следовательно, система двух частиц обладает потенциальной энергией. Если сила  $f(r)r$  на больших расстояниях уменьшается и при  $r \rightarrow \infty$  достаточно быстро стремится к нулю, то потенциальную энергию на бесконечности  $U(\infty)$  обычно принимают равной нулю. Тогда потенциальная энергия двух частиц, находящихся на расстоянии  $r_1$ , по (36.8) равна

$$U(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f(r) r dr.$$

При притягивающих силах  $f < 0$ , и поэтому  $U_B > U_A$ , когда  $r_B > r_A$ . Потенциальная энергия возрастает с увеличением расстояния. Для отталкивающих сил  $f > 0$  и  $U_B < U_A$ , потенциальная энергия убывает с расстоянием.

Если на большом расстоянии действуют притягивающие силы, а на близком — отталкивающие, как часто бывает в физике, то потенциальная энергия двух частиц в зависимости от их расстояния имеет примерно такой вид, который показан на рис. 92. На участке

$0 < r < r_0$  частицы отталкиваются,  $f > 0$ , потенциальная энергия падает; при  $r = r_0$  сила взаимодействия равна нулю; далее, при  $r > r_0$ ,  $f < 0$  и потенциальная энергия возрастает. Все это можно проследить, учитывая, что

$$\frac{dU}{dr} = -f(r)r. \quad (36.9)$$

Это важное равенство следует из (36.8).

Система, состоящая из  $n$  взаимодействующих частиц, обладает определенной потенциальной энергией, если каждая пара частиц взаимодействует по закону  $f(r)r$ . Выберем одну какую-то  $i$ -ю частицу и обозначим потенциальную энергию взаимодействия с  $k$ -й частицей через  $U_{ik}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|)$ . Потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -й частицы со всеми остальными будет равна

$$U_i = \sum_{k \neq i}^n U_{ik}$$

(суммировать нужно по всем  $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ). Потенциальная энергия всех частиц, очевидно, равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n U_{ik}. \quad (36.10)$$

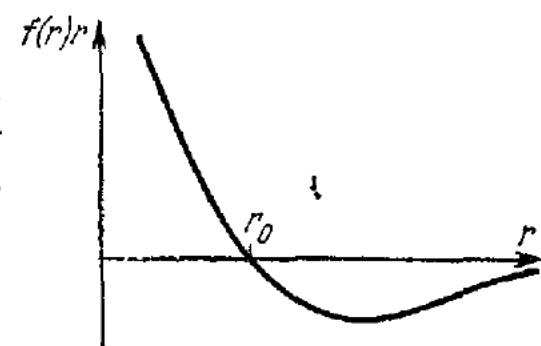
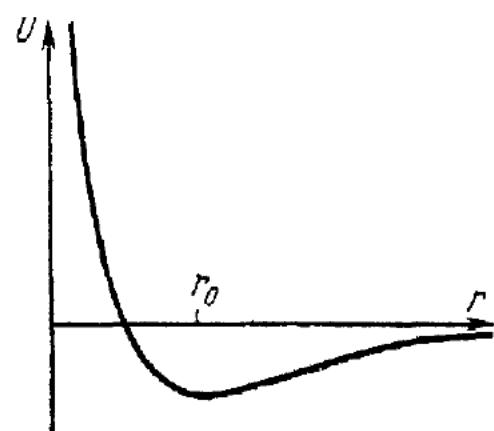


Рис. 92.

Половина перед знаком суммы стоит потому, что энергия каждой пары частиц учитывается в сумме два раза:  $U_{ik} = U_{ki}$ .

Потенциальная энергия всей системы взаимодействующих частиц  $U$  зависит от взаимного расположения частиц.

### § 37. Изменение энергии тела в поле сил тяготения. Закон сохранения энергии

Допустим, что на тело не действуют никакие силы, кроме сил тяготения; тогда, очевидно, ускорение тела всегда будет равно  $g$  и направлено вниз<sup>1)</sup>.

Движение тела под действием только сил тяготения можно назвать *свободным движением в поле тяготения Земли*. Кинетическая

<sup>1)</sup>  $g$  можно практически считать постоянным, если высота тела над горизонтом  $h \ll R$ , где  $R$  — радиус Земли.

Энергия этого тела изменяется только за счет изменения потенциальной энергии сил тяжести, и наоборот, так что сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, или: механическая энергия остается *постоянной*.

Математическое выражение закона сохранения энергии можно получить на основании (36.5), если внешнюю силу положить равной нулю,  $F = 0$ . Действительно,

$$mgh + \frac{mv_k^2}{2} = \frac{mv_n^2}{2}, \quad (37.1)$$

где  $h$  — изменение высоты, которое можно обозначить так:  $h = h_n - h_k$ ; тогда (37.1) запишем таким образом:

$$mgh_k + \frac{mv_k^2}{2} = mgh_n + \frac{mv_n^2}{2} = E_0. \quad (37.2)$$

Формула (37.2) дает математическое выражение закона сохранения механической энергии при движении тела в поле тяготения. Сумма кинетической и потенциальной энергий в *любой момент* остается постоянной, равной  $E_0$ . Отметим, что этот закон справедлив только в тех случаях, когда тело движется исключительно под действием сил тяжести. При наличии других сил (сил сопротивления и др.) механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) в общем случае не остается постоянной.

Закон сохранения механической энергии при движении тела в поле тяготения был известен еще Галилею. Он демонстрировал справедливость этого

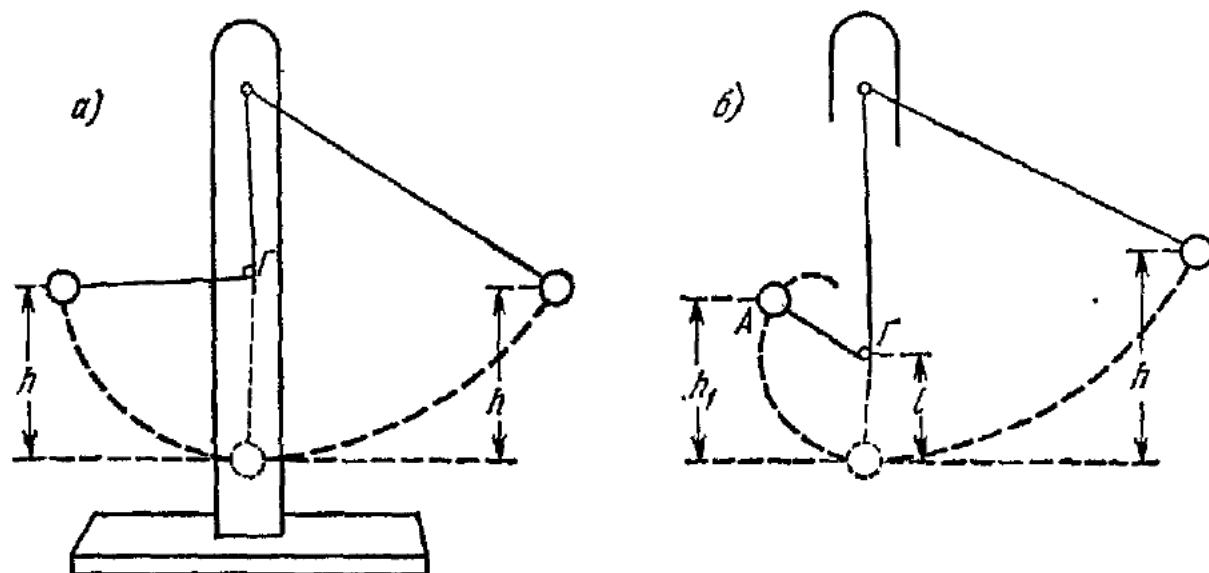


Рис. 93.

закона своими известными опытами с маятником. Эти опыты теперь часто показывают в школах (маятник Галилея).

Маятник представляет собой шарик на нити (рис. 93, а). Шарик отклоняют в сторону, причем он поднимается на некоторую высоту  $h$ ; над положением равновесия по линии отвеса вбит гвоздь  $\Gamma$ , и, когда шарик отпускают, нить в некоторый момент натыкается на гвоздь  $\Gamma$ , и маятник продолжает свое движение дальше, врачаясь вокруг точки  $\Gamma$ . Высота поднятия шарика  $h$  при откло-

нениях в обе стороны примерно одинакова; если бы не было сил сопротивления, то она была бы точно одинакова<sup>1)</sup>. Шарик маятника остановится в тот момент, когда кинетическая энергия его будет равна нулю; он будет находиться при этом на высоте  $h$ .

Интересно отметить, что если перенести гвоздик  $\Gamma$  вниз или достаточно увеличить высоту первоначального подъема  $h$ , то можно найти такое положение, при котором маятник не поднимется до той же высоты  $h$ . Это объясняется тем, что шарик подвешен на гибкой нити. Легко убедиться, что при  $h > l$ , где  $l$  — высота гвоздя над нижним положением шарика, шарик поднимется на высоту  $h_1$ , меньшую, чем  $h$ .

При движении шарика по восходящей части дуги (рис. 93, б) до остановки шарика наступает такой момент, при котором натяжение нити обращается в нуль. Далее шарик маятника сойдет с окружности радиуса  $l$  и пройдет свою наивысшую точку с некоторой горизонтальной скоростью. Кинетическая энергия в наивысшей точке не будет равна нулю, и поэтому высота поднятия должна быть менее  $h$ .

Работа силы определяет величину энергии, переходящей от одного тела к другому. Энергия есть единая количественная мера различных форм движения материи. Движение материи превращается из одной формы в другую и никогда не исчезает.

Мы подробно рассмотрели *энергию механической формы движения материи*, или механическую энергию, которая в свою очередь бывает кинетической и потенциальной. *Кинетическая энергия* — энергия движения тела — зависит от скорости движения и массы тела; *потенциальная энергия* — энергия взаимного расположения тел или частей одного тела, — зависит от координат тел, от конфигурации системы.

Но, как мы уже знаем, например, при неупругом ударе механическая энергия переходит в тепловую энергию; это означает, что энергия тепла, выделившегося при ударе, равна «потерям» механической энергии.

Энергия при физических и химических процессах переходит от одного тела (или системы тел) к другому телу (или системе тел): она ни при каких процессах не исчезает и не создается вновь. Движение материи может менять свою форму, но *величина энергии при всех изменениях формы движения материи остается постоянной*. Это есть *закон сохранения энергии* — один из основных законов природы.

<sup>1)</sup> Очевидно, что сила натяжения нити во время движения шарика совершает работу, равную нулю, поэтому ее действие можно не учитывать.

## Г л а в а V

### СИЛЫ ТРЕНИЯ

#### § 38. Различные виды сил трения

Во всех механических явлениях имеют место силы трения, действие которых почти всегда связано с переходом энергии из одного вида в другой; обычно механическая энергия вследствие действия сил трения переходит в тепловую. Силы трения по своему действию ничем не отличаются от остальных сил: тяготения, давления тел, деформаций и т. д., но есть особенности этого рода сил, которые мы рассмотрим на примерах.

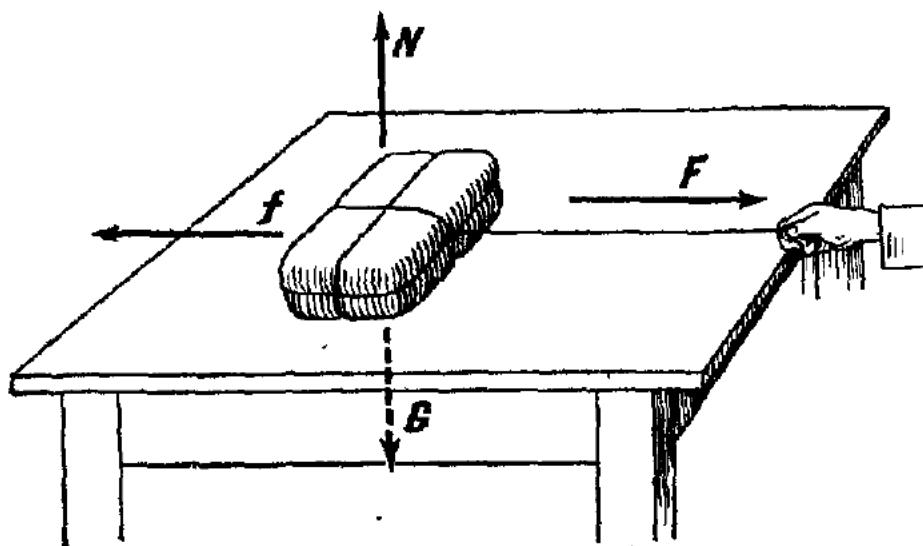


Рис. 94.

Пусть какое-нибудь тело скользит после толчка по ровной, гладкой горизонтальной поверхности, например дощечка по льду. Дощечка с течением времени замедляет свое движение, останавливается. Скорость дощечки уменьшается, ускорение ее направлено против скорости. Какие силы сообщают ускорение дощечке? — Силы трения о лед и о воздух, направленные против скорости движения.

Другой подобный пример: тело лежит на столе (рис. 94), мы начинаем тянуть его вдоль крышки стола за бечевку, но тело не сдвигается. На тело действует сила натяжения бечевки  $F$ , а оно

остается в покое; следовательно, к телу приложена сила со стороны стола, равная и противоположная  $F$ , — это и есть сила трения тела о стол (сила  $f$ ). Сила тяжести  $G$  и сила давления стола  $N$  вертикальны, они взаимно уравновешиваются и не влияют на величину горизонтального ускорения.

Физический характер сил трения, указанных в первом и втором примерах, различен: в первом случае сила трения возникает при движении тела, или, точнее, вследствие движения тела; во втором — сила трения возникает при покое, вследствие действия внешней силы. Сила трения при покое так и называется *силой трения покоя*.

При движении дощечки сила трения направлена против скорости движения, действие ее связано с переходом кинетической энергии в тепло; так как скорость определяет направление смещения тела, то смещение и сила направлены в разные стороны и, следовательно, работа силы трения *отрицательна*. Значит, энергия переходит от тела, на которое действует сила трения. Кинетическая энергия уменьшается всегда, когда на тело действует только сила трения.

В самом деле, для тела массы  $m$ , движущегося со скоростью  $v$ , по второму закону динамики

$$m \frac{dv}{dt} = -f_t,$$

где  $f_t$  — сила трения; умножая на  $dS$ , получаем аналогично формуле (32.4):

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -f_t dS, \quad (38.1)$$

или: уменьшение кинетической энергии равно работе силы трения, что можно было бы сразу написать на основании закона сохранения энергии.

Исследования движущегося тела и окружающих его тел показывают, что кинетическая энергия переходит в тепловую форму энергии.

При трении покоя нет движения тел, и поэтому здесь нет работы, нет перехода энергии из одного вида в другой. Величина силы трения при движении зависит от свойств и формы движущегося тела, от свойств среды и окружающих тел и, кроме того, от скорости движения.

Различают два вида трения: 1) трение при сухих поверхностях твердых тел и 2) трение о жидкую или газообразную вязкую среду. Первый вид сокращенно называют *сухим трением*, второй — *вязким трением*.

*При сухом трении может возникнуть сила трения покоя, при вязком — силы трения покоя нет.* При движении тел, соприкасающихся смазанными поверхностями, так же как и при движении

тела в вязкой жидкой среде, возникает сила трения, причем она возникает *только* в состоянии движения. В состоянии покоя сила трения в этом случае равна нулю, так, например, тело, плавающее в жидкости, под действием любой горизонтальной силы (как

угодно малой) начнет движение, это легко проверить опытом (рис. 95).

Если мы будем наблюдать движение тела, плавающего в жидкости под действием постоянной горизонтальной силы (см. рис. 95), то скоро убедимся в том, что через некоторое время движение станет почти равномерным. Это означает, что во время движения возникла сила трения (сила сопротивления), которая возрастает с увеличением скорости до величины, равной действующей силе, и, следовательно, уравновешивает ее.

Силы вязкого трения (силы сопротивления) имеют место только при движении, и всегда наличие их связано с переходом механической энергии в тепловую.

### § 39. Вязкое трение

Силы вязкого трения при движении тела в среде (или силы сопротивления среды) зависят от формы тела, скорости движения и некоторых физических свойств среды, а именно вязкости и плотности. Чем больше вязкость среды, тем больше сила трения при прочих одинаковых условиях.

Вязкость среды обычно определяют опытами, в которых измеряют силу трения некоторых тел при определенных условиях. Еще Ньютона установил опытным путем основную закономерность трения в среде при скольжении друг относительно друга двух близких параллельных поверхностей, пространство между которыми заполнено определенной жидкостью или газом (рис. 96, а). Если под действием внешней силы  $F$  поверхность I площадью  $S$  движется равномерно со скоростью  $v$  относительно параллельной ей покоящейся поверхности II, то сила трения  $f_t$ , приложенная к поверхности I, равна и противоположна силе  $F$ .

На основании измерений скорости  $v$  и силы  $F$  Ньютон нашел следующую закономерность

$$f_t = \mu S \frac{v}{h}, \quad (39.1)$$

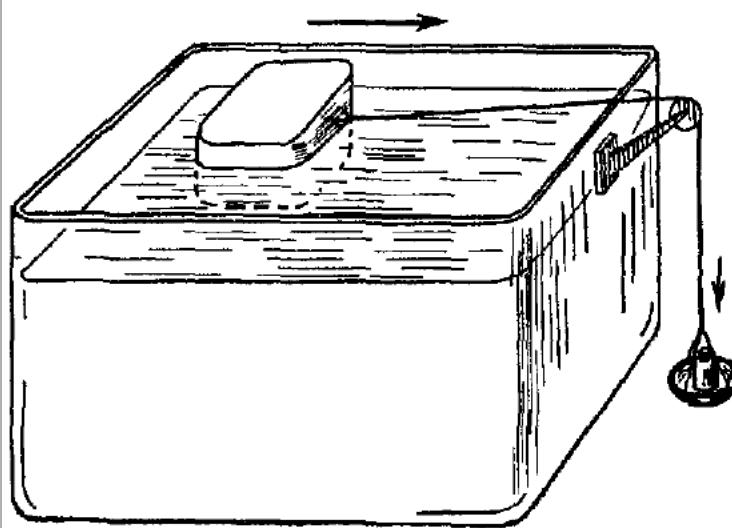


Рис. 95.

где  $h$  — расстояние между поверхностями, а  $\mu$  — постоянный коэффициент (коэффициент вязкости), зависящий только от свойств среды, заполняющей пространство между поверхностями. Этот закон справедлив, если  $h \ll \sqrt{S}$ , т. е. если расстояние между скользящими поверхностями очень мало по сравнению с их линейными

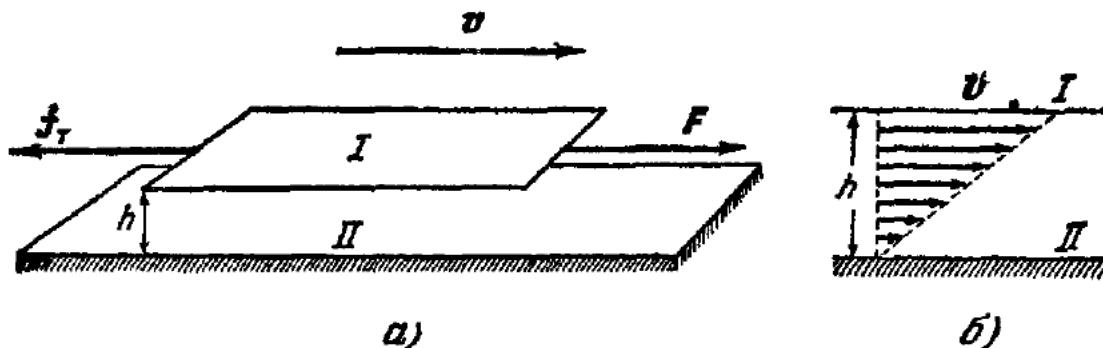


Рис. 96

размерами. Подробные исследования показывают, что частицы жидкости или газа, прилегающие к первой поверхности, движутся со скоростью  $v$  (увлекаются поверхностью), а частицы, прилегающие к поверхности  $II$ , находятся в покое, причем скорость частиц среды линейно (пропорционально) нарастает с увеличением расстояния от поверхности  $II$  (рис. 96, б).

Представим себе, что жидкость между поверхностями разбита на параллельные им тонкие слои. Каждый слой движется равномерно, причем верхний слой тянет лежащий под ним слой с силой  $f_t$  вперед, нижний слой тянет соседний верхний с силой, равной  $f_t$ , назад. Таким образом, сила трения  $f_t$  передается от одного слоя жидкости к другому, от одной поверхности к другой. На каждый слой действуют две равные и противоположные силы, поэтому и движение его равномерное.

Коэффициент вязкости среды  $\mu$ , размерность которого в СИ —  $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$ , а в системе СГС —  $\text{г}/\text{см} \cdot \text{с}$ , определяется экспериментально.

Для воздуха коэффициент  $\mu$  можно определить при помощи прибора, показанного на рис. 97. Диск  $A$  вращается с известной скоростью, а пластиинки  $B$ , охватывающие диск, укреплены на пружинных весах, сила трения, действующая на пластиинки, измеряется по отклонению стрелки  $C$ , зная площадь пластиинок  $B$ , расстояние между диском и пластиинками, скорость вращения диска и его размеры, можно определить коэффициент  $\mu$ . Изменяя расстояние между диском и пластиинками и скорость диска, можно проверить соотношение Ньютона для воздуха.

Заметим, что таким образом можно определять коэффициент вязкости среды только в том случае, когда известно, что скорости всех частиц среды остаются

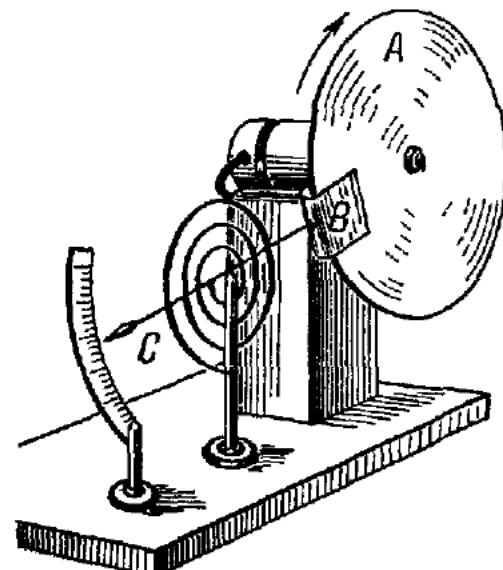


Рис. 97.

все время параллельными поверхностями. В действительности это условие не будет соблюдаться при больших скоростях; движение частиц при больших скоростях уже не будет *слоистым*, или *ламинарным*, как это имеет место при малой скорости. Поэтому только до определенной скорости вращения диска формула Ньютона (39.1) будет верна.

Коэффициент вязкости жидкостей и газов определяют также по скорости истечения их через трубку, длина и диаметр которой известны. Найдено, что количество жидкости (или газа), прошедшей через трубку за определенное время (расход  $Q$ ) при определенной разности давлений, обратно пропорционально коэффициенту вязкости (подробнее см. § 111).

### Значение $\mu$ для некоторых веществ в г/см · с

Воздух . . . . .	0,00018	при 16° С
Вода . . . . .	0,0114	» 15° С
Глицерин . . . . .	13,93	» 18° С
Бензин . . . . .	0,0053	» 18° С
Масло минеральное . . . . .	0,833	» 50° С

Есть еще приборы, в которых вязкость среды определяется по скорости небольшого шарика, движущегося в этой среде. При небольшой скорости движения шарика теоретический расчет дает такую формулу силы трения:

$$f_t = 6\pi\mu av, \quad (39.2)$$

где  $a$  — радиус шарика. Эта формула подтверждается опытом. Однако удобнее и проще определять не саму силу трения, а время падения шарика в вязкой среде.

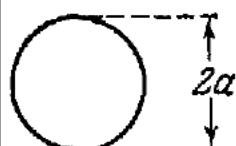
### § 40. Падение шарика в вязкой среде

На шарик, падающий в вязкой среде, по вертикали действуют три силы (рис. 98): сила тяготения  $\rho Vg$ , сила гидростатического выталкивания  $\rho_{ж}Vg$  и сила трения  $f_t = 6\pi\mu av$ , где

через  $V$  обозначен объем шарика, а  $\rho$  и  $\rho_{ж}$  — плотности материала шарика и жидкости.

Тогда в проекции на вертикаль

$$m \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_{ж}) Vg - 6\pi\mu av, \quad (40.1)$$



или, принимая во внимание, что объем шарика  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ , масса его  $m = \rho V$ , получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho - \rho_{ж}}{\rho} g - \frac{9}{2a^2} \frac{\mu}{\rho} v. \quad (40.2)$$

Рис. 98.

Ускорение уменьшается с увеличением скорости  $v$ . В начальный момент  $v = 0$ , а затем скорость начинает увеличиваться, ускорение будет со временем уменьшаться и рост скорости будет замедляться, но скорость будет все время расти. Однако из уравнения (40.2) видно, что скорость не может быть больше величины

$$v_0 = \frac{\rho - \rho_{ж}}{\mu} \frac{2a^2 g}{9}. \quad (40.3)$$

При  $v = v_0$  имеем  $\frac{dv}{dt} = 0$ , рост скорости не может продолжаться далее.

Уравнение (40.2) можно переписать так:

$$\beta \frac{dv}{dt} = v_0 - v, \quad \text{где } \beta = \frac{2a^2\rho}{9\mu}. \quad (40.4)$$

Отсюда

$$\beta \frac{dv}{v - v_0} = -dt,$$

или, интегрируя, получаем

$$\beta \ln(v - v_0) = -t + C, \quad v - v_0 = A_0 e^{-t/\beta},$$

где  $A_0$  — постоянная величина. Если при  $t = 0$  скорость  $v = 0$ , то  $A_0 = -v_0$  и

$$v = v_0 (1 - e^{-t/\beta}). \quad (40.5)$$

Зависимость  $v$  от  $t/\beta$  показана на рис. 99. С течением времени  $t$  величина скорости  $v$  приближается асимптотически к значению  $v_0$ .

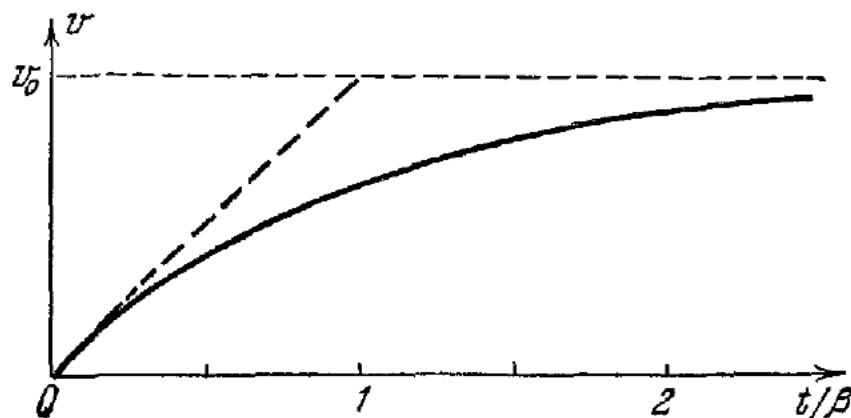


Рис. 99.

Движение шарика будет сложным: только в начальный момент, при  $t \ll \beta$ , оно будет ускоренным, далее ускорение будет постепенно уменьшаться, и в конце концов, при  $t \gg \beta$ , движение станет почти равномерным. Как скоро движение станет почти равномерным и какой путь при этом пройдет шарик? Все это можно определить по формуле (40.5). Чем больше  $\mu$  и меньше радиус шарика  $a$ , тем быстрей наступит почти равномерное движение.

Движение тела на начальном участке, когда скорость  $v$  мала, происходит равноускоренно, с ускорением, почти равным ускорению силы тяжести. На графике (см. рис. 99) видно, что скорость растет в начале движения примерно пропорционально времени.

Рассмотрим пример. Падение стального шарика радиусом 2,5 см в воздухе и падение стального шарика радиусом 0,1 см в глицерине. В первом случае величина  $\beta \approx 6,08 \cdot 10^4$  с,

или около 16 ч, так как плотность стали  $\rho = 7,88 \text{ г/см}^3$ , а коэффициент вязкости воздуха  $\mu = 0,00018 \text{ г/см}\cdot\text{с}$ . Во втором случае  $\beta \approx 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , так как  $\mu$  для глицерина 13,93 г/см·с.

Падение стального шарика в воздухе за несколько первых секунд,  $t \ll 6 \cdot 10^4 \text{ с}$ , будет с большой точностью *равноускоренным движением*<sup>1)</sup> с ускорением  $g$ . Падение шарика в воздухе будет происходить по тем же законам, как и в безвоздушном пространстве, силами трения можно пренебречь. Такая картина имела место в известных опытах Галилея, в которых им было экспериментально доказано, что падение тел в пустоте должно происходить с постоянным ускорением, и которые послужили основой для вывода закона инерции.

Движение (падение) маленького шарика в глицерине через несколько миллисекунд становится почти *равномерным*, шарик падает вниз без ускорения. Скорость движения по формуле (40.3) будет равна

$$v_0 = \frac{\rho - \rho_{\infty}}{9\mu} 2a^2 g = \frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho} \beta g = \frac{7,88 - 1}{7,88} \cdot 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 981 \approx 1,06 \text{ см/с.}$$

Это — равномерное движение, здесь сила тяжести полностью уравновешена силой трения и движение происходит по инерции. Наблю-

дая это движение и не учитывая сил вязкости, можно сделать ложный вывод: скорость пропорциональна действующей силе — вывод, согласный с мнением Аристотеля.

**Замечание.** Если сила сопротивления не пропорциональна скорости, а будет более сложно зависеть от скорости, но при этом всегда будет увеличиваться с ростом скорости, то при падении тел в такой среде движение их с течением времени будет также стремиться к равномерному движению. Так будет, например, при падении парашютиста со сложенным или с рас-

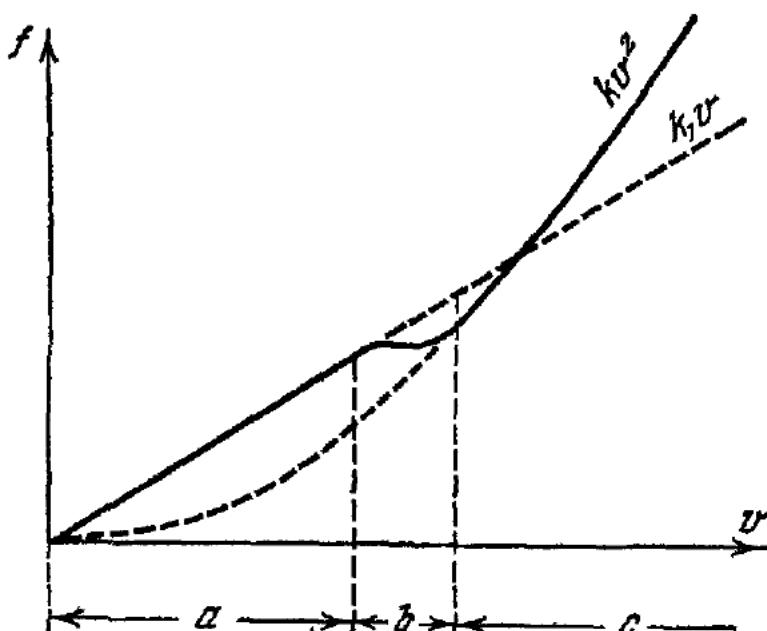


Рис. 100.

крытым парашютом. Разница в этих двух случаях будет только в том, что с раскрытым парашютом равномерное движение будет происходить со скоростью 5—6 м/с, а при падении со сложенным парашютом (при затяжном прыжке) равномерное движение наступит при скорости значительно большей, примерно равной 60 м/с.

<sup>1)</sup> Следует отметить, что для данного шарика с увеличением его скорости выше 10 м/с принятый нами закон зависимости силы трения от скорости не совсем справедлив. Однако уточнение расчета для первых трех секунд не меняет этого вывода.

Зависимость силы сопротивления (или силы трения) от скорости изменяется с увеличением скорости. При большой скорости характер обтекания меняется и сила сопротивления растет уже не пропорционально скорости движения. В большинстве случаев, начиная с некоторого значения скорости, сила сопротивления возрастает пропорционально квадрату скорости. Поэтому кривая, показывающая зависимость силы сопротивления шара  $f$  от скорости  $v$ , имеет вид, показанный на рис. 100. В области малых значений скорости (область  $a$ ) сила сопротивления  $f$  растет пропорционально скорости движения, как мы указали раньше, по закону  $f_t = k_1 v$ ; в области больших значений скорости (область  $c$ ) сила трения растет пропорционально квадрату скорости по закону  $f_t = k v^2$ . В некоторой зоне (область  $b$ ) один закон переходит в другой.

Такое принципиальное изменение закона зависимости сил трения происходит вследствие изменения картины обтекания: в области  $a$  имеет место плавное обтекание всего тела без «отрыва» потока от тела (вернее, с небольшим отрывом потока), в области  $c$  обтекание происходит со значительным отрывом потока среды, причем вихреобразование в зоне отрыва потока играет решающую роль (подробнее см. § 112).

## § 41. Сухое трение

Как уже было указано (см. § 38), достаточно малая горизонтальная сила, приложенная к телу, лежащему на ровной горизонтальной поверхности, не сдвинет его с места вследствие того, что возникает сила трения покоя  $f$ , равная и противоположная действующей силе  $F$  (см. рис. 94). Чем определяется сила трения покоя? Она определяется действующей силой  $F$ ; изменяя натяжение бечевки, мы изменяем силу трения. Увеличивая натяжение, мы тем самым увеличиваем силу трения; изменяя направление силы  $F$ , мы изменяем направление силы трения.

Но при постепенном увеличении действующей силы  $F$  у нас начнется движение. Простые опыты показывают, что тело будет иметь ускорение, если сила  $F$  будет больше некоторого определенного значения  $f_0$ . Следовательно, сила трения покоя может принимать любые значения от нуля до  $f_0$ , или сила трения покоя имеет максимальное значение  $f_0$ . Если  $F > f_0$ , то тело имеет некоторое ускорение и может двигаться; если  $F < f_0$ , то ускорение тела равно нулю и тело покоятся, сила трения равна  $F$ .

Чем же определяется абсолютная величина максимальной силы трения покоя? Физическими свойствами тел, поверхности которых соприкасаются, состоянием поверхностей (при шероховатых поверхностях максимальная сила трения покоя больше, чем при гладких) и величиной силы давления, прижимающего одно тело к другому.

Допустим, коробка лежит на столе. Тогда при равновесии давление коробки на стол  $N$  равно силе тяжести коробки  $P$ . Опыт показывает, что максимальная сила трения  $f_0$  равна

$$f_0 = \mu N, \quad (41.1)$$

где  $\mu$  — безразмерный коэффициент, коэффициент силы трения покоя, зависящий только от свойств соприкасающихся поверхностей.

стей. (Обычно здесь подразумевают коэффициент «максимальной силы трения покоя».) Выражение (41.1) носит название *закона Амонтона*, который установил его в 1699 г. опытным путем.

Величину коэффициента  $\mu$  определяют из различных опытов, например из опытов со скольжением тела по наклонной плоскости.

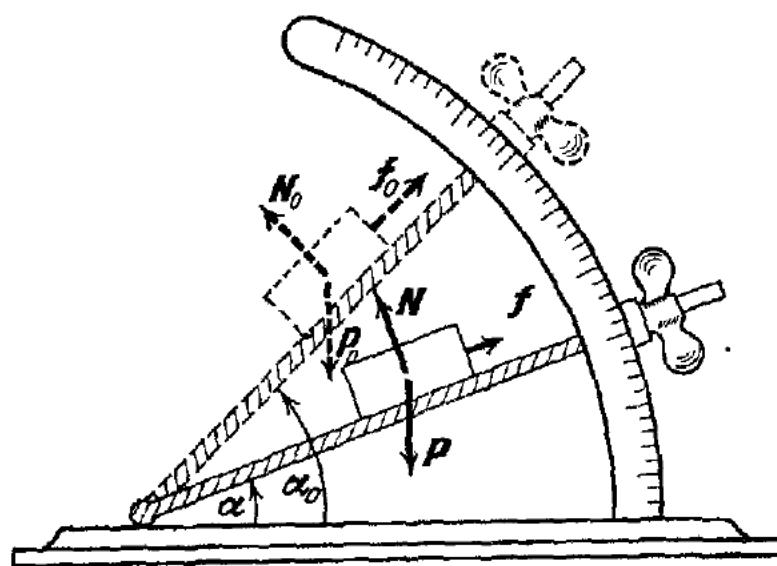


Рис. 101.

его значении  $\alpha_0$  начнется скольжение тела. Сумма сил  $P_0$ ,  $N_0$  и  $f_0$  равна нулю. Угол между  $P_0$  и  $N_0$  равен  $180^\circ - \alpha_0$ , следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{f_0}{N_0}. \quad (41.3)$$

Вспоминая, что  $f_0 = \mu N_0$ , получаем:  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \mu$  — коэффициент максимальной силы трения покоя равен тангенсу угла, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Коэффициенты силы трения  $\mu$  для некоторых пар сухих гладких трущихся поверхностей имеют следующие значения:

Сталь по стали . . . . .	0,15
Металл по дубу (вдоль волокна) . . . . .	0,62
Кожа по дубу . . . . .	0,61
Кирпич по кирпичу . . . . .	0,5—0,73

Удовлетворительной теории, объясняющей законы сил трения сухих поверхностей, еще не существует. Очень грубо схематизируя явление, можно представить себе картину возникновения сил трения. На рис. 102 показан в увеличенном виде разрез поверхности соприкосновения двух твердых тел. Поверхность тела не представляет идеальной ровной поверхности, на ней всегда имеются некоторые неровности, выступы, расположенные более или менее равномерно и имеющие в определенных пределах различную величину и форму. При соприкосновении двух тел эти выступы и неровности как-то деформируются, причем деформации зависят от местного давления (и, конечно, от среднего давления по площади соприкосновения) и поэтому могут иметь как упругий, так и неупругий характер. Сближение двух тел, проникновение выступов одного тела во впадины другого, очевидно, будет зависеть от силы, прижимающей друг к другу оба тела.

В этих опытах определяют угол наклона плоскости, при котором начинается скольжение тела по плоскости. Пусть на наклонной плоскости лежит тело (рис. 101), удерживаемое силой трения. Очевидно, что сила трения  $f$ , поскольку она удерживает тело от соскальзывания вниз, равна

$$f = P \sin \alpha. \quad (41.2)$$

Теперь будем увеличивать угол  $\alpha$ , и при некотором

Во время покоя, когда возникает сила трения покоя, при  $F < f_0$ , касательные горизонтальные составляющие сил, возникающих между выступами обоих тел, уравновешиваются действующей силой и тем самым «создают» силу трения. На рис. 102 схематически показано возникновение сил трения покоя; если к телу II приложена сила, то в областях, прилегающих к точкам  $a, b, c$ , возникают касательные силы  $f_a, f_b, f_c$  — силы, уравновешивающие внешнюю силу. (Для ясности на рисунке силы  $f_a, f_b, f_c$  показаны сверху.)

Во время движения, при  $F > f_0$ , неровности обоих тел также зацепляются, но, кроме того, и ударяют друг о друга, и силы взаимодействия, возникающие при ударах, в сумме дают силу трения движения при скольжении двух поверхностей твердых тел. Силы при ударах выступов будут вызывать их колебания в различных направлениях, которые будут распространяться в трущихся телах. Следует полагать, что в этом случае важное значение имеют и неупругие деформации при ударах выступов и неровностей поверхностей соприкосновения.

Нарисованная нами картина очень груба и приближенно описывает сложную действительную картину. Но можно полагать, что хаотические молекулярные неоднородности на поверхности тела играют такую же роль, как выступы и неровности поверхности. Касательные силы, возникающие при соприкосновении двух идеально гладких поверхностей, имеющих молекулярные неоднородности, будут играть такую же роль, как и силы взаимодействия выступов.

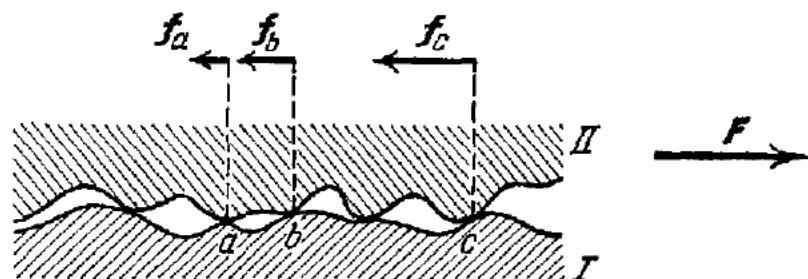


Рис. 102.

## § 42. Сила трения скольжения

Пусть тело лежит на горизонтальной поверхности. Когда горизонтальная сила, действующая на тело, превышает силу трения покоя ( $F > \mu N$ ), тогда ускорение тела будет отлично от нуля и наступит скольжение. Скорость тела будет возрастать. Как будет изменяться сила трения сухих поверхностей с увеличением скорости скольжения?

Вообще сила трения при скольжении будет вначале падать, а затем возрастать с увеличением скорости. В некоторых случаях зависимость силы трения от скорости будет такой, как показано на рис. 103, а. При скорости  $v = 0$ , т. е. в покое, возможно любое значение силы трения от  $-f_0$  до  $f_0$ . Далее, с увеличением скорости сила трения на некотором участке изменения скорости остается постоянной, а затем медленно падает, достигает минимума, после которого начинается подъем. Для различных пар соприкасающихся поверхностей характер зависимости силы трения скольжения от скорости совершенно различен.

При достаточно малых скоростях скольжения силу трения сухих металлических поверхностей можно считать постоянной, не зависящей от скорости и равной силе трения покоя. Как показывает опыт, это положение оправдывается с достаточной степенью

точности. В этом случае график зависимости силы трения от скорости имеет вид, показанный на рис. 103, б; при скорости  $v = 0$  сила трения может принимать любые значения от  $-f_0$  до  $f_0$ .

Этот закон зависимости силы трения скольжения от скорости носит название *закона Кулона*. Закон Кулона применим и в тех случаях, когда рассматривается сила трения металлических поверхностей об однородную деревянную поверхность, о кожу и т. п. В ограниченном диапазоне изменения скорости этот закон приближенно справедлив для многих пар трущихся поверхностей.

Как величина силы трения покоя  $f_0$ , так и величина силы трения скольжения зависят от силы, прижимающей тело к поверхности

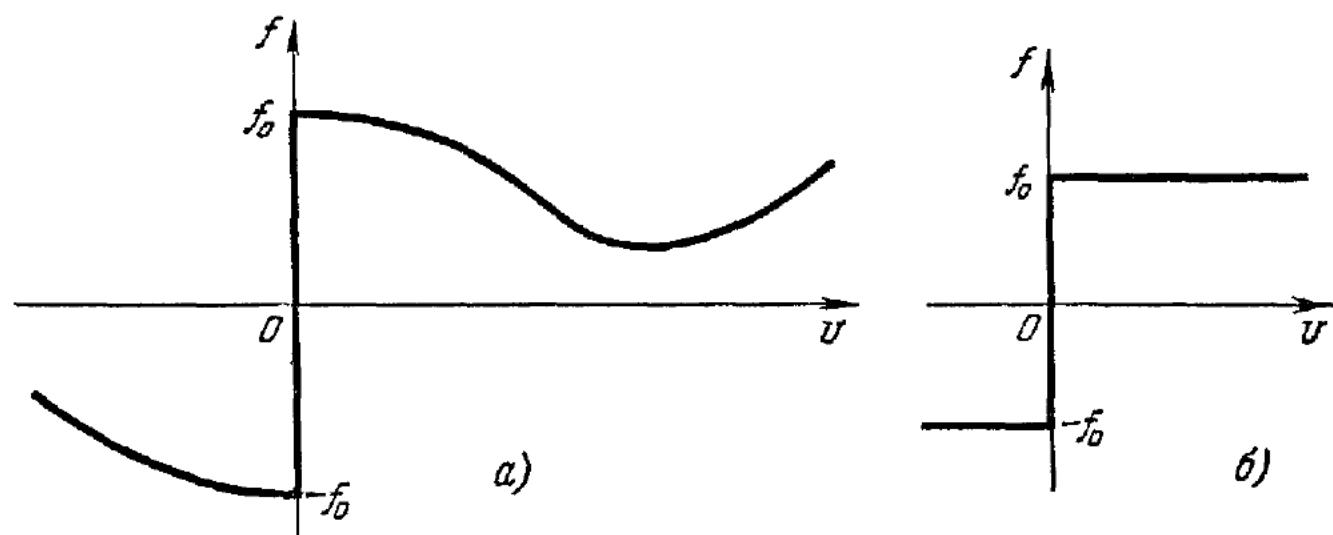


Рис. 103.

скольжения. Обычно сила трения скольжения, так же как и сила трения покоя, пропорциональна силе нормального давления.

Заметим, что данные относительно сил трения скольжения очень приближенны, и часто можно отметить случаи, при которых результаты одних измерений противоречат результатам других. Это в значительной степени объясняется не только механической отделкой трущихся поверхностей, но и чистотой их: загрязнение различного рода оказывается на величине силы трения скольжения, причем существенное значение имеет и род загрязнения. Влажные, загрязненные поверхности, на которых имеются ничтожные следы масла и т. д., имеют совершенно иной характер зависимости сил трения от скорости и иные значения  $f_0$ , чем те же поверхности, очищенные определенным образом.

Трение двух смазанных (маслом, водой и т. п.) поверхностей в большинстве случаев при достаточной смазке имеет характер вязкого трения. Действительно, при смазке между трущимися поверхностями имеется непрерывный слой жидкости. Частицы смазки, прилегающие к телу, прилипают к нему, и их можно считать неподвижными относительно тела; скорость движения жидкости изменяется по линейному закону поперек всего слоя, так что сила

трения здесь определяется величиной коэффициента вязкости  $\mu$  смазки, площадью труящихся поверхностей и толщиной смазывающего слоя. Толщина смазывающего слоя зависит как от рода смазки, так и от давления друг на друга соприкасающихся и скользящих тел.

Гидродинамическая теория смазки была разработана в классических теоретических и экспериментальных исследованиях Н. П. Петрова<sup>1)</sup>.

В технике важное значение имеют еще *силы трения качения* и *силы трения сцепления при качении* без скольжения или со скольжением. Этот вопрос мы рассмотрим в §§ 73 и 75, после того как познакомимся с динамикой вращающегося тела.

Необходимо отметить, что силы трения покоя, а иногда и силы трения скольжения имеют принципиальное значение при передаче движения от одного тела к другому. Действительно, человек передвигается (шагает) с одного места на другое вследствие сил трения, возникающих между подошвой ног и почвой. Пассажиры, идя в вагоне, и грузы, лежащие на полу и полках вагона, получают ускорение при движении поезда под действием сил трения покоя, возникающих между ними и вагоном. Может быть, лучше было бы называть эти силы трения покоя *силами трения сцепления*. В технике часто применяется фрикционная передача энергии от одной машины к другой, например ременная передача с одного шкива на другой; такая передача возможна только вследствие сил трения сцепления между ремнем и шкивом; другой пример — фрикционное соединение мотора и ведущего вала в автомобиле, схема которого показана на рис. 104.

Вообще, очень трудно представить себе передачу движения и усилий от одного тела к другому при отсутствии сил трения. Многие обычные способы передвижения были бы совершенно немыслимы при отсутствии сил трения.

При решении задач, в которых важную роль играют силы сухого трения покоя и скольжения, поначалу возникают затруднения. Поэтому разберем подробно одну из типичных задач этого рода.

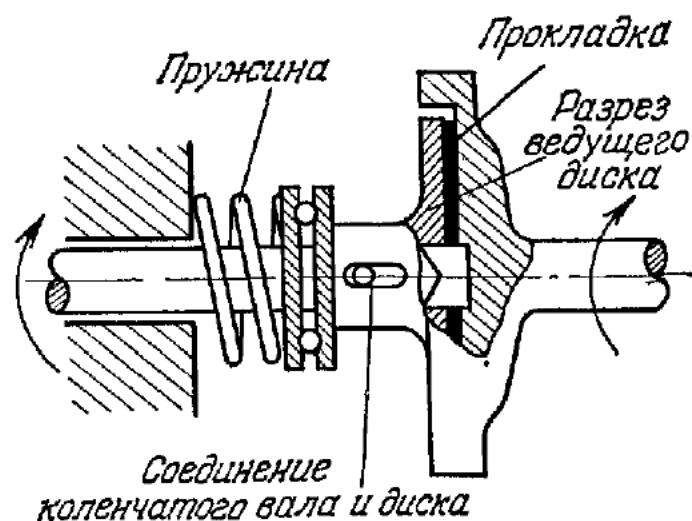


Рис. 104.

<sup>1)</sup> Н. П. Петров, Гидродинамическая теория смазки, Изд. работы, Изд-во АН СССР, 1948.

На доску, лежащую на горизонтальной поверхности стола, положен груз массы  $m_1$  (рис. 105). К доске приложена горизонтальная сила  $F$ . Определить ускорения доски и груза, если известны:  $m_1$  и  $m_2$  — массы груза и доски соответственно,  $\mu_1$  — коэффициент

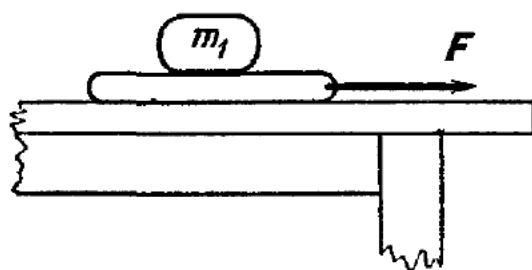


Рис. 105.

трения между доской и грузом и  $\mu_2$  — коэффициент трения между доской и столом. Считаем справедливым закон Кулона. Ответ задачи будет различным для разных значений силы  $F$ . Будем рассматривать малые силы  $F$  и постепенно переходить к большим их значениям. Очевидно, при совсем малой силе ускорения груза и доски

будут равны нулю, доска покоятся. Такое состояние будет при

$$0 \leq F \leq \mu_2(m_1 + m_2)g = F_0,$$

когда действующая сила  $F$  меньше максимальной силы трения покоя доски с грузом.

При небольшом превышении  $F$  над  $F_0$  доска вместе с грузом движется с ускорением, равным

$$a = \frac{F - F_0}{m_1 + m_2}. \quad (42.1)$$

В этом случае сила трения покоя между доской и грузом равна  $m_1a$ . С увеличением  $F$  (и, следовательно, ускорения  $a$ ) растет и сила трения покоя между грузом и доской. Но так будет происходить лишь до тех пор, пока  $m_1a < \mu_1m_1g$ , или  $a < \mu_1g$ , т. е. пока сила трения не достигнет максимального значения; это произойдет при  $F = F_1$ . Если  $F > F_1$ , то начнется скольжение груза по доске. Величина  $F_1$  определяется из условия  $a = \mu_1g$ . Подставляя это условие в (42.1), получаем

$$F_1 = F_0 + (m_1 + m_2)\mu_1g = (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g.$$

При  $F > F_1$  груз через некоторое время соскочит с доски, ибо ускорение доски будет больше  $\mu_1g$ , а ускорение груза останется равным  $\mu_1g$ . Ускорение доски в этом случае равно

$$b_1 = \frac{F - F_0 - \mu_1m_1g}{m_2};$$

его можно записать и так:

$$b_1 = \frac{F - F_1 + \mu_1m_2g}{m_2} = \frac{F - F_1}{m_2} + \mu_1g.$$

Такое состояние при данной силе  $F$  будет продолжаться только некоторое время, пока груз скользит назад по доске. Как только

груз слетит с доски, ее ускорение изменится скачком и станет равным

$$b_2 = \frac{F - \mu_2 m_2 g}{m_2} > b_1,$$

так как

$$b_1 = \frac{F - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g}{m_2}.$$

Каково будет ускорение груза, когда он движется по столу, неизвестно; это зависит от того, как он движется: скользит или кувыркается. Если он скользит и коэффициент трения его со столом  $\mu_3$ , то ускорение груза до остановки равно  $-\mu_3 m_1 g$  и направлено назад.

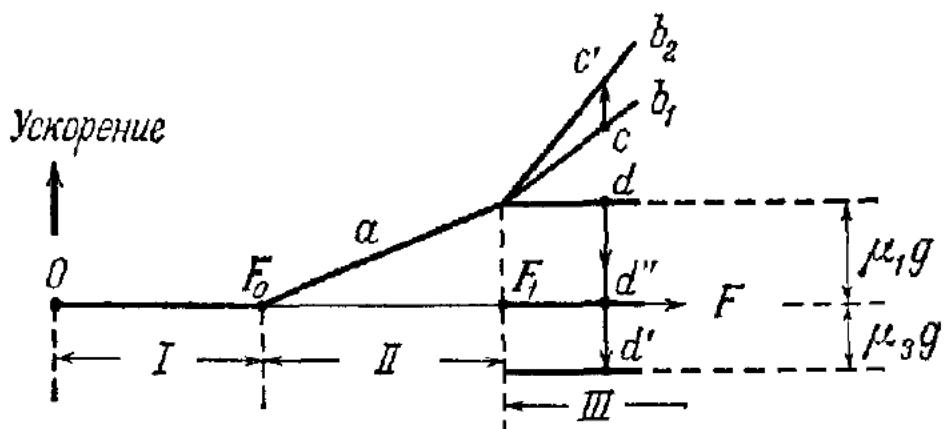


Рис. 106.

В заключение можно составить график зависимости ускорений от величины силы (рис. 106). В области I — покой, в области II — ускорения груза и доски одинаковы и растут пропорционально ( $F - F_0$ ), в области III — доска и груз имеют различные значения ускорения: сначала ускорение доски  $b_1$ , затем  $b_2$ , скачок ( $c \rightarrow c'$ ); сначала ускорение груза равно  $\mu_1 g$ , затем оно может стать равным  $\mu_3 g$  и, наконец, нулю ( $d \rightarrow d' \rightarrow d''$ ).

## Г л а в а VI

### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

#### § 43. Инерциальные системы отсчета

До сих пор мы предполагали, что система отсчета, относительно которой мы рассматривали движение, неизменно связана с Землей, причем саму Землю мы считали покоящейся. В действительности, как мы хорошо знаем, Земля совершает годичное круговое движение

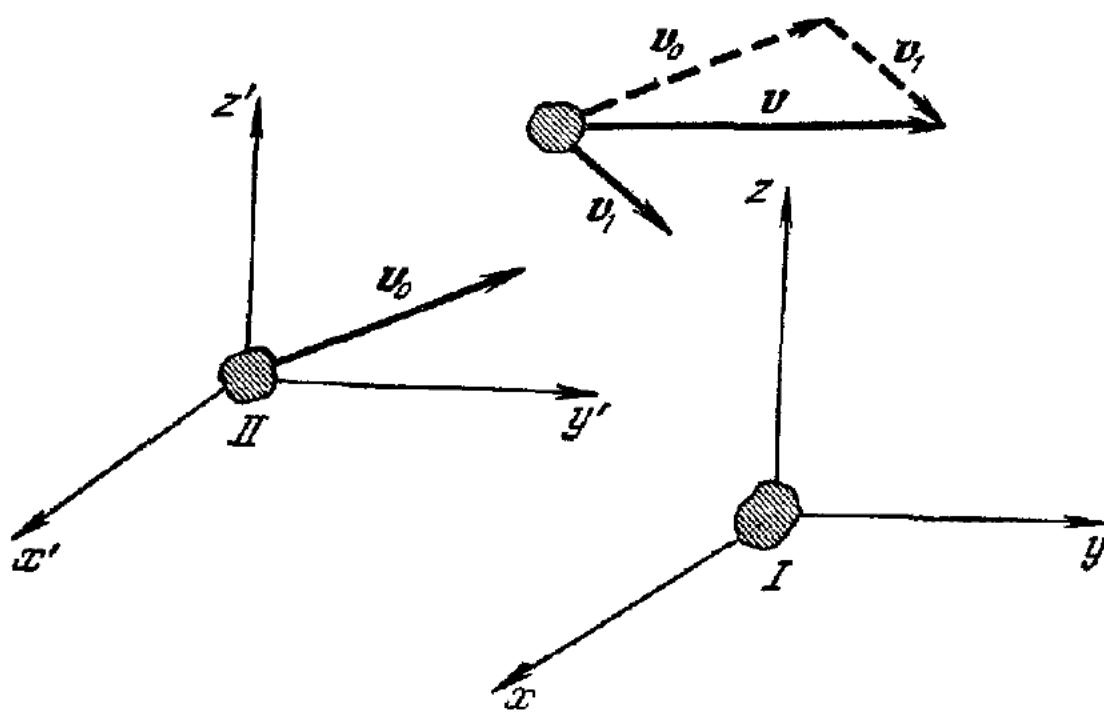


Рис. 107.

вокруг Солнца, вращаясь при этом вокруг своей полярной оси. Следовательно, считая Землю неподвижной, мы совершили некоторую ошибку, которую и выясним в этой главе.

Формулировка законов динамики будет одинаковой только для **инерциальных** систем отсчета. Действительно, представим себе две системы отсчета, причем одну ( $I$ ) примем за неподвижную, а другая ( $II$ ) будет двигаться относительно первой с *постоянной скоростью*  $v_0$  (рис. 107). Тогда все тела, покоящиеся относительно второй системы отсчета, будут двигаться со скоростью  $v_0$  относительно первой, а тела, имеющие скорость  $v_1$  относительно второй системы

отсчета, очевидно, будут двигаться со скоростью  $v = v_1 + v_0$  относительно неподвижной. Так как скорость  $v_0$  постоянна, то ускорение тела относительно движущейся системы отсчета равно ускорению относительно неподвижной системы отсчета, и наоборот. Ускорение будет *одинаковым* относительно любых систем отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

Силы, действующие на тела, и массы этих тел, как показывает опыт, не зависят от того, относительно какой системы отсчета мы определяем движение данного тела. Действительно, силы зависят от расстояния между телами, от их относительной скорости и от времени. Все эти величины не изменяются при переходе к новой системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно.

Если все избранные нами системы отсчета совершают прямолинейное и равномерное движение относительно друг друга и, кроме того, известно, что в одной из них справедливы законы динамики, то формулировка первого и второго законов динамики в каждой из этих систем остается одной и той же для всех этих систем отсчета. Все такие системы отсчета называются *инерциальными системами*; только в таких системах отсчета имеет место закон инерции Галилея. Это положение и называют *принципом относительности Галилея*.

Системы отсчета, движущиеся ускоренно относительно инерциальной системы, называются *неинерциальными системами*. Но какую же из известных нам систем отсчета можно принять за инерциальную систему? В общем виде ответ на этот вопрос дать очень трудно. Однако при анализе движений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, можно принять за инерциальную систему отсчета систему, неизменно связанную с центром масс (см. § 55) тел, образующих Солнечную систему, оси которой имеют неизменные направления относительно «неподвижных» звезд<sup>1)</sup>. Опыт исследования движений на Земле и опыт астрономических наблюдений подтверждает справедливость такого допущения.

Землю же и системы отсчета, связанные с ней, можно считать инерциальными системами только приближенно, совершая при этом некоторую ошибку. В § 48 ошибка, которую мы делаем при этом, будет выяснена.

В теории относительности эта проблема решается несколько иначе. Во-первых, предполагается, что для описания движения все инерциальные системы отсчета *равноправны*. Среди движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга систем отсчета нельзя выделить какую-либо одну особенную. Во-вторых, законы динамики (и вообще законы природы) имеют один и тот же вид (*инвариантны*) в любой инерциальной системе отсчета.

<sup>1)</sup> «Неподвижными» звездами астрономы называют систему звезд, сохраняющих (с известной точностью) неизменное расположение на небесном своде.

Принцип относительности Галилея утверждает только то, что законы Ньютона инвариантны относительно инерциальных систем; принцип относительности Эйнштейна распространяет это утверждение на законы электродинамики и другие законы физики (см. гл. XVII).

### § 44. Движение тела в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции

Если мы рассматриваем движение тела относительно системы отсчета, движущейся ускоренно, то первый и второй законы динамики в обычной форме неприменимы. Действительно, покой в неинерциальной системе отсчета имеет место только при действии на тело внешних сил, так как тело совершает ускоренное движение относительно инерциальной системы отсчета. Например, вагон железнодорожного поезда движется с ускорением  $a$  прямолинейно (рис. 108). На столе, стоящем в вагоне, лежит сверток, он имеет

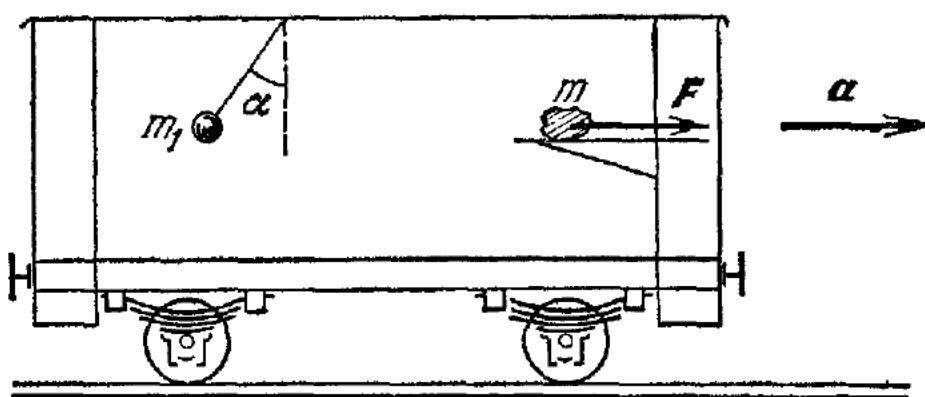


Рис. 108.

какое-то ускорение относительно Земли; следовательно, на него действует сила, сообщающая ему ускорение  $a$ , — это сила трения свертка о поверхность стола. Груз, подвешенный на нити к потолку вагона, висит так, что нить не остается вертикально натянутой, а отклоняется в сторону, противоположную направлению ускорения. С изменением величины ускорения  $a$  изменяется и угол наклона нити к вертикалам  $\alpha$ .

На груз действуют две силы: сила натяжения нити  $N$  и сила тяготения груза к Земле  $P$  (рис. 109). Сумма этих сил, равнодействующая их  $F_1$ , направлена в сторону ускорения вагона:

$$F_1 = m_1 a, \quad F_1 = P \operatorname{tg} \alpha. \quad (44.1)$$

Отметим, что при определении сил, которые действуют на тело, находящееся в вагоне, мы принимали во внимание ускорение этого тела относительно Земли (относительно инерциальной системы отсчета). Но можно ли сформулировать законы движения относительно

ускоренной системы отсчета, относительно вагона, в том же виде, как это делается при движении относительно инерциальных систем? Очевидно, что этого сделать нельзя, не учитывая ускоренного движения системы отсчета (вагона в нашем примере).

В механике часто учитывают движение ускоренной системы отсчета введением особых сил, так называемых *сил инерции*. Введение этих сил позволяет *сохранить* для тел, движущихся относительно неинерциальных систем отсчета, первый и второй законы динамики в той же самой форме, какую они имели для тел, движущихся относительно инерциальной системы отсчета; это в значительной мере упрощает анализ движения в каждом частном случае.

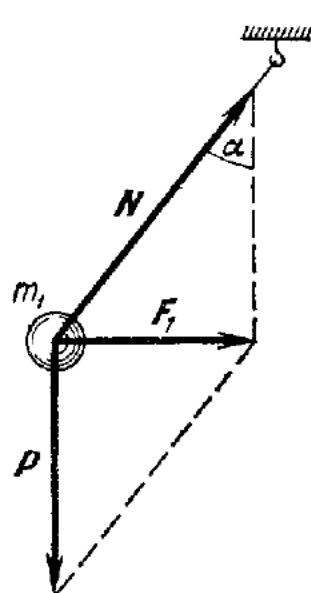


Рис. 109.

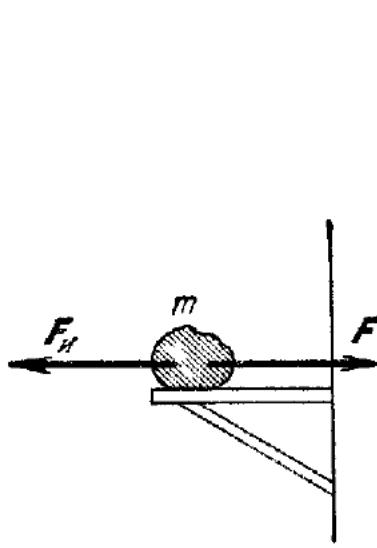
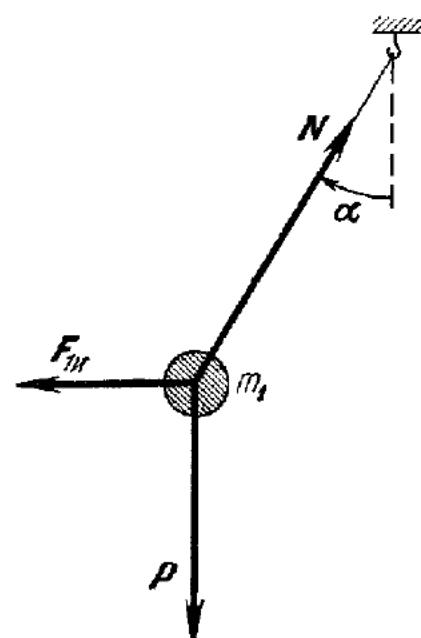


Рис. 110.



Допустим, что на каждое тело, находящееся в ускоренной системе отсчета, действует сила инерции, равная массе этого тела, умноженной на ускорение системы отсчета, и направленная противоположно ускорению. Так, например, на сверток, лежащий на столе вагона, и на груз, висящий на нити, действуют силы инерции  $F_{ii} = -ma$  и  $F_{1ii} = -m_1a$ , как показано на рис. 110. Тогда при состоянии покоя этих тел относительно вагона можно утверждать, что в этом случае, как и при покое относительно инерциальной системы отсчета, сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю:

$$F + F_{ii} = 0, \quad F_{1ii} + P + N = 0. \quad (44.2)$$

Если бы сила трения свертка о поверхность стола отсутствовала, то сверток под действием силы инерции  $F_{ii}$ , направленной противоположно ускорению вагона, двигался бы с ускорением  $a$  относительно вагона или скользнул бы со стола. При рассмотрении движения соскальзывающего свертка относительно полотна дороги

можно сказать так: на сверток не действует никаких сил в горизонтальном направлении, и он остается в покое относительно полотна, а вагон, движущийся с ускорением, уходит от него. Поэтому силы инерции, учитывающие ускоренное движение системы отсчета, возникают только при рассмотрении движения относительно ускоренной системы отсчета. Если же самое движение рассматривается относительно инерциальной системы отсчета, нет необходимости во введении каких-либо сил инерции.

Если бы грузу, висящему в вагоне (см. рис. 110), сообщили толчок, то груз стал бы совершать колебания, как маятник. Если ускорение вагона остается постоянным во время его движения, то анализ колебаний маятника относительно вагона не представляет никаких затруднений. В самом деле, к силе тяготения будет добавлена постоянная сила инерции  $F_{1a}$ , результирующая двух этих сил направлена под углом  $\alpha$  к вертикали, и маятник будет совершать колебания около направления равновесия нити, наклоненной под углом  $\alpha$  к вертикали. В состоянии равновесия сила, действующая вдоль нити, будет больше силы тяготения Земли, она равна квадратному корню из суммы квадратов силы тяготения и силы инерции и направлена противоположно  $N$  (см. рис. 110). Обрежем нить, и груз будет падать в вагоне по прямой, направленной под углом  $\alpha$  к вертикали, с ускорением  $\sqrt{a^2 + g^2}$ . Относительно Земли груз будет двигаться по параболе, которая определяется скоростью вагона в момент отрыва груза и ускорением  $g$ .

Второй закон динамики при движении тела массы  $m$  в неинерциальной системе отсчета, обладающей ускорением  $a$ , следует формулировать так:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_i = m\mathbf{w}_0, \quad (44.3)$$

где  $\mathbf{w}_0$  — ускорение тела в неинерциальной системе отсчета,  $\mathbf{F}_i = -ma$  — сила инерции,  $\mathbf{F}$  — равнодействующая всех внешних сил, действующих на тело.

Наличие сил инерции отражает ускоренное движение системы координат, и силы инерции определяют движение тела в ускоренной системе отсчета. В этом смысле они ничем не отличаются от обычных сил взаимодействия тел. Однако следует подчеркнуть принципиальное отличие сил инерции от особых сил, выражавших взаимодействие тел; оно заключается в том, что *силы инерции не имеют противодействующей*, нельзя указать того тела, со стороны которого приложена сила инерции. Поэтому иногда и называют силу инерции «фиктивной силой»; такое название нельзя считать целесообразным: сила инерции реальна, поскольку она отображает ускоренное движение системы координат, она отлична от сил взаимодействия тем, что не имеет противодействующей, но ничего фиктивного в этом нет.

## § 45. Силы инерции, действующие на покоящееся тело во вращающейся системе отсчета

Проследим за движением маятников, установленных на горизонтальном равномерно вращающемся диске (рис. 111). Мы увидим, что все шарики маятников отклоняются от вертикали. Углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем дальше маятник отстоит от центра диска <sup>1)</sup>. Все маятники находятся в состоянии покоя относительно диска, но совершают равномерное движение по кругу относительно Земли (относительно инерциальной системы отсчета). Так как радиусы кругов, по которым движутся грузики маятников, различны, то центростремительные силы, действующие

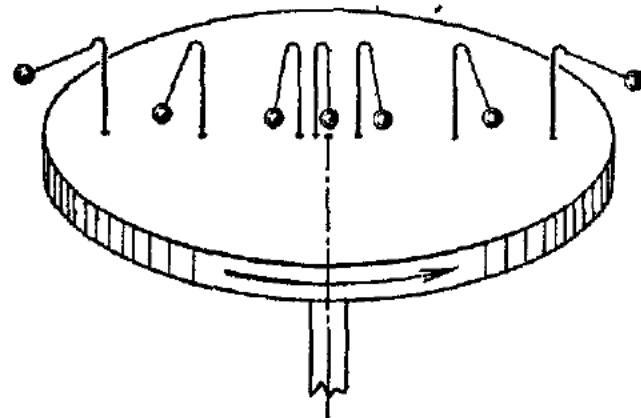


Рис. 111.

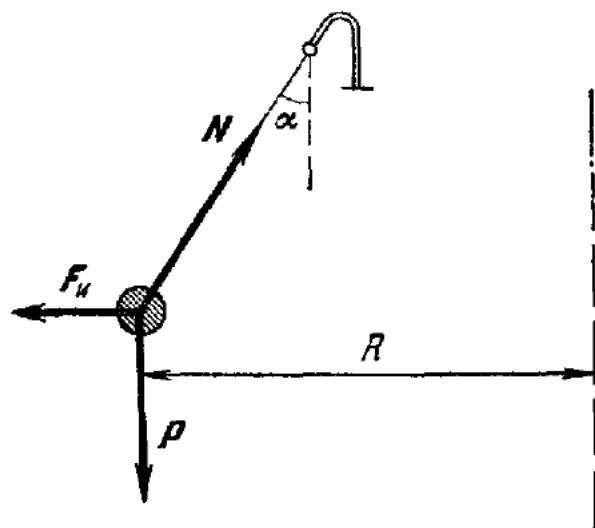


Рис. 112.

на грузики, прямо пропорциональны расстоянию грузиков от центра диска. Центростремительная сила  $F$  создается натяжением нитей  $N$  и силой тяготения грузиков  $P$  (рис. 112),  $F = m\omega^2 R$ , а  $P = mg$ , поэтому угол наклона нити к вертикали  $\alpha$  будет таков, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}; \quad (45.1)$$

здесь  $R$  — расстояние грузика от центра диска,  $g$  — ускорение свободного падения и  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

Относительно диска маятники находятся в состоянии покоя в отклоненном положении. Следовательно, кроме сил тяготения, на грузики маятников действует еще какая-то горизонтальная сила, направленная от центра и при этом различная для различных маятников. Эта сила и есть *центробежная сила инерции*, равная по величине массе грузика, умноженной на ускорение (относительно

<sup>1)</sup> Маятник, висящий на оси вращения диска, не будет отклоняться при угловых скоростях  $\omega \leq \sqrt{g/l}$

Земли) того места диска, над которым грузик находится, и направлена она противоположно ускорению, т. е. от центра диска по радиусу. Таким образом, в состоянии покоя относительно диска на грузик каждого маятника действуют три силы: сила тяготения  $P$ , сила натяжения  $N$  и сила инерции

$$F_i = m\omega^2 R, \quad (45.2)$$

где вектор  $R$  направлен от оси. Сумма всех этих сил равна нулю (см. рис. 112), и грузик поэтому находится в покое относительно диска. Если бы по какой-то причине равновесие нарушилось, то начались бы колебания маятников относительно диска, грузики получили бы ускорение относительно диска.

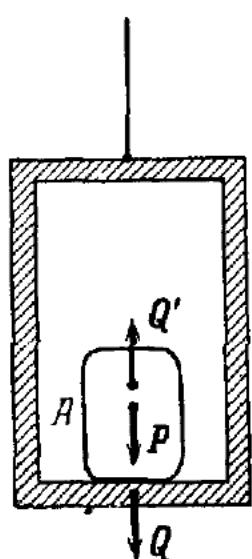
Силы инерции, действующие на тело, которое покоится во вращающейся системе координат, зависят от места, которое занимает тело в этой системе координат. При движении тела относительно вращающейся системы координат на тело будут действовать еще и другие силы инерции, величину и направление которых мы определим в § 48. Отметим, что в системе координат, движущейся ускоренно и прямолинейно, силы инерции *одинаковы* для всех точек этой системы, и поэтому силы инерции, действующие на покоящееся и на движущееся относительно этой системы тело, имеют одно и то же значение.

## § 46. Явление невесомости

В космическом корабле, спутнике, падающем лифте, летящем только под действием силы тяжести самолете возникает так называемое явление невесомости.

Любое тело, находящееся в корабле, спутнике и т. п., в то время, когда они подвержены *только* действию силы тяготения Земли (или других небесных тел), как бы теряет свой «вес». Космонавт свободно «парит» в кабине, ни на что не опираясь, он может «положить» свой карандаш «в воздухе», и карандаш не будет падать. Жидкость, если она не смачивает стенки судна, стремится принять форму шара, и т. д. Прежде всего отметим, что все аппараты, в которых наблюдается состояние невесомости, находятся в состоянии ускоренного движения под действием только силы тяготения, в состоянии *свободного падения*.

Рис. 113.



Рассмотрим, как изменяется вес тела в ускоренно движущемся лифте. Как было уже сказано в § 14, мы будем называть весом не силу тяготения  $P$ , действующую на тело  $A$ , а силу  $Q$ , приложенную к подставке, удерживающей тело (рис. 113);  $Q'$  — сила, приложенная к телу со стороны подставки. Предположим, что тело  $A$  находится

в лифте, движущемся с ускорением  $a$  вниз; тогда по законам механики

$$P - Q' = ma, \quad Q = Q',$$

или

$$Q = P - ma \quad (46.1)$$

(знаки проекций выбраны в соответствии со стрелками, указанными на рис. 113). Сила  $P$  не меняется (если изменения высоты подъема лифта малы по сравнению с радиусом Земли), а сила  $Q$  (сила веса, сила давления на подставку) зависит от ускорения  $a$ .

Если принять лифт за ускоренную систему отсчета, то ко всем телам, находящимся в лифте, будет приложена сила инерции  $-ma$  и уравнение (46.1) можно толковать так: сила давления тела на подставку (вес) определяется суммой силы тяготения  $P$  и силы инерции ( $-ma$ ), приложенных к телу.

Можно формулу (46.1) переписать и так:

$$Q = m(g - a). \quad (46.2)$$

Отсюда ясно, что при  $a = g$  получим  $Q = 0$ , т. е. сила веса равна нулю, тело потеряет вес; в лифте, движущемся с вертикальным ускорением  $g$ , будет наблюдаться явление невесомости. Сила инерции равна и противоположна силе тяготения — сумма этих сил равна нулю. Заметим, что лифт в это время может двигаться как вверх, так и вниз; важно, чтобы ускорение его было равно  $g$  и направлено вниз.

Такая же картина будет наблюдаться в космическом корабле или спутнике, так как они всегда имеют ускорение  $g$  в том месте, где они пролетают, — ускорение, созданное силой тяготения. Спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли, непрерывно «падает», т. е. он находится в состоянии падения, только ускорение силы тяготения всегда нормально к его траектории. На самолете при некоторой скорости полета летчик выбирает режим так, чтобы силы, действующие на самолет со стороны воздуха (подъемная сила плюс сопротивление), полностью уравновешивались силой тяги; тогда под действием силы тяжести самолет будет «падать» с ускорением  $g$ . Такой режим полета при современном состоянии техники может продолжаться около минуты, и летящие в самолете в это время наблюдают состояние невесомости.

Простейшие демонстрации явления невесомости в аудитории — это опыты, предложенные почти сто лет назад профессором Московского университета Н. А. Любимовым, — опыты с маятником на падающей рамке.

По двум направляющим рамка  $A$  может свободно, под действием сил тяготения, скользить вниз (рис. 114,  $a$ ): К рамке  $A$  подведен маятник. Маятник совершает колебания, во время колебаний рамку

отпускают, и она вместе с маятником скользит вниз. Если рамку отпускают в тот момент, когда грузик маятника достигает своей крайней верхней точки  $D$ , то при падении рамки маятник не колеблется, не движется относительно рамки, как бы застыл в отклоненном положении. Если рамку отпускают в тот момент, когда маятник проходит около положения равновесия (точка  $C$ ), то маятник при падении рамки продолжает равномерно вращаться вокруг точки подвеса (рис. 114,  $\delta$ ).

С падающей рамкой можно проделать еще и такой опыт. К рамке на пружине подвешен грузик (рис. 114,  $в$ ); тогда во время падения рамки пружина, растянутая ранее грузиком, сожмется так, как если бы на ней не было никакого грузика, грузик как бы «потерял» вес (рис. 114,  $г$ ).

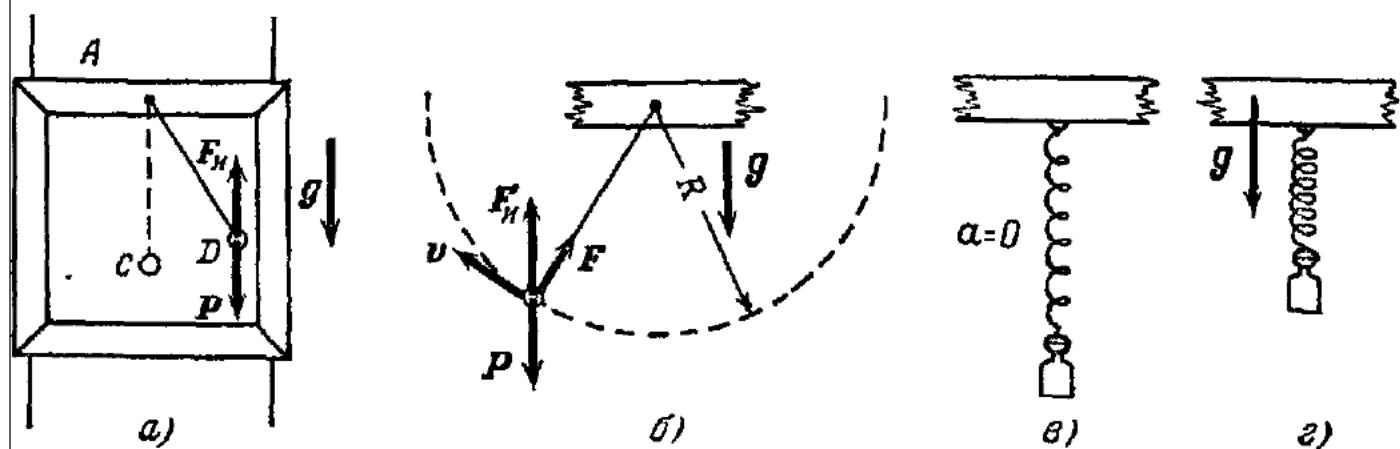


Рис. 114.

Все эти явления легко объяснить, учитывая действие силы инерции и пренебрегая силами трения. При движении тела относительно ускоренно движущейся рамки на него действует направленная вверх сила инерции  $F_i$ , равная массе тела, умноженной на ускорение рамки. Ускорение рамки равно ускорению свободного падения  $g$ , поэтому сила инерции равна силе тяготения тела к Земле. Следовательно, на тело, движущееся или покоящееся относительно рамки, не действует никаких сил и оно или должно оставаться в покое, или двигаться прямолинейно и равномерно. Маятник, бывший в начале движения рамки в покое, остается недвижим относительно нее; двигавшийся грузик маятника в момент начала падения рамки совершает равномерное движение вокруг точки подвеса, ибо на него действует только одна сила  $F$ ; эта сила направлена к точке подвеса со стороны рамки и сообщает ему центростремительное ускорение при движении по кругу (масса рамки много больше массы маятника). Груз, висевший на пружине, не может теперь ее растянуть, ибо сила инерции и сила тяготения действуют на массу грузика в разные стороны и уравновешиваются друг другом.

Можно объяснить эти явления и не прибегая к силе инерции, рассматривая движение грузика и рамки относительно Земли.

После того как рамку с маятником отпускают, и рамка и маятник имеют одинаковое ускорение относительно Земли; следовательно, и рамка и груз будут иметь вследствие действия силы тяжести одинаковую скорость в каждый момент. Поэтому сила тяжести во время падения не может изменить взаимного расположения маятника и рамки. Если маятник был в покое относительно рамки в начальный момент, то он и останется в относительном покое во все время падения. Если маятник двигался с некоторой угловой скоростью в начальный момент, то он так и будет двигаться с той же скоростью и во время падения. (Здесь также необходимо учесть, что масса рамки много больше массы маятника.)

Аналогичные рассуждения можно провести и во всех других случаях.

Так же можно объяснить и невесомость на космическом корабле, движущемся в безвоздушном пространстве. Корабль имеет ускорение, созданное силами тяготения, относительно системы координат, связанной с Солнцем. В неинерциальной системе координат, связанной с кораблем, ко всем телам приложена сила инерции, направленная противоположно ускорению этой системы; кроме того, на тела действует и сила тяготения. В случае движения снаряда (или космического корабля) по круговой орбите силой инерции является центробежная сила, которая и компенсирует действие силы тяготения на тела при движении их относительно снаряда.

### § 47. Связь между векторами угловой и линейной скоростей точки

Приведем определение векторного произведения двух векторов, которое сейчас нам необходимо для записи в векторном виде скорости точки, движущейся по окружности. Скорость точки, движущейся по окружности, направлена по касательной к окружности, и это удобно записать при помощи векторного произведения. Для этого введем, пока формально, вектор угловой скорости. Условимся считать угловую скорость точки, врачающейся по кругу, вектором, который направлен параллельно оси вращения (рис. 115) и в определенном масштабе численно равен величине угловой скорости  $\omega$ . Направление вектора  $\omega$  однозначно связано с направлением движения точки по кругу. Выбирают направление  $\omega$  так: если смотреть на движущуюся точку с острия вектора  $\omega$ , то точка должна двигаться против часовой стрелки.

Вектор  $\omega$  перпендикулярен к плоскости круга, по которой движется точка, вектор  $v$  всегда лежит в плоскости круга. Введем

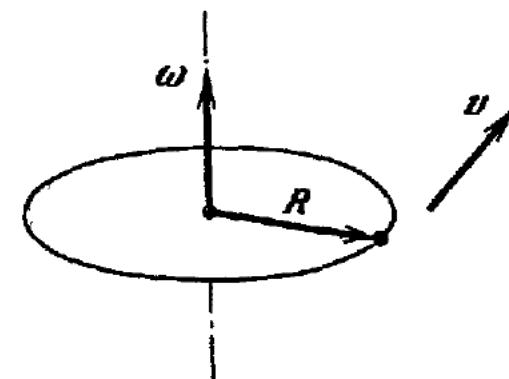


Рис. 115.

еще вектор  $R$  (или радиус-вектор); этот вектор направлен от оси вращения к движущейся точке (см. рис. 115). Векторы  $R$  и  $\omega$  взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Скорость  $v$  связана с векторами  $\omega$  и  $R$  законом векторного произведения, а именно:

$$v = [\omega R]. \quad (47.1)$$

Сравнивая выражение для скорости (47.1) и определение векторного произведения (§ 7), убеждаемся, что действительно вектор скорости  $v$  точки, двигающейся по окружности, равен по величине и направлению векторному произведению векторов  $\omega$  и  $R$ , причем  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ . Удобство записи в виде формулы (47.1) в том, что она указывает и направление, и величину вектора скорости в зависимости от направлений и величин векторов  $R$  и  $\omega$  в данный момент. На простом примере не отчетливо видна необходимость введения в этом случае векторного произведения, но при анализе примеров сложного движения наглядность и краткость представления вектора скорости  $v$  в виде векторного произведения будут совершенно очевидны.

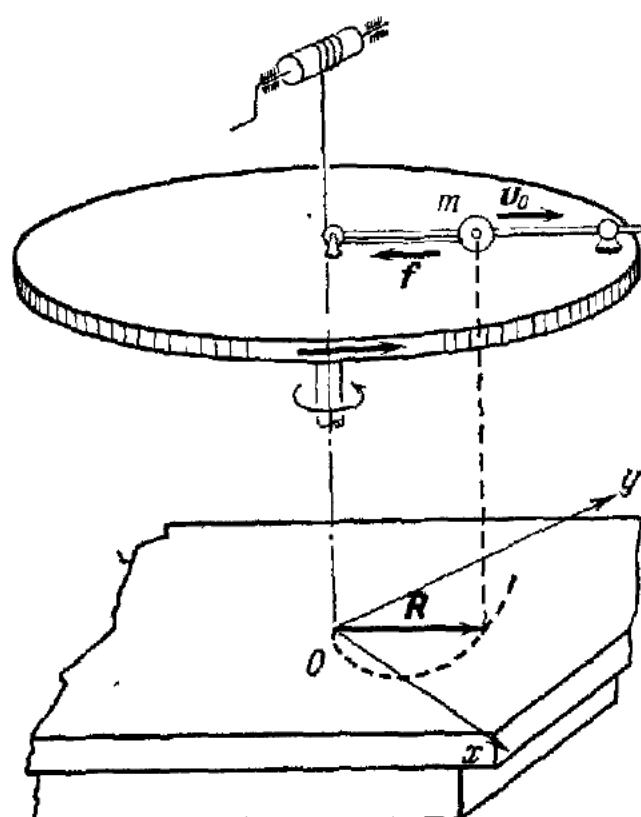


Рис. 116.

#### § 48. Силы инерции, действующие на тело, которое движется во вращающейся системе отсчета

Представим себе небольшой шарик, движущийся прямолинейно и равномерно относительно вращающегося диска по некоторой направляющей (рис. 116). Пусть шарик движется прямолинейно и равномерно вдоль радиуса диска со скоростью  $v_0$ .

Относительно неподвижной системы отсчета  $(x, y)$ , связанной со столом (инерциальной системы координат), движение шарика будет и непрямолинейным, и неравномерным; траектория центра шарика будет представлять собой спираль, ускорение его будет довольно сложно зависеть от движения по траектории. Для того чтобы определить силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе координат, прежде всего необходимо определить ускорение этого тела относительно неподвижной системы координат  $(x, y)$ .

Пусть точка движется вдоль радиуса равномерно вращающегося диска; определим ее ускорение относительно неподвижной системы координат. В момент времени  $t$  точка находилась на расстоянии  $R$  от оси вращения, которое изобразим вектором  $\mathbf{R}$  на плоскости  $(x, y)$ . Тогда скорость точки относительно неподвижной системы отсчета  $(x, y)$  можно представить себе состоящей из двух составляющих: одна из них равна  $v_0$ , скорости движения относительно диска, и направлена по радиусу  $\mathbf{R}$ ; вторая составляющая

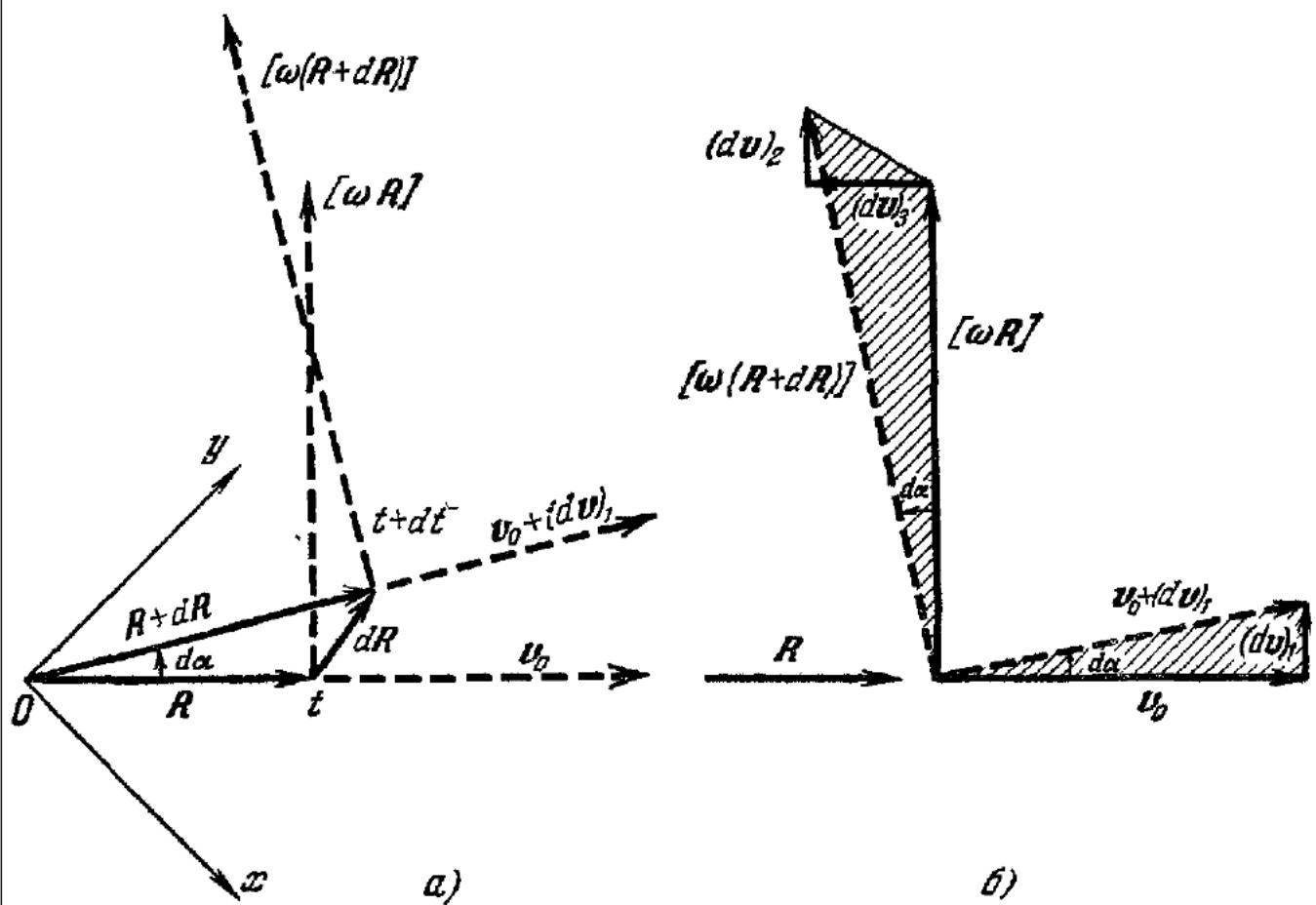


Рис. 117.

перпендикулярна к радиусу  $\mathbf{R}$  и равна  $[\omega \mathbf{R}]$ , где  $\omega$  — вектор угловой скорости вращения диска (рис. 117, а).

Посмотрим теперь, какую величину и направление будут иметь эти составляющие скорости через некоторое очень малое время  $dt$ . Во-первых, обе составляющие повернутся на некоторый малый угол

$$d\alpha = \omega dt; \quad (48.1)$$

во-вторых, абсолютная величина радиальной составляющей не изменится, а величина перпендикулярной к радиусу, или тангенциальной, составляющей увеличится на

$$\omega dR = \omega v_0 dt, \quad (48.2)$$

так как расстояние от оси возрастет за время  $dt$  на величину

$$dR = v_0 dt. \quad (48.3)$$

На рис. 117, б, где проведены из одного начала составляющие векторов скорости в моменты  $t$  и  $t + dt$ , видно, что приращение скорости за время  $dt$  состоит из трех векторов:  $(dv)_1$ ,  $(dv)_2$  и  $(dv)_3$ , причем приращения  $(dv)_1$  и  $(dv)_2$  перпендикулярны к радиусу и направлены в одну сторону, вдоль тангенциальной составляющей скорости  $[\omega R]$ ; приращение  $(dv)_3$  направлено к оси вращения. Заметим, что при определении направления, как и при определении величины этих приращений, мы должны учитывать то обстоятельство, что величина отрезка времени  $dt$  бесконечно мала, а следовательно, и угол  $d\alpha$  так же бесконечно мал, как и приращения скорости относительно ее составляющих.

Определим величину приращений скорости, пользуясь чертежом (см. рис. 117, б).

1) Приращение  $(dv)_1$  вызвано тем, что скорость относительного движения вдоль радиуса  $R$  поворачивается вместе с радиусом диска; величина приращения будет

$$(dv)_1 = v_0 d\alpha = v_0 \omega dt, \quad (48.4)$$

если учесть формулу (48.1).

2) Приращение  $(dv)_2$  вызвано тем, что точка во время движения переходит к большим окружным скоростям; величина его равна

$$(dv)_2 = \omega (R + dR) - \omega R = \omega v_0 dt; \quad (48.5)$$

при вычислении учтена формула (48.2).

3) Приращение  $(dv)_3$  вызвано тем, что точка движется по кругу вместе с диском и составляющая скорости, перпендикулярная к радиусу,  $[\omega R]$ , изменяет свое направление; величина этого приращения равна

$$(dv)_3 = \omega R d\alpha = \omega R \omega dt = \omega^2 R dt. \quad (48.6)$$

Зная приращение скорости за достаточно малое время  $dt$ , можно определить величины компонент ускорения. Тангенциальную, или перпендикулярную к радиусу, компоненту ускорения можно получить, если сложить (48.5) и (48.4) и разделить на  $dt$ :

$$\omega_k = \frac{(dv)_1 + (dv)_2}{dt} = \frac{2\omega v_0 dt}{dt} = 2\omega v_0. \quad (48.7)$$

Таким же образом радиальная компонента ускорения будет равна

$$\omega_u = \frac{(dv)_3}{dt} = \frac{\omega^2 R dt}{dt} = \omega^2 R. \quad (48.8)$$

Очевидно, что эта компонента равна известному нам *центробежительному ускорению* (§ 9). Тангенциальная компонента ускорения  $\omega_k$  называется *поворотным* (или *кориолисовым*) *ускорением*. Величина поворотного ускорения равна удвоенному произведению угловой скорости вращения диска на скорость движения точки относительно диска.

Из анализа ускорения точки, совершающей два движения (одно — по радиусу от центра диска и второе — по кругу вместе с диском), мы заключаем, что на нее действуют две силы: одна вдоль радиуса, равная  $f = m\omega^2 R$ , вторая перпендикулярно к радиусу, равная  $F = m2\omega v_0$ . Первая — обычная центробежная сила, вторая — сила, вызывающая поворотное ускорение. Следовательно, если тело (шарик) движется по спице вращающегося колеса, то спица действует на это тело в направлении, перпендикулярном к спице.

Поворотное ускорение перпендикулярно к направлению скорости относительного движения  $v_0$  и может быть записано в виде векторного произведения векторов  $\omega$  и  $v_0$  так:

$$\omega_k = 2 [\omega v_0]. \quad (48.9)$$

Заметим, что формула (48.9) будет справедлива при любом направлении вектора  $v_0$  относительно диска (вращающегося тела). Доказательство этой формулы

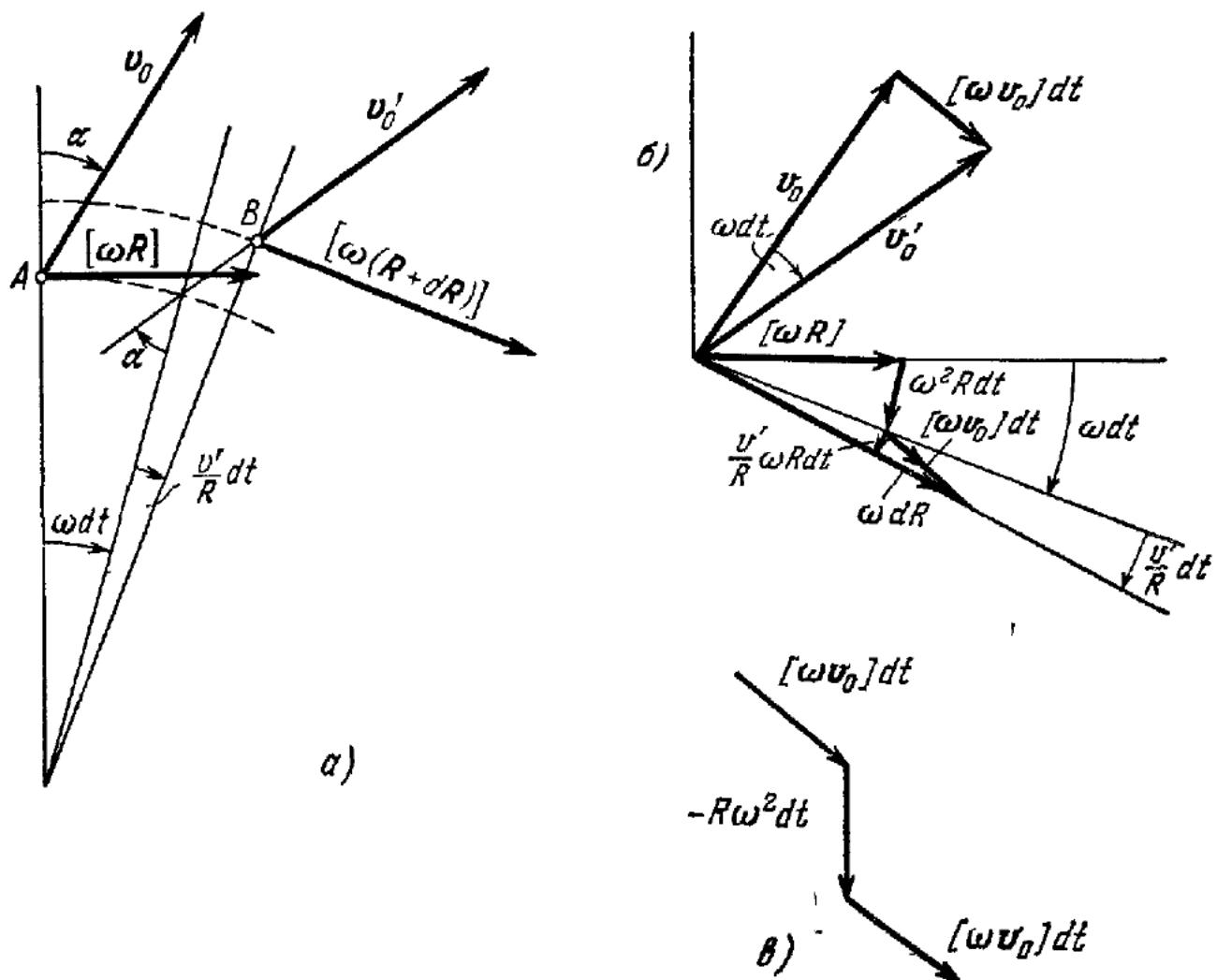


Рис. 118.

Можно получить из рассмотрения рис. 118, а, где показаны составляющие скорости точки, движущейся относительно диска с постоянной скоростью  $v_0$ . Скорость точки относительно покоящейся системы отсчета в момент  $t$  состоит из двух слагающих:  $v_0$  и  $[\omega R]$ , тело в этот момент находится в точке А. Через отрезок вре-

мени  $dt$  тело будет в точке  $B$ ; скорость его состоит из двух слагающих  $v'_0$  и  $[\omega(R + dR)]$ , последняя повернута на угол  $\left(\omega + \frac{v'}{R}\right) dt$  относительно прежнего направления этой слагающей в момент  $t$  ( $v'$  — перпендикулярная к радиусу составляющая скорости  $v_0$ ).

На рис. 118, б нарисованы из одного начала обе слагающие скорости точки относительно неподвижной системы отсчета в моменты  $t$  и  $t + dt$ , а также показаны приращения скорости за время  $dt$ . При доказательстве (48.9) следует учитывать, что углы  $\omega dt$  и  $\frac{v'}{R} dt$  — бесконечно малые. На рис. 118, в ради ясности векторы, составляющие приращение скорости, нарисованы цепочкой, один за другим, два нормальны к  $v_0$  и одинаковы, один направлен к центру. Разделив приращения на  $dt$ , получаем центростремительное ускорение  $-\omega^2 R$  и кориолисово ускорение  $2 [\omega v_0]$ .

Укажем, что движение во вращающейся системе параллельно оси вращения, когда  $v_0 \parallel \omega$ , не вызывает поворотного ускорения, так как при этом движении вектор  $v_0$  не меняет своего направления в пространстве. Поэтому можно сказать, что при любом направлении  $v_0$  кориолисово ускорение равно  $2 [\omega v_0]$ , так как если  $v_0 = v_{\parallel} + v_{\perp}$ , то  $[\omega v_0] = [\omega v_{\perp}]$ , ибо  $[\omega v_{\parallel}] \equiv 0$ .

Теперь вернемся к нашему примеру и еще раз рассмотрим движение шарика по радиусу на вращающемся диске (см. рис. 116). До сих пор мы рассматривали это движение относительно инерциальной системы отсчета, относительно неподвижной системы координат. Теперь будем рассматривать то же движение относительно вращающегося диска.

Относительно диска шарик движется равномерно и прямолинейно вдоль радиуса; следовательно, на шарик никакие силы не должны были бы действовать, если бы законы динамики были справедливы для этого движения. Однако, как мы только что установили, на шарик действуют две силы: первая  $f = -m\omega^2 R$  — по радиусу к центру, вторая  $F = 2m[\omega v_0]$  — в направлении, перпендикулярном к радиусу. Следовательно, спица, по которой движется шарик, будет немного изгибаться и давить на него в сторону вращения диска. Кроме того, к шарику приложена сила  $f$  и направлена она к центру. Сила  $f$  приложена со стороны нити, привязанной к шарику и идущей к оси вращения, эта нить там переброшена через блок и направлена вверх к барабану, как видно на рис. 116. Эти две силы все время действуют на шарик, причем одна из них ( $F$ ) постоянна по величине, поскольку постоянны  $\omega$  и  $v_0$ , а вторая ( $f$ ) растет пропорционально расстоянию шарика от оси, но шарик совершает равномерное и прямолинейное движение относительно диска.

Силы  $F$  и  $f$ , фактически действующие на тело  $m$ , — это силы, величина и направление которых не зависят от того, рассматриваем ли мы движение относительно неподвижной или вращающейся системы отсчета. Поэтому, так же как и в случае ускоренно и прямолинейно движущейся системы, можно ввести *силы инерции*, чтобы формулировка первого и второго законов динамики отно-

сительно вращающейся системы координат была бы той же самой, как и для инерциальной системы отсчета.

Допустив действие сил инерции, картину равномерного движения шарика по спице вращающегося равномерно диска следует представлять себе так. На шарик в направлении, перпендикулярном к спице, действует сила немногого изогнутой спицы  $F$ , она уравновешена *силой инерции (кориолисовой, или поворотной)*, равной  $F_i = -2m[\omega v_0]$  и направленной в сторону, противоположную действию силы, идущей от изогнутой спицы (рис. 119). Вдоль радиуса приложена к шарику сила натяжения нити, сила  $f$ , сообщающая центростремительное ускорение; эта сила уравновешивается *центробежной силой инерции*  $f_i = m\omega^2 R$ .

При наличии этих сил инерции, уравновешивающих силу давления спицы и силу натяжения нити, шарик совершает равномерное движение вдоль спицы во вращающейся системе координат.

Поворотная сила инерции, так же как и все силы инерции, приложена к массе движущегося во вращающейся системе тела и при относительном равномерном движении уравновешивается силами, приложенными к данному телу со стороны других тел. Подчеркнем еще раз, что о силах инерции нет речи в том случае, когда мы рассматриваем это же движение тела относительно инерциальной системы координат.

В рассмотренном нами примере на шарик все время действует центробежная сила инерции, возрастающая пропорционально времени (точнее, пропорционально радиусу). Если же предоставим шарику двигаться вдоль радиуса без внешней силы  $f$ , т. е. обрежем нить, то движение его вдоль стержня диска уже будет не равномерным, а ускоренным. Ускорение будет определяться силой инерции  $f_i = m\omega^2 R$  и расти с увеличением  $R$ . Поворотная сила инерции также будет возрастать вместе с ростом скорости движения шарика относительно диска. Можно легко подсчитать, что расстояние шарика от центра  $R$  будет увеличиваться со временем  $t$  по закону

$$R = a \operatorname{ch} \omega t,$$

где  $a$  — расстояние, на котором находился шарик в момент  $t = 0$ , когда он имел скорость, равную нулю,  $\operatorname{ch}$  — знак гиперболического косинуса ( $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ).

Наличие поворотного ускорения (или поворотной силы инерции) легко можно видеть в опыте, предложенном С. Э. Хайкиным. По диаметру вращающегося диска (рис. 120) протянута резиновая трубка, соединенная таким образом, что по этой трубке во время вращения может идти вода от одного конца к другому. Движение воды происходит равномерно относительно диска, и на нее действует поворотная сила инерции, поэтому резиновая трубка будет изгибаться в сторону, противопо-

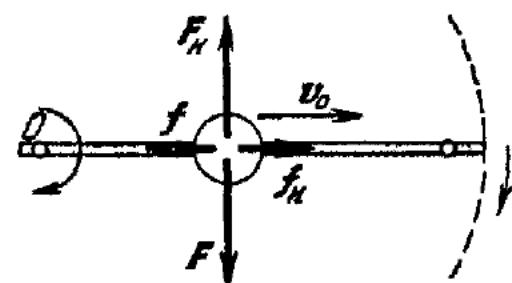


Рис. 119.

ложную повороту вектора скорости воды при вращении диска. Этот изгиб резиновой трубки можно просто наблюдать в стробоскопическом освещении. Пользуясь этим прибором, можно наблюдать, как с увеличением скорости вращения диска изгиб трубки увеличивается. То же происходит и при увеличении скорости движения воды по трубке.

Можно предложить несколько иной вывод связи между ускорениями в неподвижной и вращающейся системах координат.

Прежде всего сформулируем общее правило о производной вектора. Пусть мы отмечаем вектор  $A$  в неподвижной и вращающейся системах. Если вектор  $A$  неизменен во вращающейся системе, где его компоненты постоянны, то в неподвижной системе компоненты  $A$  меняются. Вектор  $A$  изменяется в неподвижной системе; за время  $dt$  он получает приращение

$$dA = [\omega dt A], \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} = [\omega A].$$

Действительно, разложим вектор  $A$  на две составляющие:  $A_{\parallel}$

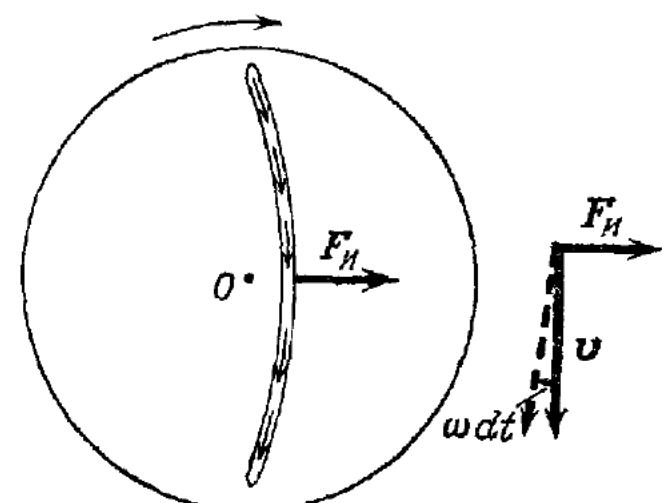


Рис. 120.

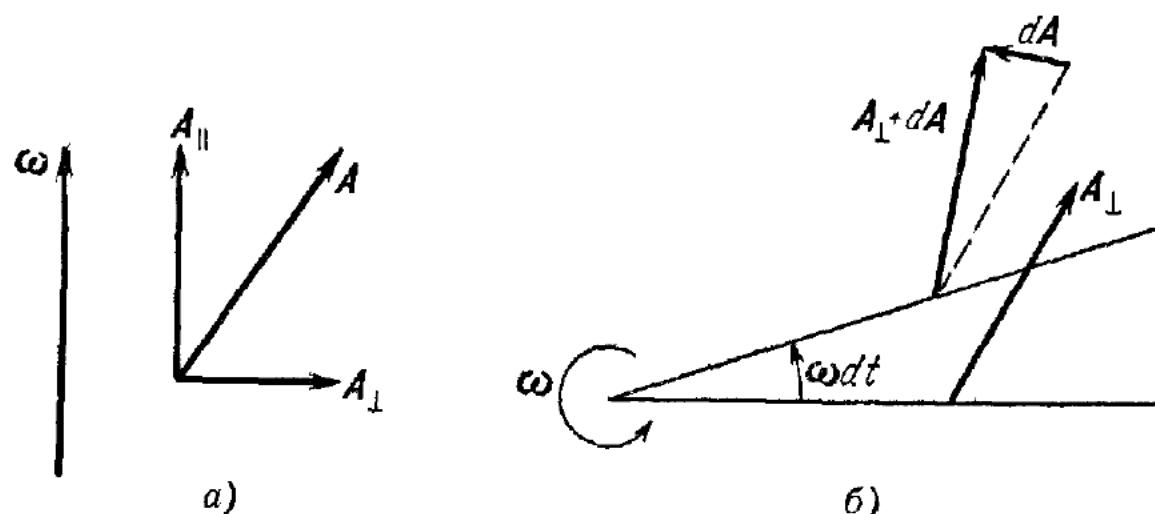


Рис. 121.

и  $A_{\perp}$  — параллельную  $\omega$  и нормальную к ней (рис. 121, а). Тогда

$$A = A_{\parallel} + A_{\perp}, \quad [\omega A] = [\omega A_{\perp}], \quad [\omega A_{\parallel}] = 0.$$

Приращение  $dA$  показано на рис. 121, б, на котором плоскость чертежа нормальна к  $\omega$ . Видно, что

$$dA = [\omega dt A_{\perp}], \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} = [\omega A_{\perp}] = [\omega A].$$

Если вектор  $A$  изменяется относительно вращающейся системы и

за время  $dt$  имеет приращение  $(d\mathbf{A})_0$ , то, очевидно, производная  $\mathbf{A}$  в неподвижной системе может быть записана так:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{(d\mathbf{A})_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{A}]. \quad (48.10)$$

Величину  $\frac{(d\mathbf{A})_0}{dt}$  можно назвать производной вектора  $\mathbf{A}$  во вращающейся системе. Соотношение (48.10) справедливо для любого вектора  $\mathbf{A}$ .

Применим его к вектору  $\mathbf{R}$ , проведенному из неподвижной точки  $O$  на оси вращения к движущейся частице. (рис. 122). Тогда относительно неподвижной системы

$$\cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{(d\mathbf{R})_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}], \quad (48.11)$$

где  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}$  — скорость частицы в неподвижной системе,  $\frac{(d\mathbf{R})_0}{dt} = \mathbf{v}_0$  — скорость относительно вращающейся системы. Заметим, что скорость  $\mathbf{v}_0$  может быть направлена как угодно. Производную вектора скорости

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]$$

относительно неподвижной системы, или ускорение  $\mathbf{w}$  в ней, можно записать так:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[ \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right], \quad (48.12)$$

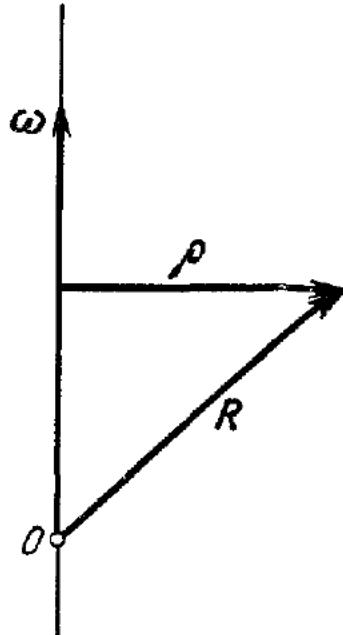


Рис. 122.

если  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ . Но  $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$  и  $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ , в соответствии с (48.10), будут равны

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{(d\mathbf{v}_0)_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0], \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}].$$

Подставляя это в (48.12), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{(d\mathbf{v}_0)_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0] + [\boldsymbol{\omega} [\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]]] = \\ &= \frac{(d\mathbf{v}_0)_0}{dt} + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]], \end{aligned} \quad (48.13)$$

т. е. искомое соотношение. Первый член  $\frac{(d\mathbf{v}_0)_0}{dt} = \mathbf{w}_0$  — ускорение частицы относительно вращающейся системы,  $2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0]$  — кориолисово ускорение,  $[\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]] = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{R}$  — центростремительное ускорение (см. рис. 122). Окончательно в общем виде при  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + 2[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0] - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{R}. \quad (48.14)$$

Введение сил инерции вызывает различные толкования, и при изучении их возникают трудности, поэтому еще раз напомним основные рассуждения.

### 1. Нет сил инерции.

В неинерциальной системе отсчета *несправедливы* первый и второй законы динамики, силы взаимодействия тел еще не определяют ускорение тела. Поэтому *необходимо* сначала произвести динамический анализ движения данного тела относительно *инерциальной* системы отсчета. После того, как найдено движение тела относительно этой системы, можно по законам кинематики определить его движение и в *неинерциальной* системе отсчета.

### 2. Есть силы инерции.

В этом случае формально *справедливы* первый и второй законы динамики, поэтому можно произвести динамический анализ движения тела прямо относительно *неинерциальной* системы отсчета, для этого необходимо к силам взаимодействия, действующим на данное тело, прибавить еще *силы инерции*. При поступательном движении неинерциальной системы силы инерции *одинаковы* во всех точках этой системы отсчета и не зависят от скорости движения тела относительно нее. Во вращающейся системе отсчета силы инерции *различны* в разных точках неинерциальной системы (центробежные силы) и зависят от относительной скорости движения (кориолисовы силы).

Физический смысл сил инерции только в том, что они учитывают ускорение тела, равномерно и прямолинейно движущегося относительно неинерциальной системы отсчета, — ускорение, имеющее место вследствие ускоренного движения системы отсчета. Прибавление сил инерции к внешним силам, действующим на тело, равносильно вычитанию из суммы внешних сил той их части, которая определяет центростремительное и кориолисово ускорение тела (в случае вращающейся системы отсчета) или ускорение неинерциальной системы отсчета (при поступательном ее движении). Оставшаяся часть внешних сил определяет ускорение относительно неинерциальной системы отсчета.

## § 49. Влияние вращения Земли на движение тел. Маятник Фуко

Действием поворотной силы инерции объясняется размывание правого берега рек северного полушария (закон Бюра). Тем же объясняется большее снашивание правого рельса двухпутных железных дорог этого полушария.

Положим, что поезд движется по меридиану в северном полушарии (рис. 123, а). Тогда скорость движения вдоль меридиана  $v$  можно разложить на две составляющие одна ( $v_{||}$ ) — параллельна земной оси, вторая ( $v_{\perp}$ ) — перпендикулярна к ней. Направление и величина компоненты скорости  $v_{||}$  не будут изменяться вследствие вращения Земли, следовательно, эта компонента не связана с силами инерции. Со второй компонентой будет происходить то же самое,

что и со скоростью тела, двигающегося по радиусу вращающегося диска. Следовательно, на поезд будет действовать сила инерции

$$F_k = 2m\omega v_{\perp} = 2mv\omega \sin \varphi, \quad (49.1)$$

где  $m$  — масса поезда, а  $\varphi$  — широта. Легко убедиться по чертежу (рис. 123, б), где пунктиром изображено направление компоненты  $v_{\perp}$  через момент  $dt$ , что сила инерции всегда будет направлена в правую сторону по ходу поезда. Поэтому совершенно очевидно, что преждевременный износ правого<sup>1)</sup> рельса можно заметить только на двухпутных железных дорогах, где движение по данной колее всегда идет только в одном направлении.

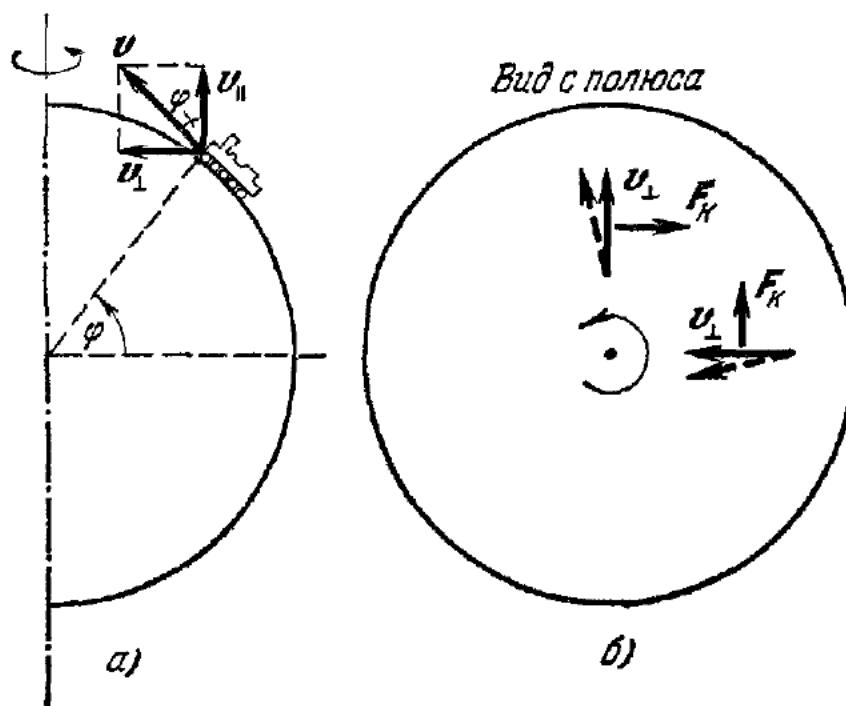


Рис. 123.

Отметим, что поворотная сила инерции существует и тогда, когда поезд движется и не по меридиану. В самом деле, и при движении по параллели (рис. 124) будет иметь место поворотное ускорение  $2\omega v$ , направленное к оси вращения, если поезд движется на восток, и от оси вращения — при движении на запад. Следовательно, существует сила инерции

$$F_k = 2m\omega v, \quad (49.2)$$

направленная от оси Земли (или к ее оси); проекция этой силы на горизонтальную плоскость равна

$$F_k \sin \varphi = 2mv\omega \sin \varphi, \quad (49.3)$$

т. е. той же величине, что и при движении по меридиану, и направлена она также вправо по отношению к движению поезда.

То же следует сказать и о размытии берегов рек: размытие правого берега в северном полушарии (левого — в южном) имеет место независимо от направления течения реки.

Читателю предлагается самостоятельно разобрать следующий вопрос: возникает ли поворотная сила инерции при движении поездов по местности вблизи экватора и оказывается ли там она на изнашивании рельса? (Ответ имеет место, но она не вызывает неравномерного изнашивания рельсов.)

<sup>1)</sup> На дорогах южного полушария — левого.

Если движение свободно падающего тела отнесено к системе отсчета, связанной с Землей, то во время падения тела на него действуют три силы. сила тяготения и две силы инерции центробежная и поворотная. Величина сил инерции при падении с небольшой высоты (по сравнению с радиусом Земли) будет невелика. Центробежное ускорение равно

$$\omega^2 R \cos \varphi \approx \frac{(2\pi)^2 \cdot 6400 \cdot 10^3}{24^2 \cdot 36^2 \cdot 10^4} \cos \varphi \text{ м/с}^2 \approx 0,034 \cos \varphi \text{ м/с}^2, \quad (49.4)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $R$  — радиус Земли,  $\varphi$  — широта. На экваторе центробежное ускорение составляет около 0,3% от ускорения силы тяготения, поэтому приближением расчете влиянием изменения <sup>1)</sup>

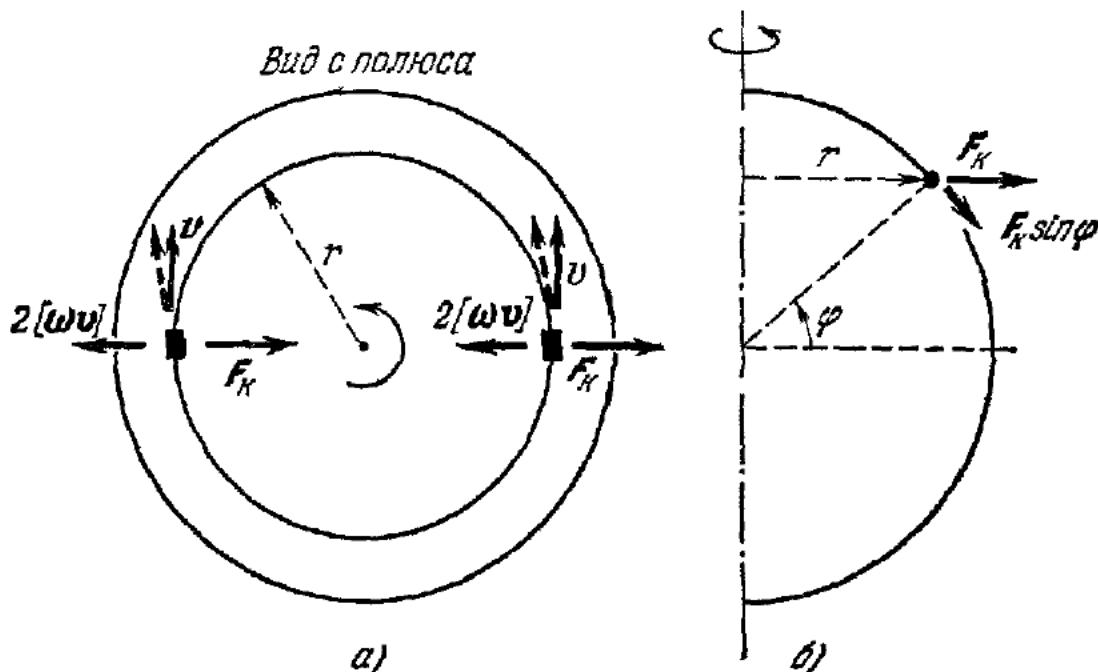


Рис 124.

центробежной силы с высотой падения можно пренебречь. Гораздо более заметно влияние *поворотной силы*, которое вызовет отклонение падающего тела к востоку. Отклонение падающего тела к востоку можно просто представить себе: ведь тело в верхней точке из-за вращения Земли имеет большую скорость (относительно невращающейся системы координат, связанной с центром Земли), чем то место, на которое оно падает. Отклонение к востоку можно приближенно очень просто вычислить, полагая, что скорость падения тела  $v$  в первом приближении направлена вниз и величина ее равна  $gt$ , как при падении на невращающейся Земле ( $t$  — время падения)

Кориолисова сила инерции равна  $-2m[\omega v]$ , или приближенно величина ее составляет  $2m\omega gt \cos \varphi$ . Следовательно, ускорение к востоку падающего тела приближенно равно

$$a = 2\omega gt \cos \varphi. \quad (49.5)$$

Проинтегрировав ускорение два раза, получим, что величина смещения падающего тела к востоку приближенно равна <sup>2)</sup>

$$s = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi.$$

<sup>1)</sup> Заметим, что нам важно знать изменение центробежной силы по высоте, а не самую величину этой силы

<sup>2)</sup>  $s = \int v_k dt$ , где  $v_k = \int a dt = 2\omega g \cos \varphi \int t dt = \omega g \cos \varphi \cdot t^2$ .

При этом расчете мы полагали, что сила Кориолиса все время направлена к востоку, и пренебрегли изменением направления скорости  $\sigma$ , а следовательно, и изменением направления поворотной силы. Подставив числа, мы найдем, что при падении за 4 с на широте  $45^\circ$  (примерно с высоты 80 м) тело сместится к востоку примерно на 3 см. Тщательные опыты, в которых проверялись смещения к востоку, подтверждают результаты расчетов.

Эти факты дают механическое доказательство вращения Земли. Они показывают, что система отсчета, связанная с Землей, — *неинерциальная* система отсчета; только в тех случаях, когда силы, действующие на тело, значительно больше поворотной и центробежной сил инерции, можно приближенно считать систему отсчета, связанную с Землей, *инерциальной*.

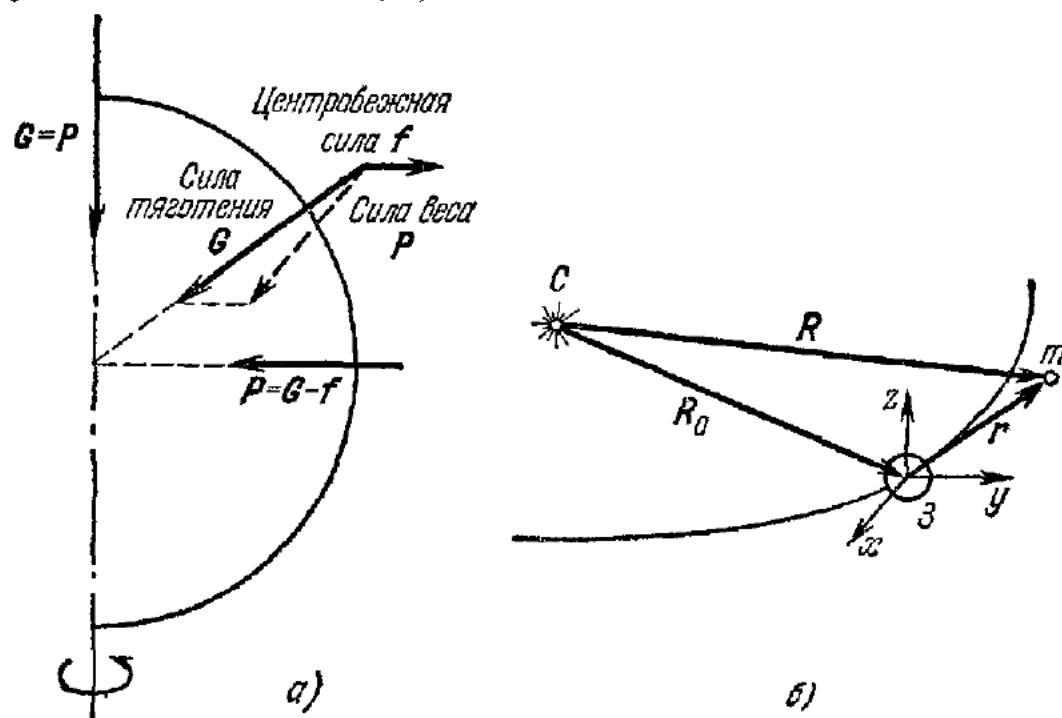


Рис. 125.

Отметим, что центробежная сила инерции имеет определенное направление и величину в данном месте независимо от движения тела, поэтому она проявляется и фактически учитывается вместе с силой тяготения, действующей на тело. Наличие центробежной силы инерции вследствие вращения Земли ведет к тому, что сила тяготения тела и сила веса тела вообще различны: они отличаются на величину центробежной силы инерции в данном месте (рис. 125, а).

Здесь шла речь только о суточном вращении Земли вокруг оси. Легко убедиться, что влияние сил инерции, возникающих вследствие вращения Земли вокруг Солнца, будет несравненно меньше. Очевидно, что поворотная сила инерции будет примерно в 360 раз меньше, чем поворотная сила инерции вследствие суточного вращения Земли. Центробежная сила инерции вследствие вращения вокруг Солнца будет порядка 0,2 от центробежной силы вследствие суточного вращения на экваторе.

При движении тел вблизи поверхности Земли силы инерции, связанные с вращением Земли вокруг Солнца, и силы притяже-

ния тел к Солнцу практически компенсируют друг друга и в большинстве случаев могут вообще не учитываться. Чтобы показать это, запишем полное уравнение движения материальной точки массы  $m$  в околосолнечном пространстве. Примем за начало неинерциальной системы отсчета центр массы Земли (рис. 125, б):

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM_3}{r^3} \mathbf{r} - \gamma \frac{mM_C}{R^3} \mathbf{R} - ma_0 + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{цб}. \quad (49.6)$$

Здесь в порядке следования записаны: сила притяжения материальной точки  $m$  Землей; сила притяжения ее Солнцем; сила инерции, возникающая вследствие движения Земли вокруг Солнца по эллиптической орбите; кориолисова сила инерции и центробежная сила инерции.

Ускорение  $a_0 = -\gamma \frac{M_C}{R_0^3} R_0$  сообщается центру массы Земли силой притяжения ее к Солнцу. Расстояние от Земли до Солнца  $R_0 \approx 1,5 \cdot 10^8$  км.

Численное сравнение слагаемых, представляющих в уравнении (49.6) силу инерции, связанную с неравномерностью орбитального движения системы отсчета, и силу притяжения материальной точки Солнцем, показывает, что они с высокой точностью компенсируют друг друга. Поэтому их общий вклад в уравнение (49.6) можно считать равным нулю.

Действительно,  $\frac{r}{R_0} \sim \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}$ , и  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \approx \mathbf{R}_0$ . Отсюда

следует, что

$$-\gamma \frac{mM_C}{R^3} \mathbf{R} - ma_0 = -\gamma m M_C \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right) \approx 0.$$

Называя, как указано выше (см. рис. 125, а), сумму сил притяжения тела Землей и центробежной силы весом тела  $P$  над данной точкой земной поверхности, уравнение (49.6) можно записать в следующем виде:

$$m\ddot{r} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_k = mg_s - 2m[\omega v_{отв}], \quad (49.7)$$

где  $g_s = P/m$ . Уравнение (49.7) описывает движение тел в околосолнечном пространстве относительно системы отсчета, связанной с Землей.

Таким образом, только приближенно можно считать систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной. Ошибка, которая делается в этом случае, определяется отношением величин сил инерции к величине всех остальных сил, действующих на тело.

Французский ученый Фуко, наблюдая колебания маятника, доказал вращение Земли (1852 г.). Если представим, что маятник подведен на полюсе, то следует ожидать такую картину при колебаниях маятника плоскость его коле-

баний будет медленно поворачиваться в сторону, противоположную вращению Земли. Это вращение плоскости колебаний видно, если наблюдать след колебаний маятника, подвешенного над вращающимся диском (рис. 126). Если мы заставим маятник колебаться в какой-то плоскости и затем приведем диск во вращение, то песок, высыпающийся из воронки маятника, которая подвешена вместо груза, покажет нам след движения маятника над диском.

В неподвижной системе отсчета нет сил, которые заставили бы маятник изменить плоскость качания, и он будет сохранять ее неизменной в пространстве, а диск (или Земля) поворачиваются под ним. Очевидно, что плоскость колебаний маятника на полюсе будет вращаться с угловой скоростью вращения Земли ( $15^\circ$  в час). Если же отнести колебания маятника на полюсе к системе координат, связанной с Землей, то вращение плоскости колебаний можно представить себе как результат действия кориолисовой силы. Действительно, она перпендикулярна к скорости вращения и лежит все время в горизонтальной плоскости. Эта сила пропорциональна скорости движения грузика маятника и угловой скорости вращения Земли и направлена так, что действие ее заворачивает траекторию в нужную сторону.

След движения маятника на Земле будет различен в зависимости от того, каким образом мы заставим маятник колебаться. Проследим след траектории маятника над вращающимся диском (см. рис. 126) при двух способах запуска маятника. Если отклоним грузик маятника в сторону и одновременно приведем диск во вращение так, что в момент пуска маятника вороночка получит такую же скорость, как и та точка диска, над которой она находится, след траектории будет представлять «звездочку» (рис. 127, а). Таким же будет вид траектории на земном полюсе, если маятник запускать из отклоненного положения.

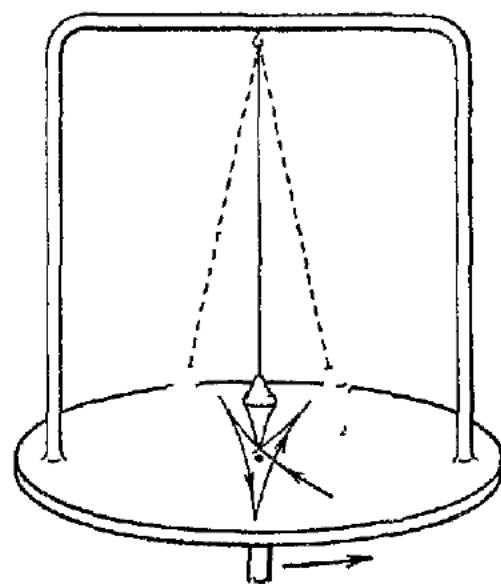


Рис. 126

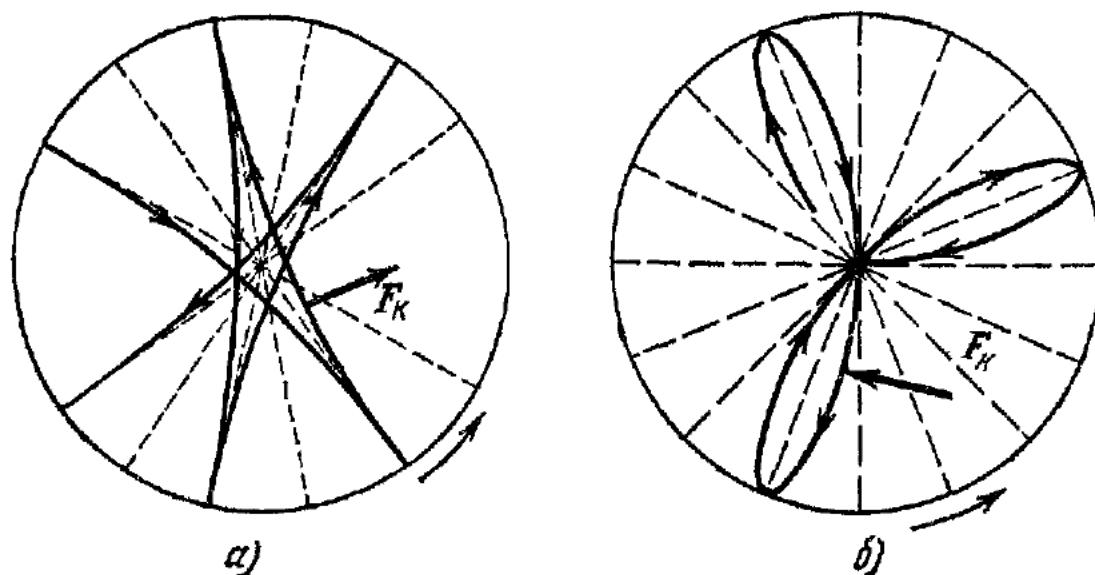


Рис. 127.

В другой раз мы заставим маятник колебаться при неподвижном диске, а затем приведем диск во вращение. В этом случае траектория представляет собой «розетку» (рис. 127, б). На Земле такая форма траектории будет в том случае, если маятник будет совершать колебания после резкого удара по

покоящемуся грузику. В обоих случаях траектории изгибаются в одну и ту же сторону под действием кориолисовой силы.

Таким образом, при колебаниях маятника на полюсе след траектории маятника будет изгибаться и, следовательно, плоскость колебания будет постепенно поворачиваться под действием кориолисовой силы

$$F_k = -2m[\omega v], \quad (49.8)$$

которая лежит все время в горизонтальной плоскости и направлена всегда вправо по ходу грузика.

Опыт Фуко можно наблюдать и в аудитории, только следует сделать устройство, которое отсчитывает поворот траектории за то время, пока колебания маятника не затухнут. Для опыта делают длину маятника как можно больше,

чтобы увеличить период его колебаний; тогда процесс колебаний займет большее время и Земля за это время переместится на больший угол.

Чтобы отметить угол поворота траектории при пуске, заставляют маятник колебаться в плоскости луча света, идущего от точечного источника на экран, так, что вначале на экране видна только четкая неподвижная линия тени от нити подвески при колебаниях. По прошествии некоторого времени (5—10 мин) плоскость колебаний повернется, и на экране будут видны смещения тени от нити.

Для определения угла поворота плоскости колебаний маятника источник света сдвигают в сторону до тех пор, пока опять не будет видна четкая неподвижная тень. Измеряя смещение тени нити и расстояние от нити до экрана, находят угол, на который повернулась плоскость колебаний за данное время. Опыт показывает, что угловая скорость поворота плоскости колебаний маятника равна

$$\omega \sin \varphi = 15 \sin \varphi \text{ град/ч},$$

где  $\varphi$  — широта места (рис. 128). Вращение вокруг вертикали на широте  $\varphi$  будет происходить не с угловой скоростью  $\omega$ , а с угловой скоростью, равной проекции  $\omega$  вектора на вертикаль, т.е. угловая скорость вращения будет равна  $\omega \sin \varphi$ .

Уменьшение угловой скорости вращения плоскости колебаний можно объяснить также и тем, что проекция силы Кориолиса на горизонтальную плоскость в данном месте будет отличаться на коэффициент  $\sin \varphi$  от ее величины на полюсе. Действительно, поворот плоскости качания вызовет только эта проекция. Сила Кориолиса, действующая на грузик маятника в данном месте, лежит в плоскости, перпендикулярной к  $\omega$  и  $v$ , и пропорциональна синусу угла между ними. Только в том случае, когда вектор  $v$  лежит в плоскости меридiana, кориолисова сила направлена горизонтально; при всех других направлениях эта сила не лежит в горизонтальной плоскости.

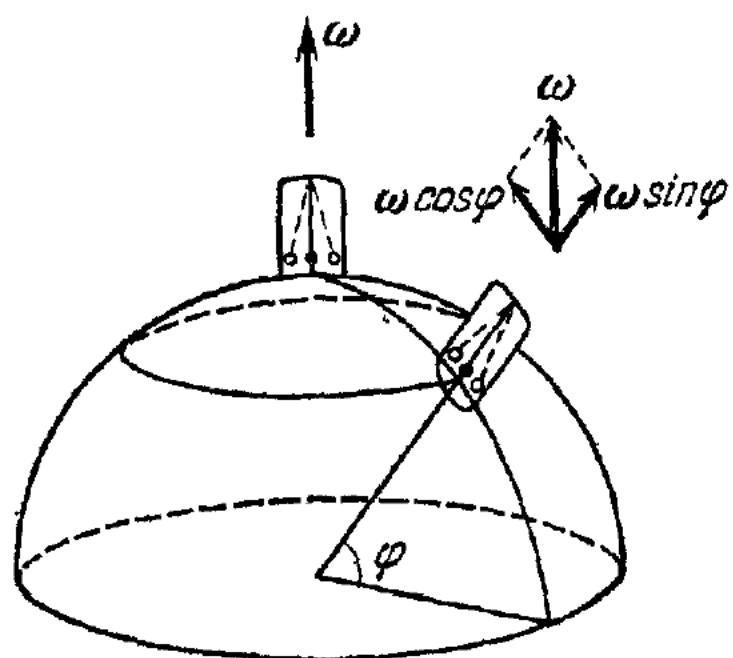


Рис. 128.

## Г л а в а VII

### ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### § 50. Поступательное и вращательное движение твердого тела

Все тела при определенных условиях деформируются, т. е. тем или иным образом изменяют свою форму. Твердое тело, или *абсолютно твердое тело*, — это такое тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться; в абсолютно твердом теле при всех условиях расстояние между двумя точками, или, точнее, между двумя частицами этого тела, остается неизменным, постоянным. Очевидно, что такое представление есть абстракция. Но в тех случаях, когда при движении форма тела не изменяется или ничтожно изменяется, можно рассматривать законы движения этого тела как абсолютно твердого тела, или, как мы будем называть далее, просто *твердого тела*.

Некоторые твердые тела, например куски металлов и др., состоят из мельчайших кристаллов. В кристалле атомы и молекулы, образующие его, расположены в определенном, закономерном порядке. На рис. 129 показана модель кристалла, она состоит из «шариков» (атомов) и «стержней», связывающих эти шарики. Если полагать стержни жесткими и невесомыми, а шарики расположеными в любом порядке, то каждое твердое тело можно представлять себе наподобие модели кристалла. Отдельные частицы абсолютного твердого тела можно мыслить состоящими из отдельных атомов или некоторой совокупности достаточно большого числа атомов и

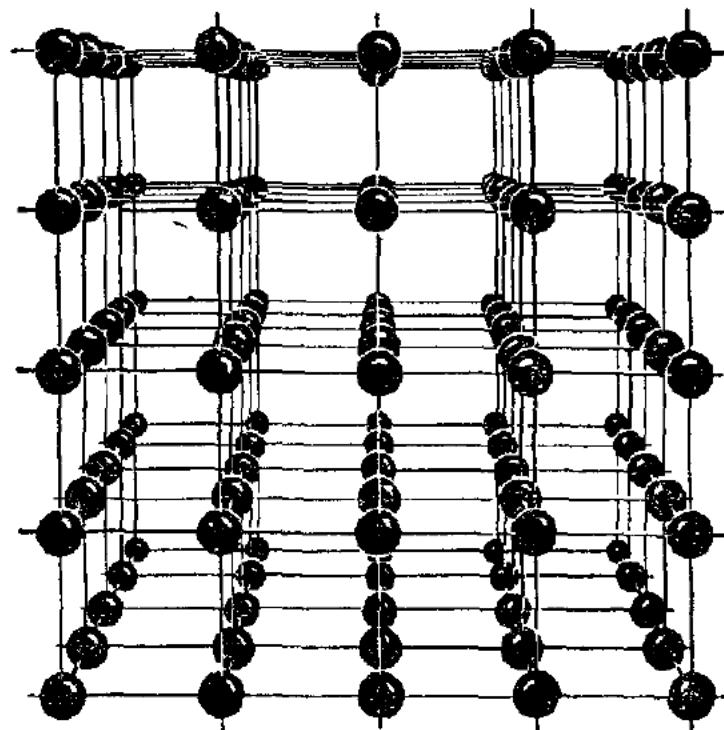


Рис. 129.

молекул, которые всегда неизменно связаны друг с другом. При движении твердого тела каждая частица описывает свою траекторию, но эта траектория закономерно и определенным образом связана с траекториями других частиц. На каждую частицу тела действуют какие-то силы со стороны соседних частиц (силы со стороны стержней) — это *внутренние силы* в твердом теле; к каждой частице могут быть еще приложены силы со стороны других тел — *внешние силы*; например, сила тяготения частиц тела к Земле представляет собой внешнюю силу.

Любое сложное движение твердого тела состоит из простых движений: *поступательного* и *вращательного*. Поэтому начнем рассмотрение движений твердого тела с анализа этих простейших движений.

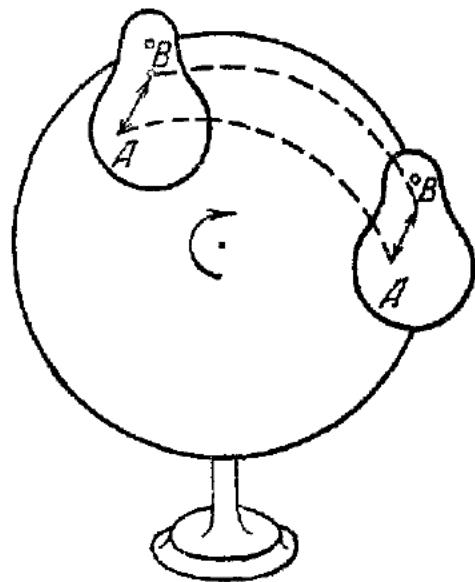


Рис. 130.

*Поступательным движением* твердого тела называют такое его движение, при котором *каждая линия*, соединяющая *две любые* точки тела, сохраняет *неизменное* направление в пространстве. Вообще, поступательное движение может быть и непрямолинейным; например, кабинки с пассажирами на «чертовом» колесе, модель которого показана на рис. 130, совершают поступательное движение и траектория каждой точки является окружностью. При поступательном движении твердое тело движется, не поворачиваясь, и любая линия его переносится параллельно самой себе, т. е. смещение всех точек тела за любой промежуток времени одинаково. Поэтому при поступательном движении твердого тела все его точки в данный момент времени имеют одинаковые скорости, а следовательно, и одинаковые ускорения. Таким образом, поступательное движение тела — самое простое; зная движение какой-то одной точки, мы можем определить движение всех остальных точек. Например, когда мотоцикл движется прямолинейно, седок совершает прямолинейное поступательное движение, колеса мотоцикла совершают сложное движение — поступательное и вращательное, а поршень мотоцикла совершает непрямолинейное поступательное движение.

Движение твердого тела называется *плоским* (или *плоскопараллельным*), если во время движения любая точка (частица) твердого тела остается в одной из параллельных плоскостей. При плоском движении траектория каждой точки тела лежит в плоскости, причем плоскости всех траекторий или совпадают, или параллельны друг другу. Например, при прямолинейном движении мотоцикла колеса и поршень совершают плоское движение, а вал привода от мотора

к колесу, ось которого совпадает с направлением скорости мотоцикла, совершают неплоское движение. Цилиндр эллиптического сечения, катящийся без скольжения по столу, совершает плоское движение (рис. 131, а), а конус, катящийся по столу (рис. 131, б), совершает неплоское движение.

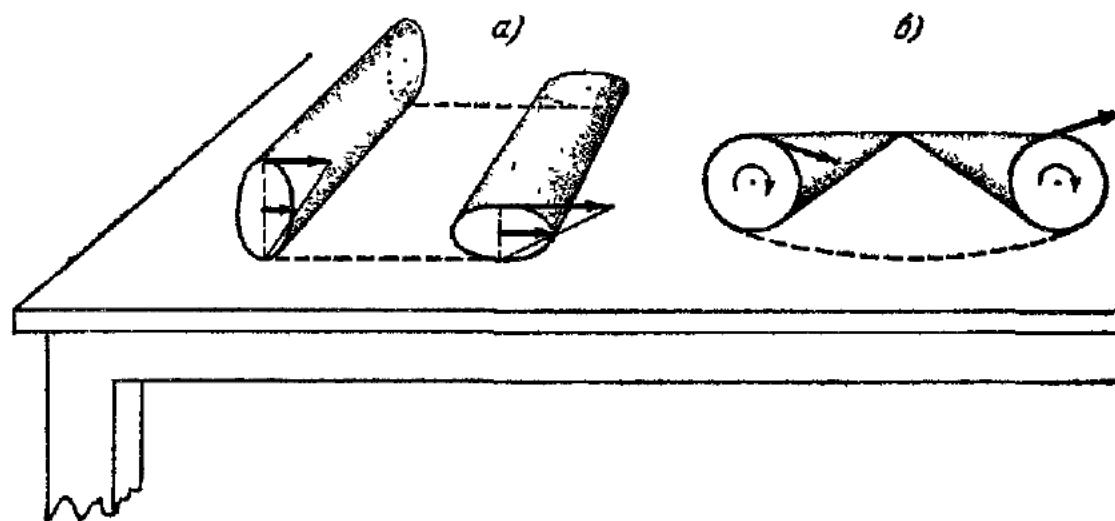


Рис. 131.

*Вращательным движением* называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются *концентрическими окружностями* с центром на одной прямой, называемой *осью вращения*. Так, например, вал работающего мотора неподвижного автомобиля совершает вращательное движение. Неподвижная ось вращения проходит через неизменно связанные с телом точки, которые во время движения тела остаются в покое. Ось вращения может лежать вне тела или проходить сквозь тело. Вращательное движение вокруг неподвижной оси всегда будет плоским движением.

Движение колеса прямолинейно движущегося экипажа, автомобиля, вагона — сложное движение: оно состоит из вращения

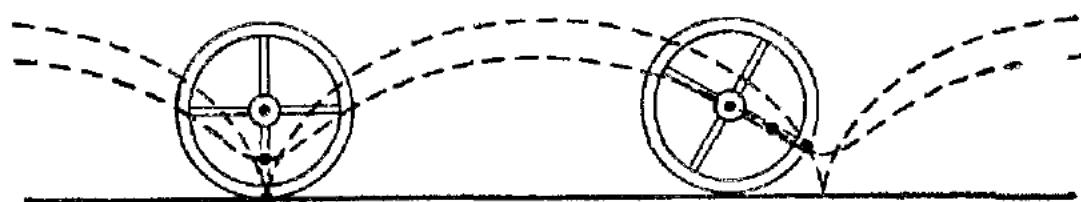


Рис. 132.

колеса вокруг своей оси и поступательного движения оси вместе с вагоном. Траектории различных точек колеса будут представлять сложные кривые — циклоиды (рис. 132). Траектории точек колеса относительно системы отсчета, связанной с вагоном, представляются окружностями. Смещение любой точки колеса относительно дороги состоит из двух частей: первая определяется перемещением оси, вторая — вращением колеса вокруг оси. Поэтому и скорость  $v$  любой точки колеса относительно дороги является суммой двух

скоростей: скорости оси  $v_0$  и линейной скорости вращательного движения вокруг оси  $\omega R = [\omega R]$  (рис. 133).

Вращение тела определяется величиной угловой скорости. Представим себе, что какая-то линия, проходящая через две точки

тела  $A$  и  $B$  и лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, занимает определенное положение в пространстве в момент времени  $t$ ; в следующий момент  $t + dt$  эта же линия занимает другое положение  $A'$  и  $B'$ , которое составляет с прежним положением некоторый угол  $d\alpha$ .

Величину, равную  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ , называют угловой скоростью тела. Очевидно, что угловая скорость не зависит от выбора точек  $A$  и  $B$  в любой плоскости, перпендикулярной к оси;

следовательно, угловая скорость определяет вращение всего тела в целом.

Как уже было сказано (§ 47), угловую скорость обозначают вектором, направленным параллельно оси вращения.

### § 51. Условия равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось

Мы полагаем, что в абсолютно твердом теле точки сохраняют неизменное положение относительно друг друга, т. е. тело недеформируемо. Если две одинаковые силы приложены к твердому телу в двух точках  $A$  и  $B$  и направлены в разные стороны по линии  $AB$ , то результирующее действие их равно нулю, т. е. действие сил не изменит движения тела. Поэтому в твердом теле (где нет деформаций) можно переносить силу в любую точку по линии ее действия (рис. 134, а).

Действительно, в любой точке  $B$ , лежащей на линии действия силы  $F$ , приложенной в точке  $A$ , можно приложить две равные и противоположные силы  $F_1$  и  $F_2$ , одна из которых, а именно  $F_2$ , равна  $F$ . Сумма сил  $F_1 + F = 0$ ; следовательно, на тело действует только сила  $F_2$ , приложенная в точке  $B$ . Другими словами, действие силы  $F$  можно заменить действием силы  $F_2$ . Математически это формулируют так: действие силы на твердое тело можно представить скользящим вектором, величина и направление которого не изменяются при перемещении его вдоль линии действия. Векторы, связанные с определенной точкой, называются полярными.

Известно, что равновесие тела, вращающегося вокруг оси, существует только в том случае, когда сумма моментов всех сил равна нулю.

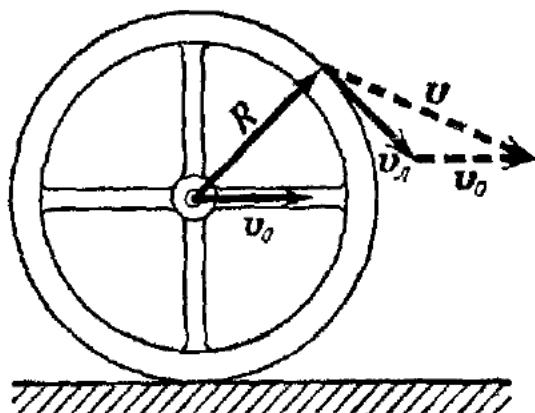


Рис. 133.

Необходимость введения момента сил очевидна из простых опытов с равновесием тела, вращающегося вокруг своей оси под действием нескольких сил. Например, на вал с диском действуют две силы  $f$  и  $F$  (рис. 134, б). Если трение в подшипниках вала мало,

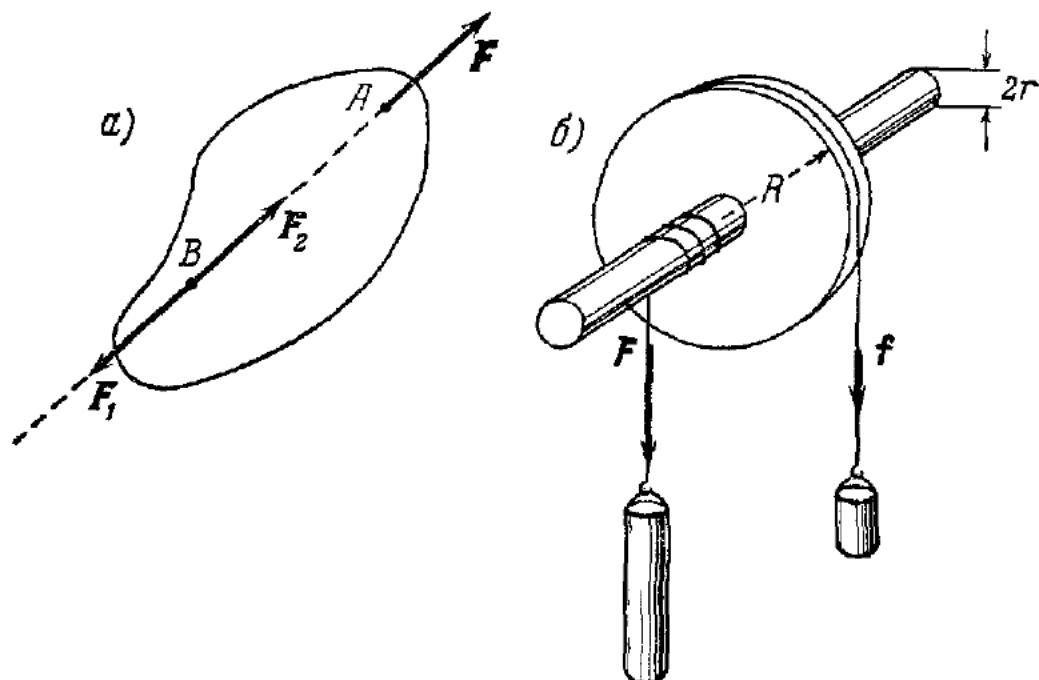


Рис. 134

то равновесие имеет место только при условии  $fR = Fr$ , т. е. когда моменты сил равны по величине и противоположны.

*Моментом силы относительно оси называется физическая величина, численно равная произведению силы на плечо, причем моменты сил, вращающих в одну сторону, мы считаем положительными, а в другую — отрицательными. Плечом силы относительно данной оси называется кратчайшее расстояние между осью вращения тела и линией действия силы.*

Следовательно, при определении покоя или равновесия тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной оси, нужно знать не силы, а моменты сил относительно оси вращения, которые будут играть такую же роль, как силы при движении точки.

Определим точнее физическую величину — момент силы относительно оси. В общем случае, когда сила, приложенная к телу, направлена как угодно, ее можно разложить на две составляющие: одну, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения,  $F_{\perp}$ , и вторую, параллельную оси вращения,  $F_0$  (рис. 135). Сила  $F_0$ , параллельная оси вращения  $OO'$ , не может вращать тело вокруг оси, наличие ее

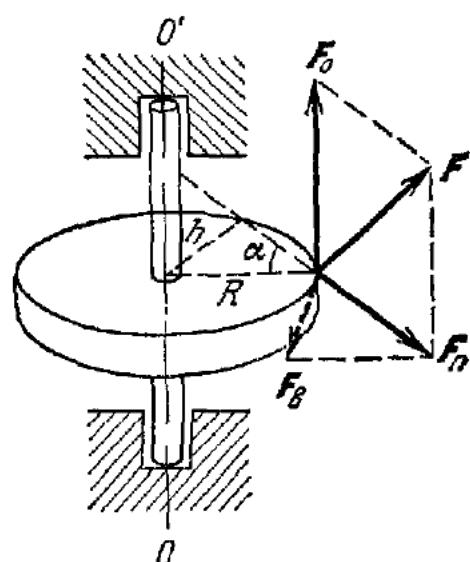


Рис. 135.

не окажет никакого влияния на равновесие твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Сила  $F_0$  будет изгибать ось, деформировать ее и тело, но пока мы рассматриваем движение твердого недеформируемого тела и поэтому не считаемся с составляющей  $F_0$ . Следовательно, при определении момента силы относительно оси мы должны учитывать действие только составляющей  $F_n$ , которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Поэтому момент любой силы относительно оси будет равен произведению составляющей  $F_n$  на плечо  $h$ , или, как легко видеть из рис. 135, произведению вращательной составляющей  $F_v$  на расстояние  $R$  от точки приложения силы до оси. Вращательная составляющая  $F_v$  перпендикулярна к плоскости, проходящей через линию  $R$  и ось. Итак, величина момента  $M$  относительно оси равна

$$M = F_n h = F_v R. \quad (51.1)$$

Теперь сформулируем условие равновесия твердого тела, имеющего неподвижную ось: *равновесие имеет место в том случае, когда сумма моментов относительно оси вращения равна нулю.*

## § 52. Закон динамики вращения тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси траектории всех частиц являются окружностями, центры которых лежат на одной прямой линии, являющейся осью вращения.

Все частицы тела совершают плоское движение, причем скорости и ускорения различных частиц, вообще говоря, различны: чем дальше частица от оси, тем большее ее скорость. А угловая скорость вращения *одинакова* для всех частей тела: она полностью определяет движение всего твердого тела при его вращении около неподвижной оси.

Если угловая скорость изменяется во времени (растет или убывает), то, так же как и при изменении линейной скорости точки, это изменение характеризуют *угловым ускорением*, или «скоростью» изменения угловой скорости, т. е. производной  $\frac{d\omega}{dt}$ . Так как в данный момент угловая скорость одинакова для всех частей твердого тела, то, очевидно, одинаково и угловое ускорение  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ .

Линейное ускорение каждой частицы тела различно, и лежит оно в плоскости траектории частицы. Выясним, как связана с угловым ускорением  $\beta$  составляющая ускорения частицы по касательной к траектории. На рис. 136 показана траектория какой-то частицы, скорость которой равна  $v = \omega r$ , где  $r$  — расстояние частицы

от оси. Касательная составляющая ускорения  $w_t$  определяется изменением скорости  $v$  вдоль траектории, она равна

$$w_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\beta, \quad (52.1)$$

так как  $r$  постоянно во времени. Следовательно, касательная составляющая ускорения частицы тела равна угловому ускорению  $\beta$  тела, умноженному на расстояние  $r$  частицы от оси.

Теперь установим связь между угловым ускорением и моментом сил, которые действуют на тело, вращающееся вокруг оси. Такая закономерная связь должна существовать потому, что равновесие (покой или равномерное вращение) определяется равенством

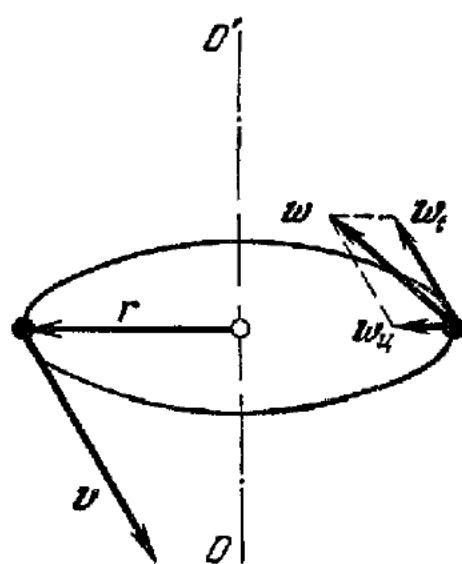


Рис 136.

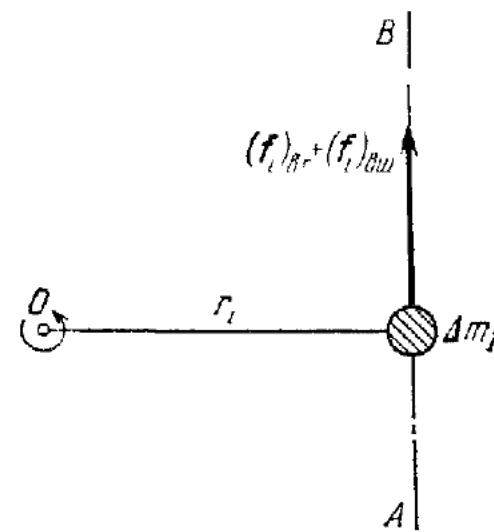


Рис 137.

нулю моментов сил. Действительно, как только момент сил относительно оси покоящегося тела будет не равен нулю, нарушится равновесие и возникнет угловое ускорение тела.

Для отыскания связи между угловым ускорением тела и моментами сил, действующих на него, рассмотрим вначале движение одной какой-то выделенной частицы тела. Пусть частица, имеющая массу  $\Delta m_i$ , находится на расстоянии  $r_i$  от оси (рис. 137). Допустим, что на частицу действуют какие-то внешние и внутренние силы: внешние приложены со стороны других тел, а внутренние — со стороны частиц самого тела. Спроектируем эти силы на перпендикулярную к  $r_i$  линию  $AB$ , лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси. Пусть величина этой проекции равна

$$(f_i)_{вт} + (f_i)_{вш},$$

где  $(f_i)_{вт}$  — вращательная составляющая внутренних сил,  $(f_i)_{вш}$  — вращательная составляющая внешних сил. Силы, врачающие

против часовой стрелки, считаем положительными. Тогда второе уравнение динамики для  $i$ -й частицы тела можно записать так:

$$\Delta m_i \frac{dv_i}{dt} = \Delta m_i r_i \frac{d\omega}{dt} = (f_i)_{вт} + (f_i)_{вн}. \quad (52.2)$$

Найдем момент силы, действующей на частицу, относительно оси; для этого умножим (52.2) на  $r_i$  и получим

$$\Delta m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = r_i (f_i)_{вт} + r_i (f_i)_{вн}. \quad (52.3)$$

Теперь запишем аналогичные равенства для всех частиц, составляющих данное твердое тело, и сложим их друг с другом; в результате получим

$$\frac{d\omega}{dt} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i r_i (f_i)_{вт} + \sum_i r_i (f_i)_{вн}. \quad (52.4)$$

Прежде всего отметим, что  $\sum_i r_i (f_i)_{вт} = 0$ , т. е. момент внутренних сил равен нулю. В самом деле, каждая внутренняя сила имеет равную и противоположную себе силу, приложенную к другой частице тела, с тем же самым плечом.

Сумма  $\sum_i r_i (f_i)_{вн} = M$  представляет вращающий момент всех внешних сил, действующих на тело. Величина

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (52.5)$$

носит особое название: *момент инерции* относительно данной оси вращения.

Теперь запишем уравнение (52.4) так:

$$M = I \frac{d\omega}{dt}; \quad (52.6)$$

оно читается: *момент внешних сил, вращающих тело вокруг данной оси, равен моменту инерции тела относительно этой оси, умноженному на угловое ускорение тела*. Это и есть основной закон динамики для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Он формулируется так же, как и второй закон динамики для движения точки, только вместо силы здесь входит момент сил относительно оси, вместо линейного ускорения — угловое ускорение, вместо массы — момент инерции тела относительно оси вращения.

Момент инерции твердого тела относительно оси есть физическая величина, которая равна сумме произведений массы каждой частицы, входящей в состав данного тела, на квадрат расстояния от этой частицы до оси. Момент инерции относительно данной оси зависит не только от величины массы тела, но и от распределения

масс относительно оси. Удаляя частицы тела от оси, мы тем самым увеличиваем момент инерции тела.

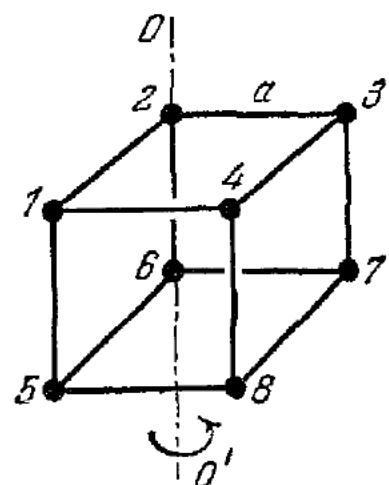
Размерность момента инерции в системе СИ —  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , в системе СГС  $\text{г}\cdot\text{см}^2$ .

Для вычисления момента инерции необходимо разбить тело на достаточно малые частицы, определить расстояние каждой частицы от оси, затем умножить массу каждой частицы на квадрат ее расстояния до оси, проделать это для каждой частицы и результаты сложить вместе. Например, для тела, состоящего из восьми одинаковых шариков, расположенных по вершинам куба, ребро которого равно  $a$  (рис. 138), момент инерции относительно оси, проходящей через ребро куба, будет равен

$$I = 4ma^2 + 2m(a^2 + a^2) = 8ma^2,$$

где  $m$  — масса одного шарика. Момент инерции четырех шариков ( $1, 3, 5, 7$ ) будет равен  $4ma^2$ , а двух шариков ( $4, 8$ ) также равен  $4ma^2$ , момент инерции шариков ( $2, 6$ ) равен нулю. Заметим, что такое вычисление справедливо, если диаметр шариков очень мал по сравнению с  $a$ .

Рис. 138.



О вычислении моментов инерции сплошных однородных тел будет сказано далее, в § 59.

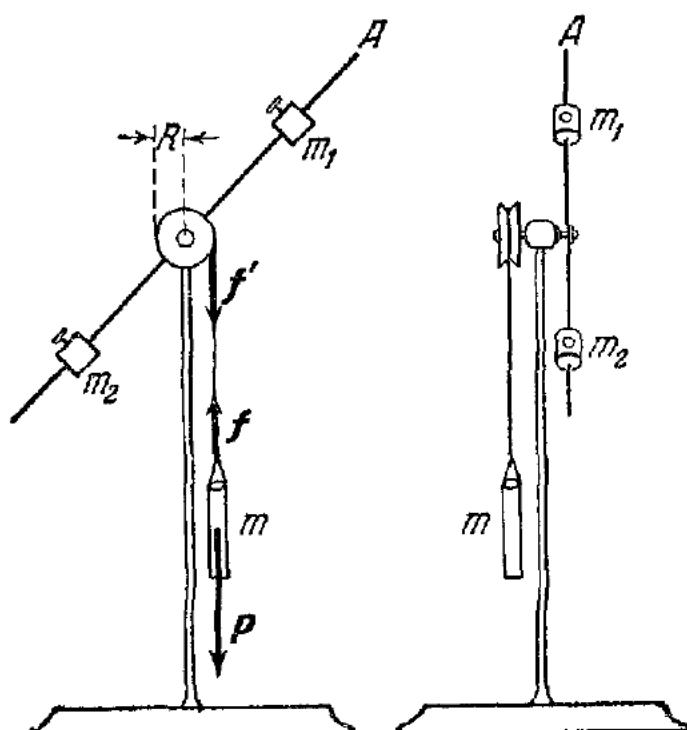


Рис. 139.

Физическую роль и значение момента инерции можно видеть во всех примерах, где рассматривается вращение тела, закрепленного на оси. Например, пустая бадья, опускающаяся в колодец, будет тем медленнее опускаться, чем больше момент инерции ворота. Движение бадьи и влияние момента инерции ворота можно легко демонстрировать с помощью прибора, показанного в двух проекциях на рис. 139. С небольшим блоком, вращающимся на горизонтальной оси, жестко соединен стержень  $A$ , на котором на определенных равных расстояниях от оси вращения укреплены грузы  $m_1$  и  $m_2$ . На блок намотана веревочка, к свободному концу которой привязан груз массы  $m$ . Груз, опускаясь, приводит во вращение блок и стержень  $A$ .

Если мы придвинем грузики на стержень  $A$  к оси, то будем наблюдать довольно быстрое опускание груза  $m$  — момент инерции стержня с грузами сравнительно мал. Если же передвинем грузы на стержне  $A$  к концам, увеличим момент инерции во много раз, то будем наблюдать очень медленное опускание груза  $m$  и медленное вращение.

Если мы придвинем грузики на стержень  $A$  к оси, то будем наблюдать довольно быстрое опускание груза  $m$  — момент инерции стержня с грузами сравнительно мал. Если же передвинем грузы на стержне  $A$  к концам, увеличим момент инерции во много раз, то будем наблюдать очень медленное опускание груза  $m$  и медленное вращение.

Рассмотрим подробнее движение грузов и найдем закон движения. Прежде всего отметим, что когда вся веревочка размотается, то стержень  $A$  по инерции будет продолжать вращаться в том же направлении, наматывая обратно веревочку на блок, вследствие чего груз  $m$  будет подниматься. Когда вращение стержня прекратится, груз  $m$  опять начнет опускаться и процесс колебаний груза вверх и вниз будет продолжаться в том же порядке далее. Очевидно, что ускорения движущихся тел (угловое ускорение вращающегося блока со стержнем и линейное ускорение груза  $m$ ) будут постоянными во времени и одинаковыми при подъеме и спуске груза  $m$ . Действительно, «движущей» силой является сила тяготения груза  $P = mg$ , которая постоянна и всегда направлена вниз.

Составим уравнение динамики для вращающегося стержня (с грузиками) и груза  $m$ . Обозначим угловое ускорение через  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$  и запишем уравнения:

$$\begin{aligned} \text{для стержня } f'R &= I\beta, \\ \text{для груза } P - f &= ma, f = f', \end{aligned} \quad (52.7)$$

где  $f$  и  $f'$  — силы натяжения веревочки,  $I$  — момент инерции блока со стержнем,  $R$  — радиус блока,  $a$  — линейное ускорение груза. Угловое ускорение блока и ускорение груза связаны между собой следующим соотношением:

$$a = R\beta,$$

так как поворот блока на малый угол  $\alpha$  соответствует вертикальному смещению груза  $m$  на величину  $\Delta = R\alpha$ . Действительно, дифференцируя  $\Delta = R\alpha$  два раза, получаем указанные соотношения, так как  $\frac{d^2\Delta}{dt^2} = a$  и  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \beta$ .

Решая уравнения (52.7), получаем угловое ускорение блока  $\beta$  и угловое ускорение груза  $a$ :

$$\beta = \frac{g}{R} \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}}, \quad a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}. \quad (52.8)$$

Отсюда видно, что ускорение  $a$  может быть очень малым по сравнению с  $g$ , если  $I \gg mR^2$ <sup>1)</sup>.

Изменяя на стержне расстояния грузиков от оси вращения, мы изменяем момент инерции  $I$ , а следовательно, и время подъема и опускания груза. Можно опытным путем определить время опускания груза на какое-то расстояние и на основании этого вычислить ускорение  $a$ , а затем, измерив величины  $m$  и  $R$ , определить  $I$  по формуле (52.8).

### § 53. Момент количества движения

При анализе вращательного движения тела вместо силы выступает момент ее, вместо массы тела — момент инерции тела относительно оси; но какая величина будет аналогична количеству движения точки? Такой величиной является *момент количества движения* тела относительно оси.

*Моментом количества движения* отдельной частицы тела с массой  $\Delta m$ , называют произведение расстояния от оси вращения до

<sup>1)</sup> Заметим, что выведенные нами закономерности неверны вблизи низшей точки опускания груза, когда веревочка переходит с одной стороны блока на другую. Движение груза  $m$  здесь будет происходить и в горизонтальном направлении и момент, вращающий блок, не будет равен  $fR$ .

частицы  $r_i$  на величину количества движения этой частицы  $\Delta m_i v_i$ . Таким образом, момент количества движения частицы численно равен

$$\Delta m_i v_i r_i. \quad (53.1)$$

Момент количества движения твердого тела относительно оси есть сумма моментов количества движения отдельных частиц, равная

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i v_i. \quad (53.2)$$

Выражение для момента количества движения можно представить так:

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i r_i \omega = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I \omega. \quad (53.3)$$

Величина момента количества движения твердого тела относительно оси численно равна произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость.

Теперь основной закон динамики для твердого тела, вращающегося вокруг оси, можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = M, \quad (53.4)$$

или: производная момента количества движения тела относительно оси вращения равна моменту сил относительно той же оси.

Если момент внешних сил  $M$  равен нулю, то момент количества движения тела остается постоянным:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad N = \text{const}, \quad I \omega = \text{const}. \quad (53.5)$$

Это есть формулировка закона *сохранения* момента количества движения.

Вращение твердого тела вокруг оси при  $M = 0$ , т. е. вращение с постоянным моментом количества движения, аналогично движению точки «по инерции», когда  $m v = \text{const}$ . Но имеется некоторое различие между этими аналогичными случаями: движение «по инерции» точки есть движение с постоянной скоростью, когда масса точки остается постоянной, а движение тела с постоянным моментом количества движения  $N$  — это не всегда движение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , так как момент инерции тела  $I$  можно легко изменить во время движения. Так, например, если у тела, которому предварительно сообщено вращение, изменить момент инерции, то скорость вращения  $\omega$ , вообще, изменится. Если при этом и момент внешних сил равен нулю, то угловая скорость  $\omega$  будет изменяться обратно пропорционально моменту

инерции. Такое изменение угловой скорости можно часто наблюдать, например, при вращении катящихся на коньках по льду; это же изменение угловой скорости можно легко продемонстрировать на скамейке Жуковского.

Для демонстрации законов динамики тел Н. Е. Жуковский предложил устроить скамейку, которая может с очень малым трением вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 140). Экспериментатор берет в руки гантели и садится на скамейку, затем, вытянув руки как можно дальше от себя, он сообщает ногой некоторое

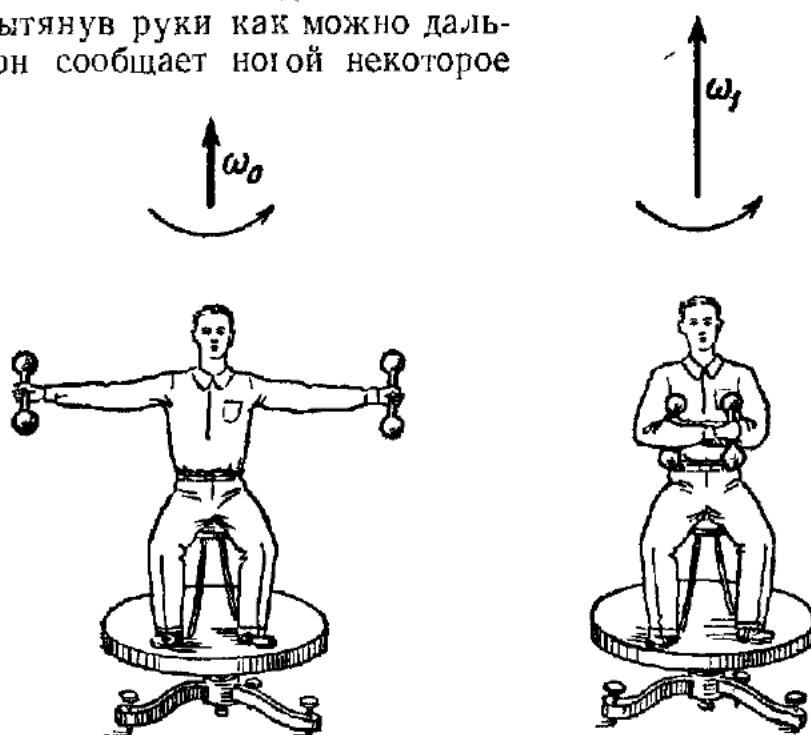


Рис. 140.

вращение скамейке. Во время вращения, не касаясь ногами пола, экспериментатор подносит руки к груди, и скорость вращения при этом резко увеличивается; далее, разводя руки в стороны, экспериментатор опять уменьшает скорость своего вращения. Изменяя момент инерции  $I$ , экспериментатор изменяет скорость вращения  $\omega$ , так как произведение  $I\omega$  должно оставаться

неизменным, потому что моменты внешних сил равны нулю (моментом сил трения можно пренебречь).

Катающийся на коньках, желая сообщить своему телу быстрое вращение (сделать «волчок»), во время начального голчка отбрасывает в сторону руки и ногу, а затем прижимает руки к телу и соединяет ноги, выпрямляясь, резко уменьшая тем самым момент инерции вокруг вертикальной оси, в результате получает быстрое вращение.

Воспользуемся законом количества движения (53.4) для анализа вращения

двух взаимодействующих тел в следующем опыте, предложенным С. Э. Хайкиным: статор небольшого электрического моторчика установлен на шарикоподшипниках так, что он может вращаться на одной оси с ротором (рис. 141). В обмотку мотора пускают электрический ток через кольца, установленные на статоре, вследствие чего и статор и ротор совершают вращение в разные сто-

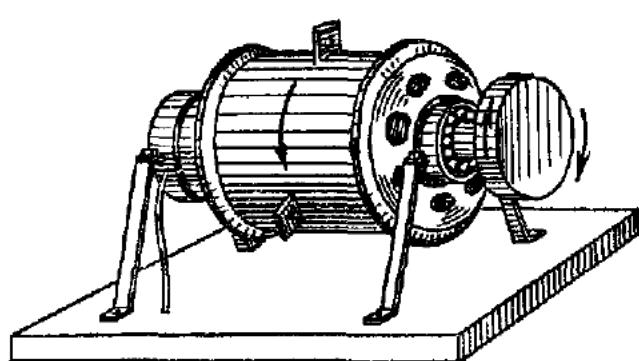


Рис. 141.

роны. Если моментом сил трения статора можно пренебречь, то моменты количества движения каждого из них равны и противоположны. Действительно, магнитные силы взаимодействия между ротором и статором и силы трения между ними являются внутренними силами, момент этих сил, действующих на статор, равен и противоположен моменту сил, действующих на ротор. Внешним моментом является только момент силы трения в шарикоподшипниках и кольцах статора. Если этот момент очень мал, то система ротор—статор имеет общий момент количества движения, равный нулю, следовательно, моменты количества движения статора и ротора равны и противоположны в любой момент времени.

В действительности всегда имеет место, хотя и очень малый, момент внешних сил трения, действующих в основном на статор, и поэтому момент количества движения статора будет немного меньше, чем момент количества движения ротора. При раскручивании можно не считаться с этим моментом, ибо разница между моментами количества движения ротора и статора обычно достаточно мала по сравнению с величиной каждого из моментов количества движения. Но с этой разницей приходится считаться при анализе остановки вращения статора и ротора после выключения тока. В самом деле, если выключим ток и будем наблюдать остановку вращения под действием сил трения, то увидим такую картину. сначала остановится статор, затем ротор увлечет статор, и они оба будут вертеться в сторону ротора, пока, наконец, вся система не остановится. Очевидно, если бы не было внешнего момента сил трения и моменты количества движения статора и ротора были бы одинаковы, то они под действием сил взаимного трения (внутренних сил) должны были бы остановиться одновременно, так как полный момент количества движения системы в каждый момент времени — нуль. Но при выключении тока момент количества движения ротора больше, чем статора, и, кроме того, тормозящий момент на статор больше, чем на ротор; следовательно, разница между ними со временем будет увеличиваться и статор остановится раньше ротора. Далее трение движущегося ротора о статор вызовет его движение.

## § 54. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия вращающегося тела слагается из суммы кинетических энергий отдельных частиц тела. Кинетическая энергия частицы, находящейся на расстоянии  $r$  от оси, равна

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \omega^2 \frac{\Delta m_i r_i^2}{2}, \quad (54.1)$$

так как  $v_i = \omega r_i$ , а кинетическая энергия всего вращающегося тела

$$E_{\text{кин}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2} \quad (54.2)$$

выражается так же, как и кинетическая энергия тела при поступательном движении, только вместо массы следует подставить момент инерции тела  $I$ , а вместо линейной скорости — угловую скорость  $\omega$ .

Работу сил при вращении тела около неподвижной оси можно представить обычным способом: определить скалярное произведение

ние каждой силы на путь, проходимый точкой приложения силы. Но можно выразить эту работу через момент сил. Точка приложения силы  $F$  движется по кругу радиуса  $R$ ; возьмем проекцию силы на касательную к этому кругу  $F_v$ ; за время  $dt$  точка приложения силы смешилась на  $R d\alpha$ , где  $d\alpha$  — угол, на который повернулось тело. Поэтому работа сил за время  $dt$  будет равна

$$F_v R d\alpha.$$

Величина  $F_v R$  равна моменту силы  $M$ , и, следовательно, работу можно записать так:

$$M d\alpha.$$

А работа за промежуток времени  $t$  будет равна  $\int_0^t M d\alpha$ . Иначе говоря, при вращении работа силы измеряется произведением момента сил на угол поворота, а при переменном моменте сил — интегралом от момента по углу поворота.

Можно показать, что если к телу приложен только момент сил  $M$ , то работа сил будет равна увеличению кинетической энергии. Действительно, по закону динамики (52.6)

$$M = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (54.3)$$

где  $I$  — момент инерции,  $\omega$  — угловая скорость; умножим обе половины равенства на  $d\alpha = \omega dt$  — угол, на который тело повернулось за время  $dt$ . В результате

$$M d\alpha = I \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I d\left(\frac{\omega^2}{2}\right),$$

или работа сил за время  $t$  равна

$$\int_0^t M d\alpha = I \int_0^t d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_t - \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_0. \quad (54.4)$$

Таким образом, сформулированное в начале абзаца положение доказано<sup>1)</sup>.

Теперь мы можем сравнить движение точки с вращательным движением твердого тела относительно неподвижной оси следующим образом:

---

<sup>1)</sup> Формулы (54.3) и (54.4) справедливы при  $I = \text{const}$ .

Движение материальной точки	Вращение твердого тела вокруг оси
Масса $m$	Момент инерции относительно оси $I$
Равнодействующая внешних сил $F$	Сумма моментов внешних сил относительно оси $M$
Смещение $x$	Угол поворота $\alpha$
Скорость $v$	Угловая скорость вращения $\omega$
Ускорение $a$	Угловое ускорение $\beta$
Количество движения $K = mv$	Момент количества движения относительно оси $N = I\omega$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	Кинетическая энергия $I\omega^2/2$
Работа $F dx$	Работа $M d\alpha$
Второй закон динамики	Закон динамики
$F = ma$ , или $F = \frac{dK}{dt}$	$M = I\beta$ , или $M = \frac{dN}{dt}$

Рассмотрим несколько опытов, в которых изменяется кинетическая энергия вращающихся тел. Прежде всего проследим, как изменяется кинетическая энергия вращающегося тела в опытах на скамье Жуковского (см. рис. 140), описанных в предыдущем параграфе. При вращении экспериментатора с гантелями в руках кинетическая энергия вращающегося тела изменяется, а именно, она возрастает при уменьшении момента инерции. В самом деле, момент количества движения  $I\omega$  остается постоянным, а  $\omega$  возрастает; следовательно, энергия, равная  $I\omega^2/2$ , возрастает. Экспериментатор совершает некоторую работу против центробежных сил инерции; за счет этой работы экспериментатора увеличивается кинетическая энергия системы. При удалении грузов от оси происходит обратное, кинетическая энергия уменьшается на величину работы, совершенной центробежными силами инерции при движении грузов вдоль радиусов.

Предлагаем в качестве упражнения рассчитать, что работа, совершаемая экспериментатором при приближении грузов, в точности равна изменению кинетической энергии.

Так же и в опытах с раскручиванием статора и ротора (рис. 141), когда кинетическая энергия возрастает: если допустимо пренебречь внешними силами трения, то в каждый момент кинетическая энергия тела, имеющего больший момент инерции, будет меньше. Пусть момент инерции статора в 4 раза больше, чем момент инерции ротора; тогда угловая скорость ротора в 4 раза больше угловой скорости статора. Так как момент количества движения ( $I\omega$ ) статора и ротора одинаков, то, следовательно, кинетическая энергия статора в 4 раза меньше кинетической энергии ротора. Тело, имеющее меньший момент инерции, «примет» большее количество энергии, когда оба тела «раскручиваются» внутренними силами. Работа, затраченная источником электромагнитных сил, распределится между статором и ротором обратно пропорционально моменту инерции каждого из них.

Поучительно рассмотреть изменение кинетической энергии в следующей задаче. К ротору центробежной машины прикреплен стержень  $A$  (рис. 142) перпендикулярно к оси. На стержень насыжены два одинаковых шара, которые могут скользить по нему. Вначале два шара соединены нитью; отсоединив ротор от привода, сообщают ему рукой некоторую угловую скорость  $\omega_0$ , а затем пережигают нить, соединяющую шары. Шары, естественно, удаляются к концам стержня, у которых поставлены на одинаковых расстояниях упоры, так что

шары не могут соскочить со стержней. Какова будет скорость вращения ротора, если силами трения можно пренебречь?

Будем решать задачу так. допустим, что вначале шары были на расстоянии  $R_0$  от центра, а в момент  $t$  находятся на расстоянии  $R$ . Тогда угловая

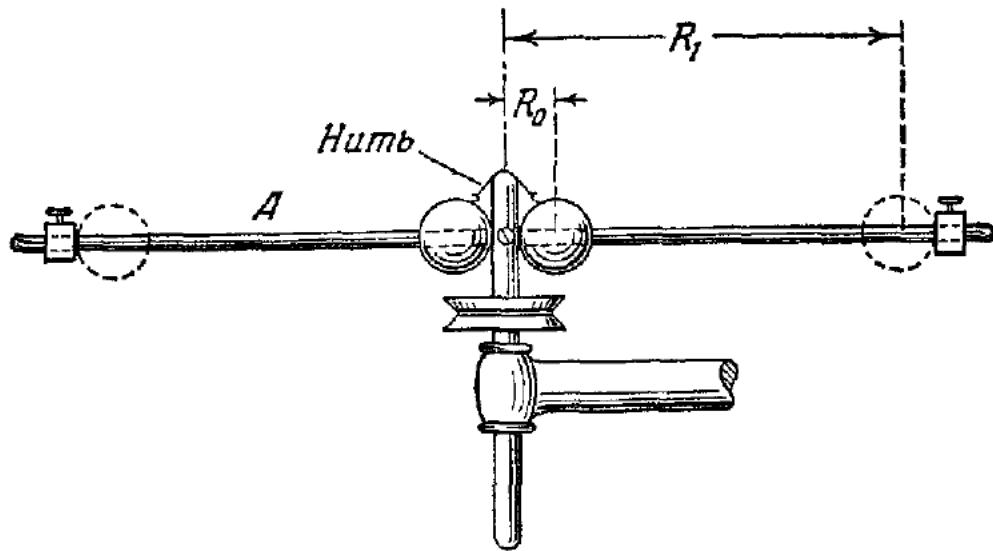


Рис. 142.

скорость вращения может быть найдена из условия постоянства момента количества движения.

$$N = (I_0 + 2mR_0^2) \omega_0 = (I_0 + 2mR^2) \omega = \text{const}, \quad (54.5)$$

где  $m$  — масса шара, а  $I_0$  — момент инерции ротора и стержня. Кинетическая энергия вращения в этот момент будет равна

$$E = \frac{1}{2} (I_0 + 2mR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} N\omega. \quad (54.6)$$

Когда шары остановятся у упоров на расстоянии  $R_1$  от оси, то угловая скорость вращения согласно равенству (54.5) будет равна

$$\omega_1 = \frac{N}{I_0 + 2mR_1^2}. \quad (54.7)$$

Очевидно, угловая скорость уменьшается; следовательно, уменьшается и кинетическая энергия на величину

$$\Delta E = \frac{1}{2} N (\omega_0 - \omega_1). \quad (54.8)$$

Куда, в какую форму и каким образом перешла энергия  $\Delta E$ ? Ведь мы полагали, что сил трения нет. Чтобы разобраться в этом, просмотрим еще раз наши рассуждения.

Прежде всего, выражение (54.6) показывает, что кинетическая энергия вращения стала уменьшаться, как только шары начали двигаться ( $R > R_0$ ): момент количества движения постоянен, а угловая скорость падает. Это противоречит закону сохранения энергии. Следовательно, формула (54.6) не учитывает всю кинетическую энергию движущихся тел. Так оно и есть. В выражение (54.6) не входит кинетическая энергия движения шаров вдоль радиуса; убыль энергии, показываемая формулой (54.8), как раз и дает величину этой энергии.

При ударе шаров, после которого они остановились около упоров, вся кинетическая энергия движения вдоль стержня превратилась в тепловую, как при всяком неупругом ударе. Величину энергии, перешедшей в тепловую, и показывает формула (54.8).

Интересно знать, что было бы при упругом ударе шаров об упоры, т. е. при отсутствии перехода энергии механической в тепловую? Очевидно, что при упругом ударе шары, имевшие скорость  $v_0$  вдоль радиуса, после удара отскочат с той же скоростью  $v_0$  назад к центру. Центробежная сила будет тормозить их движение, угловая скорость вращения будет опять возрастать; шары остановятся только при  $R = R_0$ , когда угловая скорость примет начальное значение  $\omega_0$ . Затем шары пойдут к периферии, и процесс будет периодически повторяться: шары будут совершать колебания вдоль радиуса, угловая скорость будет также периодически изменяться и т. д. Описанная картина имеет место в отсутствие сил трения при вращении диска и при скольжении шаров вдоль стержня.

В действительности же шары сразу не останавливаются у упоров и явление протекает так: шары отскакивают от упоров на небольшое расстояние, после нескольких последовательных, все уменьшающихся ударов шары окончательно останавливаются у упоров. Кинетическая энергия шаров переходит в тепловую как при скольжении вдоль стержня, так и при ударах, и общее количество рассеянной энергии будет равно  $\Delta E$  (см. (54.8)), если не считаться с потерей энергии вследствие трения при вращении ротора и стержня.

## § 55. Центр тяжести и центр инерции твердого тела

При любом движении твердого тела существенно знать движение одной замечательной точки твердого тела, называемой *центром инерции* (или *центром масс*). Центр инерции совпадает с известным из курса физики средней школы *центром тяжести тела*. Рассмотрим способы определения центра тяжести твердого тела.

На каждую частицу твердого тела действует сила тяготения Земли. Все силы тяготения *параллельны* друг другу, если размеры тела невелики относительно радиуса Земли<sup>1)</sup>, и имеют равнодействующую, величина которой равна сумме всех сил, так как все параллельные силы направлены в одну сторону. Оказывается, как бы ни повернули твердое тело, эта равнодействующая будет проходить через одну точку, неизменно связанную с телом. Эта точка называется *центром тяжести тела*.

Если укрепить тело в центре тяжести, то оно будет находиться в равновесии при любом положении тела. Следовательно, *сумма моментов сил тяжести всех частиц тела относительно любой горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю*. Подвешенное так тело после поворота вокруг любой оси, проходящей через центр тяжести, будет оставаться в равновесии, так как равнодействующая сил тяжести проходит через точку закрепления.

Выберем прямоугольную систему координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , связанную с телом, причем начало координат совпадает с центром тяжести. Обозначим координаты каждой частицы твердого тела, имеющей номер  $i$  и массу  $\Delta m_i$ , через  $x'_i$ ,  $y'_i$ ,  $z'_i$  (рис. 143). Повернем тело так, чтобы плоскость  $x' O' y'$  была горизонтальна; так как сумма моментов сил тяжести всех частиц тела относительно горизонталь-

<sup>1)</sup> Только в этом случае и можно ввести понятие центра тяжести тела.

ной оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю, то математически условия относительно осей  $x'$  и  $y'$ , определяющие центр тяжести, можно записать так:

$$\sum_i \Delta m_i g y'_i = 0, \quad \sum_i \Delta m_i g x'_i = 0.$$

Если повернем теперь тело на  $90^\circ$  вокруг оси  $y'$ , то ось  $z'$  будет горизонтальна, тогда и относительно нее сумма моментов сил тяжести должна быть равна нулю, или

$$\sum_i \Delta m_i g z'_i = 0.$$

Сокращая эти равенства на постоянную  $g$ , имеем такие условия:

$$\sum_i \Delta m_i x'_i = 0,$$

$$\sum_i \Delta m_i y'_i = 0, \quad (55.1)$$

$$\sum_i \Delta m_i z'_i = 0,$$

или

$$\sum_i \Delta m_i r'_i = 0; \quad (55.2)$$

здесь  $r'_i$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где находится частица с индексом  $i$ . Очевидно, что, как бы ни выбирали направления осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  относительно тела, равенства (55.1) и (55.2) выполняются.

Экспериментально центр тяжести можно определить следующим образом. Тело подвешивают за какую-нибудь точку; в состоянии равновесия это тело может занять только такое положение, при котором центр тяжести его будет находиться на вертикальной линии под точкой подвеса; каким-либо образом отмечают эту линию на теле, центр тяжести лежит где-то на ней. Затем подвешивают тело за другую точку и также отмечают вертикальную линию, центр тяжести, очевидно, найдется как пересечение этих двух линий.

Можно проверить опытом, что центр тяжести — единственная точка. Действительно, за какие бы точки мы ни подвешивали тело,

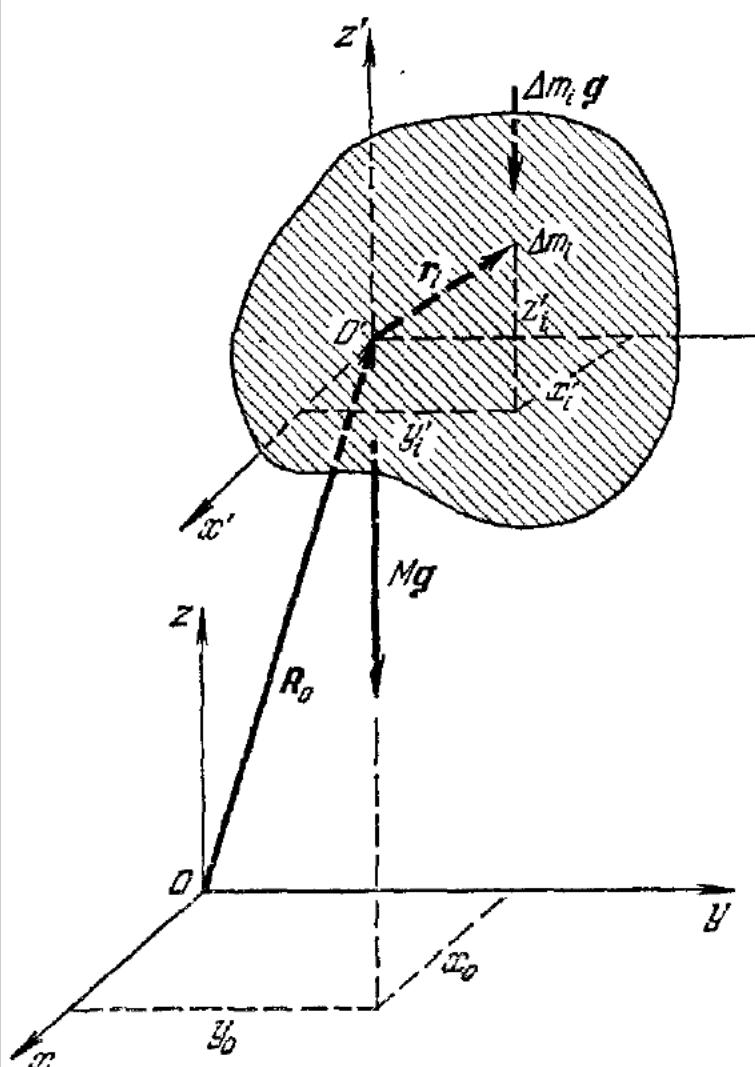


Рис. 143.

каждый раз линия отвеса будет проходить через центр тяжести тела.

Координаты центра тяжести тела относительно любой неподвижной системы координат можно найти, если известны координаты всех частиц тела относительно этой системы. Для этого нужно воспользоваться следующим условием: момент силы тяготения всего тела относительно любой оси должен быть равен сумме моментов сил тяготения всех частиц тела относительно той же оси.

Пусть имеем неподвижную систему координат  $Ox_{\text{уг}}$ , у которой оси  $x$  и  $y$  горизонтальны (см. рис. 143). Известны координаты  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  каждой частицы тела с массой  $\Delta m_i$ ; требуется найти координаты центра тяжести тела  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  относительно  $Ox_{\text{уг}}$ . В соответствии с вышеупомянутым условием запишем равенство моментов относительно каждой координатной оси:

$$mx_0g = \sum_i \Delta m_i x_i g, \quad my_0g = \sum_i \Delta m_i y_i g, \quad mz_0g = \sum_i \Delta m_i z_i g^1;$$

сокращая эти равенства на  $g$  и деля на  $m$  (массу тела), найдем координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{m}, \quad y_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i y_i}{m}, \quad z_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i z_i}{m}. \quad (55.3)$$

Если  $R_0$  — радиус-вектор с компонентами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , а  $r_i$  — радиус-вектор с компонентами  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , то формулы (55.3) можно записать так:

$$R_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i r_i}{m}. \quad (55.4)$$

Теоретическим путем центр тяжести обычно находят по формулам (55.3) и (55.4); если масса тела распределена непрерывно, то в эти формулы вместо сумм входят интегралы. Пусть плотность тела равна  $\rho$ ; тогда бесконечно малая частица с объемом  $dx dy dz$  и координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будет иметь массу  $\rho dx dy dz$  и, следовательно, координатах  $x_0$  в формулах (55.3) будет выражена так:

$$x_0 = \frac{\iiint p x \, dx \, dy \, dz}{m}; \quad (55.5)$$

аналогичные формулы будут и для других компонент.

У симметричных однородных тел центр тяжести лежит на оси симметрии. Центр тяжести некоторых сплошных тел может лежать вне тела; так, например, центр тяжести кольца, гайки, шайбы и т. д. лежит вне тела. При отыскании центра тяжести тела можно его разбить на части, найти центры тяжести каждой из них, а затем, полагая массу каждой части сосредоточенной в ее центре тяжести, определить центр тяжести всего тела.

Центр тяжести как точка приложения равнодействующей сил тяготения имеет смысл лишь для малых тел (размеры которых малы по сравнению с радиусом Земли) и только тогда, когда силы тяжести отдельных частиц тела можно считать параллельными. В противном случае не существует одной точки, связанной с телом, через которую всегда проходит равнодействующая. Покажем это на простом примере.

<sup>1)</sup> Для получения последнего равенства мы, как и выше, повернули координатную систему  $Ox_{\text{уг}}$  вокруг оси  $x$  (или оси  $y$ ) вместе с телом.

Где проходит равнодействующая сил, действующих на две одинаковые материальные точки, находящиеся на концах воображаемого невесомого стержня  $AB$  длиною, равной  $2R$  — двум радиусам Земли? Пусть стержень расположен так, как показано на рис. 144, а; тогда равнодействующая сил тяготения проходит через точку  $C$  оси стержня, лежащую вблизи  $A$ . Простое геометрическое построение, учитывающее, что сила тяготения в точке  $B$  в 5 раз меньше по величине силы тяготения в точке  $A$ , определяет положение точки  $C$  на оси стержня. При таком расположении стержня, как показано на рис. 144, б, очевидно, что равнодействующая сил тяготения проходит через середину стержня — точку  $C'$ . Ясно, что, располагая стержень различным образом, каждый раз будем находить различные точки на оси стержня, через которые проходит равнодействующая сил тяготения.

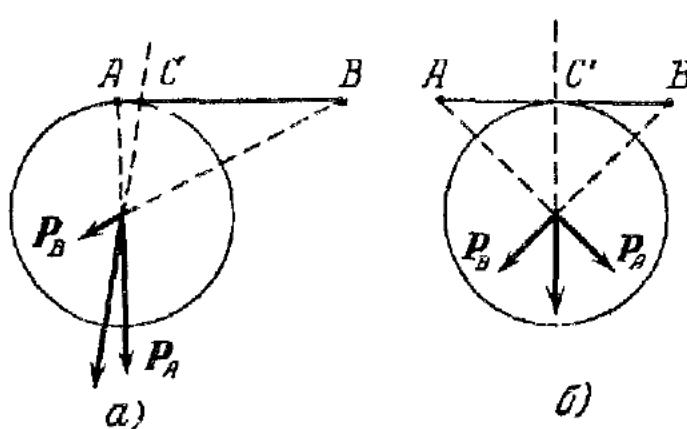


Рис. 144.

нескольких различных тел, не связанных неизменно друг с другом. В этом случае центр тяжести системы тел определяется также по формулам (55.3), в которых под  $m$  подразумевается сумма масс всех тел. Положение центра тяжести изменяется со временем как в пространстве, так и относительно самих тел.

Представим себе, что к каждой частице тела приложены *массовые параллельные силы*, т. е. силы, величина которых пропорциональна массе частицы. Равнодействующая этих сил, как и параллельных сил тяготения, при любом их направлении проходит через одну и ту же точку, неизменно связанную с телом. Эта точка и называется *центром инерции* или *центром масс* и определяется по формулам (55.3) и (55.4). Очевидно, что центр тяжести и центр инерции совпадают, поэтому иногда их не различают.

### § 56. Закон движения центра инерции тела

Суть этого закона заключается в следующем. Допустим, что мы рассматриваем движение ящика по гладкому полу или льду (рис. 145).

Потянем за веревку, которая привязана к углу ящика; ящик будет двигаться и вращаться, он будет иметь угловое ускорение и угловую скорость, движение ящика будет сложным движением. Но замечательно то, что в сложном движении твердого тела под действием силы  $F$ , приложенной в любой точке тела, его *центр*

инерции будет двигаться с ускорением  $\mathbf{a}$ , совпадающим по направлению с направлением силы  $\mathbf{F}$  и равным  $F/m$ , где  $m$  — масса всего тела.

Центр инерции твердого тела движется так, как если бы к нему были приложены все внешние силы и масса всего тела была бы сосредоточена в центре инерции.

Теперь докажем это положение. При любом сложном движении твердого тела важную роль играет движение его центра инерции (или центра масс). Напомним, что положение центра инерции тела определяется формулами (55.2) или (55.4), а именно: радиусы-векторы всех частиц тела  $\mathbf{r}'_i$ , проведенные из центра инерции, удовлетворяют условию

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad (56.1)$$

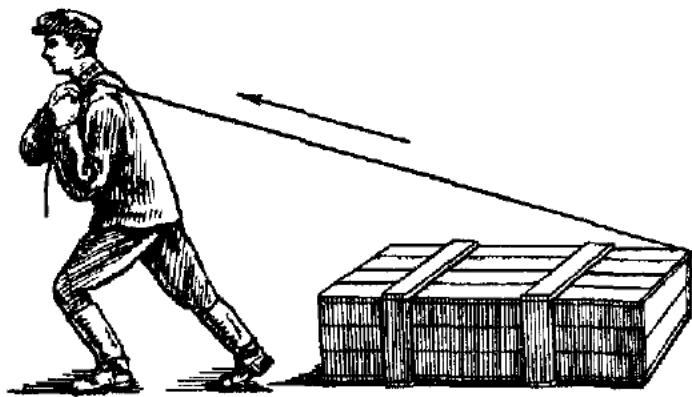


Рис. 145.

где  $\Delta m_i$  — масса  $i$ -й частицы.

Это определение центра инерции имеет место и для тела, деформирующегося при движении, только центр инерции твердого тела сохраняет неизменное положение относительно частиц тела, а центр инерции деформируемого тела движется как-то относительно частиц тела. Но, зная в каждый момент времени положение частиц тела, мы можем по формулам (56.1) или (55.4) определить его центр инерции. Поэтому рассмотрим сейчас закономерность движения центра инерции любого тела.

Покажем, что векторная сумма количеств движения всех частиц тела, или, как мы будем называть ее, *количество движения тела*, определяется массой всего тела и скоростью центра инерции. Обозначим скорость движения  $i$ -й частицы тела с массой  $\Delta m_i$  относительно неподвижной системы координат  $\mathbf{v}_i$ . Допустим, что с центром инерции тела связана подвижная система координат, причем начало координат всегда совпадает с центром инерции, а оси сохраняют *неизменное* направление в пространстве. Если скорость движения центра инерции тела  $\mathbf{v}_0$ , а скорость движения  $i$ -й частицы относительно подвижной системы координат  $\mathbf{v}'_i$ , то

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i,$$

или: скорость  $i$ -й частицы относительно неподвижной системы координат равна сумме скоростей — скорости центра инерции  $\mathbf{v}_0$  и скорости движения частицы относительно подвижной системы координат  $\mathbf{v}'_i$ . Количество движения  $i$ -й частицы, очевидно, равно

$$\Delta \mathbf{k}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_0 + \Delta m_i \mathbf{v}'_i.$$

Сумму количества движения всех частиц тела, равную количеству движения тела, можно записать так:

$$K = \sum_i \Delta k_i = \sum_i \Delta m_i v_0 + \sum_i \Delta m_i v'_i. \quad (56.2)$$

Первый член

$$\sum_i \Delta m_i v_0 = v_0 \sum_i \Delta m_i = m v_0$$

( $m$  — масса тела), а второй член

$$\sum_i \Delta m_i v'_i = 0;$$

последнее равенство следует из условия, что начало подвижной системы координат совпадает с центром инерции. В самом деле, если  $r'_i$  — радиус-вектор частицы относительно подвижной системы координат и  $\frac{dr'_i}{dt} = v'_i$ , то из уравнения (56.1), справедливого для любого момента времени, следует:  $\sum_i \Delta m_i v'_i = 0$ . Поэтому выражение (56.2) можно переписать так:

$$K = m v_0. \quad (56.3)$$

*Количество движения  $K$  любого тела равно его массе  $m$ , умноженной на скорость движения его центра инерции  $v_0$ .* Количество движения всего тела не зависит от движения частиц тела относительно подвижной системы координат, совершающей поступательное движение вместе с центром инерции тела. Твердое тело при движении может только вращаться относительно подвижной системы координат. Поэтому количество движения твердого тела не зависит от вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции тела.

Теперь найдем зависимость количества движения тела от величины действующих на него внешних сил.

Применим второй закон динамики к движению каждой частицы тела. Пусть к  $i$ -й частице тела приложена сила

$$(f_i)_{\text{вт}} + (f_i)_{\text{вш}},$$

где  $(f_i)_{\text{вт}}$  — сила, приложенная со стороны частиц того же тела (внутренняя сила), а  $(f_i)_{\text{вш}}$  — сила, приложенная со стороны других тел (внешняя сила). Производная количества движения каждой частицы равна действующей силе, или

$$\frac{d \Delta k_i}{dt} = (f_i)_{\text{вт}} + (f_i)_{\text{вш}}. \quad (56.4)$$

Запишем такие уравнения для всех частиц и сложим их, в результате получим

$$\sum_i \frac{d\Delta k_i}{dt} = \sum_i (f_i)_{\text{вт}} + \sum_i (f_i)_{\text{внш.}} \quad (56.5)$$

Первая сумма  $\sum_i (f_i)_{\text{вт}} = 0$ , так как силы  $(f_i)_{\text{вт}}$  — внутренние (каждая сила имеет равную и противоположную ей), вторая сумма  $\sum_i (f_i)_{\text{внш.}} = F$  — сумме всех внешних сил, действующих на тело.

Поэтому равенство (56.5) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta k_i = \frac{dK}{dt} = F. \quad (56.6)$$

Если учесть выражение для количества движения тела (56.3), то последнее равенство можно переписать так:

$$m \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = F, \quad (56.7)$$

где  $\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}$  — ускорение центра инерции тела.

Следовательно, для любого тела производная от количества движения равна сумме внешних сил, действующих на тело, (56.6), а так как количество движения равно массе всего тела, умноженной на скорость центра инерции, то ускорение центра инерции равно отношению суммы всех внешних сил к массе всего тела (56.7). Это значит, что ускорение центра инерции не зависит от места приложения внешней силы к телу, а зависит только от величины силы и направления ее действия.

Допустим, что мы ударили по спичечной коробке, лежащей на столе, так, что сила удара прошла через центр инерции; коробка будет двигаться поступательно, и количество движения ее будет

$$m\boldsymbol{v}_0 = \int \mathbf{F} dt. \quad (56.8)$$

Теперь ударим коробку по углу и допустим, что сила удара одинакова; тогда коробка будет двигаться с вращением, но если сила  $F$  была направлена так же, как и ранее, и действовала то же время, то количество движения будет равно  $m\boldsymbol{v}_0$  по формуле (56.8)<sup>1</sup>). Как бы, в какую бы точку мы ни ударили тело, оно полетит так, что центр инерции его будет двигаться в направлении силы удара и величина количества движения тела определится по формуле (56.8), как и для точки. Следовательно, второй закон динамики

<sup>1)</sup> Подумайте и ответьте на вопрос: будет ли работа силы  $F$  одинакова в указанных двух случаях?

имеет определенный смысл для любого тела, поэтому понятие центра инерции имеет столь большое значение в динамике.

Сделаем несколько замечаний относительно основных понятий, введенных в этом параграфе.

1) Совокупность внешних сил может иметь равнодействующую, т. е. одну силу, полностью заменяющую действие всех сил  $(f_i)_{\text{внш}}$ , приложенных к телу, только в том случае, когда линии действия всех сил пересекаются в одной точке или когда они параллельны. Поэтому в общем случае силу  $\mathbf{F} = \sum_i (f_i)_{\text{внш}}$  будем называть *результатирующей* внешних сил, действующих на тело. Результатирующая сила равна векторной сумме всех  $(f_i)_{\text{внш}}$ , которые следует представлять *приложенными к одной точке*. Результатирующая сила определяет производную от количества движения тела, т. е. динамику поступательного движения тела.

2) Ни результатирующая сила, ни количество движения тела не дают никаких указаний о том, как вращается тело во время движения. Но из основного закона движения центра инерции (56.6), (56.7) можно сделать важное заключение: если результатирующая сила равна нулю, то количество движения тела не изменяется, или: скорость центра инерции тела при действии внешних сил, результатирующая которых равна нулю, остается постоянной. Если твердое тело находилось в покое по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета, то при действии внешних сил с нулевой результатирующей тело начнет двигаться, но так, что центр инерции будет оставаться в покое. В этих условиях тело может только вращаться вокруг оси, проходящей через центр инерции.

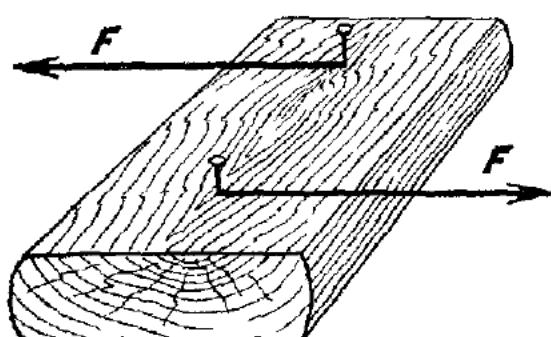


Рис. 146.

Простейшим примером системы внешних сил, имеющих нулевую результатирующую, является пара сил. *Пара сил есть совокупность двух равных параллельных сил*, приложенных к различным точкам и направленных в разные стороны (рис. 146). Действие пары не вызывает смещения центра инерции тела.

3) Закон движения центра инерции, или закон изменения количества движения (56.6) и (56.7), доказанный для отдельного тела, оказывается справедливым и для любой системы тел (частиц). Доказательство последнего утверждения проводится аналогичным образом. Каждое тело, входящее в систему, разбивается на частицы, и по формулам (55.2) или (55.4) определяется положение центра инерции системы тел в любой момент времени. Причем масса  $m$  системы равна сумме масс всех тел, входящих в систему. *Внешними силами считаются такие, которые исходят со стороны тел, не*

*входящими в систему*.

*входящих в данную систему.* Силы, действующие между частицами различных тел, входящих в рассматриваемую систему, конечно, считаются внутренними. Сумма их всегда равна нулю. Закон (56.6) или (56.7) показывает, что при равенстве нулю результирующей внешних сил тела, входящие в механическую систему, могут двигаться только так, чтобы количество движения системы в целом оставалось неизменным, а центр инерции оставался в покое или двигался равномерно и прямолинейно.

Результирующая внешних сил, приложенных к механической системе, равна нулю в двух случаях: либо совокупность внешних сил сводится к паре сил, либо механическая система изолирована от действия тел, не входящих в ее состав, — внешние силы на нее не действуют. В последнем случае механическую систему называют *изолированной* или *замкнутой*. В замкнутой системе действуют только внутренние силы, которые не могут изменить количество движения системы.

Закон инерции, сформулированный ранее для материальной точки (частицы), теперь может быть обобщен на любую совокупность материальных тел (частиц), образующих механическую систему: *количество движения изолированной механической системы остается постоянным, а центр инерции такой системы тел или покоятся, или движется равномерно и прямолинейно.* Это наиболее полная и точная формулировка закона сохранения количества движения (закона инерции), справедливая для любой изолированной системы материальных тел. Итак, закон инерции имеет место как для отдельной изолированной частицы, так и для любой изолированной системы частиц. Скорость системы частиц в целом есть скорость ее центра инерции (центра масс). Нет внешних сил — и вся система (как и в случае отдельной частицы) движется равномерно и прямолинейно.

Закон изменения количества движения (56.6) и (56.7) дает самое первое представление о поведении системы под действием данной совокупности внешних сил — о ее поступательном движении или о движении ее центра масс. При этом остаются скрытыми детали, связанные с движением отдельных тел (частиц), образующих систему. Поэтому одного уравнения (56.6) или (56.7) недостаточно для сколько-нибудь полного описания процесса в механической системе. Однако если интересоваться только поступательным движением системы, исключив из рассмотрения подробности, связанные с движением частиц системы относительно центра инерции, то, как бы она ни была сложна, ее можно заменить материальной точкой (помещенной в центре масс), в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена результирующая всех внешних сил, действующих на систему. Для этой цели достаточно одного уравнения (56.7). Именно так мы и подходили к задачам динамики в начале курса.

### § 57. Плоское движение тела

Анализ движения тела при любом положении точки приложения силы к твердому телу представляет довольно сложную задачу. Поэтому рассмотрим сначала плоское движение тела, при котором все частицы тела движутся параллельно определенной плоскости. Например, движение ящика по гладкой и ровной поверхности льда, движение коробки по поверхности стола, качение цилиндра, качение колеса и т. п.

Прежде всего посмотрим на результаты некоторых опытов. Допустим, что гладкая доска может двигаться только по поверхности льда или по ровной поверхности стола (рис. 147). Вобъем в доску гвоздь и потянем горизонтально за нить, привязанную

к гвоздю. Доска будет двигаться так, что ускорение центра инерции совпадает с направлением силы. Если движение начинается из покоя и нить имеет неизменное направление в пространстве, то скорость центра инерции совпадает с направлением нити. Но, кроме того, доска будет вращаться вокруг вертикальной оси. Изменяя положение гвоздя на доске, мы заметим, что вращение будет медленнее, если точка приложения силы располагается ближе к центру инерции. И наконец, если гвоздь проходит через центр инерции доски, то доска совершает поступательное движение, движение без вращения. В этом случае момент внешней силы относительно оси, проходящей через центр инерции, равен нулю. Отсюда можно заключить, что вращение зависит от момента внешней силы относительно вертикальной оси, проходящей через центр инерции.

Как зависит вращение тела от этого момента? Так же, как и для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр инерции, т. е. *момент силы равен моменту инерции тела, умноженному на угловое ускорение*.

Теперь докажем это. Для удобства вычислений приведем более общую формулу для вычисления момента силы относительно оси. Будем называть моментом силы  $F$  относительно оси векторное произведение вектора  $R$  на силу  $F$ , или

$$M = [RF], \quad (57.1)$$

где  $R$  — расстояние от оси, проходящей через точку  $O$ , до точки приложения силы  $F$  (рис. 148, а). Ось вращения перпендикулярна

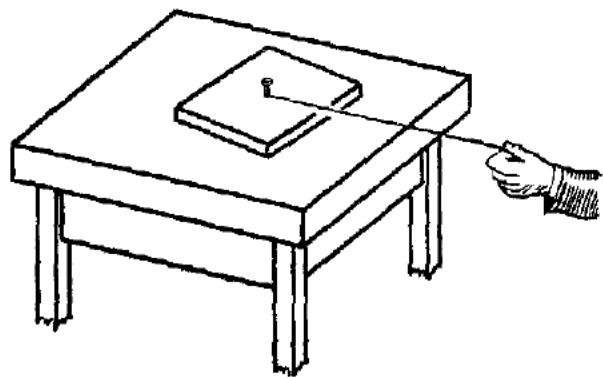


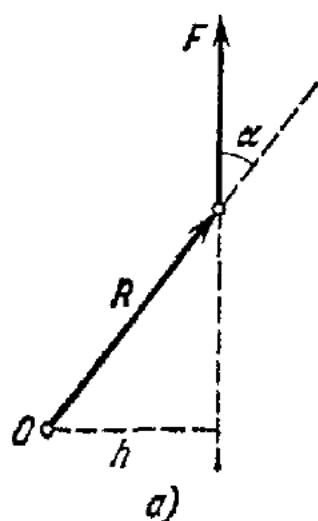
Рис. 147.

к плоскости движения (плоскости чертежа). По правилу векторного произведения модуль момента

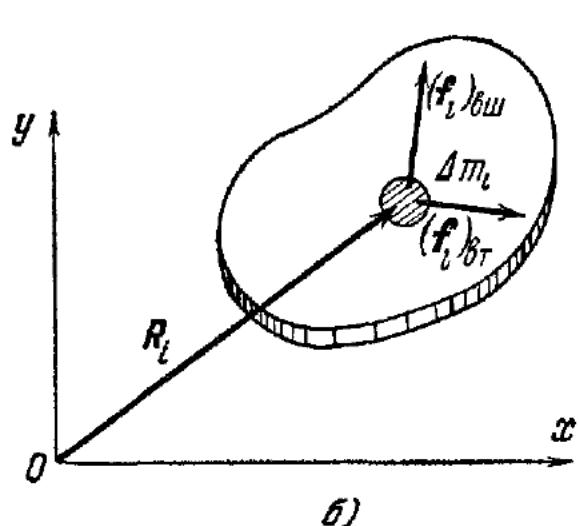
$$M = FR \sin \alpha = Fh$$

совпадает с определенной ранее величиной момента силы (плечо  $h = R \sin \alpha$ ). Формула (57.1) автоматически указывает знак и направление момента, всегда перпендикулярное к плоскости движения.

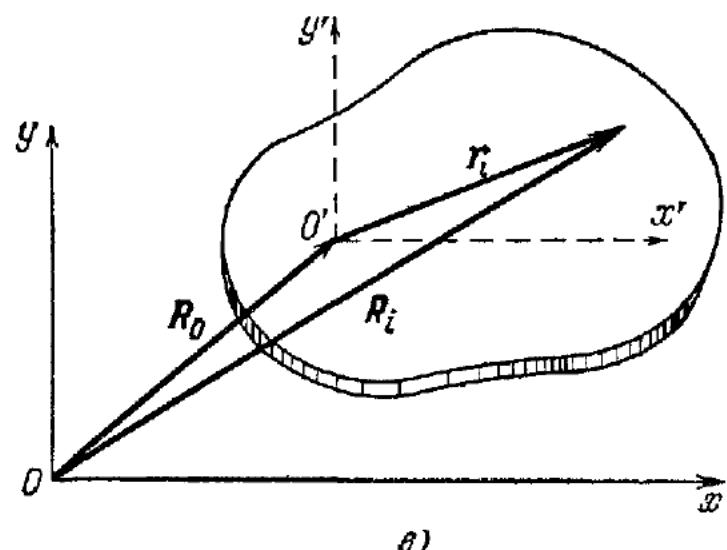
Рассмотрим плоское движение тела относительно некоторой *неподвижной* системы координат  $Oxy$ , не связанной с телом (рис. 148, б). Выделим из тела некоторую малую частицу с массой  $\Delta m_i$ , которую можем рассматривать как материальную точку; положение ее определяется радиусом-вектором  $R_i$ , проведенным из начала координат  $O$ . Пусть на  $i$ -ю точку



a)



б)



в)

Рис. 148.

действуют  $(f_i)_{\text{вш}}$  — внешняя сила и  $(f_i)_{\text{вт}}$  — внутренняя сила. Тогда закон движения точки записывается в виде

$$\Delta m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}} + (\mathbf{f}_i)_{\text{вт}}, \quad (57.2)$$

где  $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}$  — скорость относительно неподвижной системы координат  $Oxy$ . Умножим  $\mathbf{R}_i$  векторно на каждый член уравнения (57.2):

$$\Delta m_i \left[ \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right] = [\mathbf{R}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}}] + [\mathbf{R}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вт}}]. \quad (57.3)$$

Первый член можно записать в виде  $\frac{d}{dt} [\mathbf{R}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i]$ , если вспомнить, что

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt},$$

и поэтому

$$\left[ \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \Delta m_i \mathbf{v}_i \right] = 0.$$

Складывая уравнения (57.3) для всех точек тела, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\mathbf{R}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i] = \sum_i [\mathbf{R}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вн}}] + \sum_i [\mathbf{R}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вт}}]. \quad (57.4)$$

Вторая сумма в правой части равна нулю, так как для каждой внутренней силы есть равная по величине и противоположная по направлению сила, приложенная к другой точке тела, и сумма их моментов равна нулю, потому что направления сил противоположны, а плечи одинаковы.

Величину  $[\mathbf{R}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i]$  называют *моментом количества движения* точки, а величину

$$\sum_i [\mathbf{R}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i] = N$$

— *моментом количества движения всего тела* относительно оси, проходящей через точку  $O$ . Теперь общий закон плоского движения твердого тела как вращения его относительно неподвижной оси, проходящей через  $O$ , можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = M, \quad (57.5)$$

или *производная от момента количества движения равна сумме моментов внешних сил*:

$$M = \sum_i [\mathbf{R}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вн}}].$$

Вид уравнения (57.5) тот же, что и для вращения тела вокруг оси, связанной неизменно с телом, (53.4), только скорости  $\mathbf{v}_i$  движения точек здесь не перпендикулярны  $\mathbf{R}_i$ , а величина и направление  $\mathbf{R}_i$  изменяются со временем.

Уравнение (57.5) получает более ясное физическое толкование, если учесть закон движения центра инерции (56.7). Пусть

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i,$$

где  $\mathbf{R}_0$  — радиус-вектор центра масс  $O'$ , а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор точки в невращающейся системе координат  $O'x'y'$ , связанной с цент-

ром масс тела (рис. 148, в). Тогда скорость  $i$ -й точки будет равна

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i,$$

где

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}.$$

Радиус-вектор каждой точки слагается из радиуса-вектора центра масс и радиуса-вектора этой точки в системе, связанной с центром масс. Такие же соотношения можно написать и для скоростей. Если мы подставим эти выражения в формулу (57.4), то получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i [(R_0 + r_i) \Delta m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i)] = \sum_i [(R_0 + r_i) (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}}],$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ [\mathbf{R}_0 \mathbf{v}_0] \sum_i \Delta m_i + \left[ \mathbf{R}_0 \sum_i \Delta m_i \mathbf{u}_i \right] + \left[ \sum_i \mathbf{r}_i \Delta m_i \mathbf{v}_0 \right] + \sum_i [\mathbf{r}_i \Delta m_i \mathbf{u}_i] \right\} = \\ = \left[ \mathbf{R}_0 \sum_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}} \right] + \sum_i [\mathbf{r}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}}]. \end{aligned} \quad (57.6)$$

В фигурных скобках левой части (57.6) вторая и третья суммы равны нулю по определению центра масс. Действительно,

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

и, дифференцируя это равенство, получаем

$$\sum_i \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i \Delta m_i \mathbf{u}_i = 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \left\{ [\mathbf{R}_0 m \mathbf{v}_0] + \sum_i [\mathbf{r}_i \Delta m_i \mathbf{u}_i] \right\} = [\mathbf{R}_0 \mathbf{F}] + \sum_i [\mathbf{r}_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}}], \quad (57.7)$$

где  $m = \sum_i \Delta m_i$  — масса всего тела и  $\mathbf{F} = \sum_i (\mathbf{f}_i)_{\text{вш}}$  — сумма всех внешних сил, действующих на тело. Первые члены справа и слева в (57.7) сокращаются. Действительно,

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{R}_0 m \mathbf{v}_0] = \left[ \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} m \mathbf{v}_0 \right] + \left[ \mathbf{R}_0 m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right] = [\mathbf{R}_0 \mathbf{F}],$$

так как  $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{v}_0$  и  $m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}$  по (56.7).

В результате получаем замечательное соотношение, которое можно записать так:

$$\frac{dN_0}{dt} = M_0, \quad (57.8)$$

где  $N_0 = \sum [r_i \Delta m_i u_i]$  — момент количества движения относительно оси, проходящей (в данный момент) через центр масс  $O'$ , а  $M_0 = \sum [r_i (f_i)_{\text{внеш}}]$  — момент внешних сил относительно той же оси.

Закон (57.8) показывает, что в сложном плоском движении тела производная от момента количества движения относительно оси, проходящей через центр масс, равна моменту внешних сил относительно той же оси. Вращение происходит так же, как и вокруг неподвижной оси, неподвижной в теле и в пространстве (см. (53.4)).

Так как в твердом теле центр масс сохраняет неизменное положение, то скорость  $u_i$  можно представить в виде  $u_i = [\omega r_i]$ , где направление  $\omega$  всегда перпендикулярно к плоскости движения. Поэтому момент количества движения равен

$$\sum_i [r_i \Delta m_i u_i] = \sum_i [r_i \Delta m_i [\omega r_i]] = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 \text{<sup>1)</sup>}. \quad (57.8)$$

Величина  $I_0 = \sum_i \Delta m_i r_i^2$  представляет известный нам момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда уравнение (57.8) примет обычную форму:

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0, \quad (57.9)$$

как и при вращении вокруг неподвижной оси. Заметим, что векторы  $\omega$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $M_0$  всегда нормальны к плоскости движения тела.

В том случае, когда внешняя сила направлена к оси, проходящей через центр инерции,  $M_0 = 0$  и  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ . Если в начальный момент, до приложения силы, тело было в покое, т. е.  $\omega = 0$ , то и далее  $\omega$  будет равно нулю. Иными словами, тело будет совершать поступательное движение, если линия равнодействующей внешних сил проходит через ось, на которой лежит центр инерции, и тело начинает движение из состояния покоя. Если же в этом случае в начальный момент тело имело угловую скорость  $\omega_0$ , т. е. тело вращалось, то и далее оно будет продолжать вращаться с той же угловой скоростью, так как  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ .

<sup>1)</sup> При выкладках учитываем известную из векторной алгебры формулу  $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$ .

Отметим частный случай плоского движения, которое возникает под действием пары сил. Так как параллельные силы, составляющие пару, равны и противоположны друг другу, то результирующая пары равна нулю. В этом случае центр инерции будет оставаться в покое, если до приложения сил он был в покое. Следовательно, под действием пары сил тело совершает вращение вокруг оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к плоскости движения тела, вне зависимости от того, где приложены силы.

Момент пары сил относительно любой оси будет иметь одно и то же значение, равное произведению силы  $F$  на расстояние между ними  $H$  (плечо) (рис. 149).

Действительно, моменты сил относительно осей, проходящих через точки  $O_1$  и  $O_2$ , равны

$$M = F(H + h_1) - Fh_1 = FH,$$

$$M = Fh_2 + Fh'_2 = FH.$$

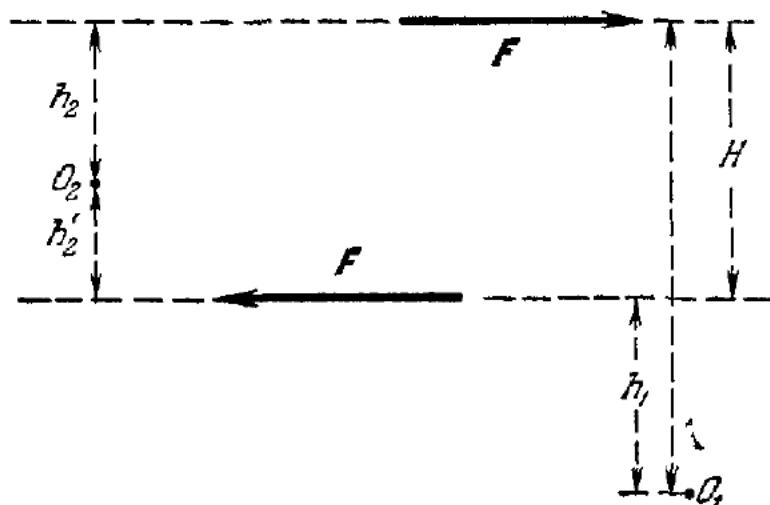


Рис. 149.

Подводя итог, можно все сказанное кратко изложить еще и так. При плоском движении под действием внешних сил тело совершает одновременно и поступательное, и вращательное движения. Ускорение каждой точки тела складывается из ускорения поступательного движения и ускорения при вращении вокруг оси, проходящей через центр масс. Ускорение поступательного движения одинаково для всех точек тела и равно

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (57.10)$$

где  $\mathbf{F} = \sum (f_i)_{\text{внш}}$  — результирующая всех внешних сил, а  $m$  — масса тела. Направление ускорения совпадает с направлением результирующей  $\mathbf{F}$ . Ускорение вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр массы, равно

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}, \quad (57.11)$$

где  $M$  — момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр массы, а  $I$  — момент инерции тела относительно той же оси.

## § 58. Качение цилиндра по плоскости. Маятник Максвелла

В качестве примера плоского движения рассмотрим качение цилиндра или колеса по плоскости.

Ось цилиндра движется с некоторой скоростью  $v_0$ , и тело цилиндра совершает вращение с угловой скоростью  $\omega$ . Если цилиндр катится по плоскости без скольжения, то между  $v_0$  и  $\omega$  существует такое соотношение:

$$v_0 = \omega R_0, \quad (58.1)$$

где  $R_0$  — радиус цилиндра. Это очевидно, так как смещение оси  $v_0 dt$  равно длине дуги окружности цилиндра  $\omega R_0 dt$ , на которую передвинется за это же время точка касания.

Если  $v_0 > \omega R_0$  или  $v_0 < \omega R_0$ , то точка соприкосновения цилиндра будет скользить — цилиндр будет совершать качение со скольжением. В первом случае скорость точки соприкосновения направлена вперед, во втором — назад.

В любом случае скорость точек цилиндра определяется по формуле

$$v_0 + [\omega r], \quad (58.2)$$

где  $r$  — вектор расстояния от оси цилиндра до данной точки. Движение цилиндра слагается из поступательного движения со скоростью  $v_0$  и вращательного — с угловой скоростью  $\omega$ . Но можно представить себе это движение как вращение вокруг мгновенной оси.

При любом плоском движении тела можно указать *мгновенную ось вращения* — линию, проходящую через те неизменно связанные с телом точки, которые в данное мгновение остаются в покое. Когда цилиндр или колесо катятся без скольжения, то мгновенная ось проходит через точки соприкосновения цилиндра с плоскостью; эти точки цилиндра в данный момент остаются неподвижными (имеют нулевую скорость). Скорости всех других точек тела, направление и величину их, можно определить, полагая, что за время  $dt$  цилиндр поворачивается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси, проходящей через точку  $A$  (рис. 150, *a*). Действительно, пусть  $R = R_0 + r$  — вектор расстояния точки  $B$  от мгновенной оси, а  $R_0$  — вектор, проведенный к оси цилиндра; тогда скорость точки можно записать так:

$$v = [\omega R],$$

или

$$v = [\omega (R_0 + r)] = v_0 + [\omega r], \quad (58.3)$$

где  $v_0 = [\omega R_0]$  — скорость оси цилиндра, скорость поступательного движения. Очевидно, что мгновенная ось движется со скоростью  $v_0$  вдоль плоскости и каждый раз она проходит через различ-

ные точки поверхности цилиндра. Ось вращения, проходящая через ось цилиндра, также движется в пространстве, но сохраняет неизменное положение относительно частиц цилиндра.

При качении цилиндра со скольжением мгновенная ось уже не будет проходить через точки касания. При  $v_0 > \omega R_0$  (рис. 150, б) мгновенная ось проходит через точку  $A$ , лежащую ниже плоскости качения, цилиндр скользит со скоростью  $v_1$ <sup>1)</sup>. При  $v_0 < \omega R_0$  мгновенная ось проходит над плоскостью качения, вращение преобладает над поступательным движением. Во всех случаях качения мгновенная ось движется вдоль плоскости качения со скоростью  $v_0$ , скоростью оси цилиндра.

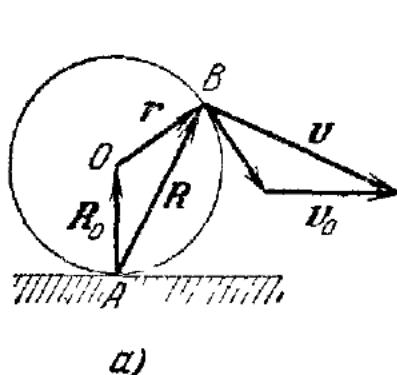


Рис. 150.

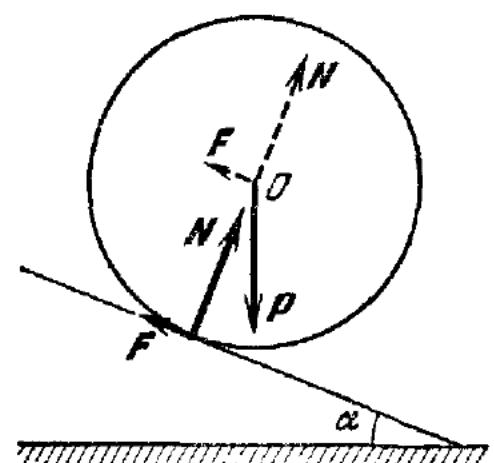
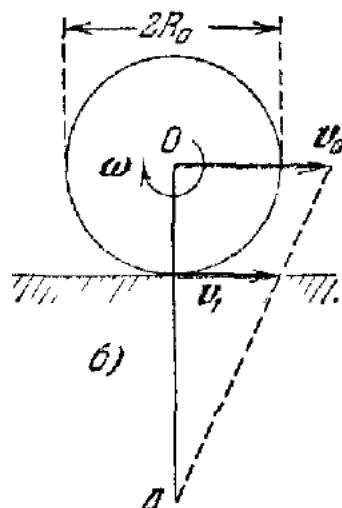


Рис. 151.

Теперь разберем динамику качения цилиндра. Пусть цилиндр радиуса  $R_0$  скатывается с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 151). На цилиндр действуют три силы: сила тяготения  $P$ , сила нормального давления плоскости на цилиндр  $N$  и сила трения цилиндра о плоскость  $F$ , лежащая в этой плоскости. Сначала определим ускорение при поступательном движении; для этого представим все силы приложенными к центру масс или перенесем силу трения на ось цилиндра, поскольку остальные силы проходят через ось  $O$ . Так как цилиндр не покидает плоскости во время движения, то ускорение центра масс в направлении перпендикуляра к плоскости равно нулю; отсюда следует, что

$$P \cos \alpha - N = 0. \quad (58.4)$$

С другой стороны, составляющая всех сил, параллельная наклонной плоскости, равна

$$f = P \sin \alpha - F. \quad (58.5)$$

<sup>1)</sup> Можно представить себе невесомый диск достаточно большого радиуса, неизменно скрепленный с цилиндром; тогда мгновенная ось проходит через точку этого диска, лежащую внизу на окружности радиуса  $OA$ .

Эта сила определит ускорение центра масс цилиндра или ускорение его поступательного движения вдоль наклонной плоскости, поэтому ускорение равно

$$a = \frac{f}{m} = \frac{1}{m} (P \sin \alpha - F), \quad (58.6)$$

где  $m$  — масса цилиндра. Угловое ускорение определяется по формуле (57.11) только моментом силы трения  $F$  и моментом инерции цилиндра  $I$  относительно его оси, оно равно

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \frac{FR_0}{I}, \quad (58.7)$$

где  $R_0$  — радиус цилиндра.

Отметим, что уравнения (58.6) и (58.7) всегда справедливы, вне зависимости от того, движется цилиндр по плоскости со скольжением или без скольжения. Но из этих уравнений нельзя определить три неизвестные величины:  $F$ ,  $a$  и  $\frac{d\omega}{dt}$ , нужно еще какое-то дополнительное условие. Если качение цилиндра по наклонной плоскости происходит без скольжения, то угловое ускорение и линейное ускорение связаны друг с другом равенством

$$a = R_0 \frac{d\omega}{dt}, \quad (58.8)$$

вытекающим из формулы (58.1). Решая три уравнения (58.6), (58.7) и (58.8), найдем ускорение  $a$ . Действительно, из последних двух находим

$$F = \frac{al}{R_0^2}; \quad (58.9)$$

подставляя это в первое, получаем

$$ma = P \sin \alpha - \frac{la}{R_0^2},$$

или

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R_0^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR_0^2}}, \quad (58.10)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Следовательно, ускорение  $a$  зависит только от угла наклона плоскости и отношения  $I/mR_0^2$ . Чем больше это отношение, тем меньше ускорение. Ускорение  $a$  не может быть меньше  $\frac{1}{2} g \sin \alpha$ , потому что всегда для любого цилиндра

$$I < mR_0^2.$$

В самом деле, только в случае полого цилиндра с очень тонкими стенками

$$I \approx mR_0^2.$$

Отношение  $I/mR_0^2$  зависит не от массы цилиндра, а только от расположения массы по объему цилиндра.

Для однородного цилиндра  $I = \frac{1}{2}mR_0^2$ , следовательно, ускорение, с которым скатывается без скольжения по наклонной плоскости однородный цилиндр, зависит только от угла наклона плоскости, оно равно  $\frac{2}{3}g \sin \alpha$ .

Два цилиндра сделаны из однородного материала и имеют одинаковые радиусы, но один из них полый, а другой сплошной (рис. 152). Какой из них будет скатываться быстрее? Очевидно, что  $I/mR_0^2$  будет больше для полого цилиндра, ибо частицы, составляющие его, находятся на большем расстоянии от оси (см. далее (59.4) и (59.5)). Поэтому ускорение сплошного цилиндра будет больше и он будет скатываться быстрее.

Из уравнений (58.9) и (58.10) можно вычислить силу трения, она будет равна

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I}}. \quad (58.11)$$

И сила трения зависит от угла наклона  $\alpha$ , силы веса  $P = mg$  и от отношения  $mR_0^2/I$ . Без силы трения качения не будет.

При увеличении угла наклона плоскости ускорение оси катящегося цилиндра будет расти пропорционально  $\sin \alpha$ ; оно будет всегда меньше ускорения  $g \sin \alpha$ , ускорения тела, соскальзывающего по той же наклонной плоскости без трения, но больше половины этого ускорения. Катящийся цилиндр будет двигаться ускоренно, как скользящее тело, но ускорение его будет меньше; «инерция» цилиндра из-за вращения как бы увеличилась, это увеличение «инерции» зависит от отношения  $I/mR_0^2$ .

Все сказанное относится к качению цилиндра без скольжения. Можно рассмотреть также качение цилиндра со скольжением. Это просто сделать, если считать, что сила трения при качении, как и сила трения покоя, имеет максимальное значение, равное  $\mu N$ , где  $\mu$  — коэффициент, а  $N$  — сила нормального давления цилиндра на плоскость. Тогда качение без скольжения будет иметь место

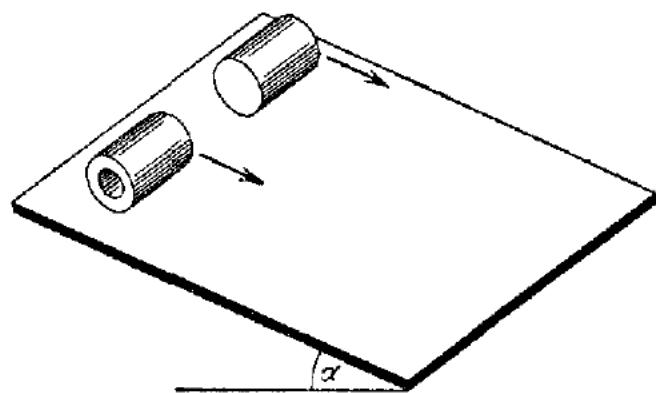


Рис. 152.

в том случае, если сила трения

$$F < \mu N, \quad (58.12)$$

или, учитывая (58.11) и (58.4), получим

$$\operatorname{tg} \alpha < \mu \left( 1 + \frac{mR_0^2}{I} \right), \quad (58.13)$$

т. е. угол наклона должен быть меньше определенной величины. Только тогда, когда тангенс угла наклона плоскости будет больше

$$\mu \left( 1 + \frac{mR_0^2}{I} \right), \quad (58.14)$$

качение будет происходить со скольжением. Величина ускорения оси цилиндра в этом случае будет равна

$$a = \frac{1}{m} (P \sin \alpha - \mu N) = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (58.15)$$

**Маятник Максвелла.** Небольшой диск (маховичок), насаженный туго на ось, опускается под действием силы тяжести на двух нитях, предварительно намотанных на ось маховичка (рис. 153). Нити во время движения вниз разматываются до полной длины, раскрутившийся

маховичок продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять будет опускаться вниз и т. д. Маховичок будет совершать колебания вверх и вниз; поэтому такое устройство и называют маятником.

Составим уравнение движения маховичка. Пусть  $P$  — сила тяготения,  $f$  — сила наряжения одной нити,  $R$  — радиус валика,  $I$  — момент инерции маховичка; тогда уравнение для поступательного движения

$$P - 2f = ma, \quad (58.16)$$

где  $a$  — ускорение центра масс, а уравнение для вращательного движения

$$2fR = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (58.17)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения диска. Скорость центра масс  $v$ , или скорость оси маховичка, и скорость вращения диска  $\omega$  связаны условием  $v = \omega R$ ; следовательно, их ускорения связаны так:

$$a = R \frac{d\omega}{dt}. \quad (58.18)$$

Решая уравнения (58.15), (58.16) и (58.17) относительно трех неизвестных, находим ускорение центра масс

$$a = \frac{P}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (58.19)$$

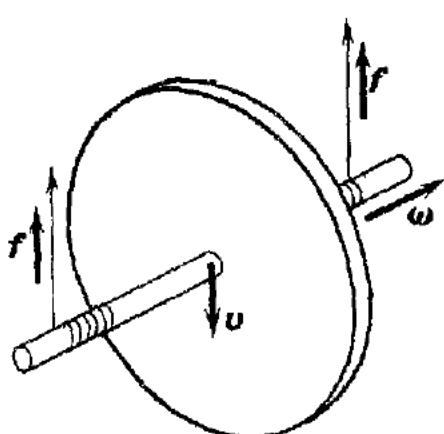


Рис. 153.

и силу натяжения нити

$$f = \frac{P}{2} \frac{I}{I + mR^2}. \quad (58.20)$$

Отметим, что ускорение и сила натяжения совершенно не зависят от того, куда движется маховик, вверх или вниз. При колебаниях маятника скорость меняет свой знак, а ускорение не меняет, как не меняют знаков и силы.

То, что сила натяжения нити остается одинаковой при движении вверх и вниз, легко показать, если прикрепить нити маятника к весам (рис. 154). Ослабив арретир весов в моменты опускания или в моменты подъема маятника, мы убеждаемся в том, что «вес» маятника не зависит от направления движения маховика. Очевидно, что «вес» маятника в данном случае равен  $2f$  — натяжению нитей.

Арретир весов нельзя отпустить на все время, ибо удар, который происходит внизу при перемене направления движения маятника, может испортить весы.

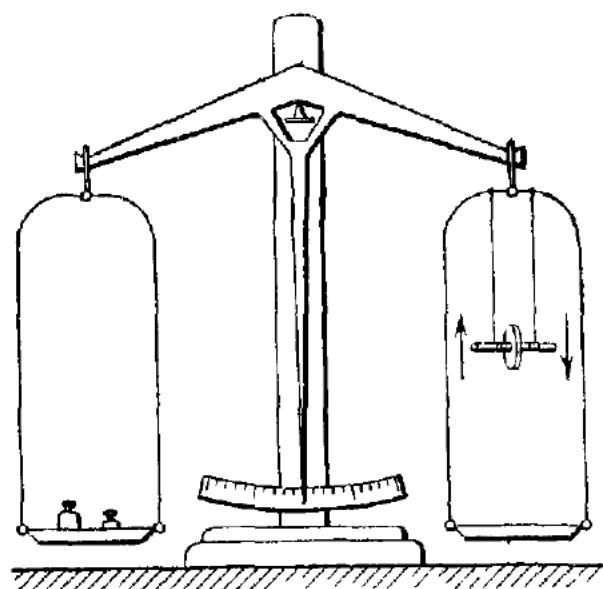


Рис. 154.

## § 59. Моменты инерции некоторых тел. Теорема Гюйгенса — Штейнера

1) Момент инерции однородного цилиндра, полого цилиндра и т. п. относительно геометрической оси. Любое из этих тел мы можем мысленно разбить на тонкие цилиндрические слои, частицы которых находятся на одинаковом расстоянии от оси. Разобьем цилиндр радиуса  $R_0$  на концентрические слои толщиной  $dR$  (рис. 155). Пусть радиус какого-то слоя  $R$ ; тогда масса частиц, заключенных в этом слое, равна

$$dm = 2\pi Rh\rho dR, \quad (59.1)$$

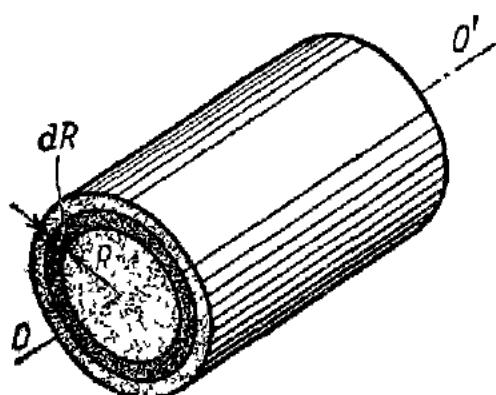


Рис. 155.

Представим, что весь цилиндр разбит на такие слои; тогда момент инерции всего цилиндра будет равен сумме бесконечно малых моментов, или момент инерции всего цилиндра

$$I = \int dl = \int R^2 dm = 2\pi rh \int_0^{R_0} R^3 dR = 2\pi rh \frac{R_0^4}{4}. \quad (59.3)$$

Вспоминая, что масса цилиндра  $m = \pi R_0^2 h \rho$ , можно (59.3) записать так:

$$I = \frac{1}{2} mR_0^2. \quad (59.4)$$

Момент инерции сплошного однородного цилиндра равен его массе, умноженной на половину квадрата его радиуса

Момент инерции полого цилиндра, имеющего внутренний радиус  $R_1$ , а внешний  $R_0$ , просто вычислить по формуле (59 3), нужно только в интеграле поставить другие пределы, а именно

$$I = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_0} R^3 dR = 2\pi\rho h \left( \frac{R_0^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right). \quad (59 5)$$

Замечая, что масса полого цилиндра равна  $m = \pi\rho(R_0^2 - R_1^2)h$ , запишем момент инерции полого цилиндра так

$$I = \frac{1}{2} m (R_0^2 + R_1^2) \quad (59 6)$$

Таким же простым путем можно вычислить момент инерции любого тела, которое можно разбить на совокупность готовых цилиндров, колец, дисков

2) Момент инерции тела вращения. Телом вращения называют такое тело, поверхность которого образована вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, эта кривая называется образующей. Представим себе, что некоторая кривая  $f(h)$ , лежащая в одной плоскости с осью  $OO'$  (рис. 156) и опирающаяся концами на ось, вращается вокруг этой оси и образует тем самым поверхность какого-то однородного тела. Каков будет момент инерции тела, если нам известна зависимость  $f(h)$  и плотность вещества  $\rho$ ? Разобъем тело на бесконечно тонкие диски высотой  $dh$ . Тогда момент инерции такого диска будет равен

$$dI = \frac{1}{2} dm f^2 = \frac{1}{2} \pi \rho f^4 dh \quad (59 7)$$

Следовательно, момент инерции всего тела равен

$$I = \frac{1}{2} \int dm f^2 = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^H f^4 dh \quad (59 8)$$

Если нам известна  $f$  как функция  $h$ , мы можем всегда вычислить момент инерции геля вращения

Момент инерции конуса и шара. Для конуса высоты  $H$  величина  $f = \frac{R_0}{H}h$  (рис. 157, а). Подставляя это выражение в формулу (59 8), получаем момент инерции конуса

$$I = \frac{\pi}{2} \rho \left( \frac{R_0}{H} \right)^4 \int_0^H h^4 dh = \frac{\pi}{2} \rho \left( \frac{R_0}{H} \right)^4 \frac{H^5}{5}. \quad (59 9)$$

Если вспомним, что объем конуса равен  $\frac{\pi R^2 H}{3}$ , то формулу (59 9) можно записать так

$$I = \frac{3}{10} m R_0^5, \quad (59 10)$$

где  $m$  — масса конуса

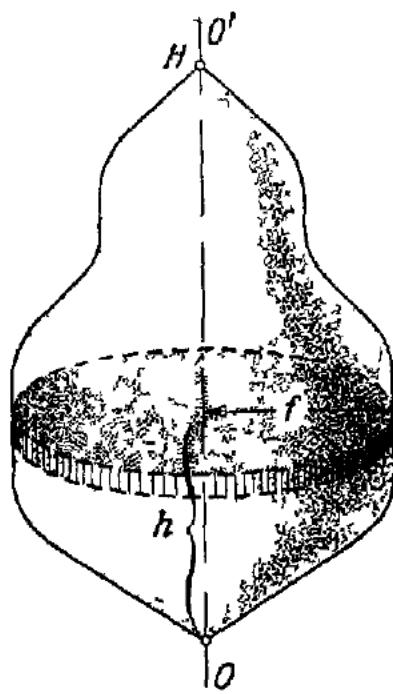


Рис. 156

Таким же путем можно вычислить момент инерции шара. Проще сначала определить момент инерции половины шара, рассеченного перпендикулярно к оси вращения. Тогда  $f^2 + h^2 = R_0^2$  (рис. 157, б). Отсюда

$$f^2 = R_0^2 - h^2 \quad (59.11)$$

Подставляя это выражение в формулу (59.8) и интегрируя по  $h$  от 0 до  $R_0$ , получаем момент инерции половины шара. Предлагаем читателю проделать

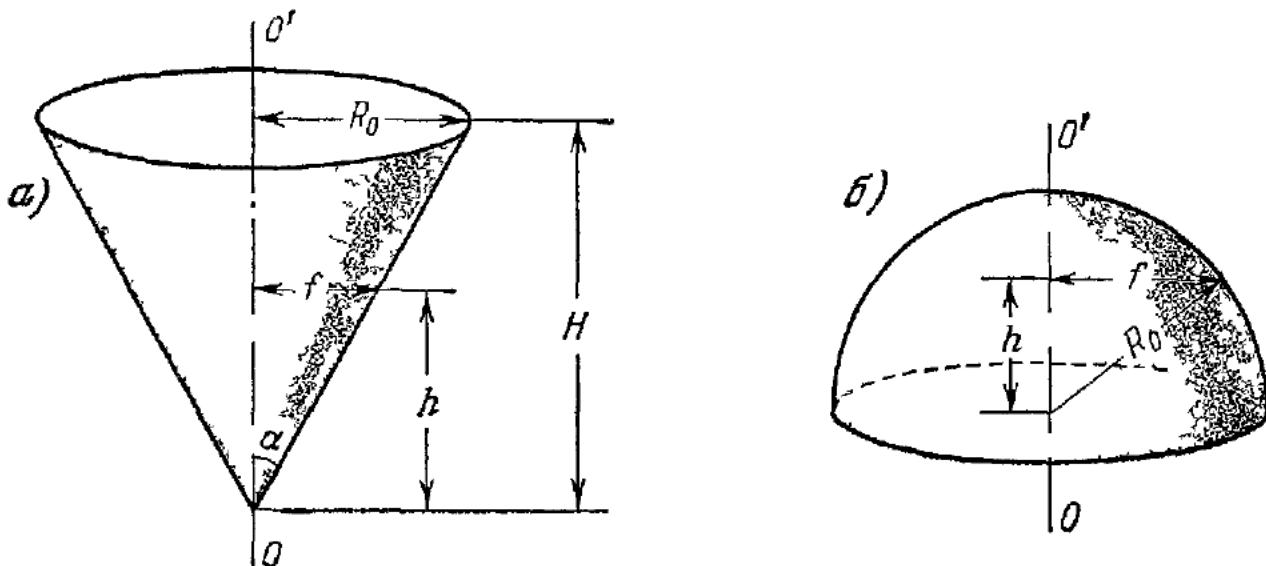


Рис. 157.

это в качестве упражнения и вычислить момент инерции шара, он равен

$$I = \frac{2}{5} mR_0^2. \quad (59.12)$$

3) Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, но не являющейся осью симметрии. До сих пор мы вычисляли момент инерции относительно оси симметрии, вычисление же момента инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс представляет более сложную задачу. Поэтому рассмотрим сначала самый простой пример: определим момент инерции тонкой однородной палочки длиной  $l$  и массы  $m$  относительно оси, составляющей с направлением палочки угол  $\alpha$  и проходящей через ее центр масс (рис. 158). Обозначим через  $x$  расстояние от середины палочки какой-то частицы длиной  $dx$ . Масса частицы равна  $dm = \frac{m}{l} dx$ , и находится частица на расстоянии  $f$  от оси,  $f = x \sin \alpha$ .

Момент инерции ее равен

$$dI = dm f^2 = \frac{m}{l} dx x^2 \sin^2 \alpha,$$

#### ■ момент инерции всей палочки

$$I = 2 \int_0^{l/2} dm f^2 = \frac{2m}{l} \sin^2 \alpha \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2 \alpha \quad (59.13)$$

Очевидно, если палочка перпендикулярна к оси вращения ( $\alpha = \pi/2$ ), то

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \quad (59.14)$$

Здесь при вычислении момента инерции мы считали палочку очень тонкой, математически это значит, что диаметр сечения палочки имеет бесконечно малую величину, а при обычных приближенных вычислениях мы полагаем, что диаметр палочки ничтожно мал по сравнению с ее длиной.

Момент инерции тонкого диска относительно оси, лежащей в плоскости диска. Результат, полученный для палочки, можно применить при вычислении момента инерции диска. Разобьем диск радиуса  $R_0$  на тонкие «палочки», перпендикулярные к оси; масса такой «палочки» шириной  $dh$ , находящейся на расстоянии  $h$  от центра, равна

$$dm = \frac{2m}{\pi R_0^2} \sqrt{R_0^2 - h^2} dh,$$

момент инерции ее по формуле (59.14) равен

$$dI = \frac{2}{12} \frac{m}{\pi R_0^2} \sqrt{R_0^2 - h^2} \cdot 4(R_0^2 - h^2) dh.$$

Следовательно, момент инерции всего диска будет равен<sup>1)</sup>

$$I = \frac{4}{3} \frac{m}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0} (R_0^2 - h^2)^{3/2} dh = \frac{1}{4} m R_0^2. \quad (59.15)$$

4) Момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс. Если мы каким-то способом определим момент инерции тела относительно некоторой оси, проходящей через центр масс, то очень просто определить момент инерции относительно любой параллельной ей оси. Пусть момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, будет  $I_0$ , тогда момент инерции относительно параллельной оси

$$I = I_0 + ma^2, \quad (59.16)$$

где  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние между осями. Это — так называемая теорема Гюйгенса — Штейнера; докажем ее.

Примем прямую  $OO'$  за ось  $z$  прямоугольной системы координат и проведем плоскость  $(x, y)$  через центр масс тела, причем начало координат совпадает с центром масс (рис. 159, а). Другая ось  $O''O'''$  проходит через точку  $(x_0, y_0)$ . Если расстояние между осями  $a$ , то

$$a^2 = x_0^2 + y_0^2. \quad (59.17)$$

Пусть частица тела с массой  $\Delta m_i$  имеет координаты  $x_i$  и  $y_i$ ; тогда момент инерции тела относительно оси  $OO'$ , проходящей через центр инерции, равен

$$I_0 = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (59.18)$$

Квадрат расстояния той же  $i$ -й частицы от второй оси  $O''O'''$  равен

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2,$$

<sup>1)</sup> При вычислении интеграла нужно воспользоваться подстановкой  $R_0 \sin \alpha = h$  и учесть, что  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \alpha d\alpha = \frac{3}{16} \pi$ .

поэтому момент инерции тела относительно второй оси запишется так:

$$I = \sum_i \Delta m_i [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2].$$

Раскроем скобки и произведем суммирование, тогда получим

$$I = (x_0^2 + y_0^2) \sum_i \Delta m_i + \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2x_0 \sum_i \Delta m_i x_i - 2y_0 \sum_i \Delta m_i y_i. \quad (59.19)$$

Учитывая формулы (59.17) и (59.18), а также то, что подчеркнутые члены равенства в (59.19) равны нулю по формулам для центра масс (55.1), получим искомое выражение (59.16).

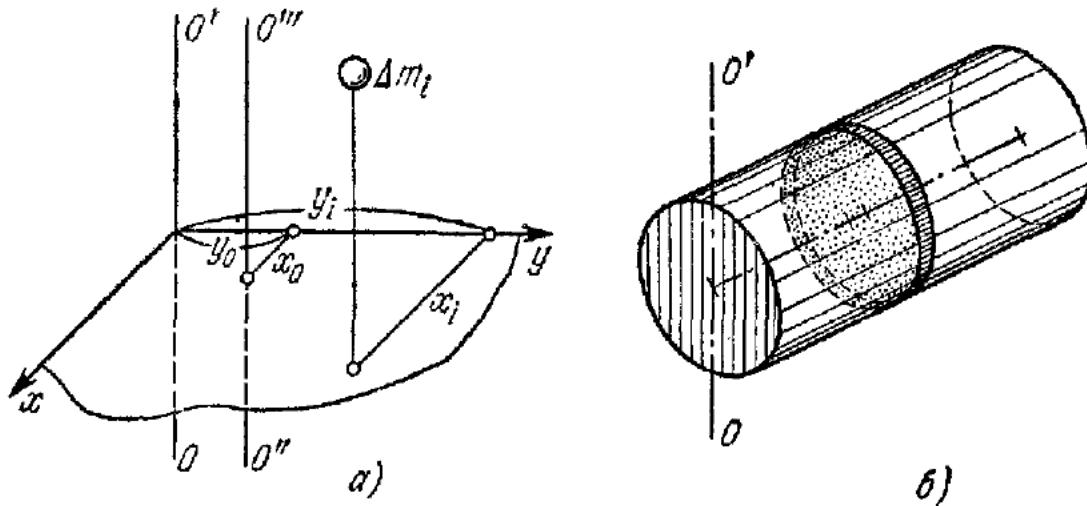


Рис. 159.

Таким образом, достаточно вычислить момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. Зная его, легко найти по формуле (59.16) момент инерции тела для любой параллельной оси.

По этому правилу легко определить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей вдоль его образующей.

Учитывая формулы (59.4) и (59.16), находим этот момент инерции:

$$I = \frac{1}{2} mR_0^2 + mR_0^2 = \frac{3}{2} mR_0^2. \quad (59.20)$$

Также можно воспользоваться формулой (58.16) для вычисления момента инерции цилиндра относительно оси  $OO'$ , перпендикулярной к его оси (рис. 159, б). Для вычисления разбиваем цилиндр на бесконечно тонкие диски, по формуле (59.15) определяем момент каждого диска относительно оси, лежащей в его плоскости и параллельной  $OO'$ , а затем, зная расстояние диска до оси  $OO'$ , по (59.16) находим момент этого диска относительно этой оси. Суммируя моменты всех дисков, составляющих цилиндр, находим его момент инерции относительно оси  $OO'$ . Читателю предлагается проделать эти вычисления в качестве упражнения.

## § 60. Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное и вращательное движение

Кинетическая энергия твердого тела есть сумма кинетических энергий отдельных частиц тела. Кинетическая энергия частицы тела, имеющей массу  $\Delta m_i$ , равна

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}.$$

Линейную скорость  $v_i$  частицы всегда можно представить в виде суммы двух скоростей: скорости центра масс  $v_0$  и скорости движения  $u_i$ , относительно системы координат, связанной неизменно с центром масс и совершающей поступательное движение вместе с ним:

$$v_i = v_0 + u_i. \quad (60.1)$$

Тогда кинетическая энергия всего тела

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (v_0 + u_i)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2} \sum_i \Delta m_i + v_0 \sum_i \Delta m_i u_i + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i u_i^2, \end{aligned}$$

или

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i u_i^2, \quad (60.2)$$

потому что  $\sum_i \Delta m_i u_i = 0$  (см. § 56).

Это фундаментальное положение справедливо для любого движения твердого тела, и не только для твердого тела, а и для любой системы тел.

Следовательно, кинетическая энергия тела состоит из двух частей: кинетической энергии поступательного движения  $\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)$  и кинетической энергии относительного движения  $\left(\sum_i \Delta m_i u_i^2\right)$ , движения относительно системы отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс.

Любое плоское движение твердого тела можно представить состоящим из двух движений: поступательного вместе с центром масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей неизменное направление в пространстве. Поэтому кинетическая энергия движения относительно центра масс есть энергия вращения тела вокруг оси.

Как известно по (54.2), кинетическая энергия вращения тела с угловой скоростью  $\omega$  равна

$$\frac{I\omega^2}{2}, \quad (60.3)$$

где  $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Следовательно, вся кинетическая энергия равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (60.4)$$

или: кинетическая энергия тела, совершающего любое плоское движение, слагается из кинетической энергии тела при поступательном движении  $\frac{mv^2}{2}$  и при вращательном движении  $\frac{I\omega^2}{2}$ .

Рассмотрим пример, в котором применение закона сохранения энергии дает простой способ решения задачи.

Два цилиндра одинаковой массы  $m$  и одинакового радиуса  $R$  скатываются с наклонной плоскости без скольжения,  $v = \omega R$  (см. рис. 152). Какой из цилиндров достигнет горизонтали раньше, если моменты инерции цилиндров различны, но пущены они одновременно и с одной и той же высоты  $H$ ? Когда цилиндры достигнут горизонтали, их кинетическая энергия будет одинакова, она будет равна потенциальной энергии  $PH$ , где  $P = mg$  — сила тяжести цилиндра. Следовательно, по формуле (60.4) для каждого цилиндра можно написать

$$PH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \quad (60.5)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — скорости при скатывании с высоты  $H$  и  $I_1$ ,  $I_2$  — моменты инерции цилиндров. Учитывая условия отсутствия скольжения  $v_1 = \omega_1 R$ ,  $v_2 = \omega_2 R$ , равенство (60.5) можно записать так

$$v_1^2 \left( m + \frac{I_1}{R^2} \right) = v_2^2 \left( m + \frac{I_2}{R^2} \right). \quad (60.6)$$

Поэтому ясно, что цилиндр, обладающий меньшим моментом инерции, скатится раньше.

Закон сохранения энергии (60.5) при скатывании цилиндра по наклонной плоскости без скольжения позволяет установить однозначную связь между высотой, с которой скатывается цилиндр, и скоростью качения, так же как и при свободном падении тел.

## § 61. Оси свободного вращения

Если ось вращения тела не проходит через центр масс тела, то центробежные силы инерции оказывают давление на ось. Например, если вращать палочку около оси, проходящей вблизи конца ее (рис. 160, а), то центробежные силы, которые равны

$$m\omega^2 R$$

(где  $m$  — масса палочки, а  $R$  — расстояние от центра масс палочки до оси), будут изгибать ось. Совершенно очевидно, что таких сил не будет, если ось вращения проходит через центр масс палочки (рис. 160, б), тогда центробежные силы, действующие на одну сторону палочки, будут уравновешиваться центробежными силами, действующими на вторую половину палочки. Если ось вращения проходит через центр масс и палочка закреплена на оси так, что она составляет острый угол с осью вращения (рис. 160, в), то результатирующие силы инерции дадут пару сил, которая и изгибает ось. В этом случае на ось действует момент пары сил.

Следовательно, действие вращающегося тела на ось равно нулю только тогда, когда ось проходит через центр масс и моменты сил

инерции относительно любого направления, перпендикулярного к оси, равны нулю.

В тех случаях, когда тело обладает симметрией, такие направления осей легко указать. Например, прямоугольный параллелепипед из однородного материала, по форме похожий на спичечную

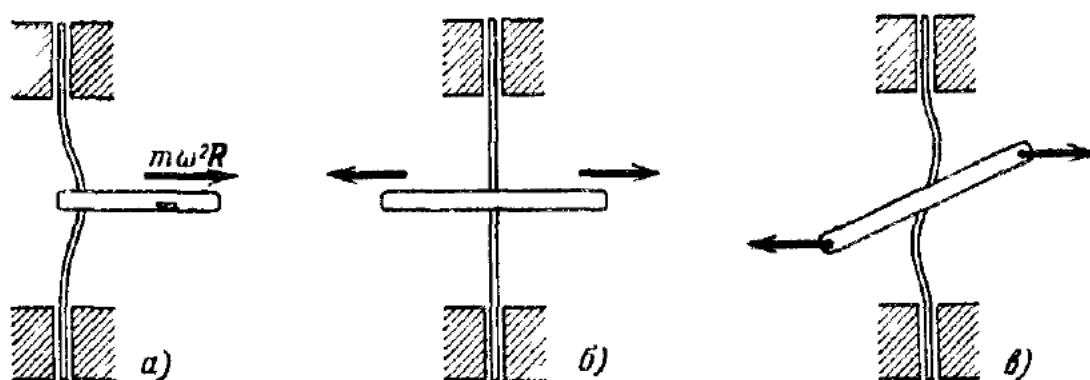


Рис. 160.

коробку, имеет три взаимно перпендикулярные оси, которые проходят через центры параллельных граней (рис. 161). Если тело вращается вокруг одной из указанных осей, то вращение не оказывает никакого действия на опоры, удерживающие эту ось, и поэтому такие оси называются *свободными осями* или *осами свободного вращения*.

Действительно, если предоставим свободному телу вращаться вокруг такой оси, то это вращение в отсутствие внешних сил будет продолжаться как угодно долго. Наоборот, если завершим тело вокруг какой-либо оси, не совпадающей со свободной осью, например, если параллелепипед завернуть вокруг наклонной оси *ab*, показанной на рис. 161, то тело, будучи предоставлено самому себе, не будет совершать чистого вращения вокруг этой оси, движение тела будет уже сложным.

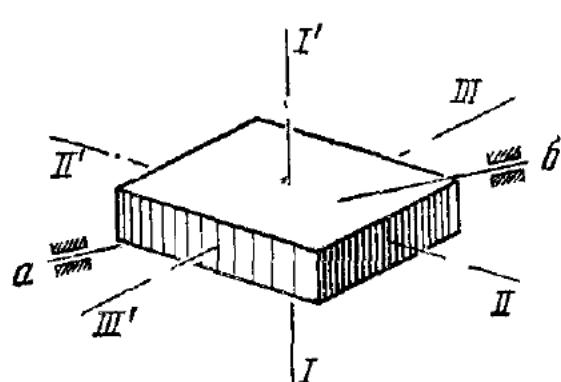


Рис. 161.

Ось *I—I'* (см. рис. 161), проходящая через наибольшие грани параллелепипеда, соответствует наибольшему моменту инерции, а ось *II—II'* — наименьшему. В § 64 будет показано, что для любого тела существуют три свободные взаимно перпендикулярные оси свободного вращения, проходящие через центр масс. В общей теории доказывается, что вращение вокруг оси, которая соответствует среднему по величине моменту инерции, является неустойчивым, например, вращение вокруг оси *III—III'* (см. рис. 161) неустойчиво.

Вокруг какой-либо оси, не совпадающей со свободной осью, например, если параллелепипед завернуть вокруг наклонной оси *ab*, показанной на рис. 161, то тело, будучи предоставлено самому себе, не будет совершать чистого вращения вокруг этой оси, движение тела будет уже сложным.

Ось *I—I'* (см. рис. 161), проходящая через наибольшие грани

Устойчивость движения вокруг осей с наибольшим (и наименьшим) моментом инерции легко показать, подбрасывая с закручиванием пустую спичечную коробку (рис. 162). Коробка будет совершать устойчивое вращение при броске с закручиванием относительно осей  $I-I'$  и  $II-II'$  (см. рис. 161). При броске с закручиванием относительно третьей свободной оси  $III-III'$  коробка не будет обладать ясно выраженным вращением вокруг нее, движение не будет плоским движением, как это можно было наблюдать в двух предыдущих случаях.

Простую и наглядную демонстрацию роли осей свободного вращения представляет «кувыркающийся цилиндр». Из легкою материала, например пенопласта, вытачивают цилиндр (рис. 163, а). С торцов цилиндра закладывают и защелывают два одинаковых свинцовых грузика так, как показано на рисунке. Центр масс лежит на оси цилиндра, но его ось, очевидно, не является осью свободного вращения. Цилинду дают скатываться с наклонной плоскости. При небольшом наклоне цилиндр катится так же, как обычный, однородный цилиндр (рис. 163, б). При попытке же скатывать его с плоскости с большим наклоном цилиндр с увеличением скорости вращения начинает двигаться нерегулярно, подскакивает и «кувыркается» (рис. 163, в).

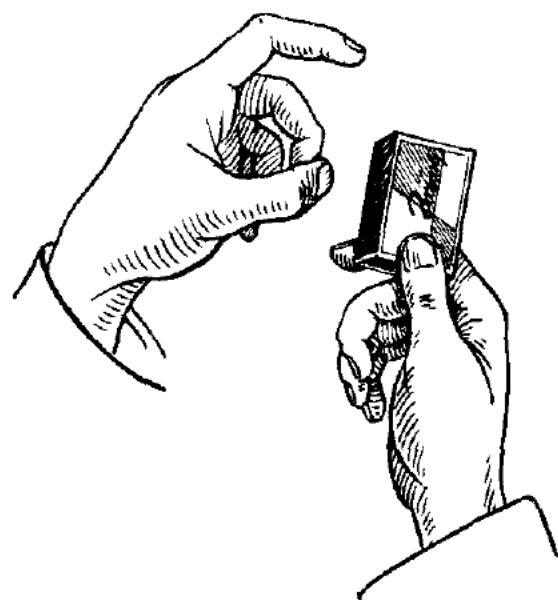


Рис. 162.

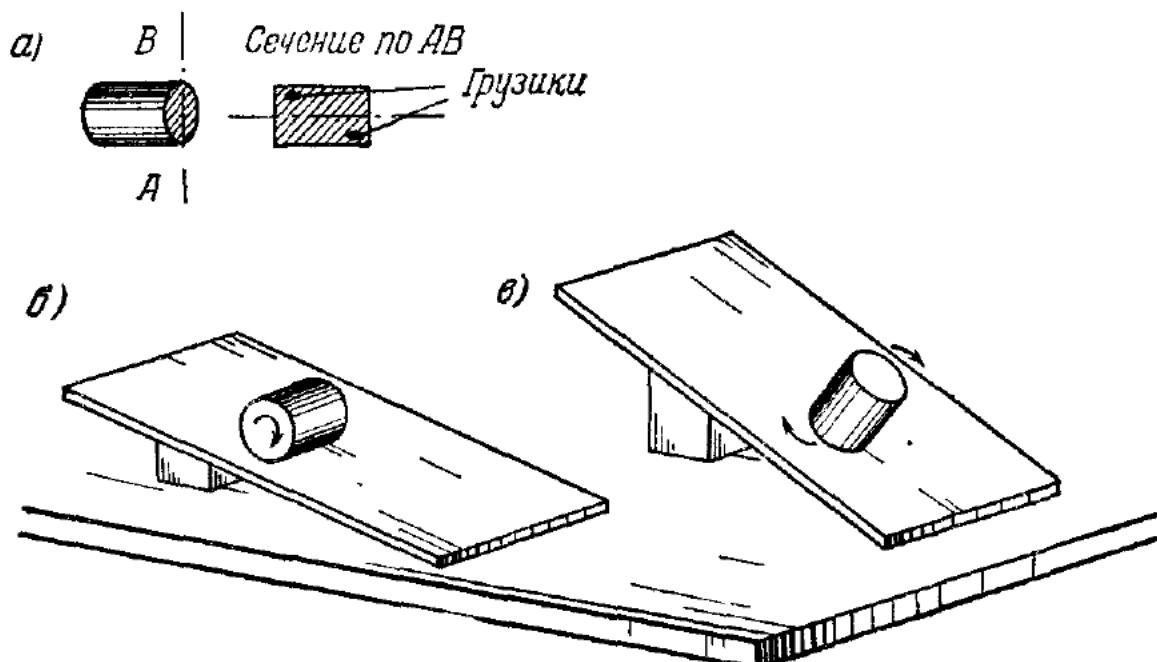


Рис. 163.

Устойчивость вращения вокруг свободных осей различных тел можно показать и так: привязать какое-нибудь тело, например мегаллический диск, на веревочке к шпинделю центробежной машины (рис. 164, а) и сообщить ему быстрое вращение (рис. 164, б). По мере увеличения скорости вращения после некоторых

колебаний тело начинает вращаться вокруг свободной оси устойчивого вращения, даже вопреки действию силы тяжести этого тела, которая стремится

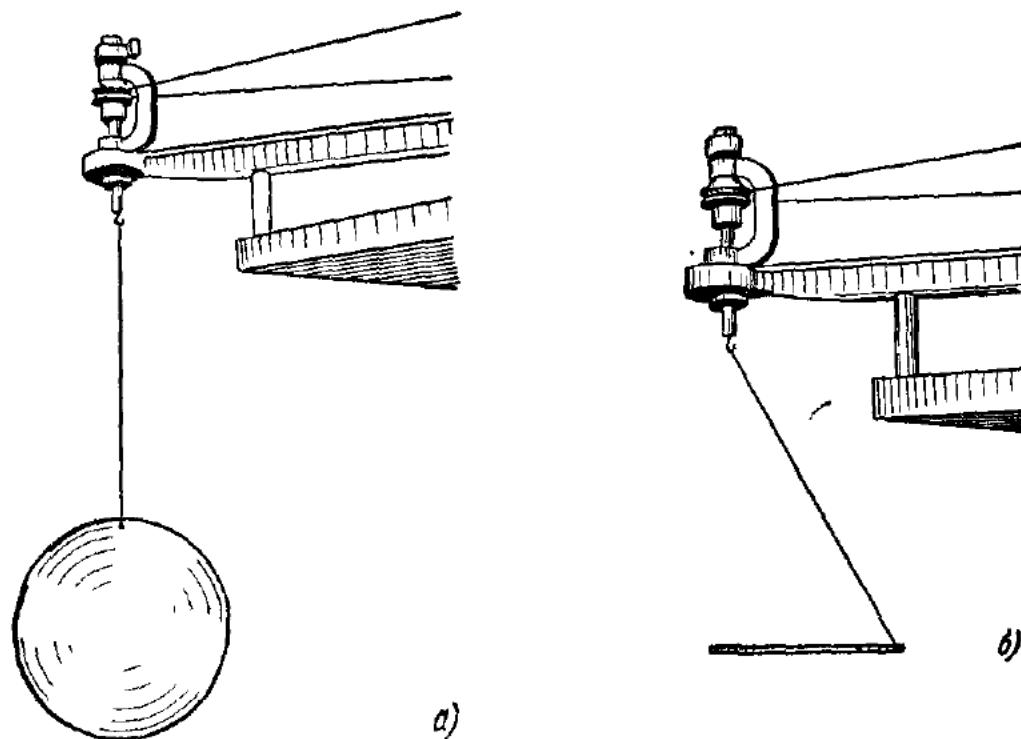


Рис. 164.

изменить ось вращения тела. Теперь, если остановить вращение машины и снять нить с крючка шпинделя, тело будет продолжать вращение вокруг оси устойчивого вращения.

### § 62. Кинематика движения твердого тела

В общем случае, когда к твердому телу приложены силы не к центру масс, движение становится сложным; это можно заметить, рассматривая вращение тела вокруг любой оси, не совпадающей с осью свободного вращения. Закон движения тела под действием сил, проходящих через центр масс, так же прост, как и закон движения материальной точки: все точки тела будут иметь одинаковое ускорение, и тело будет двигаться поступательно в пространстве, так что любая линия, связанная с телом, сохранит неизменное направление в пространстве. Следовательно, движение тела можно разделить на два: поступательное движение, определяемое движением центра масс, и вращение относительно какой-то оси, проходящей через центр масс. В общем случае эта ось меняет свое положение в теле и направление в пространстве.

Мы не будем здесь излагать сложные законы кинематики твердого тела в общем виде, а рассмотрим только некоторые важные для дальнейшего примеры, в которых одна точка тела остается неподвижной.

Прежде всего отметим, что при рассмотрении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси удобно записывать скорости различных точек тела следующим образом. Выберем на оси вра-

щения  $AA'$  некоторую точку  $O$ , которую можно представить как начало неподвижной системы координат  $(Oxyz)$ ; тогда положение каждой точки тела в данный момент будет определяться радиусом-вектором  $R_i$  (рис. 165). Скорость  $i$ -й точки можно записать так:

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} R_i], \quad (62.1)$$

где вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  направлен по оси по правилу правого винта. Действительно, расстояние от точки до оси  $\rho_i = R_i \sin \alpha$ , и формула (62.1) дает правильное направление и величину скорости точки  $\mathbf{v}_i$ . Очевидно, что скорость любой точки нормальна к плоскости, проходящей через  $\boldsymbol{\omega}$  и  $R_i$ , и имеет величину  $\omega \rho_i$ .

Сделаем несколько полезных выводов из только что приведенного определения скорости  $\mathbf{v}_i$  точек вращающегося тела.

а) Величина и направление скорости  $\mathbf{v}_i$  не зависят от положения точки  $O$  на оси. Например, для точки  $O'$  (рис. 166, а)

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} R'_i] = [\boldsymbol{\omega} R_i] \quad \text{и} \quad v_i = \omega \rho_i.$$

б) Поскольку  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор, всегда можно разложить его на два вектора  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  и представить вращение вокруг оси  $AA'$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  как

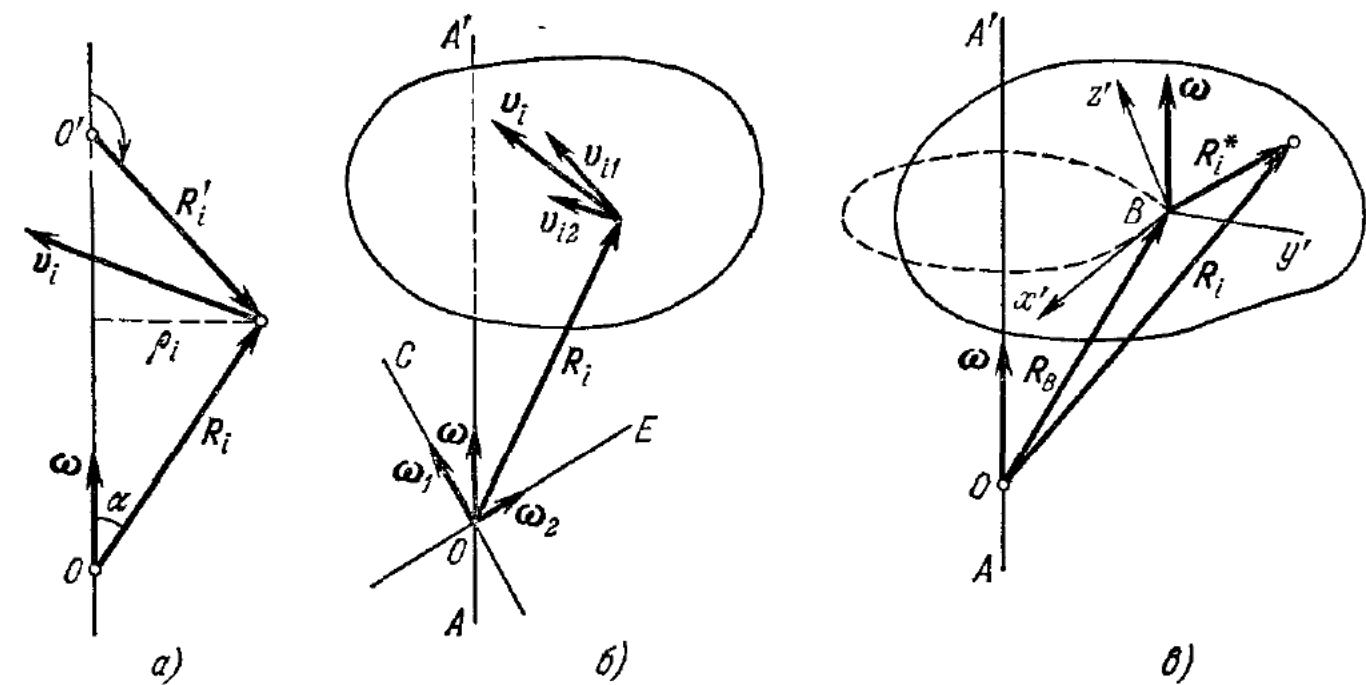


Рис. 166.

одновременное вращение вокруг двух осей  $OC$  и  $OE$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно (рис. 166, б). Действительно, если  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ , то

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} R_i] = [\boldsymbol{\omega}_1 R_i] + [\boldsymbol{\omega}_2 R_i] = \mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i2},$$

где  $v_{i1} = [\omega_1 R_i]$  — скорости вращения вокруг оси  $OC$ , а  $v_{i2} = [\omega_2 R_i]$  — скорости вращения вокруг оси  $OE$ .

в) Иногда вращение тела вокруг оси  $AA'$  удобно представить так: с некоторой точкой тела  $B$  (вообще говоря, любой) связана движущаяся *поступательно* (по кругу!) система отсчета  $(Bx'y'z')$ , и относительно этой системы отсчета тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через  $B$  (рис. 166, в). В самом деле, учитывая, что  $R_i = R_B + R_{\frac{1}{2}}$ , из формулы (62.1) находим

$$v_i = [\omega R_i] = [\omega R_B] + [\omega R_i^*] = v_B + [\omega R_i^*],$$

где  $v_B = [\omega R_B]$ ; иначе говоря, скорость каждой точки тела складывается из скорости движения точки  $B$  и скорости, обусловленной вращением тела с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей параллельно  $AA'$  через точку  $B$ .

Теперь рассмотрим более сложное движение твердого тела, когда ось  $OA$ , неизменно связанная с телом, сама вращается вокруг другой неподвижной оси  $OB$ , как это происходит, например, с вращающимся глобусом, установленным на вращающемся также шпинделе центробежной машины (рис. 167).

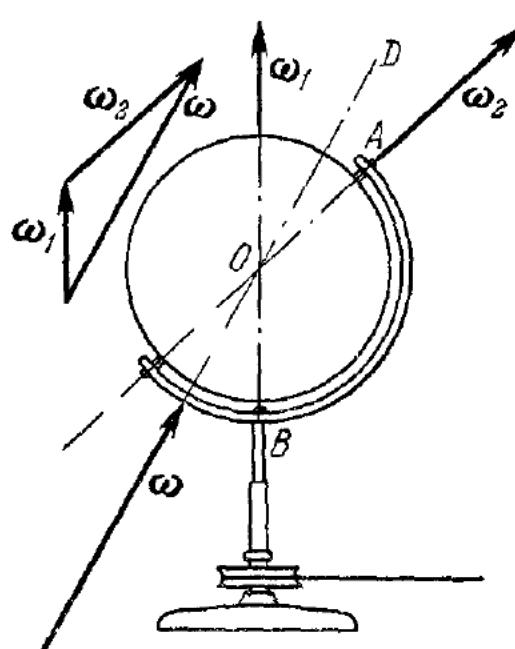


Рис. 167.

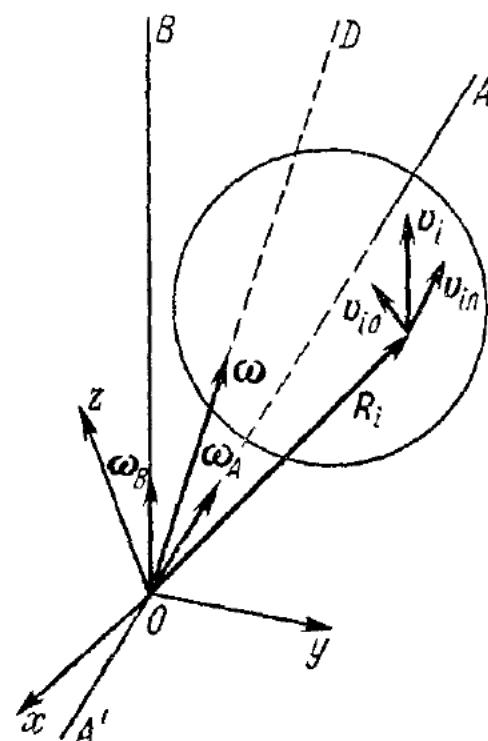


Рис. 168.

Или, вообще, пусть тело вращается с угловой скоростью  $\omega_A$  вокруг оси  $OA$ , неизменно связанной с телом, а ось  $OA$  в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси  $OB$  с угловой скоростью  $\omega_B$  (рис. 168). Сложное движение тела состоит из двух простых: вращения тела вокруг оси  $OA$  как неподвижной оси (при  $\omega_B = 0$ ) и вращения тела вокруг оси  $OB$  в отсутствие вращения относительно оси  $OA$  (при  $\omega_A = 0$ ). Положим, что при одновременном вращении тела около осей  $OA$  и  $OB$  результирующую скорость  $i$ -й точки  $v_i$ , находящейся на конце радиуса-вектора  $R_i$ , можно считать

суммой двух скоростей:  $\boldsymbol{v}_{i0}$ , которая имела бы место при  $\omega_B = 0$ , и  $\boldsymbol{v}_{in}$ , которая была бы при  $\omega_A = 0$ . Очевидно, что

$$\boldsymbol{v}_{i0} = [\omega_A \boldsymbol{R}_i], \quad \boldsymbol{v}_{in} = [\omega_B \boldsymbol{R}_i];$$

поэтому скорость  $i$ -й точки тела в сложном движении запишется в виде

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i0} + \boldsymbol{v}_{in} = [\omega_A \boldsymbol{R}_i] + [\omega_B \boldsymbol{R}_i] = [(\omega_A + \omega_B) \boldsymbol{R}_i] = [\omega \boldsymbol{R}_i], \quad (62.2)$$

где  $\omega = \omega_A + \omega_B$  — геометрическая сумма угловых скоростей. Вектор  $\omega_B$  сохраняет неизменное положение, он направлен по неподвижной оси  $OB$ , векторы  $\omega_A$  и  $\omega$  изменяют свое положение в пространстве, вектор  $\omega$  лежит в плоскости, проходящей через неподвижную и подвижную оси вращения тела. Следовательно, сложное движение тела можно представлять как вращение его в данный момент вокруг оси  $OD$ , проходящей через  $O$ , в направлении  $\omega$ ; эту ось называют *мгновенной осью вращения*. Она непрерывно меняет как свое направление в пространстве, так и положение относительно тела. Ясно, что точки тела, лежащие в данный момент на мгновенной оси вращения, имеют *скорость  $v_i$ , равную нулю*, или  $\boldsymbol{v}_{in} = -\boldsymbol{v}_{i0}$ , т. е. скорости при простых вращениях равны и противоположны.

Наблюдая за сложным вращением глобуса вокруг двух осей (см. рис. 167), мы можем следить за положением и движением мгновенной оси: в тех местах, где ось  $OD$  проходит через его поверхность, очертания карты кажутся более четкими, чем в других местах. Иногда глобус оклеивают газетной бумагой, тогда указанный эффект наблюдается яснее.

Описанному сложному вращению тела вокруг двух осей с постоянными скоростями  $\omega_A$  и  $\omega_B$  дают простое геометрическое толкование. Движение тела представляют как качение воображаемого конуса  $OA'$ , неизменно связанного с телом, по неподвижному в пространстве, также воображаемому конусу  $OB'$ ; линия соприкосновения конусов  $OD$  и является *мгновенной осью* (рис. 169, а). Конус  $OA'$  поворачивается в каждый момент вокруг мгновенной оси  $OD$ , т. е. катится без скольжения по конусу  $OB'$ . В зависимости от величины и направления  $\omega_A$  и  $\omega_B$  ось  $OD$  может проходить вне угла, образованного осями  $OA$  и  $OB$ ; тогда конус  $OA'$  будет лежать внутри конуса  $OB'$  и катиться по его внутренней поверхности (рис. 169, б). Это будет в том случае, если угловые скорости вращения вокруг осей  $OA$  и  $OB$  направлены в разные стороны, как на рис. 169, б.

Рассмотрим еще два примера на сложение угловых скоростей.

Качение конуса по поверхности стола (рис. 170, а) представляет собой сложное движение твердого тела. Конус в каждый момент совершает вращение вокруг мгновенной оси  $II'$ , лежащей на линии соприкосновения конуса с плоскостью, с угловой скоростью  $\omega_1$ . Это же движение можно представить как одновременное вращение

вокруг двух осей: вертикальной  $22'$  (неподвижной в пространстве) с угловой скоростью  $\omega_2$  и наклонной  $OO'$  (совпадающей с геометрической осью конуса) с угловой скоростью  $\omega_0$ . Вектор  $\omega_1$  равен сумме векторов  $\omega_2$  и  $\omega_0$ .

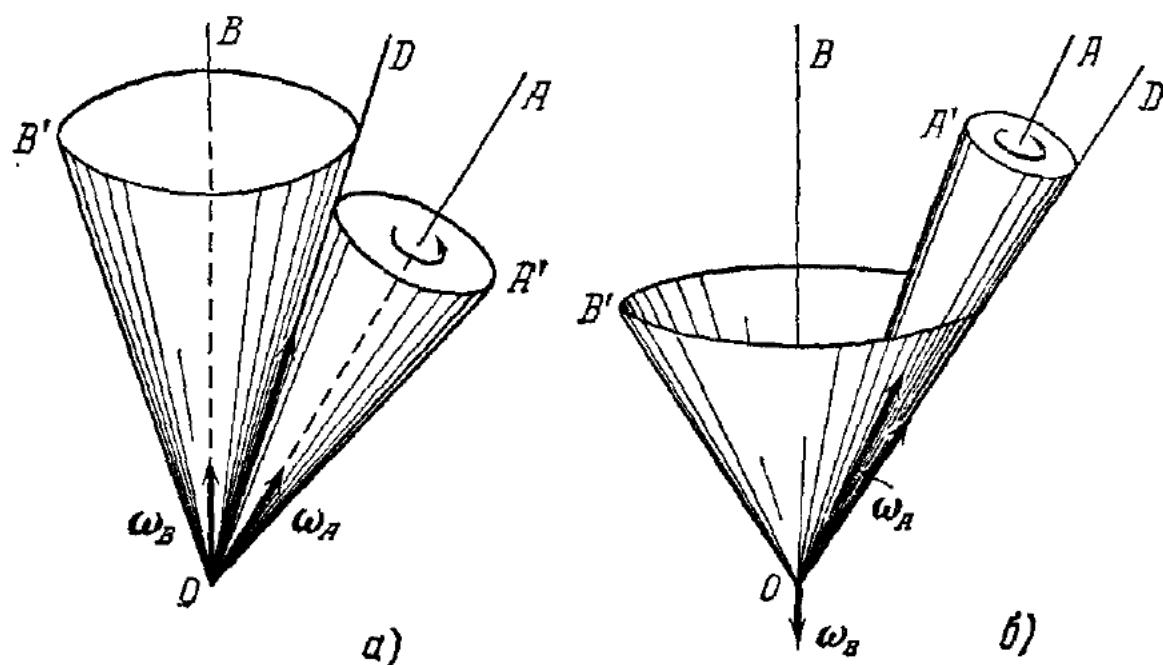


Рис. 169.

Примерно таким же образом можно представлять себе угловые скорости вращения жернова-бегунка, показанного на рис. 170, б. Жернов, катясь по плоскости, совершает сложное движение, которое можно рассматривать как вращение твердого тела около неподвижной точки  $O$ . Движение жернова можно представлять себе как

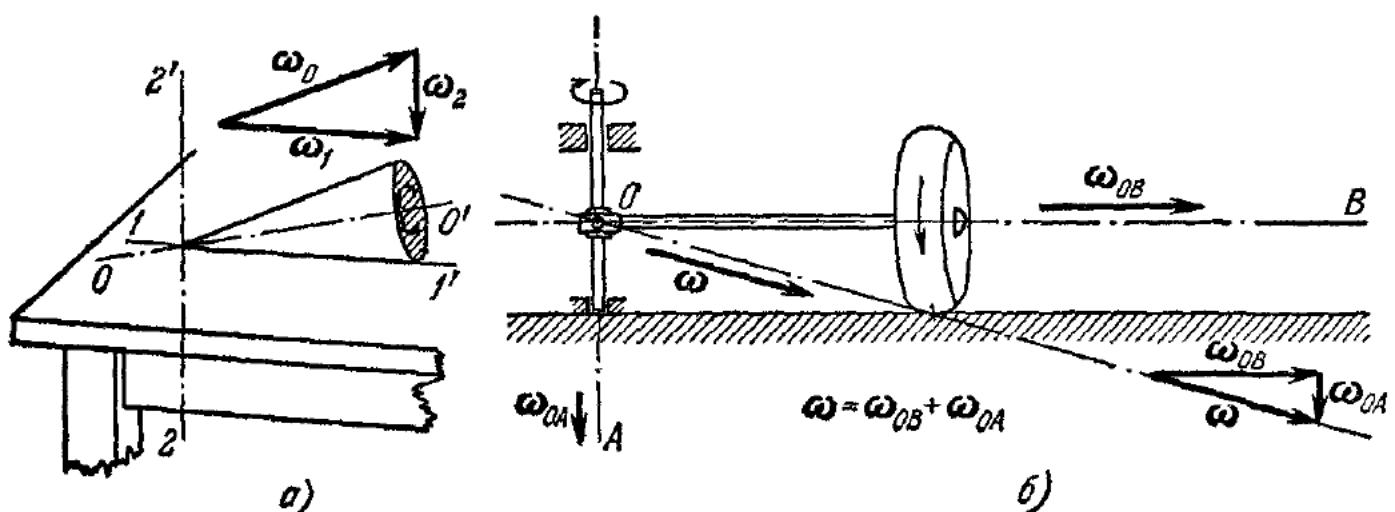


Рис. 170.

качение конуса ребром основания по горизонтальной плоскости так, что его геометрическая ось все время горизонтальна. Направление осей и соотношение между угловыми скоростями показаны на рис. 170, б.

### § 63. Момент силы относительно точки и момент количества движения твердого тела

Если направление силы, действующей на закрепленное в одной точке твердое тело, проходит через точку закрепления, то очевидно, что эта сила не изменит состояния этого тела, действие силы уравновесится силой, приложенной к телу в точке закрепления извне. Поэтому состояние равновесия или состояние движения может изменить только такая сила, приложенная к телу, линия действия которой не проходит через точку закрепления.

В этом случае, как и ранее, мерой действия силы является ее момент, сила стремится повернуть тело вокруг оси, перпендикулярной к плоскости, проходящей через линию действия силы и точку

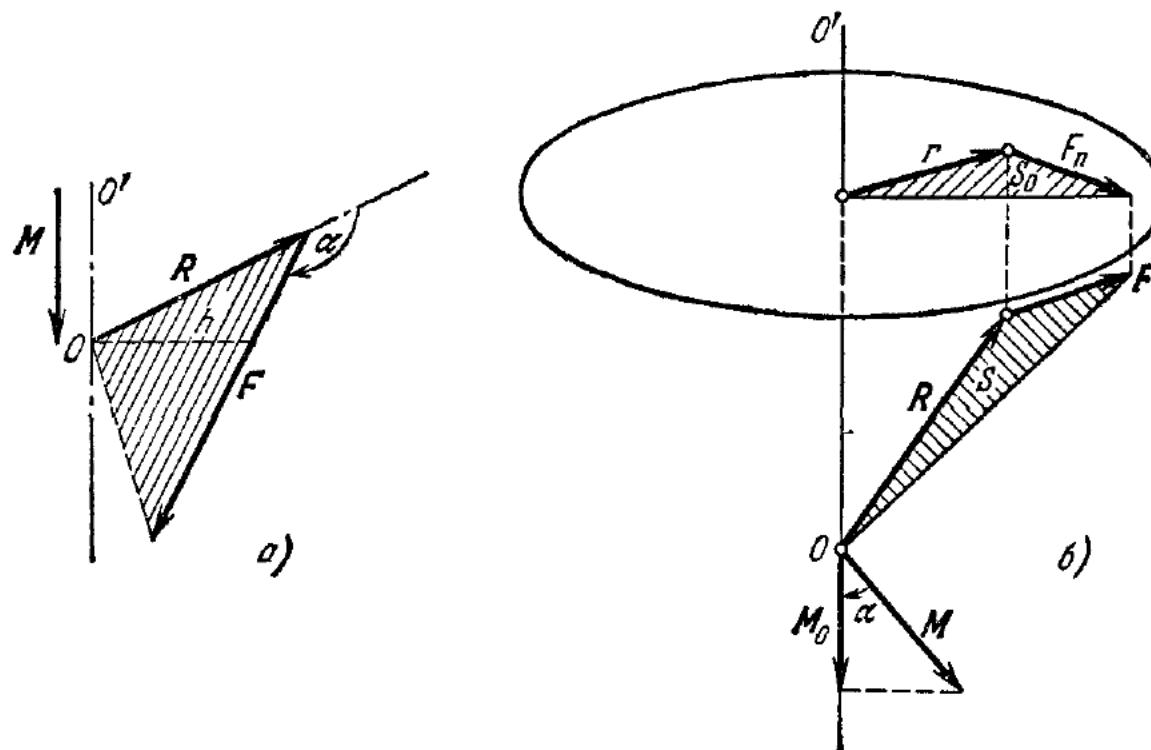


Рис. 171.

закрепления. Поэтому момент силы  $M$  относительно точки  $O$  (рис. 171, a) является векторной величиной, которую определяют как векторное произведение радиуса-вектора  $R$  (проведен из точки  $O$  в точку приложения силы) на вектор силы  $F$ :

$$M = [RF], \quad M = RF \sin \alpha = Fh, \quad (63.1)$$

где  $h$  — «плечо» силы  $F$  ( $h = R \sin \alpha$ ). Определение момента силы как векторной величины дает направление оси, вокруг которой сила стремится повернуть тело, и учитывает величину «плеча» силы  $h$ , расстояния от точки закрепления до линии действия силы.

Очевидно, что равновесие тела, имеющего неподвижную точку, будет только при равенстве нулю суммы моментов всех сил относительно неподвижной точки или когда совокупность векторов

моментов всех сил образует замкнутый (вообще говоря, пространственный) многоугольник.

Мы пришли к понятию о моменте силы относительно точки, рассматривая задачу о движении и равновесии тела, закрепленного в одной точке. Однако во многих других задачах механики очень важно представление о *моменте силы относительно любой заданной точки*  $O$ , которую обычно называют *полюсом*. Если известны сила  $\mathbf{F}$  и точка ее приложения, то всегда можно найти момент силы  $[\mathbf{RF}]$  относительно некоторого полюса  $O$ , из которого проведен вектор  $\mathbf{R}$  в точку приложения силы.

В частном случае плоского движения (см. § 57) мы уже встречались с определением момента силы относительно полюса, но там момент силы всегда имел определенное направление в пространстве и совпадал с моментом относительно оси, всегда перпендикулярной к плоскости движения.

Момент силы относительно заданной оси  $OO'$ , определение которого было дано в § 54, равен  $M_0$  — проекции на ось  $OO'$  момента  $M$  силы относительно *любой точки*  $O$ , лежащей на оси  $OO'$  (рис. 171, б). Действительно, площадь  $S_0$ , равная проекции площади  $S$  на плоскость, перпендикулярную к оси  $OO'$ , одинакова для всех точек  $O$ , лежащих на оси; если  $2S$  численно равно модулю  $M$  — момента силы  $F$ , то  $2S_0$  равно моменту  $M_0$  той же силы относительно оси и из равенства  $S_0 = S \cos \alpha$  следует:  $M_0 = M \cos \alpha$  (см. рис. 171, б).

При рассмотрении законов движения твердого тела важную роль играет момент количества движения относительно полюса  $O$ . Моментом количества движения отдельной материальной частицы тела с массой  $\Delta m_i$  относительно данной точки называют векторное произведение радиуса-вектора частицы  $\mathbf{R}_i$  на вектор количества движения этой частицы  $\Delta m_i \mathbf{v}_i$  (рис. 172). Момент количества движения всего твердого тела определяется как сумма моментов количеств движений всех частиц тела:

$$\mathbf{N} = \sum_i \Delta m_i [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i]. \quad (63.2)$$

Очевидно, момент количества движения твердого тела представляет собой векторную величину. Вспомним, что момент количества движения тела относительно неподвижной оси (§ 53) равен  $I\omega$ , где  $I$  — момент инерции тела относительно данной оси, а  $\omega$  — угловая скорость вращения. Так же как и для момента силы, проекция на неподвижную ось момента количества движения относительно любой точки оси будет равна  $I\omega$ .

Вектор момента количества движения, вообще говоря, не совпадает с направлением мгновенной или неподвижной оси. Например, пусть тело, состоящее только из двух частиц массы  $m_1$  и  $m_2$ , вращается около точки  $O$  в данный момент вокруг оси  $\omega$  (рис. 173), проходящей под углом к линии, соединяющей частицы. Ось вра-

шения и частицы лежат в плоскости чертежа. Тогда очевидно, что скорости  $v_1$  и  $v_2$  перпендикулярны к плоскости чертежа, а вектор  $N$  — вектор момента количества движения относительно  $O$  — должен быть перпендикулярен к линии, соединяющей частицы, и лежит в плоскости чертежа. Для однородного шара, вращающегося

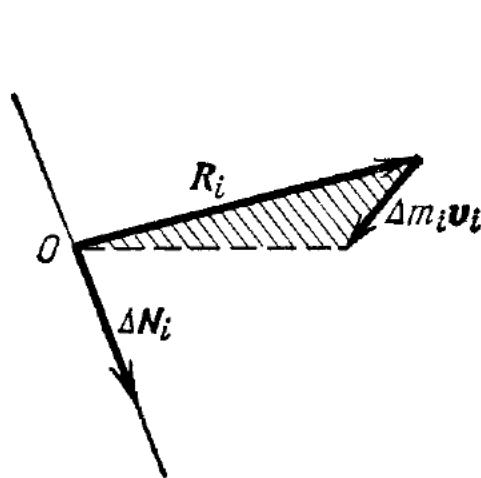


Рис. 172.

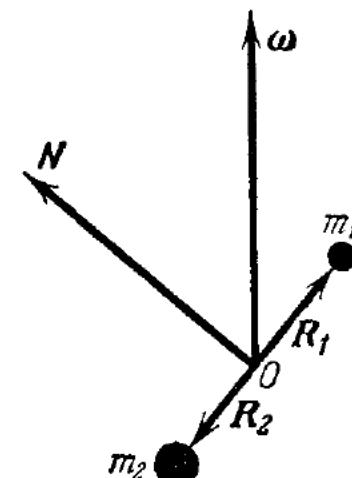


Рис. 173.

около центра, момент количества движения совпадает с мгновенной осью вращения.

Как сказано выше, каждое тело имеет три оси *свободного вращения*, которые взаимно перпендикулярны и проходят через центр масс; они также называются еще *главными осями инерции*. Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, то и момент количества движения совпадает с осью вращения.

#### § 64. Момент количества движения (импульса) твердого тела и момент инерции

Если твердое тело вращается вокруг оси  $\omega$ , проходящей через неподвижную точку  $O$  (рис. 174), то момент импульса частицы массы  $\Delta m$  равен

$$\Delta N = \Delta m [Rv] = \Delta m [R[\omega R]]; \quad (64.1)$$

$\Delta N$  лежит в плоскости  $\omega$  и  $R$  и нормален к  $R$ . Проекция  $\Delta N$  на  $\omega$  равна  $\Delta N_\omega = \Delta m \rho^2 \omega$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta N_\omega &= \Delta N \cos \alpha = \Delta m R v \cos \alpha = \\ &= \Delta m v R \sin(90^\circ - \alpha) = \Delta m v \rho = \Delta m \rho^2 \omega, \end{aligned}$$

так как  $v = \omega \rho$ . Следовательно, раньше, говоря о вращении тела около неподвижной оси, мы имели в виду только проекцию момента количества движения на ось вращения  $\Delta N_\omega$ , равную моменту инерции частицы  $\Delta I = \Delta m \rho^2$ , умноженному на  $\omega$ . Очевидно, что  $\Delta N_\omega$  не зависит от положения точки  $O$  на оси вращения. Равенство

$\Delta N = \Delta I \omega$  показывает простую зависимость между числами (склярами).

Нельзя ли найти связь между векторами  $\Delta N$  и  $\omega$  в общем случае? Оказывается, можно, она выражена двойным векторным произведением, и ее удобно представить с помощью новой физической величины — *тензора*, — которая является расширением и обобщением представления о векторной величине. Для выяснения прямой связи между векторами  $\Delta N$  и  $\omega$  найдем зависимость между проекциями  $\Delta N$  и  $\omega$  на оси координат. Предварительно по формуле из векторной алгебры

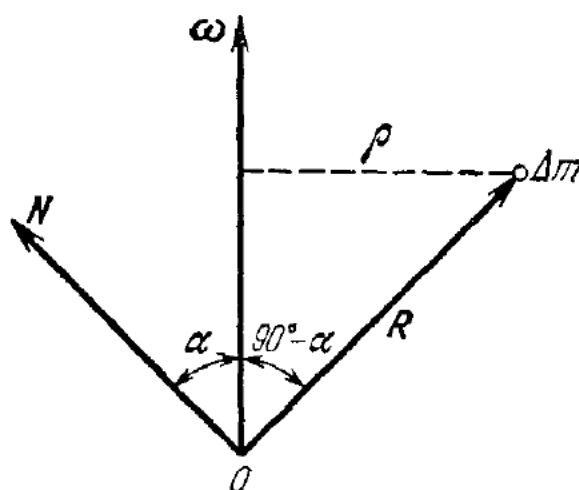


Рис. 174.

$$[a [bc]] = b (ac) - c (ab)$$

запишем (64.1) так:

$$\Delta N = \Delta m R^2 \omega - \Delta m R (\omega R). \quad (64.2)$$

Это есть разложение  $\Delta N$  на составляющие вдоль  $\omega$  и  $R$ . Теперь выпишем проекции  $\Delta N$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  прямоугольной системы координат, связанной с телом:

$$\Delta N_x = \Delta m R^2 \omega_x - \Delta m x (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z),$$

или

$$\Delta N_x = \Delta m (R^2 - x^2) \omega_x - \Delta m xy \omega_y - \Delta m xz \omega_z,$$

и так же

(64.3)

$$\Delta N_y = -\Delta m yx \omega_x + \Delta m (R^2 - y^2) \omega_y - \Delta m yz \omega_z,$$

$$\Delta N_z = -\Delta m zx \omega_x - \Delta m zy \omega_y + \Delta m (R^2 - z^2) \omega_z,$$

где, как обычно,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — проекции вектора  $R$ . Каждая проекция  $\Delta N$  линейно зависит от *всех* проекций  $\omega$ ; закономерность коэффициентов легко подметить: каждый из них имеет размерность момента инерции частицы массы  $\Delta m$ .

Совокупность девяти множителей при проекциях  $\omega$  представляет собой *тензор момента инерции* частицы массы  $\Delta m$ . Этот тензор обозначают рукописной буквой и записывают в виде таблицы (*матрицы*):

$$\Delta \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \Delta m (R^2 - x^2) & -\Delta m xy & -\Delta m xz \\ -\Delta m yx & \Delta m (R^2 - y^2) & -\Delta m yz \\ -\Delta m zx & -\Delta m zy & \Delta m (R^2 - z^2) \end{pmatrix}. \quad (64.4)$$

Три последних равенства (64.3) представляются формулой

$$\Delta N = \Delta \mathcal{I} \omega. \quad (64.5)$$

Формула (64.5) по виду аналогична  $\Delta N_\omega = \Delta I \omega$ , но только здесь  $\Delta \mathcal{J}$  — не число, а тензор второго ранга; умножение  $\Delta \mathcal{J}$  на вектор  $\omega$  производится по правилу матричного умножения. Это правило можно усмотреть из (64.3); проекция вектора  $\Delta N$  на ось  $x$  равна сумме произведений элементов первой строки  $\Delta \mathcal{J}$  на соответствующие проекции вектора  $\omega$ , проекция  $\Delta N$  на ось  $y$  равна аналогичной сумме произведений второй строки, и т. д.

Тензор — это упорядоченная совокупность девяти чисел (представляющих физические величины), которые называются *компонентами* тензора и зависят от выбранной системы координат; они преобразуются при изменении системы координат, как *произведения* координат. Напоминаем, что вектор есть упорядоченная система трех чисел, которые преобразуются при изменении системы координат так же, как координаты. Скаляр (число) не изменяется при преобразовании координат. Умножение тензора на число сводится к умножению каждой компоненты на это число.

Тензор представляет сумму или разность двух тензоров, если каждая его компонента равна сумме или разности соответствующих компонент «слагаемых» тензоров.

Среди тензоров имеется *единичный* тензор, равный

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

умножение которого на вектор не изменяет этот вектор. Единичный тензор не изменяется при преобразовании координат. Умножение тензора  $a\mathcal{E}$  на вектор равносильно умножению скаляра  $a$  на вектор.

Правило умножения тензора на вектор было указано раньше.

Все компоненты тензора  $\Delta \mathcal{J}$  (64.4) состоят из произведений координат точки (умноженных на постоянную массу  $\Delta m$ ). Поэтому величину  $\Delta \mathcal{J}$  мы и называем *тензором*: каждая его компонента преобразуется в соответствии с указанным условием преобразования компонент тензора.

Для одной частицы, возможно, и не следовало бы вводить тензор инерции  $\Delta \mathcal{J}$ , так как связь между  $\Delta N$  и  $\omega$  легко проследить прямо из равенства (64.2): вектор  $\Delta N$  лежит в плоскости  $\omega$  и  $R$ , и его построение показано на рис. 175. Но тензор  $\mathcal{J}$  необходим при описании вращения твердого тела около неподвижной точки. В этом случае момент количества движения, равный

$$N = \sum \Delta m_i [R_i [\omega R_i]] = \sum \Delta m_i R_i^2 \omega - \sum \Delta m_i R_i (\omega R_i),$$

с помощью тензора запишется так:

$$N = \mathcal{J} \omega, \quad (64.6)$$

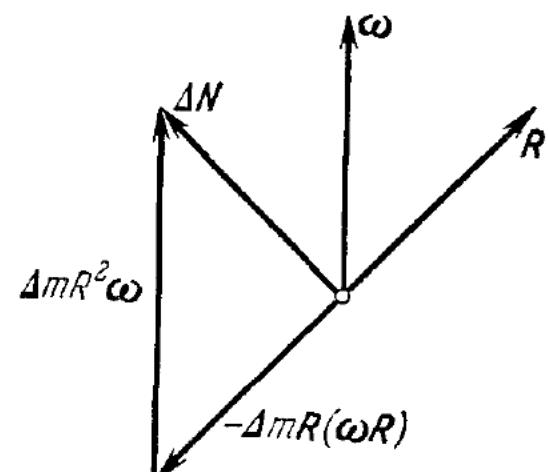


Рис. 175.

где  $\mathcal{I} = \sum \Delta \mathcal{I}_i$ , или

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

а компоненты тензора  $\mathcal{I}$  равны

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum \Delta m_i (R_i^2 - x_i^2), \\ I_{yy} &= \sum \Delta m_i (R_i^2 - y_i^2), \\ I_{zz} &= \sum \Delta m_i (R_i^2 - z_i^2), \\ I_{xy} = I_{yx} &= - \sum \Delta m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = - \sum \Delta m_i x_i z_i, \\ I_{yz} = I_{zy} &= - \sum \Delta m_i y_i z_i. \end{aligned} \quad (64.7)$$

Очевидно, что компоненты с двумя одинаковыми индексами представляют собой моменты инерции вокруг соответствующих осей, например,

$$I_{xx} = \sum \Delta m_i (R_i^2 - x_i^2) = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

— момент инерции тела относительно оси  $x$ , и т. д. Компоненты с разными индексами называют *произведениями инерции*. Тензор  $\mathcal{I}$  имеет только *шесть* независимых компонент, так как  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$ ,  $I_{yz} = I_{zy}$ ; такой тензор называется *симметричным*.

Компоненты тензора зависят от выбора системы координат, от направления осей. Если система координат  $Oxyz$  неизменно связана с телом, то компоненты тензора  $\mathcal{I}$  — постоянные во времени величины. Тогда компоненты  $N$  и  $\omega$  определяются относительно этих же осей. Следовательно, шесть величин ( $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ , ...) определяют множество значений  $N$ , соответствующих любому направлению  $\omega$ , и каждое  $N$ , вообще говоря, не совпадает по направлению с  $\omega$ .

Однако оказывается, что для всякого тела и любой точки  $O$  имеются по крайней мере три взаимно перпендикулярных направления  $\omega$  (оси вращения), для которых вектор  $N$  совпадает с вектором  $\omega$ . Такие направления называются *главными* или *главными осями вращения*. Для главных направлений

$$N = \lambda \omega,$$

где  $\lambda$  — число. Запишем основное общее равенство (64.6) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} N_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ N_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ N_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (64.8)$$

Для главного направления эти уравнения записутся так:

$$\begin{aligned} \lambda\omega_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ \lambda\omega_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ \lambda\omega_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z; \end{aligned} \quad (64.9)$$

они представляют собой три однородных уравнения относительно неизвестных  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Такая система имеет отличные от нуля решения только в том случае, если детерминант коэффициентов системы равен нулю, или

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (64.10)$$

Это есть алгебраическое уравнение третьего порядка относительно неизвестного  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (64.11)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  зависят от известных  $I_{xx}, I_{xy}, \dots$  — компонент тензора инерции.

Допустим, что мы решили уравнение (64.11) и нашли три различных значения корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Затем, подставляя одно из чисел  $\lambda$ , например  $\lambda_1$ , обратно в систему (64.9), найдем главное направление  $\omega_1$ , для которого  $N = \lambda_1 \omega_1$ . Запишем первые два уравнения системы (64.9):

$$\begin{aligned} \lambda_1 - I_{xx} &= I_{xy} \frac{\omega_y}{\omega_x} + I_{xz} \frac{\omega_z}{\omega_x}, \\ I_{yx} &= (I_{yy} - \lambda_1) \frac{\omega_y}{\omega_x} + I_{yz} \frac{\omega_z}{\omega_x}. \end{aligned}$$

Отсюда получим  $\omega_y/\omega_x$  и  $\omega_z/\omega_x$ , т. е. направление главной оси вращения, или направление  $\omega_1$ , величина вектора может быть любой. Аналогично можно отыскать направления главных осей для  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ .

Обозначим направления главных осей, соответствующих  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , единичными векторами  $n_1, n_2, n_3$ . Докажем, что  $n_1, n_2, n_3$  взаимно перпендикулярны, если все  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  различны.

Для компонент  $n_1$  можно записать систему уравнений  $\lambda_1 n_1 = \mathcal{J}n_1$ , или в проекциях:

$$\begin{aligned} \lambda_1 n_{1x} &= I_{xx} n_{1x} + I_{xy} n_{1y} + I_{xz} n_{1z}, \\ \lambda_1 n_{1y} &= I_{yx} n_{1x} + I_{yy} n_{1y} + I_{yz} n_{1z}, \\ \lambda_1 n_{1z} &= I_{zx} n_{1x} + I_{zy} n_{1y} + I_{zz} n_{1z}. \end{aligned} \quad (64.12)$$

Умножим первое уравнение на  $n_{2x}$ , второе — на  $n_{2y}$ , третье — на  $n_{2z}$  и сложим их почленно, получим

$$\lambda_1 n_1 n_2 = A_1,$$

где через  $A_1$  обозначено скалярное произведение вектора  $n_2$  на вектор  $\mathcal{J}n_1$ , или  $A_1 = n_2 \mathcal{J}n_1$ . Если запишем систему уравнений  $\lambda_2 n_2 = \mathcal{J}n_2$  и затем умножим каждое уравнение на соответствующие компоненты  $n_1$  и сложим их, то получим  $\lambda_2 n_1 n_2 = A_2 = n_1 \mathcal{J}n_2$ . Так как тензор  $\mathcal{J}$  симметричен (т. е.  $I_{xy} = I_{yx}, \dots$ ), то легко убедиться, что  $A_1 = A_2$ . Поэтому

$$\lambda_1 n_2 n_1 = \lambda_2 n_1 n_2, \quad (64.13)$$

или  $(\lambda_1 - \lambda_2) n_1 n_2 = 0$ . Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то последнее равенство удовлетворяется только при  $n_1 n_2 = 0$ , следовательно, векторы  $n_1$  и  $n_2$  ортогональны. Аналогично доказывается, что  $n_2 n_3 = 0$ , если  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ , и  $n_1 n_3 = 0$  при  $\lambda_1 \neq \lambda_3$ .

Важно отметить, что если принять направления  $n_1, n_2, n_3$  за направления осей координат, то тензор инерции и другие выражения получат особенно простой вид. Тогда  $\omega = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3$  и

$$\begin{aligned} N &= N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 = \mathcal{J}\omega = \mathcal{J}(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3) = \\ &= \omega_1 \mathcal{J}n_1 + \omega_2 \mathcal{J}n_2 + \omega_3 \mathcal{J}n_3 = \omega_1 \lambda_1 n_1 + \omega_2 \lambda_2 n_2 + \omega_3 \lambda_3 n_3. \end{aligned}$$

Отсюда в системе главных осей

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda_1 \omega_1, & N_2 &= \lambda_2 \omega_2, & N_3 &= \lambda_3 \omega_3, \\ N^2 &= N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = \lambda_1^2 \omega_1^2 + \lambda_2^2 \omega_2^2 + \lambda_3^2 \omega_3^2. \end{aligned} \quad (64.14)$$

Поэтому тензор инерции в этой системе координат примет такой простой вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Только на главной диагонали компоненты отличны от нуля.

Очевидно, что  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  представляют собой моменты инерции тела при вращении вокруг главных осей инерции, или *главные моменты инерции*. Они определяются распределением масс всего тела и не зависят от выбранной системы координат. Если главные оси определены относительно центра масс, то эти оси будут осями *свободного вращения*.

Далее можно показать, что если два корня  $\lambda$  равны друг другу, например,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то имеется бесконечное множество главных осей, лежащих в плоскости, нормальной к  $n_3$ . Так будет, если тело симметрично относительно некоторой оси,  $n_3$  направлено по этой оси. Однородные тела — цилиндр круглого или квадратного сечения, тело вращения и т. п. — обладают осевой симметрией. Однородный шар обладает центральной симметрией, и любая ось, проходящая через центр, — главная.

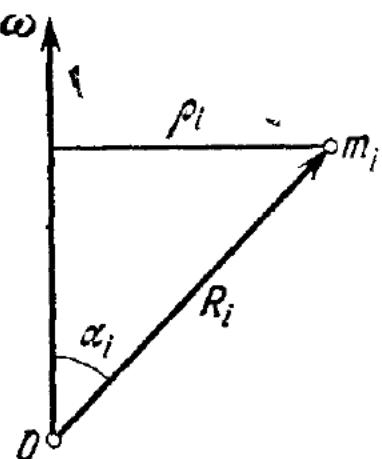


Рис. 176.

Теперь приведем выражение для кинетической энергии твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через неподвижную точку тела  $O$  (рис. 176). Мы покажем, что кинетическая энергия  $T$  связана с  $\omega$ ,  $N$  и  $\mathcal{J}$  следующим соотношением:

$$T = \frac{1}{2} \omega N = \frac{1}{2} \omega \mathcal{J} \omega. \quad (64.15)$$

Действительно, учитывая (64.6), можно записать:

$$\omega N = \sum \Delta m_i \omega [R_i [\omega R_i]],$$

а произведение

$$\begin{aligned} \omega [R_i [\omega R_i]] &= \omega \{R_i^2 \omega - R_i (\omega R_i)\} = \\ &= \omega^2 R_i^2 - (\omega R_i)^2 = \omega^2 R_i^2 (1 - \cos \alpha_i) = \omega^2 \rho_i^2 = v_i^2. \end{aligned}$$

Поэтому  $\omega N = \sum \Delta m_i v_i^2 = 2T$ .

Кинетическую энергию можно представить и так:

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2, \quad (64.16)$$

как при вращении около неподвижной оси,  $I_{\omega} = \sum \Delta m_i \rho_i^2$  — момент инерции относительно оси, совпадающей с  $\omega$ ;  $I_{\omega}$  — число (скаляр).

Следует заметить, что

$$2T = \omega N = \omega N_{\omega} = I_{\omega} \omega^2; \quad (64.17)$$

отсюда приходим к знакомому равенству:

$$N_{\omega} = I_{\omega} \omega, \quad (64.18)$$

т. е. проекция  $N$  на  $\omega$  равна моменту инерции относительно оси, совпадающей с  $\omega$ , умноженному на  $\omega$ . То, что было раньше справедливо для неподвижной в теле и пространстве оси вращения, оказывается, справедливо и для любой мгновенной оси вращения.

Обычно сначала вычисляют момент количества движения относительно оси, проходящей через центр масс  $O$ , так как можно показать, что момент количества движения  $N$  относительно любой точки  $O'$  (рис. 177) всегда равен

$$N = m [R_0 [\omega R_0]] + N_0, \quad (64.19)$$

где  $m = \sum \Delta m_i$  — масса всего тела,  $R_0$  — радиус-вектор центра масс тела, проведенный из точки  $O'$  (см. рис. 177),  $N_0$  — момент количества движения тела при вращении с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр масс  $O$ . Действительно, если  $R'_i = R_0 + R_i$ , то

$$N = \sum \Delta m_i [R'_i [\omega R'_i]] = \sum \Delta m_i [(R_0 + R_i) [\omega (R_0 + R_i)]].$$

Раскрывая сложное векторное произведение и вспоминая, что  $\sum \Delta m_i R_i = 0$ , найдем

$$N = m [R_0 [\omega R_0]] + \sum \Delta m_i [R_i [\omega R_i]].$$

Последняя сумма, обозначенная выше  $N_0$ , представляет собой момент количества движения при вращении вокруг оси, проходящей через  $O$ , с угловой скоростью  $\omega$ , а первый член — момент количества движения всего тела в целом, как частицы с массой  $m$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через  $O'$ .

Момент количества движения относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать так:

$$N_0 = \mathcal{I}_0 \omega, \quad (64.20)$$

где  $\mathcal{I}_0$  — тензор момента инерции относительно системы координат, начало которой совпадает с центром масс. Компоненты  $\mathcal{I}_0$  будут постоянны во времени, если система координат неизменно связана с телом.

Зная  $\mathcal{I}_0$ , можно найти момент инерции относительно любой оси, проходящей через  $O$  — центр масс тела. Пусть направление оси вращения задано единичным вектором  $n$ . Тогда, учитывая (64.18) и (64.20), проекцию  $N$  на  $n$  можно выразить так:

$$N_n = N_0 n = n \mathcal{I}_0 n \omega = I_n \omega,$$

где  $I_n$  — момент инерции относительно оси  $n$ . Или:

$$I_n = n \mathcal{I}_0 n. \quad (64.21)$$

Если записать число  $I_n$  через компоненты тензора  $\mathcal{I}_0$  и вектора  $n$ , то получим довольно громоздкое выражение. Приведем более короткую и ясную формулу, приняв за оси координат главные направления  $n_1, n_2, n_3$ ; тогда  $n = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — направляющие косинусы  $n$  по отношению к осям  $n_1, n_2, n_3$ . Следовательно,

$$\mathcal{I}_0 n = \alpha_1 \mathcal{I}_0 n_1 + \alpha_2 \mathcal{I}_0 n_2 + \alpha_3 \mathcal{I}_0 n_3 = \alpha_1 \lambda_1 n_1 + \alpha_2 \lambda_2 n_2 + \alpha_3 \lambda_3 n_3.$$

Поэтому

$$I_n = n \mathcal{I}_0 n = \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_3^2 \lambda_3, \quad (64.22)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — моменты инерции относительно главных осей, проходящих через центр масс. По (64.22) можем при известных  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  определить момент инерции  $I_n$  относительно любой оси  $n$ .

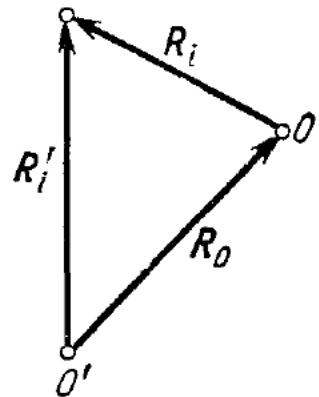


Рис. 177.

Наглядное представление о величине  $I_n$  по любому направлению можно получить при помощи «эллипсоида инерции». Основное равенство (64.22) делят на  $I_n$  и обозначают:  $\alpha_1/\sqrt{I_n} = x_1$ ,  $\alpha_2/\sqrt{I_n} = x_2$ ,  $\alpha_3/\sqrt{I_n} = x_3$ , тогда равенство (64.22) примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1.$$

Это есть уравнение эллипса в координатах  $x_1, x_2, x_3$ , откладываемых по главным осям тензора инерции  $n_1, n_2, n_3$ . Полуоси эллипса, очевидно, равны  $1/\sqrt{\lambda_1}$ ,  $1/\sqrt{\lambda_2}$ ,  $1/\sqrt{\lambda_3}$ , а расстояние от центра до поверхности эллипса в направлении  $n$  равно  $\rho$ , причем

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/I_n,$$

так как  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ . Поэтому  $\rho$  равно обратной величине квадратного корня из момента инерции  $I_n$  относительно оси по направлению  $n$ . Таким образом, поверхность эллипса инерции дает ясное представление о величине всех возможных моментов инерции относительно осей, проходящих через центр масс<sup>1)</sup>. Самая короткая ось эллипса направлена по оси наибольшего возможного момента инерции, длинная — по оси наименьшего.

Можно убедиться, что общий вид эллипса инерции «похож» на форму однородного тела. Например, однородный параллелепипед с ребрами различной

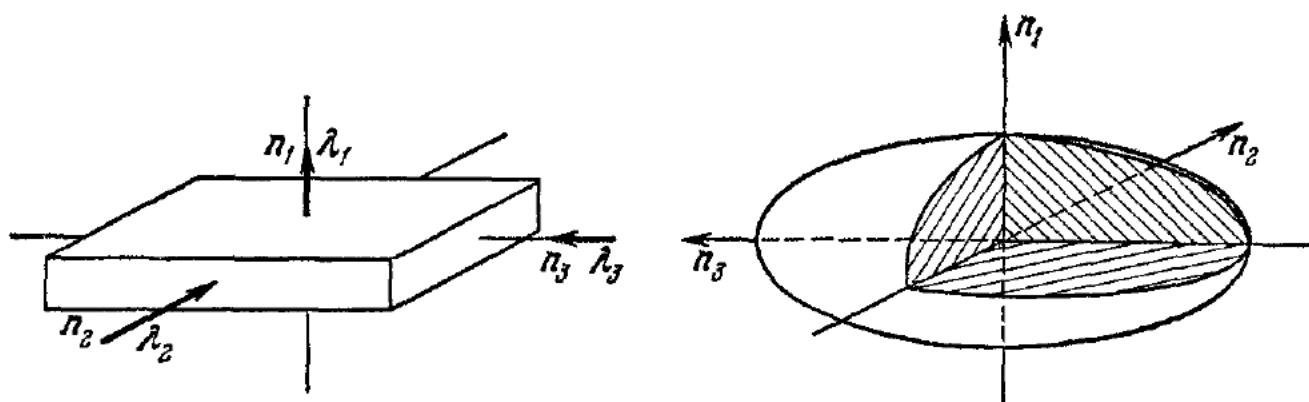


Рис. 178.

длины (форма спичечной коробки) имеет эллипсoid инерции, показанный в разрезе на рис. 178; самая длинная полуось направлена по  $n_3$ , короткая — по  $n_1$ . Главные оси тензора момента инерции относительно центра масс являются осями свободного вращения. Главные оси тензора момента инерции относительно любой точки тела не будут осьми свободного вращения, потому что при вращении тела около одной из этих осей на ось будут действовать центробежные силы инерции, но направление  $N$  будет совпадать с  $\omega$ .

Для тела вращения эллипсoid инерции будет также эллипсoidом вращения, одна главная ось совпадает с осью симметрии, и любая перпендикулярная к ней ось, проходящая через центр масс, будет главной. Два взаимно перпендикулярных направления в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, можно принять за оси эллипса. Для шара из однородного материала любое направление, проходящее через центр масс, — главное, т. е. эллипсoid инерции вырождается в сферу.

Если осесимметричное тело имеет две взаимно перпендикулярные главные оси с одинаковыми моментами инерции, то соответствующий эллипсoid инерции будет эллипсoidом вращения. Такой случай мы наблюдаем у стержня с квадратным сечением; из условий симметрии мы заключаем, что два главных направления имеют одинаковые моменты инерции. Из этих же соображений можно установить, что эллипсoid инерции для куба вырождается в сферу.

<sup>1)</sup> Можно построить эллипсoid инерции при вращении относительно оси, проходящей через любую точку тела.

В заключение параграфа отметим, что теорема Гюйгенса — Штейнера следует из равенства (64.19). Умножим это равенство на единичный вектор  $\mathbf{n}$ , учтем (64.20) и что  $\omega = n\omega$ ; тогда

$$N_n = nN = m\omega n [R_0 [nR_0]] + n\mathcal{I}_0 n\omega = n\mathcal{I} n\omega;$$

$I_{0n} = n\mathcal{I}_0 n$  — момент инерции относительно оси по направлению  $\mathbf{n}$ , проходящей через центр масс  $O$ ;  $I_n = n\mathcal{I} n$  — момент инерции относительно оси по направлению  $\mathbf{n}$ , проходящей через некоторую точку  $O'$  (рис. 179).

Скалярное произведение имеет вид

$$\mathbf{n} [R_0 [nR_0]] = R_0^2 - (nR_0)^2 = R_0^2 (1 - \cos^2 \alpha) = h^2,$$

где  $h$  — расстояние между осями, имеющими направление  $\mathbf{n}$  и проходящими через точки  $O$  и  $O'$ . Подставляя это выражение в основное равенство и сокращая на  $\omega$ , получаем:

$$mh^2 + I_{0n} = I_n$$

— теорему о моментах инерции относительно параллельных осей.

Пользуясь этой теоремой, определим эллипсоиды инерции шара для различных точек вращения.

Пусть шар вращается относительно точки  $O'$ , находящейся на расстоянии  $h$  от его центра. Тогда из симметрии видим, что одна главная ось проходит через точку  $O'$  и центр шара, и моменты инерции вокруг любой оси, проходящей через  $O'$  и нормальной к  $OO'$ , одинаковы. Две другие взаимно перпендикулярные оси в плоскости, нормальной к  $OO'$ , соответствуют одинаковым моментам инерции и являются главными. Поэтому эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения вокруг первой главной оси по линии  $OO'$ .

Очевидно, что момент инерции около этой оси равен  $I_0$  — моменту инерции шара. Момент инерции относительно второй (и третьей) главной оси равен  $I_0 + mh^2$ . Поэтому отношение полуосей эллипсоида инерции для точки  $O'$  равно

$$\frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0 + mh^2}} = \frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{2/5 + h^2/r^2}} = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2},$$

если вспомним, что  $I_0 = 2/5 mr^2$ , где  $r$  — радиус шара (см. (59.12)). На рис. 180 показаны сравнительные размеры эллипсоидов инерции для трех точек:  $h = 0$ ,  $h = r$ ,  $h = 2r$ . Здесь  $A = 1/\sqrt{I_0}$ .



Рис. 179.

Рис. 180.

## § 65. Основной закон динамики твердого тела

Представим себе движение твердого тела относительно системы координат, начало которой совпадает с точкой  $O$ , и допустим, что нам известны силы, действующие на каждую частицу тела. Пусть на частицу с массой  $\Delta m_i$ , находящуюся в точке, радиус-вектор

которой, проведенный из точки  $O$ , есть  $\mathbf{R}_i$ , действует сила  $\mathbf{F}_i$ . Под силой  $\mathbf{F}_i$  мы подразумеваем сумму всех сил, действующих на эту частицу, и внешних и внутренних. Тогда по второму закону динамики

$$\Delta m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i. \quad (65.1)$$

Умножим обе части равенства векторно на радиус-вектор частицы  $\mathbf{R}_i$ :

$$\Delta m_i \left[ \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right] = [\mathbf{R}_i \mathbf{F}_i] = \Delta \mathbf{M}_i. \quad (65.2)$$

Теперь возьмем момент количества движения той же самой частицы относительно точки  $O$

$$\Delta \mathbf{N}_i = \Delta m_i [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i] \quad (65.3)$$

и производную от него по времени

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{N}_i = \frac{d}{dt} (\Delta m_i [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i]) = \Delta m_i \left[ \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \mathbf{v}_i \right] + \Delta m_i \left[ \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right]. \quad (65.4)$$

Производная от радиуса-вектора равна скорости точки, или

$$\frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = \mathbf{v}_i,$$

поэтому

$$\left[ \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \mathbf{v}_i \right] = [\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i] = 0.$$

Сравнивая (65.4) и (65.2), получаем

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{N}_i = \Delta m_i \left[ \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right] = \Delta \mathbf{M}_i, \quad (65.5)$$

т. е. момент силы, действующей на частицу тела, равен производной момента количества движения этой частицы.

Теперь сложим моменты всех сил, действующих на все частицы тела, и равные им производные от моментов количеств движений всех частиц тела:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta \mathbf{N}_i = \sum_i \Delta \mathbf{M}_i,$$

или

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (65.6)$$

где

$$\sum_i \Delta \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \quad \text{и} \quad \sum_i \Delta \mathbf{M}_i = \mathbf{M}.$$

Так как все внутренние силы будут входить всегда попарно, то сумма моментов внутренних сил относительно любой точки равна нулю, поэтому под моментом всех сил следует подразумевать только момент *внешних* сил, действующих на тело.

Следовательно, основной закон динамики твердого тела можно сформулировать так: *момент всех внешних сил равен производной от момента количества движения тела относительно любой неподвижной точки  $O$* .

Этот закон можно формулировать и так: приращение момента количества движения  $dN$  за время  $dt$  совпадает по величине и по направлению с произведением момента всех внешних сил  $M$  на время  $dt$  ( $dt$  и  $dN$  — бесконечно малые величины).

К закону (65.6) следует еще прибавить всегда справедливый закон движения центра масс, выведенный в § 56:

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}, \quad (65.7)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — скорость центра масс тела и  $\mathbf{F}$  — сумма внешних сил.

Закон изменения момента количества движения (65.6) можно также преобразовать к невращающейся системе координат, движущейся поступательно и связанной с центром масс, и доказать, что

$$\frac{dN_0}{dt} = M_0, \quad (65.8)$$

где  $N_0$  — момент количества движения относительно центра масс и  $M_0$  — момент внешних сил относительно центра масс. Доказательство проводится тем же путем, как это сделано для плоского движения в § 57 при выводе аналогичной формулы (см. (57.8)), только здесь все векторы ( $\mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  и т. д.) имеют в общем случае любое направление в пространстве.

Таким образом, формулы (65.7) и (65.8) полностью описывают динамику движения твердого тела. Обычно практические вычисления и анализ движения с помощью формулы (65.8) не так просты. Положение осложняется тем, что во многих случаях трудно простым способом определить направление момента количества движения.

Просматривая вывод основных законов динамики твердого тела, нетрудно заключить, что законы

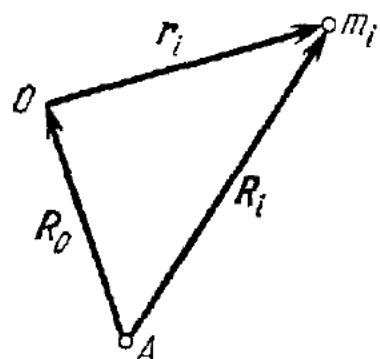
$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{dN}{dt} = \mathbf{M} \quad (65.9)$$

справедливы для любой системы материальных частиц. Напомним:  $K = \sum K_i$  — сумма импульсов (количеств движений) всех частиц,  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  — сумма внешних сил, и т. д.

Необходимо особо отметить характер изменения моментов (65.6) (для системы частиц и для твердого тела) при перемене *полюса*, относительно которого определяются моменты. Допустим, что  $N$ ,  $N_i$ ,  $R_i$  и т. д. вычисляются относительно некоторой точки  $A$  (рис. 181) в неподвижной системе отсчета. Как изменится закон моментов при переходе к другому полюсу  $O$ , который определяется вектором  $R_0$ ?

Ради общности пока что положим, что  $R_0$  является функцией  $t$ , т. е. полюс  $O$  может двигаться. Тогда для каждой  $i$ -й частицы (см. рис. 181)

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i.$$



Покажем, что момент импульсов системы частиц относительно  $O$ , равный

$$N_0 = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{K}_i],$$

удовлетворяет такому условию:

$$\frac{dN_0}{dt} = M_0 - \left[ \frac{dR_0}{dt} \mathbf{K} \right], \quad (65.10)$$

где  $M_0 = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i]$ . Действительно, подставляя в формулу  $N = \sum [\mathbf{R}_i \mathbf{K}_i]$  значение  $\mathbf{R}_i$ , можем записать:

$$N = \sum [(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i) \mathbf{K}_i] = [\mathbf{R}_0 \sum \mathbf{K}_i] + \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{K}_i],$$

или

$$N = [\mathbf{R}_0 \mathbf{K}] + N_0.$$

Отсюда

$$\frac{dN}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \mathbf{K} \right] + \left[ \mathbf{R}_0 \frac{d\mathbf{K}}{dt} \right] + \frac{dN_0}{dt},$$

что по (65.6) должно быть равно

$$M = \sum [\mathbf{R}_i \mathbf{F}_i] = \sum [(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i) \mathbf{F}_i] = \\ = [\mathbf{R}_0 \sum \mathbf{F}_i] + \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = [\mathbf{R}_0 \mathbf{F}] + M_0.$$

Учитывая, что  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}$ , находим соотношение (65.10). Оно показывает: неподвижный полюс  $O$  можно выбирать как угодно, тогда  $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = 0$  и закон изменения момента количества движения принимает обычный вид (65.6); это имеет место и в случае  $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} \parallel \mathbf{K}$ , когда полюс  $O$  движется параллельно вектору количества движения системы частиц (тела), т. е. скорости центра масс, и, наконец, тогда, когда  $m \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{K}$  — центр инерции системы принят за полюс  $O$ .

Заметим, что при определении  $N_0$  учитывается скорость (и количество движения) относительно неподвижной системы отсчета. Но можно показать, что той же самой величине  $N_0$  будет равен суммарный момент, если учитывать скорость частицы относительно системы отсчета, движущейся поступательно вместе с центром инерции.

Пусть количество движения (импульс) частицы относительно этой системы отсчета равен  $k_i$ , тогда

$$K_i = m_i \frac{dR_0}{dt} + k_i,$$

где  $\frac{dR_0}{dt}$  — скорость центра масс. Следовательно,

$$\begin{aligned} N_0 = \sum [r_i K_i] &= \sum \left[ r_i \left( m_i \frac{dR_0}{dt} + k_i \right) \right] = \\ &= \left[ \sum m_i r_i \frac{dR_0}{dt} \right] + \sum [r_i k_i] = \sum [r_i k_i]. \end{aligned}$$

Так как полюс  $O$  — центр масс системы частиц, то  $\sum m_i r_i = 0$ . Поэтому закон (65.7) движения центра масс всегда справедлив и для системы частиц, и для твердого тела.

## § 66. Гироскопы

В некоторых случаях, когда тело совершает быстрое вращение относительно одной оси и сравнительно очень медленное вращение относительно других, можно просто приближенно определить направление момента количества движения. Это обстоятельство в значительной степени упрощает анализ законов движения тела в этих случаях.

Физические явления, которые имеют место при вращении волчков и гироскопов, происходят обычно при указанном выше условии. Поэтому элементарный анализ законов движения гироскопа провести сравнительно просто.

Всем известна детская игрушка волчок (юла). Сообщив волчку быстрое вращение вокруг оси, каждый еще в детстве наблюдал необычную устойчивость волчка, стоящего на остром конце своей оси. «Запустив» волчок на лист картона, мы можем подбросить волчок. Волчок во время полета сохраняет направление своей оси и, падая острием на картон, продолжает устойчиво стоять, пока он обладает достаточной скоростью вращения вокруг своей оси (рис. 182). Все эти явления объясняются законами изменения момента количества движения (формула (65.8)), о чем мы скажем ниже, анализируя законы движения гироскопов. Гироскопом называется симметричное относительно оси вращения тело (обычно диск), совершающее быстрое движение вокруг своей оси. Для выяснения основных законов вращения гироскопа желательно закрепить его

в центре масс диска. Такое закрепление осуществляется с помощью «кардановой» подвески диска на двух кольцах, как показано на рис. 183.

Дискообразное тело — гироскоп — закреплено на оси  $AA'$ , которая вращается с малым, по возможности, трением в подшипниках, укрепленных на внутреннем кольце. Внутреннее кольцо в свою очередь может вращаться вокруг оси  $BB'$ , опирающейся на подшипники, укрепленные на внешнем кольце. Ось  $BB'$  будем условно называть горизонтальной, горизонтальная ось составляет угол в  $90^\circ$  с осью гироскопа.

Внешнее кольцо может свободно вращаться вокруг оси  $DD'$ , проходящей через неподвижные

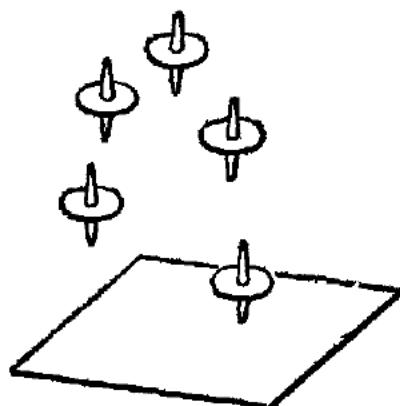


Рис. 182.

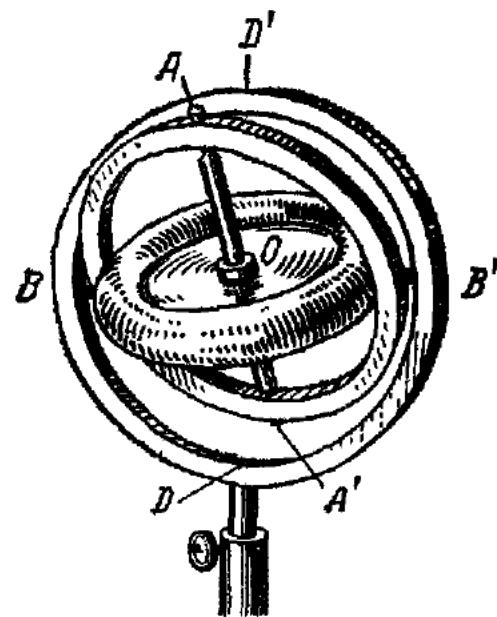


Рис. 183.

подшипники подставки. Ось  $DD'$  перпендикулярна к горизонтальной оси, поэтому, также условно, мы будем называть ее «вертикальной». Следовательно, точка пересечения всех трех осей  $AA'$ ,  $BB'$  и  $DD'$  всегда совпадает с центром масс гироскопа.

Если кольца симметричны относительно своих осей, то диск и кольца будут оставаться в равновесии в любом положении, так как равнодействующая сил тяжести будет приложена в точке пересечения трех осей. При таком «закреплении» гироскоп можно рассматривать как симметричное твердое тело, закрепленное в центре масс. Ось гироскопа, поворачиваясь вокруг горизонтальной и вертикальной осей, может принять любое направление в пространстве. И, кроме того, диск может повернуться на любой угол относительно своей оси, поэтому он может занимать любое положение при неподвижной точке  $O$ . Такой гироскоп называют *свободным гироскопом*, если, конечно, допустимо пренебрегать силами трения в подшипниках всех трех осей и моментом количества движения колец.

Когда диск не совершает вращения вокруг своей оси, мы, прилагая очень небольшие усилия (так как трение в подшипниках сведено к минимуму), легко заставляем диск вместе с кольцами вер-

теться вокруг любой оси. Теперь сообщим диску гироскопа очень быстрое вращение при помощи намотанной на ось веревочки (рис. 184). Гироскоп будет иметь определенный момент количества движения; так как ось симметрии гироскопа остается неподвижной в пространстве, то очевидно, что момент количества движения  $N$  совпадает с направлением оси и равен по величине  $N = I\omega$  — моменту инерции  $I$ , умноженному на угловую скорость  $\omega$ .

Заметим направление оси гироскопа, возьмем весь прибор за подставку в руки и будем различным образом поворачивать подставку и поднимать и опускать весь прибор; сразу бросается в глаза, что при всех манипуляциях направление оси диска гироскопа не изменяется, ось гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве. Теперь будем ударять палочкой по внутреннему кольцу и обнаружим, что под действием даже сравнительно сильных ударов ось гироскопа не движется, не изменяет своего направления, гироскоп кажется как бы затвердевшим. Если бы делали такие же толчки при невращающемся гироскопе, то его ось совершила бы после такого толчка быстрое вращение вместе с кольцом.

Эти явления легко объяснить, исходя из основного закона движения твердого тела, закрепленного в точке. Так как моменты сил трения в подшипниках ничтожно малы и момент силы тяжести относительно точки закрепления равен нулю, то при движении прибора на вращающийся диск не действуют моменты внешних сил; следовательно, *вектор момента количества движения будет сохранять постоянное значение и неизменное направление в пространстве*. Ось гироскопа вначале совпадала по направлению с моментом количества движения, и далее она будет совпадать с ним и сохранять неизменное направление в пространстве. По той же самой причине сохраняет направление своей оси и летящий волчок (см. рис. 182). Во время полета волчок свободен, момент силы тяжести относительно центра масс равен нулю, одна сила тяжести не может изменить вращение тела. Поэтому волчок в полете сохраняет постоянным момент количества движения по величине и направлению.

Удар по кольцу гироскопа вызывает некоторый момент  $M$  за время  $dt$ , момент количества движения получит за это время некоторое приращение  $dN$ , но гироскоп совершает очень быстрое вращение и имеет значительный момент количества движения, и поэтому приращение количества движения изменит направление момента на ничтожный угол  $d\alpha$ . Добавочный момент количества

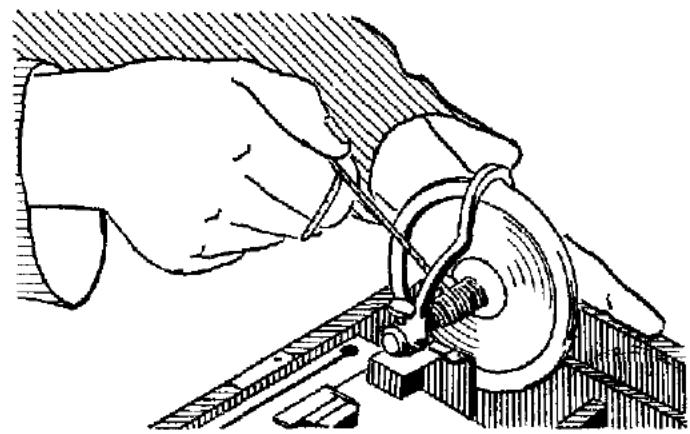


Рис. 184.

движения  $dN$  ничтожно мал по сравнению с  $N$ , и даже если бы  $dN$  было перпендикулярно к  $N$ , ось гироскопа не могла бы отклониться на конечный угол от направления момента количества движения; следовательно, практически она будет оставаться неподвижной.

Теоретически такой свободный гироскоп можно было бы применять в качестве компаса. Если бы можно было сделать трение в подшипниках оси и трение осей колец равным нулю, то ось такого гироскопа всегда показывала бы определенное направление в пространстве, несмотря на вращение и движение Земли. Тогда ось гироскопа не участвовала бы в движении Земли и показывала бы всегда неизменное направление, например на Полярную звезду. Однако нельзя совершенно уничтожить трение, и наличие хотя и малых моментов сил трения за продолжительное время всегда «уведет» направление момента количества движения и направление оси гироскопа в сторону от первоначального. Поэтому свободным гироскопом пользуются как компасом для указания направления только на некоторое время. В качестве компасов применяются гироскопы другого типа.

### § 67. Движение оси гироскопа

Здесь рассматривается движение оси вращающегося гироскопа. Диск гироскопа может совершать несколько движений, одно — вокруг своей оси, остальные связаны с движением этой оси. Момент количества движения в этом случае уже не будет совпадать с осью вращения гироскопа. Но если гироскоп совершает очень быстрое вращение вокруг оси диска и относительно очень медленное вращение вместе с движением оси диска, то можно считать, что направление момента количества движения приближенно всегда совпадает с осью вращающегося диска.

Например, при обычных опытах с гироскопами диск вращается с угловой скоростью, равной примерно нескольким десяткам (и больше) оборотов в секунду, а вращение самой оси происходит медленнее, чем 1 оборот за 10 секунд. При таких движениях направление вектора момента количества движения будет отличаться от направления оси меньше чем на  $\frac{1}{100}$  угловой меры, или меньше чем на  $1^\circ$ .

Действительно, как было указано в § 64, момент количества движения всегда можно представить разложенным на направления главных осей тела, и тогда, как было там указано, составляющие его просто вычислить, как произведения соответствующих моментов инерции тела на составляющие угловой скорости. Ось вращения диска и перпендикулярные к ней являются главными осями.

Разложим мгновенную скорость вращения  $\omega$  на составляющие  $\omega_0$  и  $\omega_n$  (рис. 185). Тогда, зная моменты инерции диска относительно оси диска ( $I_0$ ) и оси, перпендикулярной к ней ( $I_n$ ), можно опре-

делить направление  $N$  и угол  $\beta$  между  $N$  и осью вращения, или  $\omega_0$ . Очевидно, что  $I_0 > I_n$ , тогда  $\beta < \arctg \frac{\omega_n}{\omega_0}$ . Поэтому практически отличие между направлениями вектора момента количества движения  $N$  и оси  $\omega_0$  очень мало, и пренебрежение им не оказывает влияния на основные выводы. Далее всюду мы будем считать, что  $N$  практически совпадает с  $\omega_0$ .

Поставим ось диска гироскопа горизонтально и, сообщив ему быстрое вращение, привесим к внутреннему кольцу вблизи оси диска небольшой грузик (рис. 186, а). Под действием силы тяжести грузика  $G$  кольцо не будет опускаться, а будет совершать медленное вращение вместе с осью диска и внешним кольцом вокруг вертикальной оси против часовой стрелки. Если мы снимем грузик, то вращение немедленно прекратится. Если увеличим грузик, то скорость вращения кольца вокруг

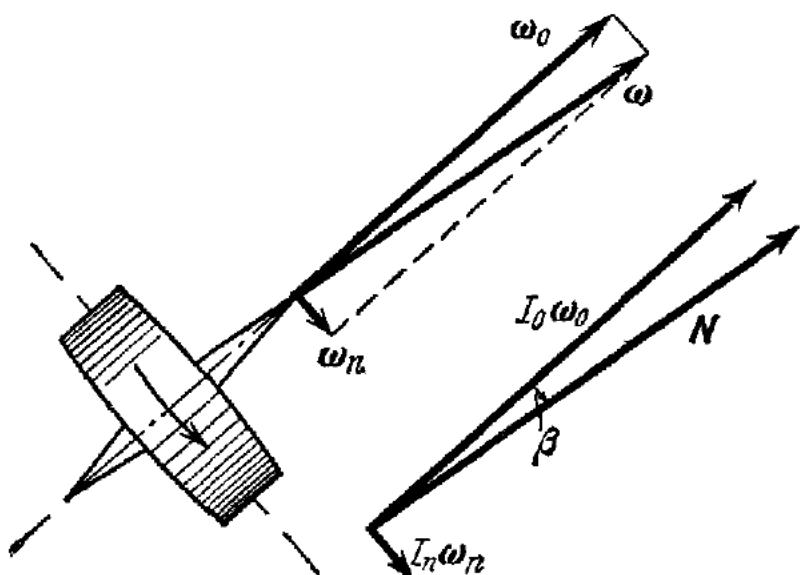


Рис. 185.

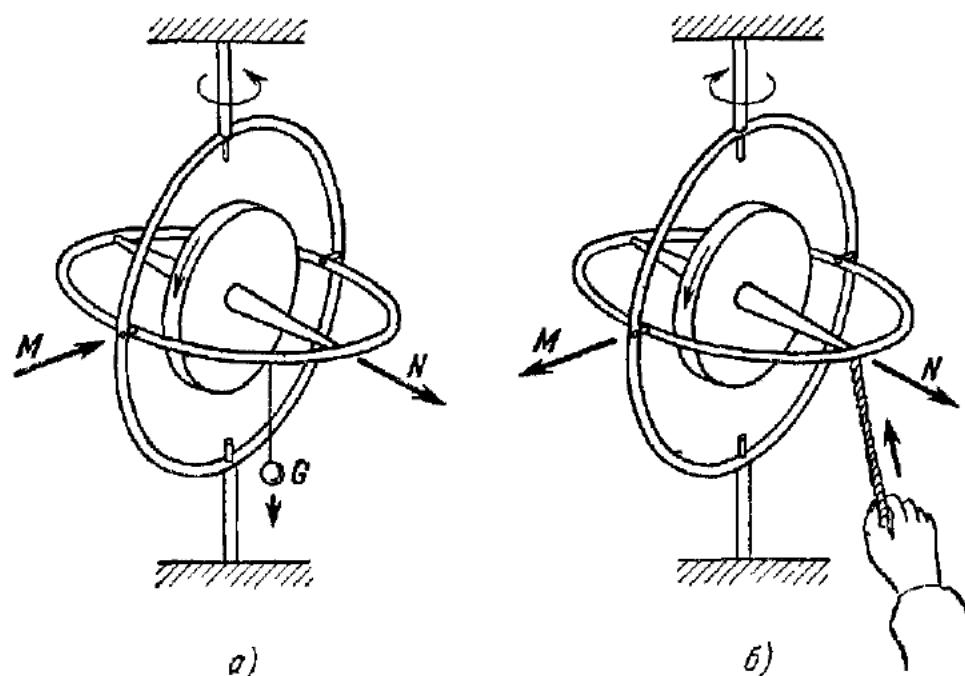


Рис. 186.

вертикальной оси увеличится. Снимем грузик и будем легонько палочкой надавливать на внутреннее кольцо вниз в том месте, где был подвешен грузик, — кольцо будет уходить в сторону, как под действием грузика. Будем надавливать палочкой вверх (рис. 186, б) —

кольцо также будет уходить в сторону, но противоположную той, в которую оно уходило при надавливании палочкой вниз.

При первом взгляде такое поведение гироскопа кажется очень удивительным. Действительно, давим на тело вверх, а оно идет вдоль горизонта, в перпендикулярном направлении к линии действия силы! Затем поразительным является отсутствие «инерции»: мы tolкали палочкой — было движение, отпустили палочку — движение тут же прекратилось.

Вращение оси гироскопа под действием силы, например силы тяжести грузика, называется *прецессией* и легко объясняется на основании сформулированного ранее закона движения твердого тела (см. формулу (65.6)). На вращающийся диск, ось которого горизонтальна, действует момент силы тяжести грузика; поэтому момент количества движения диска должен изменяться. По закону

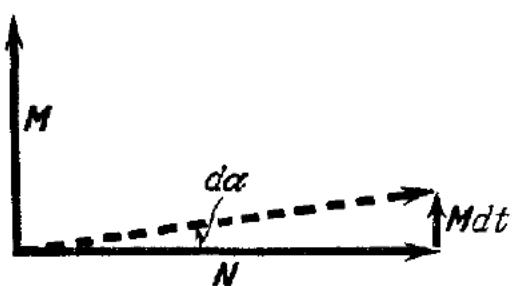


Рис. 187.

(65.6) приращение  $dN$  момента количества движения за время  $dt$  будет равно  $M dt$ . Момент силы тяжести относительно точки закрепления диска (точки пересечения трех осей) представляется вектором  $M$ , лежащим в горизонтальной плоскости. Момент количества движения также представляет собой вектор, совпадающий с направлением оси диска и лежащий в горизонтальной плоскости.

Приращение  $dN = M dt$  направлено перпендикулярно к моменту количества движения  $N$  (рис. 187). Следовательно, за время  $dt$  вектор момента количества движения повернется на угол

$$d\alpha = \frac{M dt}{N}, \quad (67.1)$$

и вместе с ним повернется на тот же угол  $d\alpha$  и ось диска гироскопа. Формула (67.1) дает точное значение угла поворота направления  $N$  и приближенное — поворота оси гироскопа. Так как момент силы действует постоянно и направлен все время перпендикулярно к моменту количества движения, то ось диска будет совершать вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{N}. \quad (67.2)$$

Момент силы здесь определяет *скорость* вращения оси диска гироскопа, а не ускорение, как мы привыкли, и поэтому устранение действия силы ведет к прекращению движения оси. Угловая скорость вращения оси  $\Omega$  называется *угловой скоростью прецессии*, она равна отношению момента силы к моменту количества движения гироскопа.

Если сила приложена так, что момент ее не перпендикулярен к моменту количества движения, например, грузик привешен к внутреннему кольцу сбоку, то для определения скорости прецессии необходимо взять только нормальную к моменту количества движения составляющую вектора момента внешней силы  $G$ , т. е.  $dN = -M_n dt$ . Составляющая момента  $M_0$ , направленная вдоль оси диска, уравновесится действием опоры внешнего кольца.

Движение конца оси гиро скопа происходит в направлении момента сил, а не в направлении сил, этим и объясняется «необычное» поведение гиро скопа.

Точно такие же явления можно наблюдать и при несколько иной, «кардановой» подвеске гиро скопа, которая показана на рис. 188. Кольцо, в котором укреплена ось вращения диска гиро скопа, закреплено на стержне  $AB$ , который является продолжением оси вращения. Стержень укреплен на горизонтальной оси в точке  $O$ , опирающейся на полукольцо с вертикальной осью вращения в подставке. Все три оси вращения пересекаются в точке  $O$ , поэтому диск гиро скопа может занимать любое положение в пространстве, если считать, что точка  $O$ , находящаяся на его оси, закреплена. Момент силы тяжести, стремящийся повернуть кольцо с диском вокруг горизонтальной оси, уравновешивается моментом силы  $G$  противовеса, находящегося на продолжении стержня  $AB$ .

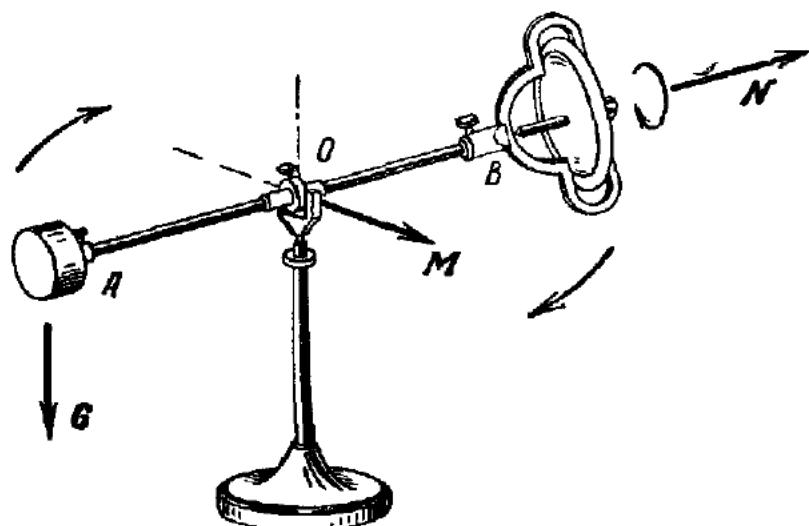


Рис. 188.

Разбалансировка противовеса дает момент, врачающий ось диска вокруг горизонтальной оси и вызывающий прецессию гиро скопа. Если перетягивает та сторона рычага, где находится гиро скоп, то вращение происходит в одном направлении; если перетягивает противовес, то направление вращения меняется.

Прецессию можно демонстрировать и таким образом. Подвесить на нити кольцо с вращающимся гиро скопом (рис. 189) или стержень, к которому приделано кольцо с гиро скопом, а ось вращающегося диска направить под углом к вертикалам. Гиро скоп будет совершать прецессионное движение, не обнаруживая стремления «упасть» вниз, как это было бы с невращающимся диском.

Прецессию также легко наблюдать и у волчка. Строго говоря, она всегда есть у волчка, но вначале, при большой скорости вращения, скорость прецессии очень мала. Действительно, волчок

опирается на острие  $A$  (рис. 190), которое лежит ниже его центра масс, и поэтому при наклоне возникает момент пары сил: силы реакции опоры  $Q$  и силы тяжести  $P$ , т. е. момент, вызывающий прецессию.

Ось волчка совершает прецессионное движение так, что она остается на поверхности конуса с вершиной в точке  $A$ , и вместе с ней совершает движение и вектор момента количества движения<sup>1)</sup>.

Если  $h$  — расстояние от острия до центра масс волчка,  $I$  — момент инерции волчка вокруг оси, а  $\omega$  — угловая скорость вращения, то момент пары

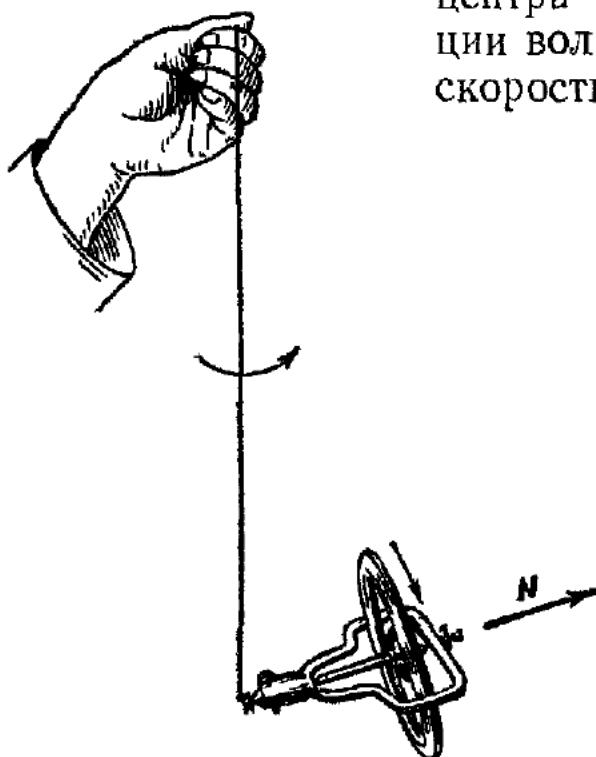


Рис. 189.

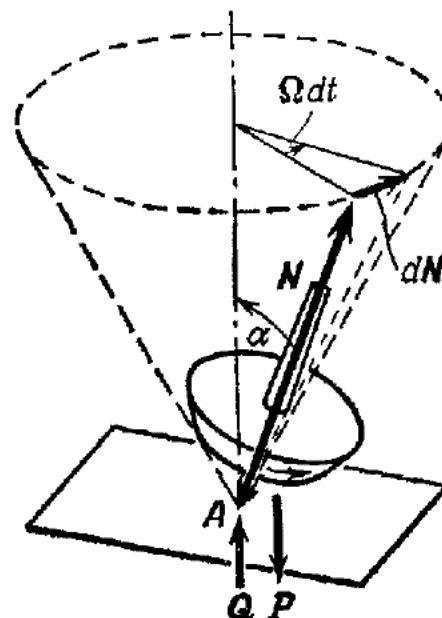


Рис. 190.

$M = Qh \sin \alpha = Ph \sin \alpha$ , приращение момента количества движения равно  $dN = M dt = \Omega dt N \sin \alpha$ , где  $\Omega$  — скорость прецессии (см. рис. 190). Заменяя  $N$  на  $I\omega$ , получим скорость прецессии

$$\Omega = \frac{Ph \sin \alpha}{I\omega \sin \alpha} = \frac{Ph}{I\omega}. \quad (67.3)$$

При большой скорости  $\omega$  вращения волчка скорость прецессии ничтожна. Когда вращение волчка ослабевает, всегда наблюдается прецессия.

Но, кроме момента указанной выше пары сил, на волчок действует еще момент силы трения, действие которого таково, что ось волчка стремится занять вертикальное положение. В самом деле, запустив волчок под углом к горизонту, вы увидите, что через некоторое время его ось будет вертикальна. Эффект выпрямления волчка особенно заметен, если острие оси волчка тупое.

<sup>1)</sup> Пунктиром на рис. 190 показан воображаемый конус, который описывал бы вектор  $N$ , начало которого лежит в точке  $A$ .

Рассмотрим острие волчка, у которого  $N$  направлено вверх по оси, в увеличенном виде (рис. 191). Точка  $B$  соприкосновения острия с поверхностью не лежит на оси волчка, поэтому сила трения, приложенная к острию, направлена к нам из плоскости чертежа, дает момент  $M_{tp}$  относительно центра масс волчка. Момент  $M_{tp}$  лежит в плоскости чертежа и направлен к вертикали, следовательно, приращение момента количества движения волчка  $dN = M_{tp} dt$  также направлено к вертикали и ось волчка стремится стать перпендикулярно к плоскости.

На наклоненный волчок действуют два момента: момент пары сил (реакции опоры и силы тяжести) и момент силы трения; движение всегда происходит при наличии этих двух моментов, если пренебречь силой сопротивления воздуха.

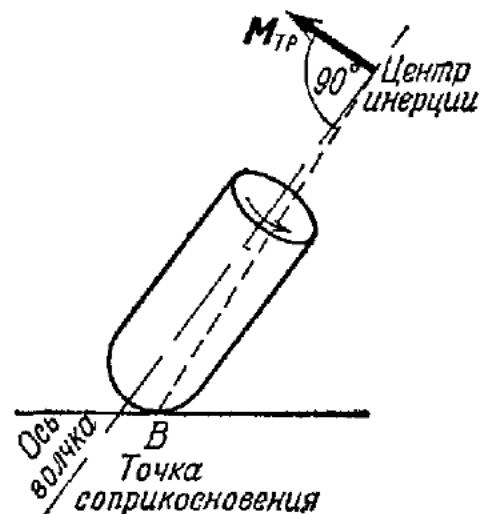


Рис. 191.

### § 68. Гирокопические силы

Из опытов с прецессией гирокопа можно сделать и такое заключение: если мы наблюдаем, что ось гирокопа поворачивается в определенном направлении, то, следовательно, на гирокоп действуют силы, момент которых совпадает с направлением движения положительного конца<sup>1)</sup> оси гирокопа.

Так, например, при вращении мельничного жернова-бегунка, показанного на рис. 170, б, со стороны поверхности, по которой «бегает» цилиндрический каток (бегунок), действует сила, направленная вверх, момент которой определяет поворот оси бегунка в горизонтальной плоскости; на поверхность же со стороны бегунка действует равная и противоположная сила. Величина этой гирокопической силы может быть определена по закону прецессии (67.2). Если угловая скорость вращения бегунка вокруг его оси равна  $\omega$ , то скорость вращения оси бегунка равна  $\frac{R}{H}\omega$  (рис. 192) (полагаем, что качение происходит без скольжения). Каток можно считать однородным цилиндром радиуса  $R$ , находящимся на расстоянии  $H$  от вертикальной оси. Как будет видно из следующих выкладок, сила давления бегунка на поверхность может быть много больше его веса; по этой причине и используется такая конструкция.

<sup>1)</sup> Положительным концом оси гирокопа называем тот, из которого выходит стрелка момента количества движения. Положительное направление момента количества движения и угловой скорости вращения определяем *одинаково*, всегда по правилу «правого винта».

Момент количества движения бегунка всегда лежит в плоскости, проходящей через оси вращения, и направлен под некоторым углом

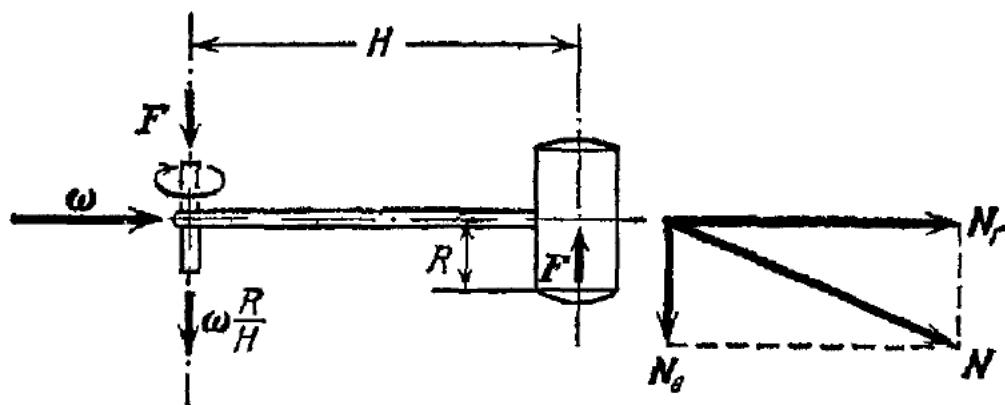


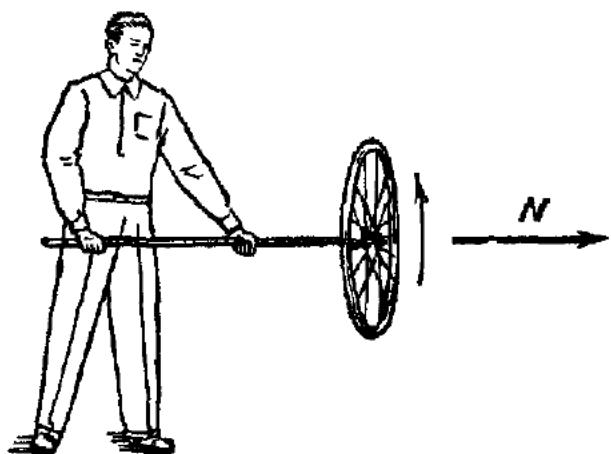
Рис. 192.

к вертикалам (см. рис. 192). Нам нужно знать только горизонтальную составляющую момента количества движения

$$N_r = I\omega = \frac{1}{2} mR^2\omega, \quad (68.1)$$

где  $m$  — масса катка. Очевидно, что только горизонтальная составляющая момента количества движения будет изменять свое направление; вертикальная составляющая  $N_b$  останется неизменной по величине и направлению. Поэтому  $dN$  равно приращению горизонтальной составляющей, которое представляет собой изменение направления оси вращения бегунка. Поэтому

$$dN = N_r \omega \frac{R}{H} dt = FH dt. \quad (68.2)$$



Подставляя сюда значение  $N_r$  из (68.1), получаем

$$\frac{1}{2} mR^2\omega^2 \frac{R}{H} = FH; \quad (68.3)$$

отсюда сила  $F$  равна

$$F = \frac{1}{2} m \frac{R^3}{H^2} \omega^2. \quad (68.4)$$

Следовательно, сила давления катка на поверхность («размалывающая» сила) будет больше величины его веса на величину силы  $F$ .

Момент сил, который необходимо приложить при повороте оси гиростата или быстро вращающегося тела, очень легко почувствовать, если взять в руки ось вращающегося тела, например велосипедного колеса (рис. 193), и попытаться повернуть эту ось в некотором направлении. Вы сразу заметите, что колесо будет «вырываться» из рук в перпендикулярном направлении; для того чтобы

Рис. 193.

удержать ось в руках, необходимо приложить значительное усилие, которое будет тем больше, чем быстрее поворот.

Такое же гироскопическое усилие будут испытывать подшипники осей быстро вращающихся частей машины при повороте самой машины. Например, подшипники вала турбины на корабле, подшипники вала турбины или винта на самолете будут испытывать значительное усилие при маневрах корабля или самолета, причем эти усилия будут тем больше, чем большая угловая скорость поворота при маневре.

### § 69. Вращение оси несвободного гироскопа

Если отнять у гироскопа одну степень свободы или закрепить его так, чтобы он не мог совершать вращение вокруг одной из осей то при вращении вокруг другой оси гироскоп не будет «сопротивляться», а будет вести себя, как обычное тело, поворачиваться под действием силы в направлении ее действия

Закрепим горизонтальную ось у гироскопа, показанного на рис. 188. Тогда после небольшого толчка гироскоп будет вращаться вокруг вертикальной оси. Также если закрепим только вертикальную ось, то гироскоп после толчка будет двигаться вокруг горизонтальной оси. Причина такого поведения заключается в том, что момент сил, необходимый для поворота момента количества движения (или оси гироскопа), создается давлением подшипника той оси, вокруг которой может вращаться стержень с гироскопом, а не силами, приложенными извне.

Допустим, что мы надавливаем палочкой в горизонтальном направлении на стержень с гироскопом. Тогда, если бы он был свободен, то он стал бы вращаться вокруг горизонтальной оси так, что кольцо с гироскопом опускалось бы вниз, потому что момент силы палочки  $M_p$  направлен вниз. Однако при закрепленной горизонтальной оси этому движению воспрепятствует подшипник вертикальной оси, как это схематически показано на рис. 194;

подшипник будет давить на вертикальную ось с силами  $F$  и  $F'$ , момент которых  $M$  нормален к горизонтальной оси, и действие его вызовет смещение оси гироскопа как раз в том направлении, в котором действует сила палочки.

Закрепим вертикальную ось гироскопа и поставим его на вращающийся диск (рис. 195), прикрепив прочно подставку гироскопа к диску. При наблюдении вращения диска с гироскопом можно убедиться в том, что ось гироскопа стремится повернуться так, чтобы направления вращения диска и гироскопа совпадали. Объяснение очень простое: при вращении диска гироскопу через подставку и вертикальную ось передается момент сил  $M$ , направление которого параллельно оси вращения диска. Этот момент может вызывать только вращение вокруг горизонтальной оси до тех пор, пока ось вращения гироскопа не совпадет по

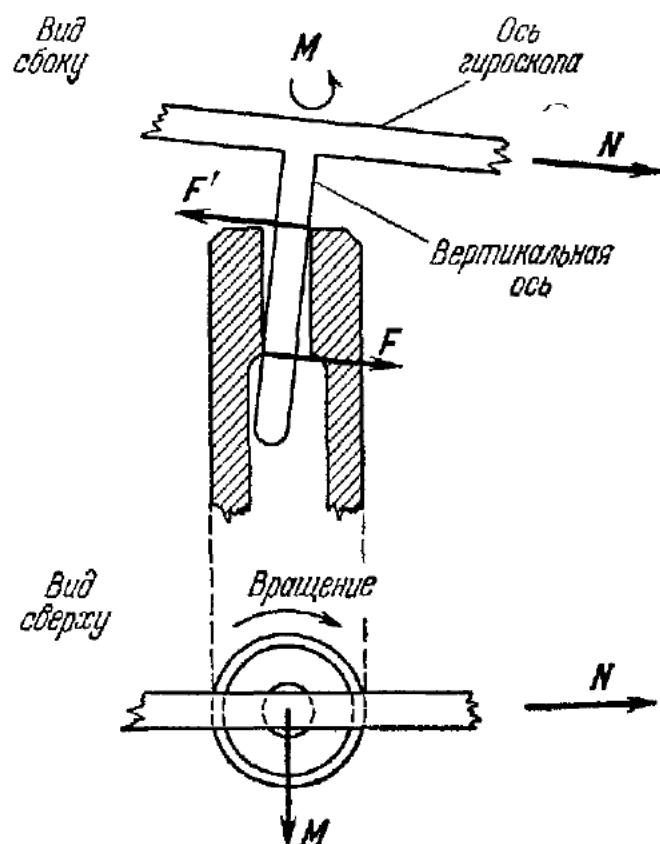


Рис. 194.

направлению с моментом  $M$ , с направлением оси вращения диска, или стержень гироскопа не дойдет до упора.

Теперь закрепим опору гироскопа на большом диске паклонно, как показано на рис. 196, и закрепим «горизонтальную» ось так, чтобы гироскоп мог вращаться

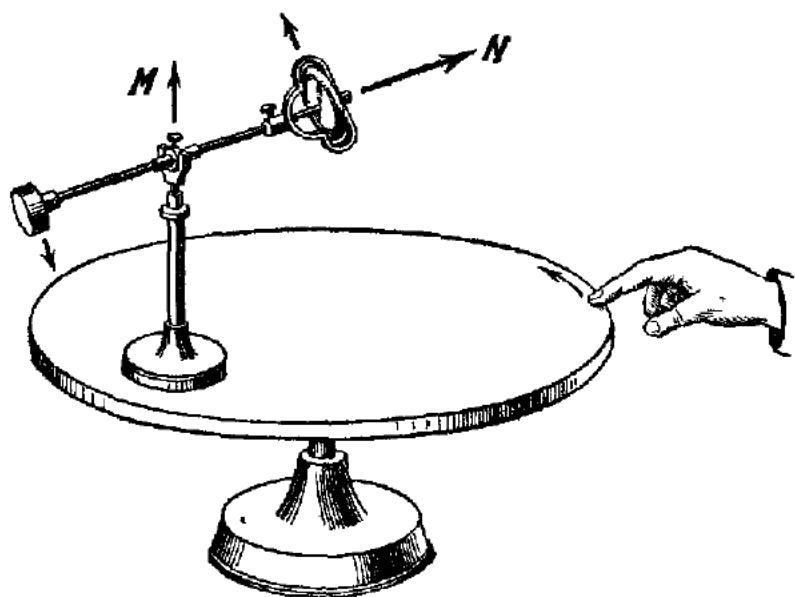


Рис. 195.

только относительно своей оси и «вертикальной» оси. При таком устройстве на гироскоп будет действовать момент сил, который всегда лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения диска. Действительно, разложим угловую скорость  $\omega$  опоры на две:  $\omega_v$  и  $\omega_r$ ; вращение со скоростью  $\omega_v$  не скажется, ибо

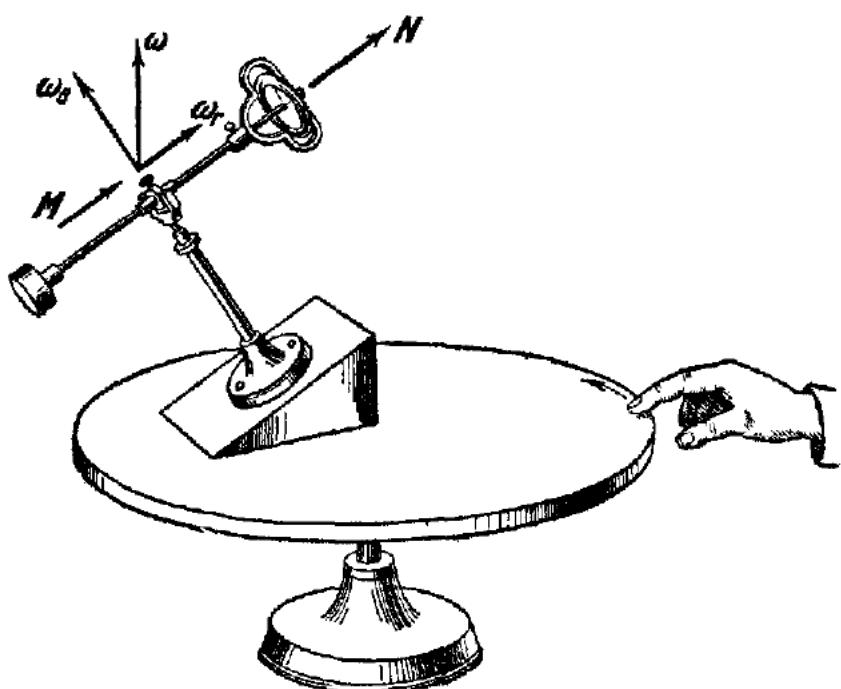


Рис. 196.

«вертикальная» ось свободна, вращение со скоростью  $\omega_r$  вызовет момент  $M$ , совпадающий по направлению с  $\omega_r$ , а  $\omega_r$  лежит обязательно в указанной выше плоскости.

Эти опыты очень наглядны, так как при перемене направления вращения диска гироскоп поворачивается в другую сторону. Они дают указания на возможность устройства гироскопического компаса.

## § 70. Движение свободного гироскопа

Приведем пример точного решения задачи о движении «свободного» гироскопа — гироскопа, закрепленного в центре масс, при условии, что момент внешних сил  $M = 0$ . Момент количества движения в этом случае

$$N = \text{const}, \quad \frac{dN}{dt} = 0. \quad (70.1)$$

Прежде чем записать это условие, вспомним правило относительно производных вектора во вращающейся системе координат (§ 48). Производная вектора  $N$  в (70.1) берется относительно инерциальной (неподвижной) системы координат. А производная относительно системы отсчета, связанной с вращающимся с угловой скоростью  $\omega$  телом гироскопа, по § 48.10), вообще говоря, равна

$$\frac{(dN)_0}{dt} = \frac{dN}{dt} + [N\omega]$$

или в нашем случае

$$\frac{(dN)_0}{dt} + [\omega N] = 0. \quad (70.2)$$

Это уравнение полностью определяет движение свободного вращающегося твердого тела, закрепленного в точке центра масс. Вектор  $N$  постоянен и неподвижен в пространстве, но изменяет свое направление относительно вращающегося тела, отсюда можно определить движение тела. Конечно, так будет, за исключением того положения, при котором  $\omega$  и  $N$  совпадают, тогда  $\frac{(dN)_0}{dt} = 0$  и тело вращается, сохраняя неизменной ось вращения  $\omega$  в пространстве и теле.

Примем главные оси инерции тела за координатные оси и запишем уравнение (70.2) в проекциях на эти оси. Напомним, что проекции

$$N_1 = \lambda_1 \omega_1, \quad N_2 = \lambda_2 \omega_2, \quad N_3 = \lambda_3 \omega_3,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — главные моменты инерции тела, а  $N_1, \omega_1$  — проекции на первую главную ось с моментом  $\lambda_1$  и т. д. Величины  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в этой системе постоянны. Поэтому

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt}, \quad (70.3)$$

так как

$$\frac{(d\omega)_0}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{и} \quad (dN)_0 = dN_1 n_1 + dN_2 n_2 + dN_3 n_3,$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — единичные векторы направлений главных осей.

Учитывая (70.3), уравнение (70.2) можно записать в проекциях на главные оси:

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = 0,$$

$$\lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = 0,$$

или

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (\lambda_3 - \lambda_2) = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 \omega_1 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0, \quad (70.4)$$

$$\lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Эйлера* при  $M = 0$ .

В общем случае анализ этих уравнений довольно сложен. Мы рассмотрим только случай свободного гироскопа, который представляет собой тело вращения. Два главных момента инерции такого гироскопа одинаковы, допустим, что  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Тогда уравнения (70.4) примут вид

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 \omega_0 = 0, \quad \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_2 \omega_0 = 0, \quad (70.5)$$

где  $\omega_0 = \omega_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}$ .

Первое уравнение дает  $\omega_1 = \text{const}$ , проекция  $\omega$  на первую главную ось (ось симметрии, ось фигуры) остается постоянной во времени.

Следовательно, и  $\omega_0$  — постоянная величина, и оставшуюся пару уравнений просто решить. Легко убедиться с помощью подстановки, что решениями будут

$$\omega_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_3 = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (70.6)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — постоянные, зависящие от начальных условий.

Анализируя это решение, можно видеть, что вектор  $\omega$  относительно тела остается постоянным по величине и совершают движение по конусу вокруг оси фигуры (рис. 197) с угловой скоростью

$\omega_0$ . Величина  $A = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$  зависит от начальных условий, а угол раствора конуса  $\beta$  определяется отношением  $A/\omega_1$ . Величина  $\omega_0/\omega_1$  зависит только от отношения главных моментов инерции, т. е. от распределения масс гироскопа.

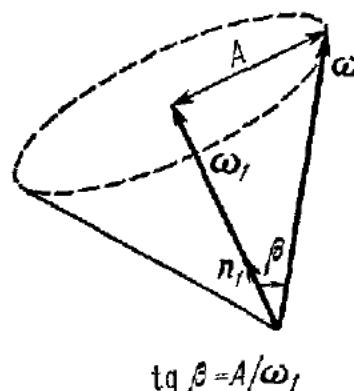


Рис. 197.

Чтобы представить движение оси гироскопа в этом случае, нужно перейти от вращающейся системы к неподвижной системе отсчета. Это проще сделать следующим путем.

Вспомним формулу (64.14). Всегда

$$\mathbf{N} = \lambda_1 \omega_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \omega_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \omega_3 \mathbf{n}_3,$$

а для гироскопа  $\lambda_3 = \lambda_2$ ; тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \lambda_1 \omega_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 (\omega_2 \mathbf{n}_2 + \omega_3 \mathbf{n}_3) + \lambda_2 \omega_1 \mathbf{n}_1 - \lambda_2 \omega_1 \mathbf{n}_1 = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (70.7)$$

Отсюда видно, что  $\mathbf{n}_1$  (ось фигуры),  $\mathbf{N}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  лежат в одной плоскости. Учитывая это обстоятельство и равенство (70.7), можно определить движение оси гироскопа. Для этого перепишем (70.7) так:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{N}{\lambda_2} - \omega_0 \mathbf{n}_1, \quad (70.8)$$

где  $\frac{N}{\lambda_2} = \Omega$  представляет собой составляющую угловой скорости по направлению  $\mathbf{N}$ . Вектор  $\Omega$  остается постоянным по величине и направлению. Так как  $\boldsymbol{\omega}$  и  $-\omega_0 \mathbf{n}_1$  постоянны по модулю и лежат в

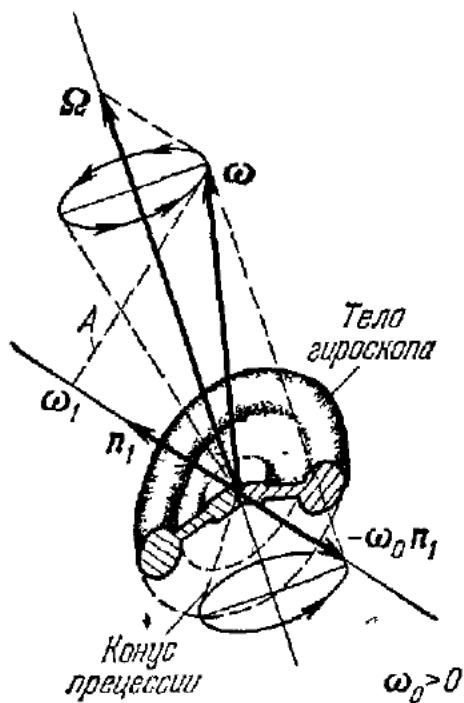


Рис. 198.

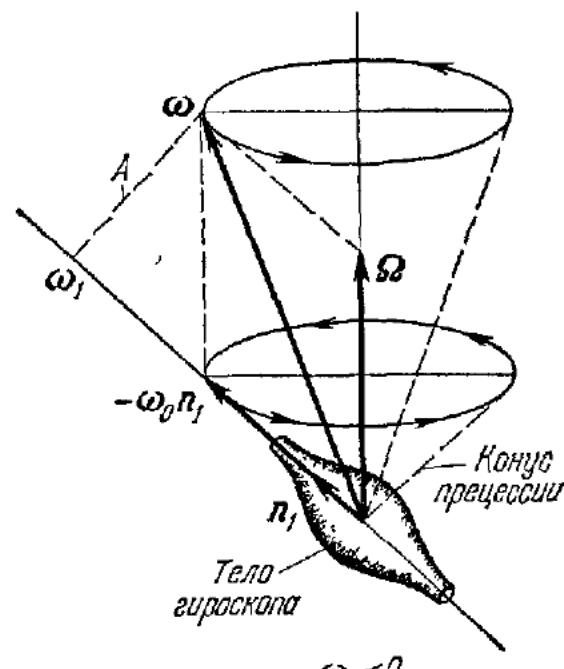


Рис. 199.

плоскости, проходящей через  $\Omega$ , то они вращаются с угловой скоростью  $\Omega$  и углы между векторами остаются неизменными. Поэтому  $\Omega$  представляет собой *скорость прецессии* гироскопа. Картинки прецессии показаны на рис. 198 и 199.

Предположим, что нам известен угол  $\beta$  между  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{n}_1$  (осью гироскопа), тогда найдем:  $\omega_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} \omega_1$ . Отметим, что в случае  $\lambda_1 > \lambda_2$  (рис. 198) величина  $\omega_0 > 0$ , поэтому угловая скорость вращения

гироскопа вокруг своей оси  $-\omega_0 \mathbf{n}_1$  будет противоположна скорости прецессии  $\Omega$ . Ось гироскопа прецессирует в направлении, противоположном своему вращению. Условие  $\lambda_1 > \lambda_2$  отражает тот факт, что тело гироскопа «сплюснуто» относительно оси симметрии, это видно и на рисунке.

Иная картина прецессии показана на рис. 199 для того случая, когда тело «вытянуто» вдоль оси,  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Здесь прецессия происходит в направлении вращения вокруг оси фигуры, так как  $\omega_0 < 0$ . Угол  $\beta$  (или величина  $A$ ) зависит от начальных условий.

Такое вращение оси гироскопа по конусу вокруг направления момента импульса  $N$  называется *регулярной* прецессией в отличие от *псевдорегулярной*, возникающей под действием постоянного момента силы тяжести. В этом случае при относительно большой скорости собственного вращения вокруг оси гироскопа, как предполагалось в предыдущем параграфе, характер псевдорегулярной прецессии при обычном наблюдении не отличается от характера регулярной. При псевдорегулярной прецессии, вообще говоря, имеются малые колебания оси гироскопа (*нутации*) из поверхности круглого конуса прецессии. Но они не заметны на глаз при большой скорости вращения.

Напомним, что возможно и движение без прецессии, когда  $A = 0$  и  $N$  совпадает по направлению с  $\omega$ . Для «шарового» гироскопа прецессии не может быть, всегда  $N = \lambda\omega$ .

## § 71. К объяснению «гироскопических» сил

В основу анализа гироскопических явлений был положен закон движения твердого тела, выведенный в § 65, закон динамики, выражаемый кратко формулой  $M = \frac{dN}{dt}$ ; пользуясь им, мы дали объяснение всем особенностям поведения гироскопа. Однако, рассматривая ускорение отдельных точек вращающегося диска, можно представить себе непосредственно, какие силы должны действовать на него при этом; эти силы обычно называют «гироскопическими».

Пусть ось вращающегося диска поворачивается на некоторый угол  $d\alpha$  за время  $dt$ . Какое ускорение имеют различные точки диска при этом? Возьмем на диске четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ , симметрично расположенные в момент времени  $t$  относительно оси  $OO'$ , вокруг которой поворачивается ось диска (рис. 200). Разложим скорости выбранных четырех точек на две составляющие: параллельные оси  $OO'$  ( $v_{||}, v'_{||}$ ) и перпендикулярные к ней ( $v_{\perp}, v'_{\perp}$ ). Каждая из параллельных составляющих скоростей точек  $A$  и  $B$  равна  $v_{||}$ , а для точек  $C$  и  $D$  —  $v'_{||}$ ; каждая из перпендикулярных составляющих скоростей точек  $A$  и  $D$  равна  $v_{\perp}$ , а для точек  $C$  и  $B$  —  $v'_{\perp}$ . Кроме этих двух составляющих скорости каждой точки (составляющих, лежащих в плоскости диска) есть еще составляющие, перпендикулярные к плоскости диска, возникающие вследствие движения вокруг оси  $OO'$ . Однако, предполагая, что вращение вокруг оси  $OO'$  значительно медленнее, чем вращение диска вокруг своей оси, можно, ради простоты рассуждений, не принимать во внимание перпендикулярных к диску составляющих скоростей точек.

Теперь рассмотрим приращения скоростей точек за время  $dt$ . Все точки за время  $dt$  изменят свое положение, они сместятся по ходу вращения диска на

некоторый отрезок дуги, и вследствие вращения вокруг оси  $OO'$  точки  $A$  и  $B$  выйдут из плоскости чертежа, а точки  $C$  и  $D$  — за плоскость чертежа (см. рис. 200).

Обратим внимание на приращение различных составляющих скорости каждой точки. Составляющие  $v_{\parallel}$  для точек  $A$  и  $B$  получат приращения  $\Delta v_{\parallel A}$  и  $\Delta v_{\parallel B}$ , лежащие в плоскости диска, равные и противоположно направленные (рис. 201), как можно заключить на основании симметрии; то же и для точек  $C$  и  $D$ . Приращения составляющих  $v_{\perp}$  и  $v'_{\perp}$  не лежат в плоскости диска и имеют перпендикулярные к диску составляющие, которые обозначим через  $\Delta v_{\perp}$  и  $\Delta v'_{\perp}$  (рис. 202), а составляющие, параллельные диску, обозначим через  $\Delta v_A$ ,  $\Delta v_B$ ,  $\Delta v_C$ ,  $\Delta v_D$  (см. рис. 201). Все составляющие приращений будут попарно равны, что можно заключить опять-таки на основании симметрии расположения точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Поэтому все составляющие приращений скорости, лежащие в плоскости диска, дадут в сумме нуль.

Определение величин приращений легко себе представить: приращения скорости, лежащие в плоскости диска (см. рис. 201), суть приращения, соответствующие равномерному движению точек по кругу, поэтому сумма этих приращений

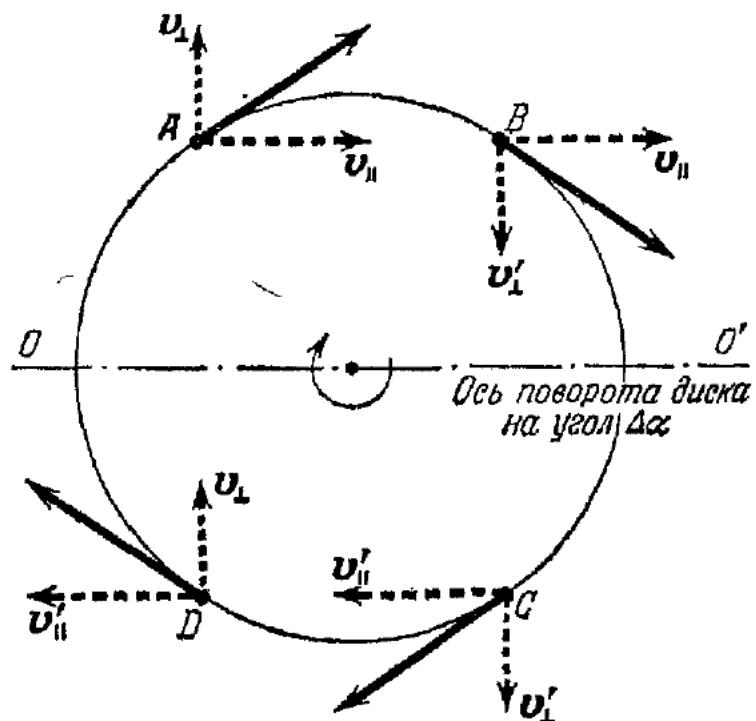


Рис. 200.

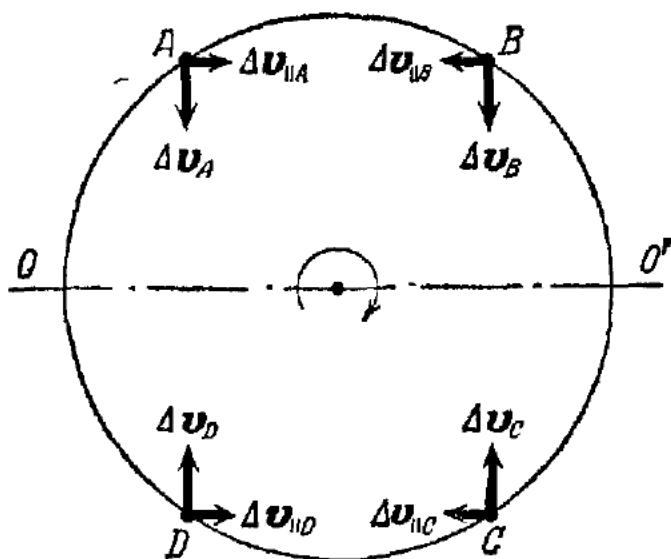


Рис. 201.

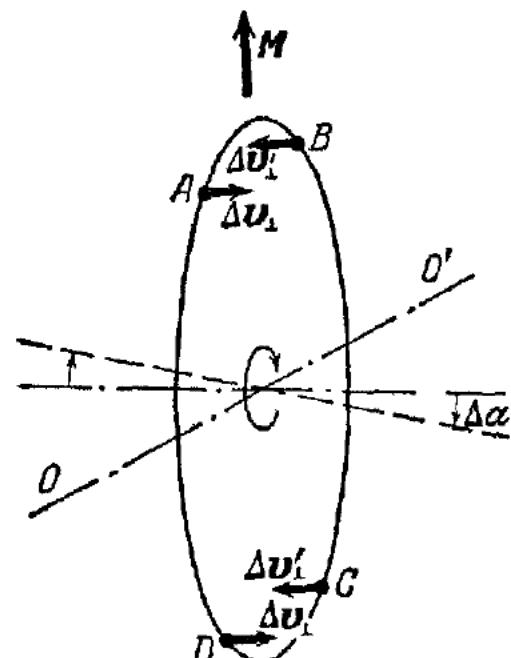


Рис. 202.

скорости определит центростремительное ускорение данной точки. Вследствие вращения диска вокруг оси  $OO'$  только перпендикулярные к оси  $OO'$  составляющие  $v_{\perp}$  и  $v'_{\perp}$  изменят свое направление, и поэтому величины приращения скоростей

точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в направлении перпендикуляра к диску будут равны  $\Delta v_{\perp} = \Delta\alpha v_{\perp}$ .

Перпендикулярные к диску составляющие приращений скорости (см. рис. 202) одинаковы по величине, но направлены в разные стороны. Такой же результат будет и для всех остальных точек, рассматриваемых по четыре. Следовательно, все точки диска должны иметь ускорения, совпадающие по направлению с приращениями скорости, показанными на рис. 202, и поэтому на диск должна действовать пара сил, момент которой направлен перпендикулярно к оси диска и оси вращения  $OO'$ . Отсюда легко сделать и обратное заключение: если на вращающийся диск действует пара сил, то его ось будет поворачиваться таким образом, как это следует из общего соотношения

$$M = \frac{dN}{dt},$$

в котором мы полагаем, что ось диска и  $N$  совпадают по направлению.

## Глава VIII

### ТРЕНИЕ ПРИ КАЧЕНИИ

#### § 72. Силы, возникающие при качении. Силы трения скольжения при качении цилиндра

Особое внимание в технике и физике уделяют силам, возникающим при качении колеса (цилиндра) по плоскости. Эти силы вообще называют силами трения. Но для выяснения картины явления следует различать три рода сил: собственно *трения качения*, *трения скольжения* и *трения сцепления*. Силы трения качения, как и силы трения при поступательном движении, имеют место всегда и всегда тормозят движение. Силы трения скольжения и силы трения сцепления при качении могут и ускорять, и тормозить катящееся тело, причем последний род сил трения (как и сил трения покоя) не связан с обязательным переходом механической энергии в тепло.

Пусть однородный цилиндр катится по наклонной плоскости со скольжением, тогда, вообще говоря, имеют место все три вида сил трения. Если скольжения нет, то действуют силы трения сцепления и качения; во многих случаях сила трения качения мала, и тогда остается только сила трения сцепления, как мы принимали в § 58. При действии только силы трения сцепления — когда точка со-прикосновения цилиндра не смещается относительно плоскости, — как и при трении покоя, нет потерь механической энергии.

Предположим, что сил трения качения и сил вязкости нет, и рассмотрим качение цилиндра по плоскости, при котором ось цилиндра перпендикулярна к скорости движения. Допустим, что цилиндр катится без скольжения равномерно по горизонтальной плоскости; чему равна сила взаимодействия между плоскостью и цилиндром? (Полагаем, что сила трения о воздух отсутствует.) Очевидно, что касательная сила взаимодействия (сила трения сцепления) равна нулю, так как цилиндр движется равномерно.

Теперь представим себе, что мы осторожно положили на горизонтальную плоскость цилиндр, который предварительно был раскручен вокруг собственной оси и имеет угловую скорость  $\omega_0$ .

(рис. 203). Что произоидет после того, как ось цилиндра в этот же момент освободили? Цилиндр покатится вдоль плоскости. В начале пути, несомненно, имеет место ускорение вдоль направления движения, следовательно, на цилиндр действует внешняя сила. Эта

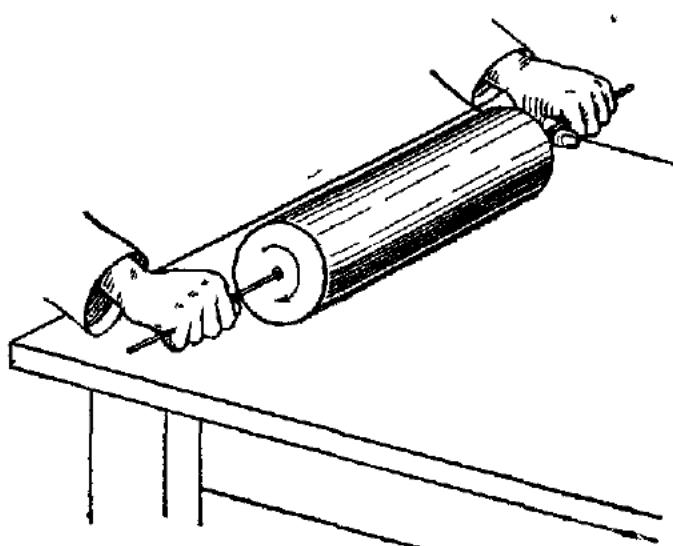


Рис 203

сила действует со стороны горизонтальной поверхности, она равна массе цилиндра, умноженной на ускорение точек, лежащих на его оси. Линейная скорость движения цилиндра нарастает от нуля, следовательно, в начале пути обязательно имеет место скольжение и сила трения скольжения *ускоряет* цилиндр, но замедляет его вращение. Поэтому с увеличением скорости поступательного движения  $v$  будет уменьшаться  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Скорость скольжения  $v_{ск}$  точек цилиндра, прилегающих к плоскости, будет уменьшаться по модулю, так как  $\omega R > v$ , и

$$v_{ск} = \omega R - v,$$

где  $R$  — радиус цилиндра. Сила трения скольжения исчезнет при  $v_{ск} = 0$ , и далее будет равномерное движение, как и в упомянутом ранее случае.

Движение цилиндра можно рассчитать, если приближенно полагать силу трения скольжения равной  $f_0 = \mu N$  по закону Кулона (см. § 42), где  $N$  — вес цилиндра. В начальный момент, как только опустили цилиндр на плоскость, ускоряющая сила равна  $f_0$  и далее будет постоянна, тогда и линейное ускорение цилиндра  $a$  определится из уравнения

$$a = \frac{f_0}{m}, \quad (72\ 1)$$

где  $m$  — масса цилиндра. Одновременно цилиндр будет иметь отрицательное угловое ускорение

$$\beta = \frac{f_0 R}{I}, \quad (72\ 2)$$

где  $I$  — момент инерции цилиндра относительно оси симметрии. Следовательно, скорость оси цилиндра будет нарастать по линейному закону

$$v = at = \frac{f_0}{m} t, \quad (72\ 3)$$

а угловая скорость будет уменьшаться по линейному закону

$$\omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{f_0 R}{I} t; \quad (72\ 4)$$

здесь  $\omega_0$  — угловая скорость цилиндра в начальный момент при  $t = 0$ , когда его опустили на плоскость.

Очевидно, что наступит момент  $t_0$ , при котором линейная скорость  $v$  будет равна  $\omega R$ , в этот момент исчезнет скольжение и, следовательно, исчезнет и сила скольжения. Поэтому после момента  $t_0$  цилиндр будет катиться далее без скольжения, равномерно со скоростью

$$v_0 = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \quad (72\ 5)$$

Эту формулу легко получить, если из выражений (72.3) и (72.4) исключить время  $t$  и положить  $\omega R = v_0$ . Время  $t_0$  из формул (72.3) и (72.5), очевидно, определится так:

$$t_0 = \frac{mv_0}{f_0} = \frac{m\omega_0 R}{f_0 \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}. \quad (72\ 6)$$

Графики линейной и угловой скорости показаны на рис. 204. Только в промежутке времени от 0 до  $t_0$  действует сила трения  $f_0$  и имеет место скольжение. Далее начнется равномерное качение без скольжения.

Отметим, что в данном случае часть начального запаса кинетической энергии цилиндра перешла в тепло. Рекомендуем проверить расчетом, что доля начального запаса энергии, перешедшей в тепло, равна

$$\frac{mR^2 I}{(I + mR^2)^2}.$$

Подчеркнем, что в начальный момент обязательно возникнет скольжение, иначе должна быть бесконечной (вернее, достаточно большой) сила удара, после которого начнется равномерное движение. Такой случай может иметь место, например, если по поверхности цилиндра имеются зубцы. Здесь после начального (неупругого!) удара возникнет равномерное движение без скольжения.

После удара точка цилиндра, соприкасающаяся с плоскостью, остановилась под действием импульса  $P = \int f dt$  силы  $f$ , приложенной к цилинду в точке соприкосновения. Этот импульс силы  $f$  сообщит цилинду количество движения  $mv = P$  и, кроме того, затормозит вращение цилиндра на величину  $\Delta\omega$ , которая определяется из условия  $I\Delta\omega = RP$ . После удара начнется чистое качение и  $v = (\omega - \Delta\omega)R$ . Исключая  $P$  и  $\Delta\omega$ , находим

$$v = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

Если скорость скольжения  $v_{ск}$  направлена назад ( $\omega R > v$ ), то сила трения скольжения направлена вперед, если  $v_{ск}$  направлена вперед ( $\omega R < v$ ), то сила трения скольжения направлена назад, сила трения скольжения тормозит движение цилиндра. Пустим цилиндр без вращения с начальной скоростью  $v_0$  вдоль плоскости, толкнем его так, что он придет в соприкосновение с плоскостью, не вращаясь; тогда сила трения скольжения будет уменьшать

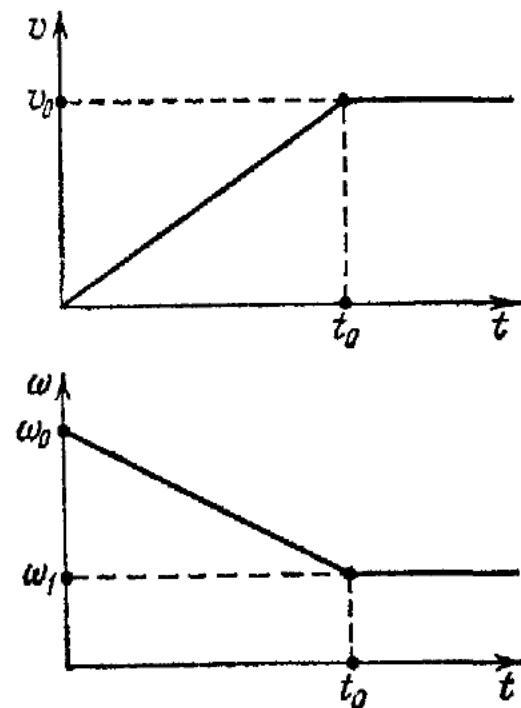


Рис. 204

скорость поступательного движения  $v$  и увеличивать скорость углового вращения  $\omega$  до тех пор, пока  $\omega R$  не будет равно  $v$ , после чего начнется равномерное движение без скольжения.

При качении без скольжения могут возникать силы трения сцепления; в данном примере они не возникают только потому, что внешние горизонтальные силы равны нулю. Как только при качении без скольжения на цилиндр начнут действовать внешние силы, возникнет соответствующая сила трения сцепления. Следовательно, сила трения сцепления, как и сила трения покоя, определяется величиной внешних сил, действующих на тело.

### § 73. Трение сцепления при качении

При движении автомобиля и паровоза важную роль играет сила трения сцепления при качении колес без скольжения. При качении без скольжения поверхности соприкосновения колеса и полотна дороги не двигаются относительно друг друга, при этом может иметь место сила трения сцепления, которая, как и в случае трения покоя, не превосходит некоторой величины  $f_0$ . Величина  $f_0$  пропорциональна  $N$  — силе давления колеса на дорогу, на рельс.

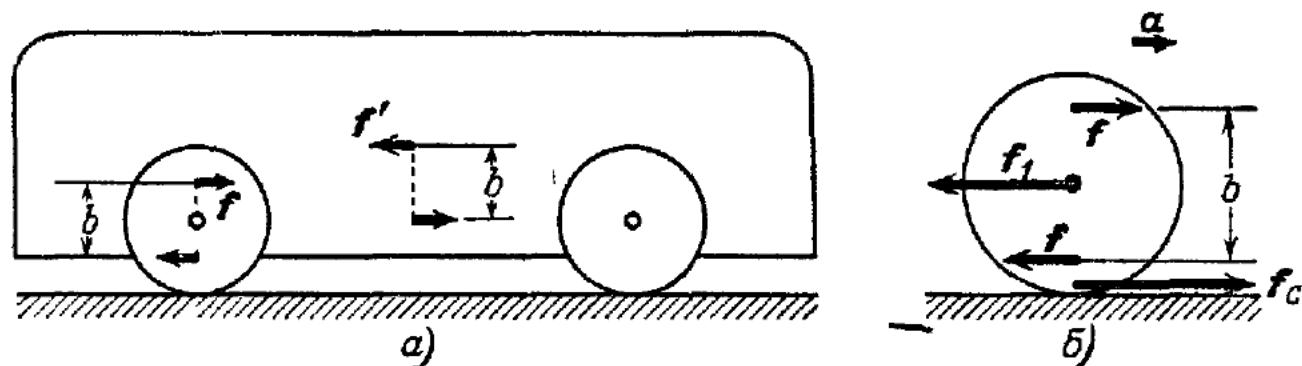


Рис. 205.

Для колеса автомобиля зависимость силы сцепления от давления на колесо более сложная, так как от давления изменяется и деформация шины колеса.

Представим себе схему автомобиля (или трамвая), показанную на рис. 205, а. К ведущему колесу со стороны корпуса машины приложен вращающий момент от мотора, равный  $M = f \cdot b$  (рис. 205, б). В свою очередь, к корпусу приложен противоположный и равный момент  $M' = f' \cdot b$ , причем по третьему закону динамики  $f = f'$ . Колесо движется без скольжения, поэтому силы, приложенные к колесу, определяют его ускорение  $a$  на основании следующих равенств:

$$M - f_c R = I \beta, \quad f_c - f_1 = m a, \quad a = \beta R, \quad (73.1)$$

где  $f_1$  — сила, действующая на ось колеса со стороны корпуса машины (см. рис. 205, б),  $m$  — масса колеса,  $f_c$  — сила трения

сцепления, приложенная к колесу,  $I$  — момент инерции,  $R$  — радиус колеса. Из этих уравнений можно установить связь между силой  $f_1$  и  $M$ , а именно:

$$f_1 = \frac{M}{R} - \left( m + \frac{I}{R^2} \right) a. \quad (73.2)$$

К корпусу автомобиля (или трамвая) приложена сила, равная и противоположная  $f_1$ . Поэтому  $f_1$  есть величина силы, движущей корпус. Она отличается по величине от силы  $f_c$  — силы трения сцепления — только на величину  $ma$ . При равномерном движении  $a = 0$  и из (73.1) получим

$$f_1 = f_c = \frac{M}{R}. \quad (73.3)$$

Следовательно, движущая сила  $f_1$  равна силе трения сцепления  $f_c$  и величина ее зависит от момента  $M$ , который развивает мотор. Соотношения (73.1), (73.2) и (73.3) получены при условии, что величина  $f_c < f_0$ , т. е. колесо не скользит, в противном случае соотношение  $\omega R = v$  (или  $\beta R = a$ ) несправедливо. Сила, приложенная к ведущему колесу извне, не может превышать величину  $f_0$ . Если момент силы мотора  $M$  возрастает, то начинается скольжение. В этом случае первые два равенства (73.1) сохраняют силу, но последнее,  $a = \beta R$ , не имеет места, при скольжении  $a < \beta R$ . Например, при  $a = 0$  и  $\beta > 0$  часть вращающего момента  $M$  идет на увеличение угловой скорости колеса, а не на увеличение движущей силы.

При трогании с места автомобиля (по снегу и грязи), а также при трогании трамвая или паровоза, при резком увеличении вращающего момента двигателя  $M$  часто начинается буксование колес. Колеса проскальзывают, вертятся со значительной скоростью, в то время как движущая сила очень мала, и машина стоит или медленно трогается. Резкое уменьшение движущей силы объясняется тем, что величина силы трения скольжения уменьшается с увеличением скорости скольжения. Поэтому необходимо очень плавно увеличивать момент  $M$  (плавно «давать газ» на автомобиле) при трогании с места.

Во всех рассуждениях мы полагали, что вращающий момент двигателя  $M$  направлен так, что он сообщает ускорение машине вперед. Если же во время хода машины момент, приложенный со стороны мотора, изменит свой знак, то все полученные ранее уравнения останутся в силе и только изменится знак ускорения и движущей силы  $f_1$ . Очевидно, что в этом случае «движущая сила» будет направлена назад, против хода машины, и будет тормозить ее. Таким образом, можно (а на скользкой дороге — следует!) тормозить движение машины уменьшением числа оборотов двигателя («бросить газ»).

## § 74. Торможение и явление заноса

Замедление машины тормозным устройством происходит следующим образом. Прижимая к вращающемуся колесу тормозные колодки к (рис. 206), мы вызываем силы трения  $f'$ , которые сообщают колесу момент  $M_t$  противоположного знака, связанный уравнением, аналогичным (73.2), с тормозящей силой  $f_t$ , если нет скольжения колеса. Как при начале движения не следует резко увеличивать вращающий момент мотора во избежание скольжения колес и уменьшения движущей

силы, так же и при торможении автомобиля (машины) не следует резко увеличивать тормозящий момент  $M_T$ .

Так как при скольжении сила трения о дорогу будет меньше, чем при сцеплении, и притом с увеличением скорости скольжения эта сила трения уменьшается, то, следовательно, уменьшается и тормозящая сила. Поэтому при энергичном торможении не следует доводить колеса до скольжения, а нужно держать момент торможения на самом пределе перед началом скольжения; в этом случае путь, на котором машина затормозится, будет наименьшим. При торможении рукой (или ногой) нужна большая опытность для определения требуемой величины тормозящего момента, поэтому почти всегда при экстренном торможении наблюдается скольжение.

Для нерельсового транспорта скольжение при торможении может быть очень опасным вследствие заноса и потери управляемости. Поэтому на больших машинах желательно устанавливать специальные автоматы, которые поддерживали бы нужную величину тормозящего момента. Занос автомобиля, наблюдающийся при резком торможении на мокром или скользком шоссе, также объясняется особой зависимостью сил трения скольжения от направления скорости движения.

Если тело скользит по горизонтальной плоскости в некотором направлении  $v$ , то небольшая сила  $f$ , приложенная перпендикулярно к  $v$ , вызовет заметное смещение тела в этом направлении.

Оказывается, что тело, скользящее в определенном направлении, имеет очень малую силу трения при смещении в перпендикулярном направлении. Объясняется это тем, что в этом случае не может быть и речи о сцеплении поверхностей тел, так как они движутся относительно друг друга. Этот эффект очень наглядно показан в опыте, предложенном С. Э. Хайкиным (рис. 207).

На горизонтальный гладкий вращающийся вал  $A$  надета муфта  $B$ , к муфте привязана бечевка, перекинутая через блок  $C$ , к бечевке привешен некоторый груз. Вес груза натягивает бечевку и стремится стянуть муфту  $B$  с вала. Муфта состоит из двух половинок, стягивающихся винтами. Отрегулировав винты затяжку муфты, мы определим величину груза, вес которого  $P$  стягивает муфту с невращающегося вала. Рычаг  $D$ , прикрепленный к муфте, привязан в точке  $a$  бечевкой, натянутой перпендикулярно к чертежу, которая препятствует вращению муфты вместе с валом. Затем вал приводится во вращение; теперь при значительно меньшем грузе (примерно  $0,1P$  и меньше!) муфта сдвигается вдоль вала. Особенно заметен эффект уменьшения сил трения, если пытаться двигать муфту рукой по неподвижному валу, а затем двигать по врачающемуся валу. Вы ощущаете резкое уменьшение силы трения; кажется, как будто вал хорошо смазали и вы двигаете муфту по смазанному валу.

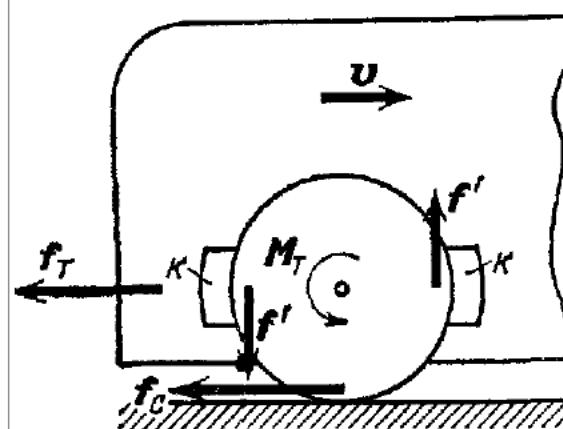


Рис. 206.

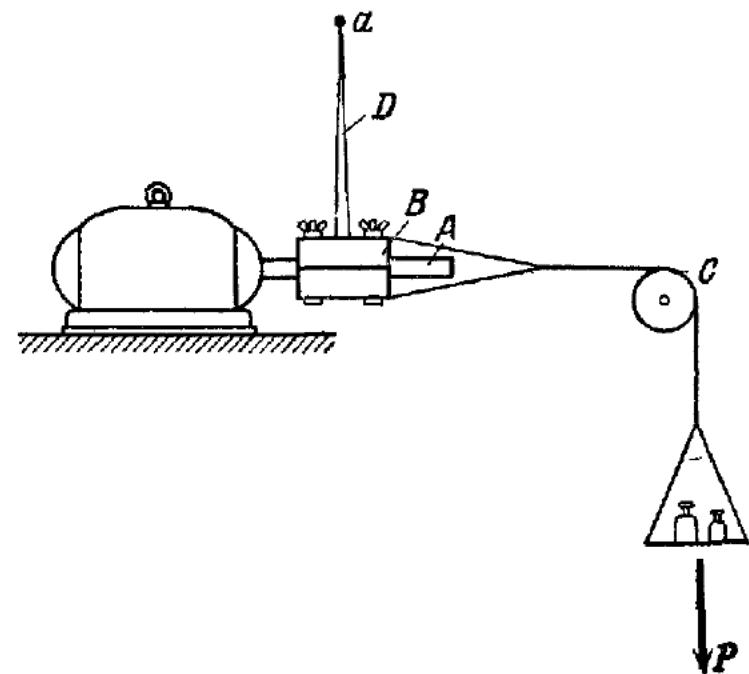


Рис. 207.

Этому явлению можно дать простое объяснение, если учесть, что сила трения скольжения всегда направлена против скорости скольжения. При движении муфты с некоторой скоростью  $v_1$  вдоль вала результирующая скорость скольжения частиц вала относительно муфты будет направлена под некоторым очень малым углом  $\alpha$  к плоскости, перпендикулярной к оси вала (рис. 208), а следовательно, и силы трения  $f_0$  будут направлены под углом  $\alpha$  к этой же плоскости. В перпендикулярном направлении вдоль оси вала действует только малая компонента  $f_1$  силы  $f_0$ , а именно:

$$f_1 = f_0 \operatorname{tg} \alpha \approx f_0 \alpha \approx f_0 \frac{v_1}{v}. \quad (74.1)$$

А так как обычно  $v_1 \ll v$ , то  $f_1 \ll f_0$ .

Теперь можно понять явление заноса автомобиля при торможении. При резком торможении колеса будут зажаты тормозными колодками и возникнет скольжение машины вперед «по инерции». Небольшая неоднородность пути (кочки) или различное трение колес и т. д. могут вызвать боковые силы или момент относительно вертикальной оси; последние в свою очередь вызовут вращение автомобиля вокруг вертикальной оси или боковое его смещение, так как сил трения, которые бы препятствовали боковому движению колес автомобиля в направлении, перпендикулярном к его пути, нет (или они очень малы!). Это, конечно, упрощенное объяснение явления заноса автомобиля, но оно правильно отражает главные особенности и основные причины этого опасного явления.

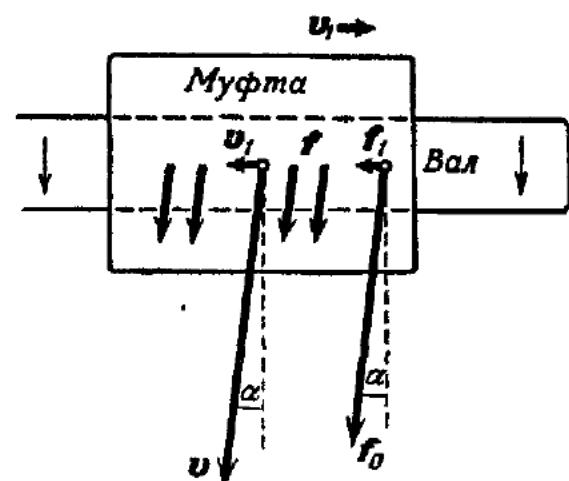


Рис. 208.

## § 75. Трение качения

В предыдущих параграфах ничего не было сказано о силах трения качения, речь шла только о *силе сцепления при качении* (аналогичной силе трения покоя) или о *силе скольжения цилиндра на плоскости* (аналогичной силе трения скольжения между плоскими поверхностями). Принципиальная разница между первой и второй заключается в том, что сила сцепления не совершает работы (нет перехода механической энергии в тепловую), а сила трения скольжения обязательно совершает работу, связанную с переходом механической энергии в тепловую.

Но при качении цилиндра без скольжения всегда имеет место **сила трения качения** — сила, связанная с «потерями» энергии, т. е. с переходом механической энергии в тепловую. Цилиндр, катящийся по ровной горизонтальной плоскости без скольжения, постепенно останавливается; кроме силы сопротивления воздуха, в данном случае имеет место и сила трения качения, зависящая от свойств материала цилиндра и плоскости. При качении цилиндр и плоскость деформируются (рис. 209, а) под действием силы, прижимающей цилиндр к плоскости. Если эти деформации упруги, то силы взаимодействия между цилиндром и плоскостью будут совершенно симметричны относительно вертикальной плоскости  $ab$ , проходящей через ось цилиндра; каждой силе  $f$  соответствует

равная ей сила  $f'$  на симметрично расположенным участке площиади соприкосновения. (Силами трения скольжения цилиндра относительно поверхности плоскости мы пренебрегаем<sup>1</sup>).)

Результирующая всех сил упругой деформации поверхности качения будет вертикальна, и момент этих сил относительно оси цилиндра также будет равен нулю. Поэтому силы упругих деформаций цилиндра и плоскости при качении не скажутся на скорости качения и движение будет происходить так, как будто никаких деформаций не было. Никаких сил трения качения в этом случае не возникает.

Следовательно, для объяснения сил трения качения следует считать деформации цилиндра и плоскости качения неупругими,

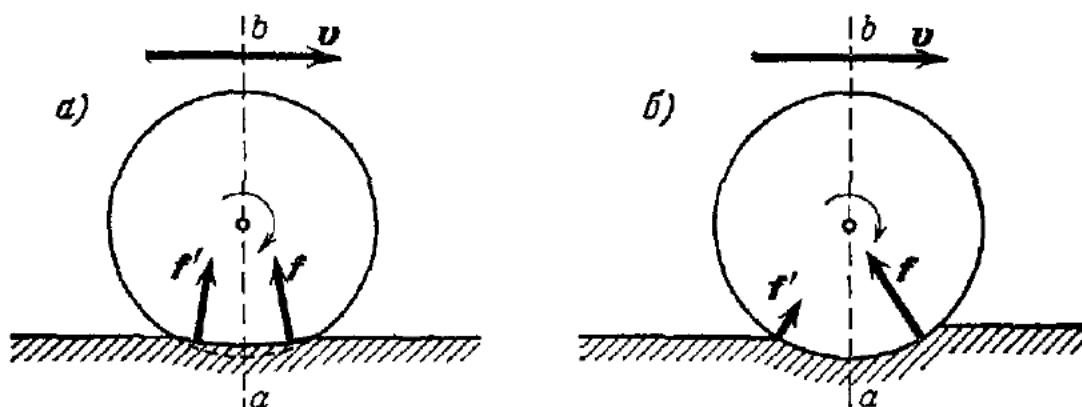


Рис. 209.

что, конечно, фактически всегда имеет место. Для окончательного суждения не важно, что деформируется — цилиндр или плоскость, или то и другое вместе. Поэтому для простоты рассуждений будем предполагать, что цилиндр не деформируется, а только поверхность качения имеет некоторые остаточные деформации. Очевидно, что силы, действующие на цилиндр со стороны плоскости качения, уже не будут симметричны относительно плоскости  $ab$ , например, сила  $f$  будет больше силы  $f'$  на симметричном участке, расположенному сзади плоскости  $ab$  (рис. 209, б). Поэтому равнодействующая этих сил обязательно имеет горизонтальную составляющую, направленную назад, и момент этих сил относительно оси цилиндра также не равен нулю, причем он *противоположен* направлению вращения.

Вычисление силы трения качения очень сложно, и до сих пор еще не имеется удовлетворительной теории, главным образом потому, что недостаточно изучены законы, связывающие силы и изменяющиеся со временем сложные неупругие деформации.

Но если учесть, что катящийся по горизонтальной плоскости *без скольжения* цилиндр останавливается постепенно, то можно

<sup>1)</sup> Поверхности соприкосновения (контакта), вообще, будут немного скользить относительно друг друга, причем различно в разных точках соприкосновения.

сделать из этого определенное заключение о характере и направлении силы, действующей на цилиндр со стороны горизонтальной плоскости, если полагать, что участок соприкосновения очень мал по сравнению с радиусом цилиндра.

Допустим, что сил трения о воздух нет — цилиндр замедляет свое движение только под действием сил трения качения; при этом он имеет отрицательное линейное ускорение  $a$  и отрицательное угловое ускорение  $\beta$ , которые связаны условием отсутствия скольжения, а именно  $a = \beta R$ . Прежде всего отметим, что равнодействующая всех сил, действующих на цилиндр, наклонена назад, так как цилиндр имеет отрицательное линейное ускорение. Теперь

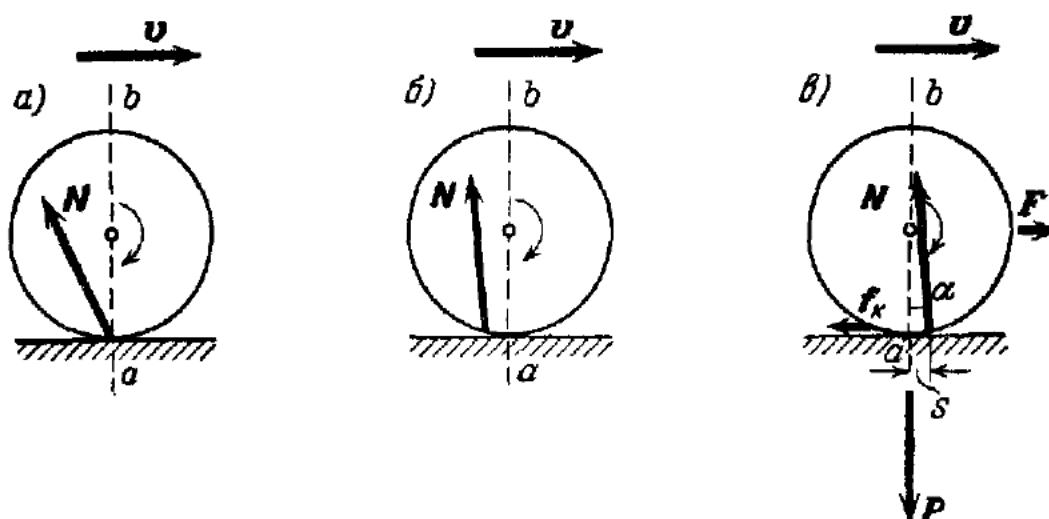


Рис. 210.

установим, где должна проходить равнодействующая по отношению к центру цилиндра.

Точка приложения равнодействующей не может быть расположена ни в вертикальной плоскости  $ab$ , проходящей через центр, ни сзади нее, как показано на рис. 210,  $a$  и  $b$ , ибо тогда эта сила сообщила бы положительное угловое ускорение цилиндру. Следовательно, остается последняя возможность: точка приложения силы  $N$  должна находиться впереди (рис. 210,  $c$ ), причем линия силы  $N$  должна проходить выше центра цилиндра, в противном случае она сообщала бы положительное угловое ускорение. Таким образом, сила воздействия плоскости на катящийся с замедлением под действием сил трения качения цилиндр направлена и приложена так, как показано на рис. 210,  $c$ .

Горизонтальная компонента силы  $N$  представляет силу трения качения  $f_k$ . Так как расстояние  $s$ , вынос точки приложения силы  $N$ , практически очень мало по сравнению с радиусом цилиндра  $R$ , или угол наклона  $\alpha$  очень мал, то абсолютная величина  $N$  почти равна силе давления, прижимающей цилиндр к плоскости, в нашем случае силе веса цилиндра  $P$ .

Связь между силой трения качения и другими величинами определяют опытным путем, в принципе следующим образом.

К оси равномерно катящегося по горизонтальной плоскости цилиндра приложена постоянная горизонтальная сила  $F$  в направлении движения, равная силе трения качения  $f_k$  (см. рис. 210, в) (силой трения о воздух можно пренебречь). Так как вращение цилиндра равномерное и угловое ускорение его равно нулю, то сила  $N$  должна проходить через ось цилиндра. Две другие силы, сила тяжести  $P$  и внешняя сила  $F$ , по условию проходят через ось цилиндра. Следовательно,

$$P = N \cos \alpha, \quad F = N \sin \alpha = f_k. \quad (75.1)$$

Угол  $\alpha$  практически очень мал, поэтому можно (75.1) записать так.

$$P \approx N, \quad f_k \approx N\alpha \approx P \frac{s}{R}. \quad (75.2)$$

Обычно в таблицах дают значения величины  $s$  и говорят не о силе трения качения

$$f_k \approx P \frac{s}{R}, \quad (75.3)$$

а о моменте силы трения качения

$$f_k R \approx Ps, \quad (75.4)$$

или момент силы трения качения равен силе нормального давления  $P$ , умноженной на  $s$ . Величину  $s$  называют *коэффициентом момента силы трения качения*.

Опыты показывают, что для стали, других металлов и твердого дерева величина  $s$  в известных пределах практически не зависит от скорости качения и радиуса цилиндра, хотя на основании общих соображений очевидно, что такая зависимость принципиально должна была бы иметь место. Величина  $s$  зависит только от материала цилиндра и плоскости.

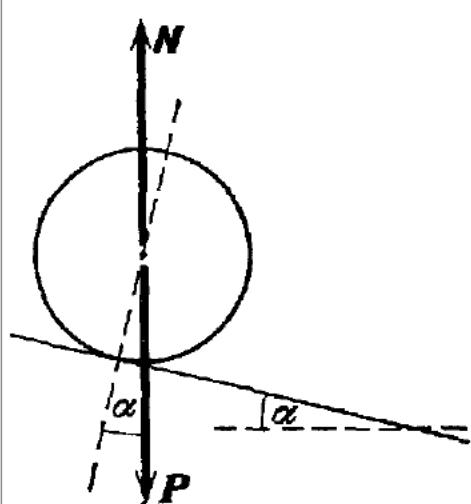


Рис. 211.

Величину  $s$  можно определить из опытов с качением цилиндра по наклонной плоскости. Допустим, угол наклона плоскости  $\alpha$  так подобран, что цилиндр катится по плоскости равномерно без скольжения (рис. 211). В этом случае сила воздействия плоскости на цилиндр обязательно вертикальна и проходит через ось цилиндра, потому что цилиндр катится равномерно. Следовательно, сила трения качения равна

$$f_k = P \sin \alpha \approx Pa \approx \frac{s}{R} P. \quad (75.5)$$

При выполнении этих опытов нужно убедиться в том, что сила трения вследствие вязкости воздуха очень мала по сравнению с силой трения качения.

При качении колеса телеги по обычному грунту сила трения, очевидно, будет зависеть от скорости, но опытные данные о ха-

рактере и величине этой зависимости еще недостаточны. Вопрос об определении силы трения качения колеса автомобиля значительно сложнее, но в первом приближении момент силы трения качения колеса автомобиля также считают постоянным и в соответствующих таблицах дают значения  $s$  в зависимости от параметров, характеризующих свойства дороги и шины колеса.

Сила трения качения цилиндра значительно меньше силы трения скольжения, поэтому в современных машинах подшипники

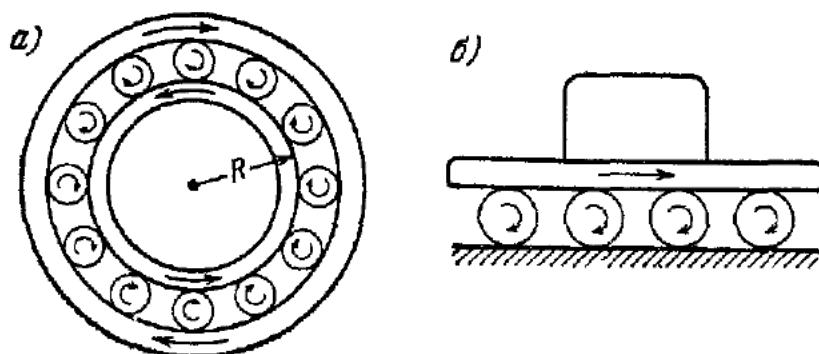


Рис. 212.

скольжения заменяются шариковыми или роликовыми. Легко видеть, что в случае плоской поверхности соприкосновения (рис. 212, б) осуществляется чистое качение роликов-цилиндров, в случае обычного шарикового или роликового подшипника (рис. 212, а) не может быть осуществлено чистое качение роликов; однако скольжение тем меньше, чем меньше отношение радиуса шарика (ролика) к радиусу цилиндра  $R$ . Но очень маленький радиус шарика (ролика) делать нельзя вследствие большого вдавливания его в прилегающую поверхность.

Если материал цилиндра (шарика) и поверхности качения достаточно тверд и давление небольшое, то сила трения качения очень мала. Поэтому, изучая качение шарика по наклонному желобку или цилиндра по наклонной поверхности, можно исследовать законы равномерно ускоренного движения, аналогичного падению тела в безвоздушном пространстве. Это обстоятельство существенно для опытов Галилея, в которых он изучал закон падения тел, наблюдая шарик, скатывающийся по наклонному желобу.

Пусть  $\gamma$  — угол наклона плоскости к горизонту — больше угла  $\alpha$  (см. (75 5)). Тогда ускоряющая сила равна  $mg \sin \gamma$ . Сила трения качения равна  $mg \sin \alpha$ . Если можно пренебречь силой трения о воздух, то по формулам (58 10) и (59 12) ускорение шарика будет постоянно и равно

$$a = \frac{5}{7} g (\sin \gamma - \sin \alpha). \quad (75 6)$$

Выбрав соответствующее значение  $\gamma$ , можно сделать ускорение  $a$  достаточно малым и наблюдать ускоренное движение с небольшой скоростью, при которой, как мы видели ранее (§ 40), можно вполне пренебречь силой трения о воздух<sup>1)</sup>.

1) Правда, там шла речь о поступательном движении, но при малой скорости движения сопротивление воздуха врачающемуся, движущемуся шарику будет того же порядка.

## Г л а в а IX

### ТЯГОТЕНИЕ ТЕЛ

#### § 76. Закон всемирного тяготения

Все физические тела испытывают действие сил взаимного тяготения. Основной закон, определяющий силы тяготения, был сформулирован Ньютоном и носит название *закона тяготения Ньютона*.

Закон тяготения гласит: *между двумя телами, массы которых равны  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на расстоянии  $R$  друг от друга,*

*действуют силы взаимного притяжения  $F_{12}$  и  $F_{21}$ , направленные от одного тела к другому* (рис. 213), *причем величина силы тяготения пропорциональна произведению масс обоих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.* Или: *силы тяготения равны*

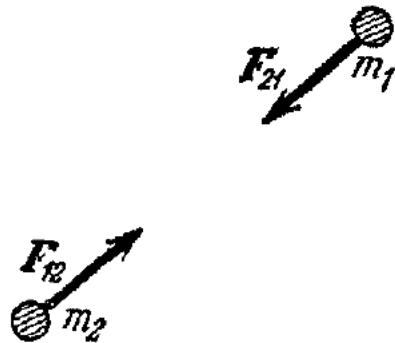


Рис. 213.

$$F_{12} = F_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad (76.1)$$

где  $\gamma$  — некоторая постоянная величина — *постоянная тяготения, или гравитационная постоянная.*

Закон тяготения в этой форме справедлив в том случае, когда размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними, т. е. когда тела можно считать материальными точками.

При определении силы взаимного тяготения между двумя телами, которые нельзя считать точками, поступают следующим образом. Разбивают все тело на такие малые частицы, которые можно принять за точки, выбирают во втором теле одну частицу и определяют равнодействующую сил притяжения со стороны всех частиц первого тела. Затем проделывают то же самое для всех остальных частиц второго тела и берут сумму; эта сумма и представляет силу действия первого тела на второе. По третьему закону определяют силу, действующую на первое тело.

Вычисления, проделанные для шаров из однородного вещества, показывают, что результирующая сила тяготения приложена в центре каждого шара и равна

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad (76.2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы шаров,  $R$  — расстояние между центрами шаров и  $\gamma$  — та же величина, которая стояла в выражении (76.1). Таким образом, закон тяготения Ньютона в форме (76.1) имеет силу как для материальных точек, так и для шаров из однородного материала.

Силу тяготения между телами в лабораторных опытах мы не замечаем потому, что она очень мала по сравнению с их весом, и непосредственное измерение ее представляет значительные трудности. Однако такие измерения были проделаны учеными.

Первое измерение силы тяготения было сделано Кавендишем в 1798 г. при помощи кривильных весов. Этот же принцип был использован и при последующих измерениях сил тяготения.

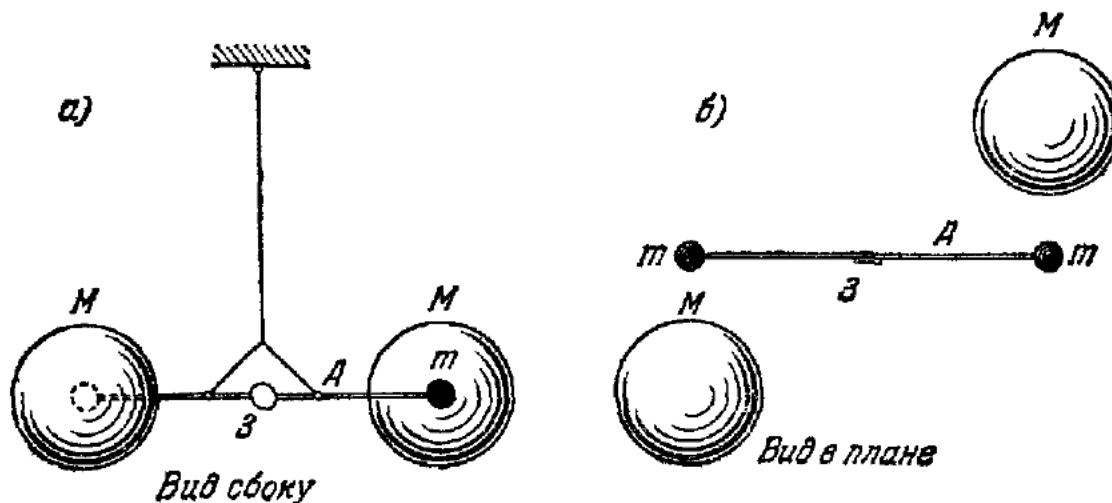


Рис. 214.

Схема прибора Кавендиша показана на рис. 214. На концах сравнительно легкого коромысла  $A$  находились две одинаковые массы, каждая величиной  $m$ . Коромысло подвешивалось за середину на достаточно длинной, тонкой некрученой нити. К середине коромысла было прикреплено зеркальце  $Z$ ; поворот луча света, отраженного от зеркальца, отмечает закручивание нити, на которой подвешено коромысло  $A$ . К массам  $m$  придвигались с разных сторон на определенное расстояние два больших свинцовых шара  $M$  (массой примерно по 158 кг), как показано на плане прибора (рис. 214, б). Под действием сил тяготения коромысло  $A$  кривильных весов поворачивалось до тех пор, пока момент силы тяготения между шарами не уравновешивался моментом закручивания нити, который и определялся по смещению зайчика, отраженного от зеркальца. Поднося массы на различные расстояния,

Кавендиш определил силу тяготения в зависимости от расстояния и подтвердил справедливость закона Ньютона.

После Кавендиша его опыты в различных вариантах несколько раз проверялись. На основании этих опытов в настоящее время для постоянной тяготения в системе СИ принимается следующее значение:

$$\gamma = 6,65 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2); \quad (76.3)$$

в системе единиц СГС

$$\gamma = 6,65 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2).$$

Величина  $\gamma$  является размерной величиной. Можно было бы построить систему единиц таким образом, чтобы  $\gamma$  была безразмерной величиной, но размерности остальных величин тогда пришлось бы изменить; однако такая система на практике не применяется.

Зная постоянную тяготения, можно определить массу Земли  $m_3$  по ускорению свободного падения тела у поверхности  $g$ . Действительно, по закону Ньютона сила тяготения тела массы  $m$

$$P = \gamma \frac{m \cdot m_3}{r_0},$$

где  $r_0$  — радиус Земли; с другой стороны,

$$P = mg.$$

Из этих равенств получаем

$$m_3 = \frac{gr_0^2}{\gamma}. \quad (76.4)$$

Подставляя сюда значение радиуса Земли  $r_0 \approx 6,4 \cdot 10^8$  см, находим

$$m_3 = \frac{981 \cdot 6,4^2 \cdot 10^{16}}{6,65 \cdot 10^{-8}} \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ г} = 6 \cdot 10^{21} \text{ тонн}. \quad (76.5)$$

Сам Ньютон прежде всего проверил свой закон, анализируя движение Луны вокруг Земли. Полагая, что Луна движется равномерно по кругу под действием только силы притяжения Земли, зная период обращения Луны вокруг Земли (луный месяц)  $T = 27,3$  дня и расстояние от Земли до Луны  $r = 3,844 \cdot 10^{10}$  см, можно определить центростремительное ускорение Луны  $w$ . Вычислим его:

$$w = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3,844 \cdot 10^{10}}{2,358^2 \cdot 10^{12}} \text{ см/с}^2,$$

так как  $T = 27,3$  дня  $= 2,358 \cdot 10^6$  с. Произведем арифметические действия и найдем ускорение Луны:

$$w \approx 0,27 \text{ см/с}^2. \quad (76.6)$$

Сила тяготения Земли сообщает Луне это центростремительное ускорение, поэтому по второму закону динамики

$$m_L w = \gamma \frac{m_L \cdot m_3}{r^2}, \quad (76.7)$$

где  $m_L$  — масса Луны. Отсюда

$$\omega = \gamma \frac{m_3}{r^2}. \quad (76.8)$$

С другой стороны, ускорение  $g$  у поверхности Земли можно записать так:

$$g = \gamma \frac{m_3}{r_0^2},$$

где  $r_0$  — радиус Земли. Подставляя  $m_3$  отсюда в формулу (76.8), получаем

$$\omega = g \frac{r_0^2}{r^2}, \quad (76.9)$$

или ускорение Луны равно

$$\omega = 981 \left( \frac{6,4}{3,844} \right)^2 \cdot \frac{10^{10}}{10^{20}} \approx 0,273 \text{ см/с}^2. \quad (76.10)$$

Вычисленное таким путем ускорение совпадает с тем, которое было найдено выше (см. (76.6)) из кинематических условий.

Такое сравнение убедило Ньютона в справедливости предложенного им закона тяготения. Астрономические наблюдения и расчеты также подтверждают справедливость закона тяготения. Заметим, что для проверки закона тяготения по движению Луны Ньютону не нужно было знать постоянную тяготения  $\gamma$ .

Открытие закона тяготения позволило значительно расширить область применения законов механики, установленных на основании опытов с телами, находящимися на Земле, распространить действие этих законов на все физические тела Вселенной.

## § 77. Масса «инертная» и масса «тяготения»

Формулируя закон тяготения (76.1), мы молчаливо предположили, что масса тела, входящая в этот закон, есть та же масса, которая является мерой инерции. Однако без дополнительных исследований это предположение совершенно не обосновано.

Правильнее считать, что тело обладает свойством тяготения, в соответствии с результатами опытов. Мерой этого свойства является масса «тяготения» тела, или «гравитационная» масса, которая, вообще говоря, совершенно отлична от «инертной» массы, но опытные исследования убеждают нас в том, что эти величины пропорциональны друг другу и специальным выбором единиц всегда можно сделать их равными друг другу, как обычно и делается в физике.

Вывод о пропорциональности «инертной» массы и массы «тяготения» тела можно сделать на основании опыта, показывающего, что ускорение свободного падения для всех тел различной массы одинаково (в данном месте). Тело обладает свойством инертности, которое измеряется величиной «инертной» массы  $m_i$ , и свойством тяготения, которое измеряется величиной «гравитационной» массы  $m_g$ . Тогда силу тяготения можно записать так:

$$P = km_g, \quad (77.1)$$

где  $k$  — некоторая размерная постоянная величина, или: сила тяготения к Земле пропорциональна массе тяготения этого тела. С другой стороны, свободное падение тела есть не что иное, как движение тела под действием силы тяготения. Поэтому по второму закону динамики можно записать

$$P = m_{\text{и}} g, \quad (77.2)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести, или, приравнивая (77.1) и (77.2), получаем.

$$g = k \frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}}. \quad (77.3)$$

Так как ускорение  $g$  одинаково для всех тел, не зависит от материала тела и его размеров, то, следовательно, «инертная» масса  $m_{\text{и}}$  пропорциональна массе «тяготения»  $m_{\text{г}}$ . Если за единицу «инертной» массы принять килограмм (кг), то можно так выбрать величину единицы массы «тяготения», чтобы величина  $k$  равнялась  $9,81 \text{ м/с}^2$ . При таком выборе единиц величина «гравитационной» массы будет в точности равна величине «инертной» массы одного и того же тела.

Ньютон для проверки пропорциональности между «инертной» массой и массой «тяготения» производил опыты с маятниками из различного материала. Он определял период колебаний маятников одинаковой длины, но из различных материалов. Из теории известно (см. далее § 124), что период колебаний математического маятника зависит только от его длины  $l$ , постоянной  $k$  в формуле (77.1) и от отношения  $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}$  следующим образом:

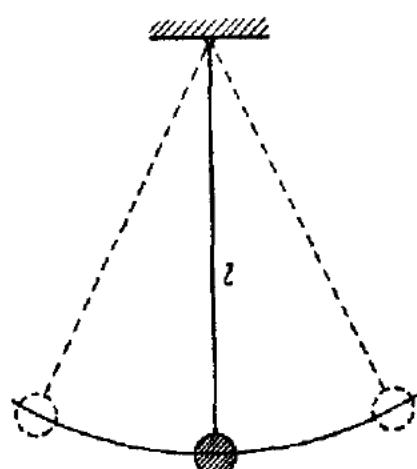


Рис. 215.

Заметим, что маятник называют математическим тогда, когда линейные размеры тела, подвешенного на нити, очень малы по сравнению с длиной нити, а масса нити ничтожно мала по сравнению с массой подвешенного тела (рис. 215). Опыт дает, что для любых математических маятников период колебаний пропорционален только квадратному корню из его длины  $\sqrt{l}$ . Следовательно, величина  $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}}$  остается постоянной, или  $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = \text{const}$ . При указанном ранее выборе единиц величина  $k = g$ , а отношение  $\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = 1$ , поэтому и формула (77.4) для периода математического маятника может быть записана так.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (77.5)$$

Опыты Ньютона с большей точностью были повторены Бесселем. В начале нынешнего столетия они были проверены еще раз с применением более точных методов и более совершенных приборов академиком Крыловым.

Очевидно, что на основании результатов измерения периода колебаний маятника определенной длины можно найти величину ускорения свободного падения, или величину силы тяготения в данном месте. Большая точность при измерении периода колебаний маятника обеспечивает значительную точность измерения силы тяготения в данном месте.

Замечая различие в периоде колебаний одного и того же маятника в различных местах земной поверхности, можно отметить изменения силы тяготения от места к месту. Оказывается, вследствие неоднородности поверхности земной коры сила тяготения изменяется от места к месту даже на одной и той же широте. По изменению силы тяготения на определенной площади геологи судят об изменениях плотности поверхности земной коры и на основании этих данных выводят заключение о наличии полезных ископаемых. Это и есть так называемая гравитационная разведка полезных ископаемых.

Значение в физике закона пропорциональности гравитационной и инертной масс было оценено только в теории относительности, где он носит название закона эквивалентности гравитационной и инертной масс данного тела и из него сделаны важные выводы о том, что в любом достаточно малом участке пространства всегда можно указать такую ускоренную систему отсчета, для которой поле сил тяжести отсутствует.

## § 78. Потенциальная энергия тяготения

Поскольку силы тяготения между телами зависят от взаимного расположения тел (или частиц, составляющих тела), то каждая совокупность тел, расположенных определенным образом относительно друг друга, обладает некоторым запасом потенциальной энергии тяготения. При изменении взаимного расположения тел силы тяготения будут совершать определенную работу, следовательно, будет изменяться потенциальная энергия системы тел.

Напомним, что изменение потенциальной энергии тяготения равно взятой с обратным знаком работе сил тяготения, совершающейся при изменении конфигурации системы тел. Заметим, что в общем случае система обладает запасом потенциальной энергии, если работа сил взаимодействия не зависит от способа, каким система переходит из одной конфигурации в другую.

Для двух материальных частиц массы  $m_1$  и  $m_2$  (или шаров той же массы) потенциальную энергию можно вычислить по формуле (36.8), подставляя в нее

$$f(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (78.1)$$

где  $r$  — расстояние между частицами и  $\gamma$  — постоянная тяготения,

Тогда разность потенциальной энергии в двух точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  равна

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \gamma \int_1^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r} \Big|_1^2 = \\ &= \gamma m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}. \end{aligned} \quad (78.2)$$

Фактически мы всегда можем вычислить только разность потенциальных энергий в двух состояниях. Ради удобства при вычислениях принимают потенциальную энергию при бесконечном расстоянии ( $r \rightarrow \infty$ ) равной нулю,

или  $U(\infty) = 0$ . Тогда (78.2) можно записать так:

$$U_1 = U(r_1) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}. \quad (78.3)$$

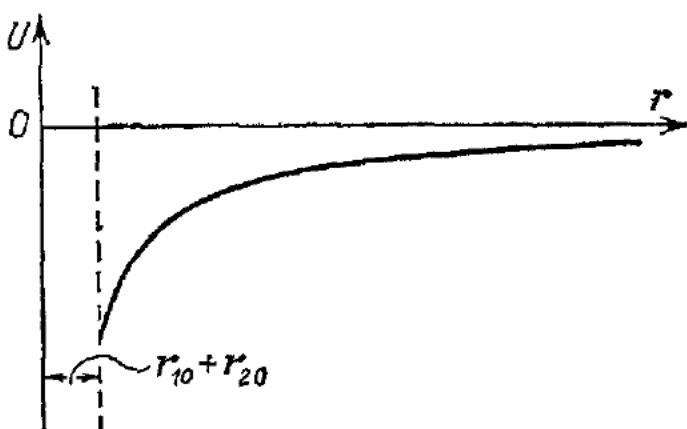


Рис. 216.

При таком выборе нулевого значения потенциальная энергия двух шаров (или материальных точек) всегда будет отрицательна (рис. 216), причем она возрастает с увеличением расстояния. Ведь между телами действуют силы притяжения, следовательно, для удаления их друг от друга необходимо затратить работу, или: при удалении потенциальная энергия возрастает. Максимум потенциальной энергии — при бесконечном удалении тел, а минимум — при наименьшем расстоянии между ними.

Если шары имеют радиусы  $r_{10}$  и  $r_{20}$  соответственно, то минимальная потенциальная энергия их взаимодействия имеет величину

$$U_{\min} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{10} + r_{20}}. \quad (78.4)$$

Вычисление потенциальной энергии тяготения неоднородных тел или системы материальных точек сложнее, но идет оно принципиально тем же путем. С увеличением расстояния между телами потенциальная энергия тяготения возрастает.

### § 79. Основные законы небесной механики

Законы движения небесных тел, в частности движения планет вокруг Солнца, являются простым следствием основных законов механики, которые называют законами Ньютона, — трех законов динамики и закона всемирного тяготения.

Еще до Ньютона Кеплер на основе наблюдений Тихо Браге нашел законы движения планет вокруг Солнца. Эти законы носят название законов Кеплера и гласят следующее:

1. Орбиты всех планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Движение каждой планеты происходит так, что радиус-вектор, проведенный из центра Солнца к планете, за равные промежутки времени «ометает» равные площади (рис. 217).

3. Квадраты периодов обращения различных планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей эллипсов орбит.

Первый закон Кеплера следует из решения задачи об определении орбит планет и закона движения их по орбите. Для этого вычисляют траектории движения материальной точки, находящейся под действием центральной силы<sup>1)</sup>, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. Результаты решения этой задачи показывают, что траектории небесных тел лежат в плоскости и представляют собой или эллипс, или параболу, или гиперболу.

В частном случае, когда орбита планеты — окружность, элементарным путем доказывается возможность такого движения под действием центральной силы. В самом деле, планета может двигаться по кругу тогда, когда сила притяжения ее Солнцем равна центробежной силе. Чтобы планета из данного места, находящегося на расстоянии  $R$  от Солнца, могла двигаться по кругу, она должна иметь определенную скорость, направленную перпендикулярно к радиусу-вектору и равную<sup>2)</sup>

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}, \quad (79.1)$$

где  $M$  — масса Солнца, а  $\gamma$  — постоянная тяготения. Таким образом, скорость движения по орбите и радиус орбиты связаны друг с другом, причем эта скорость не зависит от массы планеты.

Более сложные вычисления показывают и наблюдения подтверждают, что форма и вид орбиты связаны с начальной скоростью. Например, если скорость движения  $v_2$  в точке  $A$  (рис. 218) меньше  $v_0$  из формулы (79.1), то планета будет двигаться по эллипсу так, что Солнце будет находиться в дальнем фокусе эллиптической орбиты (орбита  $AA_2$  на рис. 218). Если же скорость  $v_1$  больше «круговой»  $v_0$ , то планета также будет двигаться по эллипсу, но Солнце будет находиться в ближнем фокусе.

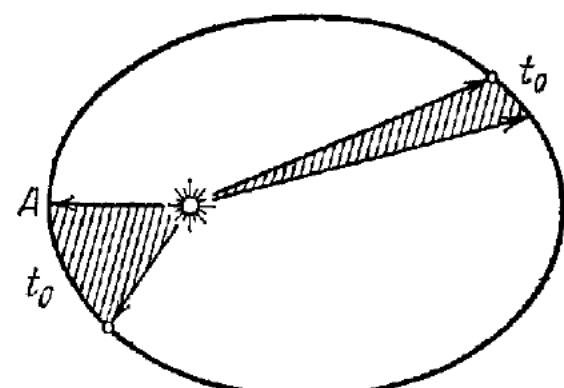


Рис. 217.

<sup>1)</sup> Всюду направленной в одну точку, в центр.

<sup>2)</sup> Эта формула выведена из равенства  $mv_0^2/R = \gamma Mm/R^2$ , где  $m$  — масса планеты.

диться в ближайшем фокусе орбиты (орбита  $AA_1$ , на рис. 218). Но движение по эллипсу происходит только в том случае, если скорость в точке  $A$  меньше скорости, равной

$$v_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}, \quad (79.2)$$

при которой планета движется по параболе. Если же скорость движения в точке  $A$  больше «параболической» (см. формулу (79.2)),

то небесное тело, которое в данном случае уже не может называться планетой, будет двигаться по гиперболе и никогда не возвратится в ту же точку.

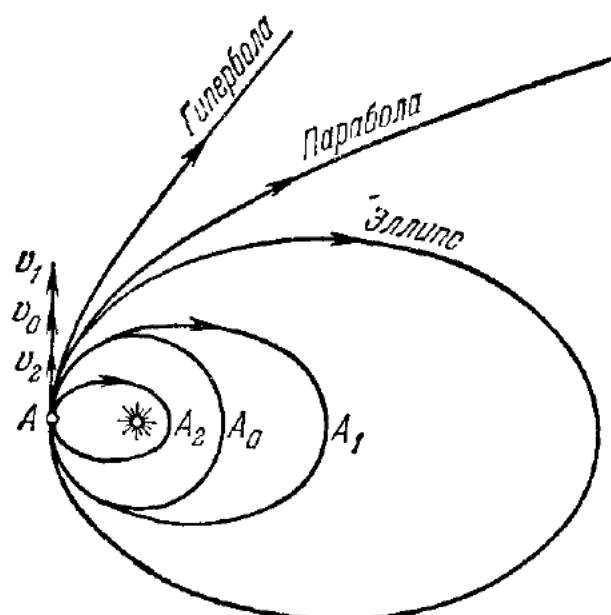


Рис. 218.

Солнца в точке  $A_1$ , то по закону сохранения энергии можем определить скорость в этой точке в зависимости от начальной скорости в точке  $A$ . В самом деле, энергия в точке  $A$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_1} \quad (79.3)$$

равна энергии в любой точке траектории

$$E = \frac{mv_k^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_k}, \quad (79.4)$$

где  $v_k$  и  $R_k$  — скорость в какой-то точке и ее расстояние от Солнца соответственно. Сравнивая формулы (79.3) и (79.4), находим связь между скоростью и расстоянием, если нам известна величина энергии  $E$  в «начальной» точке  $A$ . При эллиптических орbitах  $E < 0$ , потенциальная энергия (по абсолютной величине) больше кинетической.

При параболической орбите скорость в бесконечности будет равна нулю, поэтому она будет соответствовать полной энергии, равной нулю, или  $E = 0$ ; отсюда по (79.3) получаем значение «параболической» скорости в точке  $A$ , а именно:

$$\frac{mv_{\text{п}}^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0. \quad (79.5)$$

Преобразуя, получаем для  $v_{\text{п}}$  из написанную выше формулу (79.2).

При гиперболических орбитах, начинающихся в точке  $A$ , энергия  $E > 0$ , т. е. кинетическая энергия больше абсолютной величины потенциальной энергии.

Таким образом, формы всевозможных орбит, проходящих через какую-то избранную точку  $A$ , однозначно связаны с величиной энергии, которой обладает движущееся по ним тело.

**Второй закон Кеплера** есть следствие закона сохранения момента количества движения. Действительно, на планету, вращающуюся вокруг Солнца, действует сила  $\gamma \frac{Mm}{r^2}$  тяготения, всегда направленная к Солнцу, поэтому момент количества движения планеты относительно центра Солнца будет постоянным, т. е.

$$[r \cdot mv] = \text{const},$$

или

$$[rv] = \text{const}, \quad (79.6)$$

где, как показано на рис. 219,

$r$  — радиус-вектор,  $v$  — вектор скорости планеты. Площадь, ометаемая радиусом-вектором за время  $dt$ , равна

$$dS = \frac{1}{2} rv \sin \alpha dt,$$

где  $\alpha$  — угол между  $r$  и  $v$ ; учитывая выражение (79.6), можем написать так:

$$2 \frac{dS}{dt} = rv \sin \alpha = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{dS}{dt} = \text{const}. \quad (79.7)$$

Из этого закона следует, что при движении по своей орбите планета имеет наибольшую скорость в те моменты, когда она ближе всего к Солнцу (точка  $A$  на рис. 217).

**Третий закон Кеплера** легко доказать, если считать, что орбиты планет являются кругами. В действительности эксцентриситет орбит эллипсов очень невелик, например, для земной орбиты он составляет  $\approx 0,017$ , для орбиты Меркурия  $\approx 0,205$ . Заметим, что при точных расчетах, принимая во внимание эксцентриситет эллиптических орбит, получим тот же результат.

Пусть одна планета имеет массу  $m_1$ , круговую орбиту радиуса  $r_1$  и период обращения по орбите  $T_1$ , а вторая планета — соответственно  $m_2, r_2, T_2$ . Тогда квадрат линейной скорости движения первой планеты по круговой орбите равен:

$$v_1^2 = \frac{\gamma M}{r_1},$$

где  $M$  — масса Солнца. Скорость движения планеты по орбите равна

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

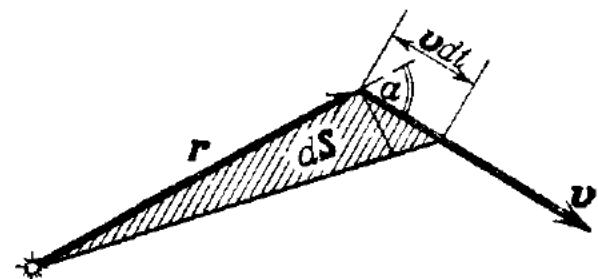


Рис. 219.

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, находим

$$\frac{4\pi^2 r_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{r_1}, \text{ или } \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \quad (79.8)$$

Точно такое же выражение можно написать и для второй планеты:

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \quad (79.9)$$

Сравнивая (79.8) и (79.9), получаем

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

что и представляет содержание третьего закона Кеплера.

Таким образом, механика Ньютона дала полное объяснение законов движения небесных тел. До сих пор продолжаются замечательные теоретические исследования астрономами путей движения небесных тел, которые подтверждаются экспериментальными измерениями движения космических кораблей и спутников.

## § 80. Движение спутников Земли и космических снарядов

После запуска первого советского искусственного спутника Земли в октябре 1957 г. и исторического полета 12 апреля 1961 г.

Ю. А. Гагарина вокруг Земли быстрыми темпами начала развиваться техника космических полетов, и в настоящее время уже много искусственных спутников вращается вокруг Земли, а некоторое число космических снарядов, запущенных человеком, стало спутниками Солнца.

Законы полета спутников Земли подобны законам вращения планет вокруг Солнца. Если представить себе космический снаряд как обычный снаряд или просто камень, запущенный горизонтально

с некоторой высоты  $h$  со скоростью  $v$ , то все возможные его траектории в отсутствие влияния атмосферы (рис. 220), очевидно, подобны возможным движениям планет.

При малой начальной скорости  $v$ , меньшей

$$v_{kp} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0 + h}},$$

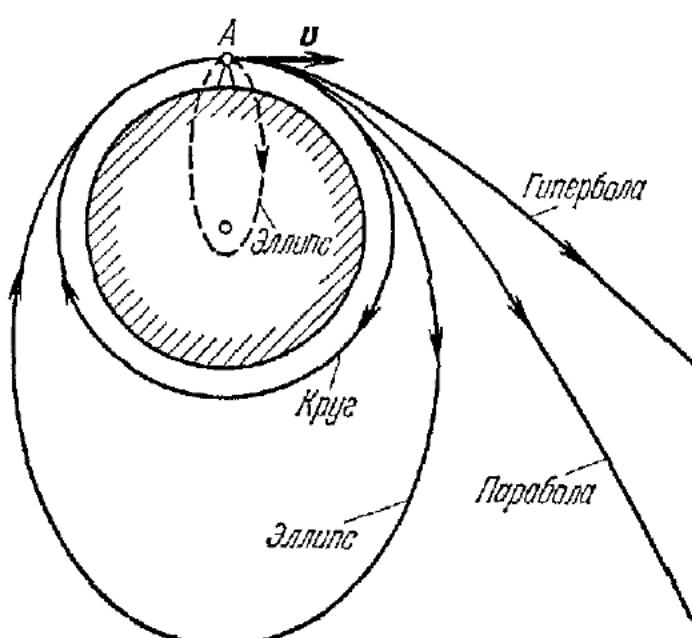


Рис. 220.

траектории снаряда представляют собой отрезки эллипсов, фокусы которых совпадают с центром Земли. При совсем малой начальной скорости эти отрезки с большой точностью можно считать отрезками парабол.

При скорости  $v_{kp}$ , равной  $\approx 7,93$  км/с, траектория снаряда будет окружностью и снаряд станет спутником Земли. Скорость движения снаряда по круговой орбите легко вычислить из условия, что центростремительное ускорение снаряда  $\frac{v_{kp}^2}{r_0+h}$  должно равняться ускорению свободного падения  $g$ . Действительно, ускорение свободного падения на высоте  $h$

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2}, \quad (80.1)$$

где  $g_0$  — ускорение на поверхности Земли на расстоянии  $r_0$  от ее центра, тогда

$$\frac{v_{kp}^2}{r_0+h} = g = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0+h)^2},$$

или

$$v_{kp} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0+h}}. \quad (80.2)$$

Если  $h \ll r_0$ , то

$$v_{kp} \approx \sqrt{r_0 g_0} \approx 7,93 \text{ км/с} \quad (80.3)$$

представляет собой скорость движения спутника по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Земли; эту скорость принято называть *первой космической скоростью*.

Когда начальная скорость больше  $v_{kp}$ , но меньше

$$v_n = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}},$$

траектория снаряда представляет собой эллипс, причем в ближайшем к точке вылета фокусе этого эллипса находится центр Земли. При  $v = v_n$  траектория снаряда имеет вид параболы и снаряд, движущийся по ней, не вернется на Землю «Параболическая» скорость относительно Земли определяется также по формуле (79.5), только вместо  $\gamma M$  следует поставить  $\gamma M_3$ , где  $M_3$  — масса Земли. Учитывая формулу (80.1) для величины ускорения силы тяготения, можно написать

$$\frac{\gamma M_3}{(r_0+h)^2} = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0+h)^2}, \quad \gamma M_3 = g_0 r_0^2. \quad (80.4)$$

Подставляя это в (79.5), находим параболическую скорость для Земли:

$$v_n = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}}. \quad (80.5)$$

В случае  $h \ll r_0$ , или когда снаряд посылают по касательной к поверхности Земли,

$$v_n \approx \sqrt{2g_0 r_0} \approx 11,2 \text{ км/с.} \quad (80.6)$$

Эта величина называется *второй космической скоростью*.

Следовательно, если снаряд посыпается горизонтально с высоты  $h$  со скоростью, большей  $v_n = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0 + h}}$ , то он будет двигаться по гиперболической траектории и навсегда покинет область притяжения Земли, или станет самостоятельным спутником Солнца — маленькой искусственной планетой.

Все эти расчеты производятся без учета влияния Солнца и планет на движение космического снаряда. Иначе говоря, считается, что Земля неподвижна и спутник движется относительно нее, а вся система (Земля — спутник) неизменно продолжает движение вокруг Солнца.

Так как масса спутника ничтожно мала по сравнению с массой Земли, то центр инерции системы Земля — спутник практически совпадает с центром инерции Земли. Кроме того, когда расстояние между спутником и центром Земли ничтожно мало по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца, то влиянием изменения притяжения Солнца на орбиту спутника можно пренебречь. При большом удалении спутника от Земли, конечно, следует расчет вести с учетом сил притяжения Солнца, Луны и других планет Солнечной системы. С другой стороны, при движении спутников Земли по круговым орбитам вокруг нее это движение зависит и от неоднородности поля сил тяготения Земли, вызванной как отклонением поверхности Земли от сферы, так и изменением плотности Земли (особенно в ее верхних слоях).

Как показывают более сложные расчеты, *третья космическая скорость*, т. е. скорость, которую следует сообщить снаряду на Земле, чтобы он покинул пределы Солнечной системы, равна

$$v_{\text{косм}} \approx 16,7 \text{ км/с.} \quad (80.7)$$

Приближенно ее можно рассчитать следующим образом. Прежде всего заметим, что  $v_n = v_{\text{кр}} \sqrt{2}$ , что следует из сравнения (80.2) и (80.5), или: параболическая скорость в  $\sqrt{2}$  раз больше круговой. Так же, очевидно, будет и для Земли или, точнее, для тела, движущегося по орбите Земли, которую мы считаем круговой. Если бы нам удалось вывести снаряд на орбиту, совпадающую с орбитой Земли, то он двигался бы по этой орбите со скоростью Земли относительно Солнца  $v_0$ , примерно равной 30 км/с (29,76 км/с). Значит, ему нужно было бы сообщить еще скорость

$$v_0 (\sqrt{2} - 1), \quad (80.8)$$

чтобы он покинул пределы Солнечной системы. Иными словами, этому снаряду следует сообщить кинетическую энергию

$$\frac{mv_0^2}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 \quad (80.9)$$

относительно системы координат, движущейся по орбите так же, как и Земля ( $m$  — масса снаряда). А для того чтобы удалить снаряд из поля притяжения Земли, ему нужно сообщить скорость

$$v_{\pi} = \sqrt{2g_0 r_0} \approx 11,2 \text{ км/с},$$

или кинетическую энергию

$$\frac{mv_{\pi}^2}{2}, \quad (80.10)$$

которая пойдет на работу против сил тяготения Земли. Следовательно, если мы сообщим снаряду скорость  $v_{\text{косм}}$  относительно Земли, или кинетическую энергию

$$\frac{mv_{\text{косм}}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{mv_{\pi}^2}{2}, \quad (80.11)$$

он должен покинуть Солнечную систему. Из (80.11) следует:

$$v_{\text{косм}}^2 = v_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2 + v_{\pi}^2. \quad (80.12)$$

Подставляя сюда числа, находим:  $v_{\text{косм}} \approx 16,75 \text{ км/с}$ .

Из этого рассмотрения следует, что законы движения планет и вообще небесных тел те же, что и законы для падающего или брошенного камня, и они описывают свободное падение, т. е. движение под действием одной лишь силы тяготения.

Сравнение этих явлений напоминает нам легенду о яблоке, в которой рассказывается о том, как размышления по поводу яблока, упавшего с дерева, привели Ньютона к открытию закона всемирного тяготения.

Может быть, эта легенда и неправильно описывает открытие Ньютоном закона, но она очень четко подчеркивает, что падение яблока с яблони, движение космического корабля и движение небесных тел — физические явления одного класса, явления, подчиняющиеся одним и тем же закономерностям.

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

### Глава X

#### МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

##### § 81. Понятие об упругом теле. Силы и деформации при растяжении

С изменением сил, действующих на тело, изменяется форма тела, или, как говорят, твердое тело *деформируется*. Изучая законы механики твердых тел, мы пренебрегали деформациями тела, полагая, что они достаточно малы и не оказывают влияния на движение тела. Но во многих других задачах механики необходимо знать законы, связывающие действие сил на тело с теми деформациями, которые вызываются этими силами; этими законами мы и будем заниматься в настоящей главе.

Прежде всего отметим, что деформации тела имеют место всегда, когда на тело действуют силы, вне зависимости от того, покоятся ли тело (статика) или находится в состоянии неравномерного движения (динамика) (см. § 92). Например, к концам линейки приложены две растягивающие ее равные и противоположные силы; с увеличением этих сил линейка растягивается, расстояние между отдельными частицами линейки увеличивается, линейка деформируется. С увеличением сил, приложенных к концам линейки, расстояния между всеми отдельными частицами увеличиваются.

Теперь представим, что на эту же линейку действует сила, приложенная к одному концу. Под действием этой силы линейка будет двигаться ускоренно, и по этой же причине в ней возникнут деформации. Но характер деформаций будет иной, чем в предыдущем случае. Там деформации всех участков однородной линейки были одинаковы, здесь же различные участки однородной линейки будут деформироваться по-разному: те части, которые лежат ближе к тому концу, где приложена сила, будут растянуты больше, чем те, которые лежат дальше от него.

Схематически деформацию линейки можно представить себе как деформацию модели, показанной на рис. 221, состоящей из отдельных масс («частичек тела»), соединенных пружинками. Когда к крайней

массе модели приложена внешняя сила, вся цепочка двигается с ускорением; силы, действующие на каждую пружинку, уменьшаются от пружинки к пружинке. Сила, растягивающая какую-то пружинку, сообщает ускорение всем массам, тянувшимся за ней, и поэтому деформации пружинок будут различны. По тем же причинам расстояния разных участков однородной линейки будут неодинаковы. Силы, возникающие между различными частями деформированного тела, называются *внутренними силами* или *усилиями*, в отличие от внешних сил.

Эти примеры показывают, что при анализе деформаций нельзя переносить силу по линии ее действия, как можно это было делать в абсолютно твердом теле. Деформации будут совершенно различными в зависимости от того, приложена ли сила к первой массе (см. рис. 221) или, например, к третьей.

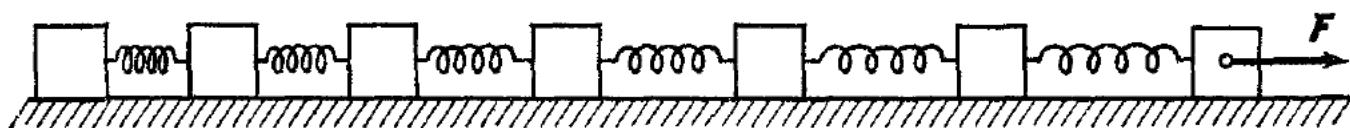


Рис. 221.

Деформации изменяются при изменении приложенных сил, или нагрузок; при постоянных силах деформации, вообще говоря, остаются неизменными, постоянными.

Законы, связывающие силы и деформации, в общем случае очень сложны не только потому, что те и другие довольно сложно распределены в различных частях тела, но и потому, что обычно связь между силами и деформациями неоднозначна и зависит от величины и характера изменений приложенных сил и от других причин.

Только в *упругом* теле, и в *определенном* диапазоне изменений величин сил (внешних и внутренних) и деформаций, силы *однозначно* определяют деформации, и наоборот<sup>1)</sup>.

Для выяснения закономерностей, связывающих силу и деформацию, разберем простейший вид деформации — растяжение (или сжатие) однородного стержня (цилиндра) вдоль его оси.

Проанализируем результаты опытов с растяжением стального длинного стержня или проволоки (рис. 222). Если материал стержня однороден, то все одинаковые кусочки стержня, которые мы всегда можем выделить в любом месте стержня, будут растянуты одинаково при любой заданной нагрузке. Стержень будет иметь однородную деформацию растяжения, которую можно характеризовать относи-

<sup>1)</sup> Может быть, правильнее было бы говорить не об упругом теле, а об *упругой зоне* тела, где под словом «зона» понимается совокупность тех условий, при которых данное тело ведет себя, как упругое тело. Но такая терминология не принята, поэтому мы ею не пользуемся.

тесячным удлинением  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{\Delta l_1}{l_1}, \quad (81.1)$$

где  $\Delta l_1$  — удлинение какого-то отрезка стержня, имевшего первоначальную длину  $l_1$ . Для любых отрезков, и в том числе для всей проволоки, величина  $\epsilon$  одинакова и зависит

от величины растягивающей силы  $F$ . Под действием силы  $F$  в стержне возникнут внутренние силы, усилия, с которыми действуют друг на друга части стержня. Мысленно вырежем некоторый кусочек стержня (рис. 223) и рассмотрим условия его равновесия. Из условий равновесия следует, что силы, приложенные к концам этого отрезка со стороны соседних частей стержня, равны друг другу и противоположны. Так как это справедливо для любого отрезка стержня, то, следовательно, в любом поперечном сечении стержня возникают усилия, равные  $F$ .

Усилия  $F$  можно представить как силу, приложенную к поверхности поперечного сечения, как «поверхностную» силу. Если материал однороден, то можно считать,

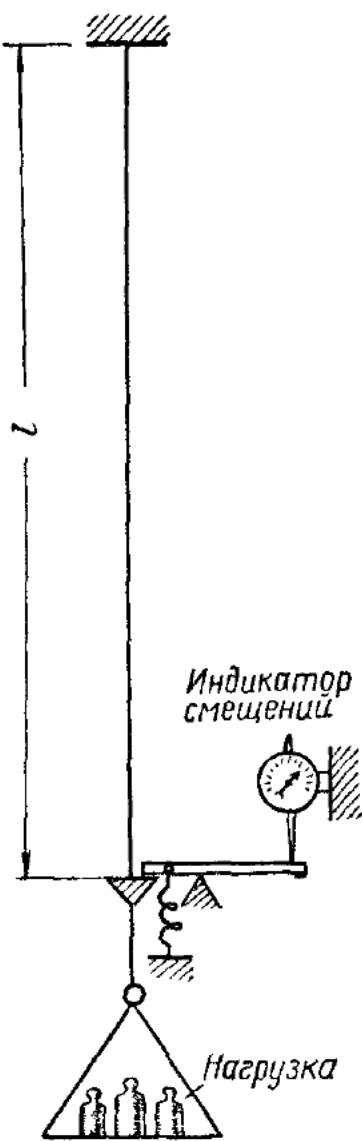


Рис. 222.

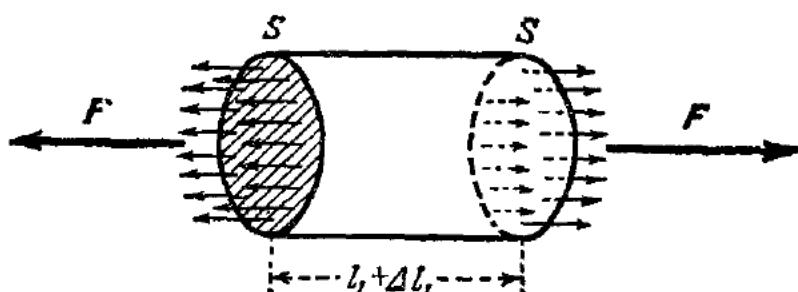


Рис. 223.

что усилие *равномерно* распределено по поверхности поперечного сечения. Величину усилия, действующего на единицу площади поперечного сечения, называют *напряжением* и обозначают его  $\sigma$ . Напряжение  $\sigma$ , возникающее в растягиваемом стержне, будет равно

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (81.2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня. Как показывает опыт, относительная деформация  $\epsilon$  определяется напряжением  $\sigma$ .

Будем увеличивать постепенно растягивающую силу  $F$  или напряжение  $\sigma$  и отмечать удлинение стержня, или относительную деформацию  $\varepsilon$ . На основании этих опытов получим диаграмму зависимости между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$ , показанную на рис. 224. При небольших усилиях напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$  примерно пропорциональны друг другу. Так продолжается до точки  $P$ . Далее деформация начинает нарастать быстрее, кривая изгибается в сторону оси деформаций  $\varepsilon$ , а от точки  $T$  кривая идет на некотором участке даже примерно параллельно оси деформации — напряжения почти не увеличиваются, а деформации растут. Область деформаций (или напряжений), соответствующих участку кривой, начинаящемуся от точки  $T$ , называется *областью текучести* или *областью пластических деформаций*. Далее, с увеличением деформаций  $\varepsilon$ , кривая напряжений немножко возрастает, достигает в точке  $P$  максимума и затем, спадая, обрывается. Конец кривой соответствует разрыву стержня; очевидно, что разрыв произойдет уже после того, как растягивающая сила достигнет величины  $F = \sigma_P F$ , соответствующей максимальным напряжениям  $\sigma_P$ .

Получив диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$ , возьмем новый образец того же материала и будем производить новые опыты в таком порядке: постепенно нагружаем образец до некоторого напряжения  $\sigma$ . Затем начинаем разгружать понемногу и все время отмечаем соответствующие значения напряжений и деформаций. Результаты этих опытов показывают однозначную зависимость между силой и деформацией. Если кривая  $\sigma(\varepsilon)$ , полученная при нагрузке образца, совпадает с кривой, получившейся при разгрузке, деформация однозначно определяет напряжение, и наоборот. Такие опыты будем производить один за другим, каждый раз повышая то значение максимального напряжения, после которого начинаем разгрузку. Скоро мы обнаружим, что после некоторого максимального значения  $\sigma_u$  (см. рис. 224) кривые, соответствующие нагрузке, уже не будут совпадать с кривыми, соответствующими разгрузке; при разгрузке при тех же значениях напряжения мы получим большие значения деформаций, и когда разгрузим образец совершенно, то деформации не будут равны нулю — в стержне, как говорят, возникнут *остаточные деформации*.

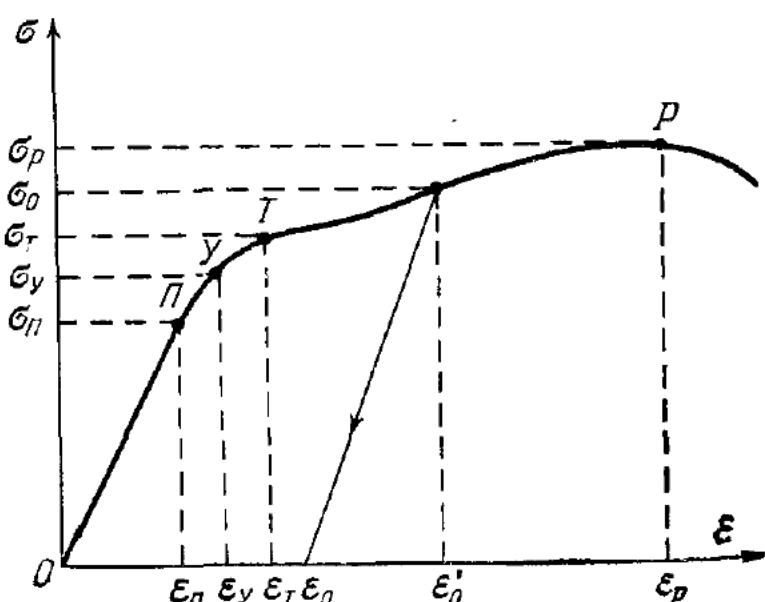


Рис. 224.

Область малых значений деформаций и напряжений, соответствующая участку  $O - \sigma_u$  на кривой напряжение — деформация, является областью *упругих деформаций* данного материала, стали. Только при таких деформациях, которые меньше  $\epsilon_u$ , стальной стержень при растяжении ведет себя, как упругое тело. Между значениями  $\sigma_p$  и  $\sigma_t$  лежит точка, соответствующая *пределу упругости* на растяжение испытуемого образца, или, вернее, испытуемого материала, точка  $U(\sigma_u, \epsilon_u)$  на рис. 224.

Тело является упругим лишь при деформациях, при которых не достигается предел упругости для данного материала. Только в зоне упругих деформаций, или просто в упругой зоне, напряжения и деформации связаны однозначно.

Следует заметить, что при описанном способе определения величины предела упругости значения  $\sigma_u$  и  $\epsilon_u$  будут существенно зависеть от точности измерения сил и деформаций в опытах. При меньшей точности, при грубых опытах, мы получим большие значения  $\sigma_u$  и  $\epsilon_u$  для того же самого материала. Поэтому в лабораториях по испытанию материалов усматриваются считать предел упругости при таком напряжении, по снятии которого остаточные деформации имеют величину, равную определенной малой доле имевшейся деформации, например 0,1%.

Начальный участок кривой  $\sigma(\epsilon)$  (см. рис. 224) представляет собой прямую линию; на этом участке, примерно до точки  $P$ , зависимость между напряжением и деформацией можно представить простым законом прямой пропорциональности:

$$\sigma = E \cdot \epsilon; \quad (81.3)$$

эта зависимость носит название *закона Гука*. Постоянный коэффициент пропорциональности  $E$ , имеющий размерность Н/м<sup>2</sup> или Н/мм<sup>2</sup>, называется *модулем Юнга* и является одной из существенных характеристик данного материала (во многих руководствах и технических справочниках модуль Юнга приведен в единицах кгс/мм<sup>2</sup>). Область, в которой имеет место закон Гука, называется *областью пропорциональности*, а величины  $\sigma_p$  и  $\epsilon_p$ , до которых деформации подчиняются закону Гука, называются *пределом пропорциональности*. Для стали предел пропорциональности лежит очень близко к пределу упругости, а вообще они могут и не совпадать.

Участок кривой деформация — напряжение за пределом упругости называется *областью пластических деформаций*, и при таких деформациях данное испытуемое тело является неупругим.

Если доведем величину деформации до какого-то значения  $\epsilon'_0$ , лежащего в области пластических деформаций, и снимем нагрузку, то величина деформаций немного уменьшится, как примерно показано на рис. 224. При полном снятии нагрузки остаточная деформация  $\epsilon_0$  будет иметь почти такую же величину, как и  $\epsilon'_0$ . Остаточные деформации почти равны начальным деформациям в области пластичности. В этой области обычно различают две характерные точки: *предел текучести* (точка  $T$ , или  $\sigma_t$ ) и *предел прочности* (точка

$P$ , или  $\sigma_p$ ). По достижении предела текучести материал начинает «течь»; это означает, что нагрузка не возрастает, а деформации продолжают увеличиваться. Предел прочности  $\sigma_p$  — это максимальное напряжение, при котором образец еще не разрушается; превышение этого предела ведет к разрушению испытуемого образца.

Деформации при растяжении или сжатии стержня очень просты. Мысленно вырезанный в стержне кубик при такой деформации пре-

вращается в параллелепипед. При этом изменяется и поперечное сечение кубика, а также всего стержня: при растяжении поперечные сечения уменьшаются, а при сжатии увеличиваются, это следует из измерений при опытах.

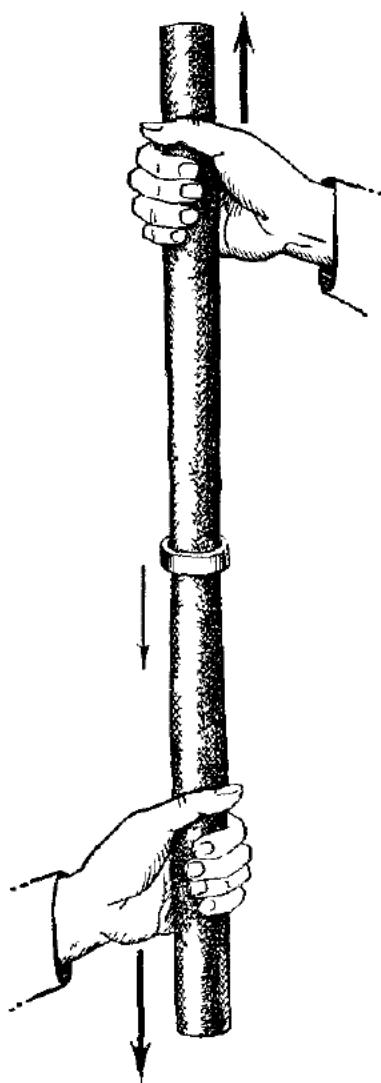


Рис. 225.

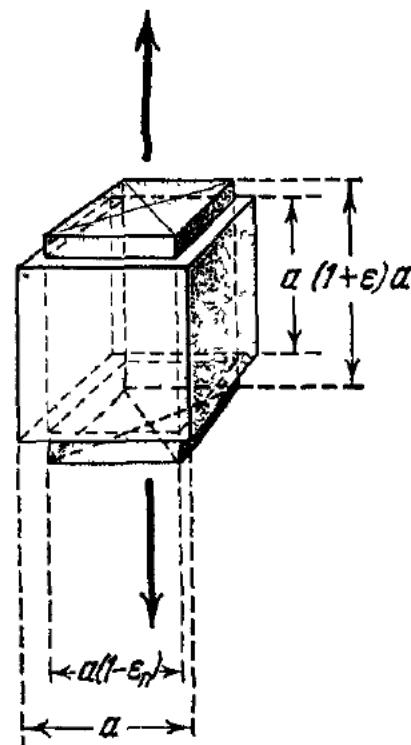


Рис. 226.

Уменьшение диаметра при растяжении просто заметить, растягивая резиновую трубку, на которую предварительно было туго надето металлическое кольцо. Если потянем трубку, держа ее вертикально, то кольцо при некотором натяжении упадет вниз (рис. 225). Такой же опыт можно сделать и с металлическим стержнем на машине для разрыва стержней (см. ниже рис. 228).

Опыт показывает, что уменьшение поперечного сечения стержня пропорционально деформации удлинения  $\varepsilon$ . Если обозначим относительное сокращение ребра, ограничивающего поперечную грань<sup>1)</sup> кубика (рис. 226), через  $\varepsilon_{\text{пп}}$ , то

$$\varepsilon_{\text{пп}} = \mu \varepsilon, \quad (81.4)$$

<sup>1)</sup> Грань, к которой напряжения растяжения нормальны.

где  $\mu$  называют *модулем поперечного сжатия* или *коэффициентом Пуассона*. Модуль поперечного сжатия  $\mu$  является определенной характеристикой упругих свойств материала, как и модуль Юнга.

Из простых рассуждений следует, что модуль поперечного сжатия однородного изотропного материала  $\mu$  не может быть больше  $1/2$ .

Пусть до растяжения стержня некоторый кубик со стороной  $a$ , выделенный внутри него, имел объем  $a^3$  (см. рис. 226). Если ребра кубика параллельны оси стержня, то после деформации объем равен

$$\begin{aligned} a^3 (1 + \epsilon) (1 - \epsilon_{\text{пп}})^2 &= a^3 (1 + \epsilon) (1 - \mu \epsilon)^2 = \\ &= a^3 (1 + \epsilon - 2\mu \epsilon + \mu^2 \epsilon^2 - 2\mu \epsilon^2 + \mu^2 \epsilon^3). \end{aligned} \quad (81.5)$$

При растяжении объем не может уменьшаться, поэтому

$$\epsilon (1 - 2\mu) + \text{очень малые величины} \geq 0; \quad (81.6)$$

отсюда, учитывая, что  $\epsilon > 0$ , и пренебрегая малыми величинами, получаем

$$\mu \leqslant 1/2. \quad (81.7)$$

## § 82. Картина явлений в деформируемом теле. Свойства материалов

Физические процессы, происходящие в деформируемом теле и объясняющие связь между силами и деформациями, очень сложны, и до сих пор еще многие вопросы из этой области недостаточно исследованы.

Описанные выше, в § 81, явления характерны для металлов. Как показывают рентгеноскопические исследования, металлы в обычном состоянии представляют собой совокупность хаотически расположенных относительно друг друга мелких кристалликов. Известно, что в кристаллах атомы располагаются в определенном порядке, образуя кристаллическую решетку. Например, кристаллическая решетка алюминия состоит из совокупности одинаковых ячеек, прилегающих друг к другу. Каждая ячейка решетки представляет собой куб, по углам которого расположены атомы, причем в центре каждой грани куба находится еще один атом. Такое строение кристаллической решетки называется кубической решеткой с центрированными гранями.

Очевидно, что если бы весь образец материала состоял из одного кристалла (монокристалл), то упругие свойства его по различным направлениям, вообще говоря, были бы различными. Такие тела называют *анизотропными*. В действительности же мелкие кристаллики в металле хаотически расположены и совершенно различно ориентированы относительно друг друга, примерно так, как схематически показано на рис. 227. Поэтому упругие свойства

металла по различным направлениям одинаковы и металл представляет собой *изотропное* тело. При пластической деформации монокристаллов наблюдается *скольжение* вдоль некоторых определенных плоскостей. Части кристалла легче всего двигаются относительно друг друга по этим *плоскостям скольжения* и остаются в таком положении после снятия нагрузки. По-видимому, то же самое происходит с мелкими кристалликами, составляющими тело, при пластических деформациях.

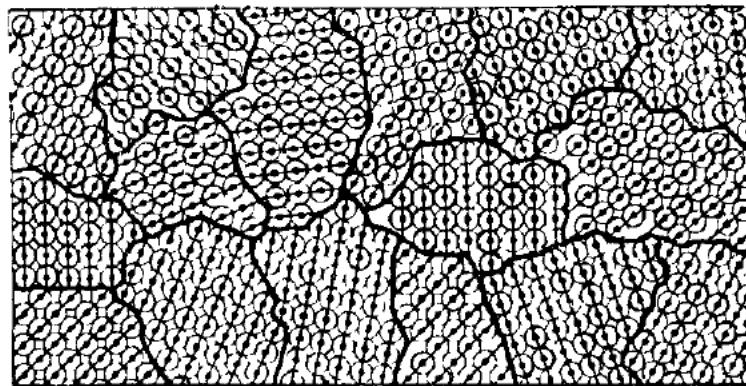


Рис. 227.

Картину деформаций в металле грубо можно представить себе так. В зоне упругих деформаций кристаллики изменяют свою форму, не сдвигаясь и не разрушаясь. После снятия нагрузки они возвращаются в прежнее состояние. В зоне пластических деформаций происходит, кроме изменений формы кристалликов, еще и скольжение в них, а также смещение их относительно друг друга и разламывание. Эти изменения уже не могут исчезнуть по снятии нагрузки, и тело остается деформированным, в нем возникают остаточные деформации.

Пластические деформации имеют существенное значение в технологии: штамповка, изгиб, ковка изделий из металлов становятся возможными благодаря пластическим деформациям. Очевидно, что если бы металл имел только упругие деформации, то указанными способами из металла ничего нельзя было бы изготовить.

Отметим, что образец, доведенный до деформаций, соответствующих зоне пластичности, и разгруженный, после этого обладает, вообще говоря, измененными упругими свойствами. Если мы будем его снова нагружать, то увидим, что предел пропорциональности увеличивается. Например, стальная проволока обычно при изготовлении (волочении) проходит такую механическую обработку, которая в значительной степени повышает ее прочность по сравнению с прочностью стали того же сорта.

Механические свойства металлов и других материалов определяют по растяжению стержней определенного размера и формы и обработанных определенным образом. Растяжение производят на специальных машинах для испытания материалов (рис. 228), обычно действующих по принципу гидравлического пресса. По давлению в цилиндре поршня определяют растягивающую силу, а

смещение поршня, измеренное точным прибором, дает возможность определить деформацию стержня.

Принципиально таким же способом определяют зависимость между деформациями и напряжениями при сжатии стержней, только для этой цели берут стержни короче и толще во избежание изгиба стержня при сжатии. Для металлов при сжатии модуль Юнга имеет ту же величину, что и при растяжении; на рис. 229, а представлена характерная кривая деформации — напряжение для обычной стали. При сжатии предел пропорциональности имеет

другое значение, чем при растяжении, и характер кривой в зоне пластических деформаций несколько иной.

Для других материалов кривая напряжение — деформация имеет, вообще говоря, совсем другой вид. Например, эта кривая для чугуна показана на рис. 229, б. Для чугуна почти нет зоны пластических деформаций при растяжении. По достижении предела упругости имеет место почти незаметная зона текучести, и сразу начинается разрушение образца. Материалы, имеющие диаграмму  $\sigma$  ( $\epsilon$ ), подобную диаграмме чугуна, называются *хрупкими* материалами

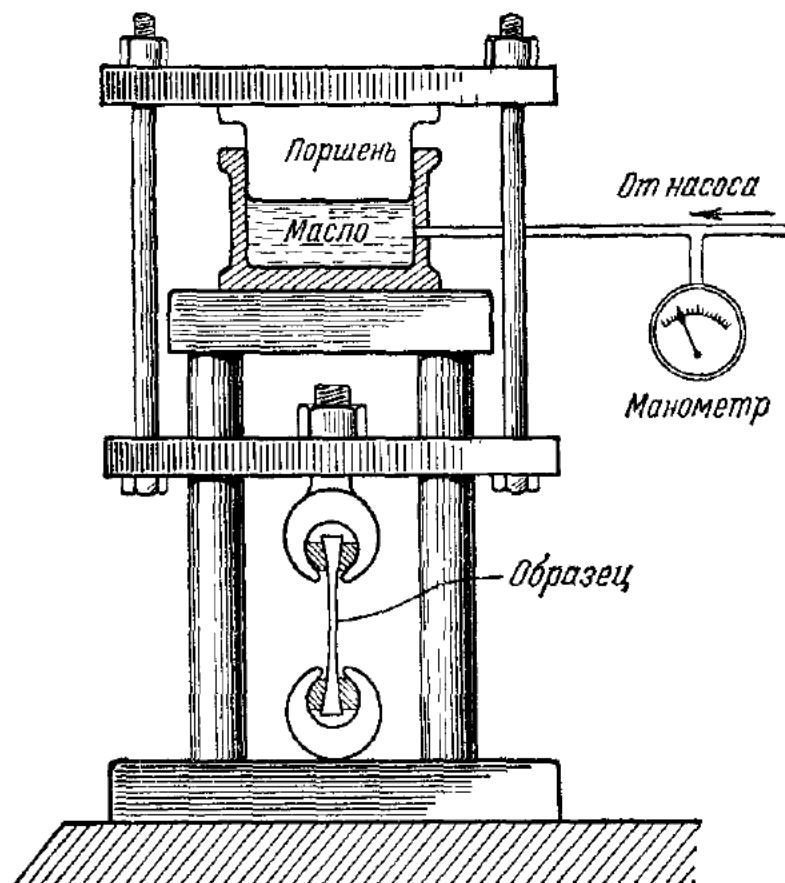


Рис. 228.

материями в отличие от *вязких* материалов, которые имеют, подобно стали, довольно значительную зону пластических деформаций. Это различие в свойствах вязких и хрупких материалов очень важно знать при практическом применении того или иного материала. Если в какой-то машине при ее работе напряжения в некоторых местах и будут переходить предел упругости, то это не поведет к разрушению машины, сделанной из вязкого материала, машина же, сделанная из хрупкого материала, разрушится.

Заметим, что при сжатии чугун почти не имеет зоны пропорциональности, зависимость напряжения от деформации даже при малых значениях  $\epsilon$  нелинейна. Для сравнения на рис. 229, в и г приведены кривые зависимости напряжения от деформации для некоторых материалов. Такие хрупкие материалы, как мрамор, бетон, значительно лучше «работают», как говорят в технике, на

сжатие, чем на растяжение, т. е. они имеют значительно более высокие пределы прочности при сжатии, чем при растяжении.

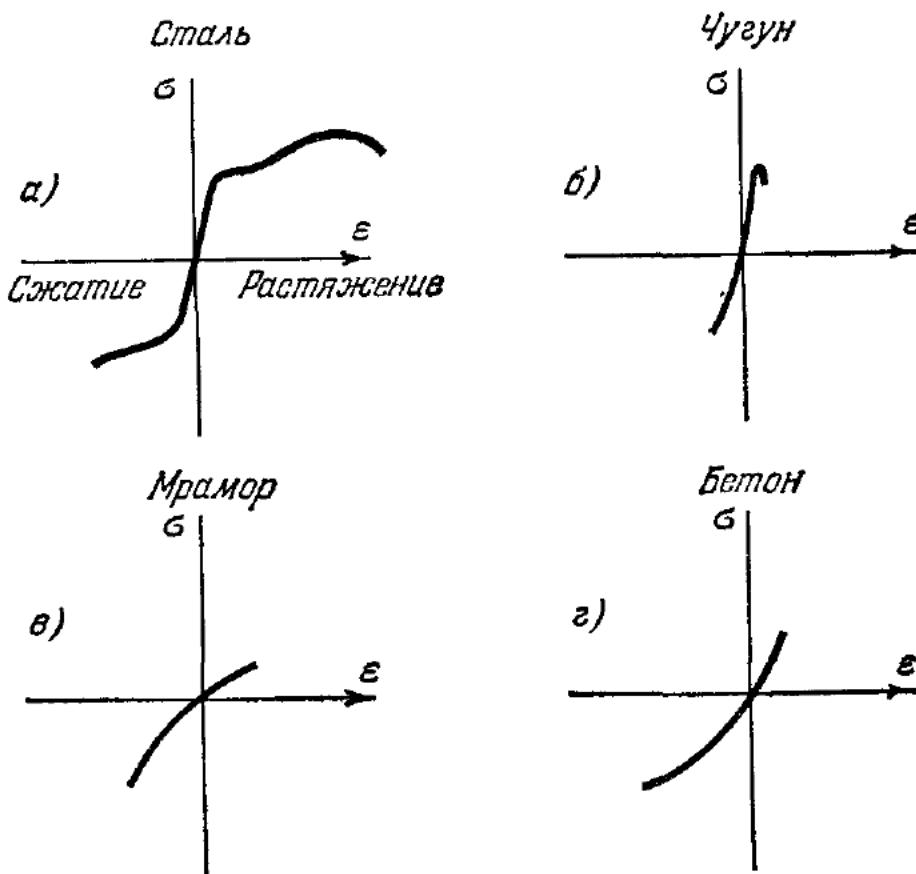


Рис. 229.

Только зная упругие свойства материалов, можно достаточно прочно и не громоздко построить машину, сооружение и т. п.

### § 83. Внутренние силы и напряжения

Усилия и напряжения во всяком твердом теле, «нагруженном» внешними силами, можно ясно представить, если мысленно выделить из всего тела некоторую часть его. На эту «выделенную» часть со стороны остальных частей тела будут действовать силы, или на поверхности выделенной части имеют место напряжения. Напряжения всегда подчинены определенным условиям, вытекающим из того, что силы, приложенные к данному выделенному объему, должны быть равны нулю в случае покоя или произведению массы этого объема на его ускорение при движении; кроме того, должны выполняться совершенно аналогичные условия относительно моментов этих сил. Таким образом, если рассматривать проекции сил и моментов на три координатные оси, то будем иметь *шесть* уравнений, которым должны будут удовлетворять силы, действующие на данный объем: три — для проекций сил, три — для моментов вокруг всех трех осей. Эти условия, очевидно, никак не зависят от деформации и имеют один и тот же вид как для упругой зоны, так и для зоны пластических деформаций.

Рассмотрим напряжения в простейшем случае растяжения однородного стержня. Представим себе, что из него вырезан кусочек в виде призмочки так, что основания ее перпендикулярны к оси стержня (рис. 230, а). Тогда на четырех гранях призмочки напряжения будут равны нулю и только на ее основаниях будут иметь место одинаковые напряжения  $\sigma_0$ , противоположно направленные и нормальные к основаниям. Они равны

$$\sigma_0 = \frac{F}{S}, \quad (83.1)$$

где  $F$  — усилие в поперечном сечении, а  $S$  — площадь поперечного сечения стержня. Если стержень однороден, то напряжения  $\sigma_0$  будут одинаковы по всему поперечному сечению стержня и одинаковы в любом поперечном сечении, когда стержень находится в покое.

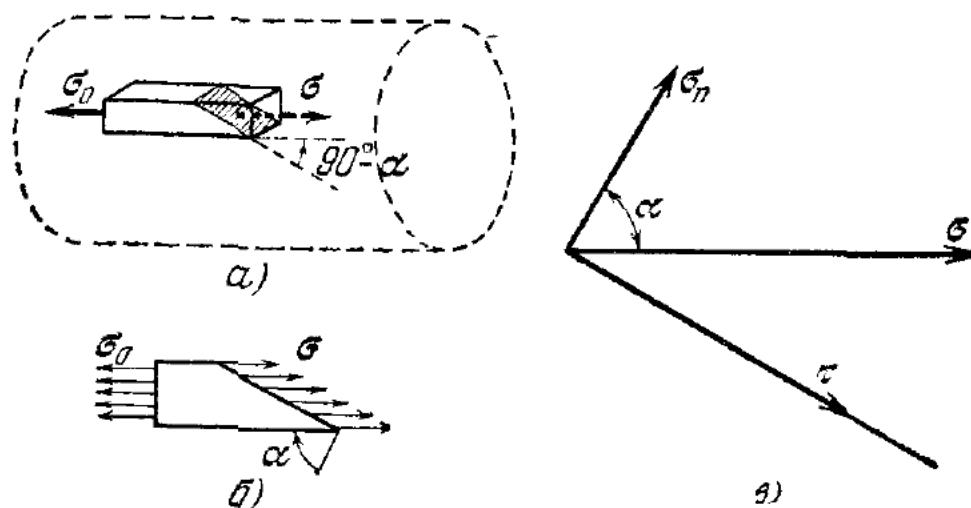


Рис. 230.

В общем случае в твердом теле напряжение будет направлено под некоторым углом к тому участку поверхности, к которому оно относится. В нашем случае можно представить выделенным объем совсем другого вида; например, такой, который получится после того, как призмочку рассечем плоскостью, нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с осью стержня (рис. 230, б). Тогда напряжение  $\sigma$  на косом сечении призмочки уже не будет равно  $\sigma_0$ , причем  $\sigma$  будет направлено по оси стержня и под углом  $90^\circ - \alpha$  к площадке косого сечения. Величину напряжения  $\sigma$  определяем из условий равновесия выделенного объема. Очевидно, что силы, действующие на выделенный объем, равны и противоположны; отсюда

$$\sigma_0 S = \sigma \frac{S}{\cos \alpha},$$

или

$$\sigma = \sigma_0 \cos \alpha, \quad (83.2)$$

где  $S$  — площадь нормального сечения призмочки.

Напряжение  $\sigma$  имеет нормальную к поверхности сечения составляющую  $\sigma_n$  и тангенциальную  $\tau$  (рис. 230, в). Нормальная составляющая равна

$$\sigma_n = \sigma \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (83.3)$$

а тангенциальная

$$\tau = \sigma \sin \alpha = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (83.4)$$

Они зависят от угла  $\alpha$  между нормалью площадки сечения и осью стержня. Выбирая площадку сечения под различными углами  $\alpha$ , мы будем в соответствии с формулами (83.2), (83.3) и (83.4) получать различные значения напряжений. Тангенциальная составляющая будет иметь наибольшее значение, равное  $\sigma_0/2$ , в том случае, когда площадка составляет угол  $45^\circ$  с осью стержня; нормальная составляющая в этом случае будет, очевидно, равна тангенциальной (рис. 231).

Таким образом, анализируя простейшее напряженное состояние твердого тела — растяжение, можно себе представить, насколько сложна в общем случае картина напряжений в твердом теле.

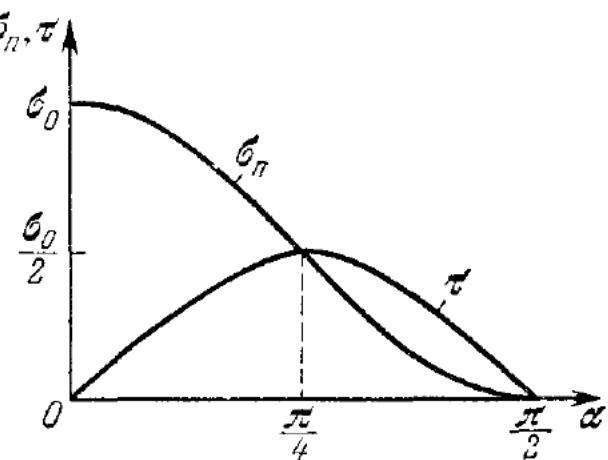


Рис. 231.

## § 84. Напряжения и деформации при сдвиге

Чистая деформация сдвига имеет место, например, при закручивании однородного круглого стержня, когда одно основание стержня поворачивается вокруг оси стержня на некоторый угол  $\varphi$  относительно другого основания. Происходящую при этом деформацию можно наглядно представить, если закрутить резиновый стержень (или трубку), на поверхность которого предварительно была нанесена сетка ортогональных линий (рис. 232, а). При таком закручивании линии, идущие по окружности цилиндра, не изменяют своей формы, а линии, идущие вдоль оси, принимают винтообразную форму (рис. 232, б).

Стержень можно разбить мысленно на достаточно тонкие диски, такие, что при закручивании отрезок винтовой линии можно считать прямым внутри диска. Вырежем из диска кольцо, а из кольца — небольшой кубик (см. далее рис. 235, б). Так как диск очень тонок, то при деформации стержня верхняя грань кубика сдвинется относительно нижней (боковые грани покоятся), угол между боковыми гранями и нижней гранью будет отличаться от прямого.

Деформация кубика является *чистой деформацией сдвига*, при которой изменяются только углы параллелепипеда, вырезанного соответствующим образом из деформируемого тела.

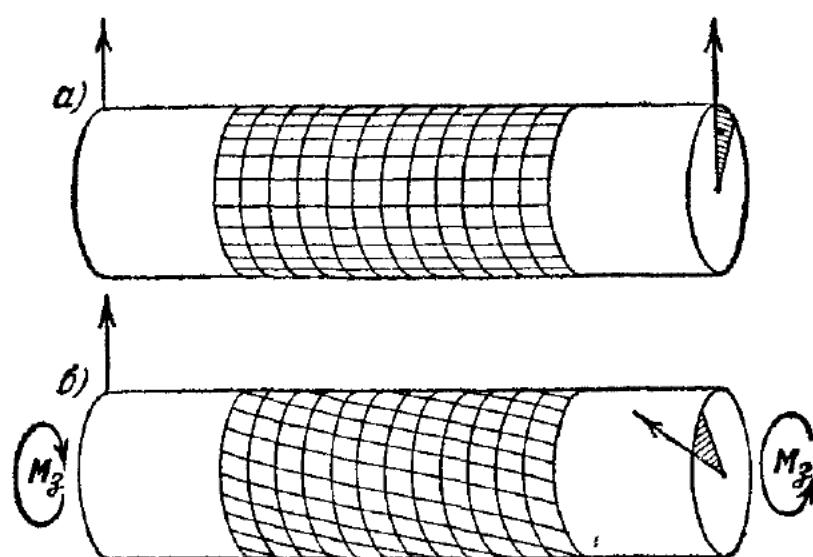


Рис. 232.

Деформация сдвига возникает только при касательных напряжениях на гранях параллелепипеда. Допустим, что мы имеем тело в виде куба с ребром в 1 см, к четырем граням которого приложены равномерно распределенные касательные усилия, как показано

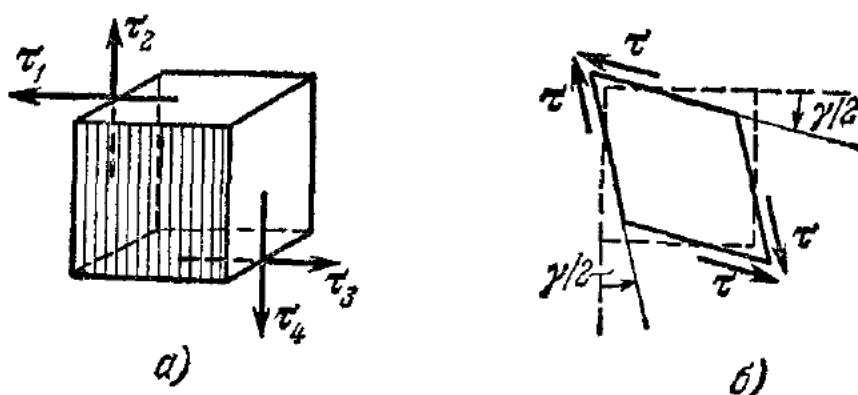


Рис. 233.

на рис. 233, а. Очевидно, что для соблюдения условий равновесия кубика необходимо равенство всех касательных напряжений:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau.$$

Под действием касательных усилий прямые углы между соответствующими гранями кубика уменьшаются на малый угол  $\gamma$  (рис. 233, б). Величина деформации кубика, определяемая углом  $\gamma$ , закономерно связана с величиной касательных напряжений  $\tau$  на соответствующих ребрах кубика.

Опыты показывают, что связь между  $\gamma$  и  $\tau$  для данного материала примерно такая же, как и зависимость между  $\epsilon$  и  $\sigma$  для того же материала (рис. 234). В зоне упругости имеется также линейный участок, на котором

$$\tau = G\gamma. \quad (84.1)$$

Коэффициент  $G$ , имеющий размерность  $\text{Н}/\text{м}^2$ , называется *модулем сдвига*.

Теперь определим деформации и усилия, возникающие при закручивании стержня круглого сечения; об этих деформациях мы уже немножко говорили выше. Пусть стержень диаметром  $D$  и длиной  $l_0$  сделан из материала, модуль сдвига которого равен  $G$ , и закручен моментом  $M_3$  на угол  $\phi_0$  (это значит, что основания его повернулись на угол  $\phi_0$  относительно друг друга).

Прежде всего отметим, что в любом сечении стержня, перпендикулярном к оси, момент внутренних усилий относительно оси стержня равен  $M_3$  — моменту сил, закручивающих стержень. Действительно, представим себе мысленно отрезанной какую-то часть  $B$  закрученного стержня (рис. 235, а); так как часть  $B$  находится в покое, то моменты всех сил, действующих на нее, равны нулю. С одного конца

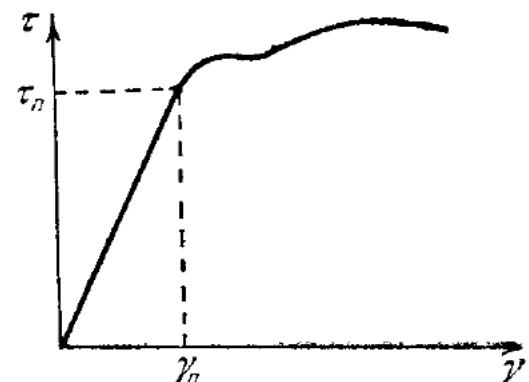


Рис. 234.

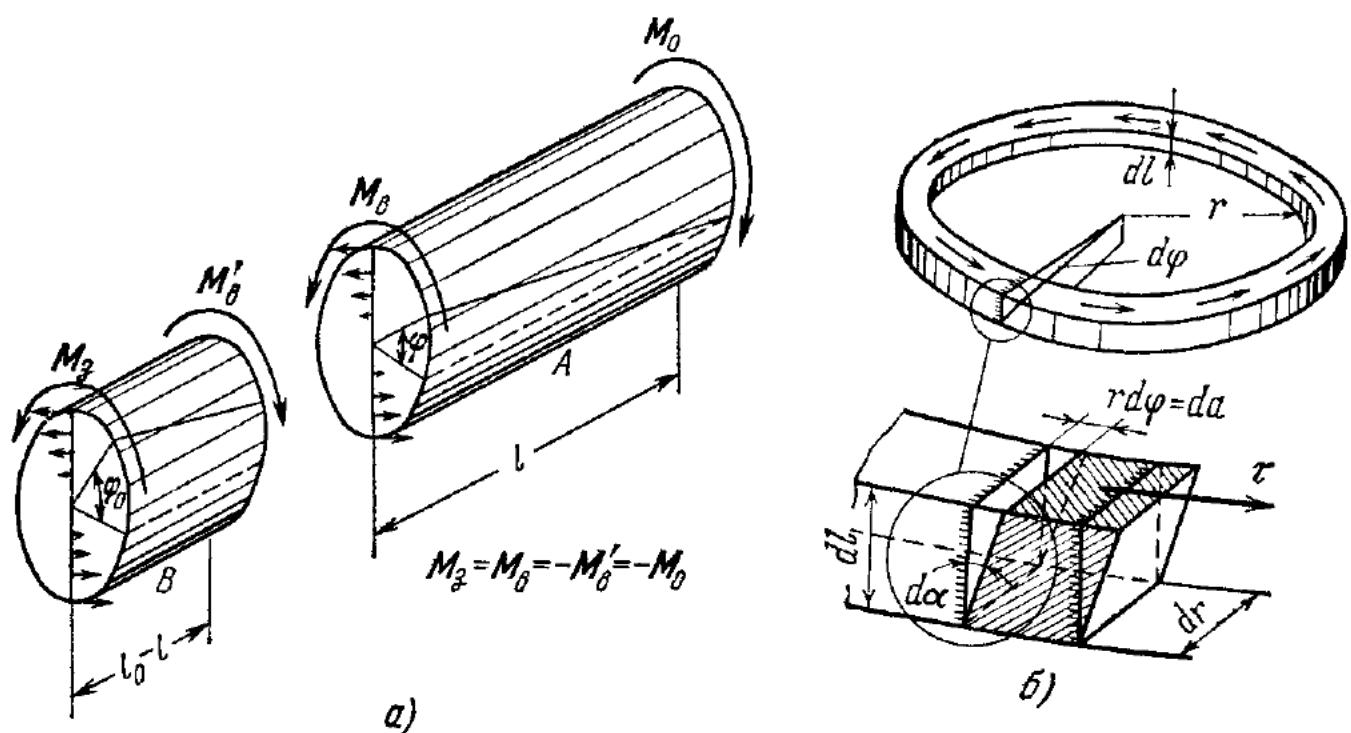


Рис. 235.

на эту часть действует момент внешних сил  $M_3$ , а с другого — момент внутренних усилий  $M'_3$ , касательных к сечению; величина  $M'_3$  равна  $M_3$  и противоположна по знаку.

Далее определим, как распределены касательные напряжения в сечении стержня и как они связаны с деформацией. Вырежем из стержня диск достаточно малой высоты  $dl$  на расстоянии  $l$  от неподвижного основания и положим, что нижнее основание этого диска при закручивании повернулось на угол  $\phi$ , а верхнее — на угол  $\phi + d\phi$ . Из этого диска вырежем кольцо с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$  (рис. 235, б). Тогда все кубики, вырезанные из кольца, будут иметь одинаковую деформацию сдвига, на один и тот же угол  $d\alpha$ . Так как верхнее основа-

ние диска поворачивается относительно нижнего на малый угол  $d\phi$ , не деформируясь, то очевидно, что угол сдвига  $d\alpha$  будет пропорционален радиусу кольца  $r$ . Смещение верхней поверхности кольца относительно нижней будет равно

$$da = dl \quad d\alpha = r \, d\phi. \quad (84.2)$$

Поэтому угол сдвига

$$d\alpha = r \frac{d\phi}{dl}, \quad (84.3)$$

или угол сдвига кольца равен радиусу кольца, умноженному на производную от угла закручивания стержня по его длине  $\frac{d\phi}{dl}$ . Теперь определим касательное усилие на поверхности кольца площадью  $2\pi r dr$ ; напряжение  $\tau$  по формулам (84.1) и (84.3) равно

$$\tau = G \, d\alpha = Gr \frac{d\phi}{dl}, \quad (84.4)$$

поэтому усилие на поверхности кольца составляет

$$\tau \cdot 2\pi r dr = 2\pi r^2 G \frac{d\phi}{dl} dr. \quad (84.5)$$

Момент этого усилия относительно оси стержня равен

$$dM = 2\pi r^3 G \frac{d\phi}{dl} dr. \quad (84.6)$$

Теперь сложим моменты усилий по всей поверхности диска, или проинтегрируем (84.6) по  $r$ :

$$M = 2\pi G \frac{d\phi}{dl} \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi D^4}{25} G \frac{d\phi}{dl}. \quad (84.7)$$

Этот момент должен быть равен моменту  $M_3$ , закрывающему стержень, ибо моменты, приложенные к любым двум соседним дискам, равны друг другу.

Уравнение (84.7) показывает, что если стержень однороден, то производная угла закручивания стержня  $\frac{d\phi}{dl}$  постоянна вдоль стержня. Угол закручивания торцевых сечений стержня, находящихся на расстоянии  $l_0$  друг от друга, равен

$$\Phi_0 = l_0 \frac{d\phi}{dl}, \quad \text{или} \quad \frac{d\phi}{dl} = \frac{\Phi_0}{l_0}. \quad (84.8)$$

Подставляя выражение (84.8) в формулу (84.7), получим зависимость угла закручивания стержня  $\Phi_0$  от закрывающего момента  $M_3$  в следующем виде:

$$M_3 = M_0 = \frac{\pi D^4}{25} G \frac{\Phi_0}{l_0}. \quad (84.9)$$

Величина  $\frac{\pi D^4 G}{32 l_0}$  называется коэффициентом жесткости стержня на кручение.

При передаче валами крутящего момента приходится выбирать достаточно большой диаметр вала  $D$  во избежание нежелательного закручивания вала.

## § 85. Напряжения в упругом теле. Общий случай

Рассмотренные в предыдущих параграфах примеры показывают, что на различных площадках, проходящих через определенную точку нагруженного тела, действуют различные напряжения, но они закономерно связаны друг с другом. В самом общем случае, при любом нагружении, совокупность всех возможных напряжений в окрестности точки (на всех площадках, проходящих вблизи точки) определяется шестью величинами (числами), которые представляют собой компоненты симметричного тензора второго ранга. Тензорами удобно пользоваться при описании напряжений и других физических величин.

Для того чтобы представить себе связь между напряжениями на различных площадках, проходящих вблизи данной точки, рассматривают равновесие бесконечно малого тетраэдра, вырезанного из тела вблизи этой точки. Предположим, что в рассматриваемой точке тела расположено начало прямоугольной системы координат (рис. 236), будем отмечать оси цифрами 1, 2, 3 и проекции векторов на эти оси — соответствующими цифровыми индексами. Площадка, нормаль к которой обозначена единичным вектором  $\nu$ , проходит вблизи точки  $O$  и образует вместе с координатными плоскостями тетраэдр  $ABCO$ .

На грани этого тетраэдра действуют усилия со стороны остальных частей тела. Напишем условие равновесия выделенного объема тетраэдра  $ABCO$  под действием этих усилий. Предварительно заметим, что площадь грани  $ABC$ , равная  $dS$ , связана с  $dS_1$  — площадью грани, нормальной к оси 1, следующим равенством:  $dS_1 = v_1 dS$ , где  $v_1$  — косинус угла между  $\nu$  и осью 1. Аналогично,  $dS_2 = v_2 dS$  и  $dS_3 = v_3 dS$ ; здесь  $dS_1$ ,  $dS_2$  и  $dS_3$  — площади граней тетраэдра, нормальных к осям 1, 2 и 3 соответственно.

Обозначим усилие на площадке  $dS$  через  $\sigma_\nu dS$ , где  $\sigma_\nu$  — напряжение на этой площадке (вектор). На каждой площадке можно рассматривать два противоположных усилия: одно представляет собой силы, приложенные со стороны частиц, находящихся по одну сторону площадки, к частицам, находящимся по другую сторону (например  $\sigma dS$  на рис. 237, a), второе ( $-\sigma dS$ ) представляет собой «противодействующее» усилие. По определенному условию различают «положительную» и «отрицательную» стороны площадки.

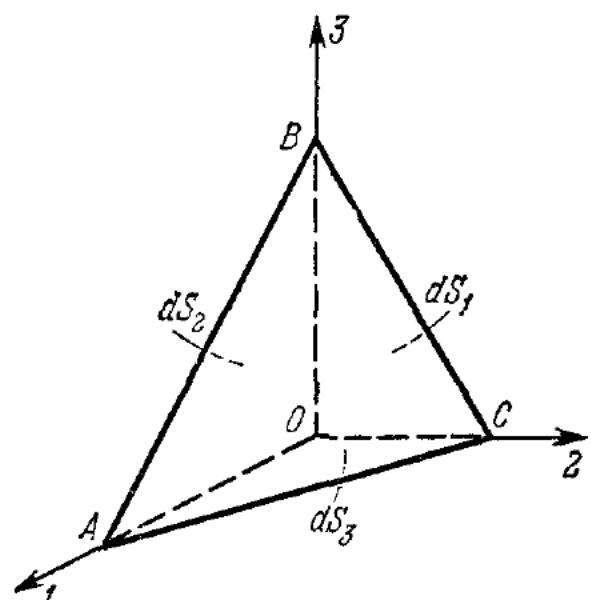


Рис. 236.

Будем записывать в наших уравнениях усилия  $\sigma dS$ , действующие с положительной стороны на отрицательную. Заметим, что усилия и напряжения могут быть «растягивающими» (рис. 237, а) и «сжимающими» (рис. 237, б); конечно, здесь имеется в виду нормальная

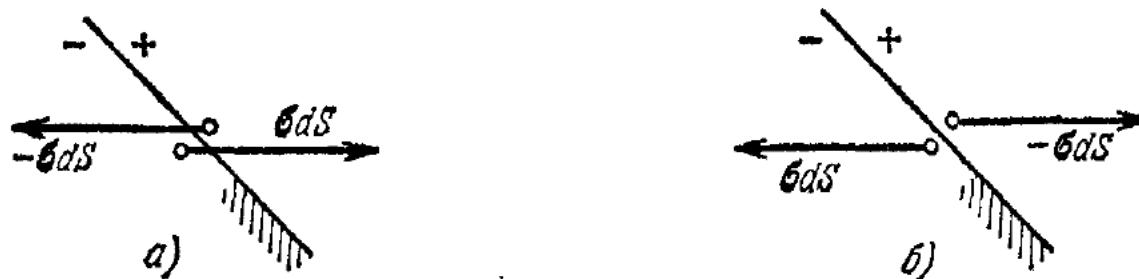


Рис. 237.

к площадке компонента усилия. Обычно растягивающие нормальные напряжения считают положительными, а сжимающие — отрицательными. Положительной стороной площадок на координатных плоскостях считают ту сторону, в которую направлена третья ось, единичный вектор этой оси направлен от минуса к плюсу.

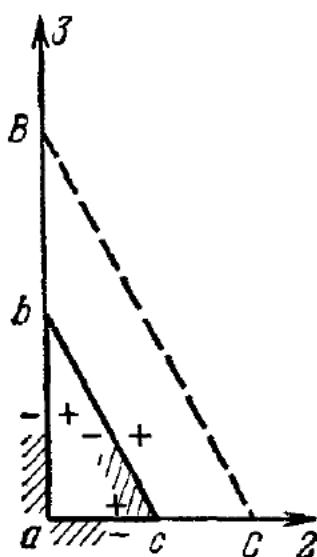


Рис. 238.

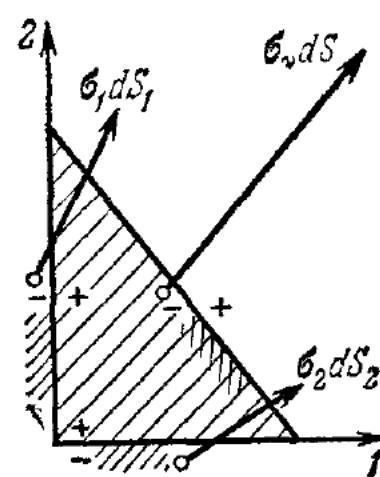


Рис. 239.

Положительная сторона площадки  $dS$  находится снаружи тетраэдра (см. рис. 238, где показано сечение тетраэдра плоскостью  $abc$ , нормальной к оси 1).

Равновесие всех сил, действующих на поверхность тетраэдра, будет иметь место при условии

$$\sigma_3 dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 = 0 \quad (85.1)$$

(здесь учитываются знаки напряжений). Ради наглядности покажем на рис. 239 векторы усилий в «плоском» случае, когда все усилия параллельны плоскости (1, 2); в этом случае вместо тетраэдра можно взять призмочку (сечение которой показано), а все векторы лежат в плоскости. Очевидно, уравнение (85.1) здесь имеет вид

$$\sigma_3 dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 = 0.$$

Силами, приложенными к частичкам, находящимся внутри объема тетраэдра (массовыми силами), пропорциональными плотности вещества (силами тяготения, силами инерции), можно пренебречь, так как объем тетраэдра — бесконечно малая величина третьего порядка, а поверхность его — второго порядка.

Если разделим равенство (85.1) на  $dS$ , то оно примет такой вид:

$$\sigma_v = v_1 \sigma_1 + v_2 \sigma_2 + v_3 \sigma_3, \quad (85.2)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — направляющие косинусы нормали к площадке  $dS$ . Это выражение по форме аналогично выражению

$$a_v = v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 = v a,$$

представляющему определение вектора;  $a_1, a_2, a_3$  — проекции вектора — скаляры. Зная три проекции на оси координат, определяют проекцию вектора на любое направление  $v$ .

Формула (85.2) может служить определением тензора второго ранга: три вектора  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  определяют вектор  $\sigma_v$  — напряжение на любой площадке с нормалью  $v$ . Напряжение в окрестности точки известно на любой площадке с нормалью  $v$ , если даны три вектора напряжений на трех площадках, нормальных к осям координат. Три вектора представляют совокупность девяти чисел — проекций этих векторов на оси координат. Запишем векторы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в компонентах:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} e_1 + \sigma_{21} e_2 + \sigma_{31} e_3, \\ \sigma_2 &= \sigma_{12} e_1 + \sigma_{22} e_2 + \sigma_{32} e_3, \\ \sigma_3 &= \sigma_{13} e_1 + \sigma_{23} e_2 + \sigma_{33} e_3. \end{aligned} \quad (85.3)$$

Заметьте порядок индексов: первый — номер оси, второй — площадки,  $e_1, e_2, e_3$  — единичные векторы осей координат 1, 2, 3 соответственно. Компоненты с одинаковыми индексами:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  — *нормальные* к площадке напряжения, с различными индексами:  $\sigma_{12}, \sigma_{31}, \dots$  — *касательные* напряжения.

Подставим значения векторов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  из (85.3) в равенство (85.2) и, умножая его скалярно поочередно на  $e_1, e_2, e_3$ , найдем проекции вектора  $\sigma_v$  на оси 1, 2, 3, учитывая, конечно, ортогональность осей (или  $e_i e_k = 1$ , если  $i = k$ , и  $e_i e_k = 0$ , если  $i \neq k$ ). Выполнив выкладки, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{1v} &= \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3, \\ \sigma_{2v} &= \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3, \\ \sigma_{3v} &= \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3. \end{aligned} \quad (85.4)$$

Эту систему равенств можно записать с помощью тензора  $\mathcal{T}$  так:

$$\sigma_v = \mathcal{T} v, \quad (85.5)$$

т. е. вектор напряжения на площадке с нормалью  $\nu$  равен произведению тензора  $\mathcal{T}$  на вектор нормали  $\nu$ . Тензор  $\mathcal{T}$  представляется матрицей

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (85.6)$$

его компонентами являются проекции векторов  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  на оси координат. Формулы (85.2), (85.4), (85.6) выражают одно и то же.

Обратите внимание на порядок записи компонент  $\sigma_{ik}$  в (85.4) и (85.5). Можно показать, что при преобразовании (повороте) системы координат компоненты тензора  $\sigma_{ik}$  преобразуются, как произведения соответствующих координат точки, как  $x_i x_k$ . Это значит, что совокупность чисел  $\sigma_{ik}$  представляет собой тензор.

Условия (85.1) необходимы, но недостаточны для равновесия тетраэдра  $ABCO$ . Нужно потребовать еще равенства нулю моментов всех сил, действующих на поверхность тетраэдра относительно любой оси<sup>1)</sup>. Для простоты рассуждений рассмотрим равенство нулю моментов сил относительно оси, параллельной координатной оси 3 и проходящей через центр тяжести площадки  $dS$ . Вследствие малости площадки  $dS$  считаем напряжение постоянным по всей площадке, поэтому равнодействующая всех усилий на каждой площадке  $dS$  приложена в центре тяжести площадки. На рис. 240 изображен вид на тетраэдр по оси 3 сверху. Легко сообразить, что выбранная ось (точка  $c$  на рис. 240) проходит через центр тяжести площадки  $dS_3$ , поэтому усилия  $\sigma_1 dS_1$  и  $\sigma_3 dS_3$  проходят через ось и не дадут моментов. Остается рассмотреть моменты усилий  $\sigma_1 dS_1$  и  $\sigma_2 dS_2$ . Очевидно:

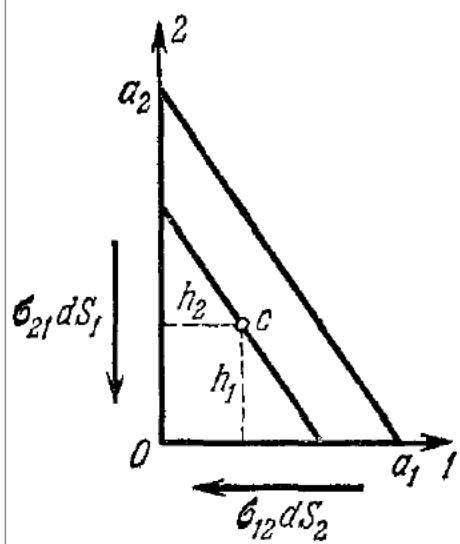


Рис. 240.

равнодействующая всех усилий на каждой площадке  $dS$  приложена в центре тяжести площадки. На рис. 240 изображен вид на тетраэдр по оси 3 сверху. Легко сообразить, что выбранная ось (точка  $c$  на рис. 240) проходит через центр тяжести площадки  $dS_3$ , поэтому усилия  $\sigma_1 dS_1$  и  $\sigma_3 dS_3$  проходят через ось и не дадут моментов. Остается рассмотреть моменты усилий  $\sigma_1 dS_1$  и  $\sigma_2 dS_2$ . Очевидно:

$$\sigma_{21} dS_1 h_1 - \sigma_{12} dS_2 h_2 = 0,$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния оси  $c$  от площадок  $dS_1$  и  $dS_2$  соответственно. Если ребра тетраэдра  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  направлены по каждой оси, то  $dS_1 = 1/2 a_2 a_3$ ,  $dS_2 = 1/2 a_1 a_3$ . Учитывая это и то, что  $a_2 = 3h_2$ ,  $a_1 = 3h_1$ , находим

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}. \quad (85.7)$$

<sup>1)</sup> Так как сумма всех сил, действующих на тетраэдр, равна нулю, то она может быть представлена парой сил. А момент пары относительно любой точки одинаков. Следовательно, одинаков и момент относительно любых параллельных осей.

Компоненты касательных напряжений на площадках  $dS_1$  и  $dS_2$ , нормальные к оси 3, направлены к ребру по этой оси (или от ребра) и *равны* друг другу.

Аналогичным путем можно показать, что

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}. \quad (85.8)$$

Таким образом, для определения напряжения в окрестности точки нужно задать не девять, а только *шесть* чисел; тензор напряжения  $\mathcal{T}$  *симметричный*, его компоненты с разными индексами попарно равны друг другу (см. (85.7), (85.8)); иногда это называют условием *парности* касательных напряжений.

Парность касательных напряжений — важное обстоятельство, так как систему координат в данной точке тела можно выбрать как

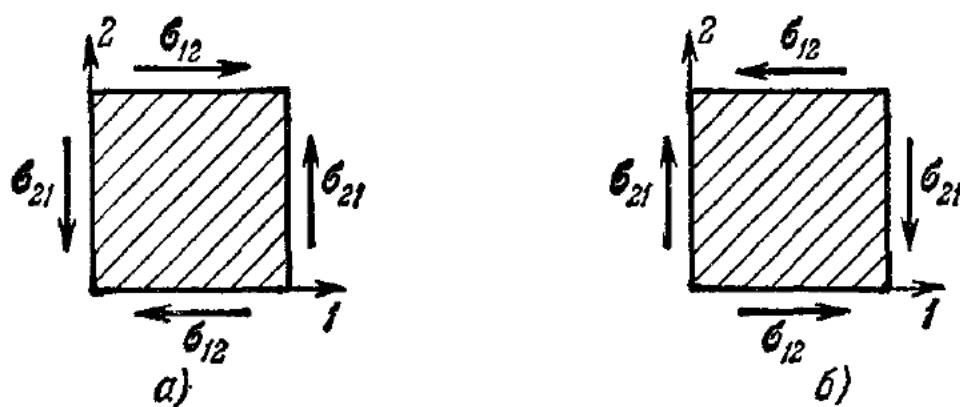


Рис. 241.

угодно. Поэтому компоненты касательных напряжений на двух пересекающихся под прямым углом малых площадках, компоненты по линии, нормальной к ребру пересечения площадок, всегда *равны* друг другу и направлены к ребру или от ребра. Тогда касательные напряжения на сторонах любого достаточно малого кубика, вырезанного в теле, закономерно связаны друг с другом. Так, например, компоненты касательных напряжений, параллельные плоскости (1, 2), на гранях, нормальных к этой плоскости, будут *равны* и направлены так, как показано на рис. 241. Касательные напряжения в случае (a) считаются положительными, а в случае (b) — отрицательными, так как компоненты на положительных сторонах площадок в случае (a) направлены по осям координат, а в случае (b) — против. Все то же самое можно сказать относительно компонент касательных напряжений, параллельных плоскости (2, 3) и плоскости (3, 1).

Из этого следует, что сумма касательных усилий, действующих на любой маленький кубик, равна нулю. Поэтому нормальные усилия, действующие на грани кубика, должны взаимно уравновешиваться, независимо от касательных усилий. Например, на рис. 242 показаны нормальные напряжения на гранях, параллельных

оси 3. Напряжения  $\sigma_{22}$  *положительны* (растягивающие), напряжения  $\sigma_{11}$  *отрицательны* (сжимающие).

Очень важно отметить, что в любой точке напряженного тела среди всех возможных направлений  $\nu$  всегда найдется по крайней мере три взаимно перпендикулярных направления, для которых

вектор напряжения будет совпадать с нормалью  $\nu$ , или касательные напряжения на этих площадках равны нулю. Такие направления называются *осами главных напряжений*, и если эти оси принять за координатные, то тензор напряжений представляется только тремя числами.

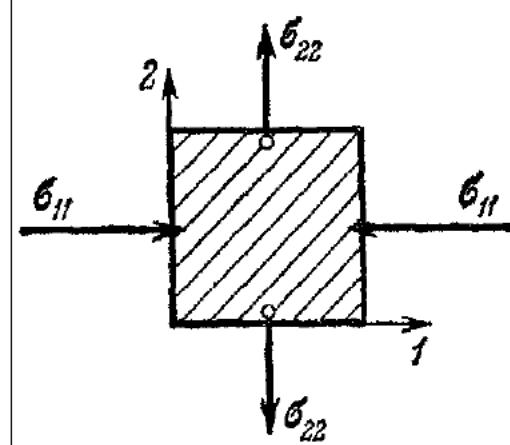


Рис. 242.

Оси главных напряжений находятся таким же путем, как и главные оси симметричного тензора момента инерции (§ 64), отличие только в том, что для тензора момента инерции моменты относительно главных осей — всегда положительные величины, здесь же напряжения вдоль главных осей могут быть как положительными (растягивающими), так и отрицательными (сжимающими выделенный объемчик). Поэтому, если построим поверхность, аналогичную эллипсоиду инерции, то, вообще говоря, получим центральную поверхность второго порядка, т. е. поверхность эллипсоида или гиперболоида.

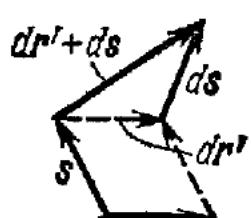
### § 86. Малые деформации тела

Под действием внешних сил частицы твердого тела каким-то образом изменяют свое расположение относительно друг друга. Тело меняет свою «форму», эти изменения называются *деформациями* тела.

Под действием определенной нагрузки каждая частица смещается на некоторый вектор  $s$ . Если все частицы тела переместятся на постоянный вектор  $s$ , то никакой деформации тела не произойдет, оно просто переместится на вектор  $s$ . Деформация произойдет, если различные частицы переместятся на различные векторы  $s$ , т. е. вектор  $s$  будет функцией положения частицы до деформации  $r$ ; частица в точке  $r$  переместится на  $s$ , а в точке  $r + dr$  — на  $s + ds$  (рис. 243). Величина  $ds$  характеризует деформацию, точнее — деформацию характеризует соотношение между  $ds$  и  $dr$ . Когда  $ds$  линейно зависит от  $dr$ , связь между  $ds$  и  $dr$  определяется *тензором деформации*  $\mathfrak{E}$ , компоненты которого нужно найти.

Линейное соотношение между  $ds$  и  $dr$  означает, что частицы, находящиеся до деформации на линии вектора  $dr$ , переместятся и займут положение на линии  $dr' + ds$ , как это показано на

рис. 244,  $dr' = dr$ . Мы полагаем деформации достаточно малыми; это означает, что  $ds \ll dr$ , или отрезок  $dr$  растянулся (или сжался) на малую величину  $ds_{\parallel}$  и повернулся на малый угол  $\delta\varphi = \frac{ds_{\perp}}{dr} \ll 1$ .



Величину  $\varepsilon = \frac{ds_{\parallel}}{dr}$  называют *относительным удлинением*.

Пусть положение частицы до деформации  $r$  определяется

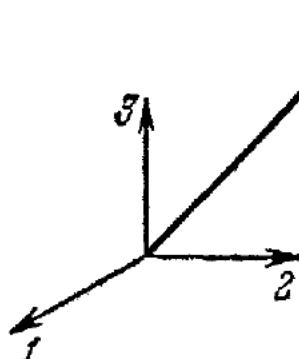


Рис. 243.

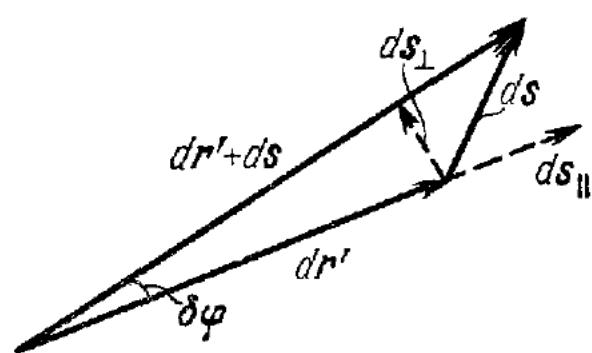


Рис. 244.

относительно декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , направление осей которой задано единичными векторами  $e_1, e_2, e_3$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}s &= s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3, \\ ds &= ds_1 e_1 + ds_2 e_2 + ds_3 e_3, \\ dr &= dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3;\end{aligned}\tag{86.1}$$

каждое  $s_1, s_2, s_3$  зависит от  $x_1, x_2, x_3$  (проекций  $r$ ), поэтому можно записать:

$$\begin{aligned}ds_1 &= \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_1}{\partial x_3} dx_3, \\ ds_2 &= \frac{\partial s_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_3} dx_3, \\ ds_3 &= \frac{\partial s_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} dx_3.\end{aligned}\tag{86.2}$$

Эти равенства и означают линейную зависимость  $ds$  от  $dr$  в некоторой малой области вблизи точки  $r$ . Величины производных  $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \dots$  остаются постоянными в этой области<sup>1)</sup>.

1) Частная производная  $\frac{\partial s_k}{\partial x_i}$  представляет собой отношение приращения  $ds_k$  к  $i$ -й компоненте вектора  $s$  вследствие изменения только  $i$ -й компоненты  $r$  к величине  $dx_i$ .

Равенства (86.2) показывают, что  $ds$  и  $dr$  связаны тензором

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (86.3)$$

или равенства (86.2) можно записать так:

$$ds = \mathcal{S} dr. \quad (86.4)$$

Из дальнейшего рассмотрения видно, что тензор  $\mathcal{S}$  определяет не только деформацию некоторого элементарного объемчика около точки  $r$ , а и *поворот* этого объемчика целиком, без деформации. Для выяснения этого разложим  $\mathcal{S}$  на сумму двух тензоров — симметричного  $\mathcal{S}_c$  и антисимметричного  $\mathcal{S}_a$  — следующим образом:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_c + \mathcal{S}_a, \quad (86.5)$$

где

$$\mathcal{S}_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (86.6)$$

$$\mathcal{S}_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что  $\mathcal{S}_a dr = [\delta\varphi dr]$ , где вектор  $\delta\varphi$  представляет очень малый угол поворота с компонентами по осям 1, 2, 3:

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \right), \quad \delta\varphi_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right),$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \right).$$

Действительно,

$$\mathcal{S}_a dr = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 0 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{S}_a dr)_1 = -\delta\varphi_3 dx_2 + \delta\varphi_2 dx_3 = [\delta\varphi dr]_1 \text{ и т. д.}$$

Легко убедиться, что векторы  $[\delta\phi \ dr]$  представляют собой смещения точек твердого тела, поворачивающегося около оси, совпадающей с направлением  $\delta\phi$ , на угол  $\delta\phi$ . Поэтому деформацию в малой области близи точки  $r$  определяет только симметричная часть тензора  $\mathfrak{S}$ , или  $\mathfrak{S}_c$ .

Объясним физический смысл отдельных компонент тензора  $\mathfrak{S}_c$ . Диагональные компоненты  $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \frac{\partial s_2}{\partial x_2}, \frac{\partial s_3}{\partial x_3}$  представляют собой относительные удлинения (или сжатия) расстояний между частицами, лежащими до деформации на линиях, параллельных осям  $e_1, e_2, e_3$  соответственно. Остальные компоненты представляют собой повороты линий, которые были до деформации параллельны осям координат. Эти линии повернутся на некоторые малые углы; проекция линий, соответствующих осям 1, 2, на плоскость (1, 2) показана на рис. 245. Из чертежа видно, что

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

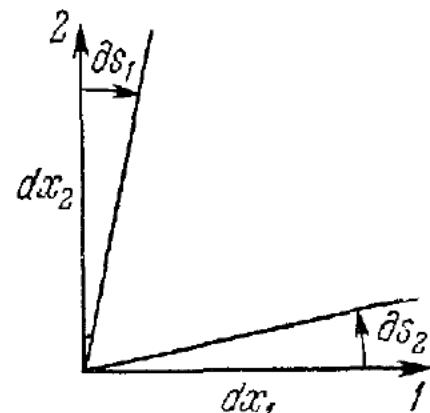


Рис. 245.

равно изменению вследствие деформации прямых углов в плоскости, нормальной к оси 3, которое обозначают через  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ . Аналогично

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} = \gamma_{13} = \gamma_{31} \quad (86.7)$$

равно изменению прямых углов в плоскости, нормальной к оси 2. И так же

$$\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = \gamma_{23} = \gamma_{32}. \quad (86.8)$$

Все это справедливо в достаточно малой области близи точки  $r$ . Величины относительных растяжений обозначают:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial s_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_3 = \frac{\partial s_3}{\partial x_3}; \quad (86.9)$$

отрицательные значения соответствуют относительному сжатию.

Тогда тензор деформации можно записать в таком виде:

$$\mathfrak{S}_c = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \frac{1}{2} \gamma_{21} & \epsilon_2 & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \frac{1}{2} \gamma_{31} & \frac{1}{2} \gamma_{32} & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (86.10)$$

Представим себе достаточно маленький кубик до деформации, тогда после деформации ребра кубика увеличиваются (или уменьшаются), а прямые углы искажаются на величины  $\gamma_{ik}$ . На рис. 246 показано сечение кубика плоскостью, нормальной к оси 3; пара прямых углов уменьшилась на угол  $\gamma_{12}$ , а вторая пара увеличилась на этот же угол  $\gamma_{12}$ .

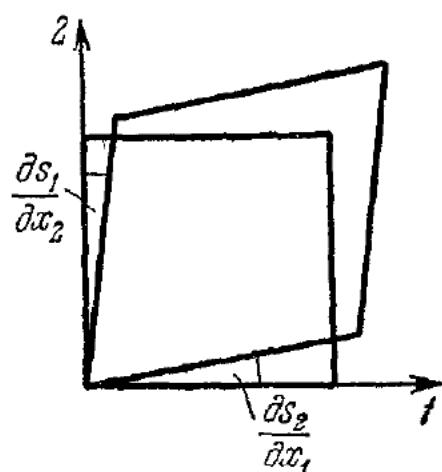


Рис. 246.

Тензор  $\mathcal{F}_c$  — симметричный, и, как всякий симметричный тензор, он имеет по крайней мере три главных направления, взаимно ортогональных. Малый кубик, грани которого перпендикулярны к главным направлениям, испытывает только растяжение (или сжатие) вдоль ребер, углы кубика при деформации не меняются.

Возможен и такой частный случай деформации, при котором ребра кубика не изменяют длины, а меняются только углы между ребрами, такая деформация называется *чистым сдвигом*.

### § 87. Зависимость между напряжениями и деформациями

В зоне упругих деформаций существует линейная зависимость между тензорами деформаций и напряжением, это закон Гука, который мы использовали в простейшем случае одноосного напряжения. Для кристаллического тела (анизотропного), упругие свойства которого различны по разным направлениям, в самом общем случае должна существовать линейная зависимость каждой компоненты тензора деформаций от всех компонент тензора напряжений. Расчет показывает, что из-за симметрии тензоров число независимых коэффициентов будет равно 21. Двадцать один параметр определяет упругие свойства анизотропного вещества.

В случае изотропного тела достаточно только двух коэффициентов, чтобы установить связь между деформациями и напряжениями. Проще всего показать эту связь, записывая тензор напряжений в главных осях. Очевидно, что эти же оси будут и главными осями тензора деформаций. Достаточно маленький кубик, на гранях которого действуют только нормальные напряжения, будет деформироваться так, что грани его смещаются только по нормали при неизменных прямых углах между ними. Тогда напряжения  $\sigma_{11}$  на гранях, нормальных к оси 1, вызовут растяжение  $\epsilon_1$  по оси 1. По закону Гука  $\sigma_{11} = E\epsilon_1$ , где  $E$  — модуль Юнга материала.

Относительное растяжение по оси 1 было бы равно  $\epsilon_1 = \sigma_{11}/E$ , если бы на гранях, нормальных к осям 2 и 3, не было напряжений. Там действуют напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$ , которые вызывают поперечное сжатие кубика, пропорциональное растяжению от этих нагрузок, коэффициент пропорциональности равен  $\mu$  — коэффициенту Пуас-

сона (§ 81). Поэтому растяжение по оси 1 будет меньше  $\sigma_{11}/E$  на величину сжатия, возникающего от растягивающих (положительных) напряжений на двух других парах граней. Сжатие от напряжения  $\sigma_{22}$  равно

$$\mu \varepsilon_2 = \mu \frac{\sigma_{22}}{E}.$$

Сжатие от напряжения  $\sigma_{33}$  равно

$$\mu \varepsilon_3 = \mu \frac{\sigma_{33}}{E}.$$

Считая действия сил независимыми и суммируя вклады от нагрузок по всем парам граней, получим общее растяжение вдоль оси 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E} \right) = \frac{1}{E} \{ \sigma_{11} - \mu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \}. \quad (87.1)$$

Пропорциональная связь между одной компонентой тензора деформаций  $\varepsilon_1$  и компонентами тензора напряжений определяется только двумя коэффициентами  $1/E$  и  $\mu/E$ , двумя упругими параметрами материала  $E$  и  $\mu$ , известными нам из элементарных опытов.

Аналогично можно установить, что

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \{ \sigma_{22} - \mu (\sigma_{33} + \sigma_{11}) \}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \{ \sigma_{33} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \}. \quad (87.2)$$

При выводе предполагалось (в силу закона пропорциональности), что деформации, вызываемые различными нагрузками, суммируются. Если какой-то нагрузкой  $a$  вызывается деформация  $b$ , а нагрузкой  $c$  — деформация  $d$ , то в силу линейности совместное действие нагрузок  $a$  и  $c$ , равное  $a + c$ , вызывает деформацию  $b + d$ .

Если обозначить

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma, \quad (87.3)$$

то полученные формулы можно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{11} - 3\mu\sigma \}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{22} - 3\mu\sigma \}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \{ (1 + \mu) \sigma_{33} - 3\mu\sigma \}. \end{aligned} \quad (87.4)$$

Равенства выведены для того случая, когда за оси координат выбраны главные направления, при другом выборе осей (и направлений ребер кубика) кубик будет испытывать деформации сдвига. Однако вследствие линейной зависимости деформаций от напряжений можем этими же формулами воспользоваться для решения за-

дачи и в общем случае. Предварительно разложим тензор напряжений на сумму двух тензоров, первый содержит только нормальные напряжения, а второй — только касательные:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n + \mathcal{T}_k = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (87.5)$$

Тогда деформации, вызванные напряжениями, представленными тензором  $\mathcal{T}_n$ , можно рассчитать по формулам (87.4), потому что в этом случае учитываем только нормальные напряжения. Но к этим деформациям нужно прибавить деформации, вызванные касательными напряжениями, представленными тензором  $\mathcal{T}_k$ .

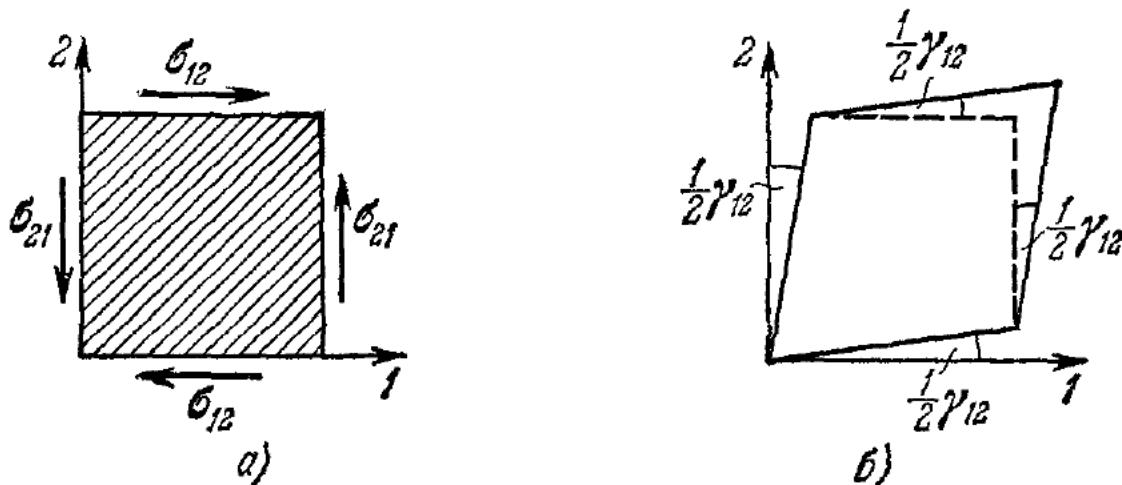


Рис. 247.

Опыты показывают, что компоненты касательных напряжений на четырех гранях кубика, например  $\sigma_{12}$  (рис. 247, а), вызывают изменение прямых углов на угол  $\gamma_{12}$  в плоскости, нормальной к оси 3 (рис. 247, б), причем

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}, \quad (87.6)$$

где  $G$  — постоянный коэффициент для однородного изотропного материала в упругой зоне (модуль сдвига). Касательные напряжения на гранях, параллельных осям 1 и 2, также будут равны

$$\sigma_{23} = G\gamma_{23}, \quad \sigma_{31} = G\gamma_{31}. \quad (87.7)$$

Деформация углов  $\gamma$  в какой-то координатной плоскости зависит только от одинаковых компонент касательных напряжений на четырех гранях, нормальных к этой плоскости, и совсем не зависит от других компонент касательных напряжений. Поэтому связь между тензором  $\mathcal{T}_k$  и соответствующим тензором сдвига  $\mathcal{S}_c''$  очень проста. Тензор  $\mathcal{S}_c''$  — часть тензора деформаций  $\mathcal{S}_c$ , определяющая сдвиги, — находится из следующего равенства:

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c' + \mathcal{S}_c'',$$

где

$$\mathcal{S}'_c = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}''_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (87.8)$$

Принимая во внимание (87.6) и (87.7), получим, что искомая связь имеет вид

$$\mathcal{T}_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix} = 2G\mathcal{S}''_c. \quad (87.9)$$

А тензор  $\mathcal{T}_n$  по (87.4) можно записать так:

$$\mathcal{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (87.10)$$

Величину  $3\sigma$  можно выразить через величину  $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Действительно, если сложить все три равенства (87.4), то получим

$$3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E} 3\sigma - \frac{9\mu}{E} \sigma = \frac{3\sigma}{E} (1 + \mu - 3\mu).$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon. \quad (87.11)$$

Подставляя это в (87.10), получаем

$$\mathcal{T}_n = \frac{E}{1+\mu} \left( \mathcal{S}'_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu} \mathcal{E} \right), \quad (87.12)$$

где

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— «единичный» тензор.

Выражение (87.12) дает связь между тензором нормальных напряжений  $\mathcal{T}_n$ , тензором растяжений  $\mathcal{S}'_c$  и величиной  $\varepsilon$  (или  $\sigma$ ). Далее мы покажем, что  $\varepsilon$  (как и  $\sigma$ ) — скаляр, т. е. не зависит от выбранной системы координат, несмотря на то, что каждая из величин  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  и  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots$  зависит от системы координат.

Теперь установим постоянную зависимость модуля сдвига  $G$  от модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ . Для этого рассмотрим простой случай деформации под действием только нормальных напряжений, которая в других осях представляет собой чистый сдвиг. Допустим, что напряжение  $\sigma_{33} = 0$ , тогда деформация происходит

только под действием  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ . Пусть  $\sigma_{11} = \sigma_0$  и  $\sigma_{22} = -\sigma_0$ ,  $\sigma_{33} = 0$ , касательные напряжения отсутствуют (рис. 248). Под действием таких напряжений возникает по оси 1 растяжение, а по оси 2 — такое же сжатие. Действительно, по (87.1) и (87.2)

$$E\varepsilon_1 = \sigma_{11} - \mu\sigma_{22} = (1 + \mu)\sigma_0, \quad (87.13)$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_{22} - \mu\sigma_{11} = -(1 + \mu)\sigma_0,$$

или

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_0 = \frac{1 + \mu}{E}\sigma_0.$$

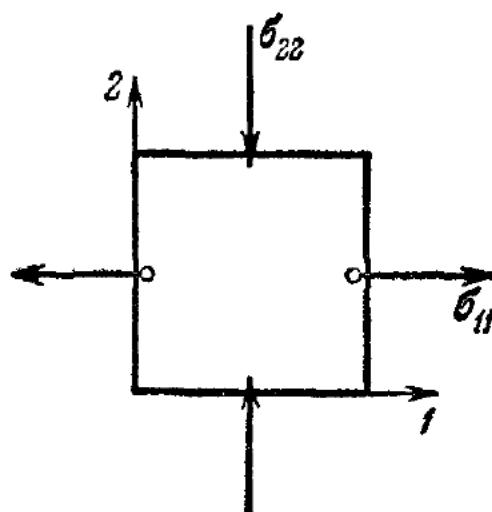


Рис. 248.

Эта деформация в осях, наклоненных под углом  $\pi/4$ , представляет собой чистый сдвиг. Докажем это.

Вырежем в рассматриваемом квадрате новый квадрат, как показано на рис. 249, а. Допустим, что сторона кубика равна  $a$ ; тогда на призмочку, образованную на заштрихованном треугольнике, действуют усилия, показанные на рис. 249, б. Очевидно, равенство нулю всех усилий будет при условии  $\sigma_k = \sigma_0$ , и так же для остальных

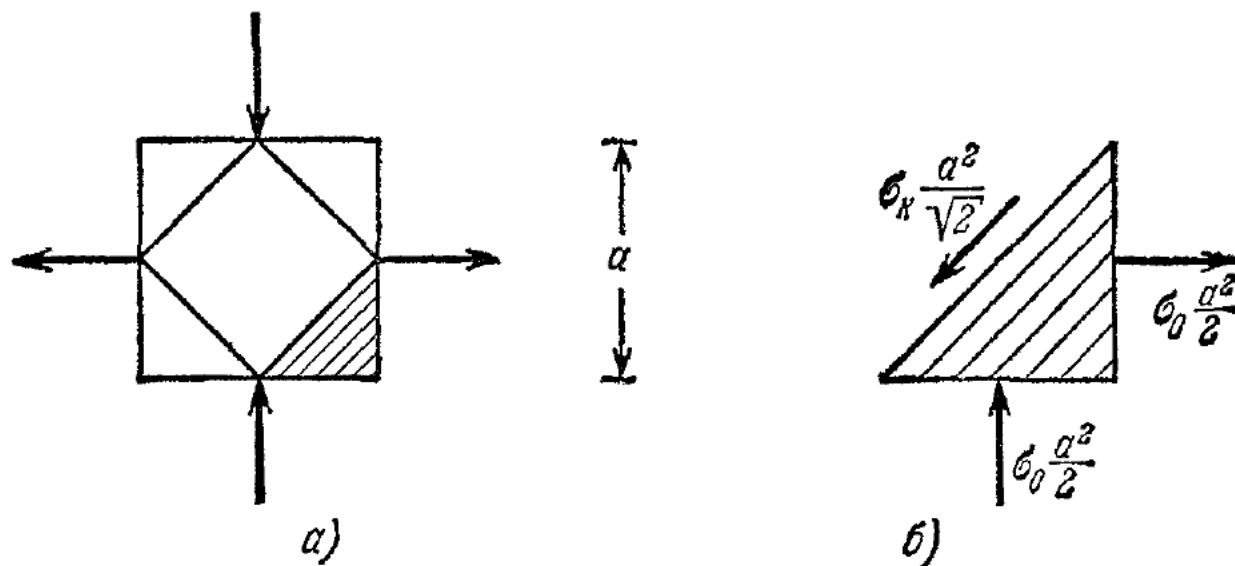


Рис. 249.

трех призмочек. Поэтому внутренняя призмочка находится под действием только касательных усилий и изменит свои углы на величину

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{G}.$$

А относительное удлинение одной диагонали сечения внутренней призмочки равно

$$\varepsilon_0 = \frac{1 + \mu}{E}\sigma_0.$$

Из геометрических условий можно найти связь между параметрами  $\mu$ ,  $E$ ,  $G$ . Сечение призмочки до и после деформации показано на

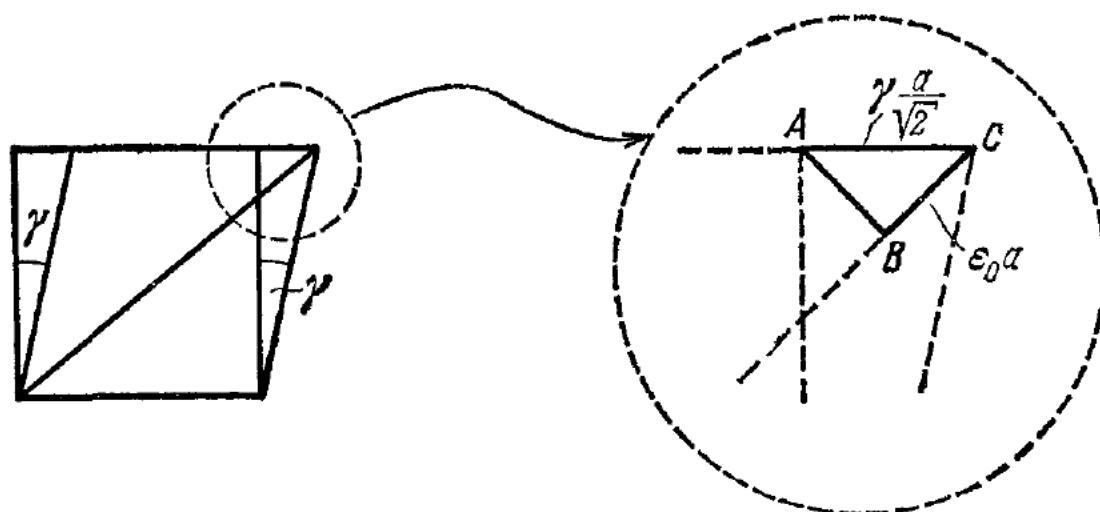


Рис. 250.

рис. 250. Так как деформация  $\gamma$  достаточно мала, то, учитывая, что треугольник  $ABC$  равнобедренный и прямоугольный, получаем

$$\frac{\gamma a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \epsilon_0 a, \quad \text{или} \quad \gamma = 2\epsilon_0.$$

Подставляя сюда предыдущие два равенства, находим искомую зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (87.14)$$

Знание этой связи позволяет записать связь между тензорами напряжений и деформаций в общем виде, учитывая (87.9) и (87.12):

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n + \mathcal{T}_k = \frac{E}{1+\mu} \left( \mathcal{S}'_c + \frac{3\mu\sigma}{1-2\mu} \mathcal{E} \right) + \frac{E}{1+\mu} \mathcal{S}''_c,$$

или, вспоминая (87.8),

$$\mathcal{T} = \frac{E}{1+\mu} \left( \mathcal{S}_c + \frac{3\mu\sigma}{1-2\mu} \mathcal{E} \right). \quad (87.15)$$

Это выражение позволяет по компонентам тензора деформаций  $\mathcal{S}_c$  вычислить компоненты тензора напряжений  $\mathcal{T}$  для изотропного материала при известных  $E$  и  $\mu$ .

Отсюда можно найти и обратную зависимость  $\mathcal{S}_c$  от  $\mathcal{T}$ . Действительно, из (87.15) получаем

$$\frac{1+\mu}{E} \mathcal{T} = \mathcal{S}_c + \frac{3\mu\sigma}{1-2\mu} \mathcal{E}.$$

Учитывая равенство (87.11), получаем в окончательном виде зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций:

$$\mathcal{S}_c = \frac{1+\mu}{E} \mathcal{T} - \frac{3\mu\sigma}{E} \mathcal{E}. \quad (87.16)$$

Остается только еще объяснить, что  $\varepsilon$  и  $\sigma$  — скаляры, величины, не зависящие от системы координат. Для каждого тензора можно найти собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , соответствующие нормальным напряжениям вдоль главных осей тензора  $\mathcal{T}$  или  $\mathcal{E}_c$ . Мы это подробно разбирали для тензора момента инерции (§ 64). Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  не зависят от системы координат, например, для тензора напряжений они определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(см. (64.11)). Это уравнение можно записать так:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Если корни этого уравнения — скаляры, то, очевидно, и коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  также должны быть скалярами, т. е. не зависеть от выбора координатных осей. Легко убедиться, что

$$-a_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma. \quad (87.17)$$

Поэтому  $\sigma$  — скаляр. Так же доказывается, что и  $\varepsilon$  — скаляр.

Величину  $\sigma$  можно толковать как среднее нормальное напряжение,

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad (87.18)$$

аналогичное давлению в жидкости в том случае, когда  $\sigma$  отрицательно. Под действием напряжения  $\sigma$  происходит всестороннее растяжение величиною  $\varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\sigma$  или сжатие  $-\varepsilon$  при давлении  $-\sigma$ . Тензор  $\mathcal{T}_n$  можно разбить на две части:

$$\mathcal{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (87.19)$$

Первая (тензор  $\sigma \mathcal{E}$ ) представляет собой среднее всестороннее напряжение, или отрицательное давление  $\sigma$ , а вторая — отклонение от среднего напряжения. Очевидно, что тензор  $\sigma \mathcal{E}$  не меняется при преобразовании координат.]

## § 88. Потенциальная энергия деформации

Определим работу, которую нужно затратить на деформацию элемента объема вещества  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ . Нормальные напряжения не связаны с деформацией сдвига, они зависят только от деформаций растяжения (сжатия), причем напряжения вдоль какой-то оси зависят от деформаций вдоль всех трех осей. Поэтому работу нормаль-

ных усилий при деформации можно вычислить независимо от работы усилий при деформации сдвига.

Элементарную работу нормальных усилий, вспоминая (87.12) и учитывая, что  $\frac{E}{1+\mu} = 2G$ , можно записать так:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} dx_2 dx_3 d\varepsilon_1 dx_1 &= 2G \left( \varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_1 dv, \\ \sigma_{22} dx_3 dx_1 d\varepsilon_2 dx_2 &= 2G \left( \varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_2 dv, \\ \sigma_{33} dx_1 dx_2 d\varepsilon_3 dx_3 &= 2G \left( \varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon \right) d\varepsilon_3 dv.\end{aligned}\quad (88.1)$$

Складывая эти три уравнения, получим

$$2G \left\{ \varepsilon_1 d\varepsilon_1 + \varepsilon_2 d\varepsilon_2 + \varepsilon_3 d\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon d(3\varepsilon) \right\} dv,$$

так как  $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  и  $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = d(3\varepsilon)$ .

Работа, затраченная на всю деформацию от 0 до  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , будет равна

$$\begin{aligned}dA_1 &= 2G \left( \int_0^{\varepsilon_1} x dx + \int_0^{\varepsilon_2} x dx + \int_0^{\varepsilon_3} x dx + \frac{\mu}{1-2\mu} \int_0^{3\varepsilon} x dx \right) dv = \\ &= G \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\varepsilon)^2 \right) dv.\end{aligned}$$

Здесь  $x$  обозначает каждый раз интегрируемую функцию. «Плотность» работы деформации нормальными усилиями, выраженная через деформации,

$$u_1 = \frac{dA_1}{dv} = G \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\varepsilon)^2 \right). \quad (88.2)$$

Вычислить работу касательных усилий еще проще, потому что составляющие касательных усилий, нормальные к какой-то оси, зависят только от деформаций сдвига в плоскости, нормальной к этой же оси, например,  $\sigma_{12} = G\gamma_{12}$  и т. д. Элементарную работу составляющих касательных усилий на гранях, параллельных оси 3 (рис. 251), можно записать так:

$$\sigma_{12} dx_1 dx_3 d\gamma_{12} dx_2 = \sigma_{12} d\gamma_{12} dv.$$

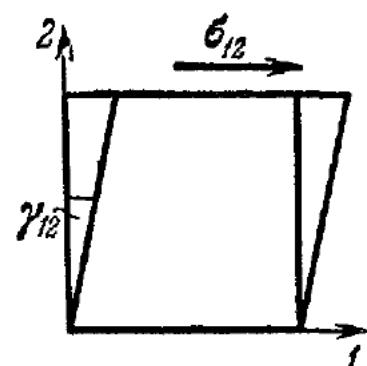


Рис. 251.

Усилия на остальных трех гранях этой группы работы не совершают: на двух гранях  $dx_2 dx_3$  усилия нормальны к смещению, а на

нижней грани  $dx_1 dx_3$  смещение равно нулю. Поэтому вся работа, совершаемая касательными усилиями на выделенном объеме,

$$dA_2 = \left( \int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12} d\gamma_{12} + \int_0^{\gamma_{13}} \sigma_{13} d\gamma_{13} + \int_0^{\gamma_{23}} \sigma_{23} d\gamma_{23} \right) dv = \\ = G \left( \int_0^{\gamma_{12}} x dx + \int_0^{\gamma_{13}} x dx + \int_0^{\gamma_{23}} x dx \right) dv = \frac{1}{2} G (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) dv. \quad (88.3)$$

Следовательно, полная плотность работы при деформации

$$u = u_1 + \frac{dA_2}{dv} = \\ = G \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2} \gamma_{12}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{13}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{23}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (3\varepsilon)^2 \right). \quad (88.4)$$

Эта плотность работы и будет равна плотности потенциальной энергии деформированного тела, выраженной через величину деформаций.

Плотность потенциальной энергии можно записать и через напряжения, так:

$$u = \frac{1}{4G} \left( \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 - \frac{\mu}{1+\mu} (3\sigma)^2 \right). \quad (88.5)$$

Вывод этой формулы предлагаем читателю в качестве упражнения. (Указание. Следует, например, в произведении  $\sigma_{11} d\varepsilon_1$  заменить  $d\varepsilon_1$  на  $\frac{1}{2G} \left( d\sigma_{11} - \frac{\mu}{1+\mu} d(3\sigma) \right)$  по (87.16) и т. д.)

Легко убедиться, что напряжения и деформации определяются так:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_1}, \dots, \sigma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{12}}, \dots; \quad (88.6)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{11}}, \dots, \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{12}}, \dots \quad (88.7)$$

## § 89. Усилия и деформации при изгибе стержней (балок)

Очень важным примером деформации твердого тела является изгиб стержнем<sup>1)</sup> (балок) под действием сил, приложенных нормально к оси стержня (поперечных нагрузок). Картина деформаций стержня, происходящих при нагрузке, можно представить себе, если изогнуть резиновый брус, на боковой поверхности которого была нанесена сетка. Боковая поверхность будет иметь такой вид, как показано в кружке на рис. 252: верхние слои бруса вытягиваются, нижние сжимаются, слой  $OO'$  остается почти неизмененным по длине.

<sup>1)</sup> Стержнем считают цилиндрическое тело, размеры которого в одном направлении (в длину) значительно больше, чем в двух других.

Точный анализ деформаций и напряжений упругой балки или стержня представляет довольно сложную задачу. Но исследование, дающее приближенные результаты, сравнительно просто, оно основано на гипотезе, предложенной еще Бернулли и заключающейся в том, что при изгибе стержня или балки все поперечные сечения остаются *плоскими*.

Допустим, что один конец горизонтальной балки жестко заделан (рис. 252), а к другому концу подведен груз, или приложена вер-

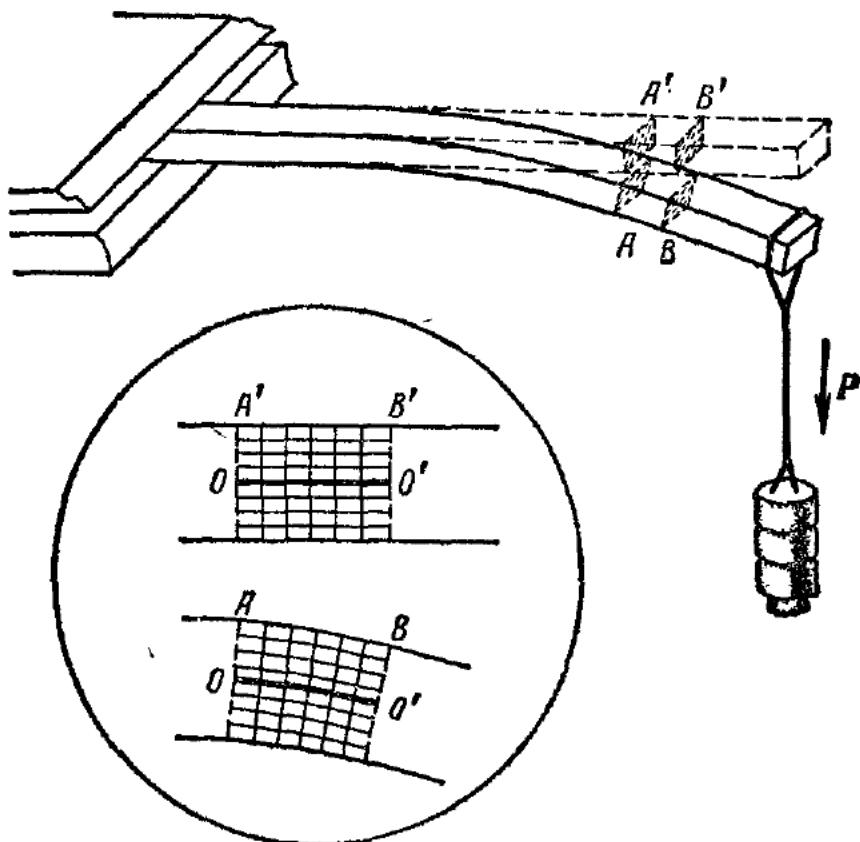


Рис. 252.

тикальная сила  $P$ . Под действием силы  $P$  балка изогнется, каждое перпендикулярное к оси поперечное сечение балки, бывшее до нагружки в вертикальной плоскости, наклонится в сторону изгибающей силы и останется плоским.

Требуется определить: выдержит ли балка данную нагрузку, каковы будут деформации балки, какие возникнут в материале балки напряжения, каков будет прогиб конца балки под действием нагрузки и т. д. Ответы на все эти вопросы могут быть получены в результате технического расчета балки или стержня.

Для простоты анализа разберем вначале деформации балки, заделанной<sup>1)</sup> на одном конце, но нагруженной на другом конце

<sup>1)</sup> Заделка сечения на конце означает, что при деформациях концевое сечение балки не изменяет своего положения в пространстве. Обычно в реальных условиях «сечение заделки» не остается плоским и всегда деформируется, однако сравнение опытов с расчетом и соответствующий анализ подтверждают допустимость предположения о том, что концевое сечение в заделке остается плоским и при деформации балки.

не силой, а парой сил, как показано на рис. 253. Практически такой случай встречается значительно реже, однако теоретический анализ его проще.

Для определения величины и характера внутренних усилий, возникающих в любом теле при деформации, воспользуемся приемом «выделения» какой-то части его. Когда под действием внешних сил произошла деформация балки и установилось равновесие, мы мысленно представляем себе отделенной некоторую, вообще говоря, любую, часть балки и пишем условия равновесия этой части, учитывая действие как внешних сил, так и «внутренних» усилий,

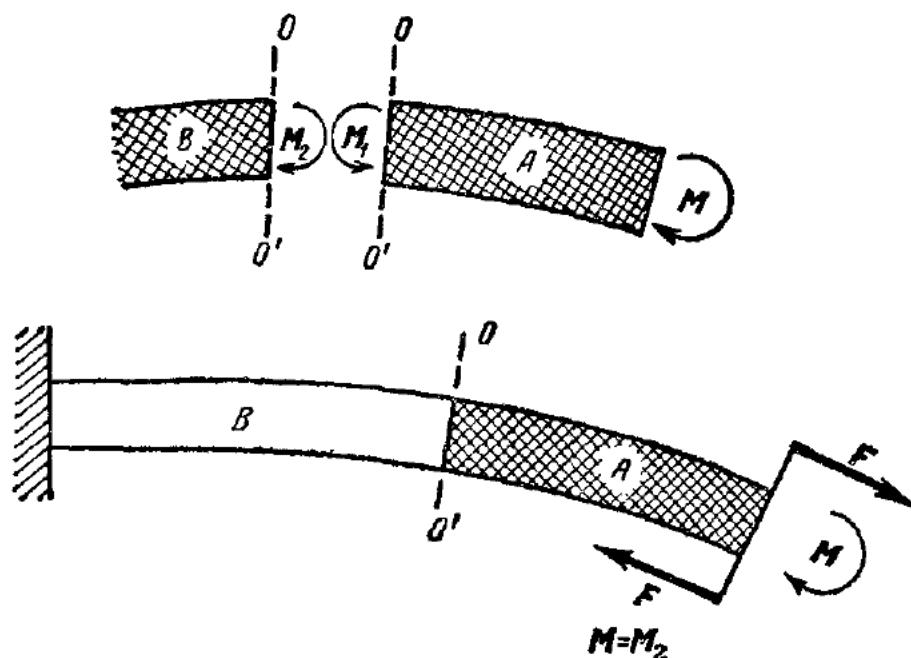


Рис. 253.

действующих на поверхность раздела рассматриваемой части. Обычно «внутренние» усилия нам неизвестны, но из условия равновесия выделенной части при известных внешних силах мы получаем необходимые сведения о характере и величине этих усилий.

Например, в данном случае рассекаем балку по сечению \$OO'\$ (см. рис. 253); из условия равновесия части \$A\$ следует, что касательное усилие в сечении \$OO'\$ равно нулю. Действительно, если бы к части \$A\$ вдоль линии \$OO'\$ была приложена сила, то часть \$A\$ не могла бы находиться в равновесии. Ведь пара внешних сил \$F\$, имеющих момент \$M\$, может уравновешиваться только парой или совокупностью пар сил, имеющих в сумме противоположный момент. Поэтому усилие в сечении \$OO'\$ представляет собой совокупность пар сил, общий момент которых \$M\_1 = -M\$.

Так как мы можем отсечь кусок \$A\$ любой длины, то в любом поперечном сечении внутренние усилия представляют собой совокупность пар сил, общий момент которых по величине равен моменту пары внешних сил. По третьему закону динамики момент усилий,

приложенных к оставшейся части балки  $B$  (см. рис. 253),

$$M_2 = -M_1,$$

или

$$M_2 = M,$$

равен моменту пары внешних сил, приложенных на конце.

Заметим, что результирующее усилие в любом поперечном сечении, например  $OO'$ , равно нулю. Но это не значит, что касательные и нормальные напряжения равны нулю. Однако момент усилий  $M_1$  в сечении может быть обеспечен только распределением нормальных усилий (напряжений); касательные усилия (напряжения), лежащие в одной плоскости, не могут дать момента («плечи» равны нулю). В приближенной теории пренебрегают влиянием касательных напряжений в сечении, так как они очень малы. И сравнение результатов расчета с опытом подтверждает допустимость этого пренебрежения.

В этом приближении связь между деформациями и нагрузкой находится следующим путем.

Определим деформации балки под действием момента, приложенного к ее концу. Вырежем из балки кусочек достаточно малой длины  $dl$ . При изгибе этот кусочек деформируется примерно так, как показано на рис. 254. Оба поперечных сечения покосились при деформации балки на угол  $d\varphi$ . Представим мысленно, что балка разделена на горизонтальные достаточно тонкие слои, параллельные средней линии балки. Очевидно, что слой, прилегающий к средней линии  $OO'$ , не изменит своей длины, поэтому его называют «нейтральным»; слои или «волокна»<sup>1)</sup>, находящиеся выше нейтрального слоя, удлиняются, например слой  $MN$  (см. рис. 254); слои, расположенные ниже его, будут укорочены, сжаты, как, например, слой  $PQ$ . Укорочение и сжатие слоев пропорционально расстоянию слоя до нейтрального, так как поперечное сечение и при деформации остается плоским.

Можно полагать, что нормальное напряжение в каждом слое пропорционально его удлинению или укорочению, если, конечно, величина деформации не выходит из зоны пропорциональности. Тогда напряжения на концах рассматриваемого кусочка длиной  $dl$

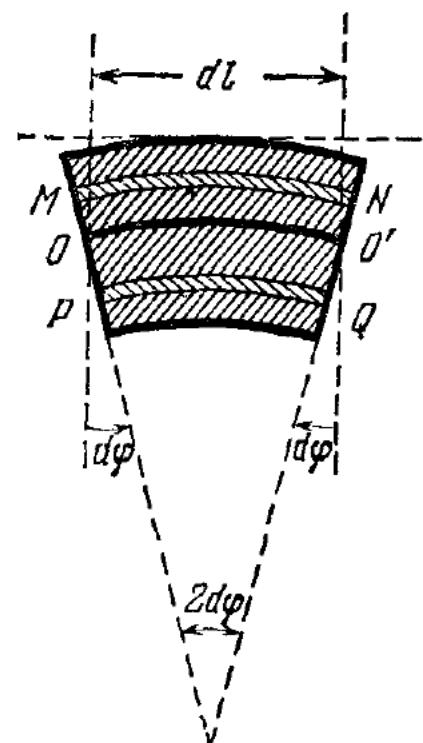


Рис. 254.

<sup>1)</sup> Волокном обычно называют достаточно тонкий цилиндрик, мысленно вырезанный параллельно оси из тела балки.

или в поперечном сечении балки будут иметь вид, показанный на рис. 255. Если  $x$  есть расстояние от данного слоя до нейтрального, то напряжение в этом месте равно

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{b}, \quad (89.1)$$

где  $\sigma_0$  — напряжение в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии  $b$  от нейтрального.

Пусть все сечения балки одинаковы и имеют прямоугольную форму; тогда нейтральный слой расположен посередине балки и  $b = h/2$ , где  $h$  — высота поперечного сечения балки. Таким образом, для балки, ширина сечения которой равна  $a$ , усилие в слое толщиной  $dx$ , находящемся на расстоянии  $x$  от нейтрали, равно

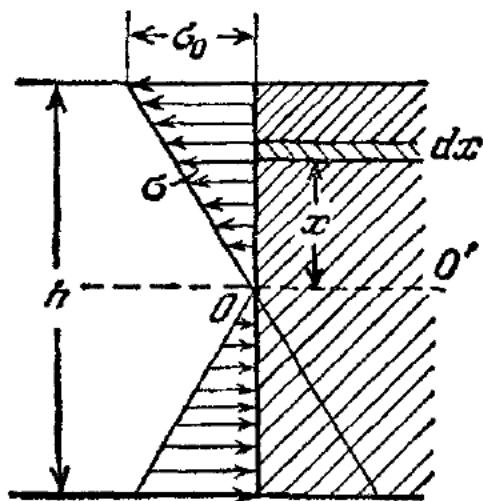


Рис. 255.

видно, он будет равен интегралу от (89.2) по всему сечению:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} x dF = \frac{\sigma_0}{b} \int_{-h/2}^{h/2} ax^2 dx = \frac{2\sigma_0 a}{h} I. \quad (89.3)$$

Величина

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} ax^2 dx, \quad (89.4)$$

равная в данном случае

$$I = \frac{ah^3}{12},$$

носит название *момента инерции поперечного сечения* балки от носительно оси, проходящей через нейтральный слой. Действительно, формула (89.4) похожа на формулу для момента инерции плоской фигуры; здесь площадь  $a dx$  умножается на  $x^2$ , на квадрат расстояния до оси, и это произведение интегрируется по всей площади сечения. Момент инерции площади имеет только формальное сходство с массовым моментом инерции тела, здесь нет речи ни о какой инерции тела, и размерность момента инерции площади —  $(длина)^4$ , поэтому величина  $I$  имеет только геометрический смысл.

Если поперечное сечение  $S$  балки не прямоугольное и балка изгибаются в плоскости, перпендикулярной к оси момента  $M$  (плоскости нагрузки), то нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения  $O$  перпендикулярно к плоскости нагрузки (рис. 256). Момент усилий в поперечном сечении балки будет выражаться формулой

$$M = \frac{\sigma_0}{b} \int_S ax^2 dx = \frac{\sigma_0}{b} I, \quad (89.5)$$

где  $I = \int ax^2 dx$ , а  $b$  — наибольшее расстояние от нейтрального слоя, большее из  $b_1$  и  $b_2$ , и  $\sigma_0$  — максимальное напряжение. Формула

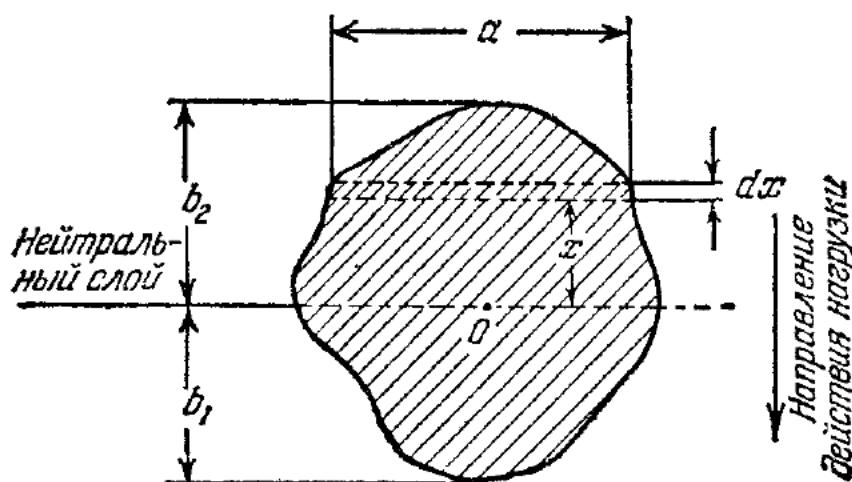


Рис. 256.

этота следует из того, что при деформации балки все поперечные сечения ее остаются плоскими.

Момент усилий в поперечном сечении  $M$  и максимальное напряжение в поперечном сечении  $\sigma_0$  связаны друг с другом простым условием, вытекающим из формулы (89.5):

$$M = \sigma_0 \frac{I}{b} = \sigma_0 w, \quad \text{где } w = \frac{I}{b}. \quad (89.6)$$

Максимальное напряжение возникает в том слое, который дальше всех отстоит от нейтрального слоя. Величина  $w$  определяется только формой поперечного сечения. Всегда для данного сечения можно заранее определить величину  $w$ , называемую *моментом сопротивления* сечения, равную отношению момента инерции сечения к расстоянию до наиболее удаленного слоя. При технических расчетах балок часто ограничиваются определением величины максимального напряжения  $\sigma_0$  и по величине этого напряжения судят о прочности балки, сравнивая  $\sigma_0$  с напряжением  $\sigma_p$ , при котором происходит разрушение.

В рассмотренном случае, когда к концу балки приложена пара сил (см. рис. 253), момент усилий  $M$  всюду, для любых поперечных

сечений, одинаков; при другой нагрузке на балку это не так. Оказывается, что во многих задачах по заданным внешним нагрузкам можно определить момент усилий в каждом поперечном сечении. Если разделить момент усилий на момент сопротивления  $w$ , то можно найти максимальное напряжение в любом сечении при данной нагрузке. Поэтому первая задача расчета прочности балок заключается в отыскании «опасного» сечения, т. е. такого сечения, в котором напряжения будут максимальными при известной нагрузке.

### § 90. Определение прогибов балки

Деформация, или изгиб, балки (стержня) характеризуется формой линии прогибов («упругой линии»), за которую обычно принимают линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений стержня, или линию, проходящую через ось стержня. Мы будем рассматривать только такой случай, когда упругая линия лежит в плоскости действия внешних сил, т. е. плоскость изгиба и плоскость действия сил совпадают.

Определим линию прогибов для прямой балки, заделанной на одном конце и нагруженной моментом пары сил на другом (см. рис. 253). Как было отмечено в § 89, углы поворота поперечных сечений кусочка балки длиной  $dl$  (см. рис. 254) равны  $d\varphi$ .

Пусть уравнение искомой упругой линии будет  $y = f(l)$ , где  $y$  — отклонение точки с координатой  $l$  от прямой оси стержня, на которой лежали эти точки до деформации. Величина  $\alpha = \arctg \frac{dy}{dl}$  представляет собой угол, который составляет направление касательной к упругой линии в точке с координатой  $l$  с прямой осью (рис. 257). Если учесть, что углы касательной  $\alpha$  очень малы, то можно написать:  $\alpha \approx \frac{dy}{dl}$ , а изменение направления касательной при переходе от точки  $l$  к точке  $l + dl$  равно

$$d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2} dl.$$

Так как поперечные сечения всегда перпендикулярны к упругой линии, то  $d\alpha = 2d\varphi$  (см. рис. 254 и 257) и, следовательно,

$$2d\varphi = d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2} dl, \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dl^2} \approx \frac{2d\varphi}{dl}. \quad (90.1)$$

Вспомним, что по формуле (89.5) момент усилий в поперечном сечении  $M = \frac{\sigma_0}{b} l$ . Максимальное напряжение  $\sigma_0$  (напряжение в наиболее удаленном слое) можно связать по закону Гука с деформацией слоя. Из рис. 254 и 257 видно, что удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального и находящегося от него на расстоянии  $b$ , равно

$$\epsilon = \frac{d\alpha}{dl} b = 2 \frac{d\varphi}{dl} b, \quad (90.2)$$

а напряжение в нем

$$\sigma_0 = E\epsilon = 2E \frac{d\varphi}{dl} b.$$

Учитывая (90.1), получаем

$$\sigma_0 \approx Eb \frac{d^2y}{dl^2}. \quad (90.3)$$

Теперь в уравнении (89.5) заменим  $\sigma_0$  по (90.3) и найдем окончательно уравнение для определения упругой линии:

$$M = EI \frac{d^2y}{dl^2}. \quad (90.4)$$

В нашем случае момент усилий  $M$  одинаков во всех поперечных сечениях и равен моменту внешней нагрузки  $M_b$ . Тогда, интегрируя уравнение (90.4),

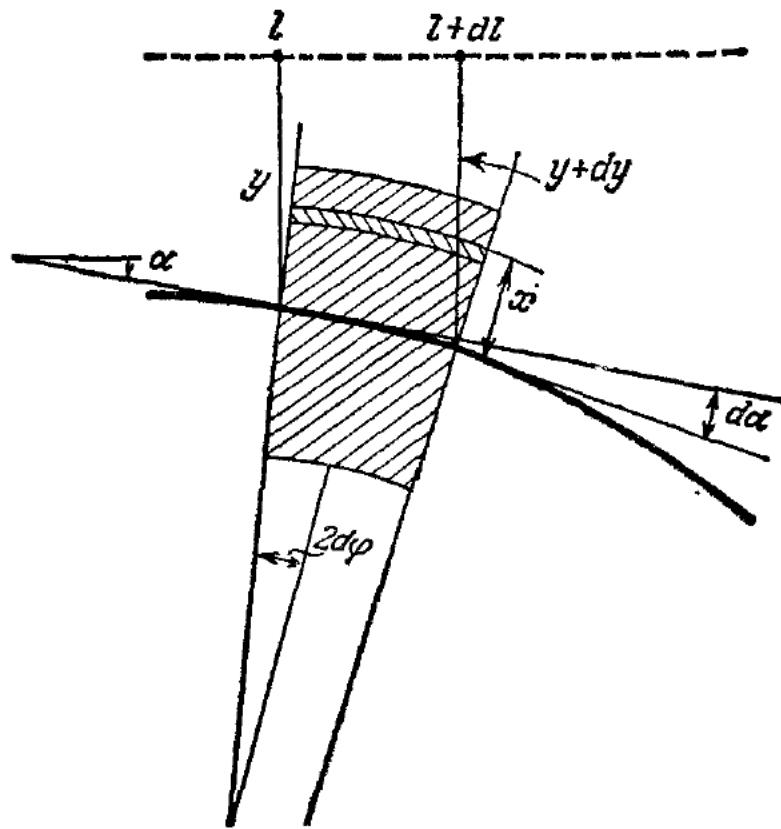


Рис. 257.

получаем уравнение упругой линии. Интегрируя один раз (90.4) от точки заделки  $l = 0$  до какой-то точки  $l = \eta$ , получаем первую производную от линии прогибов в точке  $\eta$ , а именно:

$$\left(\frac{dy}{dl}\right)_\eta - \left(\frac{dy}{dl}\right)_0 = \int_0^\eta \frac{d^2y}{dl^2} dl = \int_0^\eta \frac{M_b}{EI} dl = \frac{M_b}{EI} \eta. \quad (90.5)$$

Учитывая, что в заделке  $\left(\frac{dy}{dl}\right)_0 = 0$ , т. е. что направление касательной в заделке не изменяется, или сечение в заделке не поворачивается, проинтегрируем (90.5) еще раз от нуля до любой точки с координатой  $l$ :

$$y(l) - y(0) = \int_0^l \left(\frac{dy}{dl}\right)_\eta d\eta = \int_0^l \frac{M_b}{EI} \eta d\eta = \frac{M_b}{EI} \frac{l^2}{2}. \quad (90.6)$$

Прогиб в заделке равен нулю, или  $y(0) = 0$ . Поэтому уравнение упругой линии представляет собой параболу:

$$y(l) = \frac{M_b}{2EI} l^2. \quad (90.7)$$

Максимальный прогиб на конце балки при  $l = L$  равен

$$\frac{M_b}{2EI} L^2. \quad (90.8)$$

Теперь посмотрим, как изменяются деформации балки длиной  $L$ , если она будет заделана на одном конце и нагружена вертикальной силой  $P$  на другом (см. рис. 252). Опять поступим так же, рассечем балку в каком-нибудь месте на расстоянии  $l$  от заделки и определим, какие силы должны действовать на отделенную часть балки в сечении (рис. 258). Теперь характер усилий в поперечном сечении несколько изменится<sup>1)</sup>, напряжения должны иметь и касательную составляющую, ибо для равновесия отрезанной части необходимо в сечении касательное усилие  $Q'$ , численно равное  $P$  и противоположно направленное. Усилие  $Q'$  называют *перерезывающей силой*. Очевидно, что перерезывающая сила в любом сечении

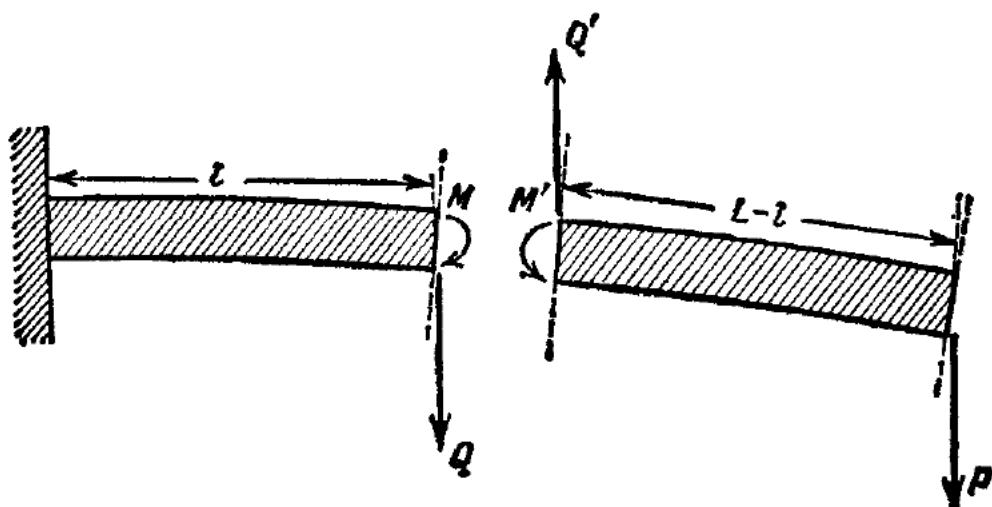


Рис. 258.

имеет одну и ту же величину, равную  $P$ . К оставшейся части перерезывающая сила  $Q$  приложена в другом направлении и имеет ту же величину.

Но пара сил  $P$  и  $Q'$ , действующих на отрезанную часть, имеет момент

$$P(L-l) = M_1. \quad (90.9)$$

Поэтому для равновесия отрезанной части необходимы еще пары сил, момент которых равен и противоположен моменту  $M_1$ . Эти силы могут быть приложены только в сечении разреза. Следовательно, балка должна деформироваться так, чтобы создать такие нормальные усилия в поперечном сечении, которые образуют момент  $M'$ , примерно так, как это было в балке, нагруженной парой сил.

Момент  $M'$  равен по величине моменту  $M_1$  и противоположен по знаку; отсюда следует, что  $M$  — момент усилий, приложенных к оставшейся части, — равен  $M_1$ . Теперь момент нормальных усилий в поперечном сечении  $M$  неодинаков для различных сечений. Действительно, величина момента  $M_1$  зависит от координаты сечения  $l$ , а следовательно,

$$M = M_1 = P(L-l). \quad (90.10)$$

Усилия в сечении будут состоять из нормальных напряжений, связанных с растяжением и сжатием слоев, и из касательных напряжений, обеспечивающих перерезывающую силу  $Q$ . Поэтому при расчете деформации элемента балки следовало бы считаться и с касательными напряжениями. Однако сравнение расчета

<sup>1)</sup> По сравнению с тем, что мы видели в § 89.

с опытом показывает, что влияние касательных усилий невелико, и поэтому можно вести расчет деформаций элемента балки так, как если бы касательных усилий не было, как это делали выше.

Следовательно, расчет упругой линии балки сводится к решению того же уравнения (90.4):

$$M = EI \frac{d^2y}{dl^2}. \quad (90.11)$$

Но в этом случае момент усилий  $M$  зависит от координаты, как указывает выражение (90.10). График распределения момента вдоль балки показан на рис. 259.

Если поперечное сечение балки одинаково по всей длине балки, то «опасное» сечение, сечение с наибольшими нормальными напряжениями, будет в заделке балки, у конца с координатой  $l = 0$ .

Наибольшее напряжение будет равно

$$\sigma_{0\max} = \frac{M_{\max}}{w} = \frac{PL}{I} b, \quad (90.12)$$

где  $b$  — расстояние от нейтрального до наиболее удаленного слоя, а  $I$  — момент инерции сечения заделки. Если у заделки напряжения балки достаточно малы, то во всех других сечениях балки они будут еще меньше. Если балка сломается при большой нагрузке, то она сломается в заделке.

Таким образом, задача расчета балок на прочность начинается с определения изгибающих моментов по всем поперечным сечениям вдоль балки. Во многих случаях вычисление распределения изгибающих моментов производится просто на основе заданных нагрузок и условий на опорах балки.

Например, балка свободно лежит на двух опорах, как показано на рис. 260,  $a$ , нагружена вниз силой  $P$ , приложенной на расстоянии  $a$  от правой опоры  $A$ . Определяем реакции опор  $F_B$  и  $F_A$ , или силы, действующие на балку со стороны опор. Для дальнейшего нам нужно знать только реакцию  $F_A$ . Реакцию опор находим из условия равновесия всей балки.

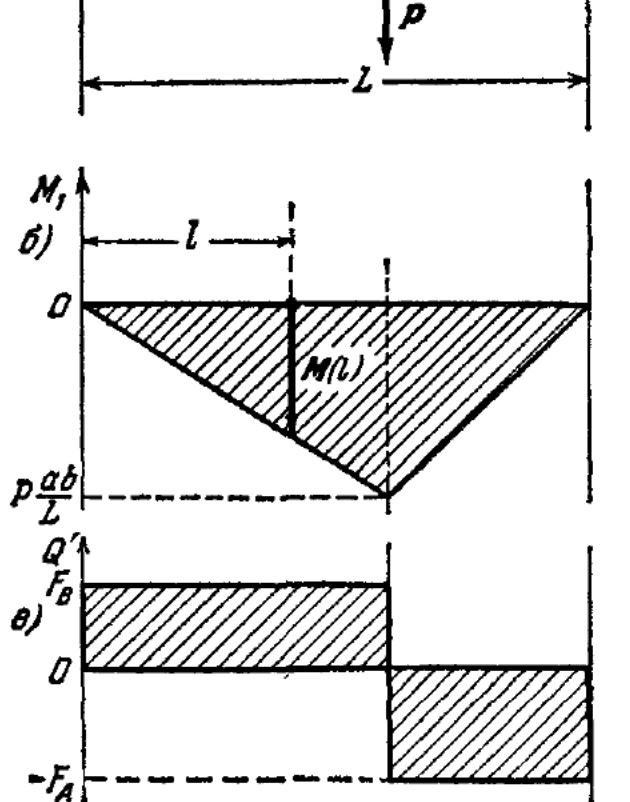


Рис. 260.

При равновесии момент сил относительно любой точки, например точки  $B$ , равен нулю. Отсюда

$$F_A l = P b, \text{ или } F_A = \frac{Pb}{l}. \quad (90.13)$$

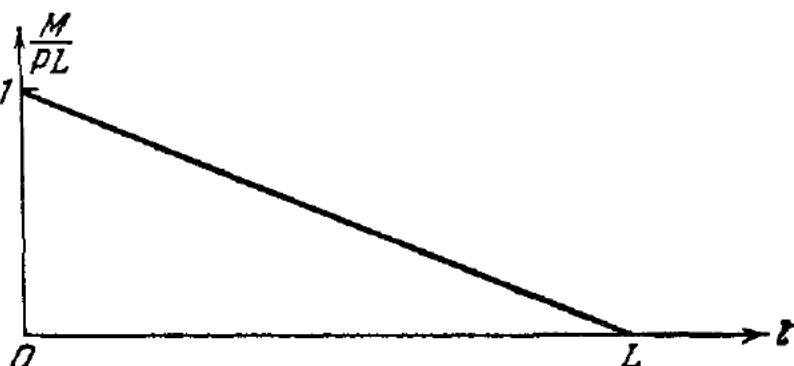


Рис. 259.

Из условия равновесия отрезанной части  $L - l$ , так же как и в предыдущем примере, найдем, что момент нормальных усилий в поперечном сечении с координатой  $l < b$  будет равен изгибающему моменту (моменту всех сил, действующих на отрезанную часть):

$$M_1 = P(b-l) - F_A(L-l) = -P \frac{la}{L}. \quad (90.14)$$

Такое распределение изгибающего момента будет на отрезке балки от опоры  $B$  до точки приложения силы. Для сечений, лежащих дальше, при  $l > b$ , момент будет равен

$$M_1 = -F_A(L-l) = -Pb\left(\frac{L-l}{L}\right). \quad (90.15)$$

График распределения моментов  $M_1 = M(l)$  вдоль балки показан на рис. 260, б. График перерезывающих сил показан на рис. 260, в, перерезывающая сила  $Q'$  в точке приложения внешней силы  $P$  испытывает скачок на величину этой силы.

Зная распределение изгибающих моментов  $M(l)$ , мы можем определить «опасное» сечение, если известен момент сопротивления  $\omega = \frac{I}{b}$  в каждом сечении балки.

Для определения линии прогибов необходимо проинтегрировать два раза правую часть уравнения

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \frac{1}{EI} M(l), \quad (90.16)$$

где  $M(l)$  — известная функция  $l$ ,  $E$  — модуль Юнга и  $I$  — момент инерции сечения — величины известные.

В рассмотренных нами случаях изменение изгибающего момента вдоль балки определяется внешними нагрузками и не зависит от свойств опор и от свойств самой балки.

## § 91. О деформации опор

Для решения задачи о деформации балки, лежащей на двух опорах (§ 90), мы сначала нашли силы, действующие на балку со стороны опоры (реакции опоры).

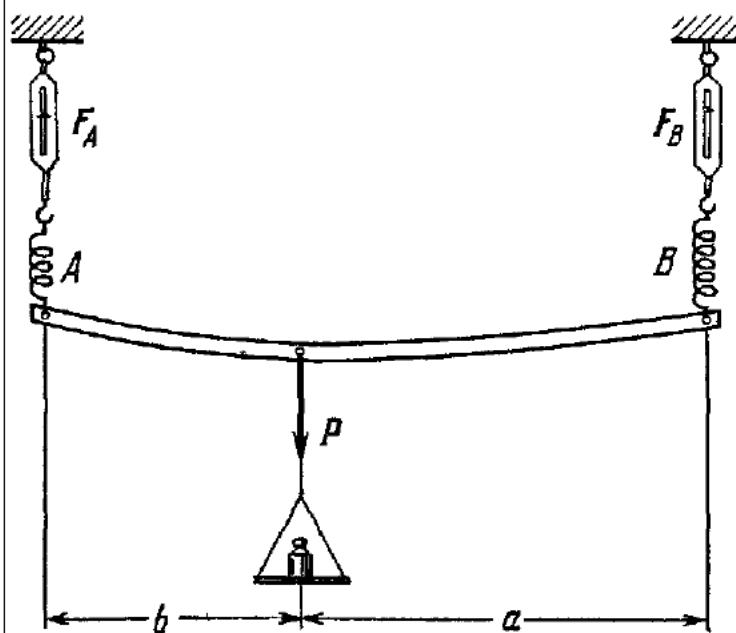


Рис. 261.

А после того как они были найдены, мы приступили к решению задачи о деформации балки под действием известных внешних сил, в число которых вошли и реакции опор. Такой путь решения задач возможен только тогда, когда реакции опор *не зависят* от деформации балки и деформации опор, а деформация самой балки *совсем не зависит* от деформации опор.

В других, более сложных задачах, в которых величина реакций зависит от деформаций балки и опор, такой путь невозможен, там нужно решать более сложную задачу: одновременно находить реакции и определять деформации балки и опор.

Для выяснения особенностей таких задач рассмотрим два примера, в которых будем измерять реакции опор. Пусть деревянная планка (балка) подвешена на двух динамометрах посредством пружин  $A$  и  $B$  (рис. 261). Подвесим к стержню груз  $P$ , и тогда динамометры будут показывать величину реакций

опор. Если изменим жесткость пружины  $A$ , допустим, увеличим ее, то реакции опор планки практически будут неизменны. Если уменьшим жесткость планки (повернем ее на  $90^\circ$  вокруг ее оси), то реакции опор также не изменятся.

В самом деле, в данном случае из условий равновесия балки следует, что сила пружины  $A$  равна

$$F_A = \frac{a}{a+b} P, \quad (91.1)$$

а пружины  $B$

$$F_B = \frac{b}{a+b} P.$$

Так как при деформации пружин и планки величины  $a$  и  $b$  почти не меняются, то и показания динамометров практически не зависят от деформации опор и самой балки. Уравнения (91.1) — следствие условий покоя планки и не зависят

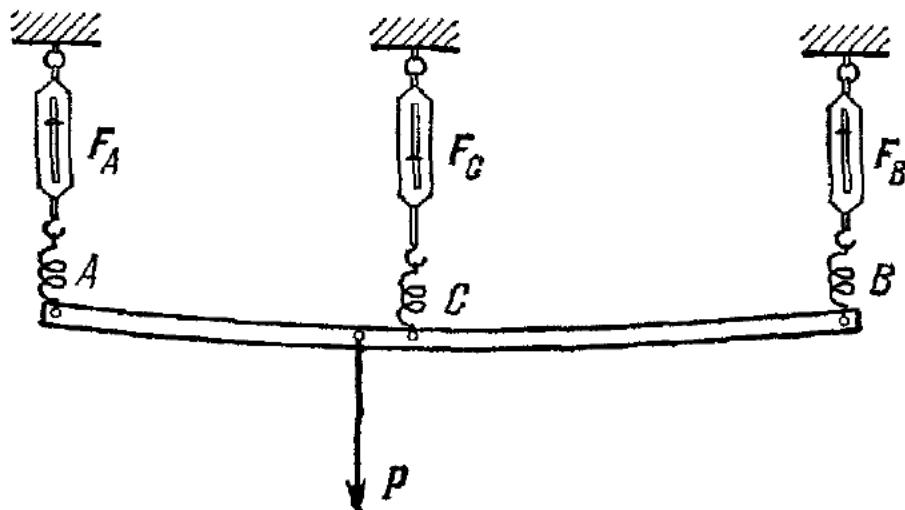


Рис. 262.

от ее деформации и деформаций опорных пружин  $A$  и  $B$ . Так это и было при анализе деформаций балки в § 90, там мы не ставили вопроса о величине деформации опор.

Совсем иная картина будет, если ту же планку подвесить на *трех* пружинах (рис. 262). В этом случае показания динамометров будут зависеть от жесткости пружин и планки. Действительно, если пружина  $C$  очень жестка по сравнению с пружинами  $A$  и  $B$ , то динамометр  $C$  будет показывать силу, почти равную силе веса груза  $P$ , а показания динамометров  $A$  и  $B$  будут очень малы. Наоборот, ослабляя пружину  $C$ , мы можем увеличить силы реакций на концах планки почти до величин, указанных в формулах (91.1). Точно так же, увеличивая жесткость планки при тех же пружинах, мы увеличиваем силу  $F_C$ , показываемую средним динамометром.

Следовательно, вопрос о деформации балки, лежащей на трех опорах, не может быть решен без учета деформаций балки и опор. В самом деле, мы имеем два условия равновесия балки: равенство нулю всех сил и равенство нулю моментов всех сил, а неизвестных реакций, входящих в эти условия, три. Из двух уравнений нельзя определить значения трех неизвестных. Поэтому в таких задачах, которые механики называют задачами со *статически неопределенными реакциями*, нельзя найти реакции опор до решения вопроса о деформации балки или вообще до решения вопроса о деформации тела и его опор, а нужно решать более сложную задачу. Рассмотрим два интересных примера.

1) Балка, заделанная на одном конце в стену и опирающаяся на пружину  $A$  на другом (рис. 263). Со стороны опоры на балку действует вверх сила пружины  $R_A$  — реакция опоры. Со стороны заделки в сечении  $B$ , которое не может поворачиваться, на балку

действует сложная совокупность распределенных сил, которую можно свести к силе  $F_0$  и к моменту  $M_0$ .

Для определения изгибающих моментов и перерезывающих сил в каждом сечении балки необходимо знать величины  $R_A$  и  $P$ . Но величину  $R_A$  нельзя определить, не зная  $F_0$  и  $M_0$ , а из двух уравнений статики нельзя определить три величины  $F_0$ ,  $M_0$  и  $R_A$ . Величины сил  $R_A$  и  $F_0$  и момента  $M_0$  существенно зависят от жесткости пружины опоры  $A$ .

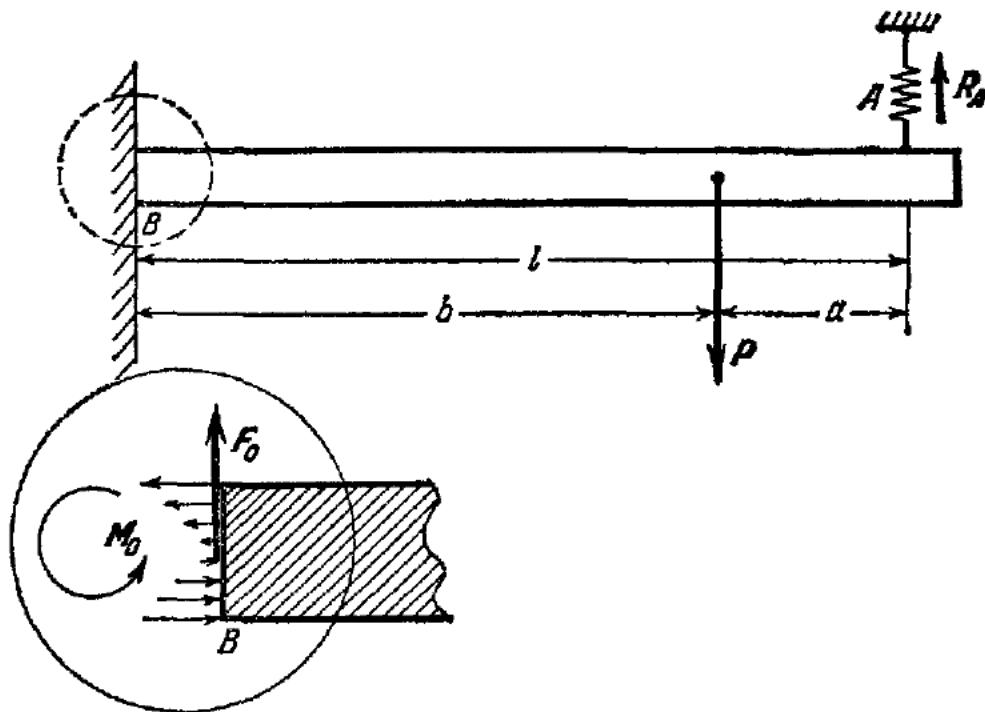


Рис. 263.

Решить задачу с учетом деформации опор можно следующим путем. Сначала предполагается, что пружины нет и на балку, кроме данной силы  $P$ , в точке  $A$  действует некоторая (произвольная) сила  $R$ , направленная противоположно силе  $P$ . При этих условиях находится деформация балки в точке  $A$  как функция величины силы  $R$ ,  $y_A = f(R)$ . Можно просто вычислить величину  $y_A$ , исходя из основного уравнения для упругой линии балки (90.4). Допустим, балка постоянного сечения имеет момент инерции  $I$ , а материал — модуль Юнга  $E$ ; тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \quad (91.2)$$

где  $M(x)$  — изгибающий момент на расстоянии  $x$  от заделки, который, очевидно, равен

$$M(x) = P(b-x) - R(l-x) \text{ на интервале } 0 \leq x \leq b,$$

$$M(x) = -R(l-x) \text{ в промежутке } b \leq x \leq l.$$

Интегрируя последовательно два раза  $\frac{1}{EI} M(x)$ , находим на интервале  $0 \leq x \leq b$  величины  $\frac{dy}{dx}$  и  $y$ . Определив отсюда  $\frac{dy}{dx}(b)$  и  $y(b)$ , таким же путем находим  $y(x)$  в промежутке  $b \leq x \leq l$ . В результате получаем

$$y(l) = y_A = \frac{Pb^2}{3EI} \left( b + \frac{3}{2}a \right) - \frac{Rl^3}{3EI}, \text{ где } a = l - b. \quad (91.3)$$

Таким образом, мы нашли деформацию балки под действием сил  $P$  и  $R$ . Затем находим деформацию пружины опоры под действием силы  $R$ , равную

$$y_A = \frac{1}{k} R, \quad (91.4)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости пружины. Приравнивая друг другу деформацию балки  $y_A$  и деформацию пружины опоры, получаем ту силу  $R_A$ , с которой пружина действует на балку.

Из равенства выражений (91.3) и (91.4) находим

$$R_A = P \frac{b^2 (b + 3/2a)}{\left(1 + \frac{3EI}{kl^3}\right) l^3}.$$

Теперь, зная силу  $R_A$ , силу, с которой действует пружина в точке опоры  $A$  на балку, определим обычным способом деформацию балки, заделанной в стену и находящейся под действием двух сил  $P$  и  $R_A$ ; например, для определения прогиба в точке  $l$  подставим найденное вначале  $R = R_A$  в (91.3).

Отметим, что при абсолютно жесткой пружине ( $k \rightarrow \infty$ ) величина реакции опоры не зависит от упругих свойств балки и равна

$$R_A = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a}{b}\right) P, \quad (91.5)$$

причем

$$R_A < P \frac{b}{l}.$$

Величина  $P \frac{b}{l}$  равна реакции опоры  $A$  балки, лежащей на двух опорах в точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 260, а). Вследствие того, что  $R_A < P \frac{b}{l}$ , момент в сечении заделки балки в стену, равный  $Pb - R_A l$ , будет больше нуля.

При  $k \rightarrow 0$ , при очень слабой пружине, ее действие  $R_A$  также стремится к нулю. В этом случае момент в заделке  $M(0)$  полностью уравновешивает момент внешней силы  $Pb$ , или  $M(0) = Pb$ , что видно непосредственно.

Примерно таким же путем могут решаться и более сложные задачи. Напомним ход решения: сначала заменяют все неизвестные реакции опор какими-то силами и решают задачу о деформации балки при действии этих пока неизвестных сил. Затем определяют деформацию опор под действием тех же сил. Приравнивая величины деформаций опор и балки в том и другом случае, получают систему уравнений для определения неизвестных реакций. Найдя величину реакций, определяют, как обычно, деформации тела.

2) Груз висит на трех канатах. Этот пример немного иного типа, и решим мы его другим способом, но суть задачи остается прежней.

На трех нитях, канатах или стержнях, лежащих в одной плоскости, подвешен груз (рис. 264). Если бы подвеска была осуществлена на двух канатах, то величина усилий в каждом канате зависела бы не от упругих свойств канатов, а только от углов, которые они составляют с вертикалью, так как всегда силу тяжести груза  $P$  можно однозначно разложить на две по заданным двум направлениям.

Но в случае подвески на трех канатах этого сделать нельзя, даже если нам известны углы, которые канаты составляют с вертикалью. Действительно, нельзя однозначно разложить силу на три компоненты по трем заданным направлениям (рис. 265). Пунктиром проведены линии, параллельные направлениям канатов и образующие углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  с горизонталью, и любая замкнутая фигура, состоящая

из трех векторов, имеющих направление пунктирных линий, и опирающаяся на вектор  $P$ , формально дает решение задачи.

Задача определения усилий в канатах может быть решена только после того, как нам станут известны их упругие свойства. Для простоты положим, что боковые

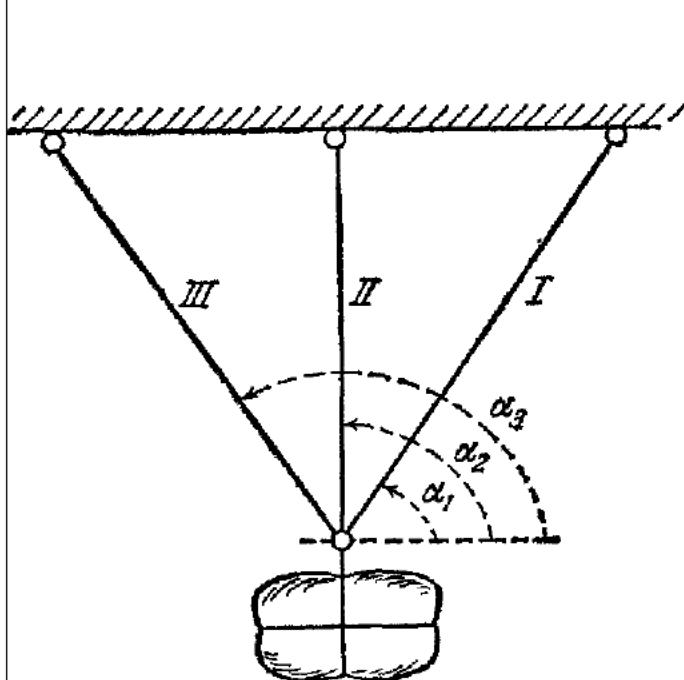


Рис. 264.

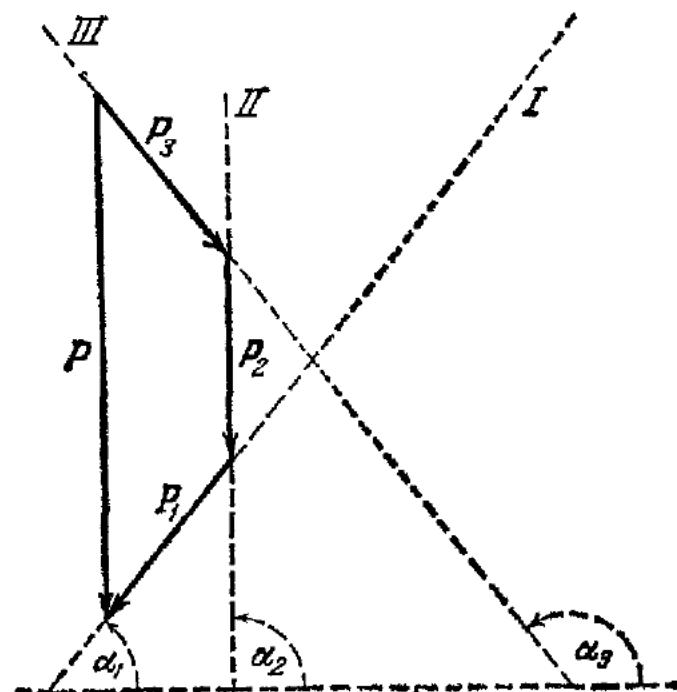


Рис. 265.

канаты одинаковы и средний канат вертикален. Тогда  $\alpha_2 = \pi/2$  и  $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$ . Обозначим длину среднего каната через  $l_1$ , модуль Юнга среднего каната  $E_1$ , бокового  $E_2$ , поперечное сечение среднего каната  $S_1$ , бокового  $S_2$ . Деформация среднего каната  $\Delta l_1$  связана с деформацией бокового  $\Delta l_2$  следующим равенством (рис. 266):

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \sin \alpha_1. \quad (91.6)$$

Усилие в среднем канате равно

$$P_1 = \frac{E_1 S_1}{l_1} \Delta l_1, \quad (91.7)$$

а в боковом

$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_2.$$

Учитывая (91.6), получим

$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_1 \sin \alpha_1. \quad (91.8)$$

Так как сумма сил канатов должна равняться весу груза, то

$$P = P_1 + 2P_2 \sin \alpha_1. \quad (91.9)$$

Подставляя в равенство (91.9) значения сил из формул (91.7) и (91.8), получаем

$$P = \left( \frac{E_1 S_1}{l_1} + \frac{2E_2 S_2}{l_2} \sin^2 \alpha_1 \right) \Delta l_1, \quad (91.10)$$

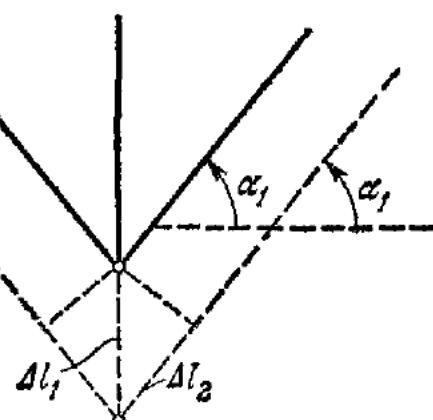


Рис. 266.

откуда и определяем величину удлинения среднего каната:

$$\Delta l_1 = \frac{P}{\frac{E_1 S_1}{l_1} + \frac{2 E_2 S_2}{l_2} \sin^2 \alpha_1}. \quad (91.11)$$

Подставляя это выражение в формулы (91.7) и (91.8), находим искомое решение:

$$P_1 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_2 S_2 l_1}{E_1 S_1 l_2} \sin^2 \alpha_1}, \quad P_2 = \frac{P \sin \alpha_1}{2 \sin^2 \alpha_1 + \frac{E_1 S_1 l_2}{E_2 S_2 l_1}}. \quad (91.12)$$

Отметим, что как в этих примерах, так и во всех аналогичных задачах предполагается, что деформации очень малы по сравнению с размерами тела. Поэтому, например, в первом примере мы полагали длину балки при деформации неизменной и углы наклона упругой линии очень малыми, во втором — углы между канатами неизменными при вытягивании их под действием груза. Эти предположения не соответствуют действительности при очень больших деформациях тел, и тогда все расчеты становятся значительно сложнее.

Итак, может быть два случая: первый, простой, когда упругие деформации тела не зависят от жесткости опор и все силы, действующие на систему и деформирующие ее, однозначно определены заданными внешними силами и геометрией; второй, более сложный, когда упругие деформации системы зависят от жесткости опор, как бы ни были малы деформации опор. Здесь деформации опор играют принципиальную роль и определяют величину реакции опор, а вместе с тем и упругие деформации всей системы. Во втором случае круг физических условий, определяющих упругие деформации, расширяется. Поэтому нужно быть очень осторожным при распространении известных закономерностей на более широкий класс явлений, хотя внешне и совершенно аналогичных. С первого взгляда задача о грузе, висящем на двух нитях, очень похожа на задачу о грузе, висящем на трех нитях. Однако в первой задаче усилие в нитях не зависит от материала, а во второй — это усилие существенно зависит от материала и сечения нити.

## § 92. Перегрузки, невесомость и напряжения

Под действием сил собственного веса тела в нем всегда возникают напряжения. Если тело лежит на подставке (рис. 267), то сила тяготения приложена к каждому его элементу, а уравновешивающая результирующую силу тяготения  $P$  сила реакции подставки  $Q'$  приложена только на поверхности соприкосновения тела с подставкой. Фактически на тело действуют следующие внешние силы: на каждую частицу массы  $\Delta m_i$  — сила тяготения  $\Delta P_i$  и по поверхности соприкосновения с подставкой — силы  $\Delta Q'_k$ . Очевидно, что

$$P = \sum \Delta P_i \quad \text{и} \quad Q' = \sum \Delta Q'_k.$$

Под действием этих сил тело деформируется и в нем возникают внутренние усилия и напряжения, распределение которых будет сложно; оно зависит от строения тела и его упругих свойств. Но очевидно, что в нижней части тела напряжения больше и наибольшие величины они имеют вблизи подставки. Сила веса

$$Q = \sum \Delta Q_k$$

приложена к подставке; она имеет совсем другую физическую природу, чем равная ей сила  $P$  — сила тяготения. Если мы подвесим тело за прикрепленную к нему нить (рис. 268), то  $Q = P$ , но распределение усилий и напряжений в том же теле будет совсем иным:

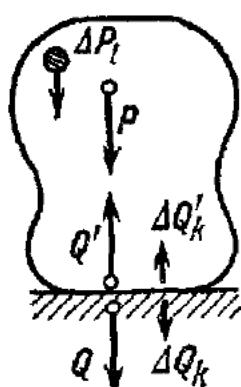


Рис. 267.

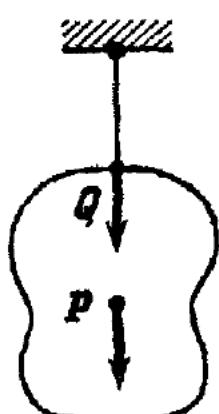


Рис. 268.

во-первых, напряжения имеют другой знак, во-вторых, величины напряжений больше вверху и достигают наибольших значений у точки прикрепления нити к телу<sup>1)</sup>.

Деформации под действием веса очень наглядно можно показать на примере большой пружины из тонкой проволоки (рис. 269). В одном случае пружина лежит на столе так, как показано на рис. 269, *a*, в другом — подвешена за конец

(рис. 269, *б*), в третьем — лежит на столе на боку (рис. 269, *в*). Форма пружины и напряжения в ней во всех случаях совершенно различны.

Нормальные напряжения  $\sigma$  в однородном цилиндре длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  показаны в двух различных случаях на рис. 269, *г* и *д*. Для цилиндра, стоящего на подставке

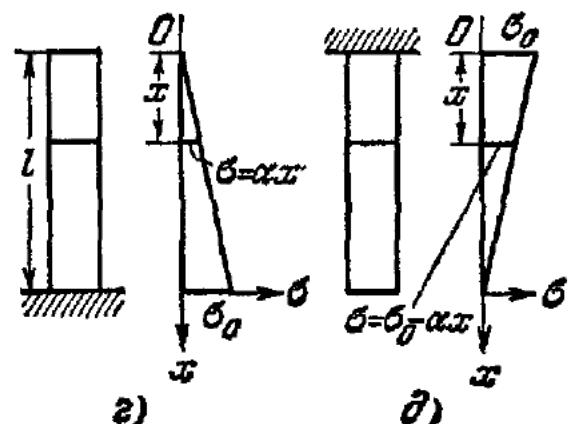
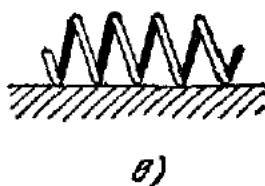
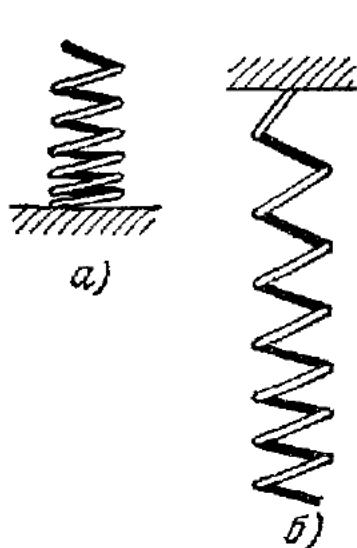


Рис. 269.

(рис. 269, *г*), в поперечном сечении, находящемся на расстоянии  $x$  от верхнего конца, нормальные *сжимающие* напряжения равны  $\sigma = \alpha x$ , где  $\alpha = \sigma_0/l$ ;  $\sigma_0 = Q/S$  — напряжение внизу (у подставки),  $Q$  — вес цилиндра. Для цилиндра, при克莱енного верхним основанием (рис. 269, *д*), нормальные *растягивающие* напряжения равны  $\sigma = \sigma_0 - \alpha x$  в сечении  $x$ . В первом случае напряжения книзу

<sup>1)</sup> Очевидно, что в этом случае нить следует рассматривать как «подставку», т. е. сила веса тела приложена к нити и натягивает ее.

нарастают по величине, во втором — убывают. Диаметр поперечного сечения в обоих случаях увеличивается книзу; это увеличение можно вычислить по формуле (84.1).

Так происходит практически с любым телом, только иногда возникающие в нем деформации очень малы; например, они будут ничтожны в килограммовой гире.

В состоянии невесомости все эти напряжения, во всех сечениях, будут равны нулю, т. е.  $\sigma(x) = 0$  при любом  $x$ .

Особенно важное значение и заметную величину имеют внутренние напряжения, возникающие вследствие изменения веса тела при «перегрузках». Перегрузками называют отношение величины массовых сил в ускоренной системе отсчета к силе тяготения. Если рассматривать покой тела относительно системы отсчета, движущейся поступательно с ускорением, то на каждую частицу тела массы  $\Delta m$  действуют две «массовые» силы: сила тяготения  $\Delta P$  и сила инерции  $-\Delta ma$  (рис. 270). Сила веса тела в этой системе равна

$$Q = P - ma; \quad (92.1)$$

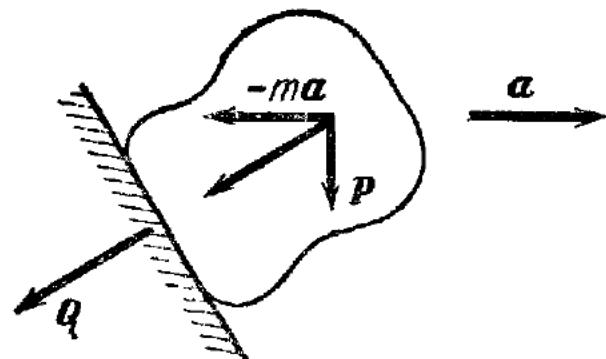


Рис. 270.

она приложена к подставке, которая удерживает тело в ускоренной системе отсчета. Эту формулу следует считать самым общим определением силы веса, пригодным для любой системы. Так же можно ввести силу веса для частицы тела:

$$\Delta Q = \Delta P - \Delta ma, \quad (92.2)$$

но здесь следует сделать такое замечание: массовые силы  $\Delta P$  и  $-\Delta ma$  приложены к частице, а сила  $\Delta Q$  — к поверхности, окружающей рассматриваемую частицу.

Перегрузкой называют отношение <sup>1)</sup>

$$n = \frac{|\Delta P - \Delta ma|}{|\Delta P|}. \quad (92.3)$$

Перегрузка показывает, во сколько раз модуль силы веса в данной системе координат больше силы тяготения.

Отметим, что сила тяготения зависит только от взаимного расположения тел. На автомобиле, в вагоне поезда, на самолете — если они движутся ускоренно — человек ощущает перегрузку, особенно в те моменты, когда ускорение  $a$  изменяется или величина его достаточно велика (несколько  $g$ ). Очень большие ускорения, порядка  $10g$ , вызывают болезненные ощущения вследствие того, что вес всех

<sup>1)</sup> Иногда в технике перегрузкой называют величину  $n - 1$ .

органов человека увеличивается в 10 раз, и только небольшое время достаточно здоровый тренированный организм может без вреда переносить такие перегрузки.

Очевидно, что в состоянии невесомости  $\Delta Q = 0$ , сила тяготения уравновешивается силой инерции, перегрузка также равна нулю и любая частица тела не действует на окружающие. Никаких напряжений вследствие веса в теле не возникает. В этом состоянии каждое физическое тело свободно от *обычных* напряжений<sup>1)</sup>. Все же тела на Земле, покоящиеся и движущиеся, за исключением тел, находящихся в свободном падении, подвержены действию усилий, возникающих вследствие веса, и обладают соответствующими внутренними напряжениями. При перегрузке, равной  $n$ , эти напряжения возрастают в  $n$  раз.

Отметим изменения веса при *вращении* ускоренной системы отсчета. Очевидно, что вес в любой системе отсчета имеет смысл только для тел, покоящихся в этой системе. Поэтому изменения в весе вследствие вращения системы отсчета произойдут только под действием центробежных сил инерции.

На каждую частицу кроме силы тяготения  $\Delta P$  и силы инерции  $-\Delta m a$ , возникающей вследствие поступательного ускорения системы отсчета, будет действовать центробежная сила инерции  $\Delta m \omega^2 \rho$ , где  $\rho$  — вектор расстояния частицы от оси вращения. Последняя сила, вообще говоря, различна для различных точек тела, но результирующая сила приложена в центре масс тела и равна  $m \omega^2 \rho_0$ , где  $\rho_0$  — вектор расстояния от оси до центра масс тела. Тогда

$$Q = P - ma + m\omega^2\rho_0.$$

Вес тела на поверхности вращающейся Земли отличается от  $P$  только на величину центробежной силы инерции,  $a = 0$ .

Мы подчеркиваем разделение понятий силы веса и силы тяготения, потому что в состоянии *невесомости* на тело действует *только сила тяготения* (если рассматривать движение относительно инерциальной системы), а *сила веса равна нулю* и тело свободно от внутренних напряжений.

<sup>1)</sup> Здесь всюду идет речь о напряжениях, возникающих вследствие веса; могут еще существовать и напряжения, определяемые строением тела, неоднородностью, температурной обработкой и т. п.; они останутся и в состоянии невесомости.

## Г л а в а XI

### ЖИДКИЕ И ГАЗООБРАЗНЫЕ ТЕЛА В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

#### § 93. Твердые, жидкые и газообразные тела

Все тела состоят из мельчайших частиц — молекул, которые находятся в постоянном и непрерывном движении. В твердых телах молекулы совершают колебательное движение около некоторого положения равновесия. Но эти перемещения молекул настолько малы, что они совершенно не влияют на движение тел или их частей, рассматриваемых в механике. Среднее положение молекул в твердом теле относительно друг друга вполне определено. При обычном анализе движений твердого тела его мельчайшая частица<sup>1)</sup> содержит настолько большое количество молекул, что эту частицу при движении и деформации тела можно считать сплошной и непрерывной.

Каждое твердое тело имеет свою форму. Для изменения формы, для деформации, необходимо приложить к телу или к его частям некоторые силы. Поэтому твердое тело, в отличие от жидкого и газообразного, сохраняет свою форму. Жидкости и газы представляют собой такие физические тела, которые не имеют определенной формы и принимают форму того сосуда, который они заполняют.

Необходимо отметить, что указанное разграничение между твердым телом и жидкостью до некоторой степени условно, оно относится только к механике. Одно и то же тело ведет себя как твердое, и как жидкое тело, смотря по тому, в каком явлении оно принимает участие. Например, запуская волчок, диск которого сделан из асфальта, мы наблюдаем, что волчок ведет себя как твердое тело; тот же диск, лежащий на подоконнике на солнце, растекается как жидкость. Более четкое и общее разграничение между жидкостью и твердым телом будет сделано при изучении физики твердого тела. Здесь же имеются в виду только механи-

<sup>1)</sup> Частицей данного тела считают некоторый достаточно малый объем, выделенный из данного тела, размеры этого объема очень малы по сравнению с размерами самого тела.

ческие задачи и поэтому указанное разграничение можно считать вполне оправданным.

В газе молекулы совершают беспорядочное, хаотическое движение, соударяясь друг с другом подобно мельчайшим шарикам из твердого материала. Молекулы не связаны друг с другом во время полета, и частицы газа вследствие непрерывных соударений стремятся разлететься во все стороны, и газ равномерно заполняет весь предоставленный ему объем. Поэтому газ — такое физическое тело, которое не имеет ни определенной формы, ни определенного объема. Объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает. При анализе механических явлений и газ можно представлять в виде непрерывного сплошного тела, которое стремится расширяться и равномерно заполнить весь предоставленный ему объем. Такое представление будет правильным только в том случае, когда мельчайшие частицы газообразного тела содержат огромнейшее число молекул. Например, в воздухе при обычных условиях число молекул в 1 мм<sup>3</sup> равно по порядку величины  $10^{16}$ .

В жидкостях, как и в газах, молекулы не связаны друг с другом неизменно; при хаотическом молекулярном движении одна молекула двигается относительно другой как угодно. Но в жидкости, в отличие от газа, среднее расстояние между молекулами остается *почти неизменным*. Следовательно, жидкость представляет собой физическое тело, не имеющее определенной формы, но обладающее почти неизменным объемом. Объем жидкости изменяется только при значительном изменении действующих на жидкость внешних сил.

Жидкое тело всегда ограничено определенной поверхностью, отделяющей его от твердого тела или газа; в последнем случае поверхность жидкости называют *свободной*.

Газообразные тела обычно ограничены или поверхностью жидкости, или поверхностью твердых тел, но они могут и не иметь определенной граничной поверхности, например верхние слои земной атмосферы.

В курсе механики с достаточной степенью точности твердые, жидкие и газообразные тела рассматриваются как сплошные и непрерывные, причем предполагается, что твердое тело при неизменных внешних условиях обладает определенными, присущими ему *формой* и *объемом*, жидкое тело обладает только определенным *объемом*, газообразное тело не имеет *ни формы, ни объема*, ему присущего.

#### § 94. Понятие о давлении

Жидкое или газообразное тело, помещенное в некоторый замкнутый со всех сторон сосуд, может быть подвержено постоянному внешнему воздействию. Пусть жидкость (или газ) помещена в цилиндр с поршнем (рис. 271). Если на поршень действует извест-

ная сила  $F$  и поршень и жидкость находятся в равновесии, то, следовательно, жидкость (или газ) действует на поршень с равной и противоположно направленной силой  $F'$ . Из условия равновесия некоторого объема жидкости, непосредственно прилегающего к поршню, можно установить, что на него со стороны остальной части жидкости действуют силы, т. е. в жидкости, так же как и в твердом теле, возникают внутренние усилия и напряжения.

Постоянные во времени (статические) напряжения и усилия, возникающие в жидкости (или газе), принципиально отличаются

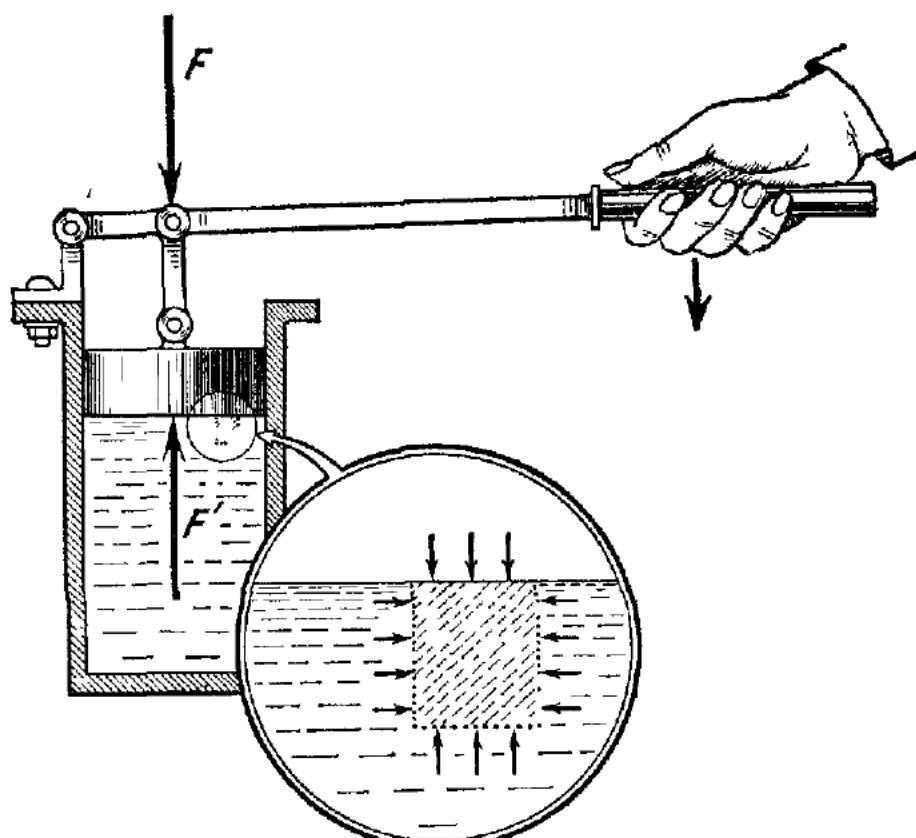


Рис. 271.

от напряжений в твердом теле тем, что напряжения в жидкостях и газах не имеют *касательной* составляющей. Статические внутренние усилия и напряжения в жидкости и газе *всегда нормальны* к поверхности любого выделенного объема. Жидкости и газы в состоянии равновесия «не могут передавать» от одной части к другой касательных усилий. Это было указано в главе о трении, где было отмечено, что трение покоя для жидкостей и газов равно нулю (§ 38). Доказывается это положение целым рядом опытов. Простейший опыт — тело, плавающее в жидкости (см. рис. 95); тогда любая сила  $f$ , приложенная в горизонтальном направлении, вызовет движение тела.

Таким же свойством обладают и газы. Например, детский резиновый шарик, свободно плавающий в воздухе комнаты, любой сколь угодно малой силой будет сдвинут в сторону с места. Газ (воздух) не может препятствовать смещению шарика,

Из простых опытов следует, что в жидких и газообразных телах в состоянии равновесия могут возникать только нормальные напряжения, причем эти напряжения почти всегда (для газов всегда) сжимают выделенный объем. Поэтому напряжения в жидкостях и газах называются *давлением*. Следовательно, давление — это сила, которая действует на единицу площади поверхности выделенного объема и направлена нормально к поверхности.

Давление имеет размерность силы, деленной на площадь, и за единицу давления в системе СИ принят *пascalь* (Па):

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}.$$

В системе СГС за единицу давления принимают *бар*:  $1 \text{ бар} = 1 \text{ дин}/\text{см}^2$ .

В технике давление обычно измеряют в единицах  $\text{кгс}/\text{см}^2$  или  $\text{кгс}/\text{м}^2$ . Первая из них называется *технической атмосферой* (ат). Кроме того, в физике давление часто измеряют высотой ртутного столба в ртутном манометре. С этим способом измерения связана своя единица — *физическая* (или *нормальная*) *атмосфера* (атм):

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм Hg} = 1,033 \text{ ат} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н}/\text{м}^2.$$

Давление при равновесии жидких и газообразных тел подчиняется закону Паскаля, который формулируется так: *давление в любом месте покоящейся жидкости (или газа) одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью (или газом)*.

Закон Паскаля можно вывести из условий равновесия любого по форме объема, если представить себе его вырезанным внутри жидкости (или газа).

Первая часть этого закона доказывается совершенно аналогично тому, как это делалось при определении напряжений в деформируемом теле (§ 85).

Можно доказать справедливость этого закона и опытным путем. Возьмем «насадок», показанный на рис. 272, а. Он представляет собой три трубки, спаянные вместе, а концы их с открытыми отверстиями сходятся к одной точке. Каждая трубка соединена с прибором, измеряющим давление, — манометром. Опуская «насадок» в жидкость, находящуюся под давлением (рис. 272, б), мы установим, что при любой силе, действующей на поршень, при различной ориентировке «насадка» все три манометра покажут одинаковые давления. Изменяя силу, действующую на поршень, мы увеличиваем давление вблизи поршня на определенную величину, и на ту же величину увеличивается давление, показываемое любым «насадком», помещенным где угодно и как угодно внутри жидкости.

Вследствие того, что для выделенного очень малого объема сила веса всегда пренебрежимо мала по сравнению с силами, действующими на его поверхности, давление на как угодно ориентированную малую площадку, проходящую через данную точку жидкости (или газа), *одинаково*.

Вторая часть закона Паскаля следует из таких рассуждений:

Покажем, что во всех точках покоящейся жидкости (или газа), лежащих на одной горизонтали, давление *одинаково*. Выделим объем жидкости в виде приз-

мочки, начинающейся в точке  $A$  и кончающейся в точке  $B$ , в двух точках, лежащих на одной горизонтали, в которых мы желаем сравнить давление (рис. 273). Из условий равновесия призмочки следует, что давление на одном ее конце должно равняться давлению на другом, и, таким образом, доказано, что давление в двух любых точках жидкости, расположенных на одной горизонтали, должно быть одинаковым.

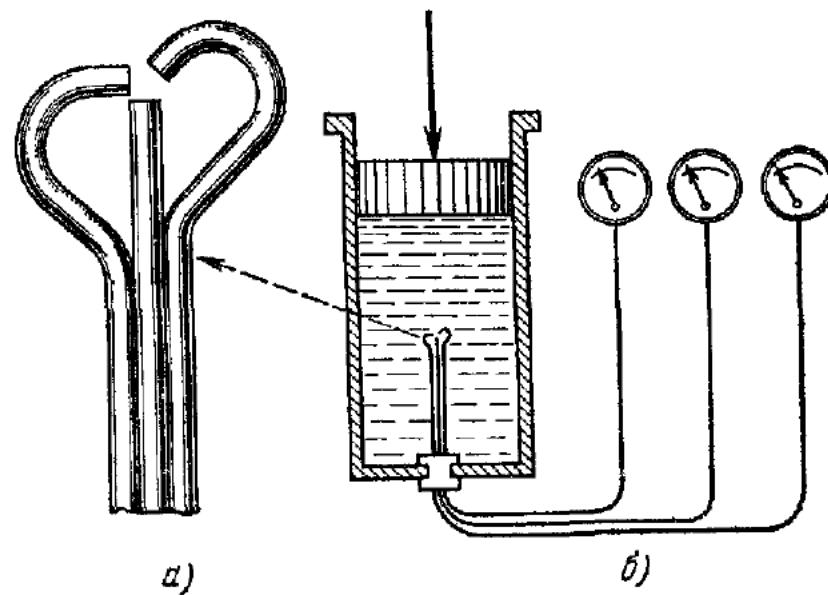


Рис. 272.

Теперь установим связь между давлением в точках  $C$  и  $D$ , которые расположены на одной вертикали внутри жидкости (или газа) (рис. 273). Опять соединим

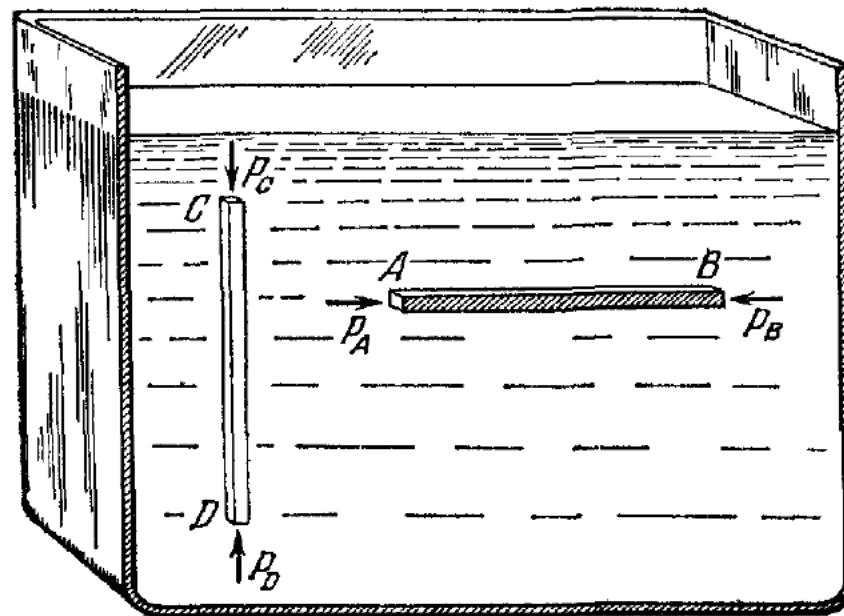


Рис. 273.

эти две точки тонкой призмочкой, основания которой проходят через эти точки, и напишем условие равновесия жидкости, заключенной в призмочке:

$$S_0 p_C + P = S_0 p_D, \quad (94\ 1)$$

где  $P$  — сила тяжести жидкости, находящейся внутри призмочки, а  $S_0$  — площадь поперечного сечения призмочки. Отсюда следует:

$$p_C + \frac{P}{S_0} = p_D,$$

или

$$p_D - p_C = p_g = \frac{P}{S_0}. \quad (94.2)$$

Заметим, что  $p_g = \frac{P}{S_0}$  — давление, создаваемое весом столбика жидкости, расположенного между точками С и D. Если тяжестью жидкости (или газа) можно пренебречь, то давление  $p_C = p_D$ .

### § 95. Связь между плотностью газа и давлением

Плотность жидкости мало зависит от давления. Например, при изменении давления на воду в 1000 атм ее объем изменяется только на 5 %. Поэтому, если в наших опытах происходят изменения давления не более чем на десятки атмосфер, то почти всегда в гидростатике можно при расчетах пренебрегать *изменениями* объема и считать, что исследуемая жидкость *несжимаема*.

Плотность  $\rho$  измеряется в различных единицах, размерность которых [ $m/V$ ]. В системе СИ плотность измеряется в  $\text{кг}/\text{м}^3$ , в физической системе единиц СГС — в единицах  $\text{г}/\text{см}^3$  (в технической системе — в  $\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$ ). Часто в опытах и расчетах используют вместо плотности понятие *удельный вес* — вес вещества, содержащегося в единице объема. Удельный вес измеряют обычно в  $\text{Н}/\text{м}^3$ , в  $\text{гс}/\text{см}^3$  или в  $\text{кгс}/\text{м}^3$ . Удельный вес воды при обычных условиях равен  $9800 \text{ Н}/\text{м}^3$  в системе СИ,  $1 \text{ гс}/\text{см}^3$  в физической системе единиц и примерно  $1000 \text{ кгс}/\text{м}^3$  в технической системе.

Плотность газов существенно зависит от давления, под которым газ находится. При *неизменной температуре* плотность газов (или *удельный вес*) пропорциональна давлению (закон Бойля—Мариотта).

Обозначим начальное давление газа через  $p_n$ , соответствующий этому давлению удельный вес — через  $\gamma_n$  и соответствующее удельному весу  $\gamma$  какое-то другое давление — через  $p$ ; тогда закон Бойля—Мариотта записывается так:

$$\frac{\gamma_n}{\gamma} = \frac{p_n}{p}. \quad (95.1)$$

Этот закон получен опытным путем, посредством простых опытов, известных из курса физики средней школы, где, однако, обычно связывают давление и объем, занимаемый одной и той же массой газа. Очевидно, что, зная объем и вес газа, легко определить удельный вес (или плотность).

Вспомним также из курса средней школы, что при изменении температуры давление и удельный вес так называемых *идеальных* газов удовлетворяют следующему уравнению.

$$p = \frac{R}{\mu} \gamma T, \quad (95.2)$$

где  $T$  — температура газов по шкале Кельвина,  $R$  — постоянная для всех газов величина (*газовая постоянная*),  $\mu$  — молекулярный вес газа. Шкала Кельвина  $T$  связана со шкалой Цельсия  $t$  соотношением  $T = t + 273$ .

Для большинства газов при обычной температуре приближенно справедливо уравнение (95.2), называемое *уравнением Клапейрона*.

### § 96. Распределение давления в покоящейся жидкости

При формулировке и выводе закона Паскаля мы не учитывали веса жидкости (или газа). Теперь оценим влияние веса жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости.

Очевидно, что давление по горизонтали всегда будет *одинаково*, иначе не было бы равновесия. Отсюда следует, что свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Заметим, что этот вывод справедлив и для неоднородной жидкости. По вертикали давление будет изменяться, как можно видеть из выражения (94.2), давление возрастает с глубиной при переходе от точки  $C$  к точке  $D$  (см. рис. 273), оно возрастает за счет тяжести жидкости, находящейся в призмочке с вертикальными стенками, имеющей свои основания около точек  $C$  и  $D$ .

Если жидкость несжимаема, вернее, если сжимаемостью жидкости можно пренебречь, то удельный вес  $\gamma$  не будет зависеть от давления. Тогда вес столбика жидкости равен

$$P = \gamma S_0 l, \quad (96.1)$$

где  $S_0$  — поперечное сечение призмочки,  $l$  — ее длина. Следовательно, давление на нижнее основание призмочки возрастет на величину

$$p_g = \frac{P}{S_0} = \gamma l, \quad (96.2)$$

т. е. давление линейно изменяется с изменением высоты.

Возрастание давления в жидкости с глубиной определяет выталкивающие силы, действующие на погруженные и плавающие на поверхности жидкости тела (см. § 98).

Распределением давления в жидкости объясняется «гидростатический парадокс» с силой давления на дно сосуда (рис. 274). Сила давления на дно сосуда не равна весу жидкости в сосуде, она может быть больше веса жидкости, находящейся в сосуде

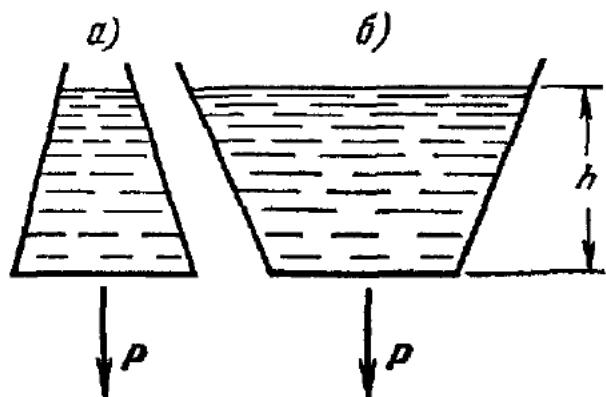


Рис. 274.

(рис. 274, *a*), и меньше (рис. 274, *b*) вследствие того, что давление на дно зависит только от высоты уровня и удельного веса жидкости, а сила давления на дно равна произведению давления на площадь дна  $S$ :

$$P = hS\gamma.$$

Для измерения разности давлений часто применяются манометры в виде сообщающихся сосудов (рис. 275, *a*). Очевидно, что жидкость только тогда будет

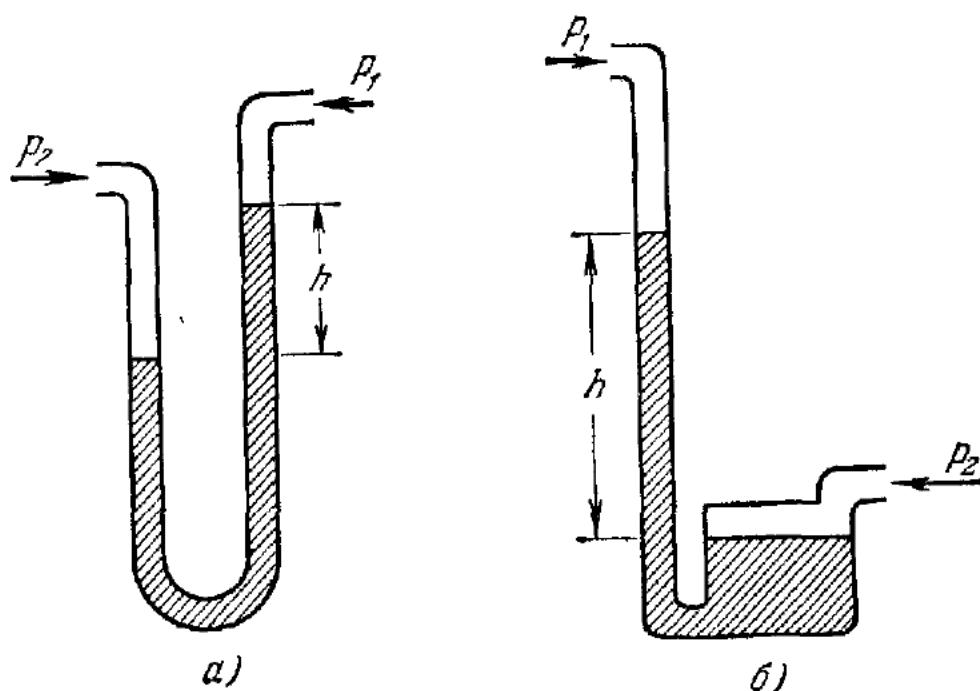


Рис. 275.

в равновесии, когда вследствие разности уровней в сосудах возникает противодавление  $\gamma h$ , уравновешивающее разность давлений над жидкостями в сообщающихся сосудах  $p_2 - p_1$ . Из условий равновесия следует:

$$p_2 - p_1 = \gamma h,$$

где  $h$  — разность уровней жидкости в сообщающихся сосудах. (Если трубки сосуда одинаковы, то можно не принимать во внимание силы поверхностного натяжения жидкости.) Обычно при пользовании манометрами этого типа разность давлений измеряют высотой столба той жидкости, которая заполняет манометр. Так, говорят о разности давления в сантиметрах или миллиметрах водяного, спиртового или ртутного столба.

Практически для удобства отсчета пользуются сообщающимися сосудами различного диаметра (рис. 275, *b*), так как в этом случае можно не считаться с изменением уровня в широком сосуде и вести отсчет только по высоте столба в узенькой трубке<sup>1)</sup>. Легко убедиться, что если отношение диаметров сечения сосудов равно 50, то ошибка будет меньше 0,05%.

<sup>1)</sup> Конечно, здесь уже нельзя пренебрегать влиянием поверхностного натяжения. Но если отсчитывать только изменения давления, то постоянная добавка разности давления, возникающая вследствие поверхностного натяжения, не изменит результата.

### § 97. Распределение давления в газе

Давление в покоящемся газе будет возрастать книзу вследствие тяжести вышележащих верхних слоев. Очевидно, что давление одинаково в любой горизонтальной плоскости. Но при определении изменения давления по вертикали необходимо учесть изменение плотности (или удельного веса) в зависимости от давления.

Можно записать условие равновесия для цилиндра сечением 1 см<sup>2</sup> (рис. 276) и очень малой высоты  $dh$  в таком виде:

$$p + dp + \gamma dh - p = 0,$$

или

$$dp = -\gamma dh, \quad (97.1)$$

где  $dp$  — разность давлений на верхнем и нижнем основаниях цилиндра. Следовательно, изменение давления при изменении высоты на величину  $h$  равно

$$p_h - p_0 = \int_0^h dp = - \int_0^h \gamma dh,$$

или

$$p_0 - p_h = \int_0^h \gamma dh. \quad (97.2)$$

Если газ имеет постоянную температуру, то удельный вес  $\gamma$  и давление  $p$  связаны по закону Бойля — Мариотта (95.1):

$$p = \gamma \frac{p_0}{\gamma_0}. \quad (97.3)$$

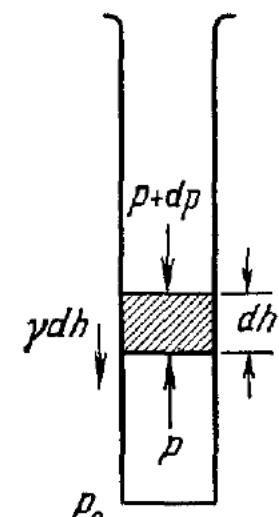


Рис. 276.

Тогда изменение давления с высотой можно вычислить следующим образом. В формулу (97.1) подставляем (97.3):

$$dp = -p \frac{\gamma_0}{p_0} dh, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dh.$$

Интегрируем это выражение от нуля до  $h$ :

$$\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} \int_0^h dh, \quad \text{или} \quad \ln \frac{p_h}{p_0} = -\frac{\gamma_0 h}{p_0}.$$

Преобразуя последнее выражение, получаем

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{p_0}}. \quad (97.4)$$

Это так называемая *барометрическая формула*, показывающая, что давление падает с высотой по показательному закону.

Пользуясь законом (97.4), определим изменение давления воздуха в спокойной атмосфере, полагая, что температура воздуха остается на всех высотах одинаковой.

Ради наглядности проведем сначала на графике зависимости давления  $p$  от высоты  $h$  (рис. 277) пунктирную прямую по закону

$$p = p_0 - \gamma_0 h, \quad (97.5)$$

где  $\gamma_0$  — удельный вес воздуха у поверхности Земли, на уровне моря, при  $h = 0$ . Очевидно, эта пунктирная линия представляет изменение давления с высотой в том воображаемом случае, если

атмосфера состояла бы из «несжимаемого» газа постоянного удельного веса  $\gamma_0$ . Высоту  $h_0$ , при которой в этом случае давление будет равно нулю, называют высотой «однородной атмосферы». По (97.5) высота  $h_0$  будет равна

$$h_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}. \quad (97.6)$$

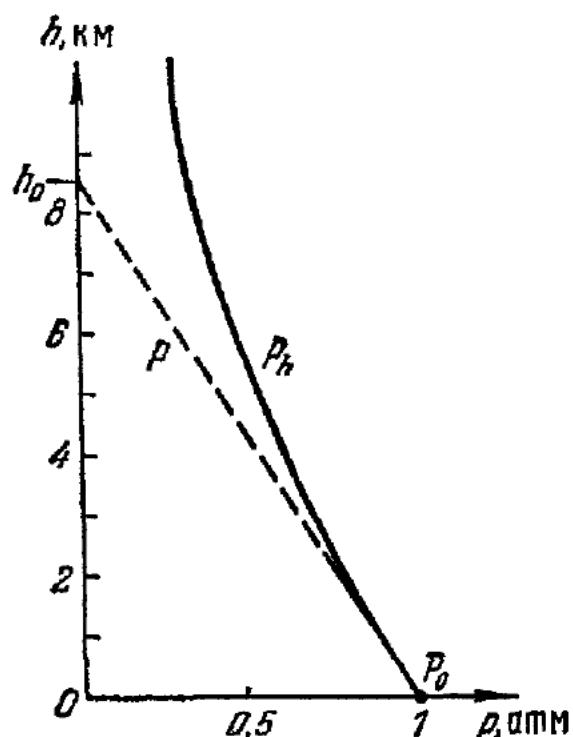


Рис. 277.

При температуре  $15^\circ\text{C}$  и при нормальном атмосферном давлении на уровне моря  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$  удельный вес воздуха равен  $\gamma_0 \approx 12 \text{ Н/м}^3$ . Следовательно, высота однородной атмосферы равна

$$h_0 \approx 8400 \text{ м} = 8,4 \text{ км}.$$

Если представим себе, что выше воздух имел бы такую же плотность, как у поверхности Земли, то Земля была бы покрыта слоем воздуха примерно в 8,4 км и этот слой создавал бы внизу такое же давление, как и действительная атмосфера. Пользуясь выражением для высоты однородной атмосферы (97.6), можно формулу (97.4) записать в таком виде:

$$p_h = p_0 e^{-h/h_0}. \quad (97.7)$$

Этот закон распределения давления по высоте при постоянной температуре показан сплошной кривой на рис. 277.

Вблизи поверхности Земли изменение давления воздуха с высотой будет происходить примерно так же, как и в однородной атмосфере; на рис. 277 пунктирная и сплошная линии совпадают на некотором участке вблизи  $h = 0$ . Поэтому при приближенных расчетах давления на небольшой (по сравнению с 8,4 км) высоте можно пользоваться формулой (97.5).

На основании формулы (97.5) можно оценить ошибку, которую делают при опытах с газом, полагая давление постоянным по всему занимаемому им объему, если этим газом был воздух. В самом деле, при опытах в лаборатории с объемом воздуха, наибольшая высота которого не более 10 м, мы совершим ошибку менее

$$\frac{10}{8400} \approx \frac{1}{8} \text{ %.}$$

В действительности нельзя считать, что температура воздуха остается постоянной по высоте. При сравнительных технических расчетах принимают некоторое условное среднее значение температуры на данной высоте, полученное на основании результатов большого количества измерений (рис. 278). Примерно до высоты в 11 км температура уменьшается линейно, а выше остается постоянной, равной примерно  $-55^{\circ}\text{C}$ . Измерения последних лет, сделанные при помощи реактивных снарядов, показали, что с высоты около 25 км наблюдается повышение температуры, которое продолжается до  $\approx 45$  км, где температура примерно равна  $0^{\circ}\text{C}$ ; начиная с 55 км, температура опять понижается и достигает почти  $-90^{\circ}\text{C}$  на высотах 80—95 км. Затем опять наблюдается повышение температуры, которое достигает почти  $1000^{\circ}\text{C}$  на высоте около 230 км.

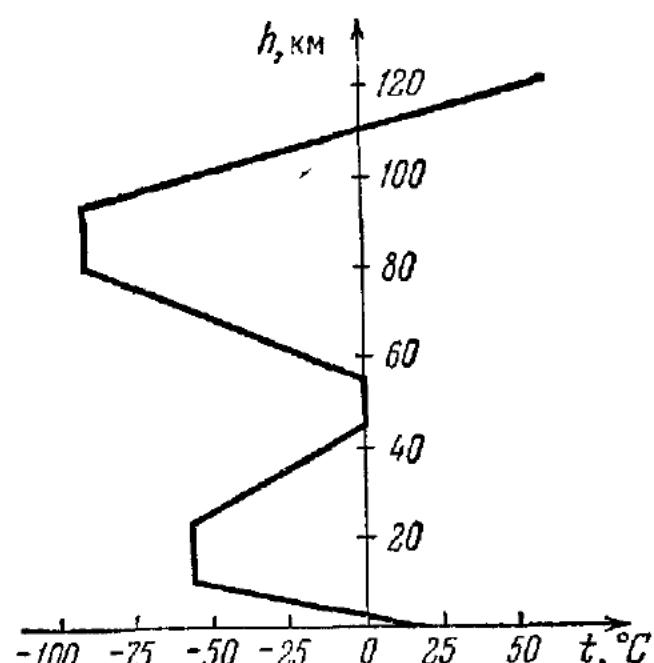


Рис. 278.

Здесь же приведены данные о температуре воздуха в зависимости от высоты, полученные в результате измерений, выполненных при помощи реактивных снарядов. Кривая показывает, что температура уменьшается линейно с высотой до 11 км, а выше остается постоянной, равной примерно  $-55^{\circ}\text{C}$ . Измерения последних лет, сделанные при помощи реактивных снарядов, показали, что с высоты около 25 км наблюдается повышение температуры, которое продолжается до  $\approx 45$  км, где температура примерно равна  $0^{\circ}\text{C}$ ; начиная с 55 км, температура опять понижается и достигает почти  $-90^{\circ}\text{C}$  на высотах 80—95 км. Затем опять наблюдается повышение температуры, которое достигает почти  $1000^{\circ}\text{C}$  на высоте около 230 км.

## § 98. Равновесие тел, плавающих на поверхности жидкости

Тело, погруженное полностью или отчасти в жидкость (или газ), испытывает действие «подъемной» силы со стороны окружающей жидкости или газа. Еще Архимедом (III век до н. э.) был найден основной закон: *всякое тело, погруженное в жидкость (или газ), испытывает со стороны окружающей среды действие силы, равной весу вытесненной телом жидкости (или газа); эта сила направлена вверх и проходит через центр масс вытесненной жидкости (или газа)*.

Наличие такой силы и величина ее просто объясняются распределением давления в весомой жидкости. Для доказательства закона Архимеда необходимо представить себе тело, находящееся в жидкости, разрезанным на цилиндрики малого сечения, имеющие вертикальные образующие, и определить величину силы, действующей на каждый из цилиндриков, а затем подсчитать равнодействующую сил на все цилиндрики, составляющие тело.

Если тело только отчасти погружено в жидкость, то расчет таков же, необходимо только предварительно разделить на цилиндрики погруженную в жидкость часть тела.

Вес тела, плавающего по поверхности жидкости, равен весу вытесненного им объема жидкости. Равновесие плавающего тела будет устойчивым не только в том очевидном случае, когда центр

тяжести тела лежит ниже, чем центр тяжести вытесненной жидкости, как, например, это имеет место для пробирки с дробью на дне, плавающей в воде.

Равновесие может быть устойчивым даже тогда, когда центр тяжести тела лежит выше, чем центр массы вытесненной жидкости,

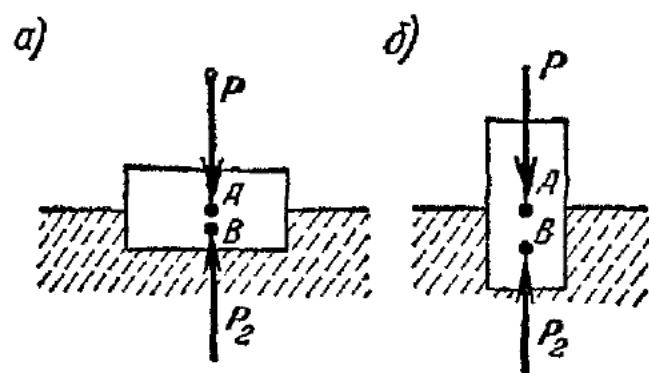


Рис. 279.

как это и бывает в действительности у судов. Например, на поверхности воды плавает деревянный бруск, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 279). Плотность дерева равна примерно 0,5 плотности воды, поэтому очевидно, что центр масс бруска  $A$  всегда лежит выше центра масс вытесненной воды  $B$ , в каком бы положении мы ни пустили его плавать. Однако опыт показывает:

брюск будет плавать устойчиво, когда наибольшая грань параллелепипеда горизонтальна (рис. 279, а), но он немедленно переворачивается, как только мы пустим его плавать в ином положении (рис. 279, б), и принимает после некоторых колебаний устойчивое положение.

### § 99. Условия равновесия тела, погруженного в жидкость или газ

Твердое тело, объем которого в известных пределах не зависит от давления, будет или плавать на поверхности жидкости, или опустится на дно. Если же вес тела в точности равен весу вытесненной жидкости, то оно будет находиться в состоянии безразличного равновесия в любой части жидкости.

Такое равновесие плавающего тела можно легко показать простыми опытами. Например, опустив куриное яйцо в неглубокий стеклянный сосуд с водой и понемногу разводя в воде соль, можно заставить яйцо плавать на любой глубине (рис. 280), причем положение яйца будет всегда такое, что центр тяжести яйца и центр тяжести вытесненной воды будут лежать на одной вертикальной прямой и центр тяжести яйца будет лежать ниже. При отклонении яйца от этого положения оно переворачивается и занимает в конце концов устойчивое положение.

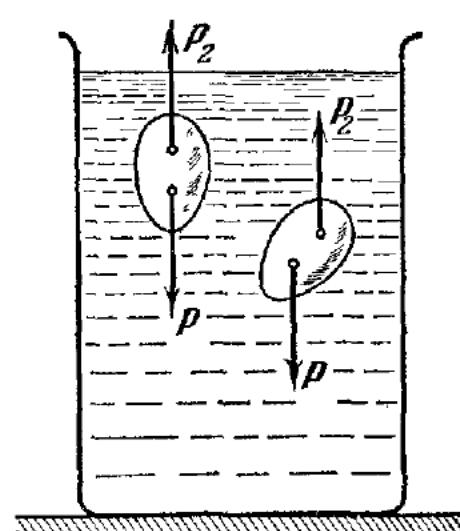


Рис. 280.

Обычно объем тела уменьшается с увеличением давления, поэтому равновесие такого тела внутри жидкости постоянной плотности всегда неустойчиво. Действительно, пусть на некоторой глубине при определенном давлении вес тела равен весу вытесненной жидкости; при небольшом опускании тела давление на него увеличивается и объем его уменьшается, следовательно, уменьшается и подъемная сила, поэтому тело будет опускаться далее; аналогичная картина будет наблюдаться и при небольшом подъеме тела от положения равновесия, но в этом случае изменения всех величин происходят в обратном направлении: давление падает, объем возрастает, подъемная сила увеличивается, тело поднимается.

Картину равновесия тела, объем которого уменьшается с увеличением давления, можно наблюдать на опытах с простым, широко известным прибором, называемым «картизанским водолазом». В высоком стеклянном сосуде, наполненном водой и закрытом упругой перепонкой (рис. 281), плавает поплавок, состоящий из перевернутой кверху дном стеклянной пробирки и грузика, привязанного к нижнему открытому концу пробирки. Часть пробирки заполнена водой, а в остальной части находится воздух.

При надавливании на упругую перепонку давление над жидкостью и, следовательно, в самой жидкости возрастает, воздух, находящийся в пробирке, сжимается, вытесняемый поплавком объем жидкости уменьшается и поплавок опускается на дно. Уменьшая давление на перепонку, можно опять вернуть поплавок в верхнее положение. Регулируя нажатием на перепонку, можно заставить поплавок двигаться как угодно: вверх и вниз. В старину такой прибор был поучительной и забавной игрушкой — ныряющему поплавку придавали форму и вид фигурки человека, чертика и т. п.

Условия равновесия тела, плавающего в газе, те же, что и в жидкости. Если объем тела, плавающего в газе, не зависит от давления, то равновесие будет всегда устойчивым, так как удельный вес газа возрастает с уменьшением высоты. Определение устойчивости равновесия плавающего тела в том случае, когда тело изменяет свой объем при изменении давления, представляет более сложную задачу. В этом случае необходимо учитывать изменения объемов как газа, так и тела.

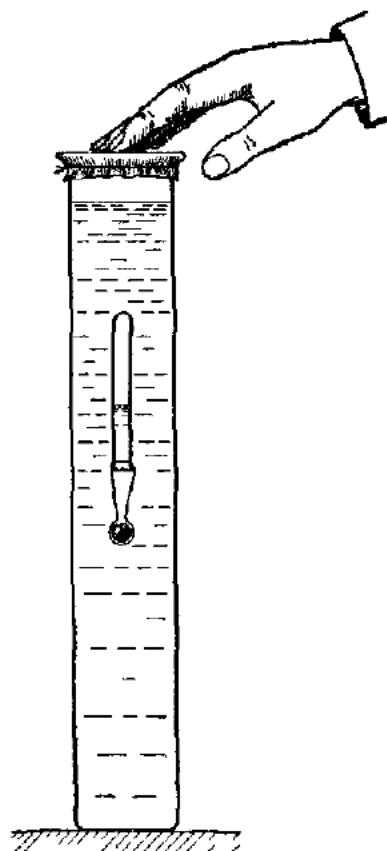


Рис. 281.

## Глава XII

# ТЕЧЕНИЕ ЖИДКИХ И ГАЗООБРАЗНЫХ ТЕЛ

## § 100. Стационарное течение жидкости

При движении жидкости и газа между отдельными частицами возникают силы внутреннего трения, или силы вязкости. Коэффициент вязкости таких веществ, как, например, воздух, вода, относительно невелик, поэтому при определенных условиях (при каких — это выясним подробнее далее) можно приближенно рассматривать течение жидкости (или газа) как течение «идеальной» жидкости, т. е. жидкости, лишенной вязкости. Такой жидкости и такого газа, разумеется, нет. Однако течение жидкости и газа во многих практически очень важных случаях можно приближенно рассматривать как течение идеальной жидкости.

Зная законы течения идеальной жидкости, можно уже в них внести поправки, учитывающие влияние вязкости. Такой путь последовательного изучения закономерностей движения жидкости и газа позволяет относительно простыми способами выяснить сложные законы движения вязкой жидкости.

Картину текущей жидкости (газа) можно представить себе при помощи поля вектора скоростей частиц. Каждой точке пространства  $r$  соответствует в момент времени  $t$  вектор  $v(r, t)$  — вектор скорости частицы, проходящей через точку  $r$ , он зависит от положения точки  $r$  и времени  $t$ .

Течение жидкости (или газа) называют *стационарным*, если все величины: скорость, давление, плотность, температура и т. д. — остаются *постоянными* все время в каждом месте пространства, занятого текущей жидкостью. В противном случае движение называется *неустановившимся* (или *нестационарным*), и законы течения будут еще сложнее.

Стационарное течение газа по трубам или стационарное течение воды по трубам, каналам и рекам представляет довольно сложную картину, даже и с кинематической точки зрения. Вообще говоря, во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью, скорости частиц различны по величине и по направлению. Дав-

ление, под которым находятся движущиеся частицы, также различно, хотя оно закономерно связано с движением частиц. В движущемся газе меняется от места к месту его плотность, поскольку изменяется давление и изменяется температура и т. д.

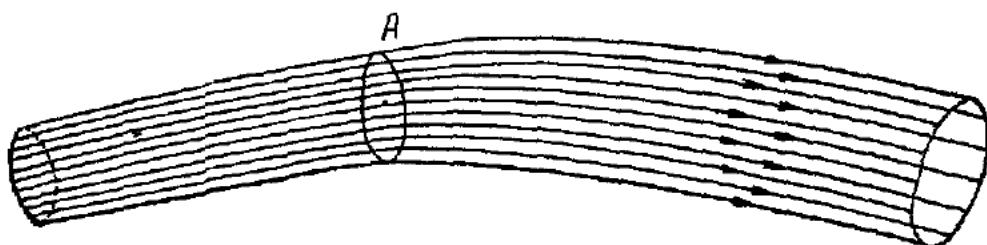


Рис 282

Анализ картины стационарного течения значительно упростится, если мы разобьем текущую жидкость<sup>1)</sup> на достаточно тонкие *трубки тока*. Представим себе в некотором месте жидкости твердое колечко *A* из тончайшей нити (рис. 282), стоящее поперек потока; проведем траектории всех тех частиц, которые коснулись колечка с внешней стороны. Совокупность этих траекторий и образует такую трубку. Такую трубку можно продолжить вдоль по течению, стенки ее образованы частицами, которые когда-то прошли вблизи нити кольца; и также вверх по течению ее стенки образованы теми же частицами, которые пройдут около нити колечка в свое время.

Жидкость непрерывна, следовательно, и стенку трубы можно мыслить как сплошную, непроницаемую. Скорость частиц на стенах трубы касательна к поверхности трубы. Можно все пространство текущей жидкости разбить на такие трубы тока. Для наблюдения картины течения некоторые трубы тока можно отметить, сделать видимыми. Так, например, в поток воздуха можно выпускать струйки дыма или какого-либо окрашенного газа, а в поток воды — в определенных местах краску, как это сделано в демонстрационном приборе для наблюдения картины обтекания тел, показанном на рис. 283.

Частицы жидкости, прошедшие вблизи отверстия, из которого

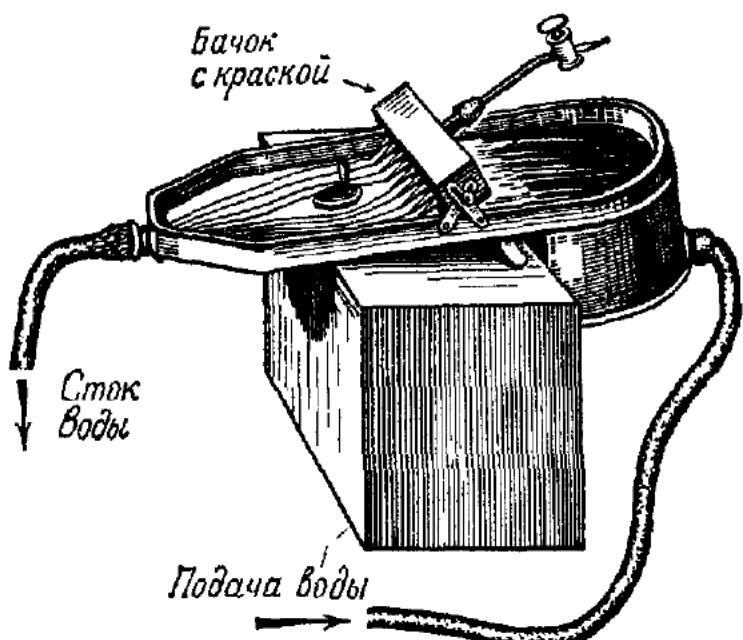


Рис 283

<sup>1)</sup> Далее мы будем подразумевать под потоком жидкости и поток газа, не оговаривая это специально, за исключением тех случаев, когда различие между жидкостью и газом будет существенным.

выпущена краска (или дым), отмечают трубы тока в потоке, которые можно наблюдать глазом или фотографировать.

Очевидно, что стенки трубы тока в данном случае образованы траекториями частиц. Частица жидкости, находящаяся в какой-то трубке, так и будет в ней оставаться в течение всего времени движения. Так как сечение трубы мы можем взять сколь угодно малым, то всегда можно считать, что скорость частиц жидкости одинакова в поперечном сечении трубы и направлена перпендикулярно к нормальному сечению трубы.

Течение в трубе тока будет таким же, как и течение без трения в трубе с жесткими стенками, сечение которой достаточно плавно изменяется.

При неустановившемся течении можно представить себе трубы тока, но они уже не будут образованы траекториями частиц. Действительно, представим векторное поле скоростей  $v(r, t)$  частиц в момент времени  $t$ . В этом поле можно мысленно провести линии тока — такие кривые, касательная к которым всюду совпадает по направлению с вектором скорости  $v$ . Эти кривые, проходящие через «колечко», образуют трубку тока. Ясно, что трубка тока, образованная линиями, проходящими через данное «колечко», зависит от времени. Кроме того, следует отметить, что линия тока, вообще говоря, совсем не совпадает с траекторией частицы, потому что, когда частица перейдет в соседнюю точку  $r + dr$ , вектор скорости в этой точке за время  $dt$  уже изменится на какую-то величину, и т. д. А при построении линий тока принимаются во внимание только скорости в данный момент во всех точках пространства. Линии тока образованы смещениями различных частиц, а траектория — движением одной частицы.

Рассмотрим условие постоянства потока массы при течении по трубке. При стационарном течении масса жидкости или газа, прошедшая за единицу времени через любое поперечное сечение трубы, *одинакова* для всех сечений.

Представим себе трубку с площадью сечения  $S$ . Скорость в этом сечении равна  $v$ ; тогда масса жидкости, прошедшая за секунду через это сечение, равна

$$Q = \rho v S, \quad (100.1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости или газа в данном сечении. Тогда в другом сечении трубы площадью  $S_1$  количество (масса) жидкости, прошедшей за секунду, должно быть также равно

$$Q = \rho_1 v_1 S_1, \quad (100.2)$$

где  $v_1$  и  $\rho_1$  — скорость и плотность жидкости во втором сечении трубы. В противном случае количество жидкости между этими двумя сечениями начало бы возрастать и убывать и течение перестало бы быть стационарным.

Следовательно, закон постоянства потока массы может быть записан так:

$$Q = \rho v S = \text{const} \quad (100.3)$$

вдоль любой трубы тока.

Если жидкость несжимаема, какой является, например, при обычных опытах вода, то плотность жидкости  $\rho$  остается постоянной, и поэтому на основании закона постоянства потока массы (100.3) скорость в любом сечении трубы обратно пропорциональна

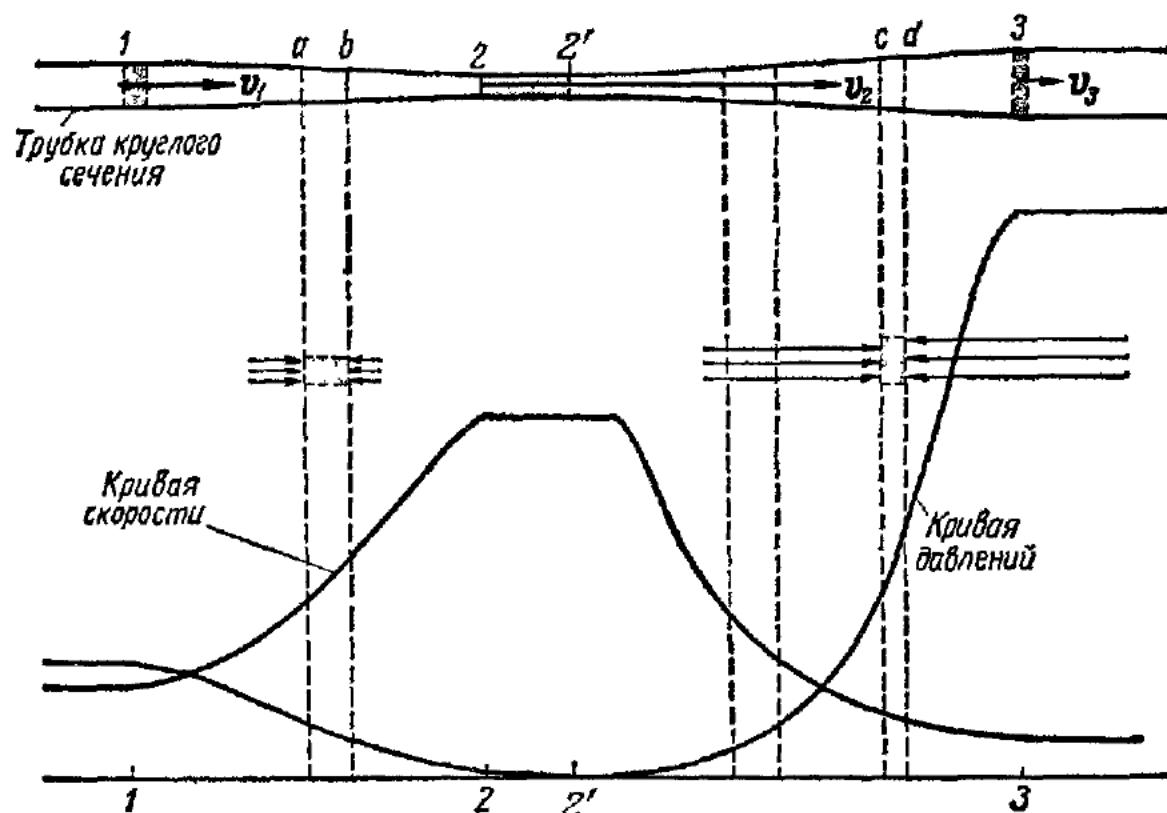


Рис. 284.

площади поперечного сечения. Таким образом, форма трубы определяет и скорость течения: скорость возрастает там, где трубы тока сужаются, и, наоборот, падает там, где они расширяются (рис. 284).

Такая же картина будет и при течении по широкой трубе, у которой сечение довольно плавно изменяется, так что на расстоянии, примерно равном длине диаметра трубы, ее можно считать с достаточной степенью точности цилиндрической. Если плотность газа или жидкости в такой трубе не изменяется, то при стационарном течении скорость в каждом поперечном сечении обратно пропорциональна площади этого сечения.

Найдем связь между изменением скорости и изменением давления вдоль трубы тока. Проследим частицу жидкости, занимающую некоторый отрезок трубы тока (см. рис. 284). Можно представлять себе течение так, что эта частица движется вдоль трубы, деформируясь и занимая все сечение трубы.

Что можно сказать о давлении вдоль трубы тока, если мы будем следить за движением частицы? Совершенно очевидно, что если поперечное сечение трубы тока на данном участке постоянно, то и скорость частицы несжимаемой жидкости остается постоянной. Следовательно, частица на этом участке не имеет ускорения. Если трубка сужается вдоль потока (участок 1—2), то частица жидкости здесь ускоряется, скорость ее возрастает. Если же трубка расширяется (участок 2'—3), то частица жидкости замедляется, скорость ее падает на этом участке.

Какие силы сообщают частице ускорение, если трубка горизонтальна? Только силы давления со стороны соседних частиц; следовательно, в сужающейся трубке тока (участок 1—2) давление должно падать в направлении течения, т. е. давление сзади частицы ( $ab$ ) должно быть больше, чем спереди, чтобы сообщить частице ускорение и обеспечить нарастание скорости. В расширяющейся трубке (участок 2'—3), где скорость частицы уменьшается по течению, давление возрастает, частица ( $cd$ ) имеет отрицательное ускорение, поэтому давление впереди каждой частицы должно быть больше, чем сзади. Таким образом, зная изменение

сечения трубы тока несжимаемой жидкости, можно качественно определить, как будет меняться давление вдоль трубы. График распределения давления<sup>1)</sup> вдоль трубы показан на рис. 284.

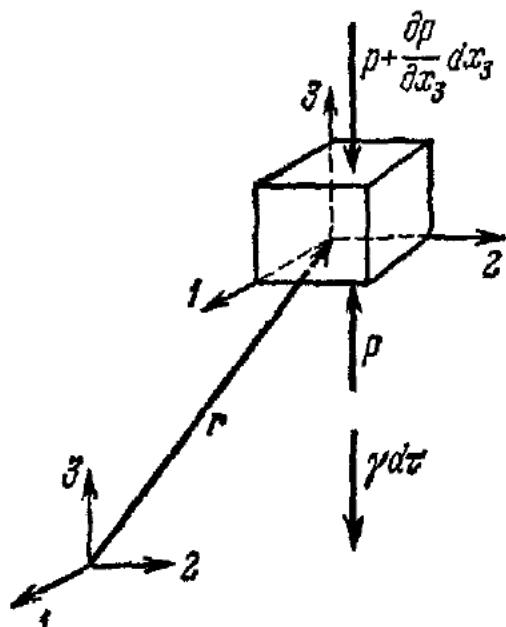


Рис. 285.

### § 101. Основной закон динамики для частицы идеальной жидкости

Каждая частица текущей жидкости (газа) испытывает воздействие со стороны окружающих частиц, это воздействие определяется давлением  $p$ . Мы уже видели, что изменение давления определяет ускорение движущейся частицы. Исходя из этих представлений, выведем основной закон динамики для частицы жидкости.

Предположим, что выделена частица в форме куба объемом  $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ , находящаяся в точке  $r (x_1, x_2, x_3)$  (рис. 285). На каждую грань кубика действует сила давления. Например, на грань  $dx_1 dx_2$  снизу действует усилие  $p dx_1 dx_2$ , а на противоположную грань — усилие

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2.$$

<sup>1)</sup> Распределение давления определено по закону Бернулли, который выводится в следующих параграфах.

Поэтому вдоль оси 3 на кубик действует сила

$$\rho dx_1 dx_2 \left( p + \frac{\partial p}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = - \frac{\partial p}{\partial x_3} d\tau.$$

Кроме этого, на частицу действует сила тяготения, равная

$$-\gamma d\tau,$$

направленная противоположно оси 3 (здесь  $\gamma$  — удельный вес жидкости). Тогда по второму закону динамики.

$$\rho d\tau \frac{dv_3}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_3} d\tau - \gamma d\tau,$$

или

$$\rho \frac{dv_3}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_3} - \gamma, \quad (101.1)$$

где  $v_3$  — компонента скорости по оси 3.

Вследствие достаточной малости объема  $d\tau$  мы считаем, что плотность  $\rho$  постоянна по всему объему. Также давление  $p$  на границах кубика одинаково во всех точках и одинаковы скорости  $\mathbf{v}$ .

Аналогичным путем найдем, что в направлении двух других осей

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho \frac{dv_2}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (101.2)$$

так как сила тяжести направлена вдоль оси 3.

Теперь можно записать три формулы (101.1) и (101.2) в векторном виде. Если  $e_1, e_2, e_3$  — единичные векторы по осям координат, то

$$\rho \frac{d}{dt} (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) = - \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} e_3 \right) - \gamma e_3,$$

или

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g}, \quad (101.3)$$

где вектор  $\frac{\partial p}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} e_3$  обозначен символом  $\operatorname{grad} p$  и называется градиентом<sup>1)</sup> давления  $p$ , вектор  $-\gamma e_3 = \rho \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения тяготения.

Формула (101.3) выражает основной закон гидродинамики для идеальной (без трения) жидкости или газа. В нестационарном потоке все величины  $\rho, \mathbf{v}, p$  зависят от места  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ . В стационарном — только от места  $\mathbf{r}$ , поэтому при рассмотрении стационарного течения удобно воспользоваться представлением о трубках

<sup>1)</sup> Градиент иногда обозначают с помощью символического вектора  $e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \nabla$ , тогда  $\operatorname{grad} p = \nabla p$ .

тока: они постоянны, и закон динамики для идеальной жидкости в достаточно тонкой трубке тока можно описать следующим образом. Скорость  $v = v(s)$  является функцией только координаты  $s$  (координаты вдоль осевой линии трубы). Частица, которая в момент времени  $t$  имела координату  $s$ , за время  $dt$  сдвинется на отрезок  $ds_1$  (рис. 286).

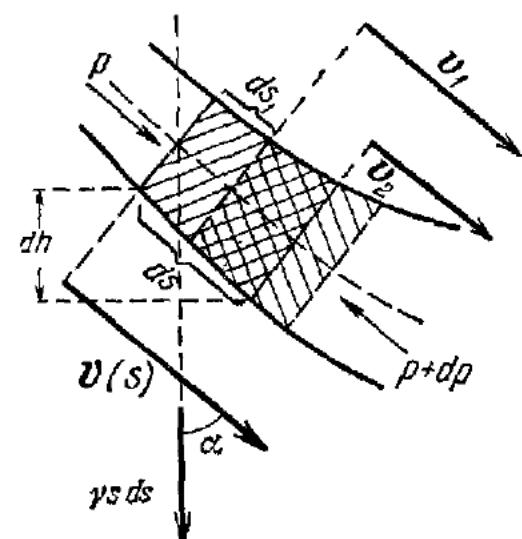


Рис. 286.

Скорость частицы в новом положении будет другая, какая-то  $v_1$ , которую всегда можно представить так:

$$v_1 = v(s) + \frac{dv}{ds} ds_1.$$

Следовательно, разность скоростей частицы в момент времени  $t$  и момент времени  $t + dt$  дает приращение скорости частицы

$$dv = v_1 - v(s) = \frac{dv}{ds} ds_1.$$

Заменив в этом выражении смещение частицы  $ds_1$  на  $v(s) dt$ , получаем

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (101.4)$$

Ускорение частицы при стационарном течении равно производной вдоль оси трубы от половины квадрата скорости потока. Поэтому основное уравнение динамики для частицы идеальной жидкости (101.3) в этом случае можно записать так:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma \cos \alpha = \rho v \frac{dv}{ds} = \rho \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (101.5)$$

Здесь  $\alpha$  — угол между вертикалью и направлением осевой линии трубы тока в данном сечении. Это уравнение справедливо для стационарного течения как несжимаемой жидкости, лишенной вязкости, так и для сжимаемого газа, не обладающего внутренним трением.

Остановимся на определении ускорения частицы  $\frac{dv}{dt}$  в общем случае нестационарного течения, когда нам известно поле  $v(r, t)$ . Мы видели, что ускорение частицы вдоль трубы тока в стационарном течении равно  $v \frac{dv}{ds}$ , т. е. определяется изменением скорости вдоль трубы. Но этот же результат можно получить, не прибегая к рассмотрению трубок тока.

В момент  $t$  скорость частицы, движущейся через точку  $r$ , равна  $v(r, t)$ , а через отрезок времени  $dt$  частица будет находиться в точке  $r + dr$  и скорость будет равна  $v(r + dr, t + dt)$ . Тогда приращение скорости этой частицы

$$dv = v(r + dr, t + dt) - v(r, t) \quad (101.6)$$

и ускорение  $= \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Разобъем приращение  $d\mathbf{v}$  на две части в первой определяется  $(d\mathbf{v})_t$  — приращение только вследствие изменения времени, во второй  $(d\mathbf{v})_r$  — приращение  $\mathbf{v}$  вследствие изменения места частицы (на рис. 287 вычерчена еще скорость  $\mathbf{v}(r + dr, t)$  — скорость, которую имела другая частица, находившаяся в точке  $r + dr$  в момент  $t$ ). Поэтому

$$d\mathbf{v} = (d\mathbf{v})_t + (d\mathbf{v})_r, \quad (101.7)$$

где

$$(d\mathbf{v})_t = \mathbf{v}(r + dr, t + dt) - \mathbf{v}(r + dr, t), \quad (d\mathbf{v})_r = \mathbf{v}(r + dr, t) - \mathbf{v}(r, t). \quad (101.8)$$

В стационарном потоке ускорение определяется только  $(d\mathbf{v})_r$ , так как  $(d\mathbf{v})_t = 0$ , ибо скорость в каждой точке пространства не зависит от времени. В нестационарном потоке, вообще говоря, оба члена стличны от нуля. Первый член

$$(d\mathbf{v})_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$$

определяется частной производной от  $\mathbf{v}$  при  $r = \text{const}$ . Второй член (дифференциал  $(d\mathbf{v})_r$ ) имеет более сложный вид, он зависит от «производной по направлению», по  $dr$ , при  $t = \text{const}$ , эту производную иногда записывают  $\frac{d\mathbf{v}}{dr}$ . Вычислять  $(d\mathbf{v})_r$  нужно как приращение вектора  $\mathbf{v}$  при изменении места на  $dr$  в стационарном потоке. Такое приращение в постоянном векторном поле при перемещении на  $dr$  мы уже рассматривали, анализируя малые деформации упругого тела (§ 86). Каждая компонента скорости  $v_1, v_2, v_3$  является функцией трех переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Напомним, что  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$  и  $r = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ , где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты прямоугольной системы координат. Тогда приращения компонент скорости можно записать так.

$$\begin{aligned} dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3, \\ dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3, \\ dv_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3, \end{aligned} \quad (101.9)$$

и  $(d\mathbf{v})_r = dv_1 \mathbf{e}_1 + dv_2 \mathbf{e}_2 + dv_3 \mathbf{e}_3$ . Рассматривая систему (101.9), мы видим, что ее можно представить в виде произведения тензора  $U$  на вектор  $dr = dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3$  в таком виде.

$$(d\mathbf{v})_r = U dr, \quad (101.10)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (101.11)$$

Так как в данном случае идет речь о приращении скорости определенной частицы, которая за время  $dt$  сдвинулась из точки  $r$  на  $dr$ , то  $dr = \mathbf{v} dt$ . Подставляя это

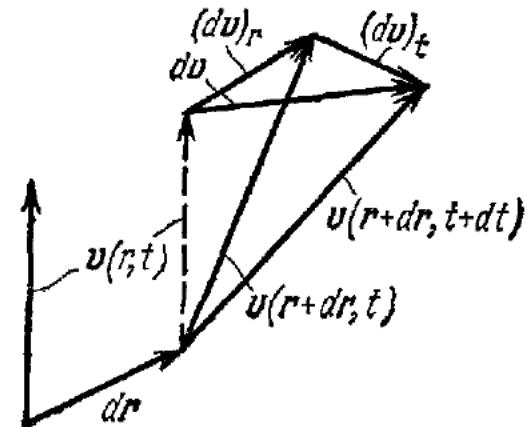


Рис. 287.

в (101.10), получаем

$$(dv)_r = U \mathbf{v} dt, \quad (101.12)$$

или ускорение частицы  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ , учитывая (101.7) и (101.12), теперь можно записать так:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{(dv)_t}{dt} + \frac{(dv)_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \mathbf{v}. \quad (101.13)$$

Это и есть общее выражение для ускорения частицы. Первая часть — частная производная по  $t$ , вторая — произведение тензора (101.11) на  $\mathbf{v}$ .

В стационарном потоке  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  и

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = U \mathbf{v}. \quad (101.14)$$

Если скорость, плотность и давление потока зависят только от одной координаты и скорость направлена по этой координате, например, если  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 = v_3 = 0$  и все производные по  $x_2$  и  $x_3$  равны нулю, то  $\frac{dv_1}{dt} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ , как мы видели раньше в (101.4), где  $x_1 = s$  и  $v_1 = v$ . Давление  $p$  — также функция только  $x_1$ , и поэтому уравнение гидродинамики (101.3), если пренебречь тяготением, в этом случае принимает вид

$$\rho v_1 \frac{dv_1}{ds} = - \frac{dp}{ds},$$

как получено ранее (см. (101.5)).

## § 102. Уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости

Для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости из основного уравнения динамики движения частицы вдоль трубы тока легко получить более простое и важное уравнение. В этом случае плотность и удельный вес жидкости остаются постоянными, и поэтому уравнение (101.5) может быть переписано так:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma \cos \alpha = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} \right). \quad (102.1)$$

Обозначим через  $h$  высоту того места, где находится частица с координатой  $s$ ; тогда смещение частицы на  $ds$  связано с изменением высоты на  $dh$  следующим образом (см. рис. 286):

$$-dh = ds \cos \alpha; \quad (102.2)$$

поэтому заменим в (102.1)  $\cos \alpha$  на  $-\frac{dh}{ds}$  и получим

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} \right); \quad (102.3)$$

здесь все члены представляют производные по координате  $s$ , следовательно,

$$\frac{d}{ds} \left( p + \gamma h + \frac{\rho v^2}{2} \right) = 0. \quad (102.4)$$

Равенство нулю производной означает, что сумма трех величин остается постоянной вдоль трубы тока, или

$$\mathcal{E} = p + \gamma h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (102.5)$$

Это и есть известное уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости. Оно играет фундаментальную роль во всех гидродинамических исследованиях. В уравнении Бернулли  $p$  — «статическое» давление, давление, сжимающее частицу жидкости;  $\gamma h$  — изменение давления при изменении высоты на величину  $h$ ;  $\frac{\rho v^2}{2}$  называется «динамическим давлением» (см. § 106).

При помощи уравнения Бернулли (102.5) просто решается много сложных задач. Действительно, если мы можем разбить поле текущей жидкости на трубы тока и определить по каким-то соображениям значения давления  $p_0$  и скорости  $v_0$  в какой-то точке, высота которой  $h_0$  нам известна, то, как бы ни изменялись по трубке и скорость, и давление, и высота, величина, вычисленная по формуле (102.5), останется неизменной. Это условие помогает находить неизвестные величины в других местах течения. Как это делается, увидим при анализе различных примеров и задач.

Уравнение Бернулли представляет собой следствие закона сохранения энергии для частицы жидкости, движущейся вдоль трубы тока. Оно следует из того, что работа сил давления должна равняться увеличению суммы кинетической и потенциальной энергий частицы, ведь силы давления представляют внешние силы по отношению к рассматриваемой частице.

Рассмотрим изменение энергии и работу сил давления за время  $dt$  при перемещении частицы жидкости, которая в момент  $t$  занимает участок трубы длиной  $ds$  (см. рис. 286). Пусть за это время задний (по потоку) фронт частицы переместился на отрезок  $ds_1$ , который, вообще говоря, не равен длине частицы  $ds$  (на рисунке он показан более коротким). Тогда изменения, которые произошли при перемещении частицы, сводятся к тому, что верхняя косо заштрихованная часть объемом  $dQ = S ds_1$  перешла на место нижней косо заштрихованной части, имеющей тот же самый объем  $dQ$ , средняя, заштрихованная в клетку, часть не изменила своего состояния за время  $dt$ , хотя она через время  $dt$  состоит уже из других материальных частиц. Поэтому приращение (уменьшение) потенциальной энергии частицы запишется в виде

$$-\gamma dQ \cos \alpha ds = \gamma dQ dh, \quad (102.6)$$

если учтем равенство (102.2).

Приращение кинетической энергии равно

$$\left( \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} \right) dQ = \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} \right) dQ ds, \quad (102.7)$$

где  $v_1$  — скорость на переднем фронте частицы длиной  $ds$ . Работа сил давления при перемещении заднего фронта равна  $pS ds_1 = p dQ$ , при перемещении переднего фронта —  $(p + dp)dQ$ , и работа всех сил давления равна

$$[p - (p + dp)] dQ = -dp dQ \quad (102.8)$$

Приравнивая работу сил давления изменению кинетической и потенциальной энергий частицы, получаем

$$\gamma dQ dh + \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} \right) dQ ds = - dp dQ. \quad (102.9)$$

Сокращая на  $dQ ds$ , получаем (102.4); интегрируя его вдоль линии тока, приходим к уравнению Бернулли (102.5).

### § 103. Истечение жидкости из сосуда

Пользуясь уравнением Бернулли (102.5), легко определить скорость весомой жидкости, вытекающей из сосуда. Пусть жидкость вытекает из сосуда, имеющего сбоку отверстие (рис. 288). Отверстие снабжено специальным «насадком», который направляет струю. При истечении вся жидкость в сосуде придет в движение, и ее можно разбить на трубки тока. Точное разбиение жидкости на трубки тока представляет довольно сложную задачу даже

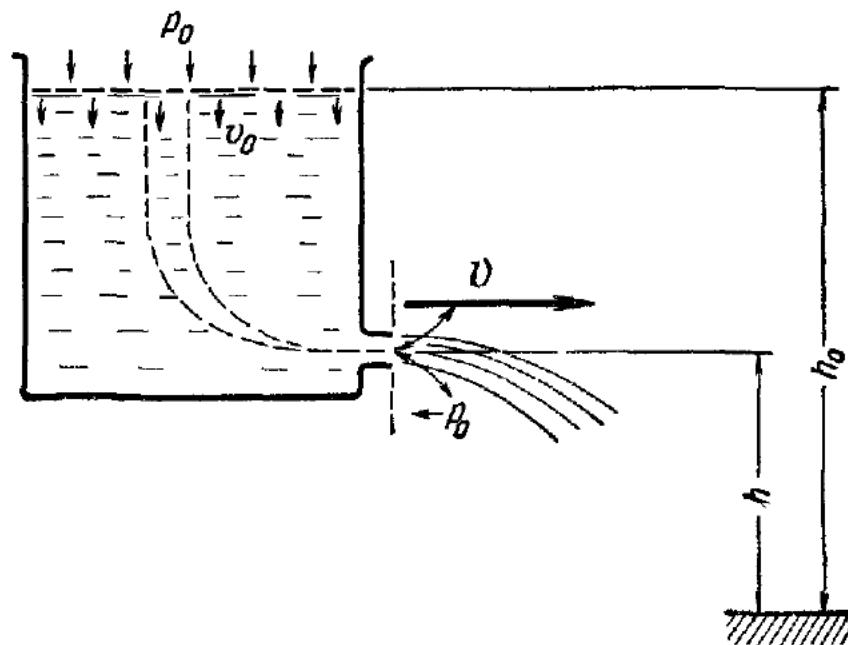


Рис. 288.

при простой форме сосуда. Но нам нет необходимости знать, как идут трубки тока по всему объему текущей в сосуде жидкости, нам достаточно знать, что все трубки тока начинаются на свободной поверхности жидкости и обязательно проходят через отверстие «насадка».

На свободной поверхности жидкости все трубки тока имеют одинаковую скорость  $v_0$ , одинаковое давление  $p_0$  и одинаковую высоту  $h_0$ , так как поверхность жидкости при истечении опускается вниз, оставаясь горизонтальной, если она значительно выше уровня отверстия. Следовательно, постоянная в уравнении Бернулли (102.5) имеет одинаковую величину для всех трубок тока, равную

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + h_0 \gamma + p_0 = \mathcal{E}_0 = \text{const.} \quad (103.1)$$

Заметим, что так будет всегда, когда течение всех частиц идеальной жидкости начинается из одинакового состояния, и тогда постоянная уравнения Бернулли имеет одинаковое значение не только для данной трубы тока, как мы вывели ранее, а для всего пространства текущей жидкости, занятого частицами, вытекающими при одинаковых условиях. Это еще более упрощает анализ течения.

Так как диаметр отверстия мал по сравнению с высотой жидкости в сосуде, то будем считать давление во всем поперечном сечении струи одинаковым и равным окружающему давлению  $p_0$ . Также и скорость течения в струе для всех трубок тока можно считать одинаковой и равной  $v$ . Следовательно, по уравнению Бернулли (102.5)

$$\Theta_0 = \frac{\rho v^2}{2} + \gamma h + p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + \gamma h_0 + p_0, \quad (103.2)$$

или

$$\frac{\rho}{2} (v^2 - v_0^2) = \gamma (h_0 - h), \quad (103.3)$$

где  $h$  — высота отверстия, а  $h_0$  — высота свободной поверхности в сосуде.

Если площадь отверстия составляет ничтожную долю от площади поперечного сечения сосуда, то скорость  $v_0$  будет ничтожно мала по сравнению со скоростью  $v$  и членом с  $v_0^2$  в формуле (103.3) можно пренебречь. Поэтому скорость вытекающей жидкости равна

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho} (h_0 - h)} = \sqrt{2g (h_0 - h)}, \quad (103.4)$$

так как  $\frac{\gamma}{\rho} = g$  — ускорению силы тяжести.

Это так называемая *формула Торричелли*. Скорость истечения весомой жидкости из отверстия в сосуде равна той скорости, которую получит тело, падая с высоты, равной разности высот отверстия и свободной поверхности  $h_0 - h$ . Отметим, что величина скорости совершенно не зависит от направления к горизонту вытекающей струи. Она будет одинакова, под каким бы углом струя ни вытекала. Поэтому, если направить струю вертикально вверх, то частицы жидкости, как и всякое тело, должны подняться на высоту уровня свободной поверхности жидкости<sup>1)</sup>). Однако из-за трения в жидкости, а главным образом из-за трения о частицы жидкости, падающие вниз, и трения в воздухе струя не достигнет

<sup>1)</sup> Силы трения (вязкости) при течении воды по резиновой трубке, соединяющей «насадок», из которого вытекает струя, с сосудом, не окажут значительного влияния, если диаметр трубы будет велик по сравнению с диаметром вытекающей струи.

уровня жидкости в сосуде (рис. 289, *a*). Но если направить струю под небольшим углом к вертикали (рис. 289, *б*), то она поднимется почти до уровня поверхности жидкости.

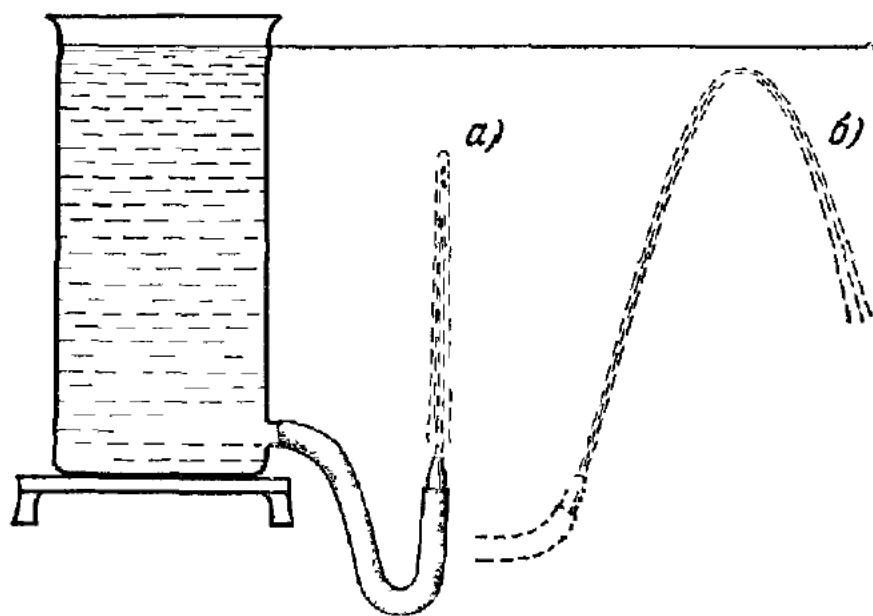


Рис. 289.

Справедливость формулы Торричелли можно проверить различными способами. Например, можно наблюдать точку пересечения двух струй, вытекающих в горизонтальном направлении из

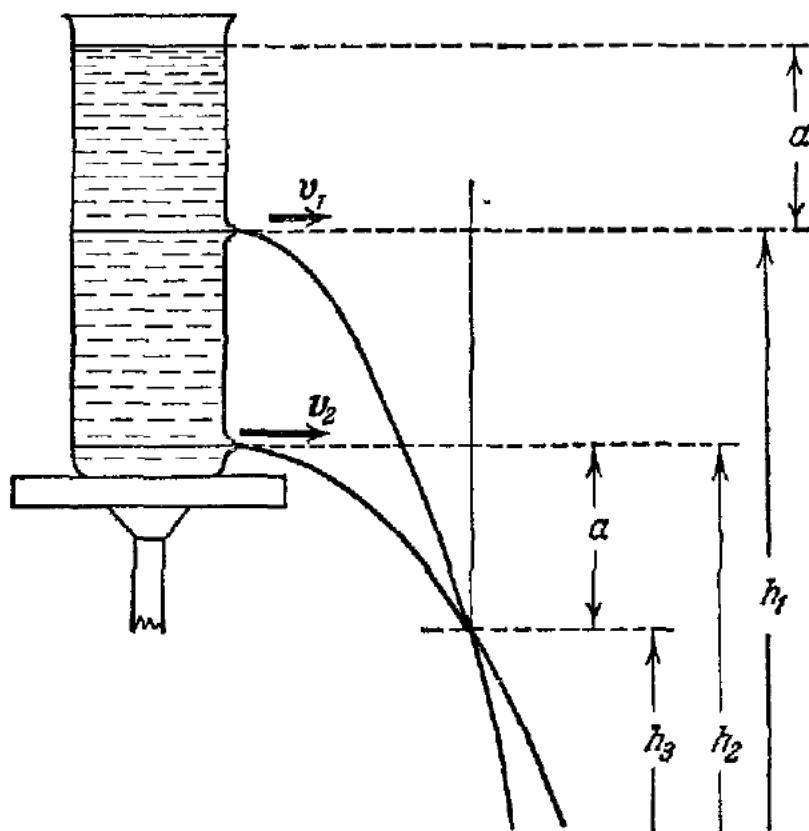


Рис. 290.

отверстий, находящихся на разной высоте (рис. 290). Если пренебречь вязкостью, то легко показать расчетом, что струи пересекутся на некоторой горизонтали, лежащей ниже нижнего от-

верстия на некотором расстоянии, равном расстоянию между уровнем жидкости в сосуде и верхним отверстием. Опыт подтверждает это. Особенно наглядны изменения точки пересечения струй при подливании в сосуд значительного количества воды, при котором уровень воды меняется.

Расчет прост. Если скорость вытекающей жидкости определяется по закону Торричелли, то

$$v_1 = \sqrt{2ga}, \quad v_2 = \sqrt{2g(a+h_1-h_2)}$$

(смысл обозначений можно видеть на рис. 290). Время падения частицы до точки пересечения в каждой струе определяется по формулам

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_1-h_3)}{g}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(h_2-h_3)}{g}}.$$

В точке пересечения струй удаление от сосуда обеих струй одинаково. При падении частиц горизонтальная компонента скорости не меняется, следовательно,  $v_1 t_1 = v_2 t_2$ ; отсюда

$$a(h_1-h_3) = (a+h_1-h_2)(h_2-h_3),$$

или

$$h_2 - h_3 = a.$$

## § 104. Давление жидкости, текущей по трубе переменного сечения

На рис. 291 показан прибор, который состоит из стеклянной трубы переменного сечения с небольшими отверстиями в ее стенке. Сама трубка расположена горизонтально, а к отверстиям

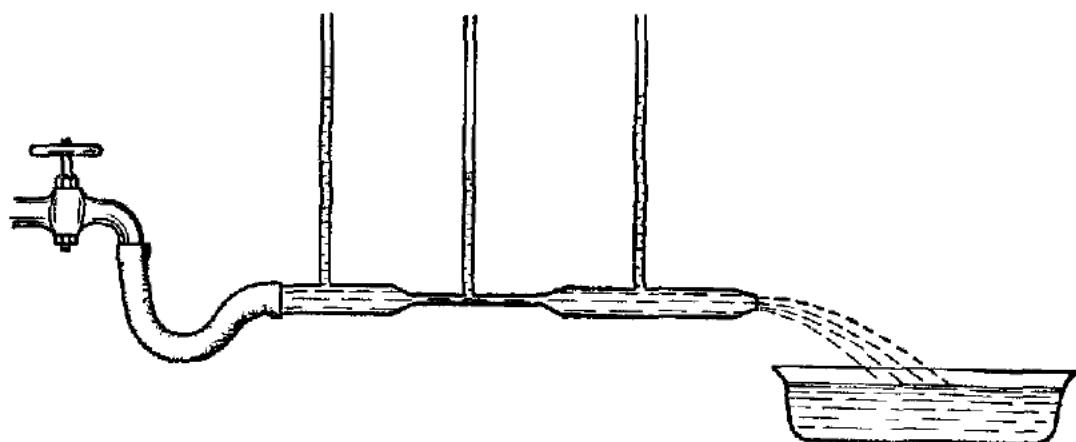


Рис. 291.

припаяны вертикальные стеклянные трубочки, которые, наполняясь до определенной высоты, служат манометрами, измеряющими давление в данном сечении трубы. Высота столба жидкости в манометрической вертикальной трубочке пропорциональна давлению частиц текущей жидкости. Жидкость в вертикальной трубочке и, следовательно, в самом отверстии покоятся, частицы текущей жидкости, проходящие мимо отверстия, как-то сжаты,

находятся под давлением  $p$ , а так как давление передается во все стороны одинаково, то для того, чтобы жидкость в отверстии поколась, давление, создаваемое столбом жидкости в трубочке, должно быть равно давлению  $p$  в текущей жидкости.

Мы полагаем, что горизонтальная трубка достаточно тонка, и поэтому давление по каждому поперечному сечению струи текущей жидкости можно считать одинаковым. Поперечное сечение трубы настолько плавно изменяется, что всю горизонтальную трубку можно считать за одну трубку тока.

Пропуская через трубку воду и регулируя скорость воды, мы будем наблюдать высоту уровня в манометрических трубочках, т. е. наблюдать изменение давления  $p$  вдоль трубы. Опыт показывает, что давление в наиболее узком месте трубы *наименьшее* и это давление тем меньше, чем больше скорость течения воды, в согласии с уравнением Бернулли.

Если нам известны величины поперечных сечений в двух местах, где стоят манометрические трубочки, то по разности давлений можно определить количество воды, проходящей через трубку ежесекундно, — «расход» воды.

Действительно, пусть поперечные сечения равны  $S_1$  и  $S_2$ , скорости в них — соответственно  $v_1$  и  $v_2$ , давления —  $p_1$  и  $p_2$ .

Тогда по уравнению Бернулли (102.5)

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (104.1)$$

а из условия постоянства расхода через любое сечение имеем

$$Q = \gamma v_1 S_1 = \gamma v_2 S_2, \quad (104.2)$$

где, как обычно,  $\gamma = \rho g$  — удельный вес.

Решая два уравнения (104.1) и (104.2) с двумя неизвестными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , находим их. Затем находим, что расход равен

$$Q = g \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)\rho}{\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}}}. \quad (104.3)$$

Зависимость расхода от разности давлений, выраженная формулой (104.3), положена в основу устройства «водомера» — прибора, измеряющего по разности давлений расход жидкости через сечение трубы в единицу времени.

### § 105. Истечение жидкости или газа, находящихся под давлением в сосуде

Если жидкость или газ находятся в сосуде под давлением, много большим, чем давление, создаваемое весом жидкости, то изменениями давления по высоте столба жидкости можно пренебречь и считать, что истечение подчиняется тем же законам, что и истечение жидкости, находящейся в замкнутом сосуде под давлением  $p_n$ . Поэтому можно просто определить скорость истечения воды из котла, в котором вода находится под постоянным давлением

пара в несколько десятков атмосфер, или скорость истечения газа из баллона (рис. 292), в котором давление поддерживается постоянным при помощи компрессора. В этих случаях можно считать константу в уравнении Бернулли постоянной по всему объему текущего газа или жидкости и равной  $\rho_n$ , давлению в сосуде, так как скоростью течения в сосуде можно пренебречь вследствие того, что сечение сосуда  $S$  много больше сечения отверстия  $s$ .

Скорость истечения воды из котла будет равна

$$v = \sqrt{\frac{2(p_n - p_0)}{\rho}}, \quad (105.1)$$

как легко вычислить из уравнения (102.5).

Для газа уже нельзя определить скорость по формуле (102.5), ибо плотность газа  $\rho$  будет изменяться при движении частицы газа к отверстию. Изменение давления вдоль трубки тока можно при стационарном течении записать по (101.5) так:

$$-\frac{dp}{ds} = \rho v \frac{dv}{ds}. \quad (105.2)$$

Но плотность  $\rho$  теперь уже зависит от величины давления  $p$ . При подходе частиц к отверстию давление должно падать: ведь частицы ускоряются в направлении движения. И величина скорости будет зависеть от того, по какому закону изменяется плотность с изменением давления.

Вообще зависимость между давлением и плотностью довольно сложная, так как она связана еще и с изменением температуры вдоль трубки тока. Однако во многих случаях, когда частица движется достаточно быстро, можно считать, как показывает опыт, что давление и плотность связаны законом адиабаты

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_n}{\rho_n^\kappa} = \text{const}, \quad (105.3)$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты, зависящий от природы газа (для воздуха он равен 1,4), а  $\rho_n$  — плотность газа в сосуде. Закон адиабаты (105.3) следует из того, что во время расширения частицы не происходит обмена теплом с окружающими частицами.

Подставим зависимость плотности от давления в (105.2) и, преобразуя, получим

$$-p^{-1/\kappa} \frac{dp}{ds} = \frac{\rho_n}{p_n^{1/\kappa}} v \frac{dv}{ds}. \quad (105.4)$$

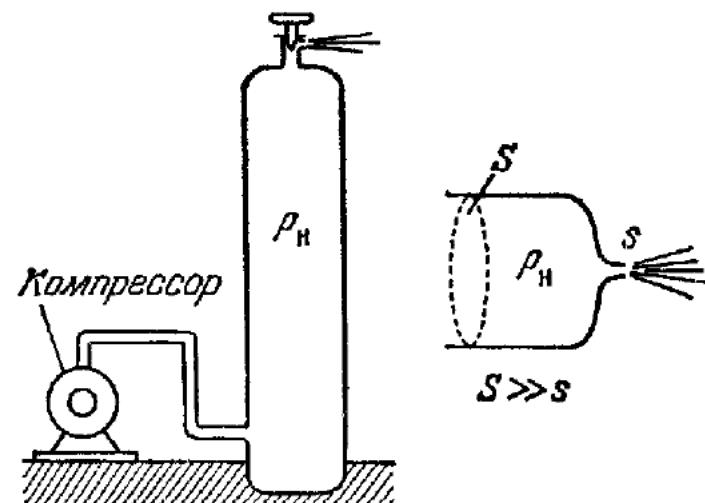


Рис. 292.

Это выражение можно проинтегрировать вдоль линии трубы тока. Если давление в баллоне  $p_n$ , а давление в пространстве, куда вытекает газ, равно  $p_0$ , то интегрировать по давлению нужно от  $p_n$  до  $p_0$ , а по скорости — от нуля до  $v_0$  — скорости на выходе:

$$-\int_{p_n}^{p_0} p^{-1/\kappa} dp = \frac{\rho_n}{p_n^{1/\kappa}} \int_0^{v_0} v dv.$$

Выполняя интегрирование и преобразуя, получаем скорость истечения:

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_n}{\rho_n} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_n} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (105.5)$$

Если бы мы полагали газ несжимаемым, то из (105.1) получили бы

$$v_{\text{несж}} = \sqrt{\frac{2(p_n - p_0)}{\rho_n}}. \quad (105.6)$$

Скорость истечения газа из баллона под давлением можно записать так:

$$v = v_{\text{несж}} \sqrt{\frac{\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1 - \left( \frac{p_0}{p_n} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 - \frac{p_0}{p_n}}}{1 - \left( \frac{p_0}{p_n} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}}. \quad (105.7)$$

Теперь легко оценить ошибку, какую допускают при расчетах, в которых газ полагают несжимаемым; для этого нужно только оценить величину корня в (105.7) при данной разности давлений. Можно убедиться непосредственным расчетом, что при очень маленькой разнице в давлениях  $p_n$  и  $p_0$ , равной, например, нескольким процентам, величина корня будет очень мало отличаться от единицы. Тогда можно рассчитывать скорость и течение газа, как для несжимаемой жидкости.

Определим точнее величину ошибки, которую мы делаем, принимая воздух несжимаемым при давлении, близком к атмосферному. Допустим, что разность давлений в сосуде и вне его составляет 10% от атмосферного, и положим, что давление в сосуде  $p_n$  равно 1 атм, а вне его  $p_0 = 0,9$  атм. Какова была бы скорость истечения, если бы воздух был несжимаемой жидкостью? Подставляя в (105.6) значение плотности воздуха

$$\rho_n = 1,293 \text{ кг/м}^3$$

и величину атмосферного давления

$$p_n = 1,0133 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

получим

$$v_{\text{несж}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 1,0133 \cdot 10^5}{1,293}} = 125 \text{ м/с.}$$

Вычислим теперь значение радикала в (105.7). Обозначим  $\Delta = 1 - \frac{P_0}{P_h}$  и  $\frac{x-1}{x} = a$ , тогда радикал будет иметь такой вид:

$$\sqrt{\frac{1-(1-\Delta)^a}{a\Delta}};$$

разлагаем  $(1 - \Delta)^a$  в ряд Тейлора около единицы и получаем

$$(1 - \Delta)^a = 1 - a\Delta + \frac{a(a-1)}{2} \Delta^2 + \dots$$

Подставляя это выражение в радикал и преобразуя, получаем

$$\sqrt{1 - \frac{\Delta}{2}(a-1) + \dots} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{2x} + \dots} \approx 1 + \frac{\Delta}{4x} + \dots$$

Подставляя сюда  $\Delta = 0,1$  и  $x = 1,4$ , находим, что ошибка в определении скорости составляет примерно 2%. Следовательно, в тех случаях, когда не нужно высокой точности при определении скорости при разностях давлений, меньших 10% атмосферного, можно пренебречь сжимаемостью воздуха и считать течение воздуха течением несжимаемой жидкости.

Очевидно, что при такой малой разности давлений вдоль трубы тока плотность будет изменяться так же мало, процентное отношение изменений давления и плотности будет примерно тем же. Действительно, при адиабатическом расширении газа на незначительную величину относительное изменение давления будет в  $x$  раз больше относительного изменения плотности ведь из (105.3) получаем  $\frac{dp}{p} = x \frac{dp}{P}$ . Небольшое изменение плотности вдоль трубы тока не оказывает влияния на величину скорости, а следовательно, и на характер течения.

## § 106. Давление в критической точке обтекаемого тела

Наиболее распространенным прибором, определяющим скорость потока, является трубка Пито; при помощи этой трубы измеряется и скорость движения тела относительно воздуха, например скорость самолета. В этом приборе используется связь между давлением в «критической» точке обтекаемого тела и скоростью потока.

Если в потоке жидкости и газа находится какое-то тело, которое жидкость обтекает со всех сторон, то трубы тока как-то расходятся вдоль поверхности тела, примерно так, как показано на рис. 293. Поэтому на стороне тела, обращенной к потоку, есть такая точка  $A$ , называемая *критической точкой*, в которой трубы тока расходятся в различные стороны, охватывая тело. Так как поток в критической точке расходится, то очевидно, что скорость его в этой точке должна быть равна нулю и в силу непрерывности вблизи неё будет очень малой. Представим себе трубку тока, «упирающуюся», если можно так выразиться, в критическую точку; эта трубка заштрихована на рис. 293.

Тело находится в однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости, поэтому на некотором достаточно удаленном расстоянии от тела всюду и давление  $p_0$ , и плотность  $\rho_0$ , и скорость  $v_0$  одинаковы; следовательно, константа Бернулли равна<sup>1)</sup>  $p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$  для всех трубок тока, или для всех точек потока. Так как в критической точке скорость потока равна нулю, то, следовательно,

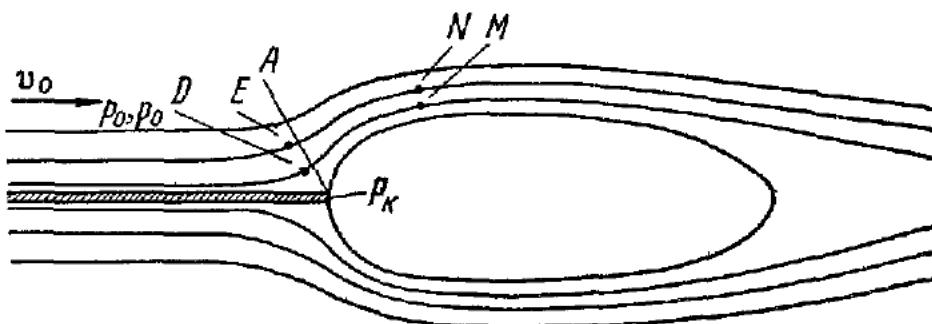


Рис. 293.

давление в этой точке  $p_k$  по уравнению Бернулли (102.5) равно

$$p_k = p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}, \quad (106.1)$$

или

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p_k - p_0)}{\rho_0}}. \quad (106.2)$$

Заметим, что давление в критической точке так же связано со скоростью потока вдали от тела, как и скорость и давление в сжатой жидкости, вытекающей из сосуда (см. (105.1)). Только картина потока в одном из этих случаев зеркально отображает другой.

Давление в критической точке тела, находящегося в потоке, которое в технике часто называют «давлением полного напора», можно измерить манометром. Обычно достаточно длинной трубкой соединяют отверстие, сделанное вблизи критической точки, которую правильнее было бы называть критической областью, с манометром. Давление в критической точке тела, находящегося в потоке, дает нам константу Бернулли для этого потока, называемую «полным напором». Зная полный напор, можно определить скорость потока в любой точке, если известно статическое давление  $p_0$  в потоке и плотность жидкости  $\rho_0$ .

Проще всего взять в качестве обтекаемого тела трубку, открытое отверстие которой направлено к потоку. Другой конец трубы соединен с манометром, измеряющим давление в трубке. Иногда вместо трубы берут цилиндрическое тело с закругленным концом

<sup>1)</sup> В этой задаче полагаем, что членом  $\frac{1}{h}$  можно пренебречь, ибо изменение высоты очень мало. Если нужно, то этот член всегда можно учесть.

(рис. 294), по оси которого сделано отверстие  $A$ , соединенное трубочкой с манометром. Этот цилиндр, укрепленный на соответствующей державке, направляют отверстием  $A$  к потоку так, что критическая область лежит в зоне отверстия.

Для определения скорости потока  $v_0$ , кроме полного напора  $p_k$ , нужно знать и статическое давление в потоке  $p_0$ . Статическое давление в потоке определяют примерно так, как измеряют давление в трубке с текущей жидкостью (см. рис. 291). Там в стенке

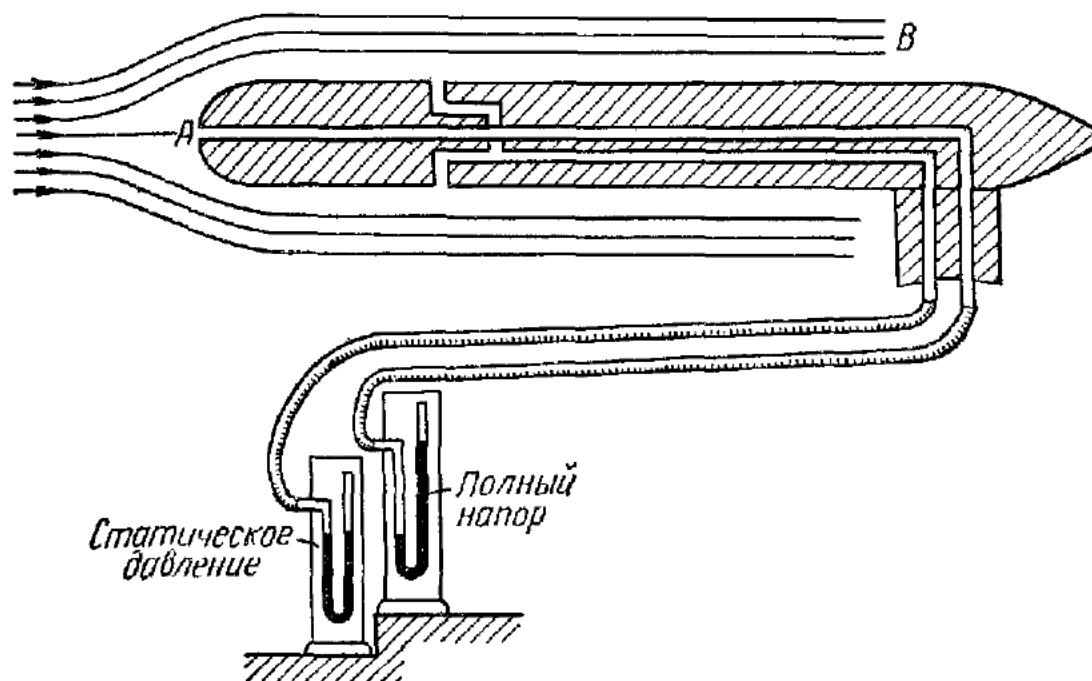


Рис. 294.

трубки делались отверстия, к которым и присоединялись манометрические трубки. Здесь для измерения давления в потоке устанавливают цилиндрическое тело так, что его образующая направлена вдоль линии тока в невозмущенном потоке<sup>1)</sup>, и измеряют давление в некотором небольшом отверстии на стенке этого тела. Если сечение трубы тока, проходящей вблизи отверстия, будет таким же, как и сечение этой трубы вдали от тела, то давление у отверстия будет равно давлению вдали от тела<sup>2)</sup>. Отверстие посредством трубы соединяют с манометром, который и показывает статическое давление  $p_0$ .

Отверстия для определения статического давления в потоке часто делают на поверхности того же цилиндрического тела, посредством которого измеряется давление полного напора. В грубке Прандтля, сечение которой схематически показано на рис. 294, отверстия для измерения статического давления находятся на

<sup>1)</sup> Это требование всегда выполняется, если ось цилиндра направлена по потоку и диаметр его ничтожно мал по сравнению с поперечными размерами струи потока

<sup>2)</sup> Строго говоря, давление будет одинаково, если и температура в этих точках одинакова.

некотором расстоянии от переднего конца цилиндра (примерно на расстоянии 3—5 диаметров), там, где трубы тока выравниваются. Эти отверстия посредством специальной резиновой трубы соединены с манометром, измеряющим статическое давление  $p_0$  в потоке.

Зная давление полного напора  $p_k$  и статическое давление  $p_0$ , можно по уравнению (106.1) определить скорость набегающего потока.

Величину  $p_c = \frac{p_0 v^2}{2}$  называют *динамическим* или «скоростным» напором. Ее можно непосредственно измерить, если к манометру подвести с одной стороны полный напор  $p_k$ , а с другой — статическое давление  $p_0$ , тогда манометр покажет разность  $p_c$ , или динамический напор. По величине динамического напора определяют скорость.

Заметим, что для определения скорости воздуха приближенно можно пользоваться формулой

$$v = 4\sqrt{h}, \quad (106.3)$$

где скорость  $v$  измеряется в м/с, а разность давлений, или скоростной напор,  $p_c = h$  — в миллиметрах водяного столба. Эта формула следует из (106.2), если считать, как это принято в инженерной практике, плотность воздуха

$$\rho \approx \frac{1}{8} \frac{\text{кгс} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4}.$$

Для определения скорости сжимаемого газа (например, воздуха) при значительной скорости<sup>1)</sup> необходимо уже учитывать изменение плотности и рассчитывать связь между давлением и скоростью в трубке тока так же, как это было сделано в § 105. Формулами (105.5) и (105.7) можно пользоваться для вычисления скорости по давлению, если вместо  $p_n$  поставить  $p_k$  — давление в критической точке. Но при очень большой скорости потока, близкой к скорости звука в газе, эти соотношения неверны, так как при этих значениях скорости потока возникает новое явление — «скачок скорости и давления» перед телом, о котором будет сказано ниже, в § 120.

### § 107. Изменение давления поперек трубок тока

При определении давления в трубке тока (§ 100) мы полагали, что давление остается постоянным в любом поперечном сечении трубы. Там принималось во внимание среднее давление по поперечному сечению не только потому, что трубка — очень небольшого

<sup>1)</sup> Как уже было сказано в § 105, при скорости, меньшей 130 м/с, ошибка, которую мы сделали, полагая воздух несжимаемым, меньше 2%.

сечения, но и потому, что определялось ускорение частицы только вдоль оси трубы.

Если трубка тока прямолинейна в данном месте, т. е. осевая линия трубы представляет собой прямую линию, то частица жидкости может иметь ускорение только в направлении оси трубы, поэтому давление должно быть одинаковым в любом сечении у противоположных стенок трубы и, следовательно, точно *одинаковым* по всему поперечному сечению. В тех же местах, где осевая линия трубы искривляется, давление в поперечном сечении не может быть постоянным. Действительно, частица, двигающаяся по искривленной трубке тока, обладает центробежным ускорением  $\frac{v^2}{R}$ , где  $R$  — радиус закругления осевой линии трубы (рис. 295). Поэтому на частицу должна действовать сила, расположенная в плоскости закругления и направленная перпендикулярно к линии тока, сила, равная

$$\rho S \frac{v^2}{R} ds,$$

где  $S$  — площадь сечения трубы, а  $ds$  — длина частицы жидкости.

Такую силу может создать только давление окружающих слоев текущей жидкости. Поэтому и должна быть разность давлений на сторонах трубы тока в плоскости закругления. Эту разность давлений можно очень просто вычислить, если положить, что сечение трубы имеет вид прямоугольника со сторонами  $h$  и  $a$ ,  $S = ah$ . Тогда по второму закону динамики в направлении, перпендикулярном к линии тока, можно записать:

$$(p_1 - p_2) a ds = \rho ah \frac{v^2}{R} ds. \quad (107.1)$$

Сокращая на  $ah ds$ , получаем

$$\frac{p_1 - p_2}{h} = \frac{\rho v^2}{R}. \quad (107.2)$$

Если трубка тока достаточно тонкая, то  $\frac{p_1 - p_2}{h}$  можно заменить на  $\frac{\partial p}{\partial R}$  и формулу (107.2) можно переписать так:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\rho v^2}{R}. \quad (107.3)$$

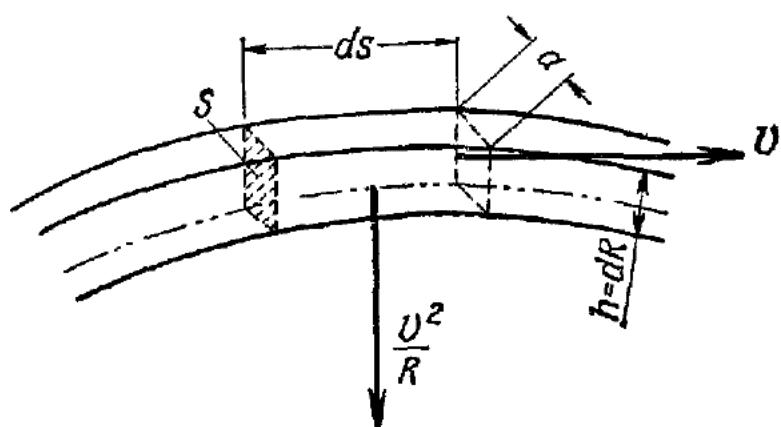


Рис. 295

Это равенство означает, что давление изменяется поперек трубок тока, когда они искривляются, причем падение давления  $\frac{dp}{dr}$  происходит к центру закругления оси трубы.

Например, при обтекании тела (см. рис. 293) давление в точке  $D$  должно быть больше, чем в точке  $E$ , и, наоборот, в  $N$  должно быть больше, чем в  $M$ . Следовательно, по искривлению линий тока всегда можно сделать определенные заключения об изменении давления в направлении, перпендикулярном к линиям тока, ибо частицы могут искривить свой путь только при наличии определенной разности давлений.

Так как давление на поверхность тела определяет силы, действующие на тело со стороны потока, то анализ изменения давления поперек трубок тока позволяет сделать ряд полезных заключений о силах, действующих на тело, находящееся в потоке жидкости и газа.

### § 108. Распределение давления во вращающейся жидкости

Размешивая чай в стакане, можно наблюдать поверхность вращающейся жидкости — она принимает параболическую форму. Представим себе стакан или другой цилиндрический сосуд на диске центробежной машины (рис. 296).

Если диск вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то через некоторое время все частицы жидкости будут двигаться по окружности так, что жидкость останется неподвижной относительно стенок стакана. Так как частицы по трубке тока движутся по кругу радиуса  $r$ , то давление в горизонтальной плоскости будет возрастать по мере удаления от оси вращения. Градиент давления вдоль радиуса  $r$  по (107.3) будет равен<sup>1)</sup>

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}. \quad (108.1)$$

Заменим в (108.1) окружную скорость частицы  $v$  через  $\omega r$  и получим

$$\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r; \quad (108.2)$$

это уравнение можно проинтегрировать по  $r$ :

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = \rho \omega^2 \int_0^{r_1} r dr,$$

или

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho \omega^2}{2} r_1^2. \quad (108.3)$$

<sup>1)</sup> Так как движение стационарное, то давление  $p$  в горизонтальной плоскости можно считать функцией только от  $r$ .

Отсюда видно, что давление в горизонтальном сечении сосуда возрастает пропорционально квадрату расстояния от оси вращения. Как известно, давление в каждой точке жидкости должно быть одинаково по всем направлениям, поэтому и уровень жидкости должен повышаться с расстоянием от оси. Действительно, изменение давления в вертикальном направлении возникает только за счет веса жидкости; поэтому для того, чтобы частица жидкости осталась относительно стакана, необходимо, чтобы уровень жидкости над кольцевой площадкой радиуса  $r_1$  был выше уровня жидкости в центре на величину  $h$ . Давление, создаваемое весом жидкости на горизонтали, проходящей через нижнюю точку свободной поверхности (точку  $O$  на рис. 296), равно  $h\gamma$ , и оно должно равняться давлению  $\frac{\rho\omega^2}{2}r_1^2$ , где  $r_1$  — расстояние рассматриваемой точки до оси. Поэтому

$$h\gamma = \frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2,$$

или

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r_1^2,$$

так как  $\gamma = \rho g$ , где  $g$  — ускорение силы тяготения. Высота уровня жидкости растет пропорционально квадрату расстояния от оси вращения, т. е. свободная поверхность представляет собой параболоид вращения, как и наблюдается в опытах.

Форма свободной поверхности показывает изменение давления вдоль радиуса. Но можно это проверить еще и таким образом: бросить в стакан с водой, вращающийся на центробежной машине, небольшие кусочки вещества тяжелее воды, все они через некоторое время расположатся внизу у стенки стакана. Кусочки вещества, плавающего на поверхности воды, будут собираться вблизи точки  $O$ .

Интересно проследить, как будут вести себя в стакане кусочек свинца и шарик воска, связанные ниткой (воск легче воды). Попробуйте в качестве упражнения сами проанализировать результат такого опыта. Каково будет распределение давления во вращаю-

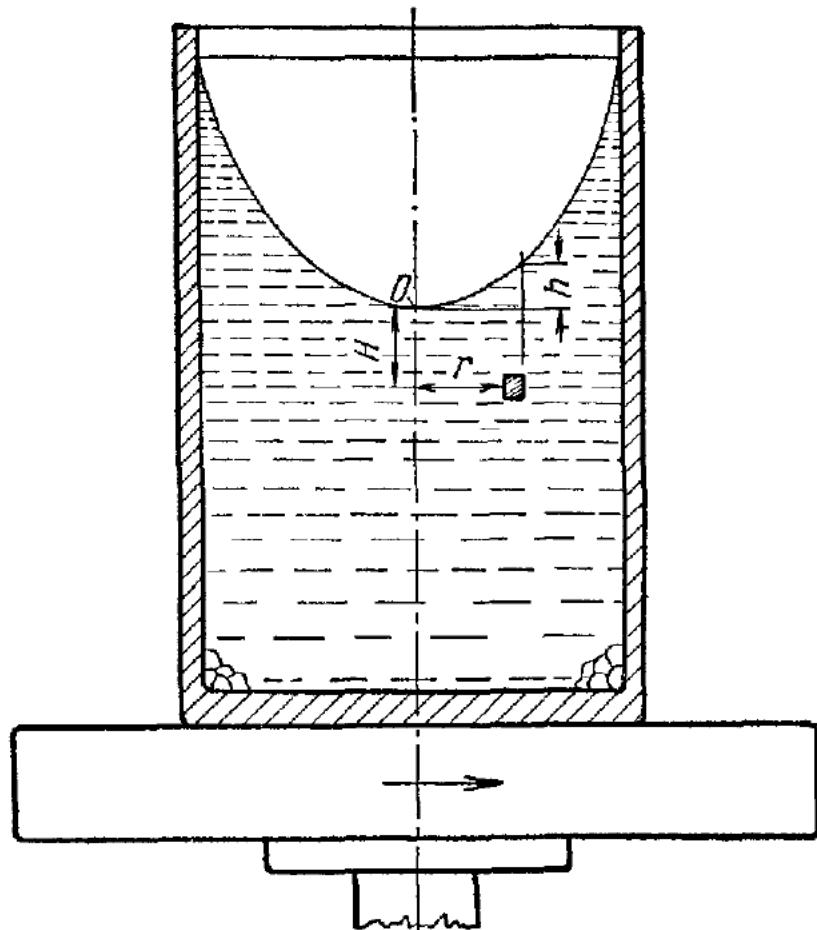


Рис. 296.

щемся сосуде, если он закрыт со всех сторон? Каковы будут распределение давления и форма поверхности, если центр стакана с водой расположен не на оси машины?

Отметим, что в рассмотренном случае движения частиц жидкости при вращении сосуда постоянная Бернулли сохраняет свою величину только для одной трубы тока и различна для разных линий тока. Вспоминая (102.5) и учитывая (108.3), можно записать для трубы тока

$$\mathcal{E} = p_1 + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} = p_0 + \rho \omega^2 r^2;$$

так как трубы тока горизонтальны, то член, в который входит  $h$ , можно не принимать во внимание. Величина  $p_0$  — давление на оси — зависит только от глубины и равна  $\gamma H$  (см. рис. 296). Следовательно, постоянная Бернулли ( $\mathcal{E}$ ) изменяется и с глубиной, и с расстоянием от оси вращения.

### § 109. Количество движения жидкости и газа

Во многих случаях при анализе сложного движения жидкости или газа можно воспользоваться законом изменения количества движения. Для вычисления и определения сил, действующих на тело и жидкость, поступают следующим образом: выделяют в текущей жидкости сообразно с условиями задачи некоторый объем пространства, занятого жидкостью. К жидкости, проходящей через выделенный объем, применяют закон изменения количества движения. Этот закон для стационарного течения можно сформулировать так: *сумма внешних сил, действующих на частицы жидкости данного объема, равна изменению за единицу времени количества движения жидкости выделенного объема.*

*Внешние силы* состоят из сил, приложенных к каждой частице жидкости, находящейся в выделенном объеме (часто такими бывают только силы тяготения), и из сил давления, действующих на *поверхность* выделенного объема. Для определения изменения количества движения за секунду в общем случае стационарного течения нужно сначала определить изменение количества движения жидкости, проходящей через очень малый участок поверхности.

На каком-то малом участке поверхности  $dS = n \cdot dS$  (рис. 297), на котором скорость можно считать одинаковой, количество жидкости, проходящей ежесекундно («поток» массы), равно

$$\rho v dS = \rho v dS \cos \alpha, \quad (109.1)$$

где  $dS$  — площадь участка поверхности и  $\alpha$  — угол между внешней нормалью к поверхности и скоростью. «Поток» массы — это количество жидкости, вышедшей за секунду через данный участок

поверхности из рассматриваемого объема, и он является скалярной величиной. Поток, выходящий из объема, имеет знак плюс, а поток входящий — знак минус.

Произведение потока массы (109.1) на вектор скорости  $v$

$$\rho v dS \cos \alpha \cdot v \quad (109.2)$$

является векторной величиной и дает то количество движения жидкости, которое имеет жидкость, уходящая за секунду через некоторый участок поверхности из рассматриваемого объема

Для участка, на котором жидкость входит в данный объем, тем же выражением (109.2) определяется количество движения, которое «входит» с жидкостью в данный объем за секунду (см. рис. 297). Складывая (или интегрируя) изменение количества движения по всем небольшим участкам, составляющим полную поверхность выделенного объема, найдем *полное прращение количества движения жидкости* за секунду в данном объеме. Это будет векторная величина, равная сумме всех внешних сил, действующих на данный объем, — сумме сил тяготения и сил давления на поверхность выделенного объема.

Заметим, что формулировка закона изменения количества движения справедлива как для жидкости, так и для газа, только при движении газа необходимо учитывать зависимость плотности от давления при определении величины количества движения.

## § 110. Сила реакции текущей воды

Применим закон изменения количества движения для определения реакции протекающей жидкости на трубу, по которой она течет. Всякий наблюдал, как резко разворачивается гибкий шланг для поливки улиц, когда в изогнутый шланг пускают струю воды. Изогнутый шланг должен был бы изменить направление количества движения воды (рис. 298), но силы, приложенные к объему текущей воды со стороны изогнутого шланга, очень малы, поэтому шланг выпрямляется, так что количество движения выходящей жидкости совпадает по направлению с количеством движения входящей.

Определим реакцию воды на кран, показанный на рис. 299. Выделим объем жидкости так, как указано на рис. 299 пунктиром; поверхность его совпадает с внутренней поверхностью крана и двумя его поперечными сечениями  $A$  и  $B$ . Поперечное сечение трубы

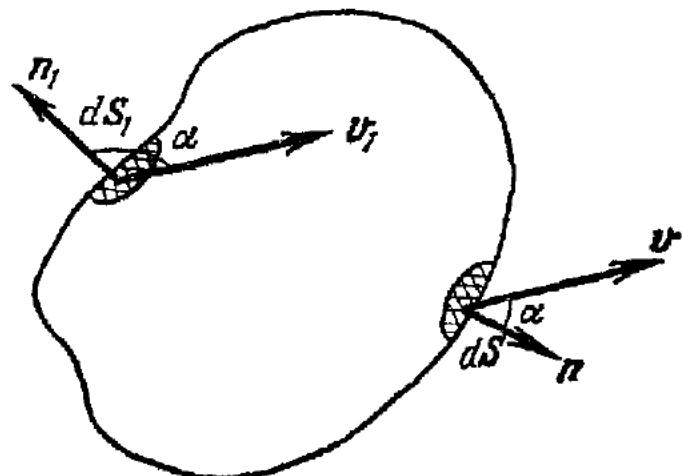


Рис. 297.

крана не меняется, поэтому и скорость  $v$  в каждом сечении одинакова по абсолютной величине. Тогда количество движения жидкости, ежесекундно входящей в данный объем, равно

$$K_A = \rho S v_A v, \quad (110.1)$$

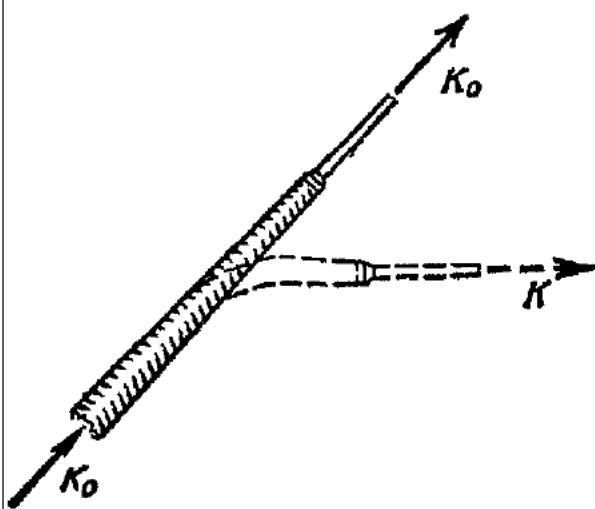


Рис. 298.

где, как обычно,  $\rho$  — плотность воды,  $v_A$  — скорость и  $S$  — площадь поперечного сечения крана. Вектор количества движения  $K_A$  направлен перпендикулярио к сечению  $A$ . Количество движения ежесекундно выходящей из выделенного объема жидкости  $K_B$  численно равно модулю  $K_A$ , но направлено к нему под углом  $90^\circ$ .

Поэтому вектор изменения количества движения направлен так, как показано на рис. 299, и равен в данном случае силе

$$F = K_B - K_A, \quad (110.2)$$

а величина его

$$F = \sqrt{2} K = \sqrt{2} \rho S v^2.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на выделенный объем. Действием силы тяготения можно пренебречь<sup>1)</sup>, поэтому остаются только силы давления по поверхности выделенного объема. Рассмотрим их последовательно. Силы давления в сечениях входа  $A$  и выхода  $B$  жидкости одинаковы, если пренебрежем вязкостью воды. В самом деле, из уравнения Бернулли следует, что вдоль трубы тока при одинаковых скоростях будут и одинаковые давления. Давление на выходе струи равно атмосферному. Силы атмосферного давления на входе и выходе струи уравновешиваются давлением на края извне, и поэтому их результирующая сила на кран равна нулю, так же как атмосферное давление на пустой кран не дает результирующей, если пренебречь подъемной силой воздуха.

Остается только действие сил давления крана на воду по остальной части поверхности выделенного объема. Сумма этих сил, или результирующая сила давления крана на вытекающую жидкость, равна  $F$  — ежесекундному изменению количества движения, величину и направление которого мы знаем из (110.2). Поэтому реакция вытекающей жидкости на кран равна и противоположна

<sup>1)</sup> Эта сила тяжести жидкости, находящейся в объеме, практически очень мала по сравнению с искомой силой. Очевидно, что учет этой силы не представляет особого труда.

вектору изменения количества движения  $\mathbf{F}$ , она проходит через точку  $O$  (см. рис. 299), точку пересечения линий направления количества движения входящей и выходящей жидкости.

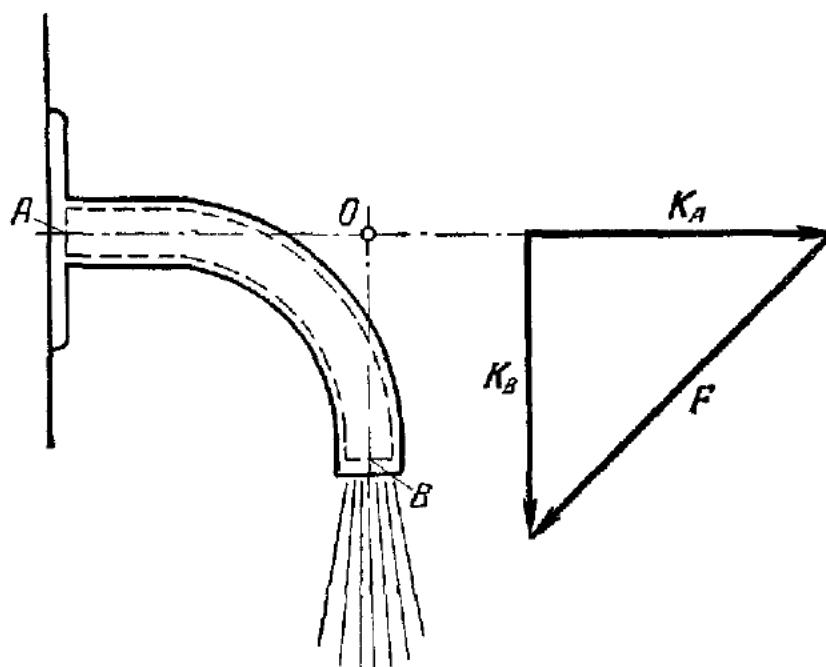


Рис. 299.

Определим силу действия на сосуд струи жидкости, вытекающей из него (рис. 300). По уравнению Бернулли (102.5) скорость истечения равна

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 + \gamma h)}, \quad (110.3)$$

где  $p_0$  — давление над жидкостью в сосуде <sup>1)</sup>,  $h$  — высота уровня над отверстием. Выделим объем жидкости, как показано на рис. 300. Ради простоты вычислений положим, что сосуд имеет прямоугольное горизонтальное сечение, и потому рассмотрим силы давления и изменения количества движения жидкости только на поверхностях, нормальных к струе; во всех остальных направлениях изменение количества движения жидкости равно нулю. Поэтому будем рассчитывать и силы и приращение количества движения в направлении скорости струи.

Если поперечное сечение струи  $S_0$ , то изменение количества движения за секунду по направлению струи равно

$$\Delta K = \rho S_0 v^2 = Qv, \quad (110.4)$$

<sup>1)</sup> Точнее,  $p_0$  — величина, на которую давление в сосуде превышает атмосферное.

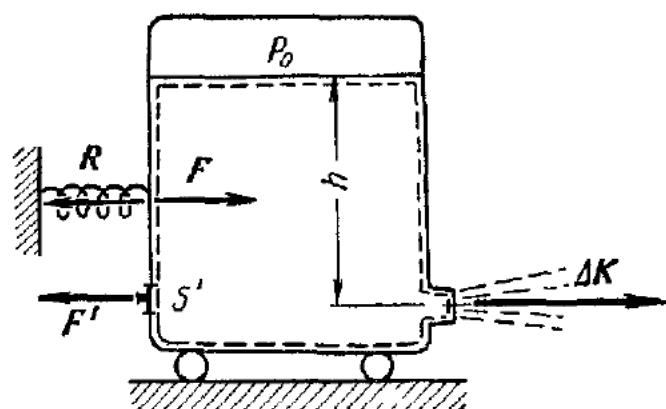


Рис. 300.

где  $Q$  — массовый ежесекундный расход. Сосуд действует на жидкость с силой  $F = \Delta K$ , а реакция  $R$  жидкости на сосуд равна величине  $F$  и противоположно направлена. Силу  $R$  называют *реактивной силой*, она в точности равна реактивной силе, определенной по формуле Мещерского (§ 27).

Реактивную силу вытекающей струи можно определить опытным путем, если измерить силу, действующую на сосуд, при помощи динамометра, как это схематически показано на рис. 300. Примерно таким же способом измеряют силу тяги реактивных двигателей и ракет.

Интересно проследить, как реактивная сила передается на стенки сосуда. Реактивная сила создается вследствие разности давлений на стенки сосуда, разности, возникающей при вытекании струи. Давление на задней стенке (рис. 300) можно считать равным  $p_0$  плюс гидростатическое давление  $\gamma h$  ( $\gamma$  — удельный вес жидкости, а  $h$  — глубина точки), ибо скорость течения у этой стенки очень мала, ничтожно мала по сравнению со скоростью в струе вытекающей жидкости. Давление на передней стенке сосуда (см. рис. 300), на той стенке, в которой находится отверстие, не будет равным давлению на задней стенке. Если бы это было не так и давления на передней и задней стенках были бы одинаковы, то они уравновешивались бы во всех противолежащих площадках, за исключением площадки  $S' = S_0$ , расположенной на задней стенке против отверстия площадью  $S_0$ . Поэтому общая сила давления жидкости на заднюю стенку, как и следовало ожидать, будет больше. Определим величину силы давления на площадку  $S'$ , полагая размеры ее очень малыми по сравнению с  $h$ . Эта сила  $F'$ , очевидно, будет равна

$$F' = S_0 (p_0 + \gamma h). \quad (110.5)$$

Учтем формулу (110.3) и запишем:

$$F' = \frac{1}{2} \rho v^2 S_0;$$

сравнивая это с (110.4), видим, что сила  $F'$  ровно в два раза меньше реактивной силы  $R$ . Поэтому считать давление на противоположных стенках сосуда одинаковым неправильно, т. е. нельзя пренебрегать скоростью течения у передней стенки вблизи отверстия, вследствие которой давление в этой области будет понижено. Для точного определения изменений распределения давления на стенки сосуда нам нужно было бы рассчитать все течениес в сосуде, что представляет очень сложную задачу, а по закону изменения количества движения задача об определении силы реакции решается просто без такого расчета.

Из этих рассуждений видно, что падение давления у передней стенки вблизи отверстия дает силу, равную половине реактивной силы  $R$ . Заметим, что этот вывод справедлив только тогда, когда наименьшее сечение струи  $S_0$  равно площади отверстия, а это не всегда имеет место.

До сих пор мы предполагали, что струя выходит из «насадка» с довольно плавными переходами от вертикальной стенки, в этом случае струя выходит из отверстия параллельными трубками тока, заполняя все отверстие примерно так, как показано на рис. 301, а. Если не сделать плавных переходов к «насадку» от стенок, то струя будет сжиматься (рис. 301, б). Такое сжатие струи легко объяснить. Крайние струйки жидкости, подходящие к отверстию вдоль стенки, далее вследствие своей инерции стремятся к центру струи, и только под давлением частиц, идущих ближе к центру струи, крайние линии тока выпрямляются. В этом случае минимальное сечение струи, сечение в том месте, где трубы тока практически выпрямляются, меньше сечения отверстия. Величина отношения площади минимального сечения струи к площади отверстия зависит от формы краев отверстия и определяется опытным путем.

В случае острого края отверстия площадь сечения струи много меньше площади отверстия, но больше половины этой площади. Если струя выходит из трубочки с острыми краями, направленной внутрь сосуда (рис. 301, в), то площадь минимального сечения струи в точности равна половине площади отверстия.

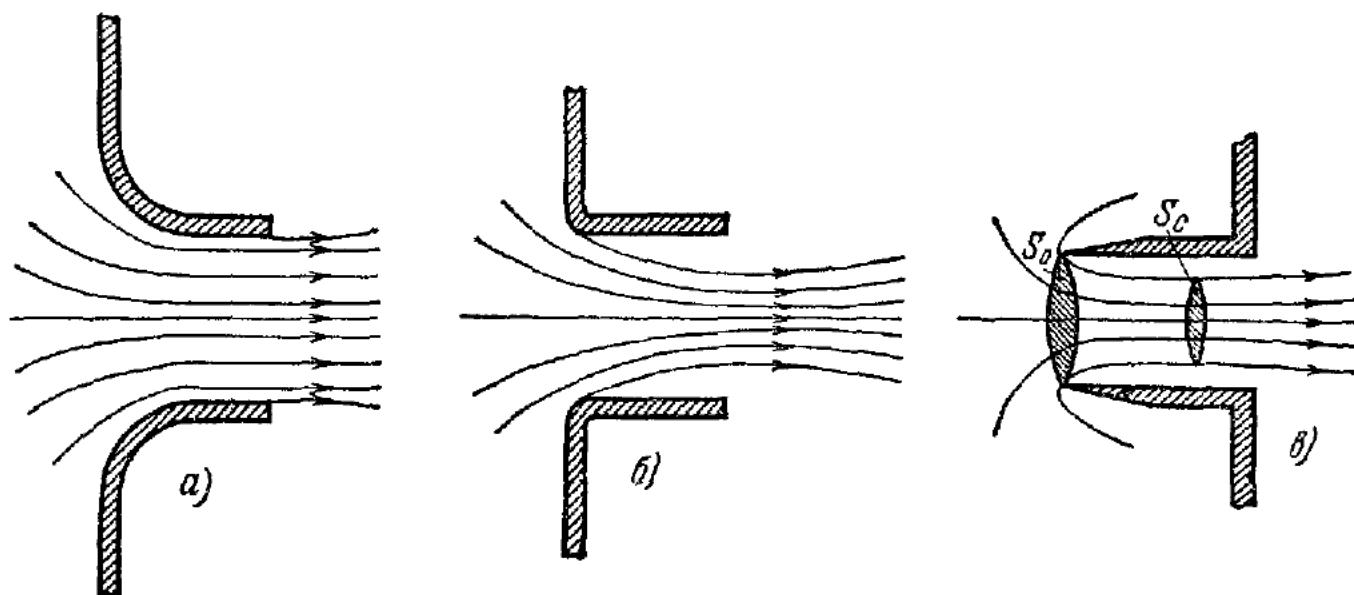


Рис. 301.

Здесь скоростью течения вдоль вертикальной стенки сосуда, в которую вделана трубка, можно вполне пренебречь, так как вертикальная стенка сосуда удалена от отверстия. Тогда давление на противоположных участках стенок сосуда одинаково и сила реакции по (110.5) должна быть равна

$$F' = S_0 (p_0 + \gamma h), \quad (110.6)$$

где  $S_0$  — площадь отверстия трубы. А из закона изменения количества движения сила реакции должна быть равна

$$F' = S_c \rho v^2 = S_c \cdot 2 (p_0 + \gamma h), \quad (110.7)$$

где  $S_c$  — площадь поперечного сечения струи в самом узком месте (рис. 301, в). Сравнивая (110.6) и (110.7), заключаем, что

$$2S_c = S_0, \quad (110.8)$$

или сужение струи (отношение площади струи к площади отверстия) равно  $\frac{1}{2}$ . Это соотношение хорошо подтверждается опытами.

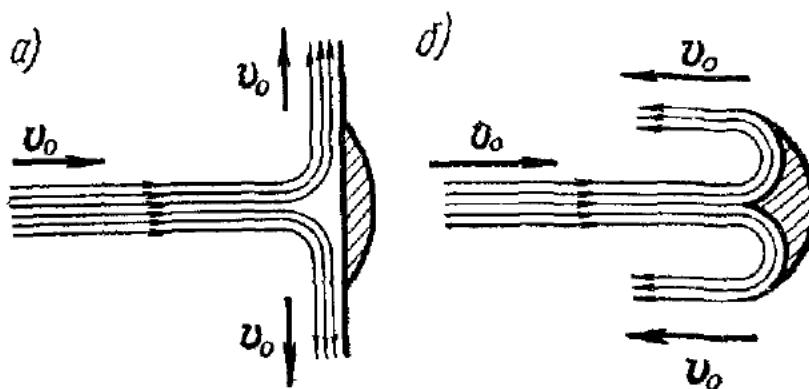


Рис. 302.

Применение закона изменения количества движения особенно полезно там, где легко определить направление и скорость струи. Например, при падении струи на лопатку колеса турбины с желобками такого вида, как показано на рис. 302, б, сила давления будет в два раза больше, чем при падении струи

такой же скорости и сечения на плоскую лопатку, показанную на рис. 302, а. Конечно, при таких условиях приближенно можно считать, что скорость струи при ударе о лопатку с желобками остается неизменной по величине, и скорости движения лопаток и в том и в другом случае одинаковы и достаточно малы по сравнению со скоростью движения частиц в струе

### § 111. Течение вязкой жидкости в трубе

Во многих случаях допустимо пренебречь силами вязкости и приближенно анализировать явление так, как если бы силы вязкости отсутствовали. Это желательно делать не только потому, что еще не известны общие методы анализа течения при учете сил вязкости, но главным образом потому, что в ряде практических примеров результаты опытов с обычной жидкостью в пределах известной точности согласуются с результатами теоретического анализа течения «идеальной» жидкости. Важно только знать, когда пренебрежение вязкостью не ведет к принципиальным и большим ошибкам.

Как известно, силы вязкости пропорциональны изменению скорости потока в направлении, перпендикулярном к скорости, и, следовательно, они будут сказываться особенно резко там, где эти изменения скорости велики. При обтекании вязкой жидкостью твердых тел частицы жидкости, непосредственно прилегающие к телу, как бы «прилипают» к нему и имеют нулевую скорость относительно тела. Поэтому в непосредственной близости от поверхности твердого тела скорость потока нарастает от нулевого значения до некоторой величины. Дальше от тела изменения скорости потока сравнительно малы, и там совершенно ничтожно влияние вязкости.

Слой окружающей тело жидкости, в котором нарастает скорость и в котором влияние вязкости существенно, называется *пограничным слоем*. В некоторых случаях этот слой очень тонок и влиянием его можно пренебречь: течение вязкой жидкости или газа близко к тому течению, которое имело бы место при обтекании этого тела идеальной жидкостью, лишенной вязкости. В других случаях пограничный слой не будет тонким, и тогда уже нельзя пренебрегать вязкостью. Так, например, при течении вязкой жидкости в узкой трубе такой слой может заполнить весь объем текущей жидкостью, и при анализе этого течения необходимо учитывать силы вязкости.

Произведем опыты с измерением распределения давления манометрическими трубками в жидкости, текущей по горизонтальной трубе постоянного сечения (рис. 303). Если жидкость достаточно вязкая, например глицерин или какой-нибудь сироп, или труба достаточно тонкая, то давление будет падать равномерно вдоль трубы. Это можно видеть по тому, что уровни во всех равноотстоящих друг от друга манометрических трубках лежат на наклонной прямой (см. рис. 303). Если бы жидкость была невязкой, то

уровни во всех трубках были бы одинаковы, давление вдоль трубы было бы постоянным.

Действительно, жидкость можно считать вполне несжимаемой, поэтому скорость течения в каждом сечении трубы одинакова, — ведь трубка имеет постоянное сечение, а по уравнению Бернулли и давление должно было быть одинаковым. В данном случае в вязкой жидкости на частицу, кроме сил давления, действуют еще и силы вязкости, поэтому при стационарном течении с постоянной скоростью давление падает вдоль трубы тока.

Течение происходит вдоль трубы прямолинейно, скорости всех частиц направлены вдоль оси трубы, следовательно, силы вяз-

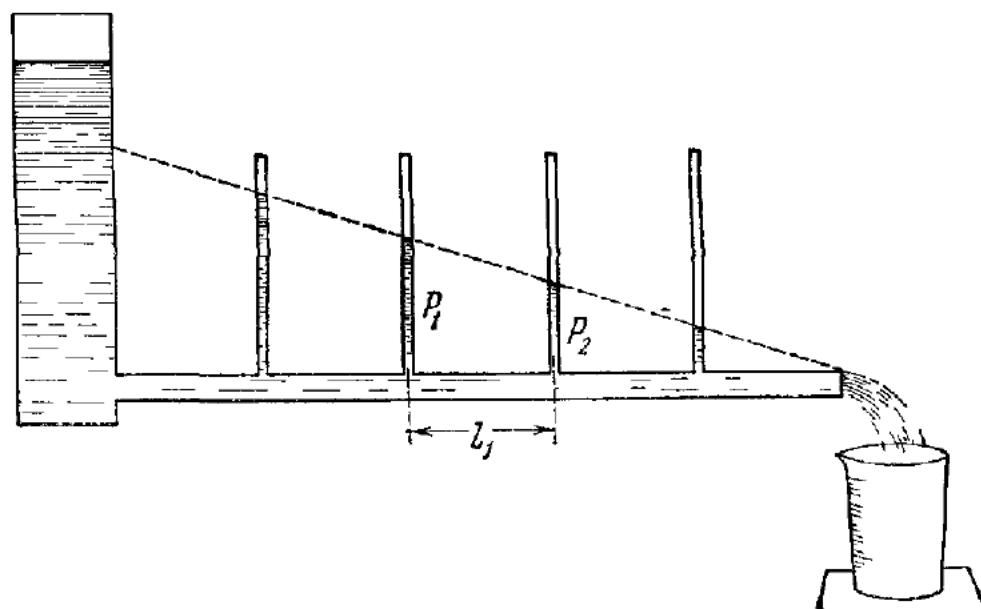


Рис. 303.

кости будут действовать только в направлении оси трубы. Падение давления вдоль трубы тока уравновешивается силами вязкости, и поэтому скорость течения жидкости остается постоянной вдоль трубы.

Рассмотрим подробнее стационарное течение вязкой жидкости в прямой горизонтальной трубе постоянного сечения. Давление в каждом поперечном сечении можно считать одинаковым. Если этого не было бы, то линии тока изгибались бы или возникали бы течения поперек трубы. Все частицы жидкости, прилегающие к стенке круглой трубы, прилипли к ней и имеют скорость, равную нулю, кольцевой слой, прилегающий к ним, из условия симметрии должен иметь по всей окружности одинаковую скорость. Если представим себе жидкость разделенной на достаточно тонкие концентрические кольцевые слои, то скорость в каждом таком слое одна и та же; поэтому величину скорости течения можно полагать только функцией расстояния  $r$  данной частицы от оси трубы.

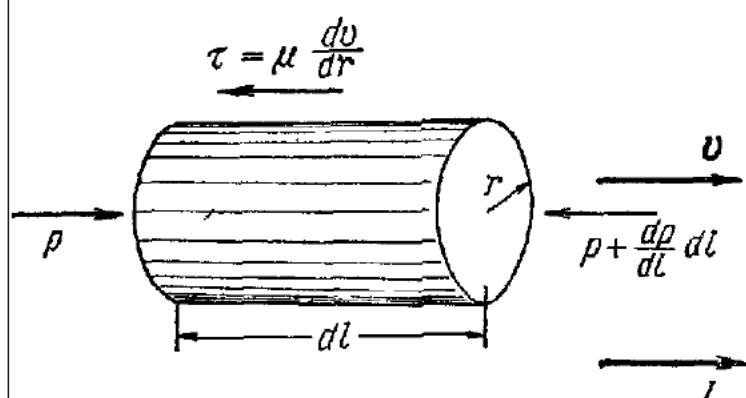
Выделим из объема текущей жидкости цилиндр радиуса  $r$ , длиной  $dl$  (рис. 304) и напишем условия движения цилиндра.

Жидкость движется равномерно, следовательно, сумма всех сил, приложенных к выделенному цилинду, равна нулю. Разность сил давлений на концах цилиндра

$$\left[ p - \left( p + \frac{dp}{dl} dl \right) \right] \pi r^2 = - \frac{dp}{dl} dl \pi r^2$$

должна быть уравновешена силами вязкости, приложенными на поверхности цилиндра. Сумма сил вязкости равна площади боковой поверхности цилиндра  $2\pi r dl$ , умноженной на напряжение сил

вязкости  $\tau$ . Равенство нулю всех внешних сил, действующих на цилиндр, теперь можно записать так:



$$- \frac{dp}{dl} dl \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r dl = 0,$$

$$\text{или } \frac{dp}{dl} r = -2\tau. \quad (111.1)$$

Рис. 304.

По закону Ньютона (см. (39.1)) напряжение сил вязкости

пропорционально производной от скорости в перпендикулярном направлении, в направлении радиуса,

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}, \quad (111.2)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости и знак минус стоит потому, что скорость убывает с увеличением радиуса. Подставляя (111.2) в равенство (111.1), получаем

$$\frac{dp}{dl} r = 2\mu \frac{dv}{dr}. \quad (111.3)$$

Величина градиента давления вдоль оси трубы  $\frac{dp}{dl}$  не зависит от радиуса, так как давление  $p$  в любом поперечном сечении одинаково. Поэтому из уравнения (111.3) можно найти зависимость скорости течения от радиуса, проинтегрировав это уравнение по радиусу, учитывая при этом, что у стенки скорость  $v(R) = 0$ ,

$$\frac{dp}{dl} \int_R^r r dr = 2\mu \int_0^v dv, \quad (111.4)$$

где  $R$  — радиус трубы. После вычислений получаем

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dl} (r^2 - R^2) = 2\mu v,$$

или

$$\frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dl} \right) (R^2 - r^2) = v. \quad (111.5)$$

Давление равномерно падает в направлении скорости, и поэтому величина  $-\frac{dp}{dl}$  положительна и постоянна. Скорость будет максимальна на оси трубы, и распределение величины скорости по диаметру трубы происходит по параболическому закону (рис. 305). Максимальная скорость равна

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dl} \right).$$

Распределение скоростей течения вязкой жидкости в трубе можно наблюдать по движению границы раздела двух различно окрашенных жидкостей. В вертикальной трубке налит окрашенный сахарный сироп (рис. 306, а), а сверху нужно аккуратно налить тот же сироп, но без краски. В состоянии покоя граница раздела горизонтальна. После открытия крана внизу трубки начинается медленное движение вязкой жидкости, и граница раздела начинает изменять с течением времени свою форму, все вытягиваясь по оси (см. рис. 306, б)

Зная распределение скорости, можно подсчитать объемный расход жидкости  $Q$  через поперечное сечение трубы. Через кольцо радиуса  $r$  и площадью

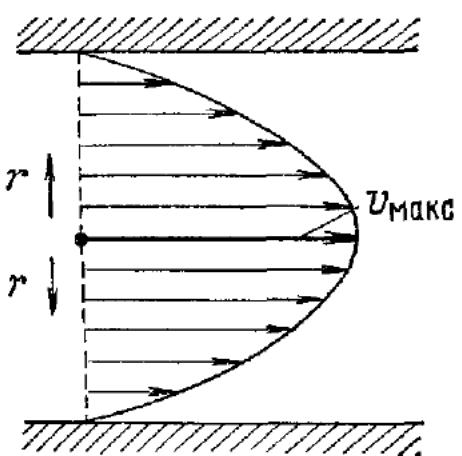


Рис. 305.

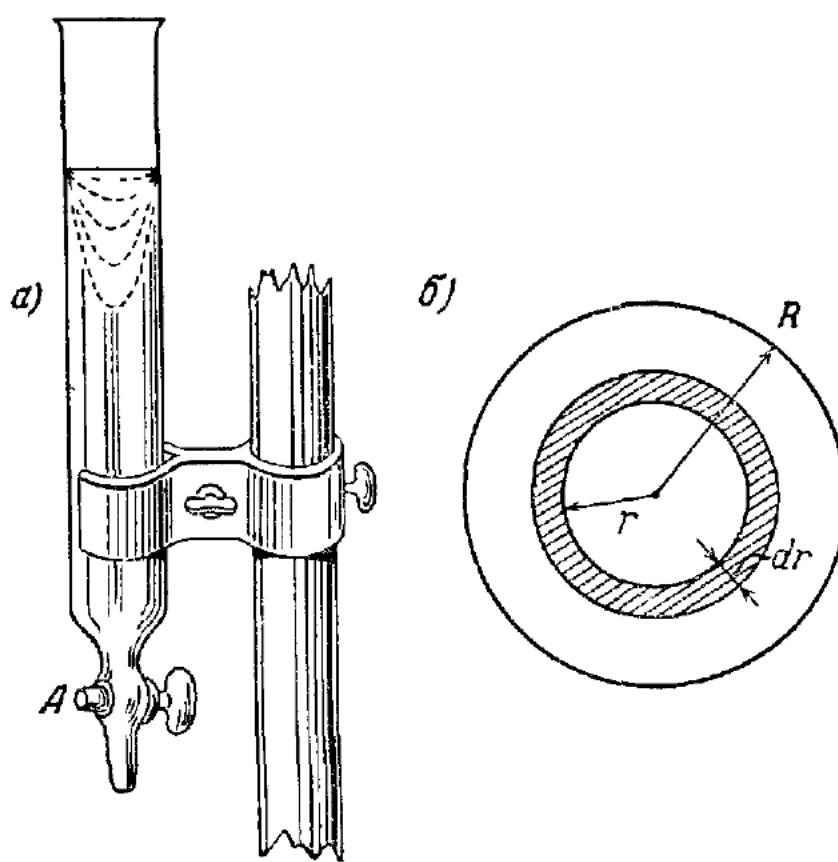


Рис. 306.

$2\pi r dr$  за секунду пройдет объем жидкости  $dQ = v 2\pi r dr$  (рис. 306, б), а через все сечение

$$Q = \int dQ = 2\pi \int_0^R vr dr = \frac{2\pi}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dl} \right) \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dl} \right). \quad (111.6)$$

Здесь мы приняли во внимание формулу (111.5).

Пользуясь этим законом, можно построить простой прибор для измерения коэффициента вязкости  $\mu$  жидкости, схема которого дана на рис. 303. Величину  $\frac{dp}{dl}$  можно вычислить на основании результатов измерения давления в различных точках трубы. Так как давление падает пропорционально длине, то

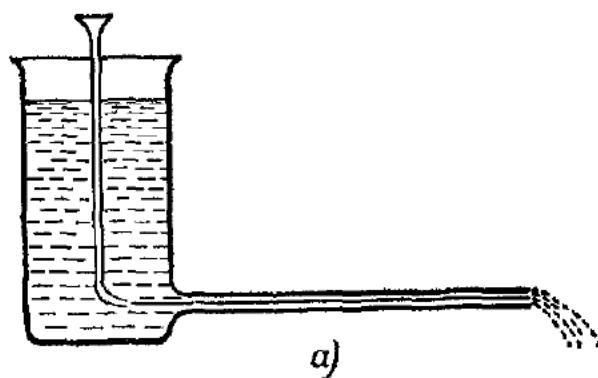
$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_n - p_k}{l}, \quad (1117)$$

где  $p_n$  — давление в начале, а  $p_k$  — в конце отрезка трубы длиной  $l$ .

Величину расхода  $Q$  можно измерить непосредственно, измерив количество жидкости, прошедшей за определенное время через трубу. Зная радиус трубы  $R$ , можно на основании этих данных определить коэффициент вязкости  $\mu$  жидкости.

Течение жидкости в цилиндрической трубе, при котором скорости частиц всюду направлены вдоль оси, называется *ламинарным* или *слоистым*. Такое течение наблюдается при небольшом

значении скорости потока вязкой жидкости. С увеличением скорости потока, с увеличением перепада давления на концах трубы, течение принципиально изменяет свой характер: вместо спокойного слоистого течения наблюдается *турбулентное*, или *завихренное*, течение.



a)

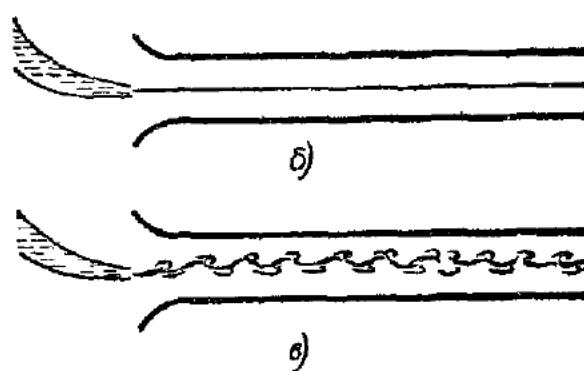


Рис. 307.

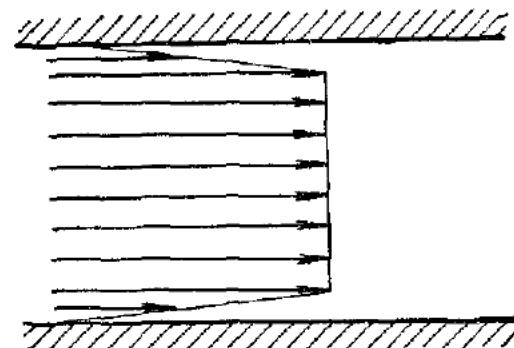


Рис. 308.

Возникновение завихренного течения легко наблюдать, если в стеклянную трубочку, по которой протекает вода из сосуда,пустить подкрашенную струйку (рис. 307, a). При небольшой скорости потока течение будет слоистым и подкрашенная струйка в виде почти прямой линии будет идти параллельно оси трубы (рис. 307, б). Затем, при постепенном увеличении скорости потока, внезапно начинается завихренное движение и струйка размывается в широкую ленту с неровными краями, как показано на рис. 307, в.

При стационарном турбулентном движении скорость в данном месте не остается постоянной по величине и направлению, а совершают быстрые беспорядочные колебания как по величине, так и по направлению. Но среднее значение скорости будет постоянной

определенной величиной, направленной вдоль оси трубы. Поэтому в завихренном потоке чаще всего определяют среднее значение скорости.

Чем определяется возникновение турбулентности, мы скажем ниже, в § 113, а здесь отметим, что распределение средней скорости при турбулентном потоке по диаметру трубы совсем иное (рис. 308), отличное от того, что мы видели при ламинарном движении (см. рис. 305). При завихренном движении средняя скорость почти по всему сечению трубы остается почти постоянной и только вблизи стенок быстро спадает до нуля, *пограничный слой* вблизи стенок занимает сравнительно небольшую долю потока, а в центре поле скоростей почти однородно и более похоже на то, которое должно быть в трубе при отсутствии вязкости жидкости. При слоистом движении (см. рис. 305) нет четкого пограничного слоя, во всех частях трубы поле скоростей изменяется из-за сил вязкости так же, как вблизи стенок, можно даже сказать, что в этом случае пограничный слой занимает весь поток жидкости.

## Глава XIII

### ДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА НА ТЕЛО

#### § 112. Лобовое сопротивление тел в потоке

Силы воздействия потока на твердое тело всегда можно привести к одной результирующей силе и моменту всех сил. Результирующую силу всегда можно разложить на две перпендикулярные составляющие одна — по потоку, *сила лобового сопротивления*, вторая — перпендикулярная к нему. Для симметричных тел, расположенных так, что ось симметрии направлена по потоку, сила воздействия потока, очевидно, направлена тоже по потоку, в этом случае существует только сила лобового сопротивления.

Чем же определяется сила лобового сопротивления? Она зависит от формы, от размеров тела, от скорости потока и от физических свойств жидкости. Опыты показывают, что сила сопротивления тел одинаковой формы пропорциональна площади поперечного сечения тела (поперечного по отношению к направлению скорости потока  $v$ ), скоростному напору  $\rho v^2/2$  и некоторому коэффициенту  $C_x$ , называемому *коэффициентом лобового сопротивления* тела данной формы. Коэффициент лобового сопротивления, вообще говоря, не остается постоянным, он зависит от величины *числа Рейнольдса*  $Re = v l \rho / \mu$ , где  $l$  — характерный размер тела,  $v$  — скорость потока,  $\rho$  — плотность жидкости и  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости. О физическом значении этой зависимости будет сказано в следующем параграфе.

На рис. 309 показана кривая зависимости коэффициента лобового сопротивления для шара от числа  $Re$ . Так как число Рейнольдса пропорционально скорости потока, то при небольших значениях этого числа, примерно до  $Re \approx 100$ , сила сопротивления пропорциональна скорости потока. Далее наступает переходная область, после которой коэффициент лобового сопротивления остается почти постоянным, это значит, что сила сопротивления на этом участке пропорциональна квадрату скорости потока. Вблизи значения  $Re \approx 1,5 \cdot 10^5$  коэффициент  $C_x$  резко изменяет свое значение и далее остается примерно постоянным. Величина силы сопротивления  $F_A$  для шара в зависимости от скорости пока-

зана на рис. 310. Область *a* — область линейной зависимости, область *b* — первая область квадратичной зависимости, ей соответствует коэффициент лобового сопротивления  $C_x \approx 0,4$ , *c* — вторая область квадратичной зависимости, ей соответствуют значения  $C_x \approx 0,1 - 0,2$ .

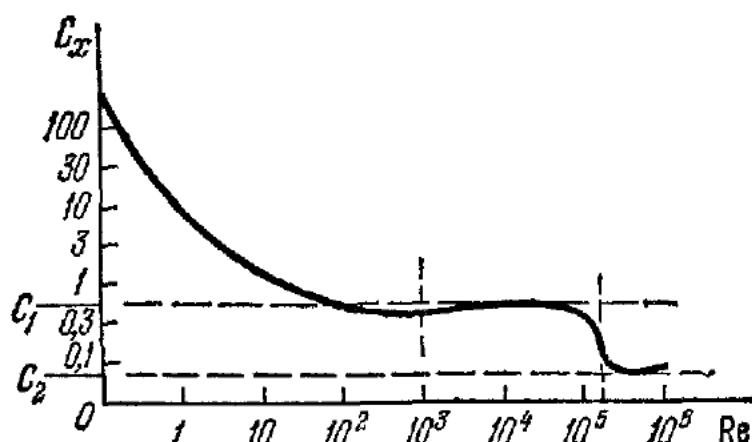


Рис. 309.

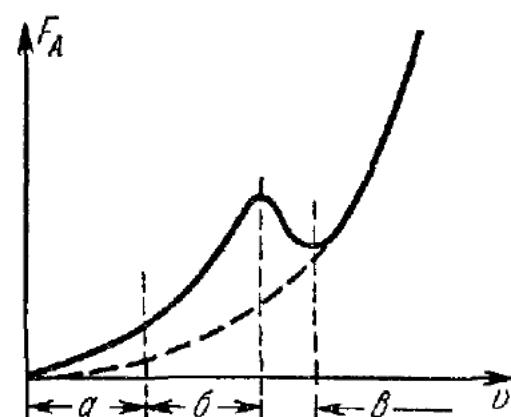


Рис. 310

Прежде чем перейти к анализу картины обтекания и выяснению причин изменения силы лобового сопротивления в зависимости от скорости, сделаем несколько замечаний относительно силы сопротивления тела в идеальной жидкости (жидкости, лишенной вязкости). В этом случае поток будет плавно обтекать гладкое тело, такое, как, например, шар, и трубки тока расположатся совершенно симметрично относительно шара.

Сил вязкости нет, поэтому на поверхность шара действуют только силы статического давления. Но вследствие симметрии потока

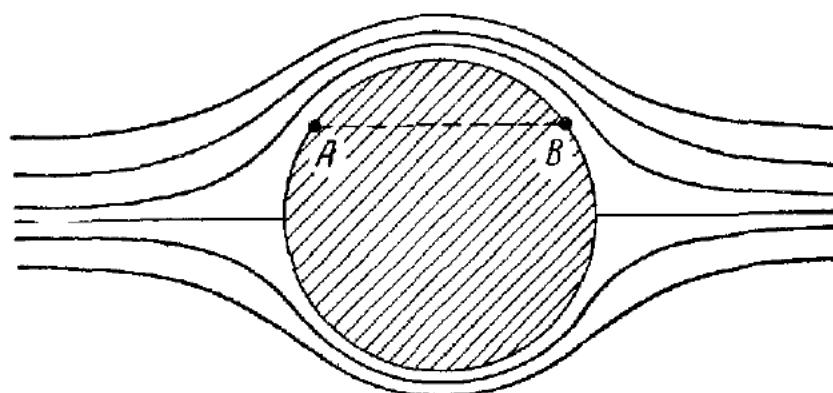
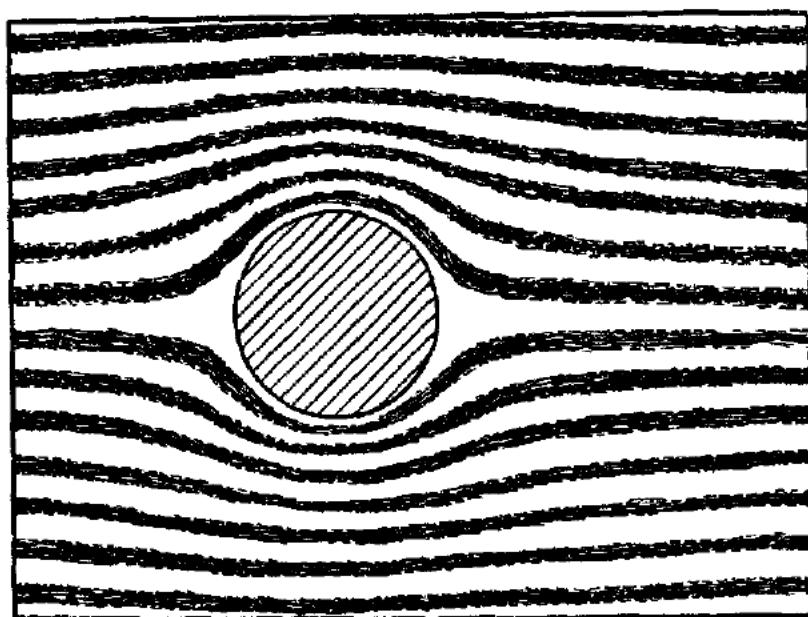


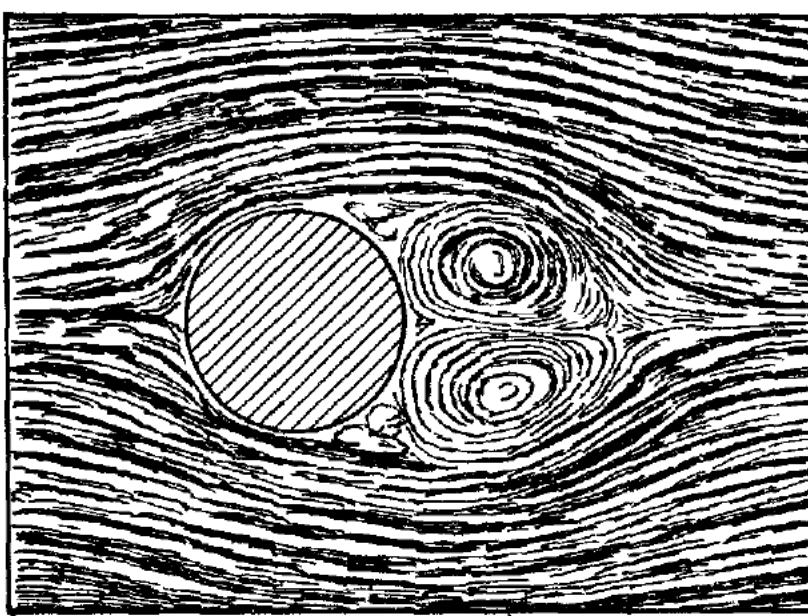
Рис. 311

впереди и сзади шара сечение трубки тока в любой точке *A* равно сечению трубки тока в точке *B*, лежащей с противоположной стороны шара по отношению к потоку (рис. 311). Следовательно, скорость в этих точках одинакова и давление также одинаково. Поэтому результирующая сила, действующая на шар, находящийся в потоке идеальной жидкости, равна нулю. Теоретический анализ безотрывного, плавного обтекания идеальной жидкостью любого тела показывает, что и в этом случае сила сопротивления равна нулю («парадокс» Даламбера).

Однако только при очень малой скорости потока мы наблюдаем плавное, безотрывное движение жидкости около тела. Плавное, безотрывное обтекание можно хорошо наблюдать в лоточке прибора, показанного на рис. 283. Поставив цилиндр на дно лоточка,



a)



б)

Рис. 312

можно наблюдать, как линии тока расходятся перед цилиндром и замыкаются сзади.

На рис. 312, а показаны линии тока вокруг цилиндра при плавном обтекании. При увеличении скорости обтекания картина принципиально изменяется. Линии тока перестают замыкаться за цилиндром и «отрываются» от него, образуя за телом резко завихренное пространство; обтекание происходит с отрывом трубок тока от тела. На рис. 312, б показаны линии тока при обтекании цилиндра с отры-

вом потока. В пространстве за цилиндром имеется завихренная область, в которой уже нельзя наблюдать линии тока, и поэтому она резко отделяется от области регулярного течения, где можно наблюдать четкие линии тока. В этом случае нет симметрии давления, действующего на тело со стороны потока сзади и спереди. Впереди остается примерно такая же картина, как и при плавном обтекании — давление в критической области и вблизи нее больше статического на величину порядка  $\rho v^2 / 2$  — величину динамического напора. Но сзади цилиндра линии тока, оторвавшись от тела, идут более прямолинейно, и сзади, в зоне завихрения, давление всегда меньше, чем спереди, оно примерно равно статическому давлению в невозмущенном потоке. Следовательно, при отрыве потока результирующая сила давления дает сгасывающую назад, и таким образом объясняется возникновение силы лобового сопротивления даже в «идеальной» жидкости при наличии отрыва потока.

В общем случае обтекания любого тела отрыв потока вызывает такое перераспределение давления по поверхности тела, при котором результирующая не равна нулю и поток жидкости, не обладающей вязкостью, действует на тело с определенной силой.

В потоке вязкой жидкости на поверхности тела, как мы знаем, действует касательная сила, тянувшая тело по потоку. Даже если обтекание вязкой жидкостью и безотрывное, как мы наблюдали в опытах (см. рис. 312, а), то, несмотря на симметрию потока, все равно имеет место сила лобового сопротивления, слагающаяся в основном из касательных сил вязкости, примерное распределение которых схематически показано на рис. 313. Картина принципиально изменится при отрыве потока вязкой жидкости. Здесь, кроме касательных сил, возникающих вследствие вязкости, существенную роль будет играть перераспределение сил давления вследствие отрыва потока, благодаря чему возникает результирующая сила давления, действующая по погону. При большой скорости (вернее, при большом значении числа  $Re$ ) преобладают силы, возникающие вследствие перераспределения давления у поверхности тела.

Кроме этого, при отрыве потока от тела в завихренной области течения наблюдается образование отдельных вихрей, которые иногда регулярно, иногда нерегулярно отходят от границы отрыва потока на теле и заполняют собой завихренную область за телом. Понятно, что образование и уход вихрей от тела вызывает колебания потока и, следовательно, колебания давления у поверхности тела, регулярные или нерегулярные в зависимости от периодич-

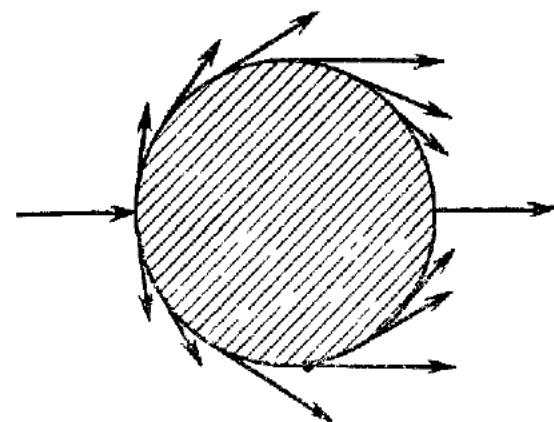


Рис. 313.

ности образования вихрей. Эти колебания давления довольно трудно измерить и рассчитать теоретически, но несомненно одно, если осреднить по времени колебания давления, то они дадут добавочное лобовое сопротивление, которое иногда так и называют *вихревым сопротивлением*.

Соображения, на основании которых приходят к такому заключению, следующие. Пусть тело движется равномерно в покойной среде и за ним образуются вихри, как говорят, *вихревой след*. Жидкость в следе получает после прохода тела определенное вращательное движение, определенную кинетическую энергию. Где источник этой энергии? Им может быть только сила, приложенная к телу, которая необходима в данном случае для равномерного движения. По закону сохранения энергии кинетическая энергия вихревого движения в следе должна равняться работе силы лобового сопротивления.

Таким образом, можно различать три причины возникновения лобового сопротивления тела в вязкой жидкости: а) касательные силы вязкости, б) перераспределение давления из-за отрыва потока, в) колебания давления из-за вихреобразования за телом.

Ниже в таблице приводятся средние значения коэффициентов лобового сопротивления для тел различной формы.

Форма тела и направление потока	$C_x$	Re
→	Диск	1,11
→ D	Полусферическая чашка	1,35—1,40
→ O		0,30—0,40
→ ○	Шар	0,4
→ ○		0,1—0,2
→ ○	«Каплевидное» тело вращения	0,045
→ ○		0,1

Из этой таблицы можно видеть, какое большое значение имеет форма задней части тела. При одном и том же поперечном сечении наименьшее сопротивление имеют «каплевидные» тела, у которых тупой нос и плавное заострение сзади. Такое плавное заострение задней части, где сходятся струйки охватывающего тело потока, обеспечивает небольшую область срыва потока и предупреждает срыв. Большая часть тела обтекается плавным потоком, примерно таким же, как и в «идеальной» жидкости; поток смыкается сзади в области с повышенным давлением, и вследствие этого уменьшается сила сопротивления.

Наоборот, «каплеобразное» тело, поставленное острием к потоку, дает большее сопротивление, ибо почти вся задняя часть тела будет находиться в области срыва потока, поток не смыкается за телом и сопротивление будет больше. Поэтому стойки, растяжки на самолетах и другие выступающие в поток тела обычно имеют хорошо обтекаемую форму. Форма их поперечного сечения подобна форме каплеобразного тела; за такими стойками или растяжками не возникает срыва потока совсем или он занимает очень малую часть их поверхности.

### § 113. Закон механического подобия при обтекании тел

Как можно заключить из предыдущих параграфов, картина явлений, имеющих место при обтекании тел вязкой жидкостью, довольно сложна, а теоретически определить силу сопротивления в большинстве случаев пока еще просто невозможно. Поэтому приходится экспериментально определять силы, действующие на тело в потоке.

Конечно, во многих практически интересных случаях (самолет, корабль и т. п.) такое определение сил воздействия на больших телах («в натуре») представляет очень трудную задачу, решение которой не только сложно и дорого, но иногда просто невозможно. Поэтому ставятся такие вопросы: нельзя ли при соблюдении геометрического подобия измерить силы сопротивления на маленькой модели и затем уже определить силы действия потока на большое тело? Можно ли и при каких условиях на основании испытания маленькой модели узнать силы, действующие на геометрически подобное тело больших размеров? Можно ли на основании испытаний в воде или в какой-либо другой жидкости или газе сделать заключение о том, какие силы будут действовать на геометрически подобное тело в воздухе? Общий ответ на эти вопросы таков: для этого необходимо, чтобы кроме геометрического подобия модели и натуры имело место и *механическое подобие*<sup>1)</sup>.

Действительно, при неизменности формы тела обтекание его может быть различным в зависимости от скорости потока и свойств

<sup>1)</sup> Иногда говорят о динамическом подобии.

жидкости, поэтому необходимо, чтобы при механически подобных потоках были подобны не только формы линий токов, но и были бы одинаковыми отношения сил различной физической природы для каждого участка потока как для модели, так и для натуры.

В потоке вязкой жидкости на каждую частицу действуют две силы: сила давления и сила вязкости (если допустимо пренебречь силой тяжести частиц), сумма которых равна «массе на ускорение». Если для сокращения будем называть «массу  $\times$  ускорение» с обратным знаком «силой инерции»<sup>1)</sup>, то можно сказать так: каждая частица жидкости всегда находится под действием трех находящихся в равновесии сил: «силы инерции», силы давления и силы вязкости. Сумма всех трех сил равна нулю, следовательно, только две из них независимы. Поэтому в качестве меры соблюдения механического подобия можно выбрать отношение любых двух сил, обычно выбирают отношение «сил инерции» к силам вязкости. Это отношение есть условие подобия, оно пропорционально числу Рейнольдса, которое является безразмерной величиной.

Итак, если числа Рейнольдса одинаковы для потоков, обтекающих модели и натуры, то в этих потоках отношение сил инерции к силам вязкости также одинаково и, следовательно, потоки жидкости, окружающие модель и натуру, подобны не только геометрически, но и механически.

Для определения отношения сил инерции к силам вязкости нужно написать уравнение движения для частицы жидкости при наличии сил трения (вязкости).

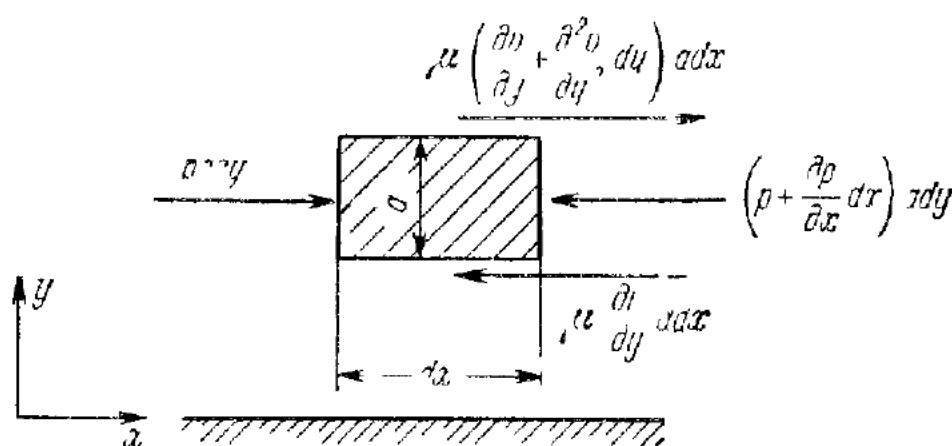


Рис. 314

хотя бы в самом простом случае. Напишем это уравнение для потока вязкой жидкости постоянного направления, идущего вдоль плоской стенки (рис. 314).

Пусть скорость потока  $v$  зависит от времени  $t$  и координаты  $y$  (расстояния от стены) и направлена по оси  $x$ . Возьмем элемент жидкости объема  $a dx dy$ , где  $a$  — размер элемента по перпендикуляру к чертежу. Слева на выделенную частицу действует сила давления  $p a dy$ , снизу и сверху — силы вязкости  $\mu \frac{dv}{dy} a dx$ .

<sup>1)</sup> Это определение «силы инерции» отлично от того, которое всюду принято в этой книге.

и  $\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \right) a dx dy$ , справа — сила давления  $\left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) a dy$ . Сумма всех этих сил должна равняться массе, умноженной на ускорение, или

$$\rho \frac{dv}{dt} a dx dy$$

Таким образом, уравнение динамики будет

$$\rho \frac{dv}{dt} a dx dy = - \frac{\partial p}{\partial x} a dx dy + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} a dx dy \quad (113.1)$$

Для стационарного потока по (101.3)

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x},$$

и поэтому (113.1) можно переписать так

$$\left( \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) a dx dy = 0 \quad (113.2)$$

Это и есть основное равенство сил действующих на частицу в вязкой жидкости, на основании его найдем условие

$$\frac{\rho_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_n}}{\mu_n \frac{\partial^2 v_n}{\partial y_n}} = \frac{\rho_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial x_m}}{\mu_m \frac{\partial^2 v_m}{\partial y_m}}, \quad (113.3)$$

где индекс «*n*» обозначает, что данная величина относится к «натурному» потоку, а «*m*» — к потоку около модели. Выражение (113.3) можно преобразовать так

$$\frac{\rho_n v_n \partial y_n}{u_n} = \frac{\rho_m v_m \partial y_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 v_n}{\partial^2 v_m} \frac{\partial v_m}{\partial v_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_m} \frac{\partial y_m}{\partial y_n}. \quad (113.4)$$

Пусть модель имеет какой то характерный размер длины  $l_m$ , а тот же размер в натуре имеет длину  $l_n$ . Тогда, очевидно, для подобных потоков

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_m} = \frac{l_n}{l_m}, \quad \frac{\partial y_n}{\partial y_m} = \frac{l_n}{l_m}, \quad \frac{\partial v_n}{\partial v_m} = \frac{v_n}{v_m}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_m} = \frac{v_n}{v_m}. \quad (113.5)$$

Учитывая эти условия, можно записать основное требование механического подобия (113.4) так

$$\frac{\rho_n v_n l_n}{\mu_n} = \frac{\rho_m v_m l_m}{\mu_m}. \quad (113.6)$$

Так как  $\frac{\rho v^2}{\mu} = Re$ , то можно сказать, что чем больше число Рейнольдса, тем меньше относительная величина сил вязкости, тем больше поток вязкой жидкости приближается к потоку «идеальной», лишенной вязкости жидкости. Очень малое значение этого числа указывает на преобладание сил вязкости в данном потоке.

Сравнивать число Рейнольдса можно только при геометрическом подобии тел и потоков, только в этом случае увеличению числа

Рейнольдса, допустим, в пять раз соответствует увеличение в пять же раз отношения сил инерции к силам вязкости.

При сравнении потоков вокруг тел различной формы, но похожих друг на друга, например труб разных сечений, крыльев разных самолетов и т. п., число  $Re$  примерно указывает на изменение соотношения между силами инерции и силами вязкости. Характер потока около тела, например отрыв потока, определяется не только формой тела, но и соотношением между силами инерции и силами вязкости. Для выяснения влияния этого соотношения на обтекание рассмотрим в следующем параграфе подробнее пограничный слой и связь его с вихреобразованием и отрывом потока.

Отметим, что возникновение турбулентного движения в трубе вместо слоистого, о котором шла речь в предыдущем параграфе, также определяется соотношением между «силами инерции» и силами вязкости. В круглых трубах до скорости течения, соответствующей примерно  $Re \approx 1000$ , наблюдается ламинарное течение, при большей скорости (когда  $Re > 1000$ ) — течение обычно турбулентное.

### § 114. Пограничный слой

Как было указано ранее, при обтекании тела жидкостью или газом *малой* вязкости существенное значение будет иметь сила вязкости только вблизи тела, в небольшом *пограничном слое*, где скорость нарастает от нуля на поверхности тела. Пограничный

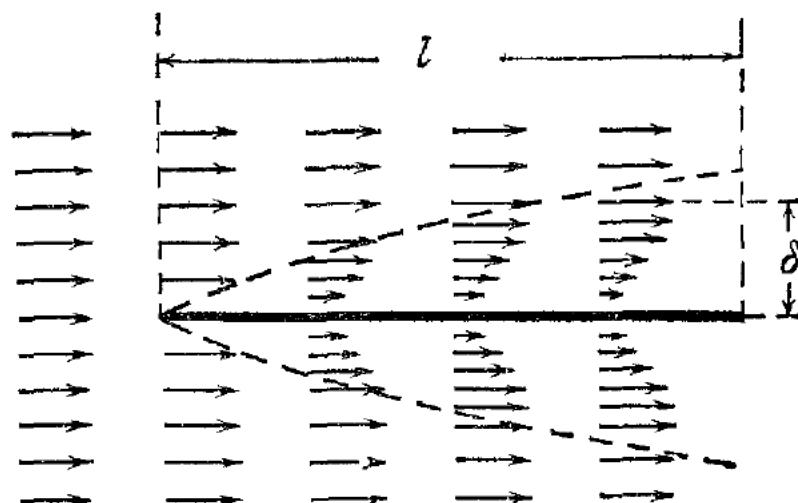


Рис. 315.

слой зависит не только от свойств жидкости, но и от формы тела. Например, на плоской пластинке, поставленной по потоку (рис. 315), пограничный слой расширяется по направлению потока, этот слой, заторможенный вследствие вязкости жидкости, утолщается к задней кромке пластиинки. На рис. 315 схематически показано поле скоростей частиц вблизи пластиинки, причем ради ясности чертежа пограничный слой утолщен и стрелки, представляющие скорости частиц, начерчены в слое гуще.

Как показывают теоретические расчеты, ориентировочно можно оценивать толщину пограничного слоя  $\delta$  по формуле

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (114.1)$$

Отношение толщины этого слоя к характерной длине тела  $l$  (относительная толщина пограничного слоя) обратно пропорционально квадратному корню из числа Рейнольдса. Мы не даем вывода этой формулы, но считаем полезным иметь в виду это простое соотношение. Например, для шара диаметром 10 см в потоке воздуха при скорости в 30 м/с число  $Re = \frac{10 \cdot 30 \cdot 10^2}{0,15} = 2 \cdot 10^5$  (для воздуха  $\mu/\rho \approx 0,15$  см<sup>2</sup>/с при 20 °C). Следовательно, толщина пограничного слоя на шаре примерно равна

$$\delta \approx \frac{10}{\sqrt{20 \cdot 10^5}} \approx 0,022 \text{ мм},$$

и с увеличением скорости потока она будет падать.

При очень малых значениях числа Рейнольдса (порядка 1) толщина пограничного слоя примерно совпадает с размерами тела (см. (114.1)). Хотя в данном случае эта формула не совсем справедлива, однако указанный вывод не противоречит действительности: при таких малых значениях числа Рейнольдса уже нельзя выделить пограничный слой, он занимает почти весь поток или значительную часть его вокруг тела. С подобным движением мы сталкивались в примере с ламинарным движением вязкой жидкости по трубе (см. § 111) и при движении маленького шарика, опускающегося в глицерине (см. § 40). Так, например, для стального шарика диаметром 2 мм скорость падения в глицерине примерно равна 2 см/с. Действительно, по (40.3)

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_{ш} - \rho_{ж}}{\mu} g t^2 = \frac{2}{9} \frac{8-1}{8,5} \cdot 10^3 \cdot 0,1^2 \approx 2 \text{ см/с.}$$

Поэтому число Рейнольдса  $Re = \frac{2 \cdot 0,2}{6,8} \approx 0,06$ , так как для глицерина  $\frac{\mu}{\rho} \approx 6,8$  см<sup>2</sup>/с. Здесь толщина «пограничного» слоя значительно больше размеров шарика.

При значении числа Рейнольдса выше  $10^4$  толщина пограничного слоя будет меньше 0,01 размера тела. Следовательно, при больших значениях числа Рейнольдса ( $Re \geq 10^4$ ) можно говорить о тонком, действительно пограничном слое, окружающем тело. Далее всюду будет идти речь только о таком слое.

Поток мало вязкой жидкости вокруг цилиндра можно представить себе грубо так: вблизи поверхности цилиндра возникает слой заторможенной жидкости (пограничный слой), а вне его

течение очень мало отличается от течения идеальной жидкости. С первого взгляда кажется, что наличие пограничного слоя приводит только к возникновению небольших касательных сил и к небольшому изменению эффективных размеров цилиндра. В действительности же при больших значениях числа Рейнольдса поток существенно изменится вследствие отрыва и возникновения турбулентности.

Рассмотрим влияние пограничного слоя на обтекание. На передней части цилиндра, где скорость потока вне слоя возрастает в направлении потока, а давление падает, никаких особых изменений пограничный слой не вызовет, и давление в нем почти

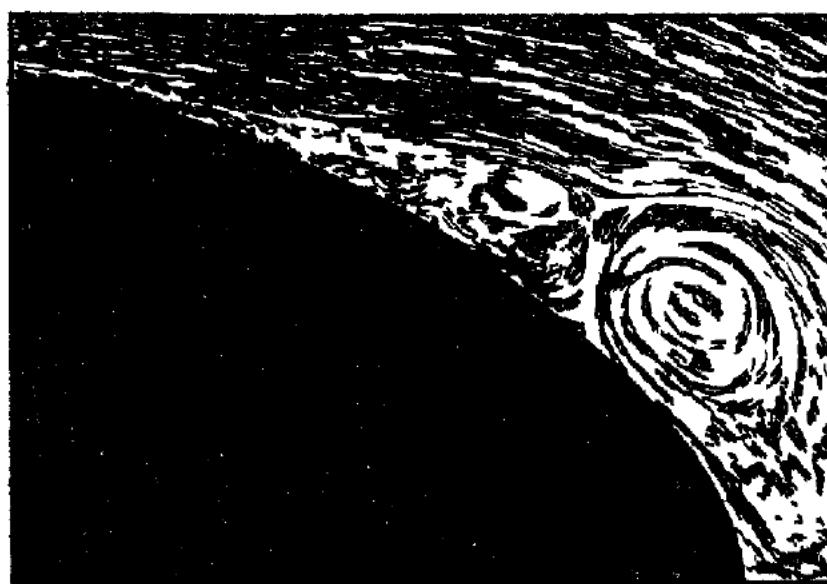


Рис. 316.

такое же, как и в потоке жидкости вблизи слоя. В передней части тела давление будет падать в направлении потока и тем самым будет уменьшать пограничный слой, уменьшать торможение частиц, вызванное силами вязкости, падение давления по потоку, так сказать, «выжимает» частицы из слоя.

Совсем другая картина будет на задней половине цилиндра (шара или другого тела), где линии тока расширяются по потоку и скорость падает, а давление *возрастает* вдоль потока. Здесь давление будет еще более тормозить движение частиц в пограничном слое, и при увеличении скорости потока, при увеличении падения давления может оказаться, что частицы жидкости вблизи тела совсем остановятся и даже начнут *возвратное* движение против потока (рис. 316). Частицы, идущие против потока вдоль поверхности тела, и частицы набегающего потока на какой-то границе (границе «отрыва») встречаются и заворачиваются набегающим потоком обратно, таким образом возникает вращательное движение частиц, которое все более раскручивается потоком, захватывает все большее количество жидкости и, наконец, уве-

кается погоном и уходит от тела, продолжая по инерции вращательное движение. За тем возникает *область вихреобразования*, поток заполняется вихрями. Выше некоторого значения числа Рейнольдса (для шара это значение составляет  $\approx 3 \cdot 10^5$ ) сам пограничный слой становится турбулентным, вследствие этого область срыва уменьшается и величина коэффициента лобового сопротивления (см. рис. 309) тоже уменьшается.

### § 115. Измерение сил, действующих на тело в потоке

Действие потока зависит от движения тела относительно частицы жидкости. Очевидно, что силовое воздействие будет одно и то же независимо от того, движется ли тело относительно неподвижной среды или среда движется с той же скоростью относительно тела.

При проектировании самолета или вообще воздушных, надводных и подводных кораблей необходимо знать величину сил воздействия среды — воздуха или воды, действующих на эти корабли. Поэтому обычно предварительно

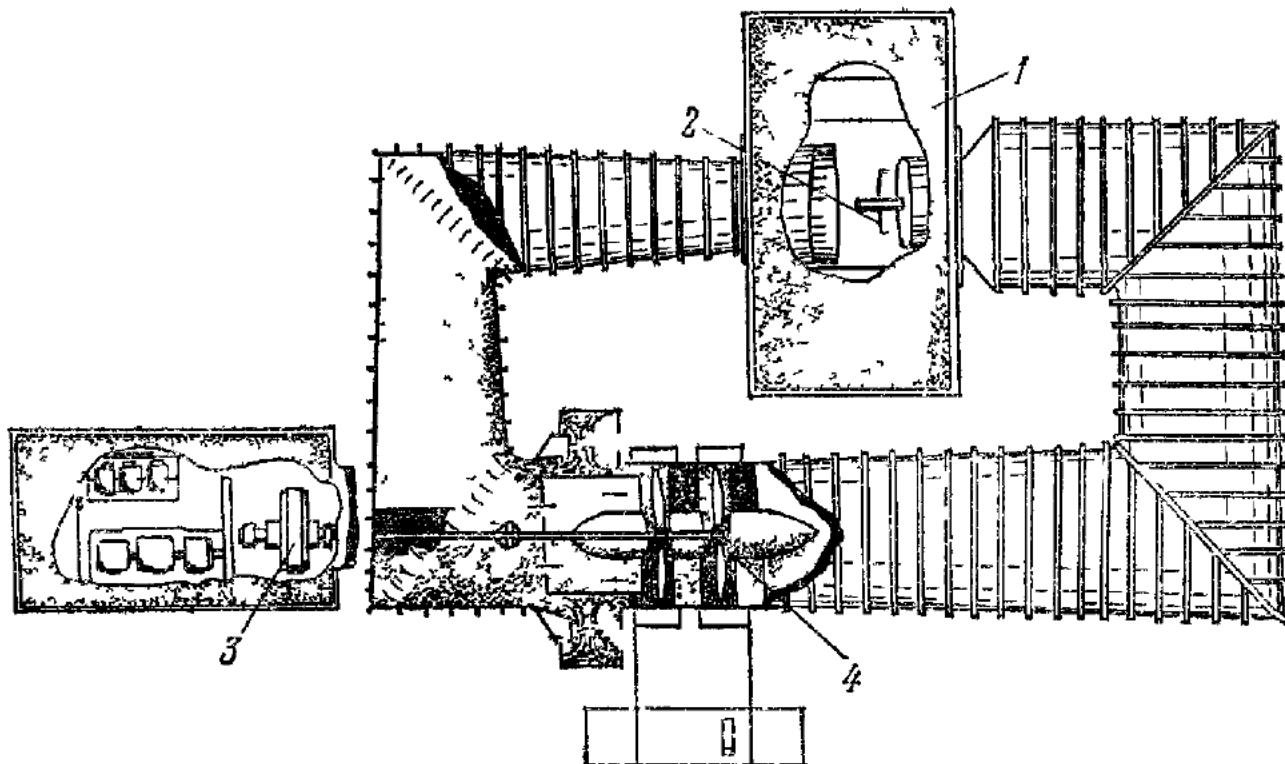


Рис. 317.

определяются на моделях силы, действующие на них при движении в среде. Для этого модель двигают с определенной скоростью, скажем, буксируют модели судов по поверхности воды, или они в специальных бассейнах, и измеряют возникающие при этом силы или измеряют силы, действующие на модель, которая находится в определенном потоке воздуха, как, например, модели самолетов и других тел в аэродинамической трубе изображенной на рис. 317.

Так как практически испытуемая модель всегда находится в ограниченном потоке — в трубе, в канале и т. п., — то существует принципиальное различие между опытами, в которых тело движется в бесграничной покоящейся среде, и опытами, в которых тело находится в движущейся среде в потоке. В трубе (или в канале) в обтекание будут вносить определенные искажения стенки — границы потока, поэтому для устранения влияния этих искажений следует выбирать тонкостенные

размеры моделей достаточно малыми по сравнению с размерами потока (с диаметром трубы, шириной и глубиной канала и т. д.)

На рис. 317 представлен схематический вид аэродинамической грубы с замкнутым потоком и с открытым «рабочим» промежутком. Вентилятор 4, вращаемый мотором 3, создает постоянный поток воздуха по почти замкнутои трубе. На некотором участке 1 трубы разомкнута, здесь и создается равномерный поток, в который помещается модель 2, установленная на «весах». Воздух выходит из сопла трубы, обдувает модель и возвращается в трубу «Весы», называемые аэродинамическими весами, предназначены для определения сил, действующих на модель. Размеры потока, трубы и модели выбирают так, чтобы можно было пренебречь влиянием остальных предметов, окружающих поток, или учесть его. Установливая различные модели на «весах», можно измерять силы и моменты, действующие на модели.

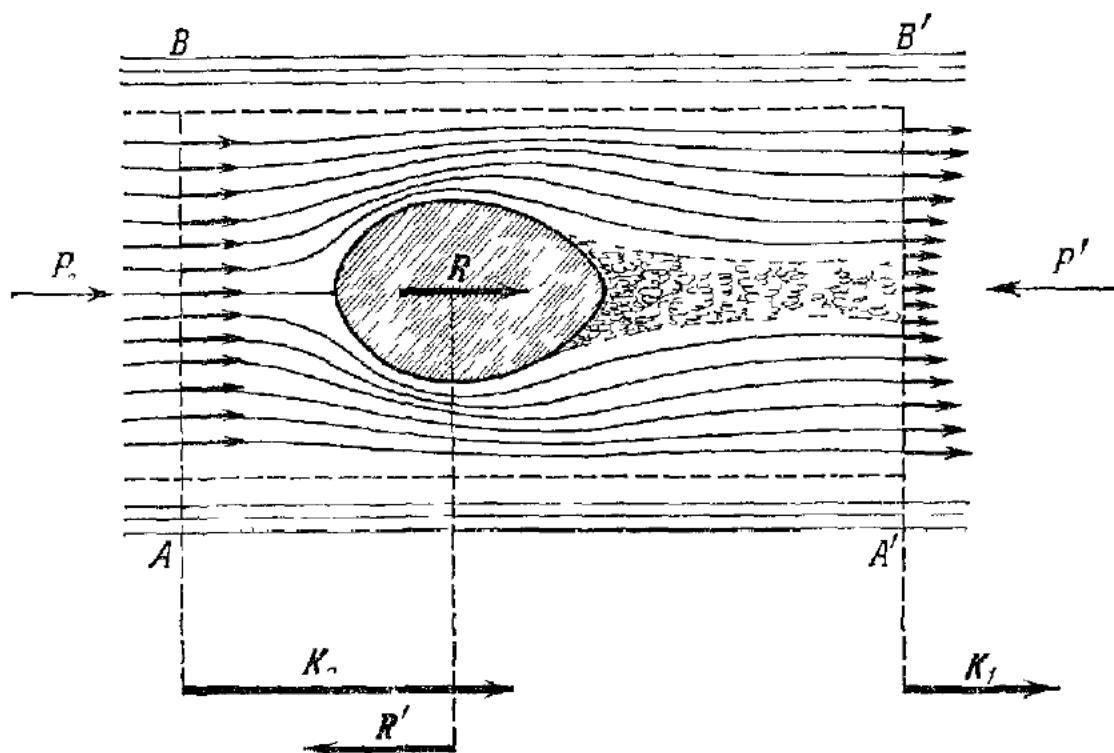


Рис. 318.

Измерение сил при помощи весов не всегда удобно, и поэтому можно воспользоваться законом изменения количества движения (см. § 109). Силу, действующую на тело, можно определить, измеряя поле скоростей и давлений воздуха вокруг тела.

Если в однородный поток воздуха поставить небольшое осесимметричное тело (рис. 318) и измерить поле скорости и давления до тела и за телом на некотором расстоянии от него, то на основании этих измерений можно определить силу лобового сопротивления тела. Действительно, определим количество движения  $K_0$  жидкости, проходящей за секунду через перпендикулярную к потоку плоскость  $AB$ , и количество движения  $K_1$  жидкости, проходящей за секунду через параллельную ей плоскость  $A'B'$ , а также давление, имеющее место на плоскостях  $AB$  и  $A'B'$ . Пусть эти силы давления равны  $P_0$  и  $P'$  соответственно, тогда сила лобового сопротивления  $R'$ , действующая со стороны тела на жидкость, определяется из равенства

$$K_1 - K_0 = P_0 + P' + R', \text{ или } R' = K_1 - K_0 - (P_0 + P')$$

При этом мы полагаем, что размеры площадок на плоскостях  $AB$  и  $A'B'$  достаточно велики и количеством движения частиц, проходящих через боковые цилиндрические поверхности (след их показан пунктиром на рис. 318), можно пренебречь.

Очень часто давления спереди и сзади почти одинаковы и  $P' + P_0 \approx 0$ , тогда давление можно не учитывать. В этом случае сила лобового сопротивления тела  $R = -R'$  равна разности между ежесекундным количеством движения жидкости, проходящей перед телом, и ежесекундным количеством движения жидкости, проходящей за телом,

$$R = K_0 - K_1.$$

В общем случае, когда на тело действует не только сила лобового сопротивления (сила, действующая вдоль потока), а и сила, нормальная к потоку, то и тогда можно по изменению ежесекундного количества движения жидкости, проходящей через замкнутую, окружающую тело поверхность, судить о силе, действующей на тело со стороны потока, если измерены скорость и давление на этой поверхности.

### § 116. Подъемная сила крыла самолета

Одним практически чрезвычайно важным примером действия потока является подъемная сила крыла самолета, или подъемная сила пластины, наклоненной под углом к потоку. Крыло самолета представляет собой пластинку определенного профиля, закругленную спереди (передняя кромка) и заостренную сзади (задняя кромка) (рис. 319). Если пластинка поставлена под некоторым углом  $\alpha$  (этот угол называют углом атаки), то реакцию жидкости на пластинку можно разложить на две составляющие: нормальную к потоку силу  $F_n$  и силу лобового сопротивления  $R$ . При маленьких углах атаки  $\alpha$  сила  $F_n$  много больше  $R$ . Обычно самолет летит при таком угле атаки, когда подъемная сила  $F_n$  («полезная» сила) много больше силы  $R$  («вредной» силы лобового сопротивления).

Элементарное, предложенное еще Ньютона, объяснение возникновения подъемной силы просю. Частицы воздуха задолго до прохождения около них крыла самолета находились в покое; когда крыло подошло к ним, давление на частицы под крылом увеличилось и частицы воздуха получили движение вниз и вперед. Если мы подсчитали бы общее ежесекундное изменение количества движения частиц, направленное вниз, и разность давлений по поверхности, окружающей крыло, то определили бы подъемную силу.

Таким образом, крыло сообщает частицам воздуха, встречающимся на его пути, некоторое количество движения вниз, частицы

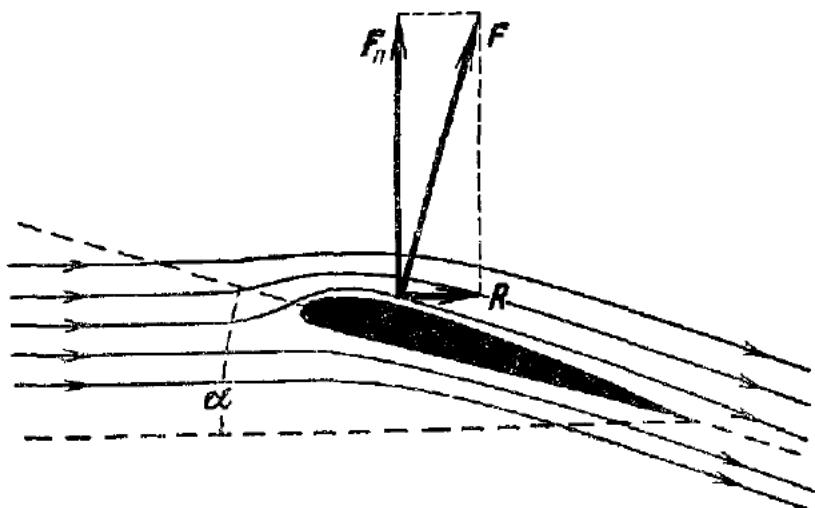


Рис. 319.

отталкиваются крылом вниз, следовательно, они в свою очередь действуют на крыло вверх. Самолет «держится» потому, что крыло все время «ударяет» частицы воздуха и посыпает их вниз. Давление на нижней поверхности будет больше, чем на верхней, и в результате на крыло действует подъемная сила, уравновешивающая вес самолета.

Из картины обтекания крыла потоком видно, что скорость частиц у верхней поверхности крыла больше, чем у нижней, ибо срУйки тока вверху уже, чем внизу крыла. А по уравнению Бернулли давление больше там, где скорость меньше, следовательно, давление на верхнюю поверхность меньше, чем на нижнюю, что и является причиной подъемной силы. Разность давлений на верхней и нижней поверхностях легко обнаружить опытами.

Первая попытка теоретически рассчитать подъемную силу была сделана самим Ньютоном. Он предложил следующий способ определения подъемной силы: на пластинку площадью  $S$ , наклоненную под углом  $\alpha$  к потоку, за секунду падает масса частиц, равная

$$\rho S v_0 \sin \alpha,$$

где, как обычно,  $\rho$  — плотность воздуха, а  $v_0$  — скорость. Эти частицы изменяют свою скорость и получают компоненту скорости  $v_0 \sin \alpha$ , направленную вниз. Следовательно, воздух получает ежесекундно количество движения вниз

$$\rho S v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

которому и должна равняться подъемная сила. Так как подсчет, очевидно, очень груб, то следует поставить еще какой-то коэффициент  $k$ , отличный от единицы, и считать подъемную силу равной

$$F_u = k \rho S v_0^2 \sin^2 \alpha, \quad (116.1)$$

где  $k$  определяется из опыта.

Но первые опыты по измерению подъемной силы крыла (пластины) при малых углах  $\alpha$  показали, что формула (116.1) неверна: подъемная сила в самом деле пропорциональна  $v_0$ , но она в действительности пропорциональна  $\sin \alpha$  (или  $\alpha$  для малых углов), но не  $\sin^2 \alpha$ . Следовательно, вывод Ньютона неправилен.

Картина Ньютона соответствовала бы действительности, если бы частицы воздуха (или жидкости) не взаимодействовали друг с другом. На пути крыла встречаются частицы, которые только при соприкосновении с ним вынуждены двигаться вдоль него. Частица до удара о пластинку или крыло находится в покое, она «не знает» о движении крыла к ней. В самом деле это не так вследствие взаимодействия между частицами; благодаря давлению в газе движение частиц около крыла передается, вообще говоря, всюду, частицы, находящиеся впереди крыла, уже движутся вследствие приближения к нему крыла (см. рис. 321), частицы всей жид-

кости (или газа) совершают определенное движение. Поэтому расчет подъемной силы совсем не так прост, как полагал Ньютона. Следует иметь в виду, что самое интенсивное движение совершают те частицы, около которых проходит крыло, и здесь также происходят наибольшие изменения давления. Движение частиц, находящихся далеко от крыла, совсем ничтожно, но таких частиц много и их количеством движения пренебречь нельзя.

Однако при очень больших скоростях полета, значительно больших скорости звука в среде (см. § 121), при так называемых *гиперзвуковых* скоростях, картина обтекания резко изменится: только частицы, лежащие вблизи крыла, взаимодействуют с крылом, только находящиеся в некотором узком слое частицы «знают» о полете крыла. Поэтому при таких скоростях полета, несмотря на очень сложные явления, происходящие при обтекании, формула Ньютона (116.1) оказывается практически вполне пригодной для расчета подъемной силы и подтверждается результатами опытов.

## § 117. Обтекание крыла жидкостью. Циркуляция и подъемная сила

Для того чтобы разобраться в механизме обтекания крыла вязкой жидкостью, посмотрим, что дает теория обтекания бесконечной пластиинки (или крыла) идеальной жидкостью.

Мы считаем крыло (пластиинку) бесконечным в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа; при таком обтекании все трубы тока лежат в плоскостях, параллельных друг другу, в частности параллельно чертежу, причем форма линий тока в любой из этих плоскостей одинакова. Такое течение называется *плоским течением*; с некоторой степенью точности оно имеет место при обтекании пластиинки, упирающейся в стенки канала, по которому течет жидкость или газ.

В этих расчетах пренебрегается вязкостью, но учитывается движение частиц жидкости (или газа) во всем пространстве, окружающем крыло.

Тут могут быть два различных случая: обтекание непрерывное и обтекание разрывное. При непрерывном обтекании давление и скорость во всех точках потока непрерывны, а при разрывном обтекании давление в жидкости изменяется также непрерывно, но изменения скорости от места к месту могут быть и не непрерывными.

Прежде всего, при непрерывном обтекании тела идеальной жидкостью, как уже было сказано в § 112, сила равна нулю. Трубы тока при обтекании пластиинки будут иметь примерно такой вид, как показано на рис. 320. На передней и задней поверхностях имеются критические точки  $b$  и  $b_1$ , в которых скорости потока равны нулю. Можно отметить определенную симметрию

картины обтекания относительно середины пластиинки; на любой линии, проходящей через  $O$  и лежащей в плоскости чертежа, на равных расстояниях от центра скорости потока одинаковы. Например, скорости потока в точках  $c$  и  $d$  одинаковы, поэтому и давление в этих точках одинаково. Следовательно, результирующая сила давления, действующая на пластиинку, будет равна нулю. В этом случае будет действовать только момент сил  $M$ , стремящийся повернуть пластиинку по часовой стрелке. Такова же примерно будет картина обтекания тонкого крыла.

Обтекание реальной жидкостью крыла совсем не похоже на то, что дает теория при непрерывном обтекании. В действительности картина имеет примерно такой вид, как показано на рис. 319.

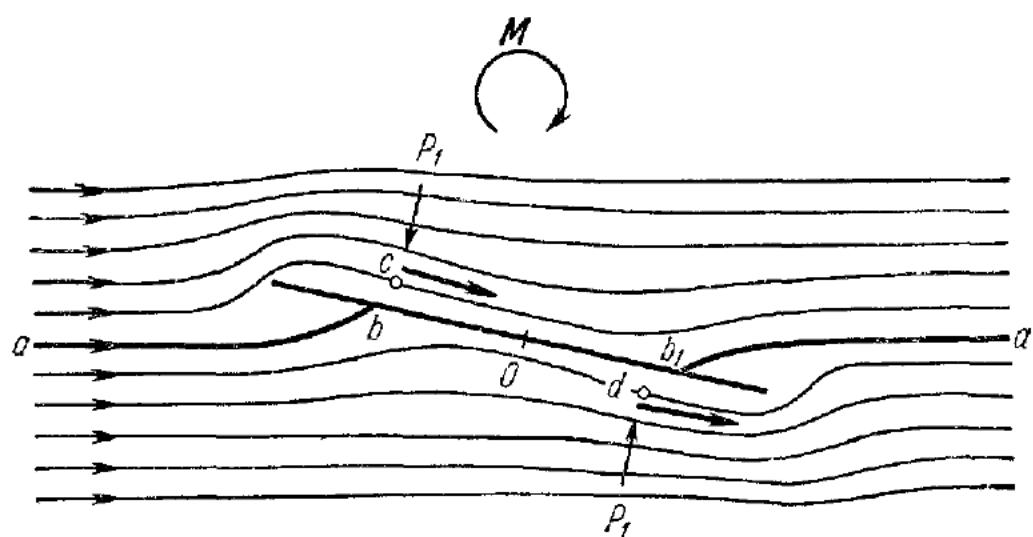


Рис. 320.

Поток у задней кромки не заворачивает вокруг нее, а сверху и снизу направлен вдоль крыла, омывает крыло с обеих сторон и смыкается за задней кромкой так, что скорости направлены вдоль крыла. У передней кромки картина примерно такая же, как и в идеальной жидкости: имеется критическая точка, и поток огибает переднюю кромку, обычно закругленную, а не острую, как задняя, и, прилегая к верхней поверхности крыла, достигает задней кромки.

В обычных условиях при начале движения крыла можно заметить образование вихря у задней кромки крыла (рис. 321). Это объясняется тем, что вначале при небольшой скорости поток обтекает крыло примерно так, как и идеальная жидкость; частицы жидкости под действием давления стремятся обогнать снизу заднюю кромку, но вследствие вязкости теряют свою кинетическую энергию и останавливаются; встречный поток, который должен был бы остановиться, тормозится давлением частиц потока, идущих назад, и поэтому он не останавливается, а продолжает движение вдоль поверхности, образуя вихрь. Вихрь срывается с задней кромки и уносится потоком. После этого течение принимает ста-

ционарную форму, которая была показана на рис. 319. При отрыве вихря от крыла он, уходя от крыла, унесет какой-то момент количества движения.

Жидкость, ушедшая с вихрем, имеет определенный момент количества движения; следовательно, оставшаяся жидкость должна

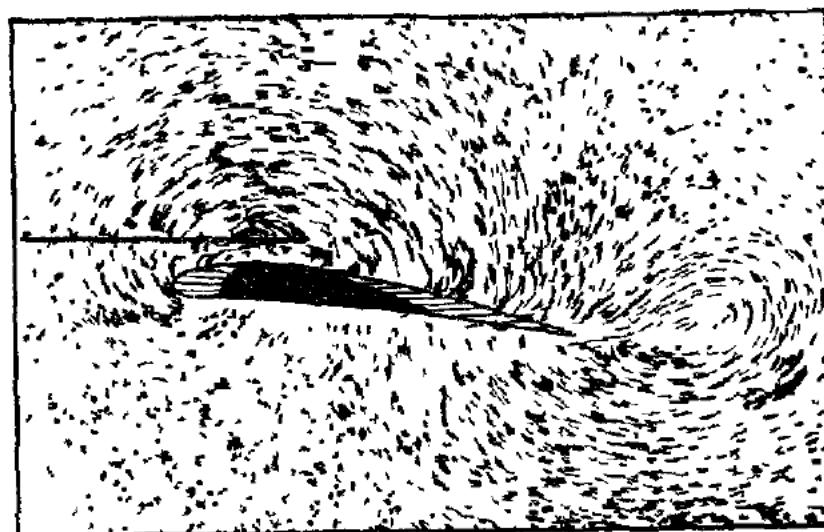


Рис. 321.

получить противоположный момент количества движения, ибо до начала движения ее момент количества движения был равен нулю. Жидкость поэтому будет вращаться вокруг крыла в направлении, противоположном вращению в вихре, и таким путем возникнет *циркуляционное движение* вокруг крыла. Уравнения гидродинамики полностью объясняют существование такого циркуляционного движения.

Итак, обтекание крыла (или пластиинки, наклоненной под углом) реальной жидкостью может быть представлено как плавное течение идеальной жидкости, показанное на рис. 320, на которое наложено еще циркуляционное течение вокруг пластиинки, показанное на рис. 322, а.

Циркуляционное движение — это движение частиц жидкости по замкнутым линиям, причем каждая частица во время движения деформируется, но не вращается; она совершает как бы поступательное движение по замкнутой траектории. Как показывает теория, такое движение обладает следующим важным свойством:

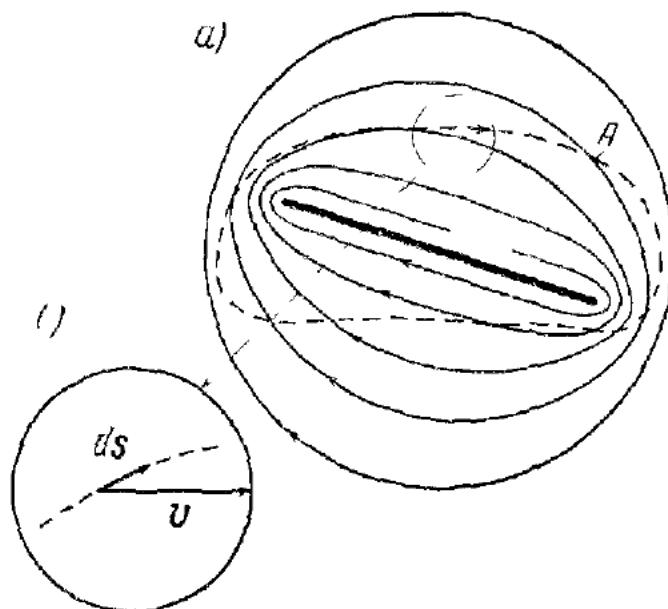


Рис. 322.

циркуляция скорости по любому замкнутому геометрическому контуру, охватывающему тело, — величина постоянная. Циркуляцией скорости называют скалярную величину

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} ds, \quad (117.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость, а  $ds$  — элемент контура. Это означает, что нужно взять любой элемент контура  $ds$  (рис. 322, б), умножить его скалярно на скорость  $\mathbf{v}$  и затем сложить результаты (пронтегрировать) для всех элементов  $ds$ , составляющих данный замкнутый контур. Величина  $\Gamma$  не зависит от формы контура  $A$ , по которому мы ее вычисляли. Для различных контуров, охватывающих крыло, она будет одна и та же, хотя скорости во всех точках этих контуров будут совершенно различны. Поэтому величина циркуляции  $\Gamma$  однозначно определяет характер циркуляционного потока

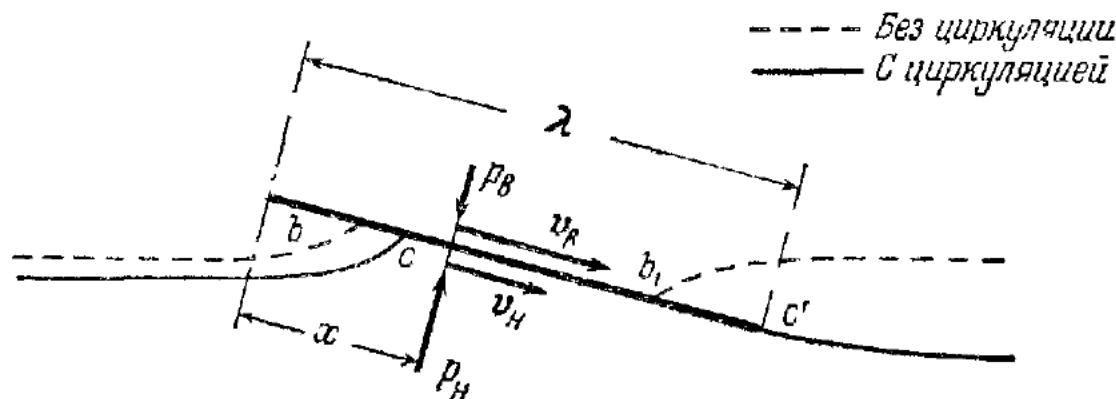


Рис. 323.

вокруг данного тела. Замечим, что циркуляция по замкнутому контуру, не охватывающему крыло, равна нулю.

Н. Е. Жуковский показал, что действительное течение около крыла можно представить себе как течение идеальной жидкости, которое сложено из двух одновременно существующих течений: а) плавного, непрерывного обтекания идеальной жидкостью (линии тока которого показаны на рис. 320) и б) циркуляционного движения вокруг крыла (линии тока которого показаны на рис. 322, а). При этом величина циркуляции такова, что *вторая критическая точка*  $b_1$  (см. рис. 320) находится на задней кромке (рис. 323), точка  $b_1$  перейдет в точку  $c'$ , а  $b$  — в  $c$ . При этом условии будет *плавное обтекание задней кромки*, почти такое же, как мы наблюдаем на опыте. Такой выбор величины циркуляции  $\Gamma$  фактически позволяет учесть существенное влияние вязкости, приводящее к образованию циркуляции и к плавному обтеканию задней кромки.

Теоретически из этого условия, названного *условием Жуковского*, можно определить величину циркуляции  $\Gamma_0$ ; она будет равна<sup>1)</sup>

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \pi \lambda \alpha, \quad (117.2)$$

<sup>1)</sup> Вывода этой формулы ввиду его сложности мы не даем.

где  $\lambda$  — хорда крыла, или расстояние по потоку от передней до задней кромки крыла (рис. 323),  $\alpha$  — угол атаки. Если циркуляция вокруг крыла нам известна, то можно найти величину подъемной силы, действующей на крыло.

Допустим, что крыло имеет угол атаки  $\alpha$  и поток обтекает крыло с определенной циркуляцией  $\Gamma_0$ , скорость потока на достаточном удалении от крыла равна  $v_0$ , а давление  $p_0$ . Пусть скорость на верхней стороне пластиинки (крыла) равна  $v_u(x)$ , давление —  $p_u(x)$ , где  $x$  — расстояние от передней кромки; аналогичные обозначения введем для нижней поверхности:  $v_n(x)$  и  $p_n(x)$  (см. рис. 323). Тогда сила, действующая со стороны потока на элемент шириной  $dx$  и длиной  $l$ , равна

$$(p_n - p_u) l dx,$$

а силу действия потока на всю пластиинку длиной  $l$  можно записать в виде

$$P_u = \int_0^\lambda (p_n - p_u) l dx. \quad (117.3)$$

По уравнению Бернулли

$$p_n = p_0 + \frac{\rho v_n^2}{2} - \frac{\rho v_u^2}{2}, \quad p_u = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_u^2}{2}.$$

Отсюда

$$p_n - p_u = \frac{1}{2} \rho (v_n^2 - v_u^2) = \frac{1}{2} \rho (v_u + v_n) (v_u - v_n). \quad (117.4)$$

При малых углах  $\alpha$  скорости будут мало отличаться от  $v_0$ ; поэтому можно считать<sup>1)</sup>

$$v_u + v_n \approx 2v_0. \quad (117.5)$$

Учитывая (117.5) и подставляя (117.4) в (117.3), получаем

$$P_u = \int_0^\lambda \frac{\rho}{2} 2v_0 (v_u - v_n) l dx = \rho v_0 l \int_0^\lambda (v_u - v_n) dx. \quad (117.6)$$

Интеграл

$$\int_0^\lambda (v_u - v_n) dx = \Gamma_0$$

по определению представляет собой величину циркуляции вокруг крыла. Следовательно, формула (117.6) может быть записана так:

$$P_u = \rho l \Gamma_0 v_0. \quad (117.7)$$

<sup>1)</sup> Можно строго показать из условия симметрии обтекания (как бесциркуляционного, так и циркуляционного), что это равенство выполняется точно.

Это и есть известная *формула Жуковского — Кутта*, определяющая подъемную силу крыла в зависимости от циркуляции. Так как по (117.2) циркуляция  $\Gamma_0$  растет пропорционально углу атаки  $\alpha$  и скорости, то, следовательно, подъемная сила крыла растет пропорционально квадрату скорости, плотности воздуха и углу атаки. Все эти выводы теории крыла при небольших углах атаки хорошо согласуются с опытом.

Легко представить себе, почему возникновение подъемной силы связано с циркуляцией по часовой стрелке. Наличие циркуляции приводит к тому, что

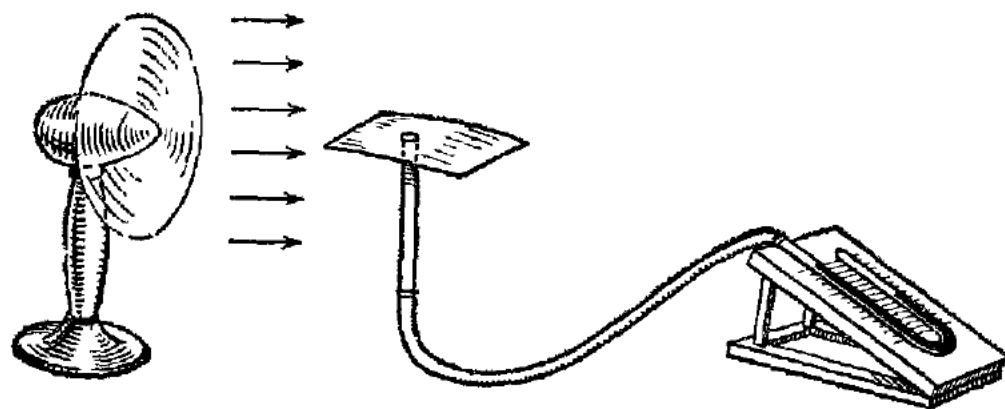


Рис. 324.

скорость  $v$  будет больше  $v_0$  на верхней стороне крыла, особенно ближе к передней кромке. Скорость циркуляции сверху крыла складывается со скоростью бесциркуляционного течения, показанного на рис. 320, а снизу вычитается, поэтому

скорость  $v_b$  больше скорости  $v_n$ . Поэтому и давление  $p_b$  будет меньше давления  $p_n$ ; на верхней части будет разрежение, а на нижней — сгущение. Давление на поверхности крыла или пластиинки можно измерить, если соединить небольшие отверстия на поверхности крыла с манометрами. Такие опыты, качественно показывающие изменения давления, легко сделать каждому на простой модели в потоке вентилятора (рис. 324).

Кривая изменения давления по сечению обычного крыла имеет примерно такой вид, как это показано на рис. 325; сила, действующая на крыло, пропорциональна заштрихованной площади. Если в крыле будет сквозное отверстие, то начнется перетекание воздуха снизу вверх и подъемная сила около отверстия резко уменьшится.

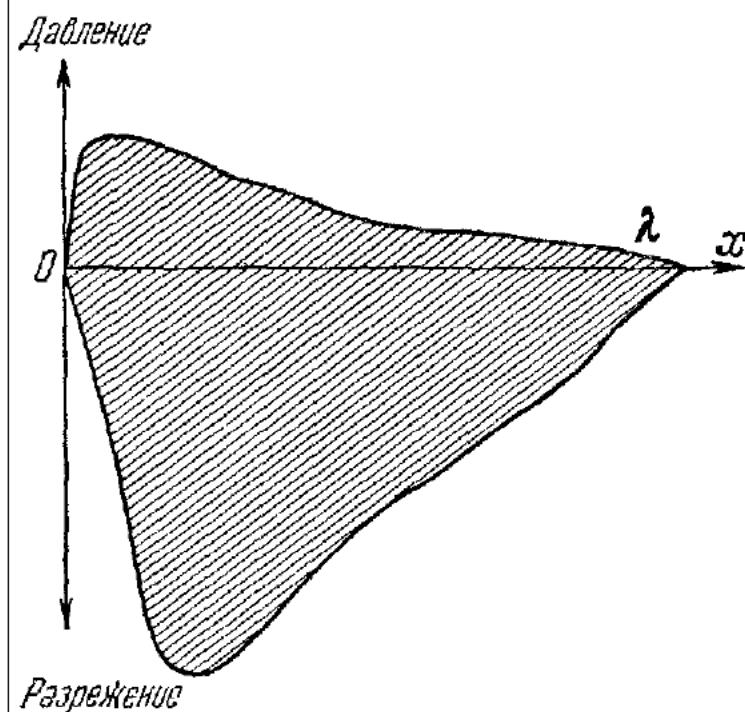


Рис. 325.

Известно, что если поместить врачающийся цилиндр в поток воздуха, то на него будет действовать поперечная к потоку сила, происхождение которой совершенно аналогично происхождению подъемной силы крыла. Действительно, там, где окружная скорость

цилиндра совпадает со скоростью потока (рис. 326), скорость потока из-за сил вязкости будет больше, чем на противоположной стороне цилиндра, и поэтому давление с одной стороны будет больше, чем с другой. Было показано, что боковая сила вообще растет как с увеличением скорости потока, так и с увеличением скорости вращения цилиндра.

Наличие поперечной силы легко продемонстрировать, скатывая цилиндр из твердой бумаги со стола (рис. 327). Цилиндр, падая,

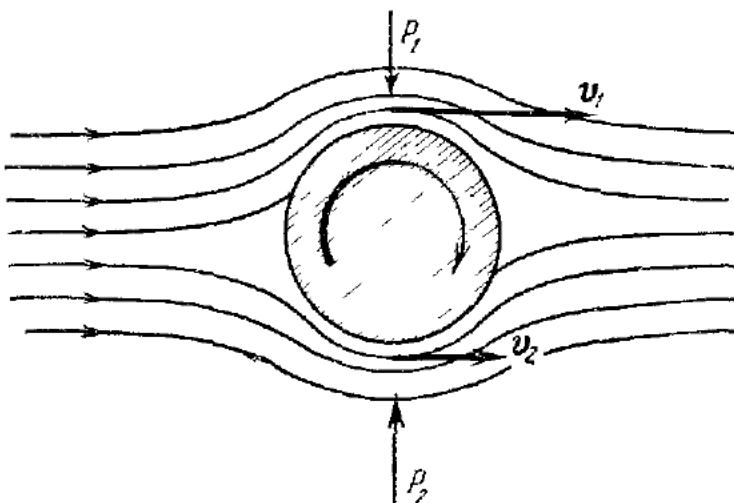


Рис. 326.

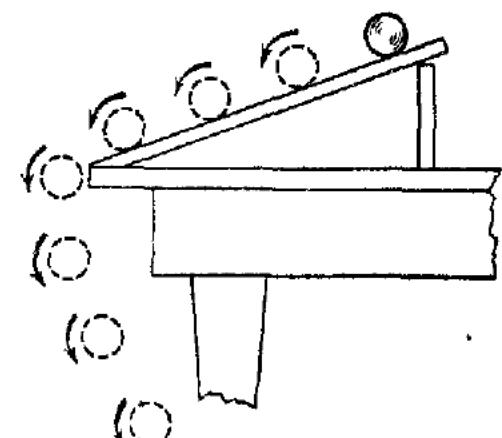


Рис. 327.

всегда заворачивает под стол. Легко сообразить, что вращение цилиндра, возникающее при его качении по столу и продолжающееся при падении, должно вызвать силу, направленную под стол. Явление возникновения поперечной силы при вращении цилиндра называется *эффектом Магнуса*.

Попытки заменить паруса или крылья самолета вращающимися цилиндрами не дали желаемых результатов, хотя и был построен корабль, на котором паруса были заменены вращающимися цилиндрами (*роторы Флеттнера*).

## § 118. Зависимость подъемной силы крыла от угла атаки. Лобовое сопротивление крыла

До сих пор мы рассматривали бесконечное крыло, точнее — силы, которые действуют на небольшой участок средней части очень длинного крыла, или силы, которые действуют на крыло, упирающееся концами в неподвижные стенки. Поэтому мы считали, что линии тока всегда лежат в плоскости, перпендикулярной к крылу, и одинаковы для любого сечения крыла.

Если же мы возьмем крыло или пластинку некоторой определенной длины  $l$ , то линии тока уже не будут лежать в плоскости, перпендикулярной к крылу, причем направление их на верхней и нижней поверхностях крыла будет различно. Представим себе вид такого крыла сверху (рис. 328). Посередине крыла струйки будут идти вдоль потока как вверху, так и внизу крыла. Но при приближении к краю крыла струйки под крылом будут изгибаться к концу крыла, а над крылом — к середине. Действительно, над крылом возникает разрежение, а под ним — давление, поэтому давление вытесняет воздух из-под крыла в сторону, воздух стремится в разреженную область и поэтому поджимает к центру

крыла струйки, идущие по верхней поверхности. Таким образом, струйки, идущие по верхней и нижней поверхностям крыла, сливаясь сзади задней кромки, получают вращательное движение вдоль потока, и за крылом образуются своеобразные вихревые шнуры, особенно сильные на самом конце крыла. Так как у концов крыла поток будет идти уже под некоторым наклоном к передней кромке, то это приведет к уменьшению угла атаки, или к уменьшению подъемной силы

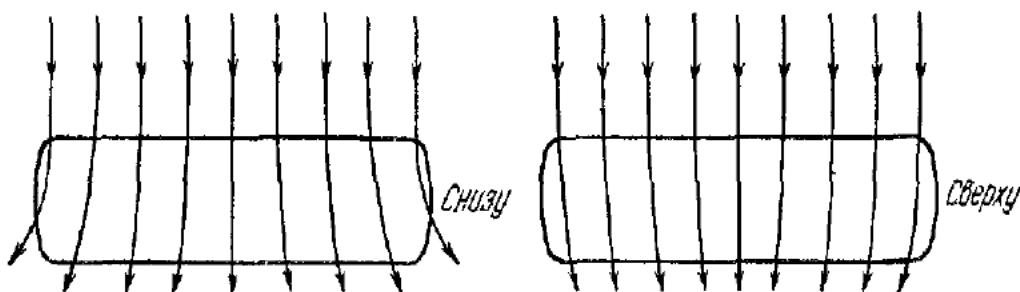


Рис. 328.

на концах крыла, что и так очевидно, ибо вследствие вытекания воздуха из-под крыла на верхнюю поверхность через его концы давление под крылом понизится, а сверху повысится.

Поэтому подъемные силы короткого и длинного крыльев не будут пропорциональны их площади — подъемная сила на единицу площади больше у длинного крыла.

При испытаниях и расчетах крыльев самолета подъемная сила крыла выражается следующей формулой.

$$P_{\pi} = C_y S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (118.1)$$

где  $S$  — площадь крыла,  $C_y$  — безразмерный коэффициент, зависящий от числа Рейнольдса, от удлинения крыла, т. е. от отношения длины крыла к его хорде, и от величины угла атаки. С увеличением удлинения величина  $C_y$  возрастает.

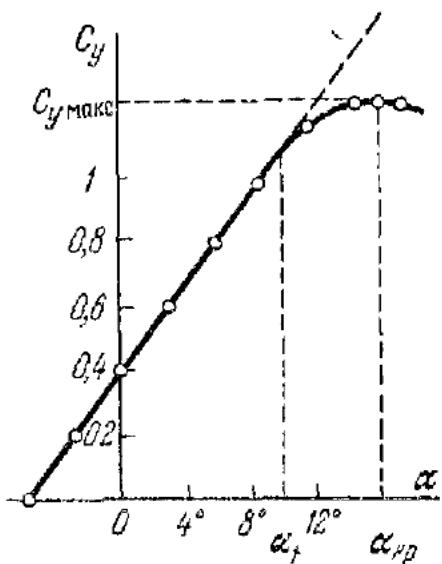


Рис. 329.

При малых углах атаки подъемная сила растет линейно с увеличением угла  $\alpha$ . Следовательно, величина  $C_y$  также растет пропорционально  $\alpha$  (рис. 329). Но такой рост продолжается только до некоторого значения угла атаки  $\alpha_1$ , далее коэффициент  $C_y$  (или подъемная сила) начинает расти медленнее, наконец, достигает максимума при некотором значении  $\alpha_{kp}$  и при дальнейшем возрастании  $\alpha$  начинает падать. Значение  $\alpha_{kp}$  называется *критическим углом атаки*, величина его (порядка 10—15°) зависит главным образом от формы профиля крыла и от числа Рейнольдса. Величина  $C_y$  при  $\alpha_{kp}$  называется максимальным  $C_y$ , или  $C_{y\max}$ , и имеет очень важное значение, так как минимальная скорость полета, при которой самолет еще может держаться в воздухе, определяется величиной  $C_{y\max}$ .

С целью повышения безопасности посадки стараются уменьшить эту минимальную скорость («посадочную скорость») увеличением  $C_{y\max}$ .

Падение подъемной силы с увеличением  $\alpha$  выше  $\alpha_{kp}$  объясняется возникновением срыва потока на верхней поверхности крыла и увеличением области срыва с увеличением  $\alpha$ . При углах атаки, больших критических, поток уже не прилегает к верхней части крыла, а «срывается» примерно так, как показано на

рис. 330. В зоне срыва давление почти равно атмосферному, там уже нет разрежения, и очевидно, что в результате подъемная сила резко упадет.

Существует ряд способов предотвращения срыва с верхней поверхности крыла и увеличения вследствие этого  $C_{y\max}$ , например, при помощи предкрылоков (рис. 331, а) или разрезного крыла (рис. 331, б). Поток проходит через щель

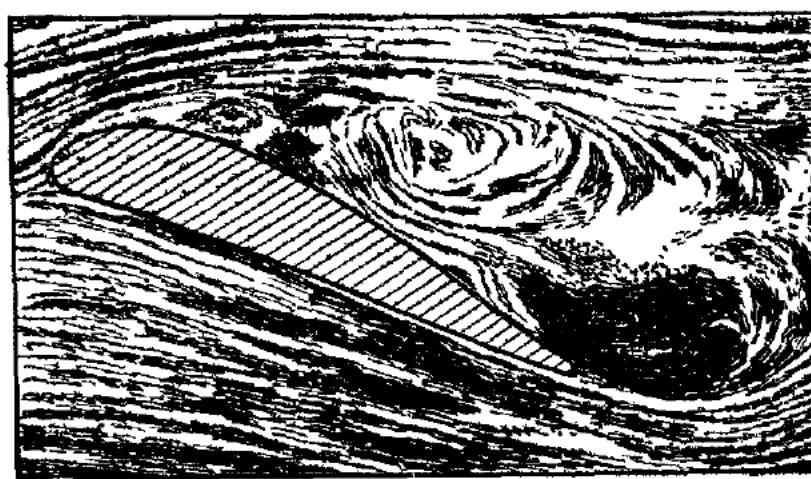


Рис. 330.

между предкрылком  $A$  и крылом, поэтому поток прижимается к верхней поверхности крыла, и благодаря этому  $C_{y\max}$  увеличивается и повышается  $\alpha_{k0}$ . То же происходит и при разрезном крыле. Интересно отметить, что птицы при посадке часто растопыривают перья на крыльях так, что образуется нечто подобное разрезному крылу.

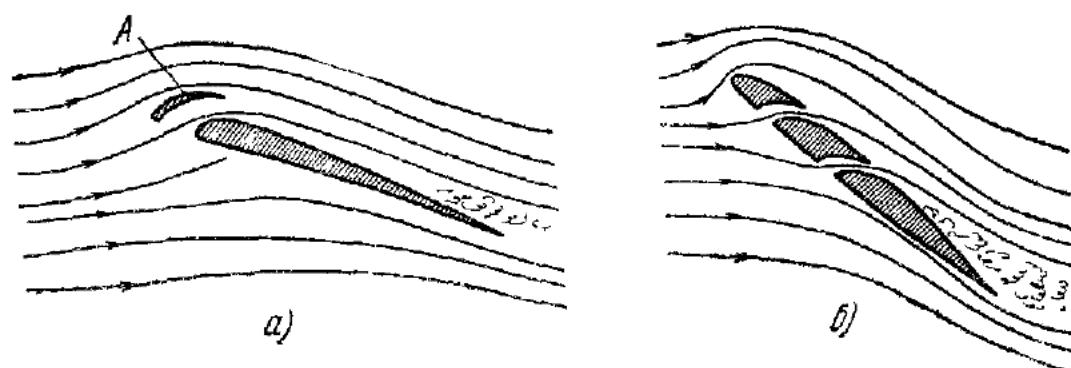


Рис. 331.

Сила реакции потока жидкости на крыло всегда наклонена назад: всегда существует, кроме подъемной силы  $P_p$ , и лобовое сопротивление  $R$ . Величину силы лобового сопротивления также обозначают

$$R = C_x S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (118.2)$$

где  $C_x$  — безразмерный коэффициент и  $S$  — площадь крыла. Для хороших крыльев величина  $C_x$  значительно меньше величины  $C_y$ . Лобовое сопротивление также изменяется в зависимости от угла атаки крыла. Для определения летных качеств крыла чрезвычайно важно знать, как меняются одновременно обе величины  $C_x$  и  $C_y$  в зависимости от угла атаки. На рис. 332 изображены эти зависимости, причем для  $C_y$  и  $C_x$  выбраны разные масштабы.

Лобовое сопротивление возрастает с увеличением угла атаки. Важно знать и тот угол атаки, при котором мы имеем наибольшее отношение подъемной силы к силе лобового сопротивления. Отношение подъемной силы к силе лобового сопротивления определяет «качество крыла», т. е. отношение полезной подъемной силы к вредной силе лобового сопротивления.

Крыло с большим качеством предпочтительнее при прочих одинаковых условиях, так как очевидно, что наиболее выгодны режимы полета на углах атаки, при которых качество наибольшее.

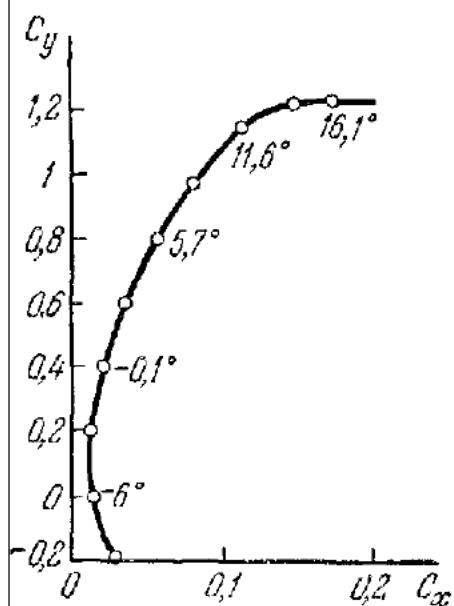


Рис. 332.

происходит при помощи *рулей высоты*, которые расположены обычно на хвостовом горизонтальном оперении. Хвостовое горизонтальное оперение, или *стабилизатор*, необходимо для обеспечения устойчивости в вертикальной плоскости. При случайном отклонении самолета от состояния равновесия угол атаки горизонтального оперения изменяется так, что действующая на него сила выравнивает самолет, возвращает его в прежнее состояние.

Рули высоты помещаются сзади горизонтального оперения и представляют собой отклоняющиеся части его (в и в на рис. 334). При отклонении руля высоты вниз возрастает сила, действующая на горизонтальное оперение и направленная вверх, поэтому нос самолета опускается вниз. При отклонении вверх руля высоты нос самолета поднимается вверх.

Поперечное управление, наклон крыльев самолета относительно горизонтали или поворот относительно горизонтальной продольной оси самолета осуществляется *элеронами* (а и а на рис. 334). Элероны действуют по тому же принципу, как и рули высоты. Элерон обычно представляет собой заднюю часть конца крыла, отклоняющуюся на одном крыле вверх, а на другом вниз и наоборот по желанию летчика.

Поворот самолета вокруг вертикальной оси осуществляется *рулем поворота* (или направления), который расположен обычно на вертикальном хвостовом оперении (руль поворота обозначен буквой Н на рис. 334).

Силу лобового сопротивления  $R$  самолета преодолевает сила тяги  $F$ . Тяга  $F$  создается или вращающимся винтом, или реактивным двигателем. Сила тяги реактивного двигателя, как уже было сказано в § 27, определяется ежесекундным «расходом» воздуха и скоростью, с которой этот воздух выбрасывается дви-

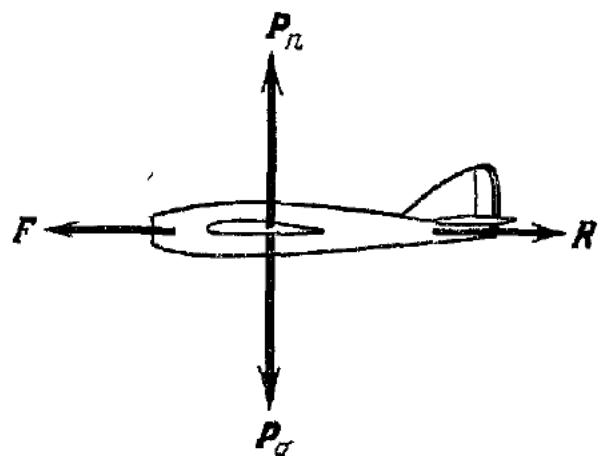


Рис. 333.

гателем. По тому же принципу действует и винт: вращающийся винт захватывает окружающий воздух и отбрасывает его назад. Сила тяги винта также зависит от количества отброшенного воздуха и от скорости, с которой

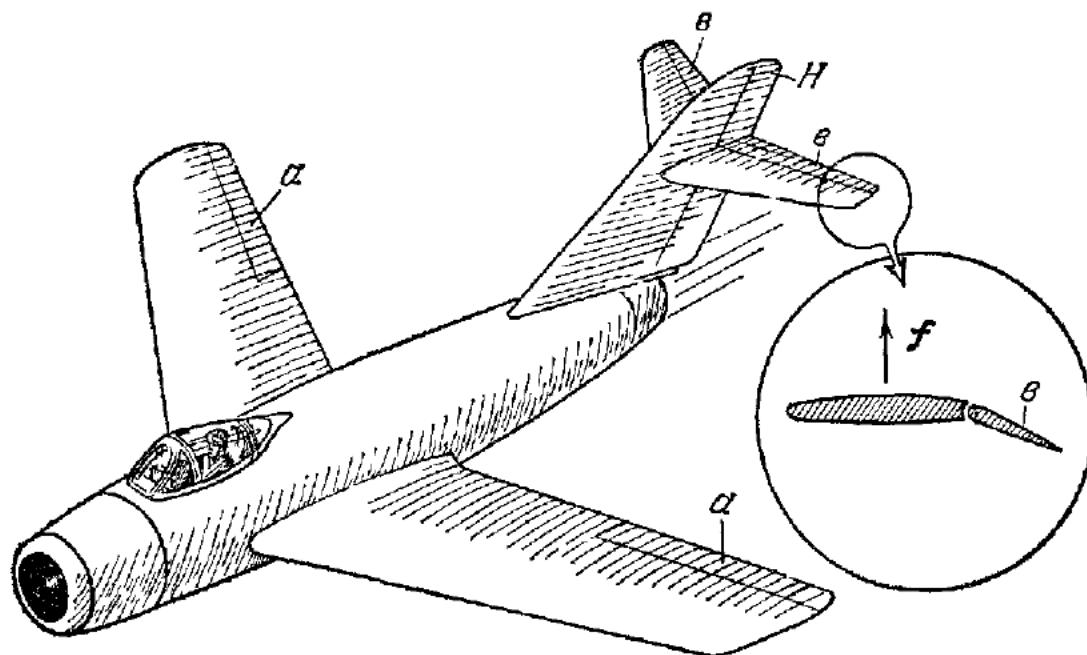


Рис. 334.

он отброшен. Лопасти винта обычно представляют собой крыло с переменным по длине углом атаки. Подъемная сила, действующая на лопасть винта, и есть сила тяги лопасти.

### § 120. Распространение возмущений давления в сжимаемой жидкости (газе) и движение тела со сверхзвуковой скоростью

При малых скоростях движения воздух можно считать несжимаемым. Как мы видели (см. § 105), допускаемая при этом ошибка еще не так велика при скорости, меньшей 100 м/с. Скорость звука в воздухе при обычных условиях ( $t = 15^{\circ}\text{C}$ ,  $p = 760$  мм рт. ст.) равна 340 м/с. Когда скорость движения тела в воздухе возрастает, то необходимо считаться с его *сжимаемостью*.

Распространение какого-либо импульса давления в воздухе (если этот импульс не так велик) происходит со скоростью звука в воздухе. Если в каком-либо месте воздушной среды увеличим давление, сожмем воздух, а затем предоставим его самому себе, то воздух начнет разжиматься и приведет в движение соседние частицы воздуха, которые в свою очередь приведут в движение находящиеся за ними частицы, и т. д. В среде будет распространяться *возмущение*, или *волна*, со скоростью  $\approx 340$  м/с.

Если скатая вначале частица газа (объем) очень мала или имеет шаровую форму, то от такой частицы будет распространяться *сферическая звуковая волна*: колебания частиц, лежащих на сфере, будут одинаковы, или, как говорят, *фронт волны* представляет собой сферу. Вследствие сферической симметрии смещение частиц

при колебаниях происходит вдоль радиуса, и характер колебаний какой-то точки со временем имеет примерно такой вид, как показано на графике рис. 335. Величина (или интенсивность) этих колебаний падает с увеличением расстояния от центра волны.

Опыт показывает, что при малых колебаниях плотности скорость распространения звуковой волны не зависит от формы колебаний и является постоянной величиной, зависящей от физических свойств среды.

*Смещение*

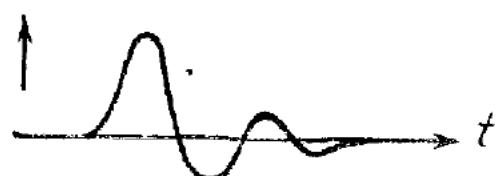


Рис. 335

Поэтому для определения величины скорости звука рассмотрим самый простой пример распространения импульса давлений в цилиндрической трубе, заполненной воздухом или другим газом. Допустим, что цилиндрическая труба с газом под давлением  $p_0$  имеет с одной стороны поршень  $A$  (рис. 336, а). В некоторый момент  $t = 0$  поршень мгновенно начинает двигаться с постоянной небольшой скоростью  $v$ . Что произойдет с газом в трубе? По трубе пойдет «волна скорости» и «волна давлений» перед поршнем<sup>1)</sup>. Через время  $\Delta t$  перед поршнем будет двигаться со скоростью  $v$  некоторый слой газа

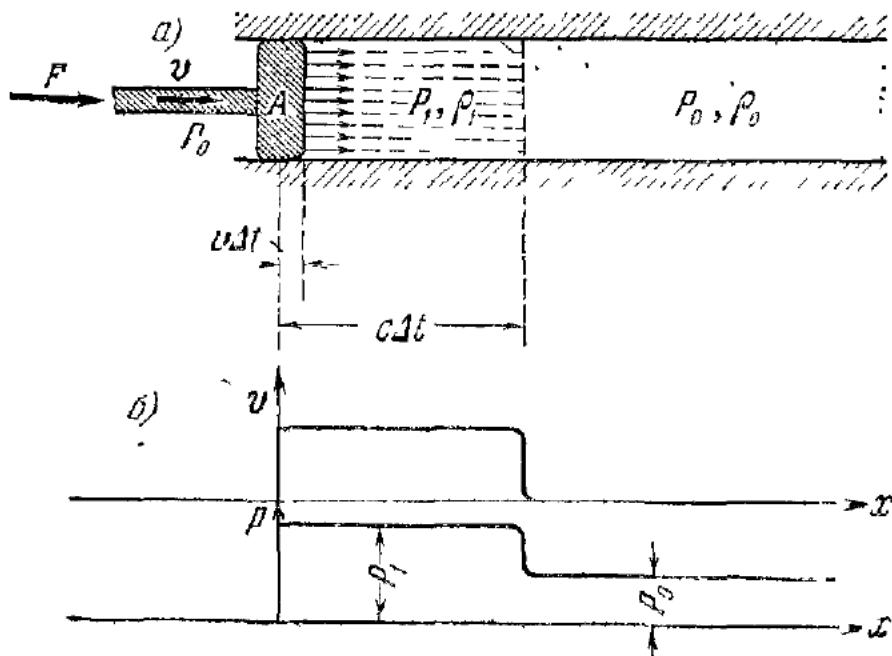


Рис. 336.

длиной  $c\Delta t$ , давление в нем будет равно уже не  $p_0$ , а  $p_1 = p_0 + \Delta p$ . График скоростей частиц в момент  $\Delta t$  изображен на рис. 336, б; таков же по виду и график давлений; частицы сжались и движутся со скоростью поршня, но количество движущихся частиц растет со временем, так как волна давлений распространяется вперед.

<sup>1)</sup> Волна пойдет и с другой стороны поршня, но мы ее не рассматриваем.

Применим закон изменения количества движения к распространению волны. Импульсы силы  $F$ , с которой поршень давит на газ, можно записать так:

$$F \Delta t = \Delta p S \Delta t;$$

этот импульс равен количеству движению, полученному газом:

$$(\rho_0 + \Delta\rho) c S v \Delta t,$$

где  $\rho_0 + \Delta\rho = \rho_1$  — плотность в волне, в сжатом слое частиц. Из указанного равенства следует:

$$\Delta p = (\rho_0 + \Delta\rho) cv. \quad (120.1)$$

Условие постоянства массы воздуха в объеме газа, где распространилась волна, можно записать так:

$$\rho_0 c S \Delta t = (\rho_0 + \Delta\rho) (c - v) S \Delta t,$$

или

$$\Delta\rho + \rho_0 = \rho_0 \frac{c}{c - v}. \quad (120.2)$$

Отсюда получаем

$$\rho_0 + \Delta\rho = \Delta\rho \frac{c}{v}. \quad (120.3)$$

Подставляя (120.3) в (120.1), получаем общее выражение для скорости распространения волны давлений в трубе:

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}. \quad (120.4)$$

Если  $\Delta p \ll \rho_0$  и  $\Delta\rho \ll \rho_0$ , то скорость распространения волны запишется так:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (120.5)$$

Эта формула определяет скорость распространения звука, так как в звуковой волне имеют место очень малые изменения давления и плотности  $dp$  и  $d\rho$ .

Изменения давления и плотности в звуковой волне связаны законом адиабаты<sup>1)</sup> (§ 105)

$$p = \frac{\rho_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma,$$

<sup>1)</sup> Адиабатический закон, связывающий давление и плотность ( $p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ ), относится к таким процессам, при которых не происходит обмена тепла с окружающими телами. Возрастание давления в нашем случае для частицы газа происходит очень быстро, поэтому, как указал Лаплас, его можно считать адиабатическим.

где  $\rho_0$  и  $\rho_0$  — значения давления и плотности в отсутствие волны; отсюда

$$dp = \frac{\rho_0}{\rho_0} \kappa d\rho. \quad (120.6)$$

Подставляя (120.6) в (120.5), получаем, что скорость звука в газе

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}. \quad (120.7)$$

Скорость распространения волны в газе или жидкости пропорциональна корню квадратному из  $\frac{\Delta p}{\Delta \rho}$ , где  $\Delta \rho$  — изменение

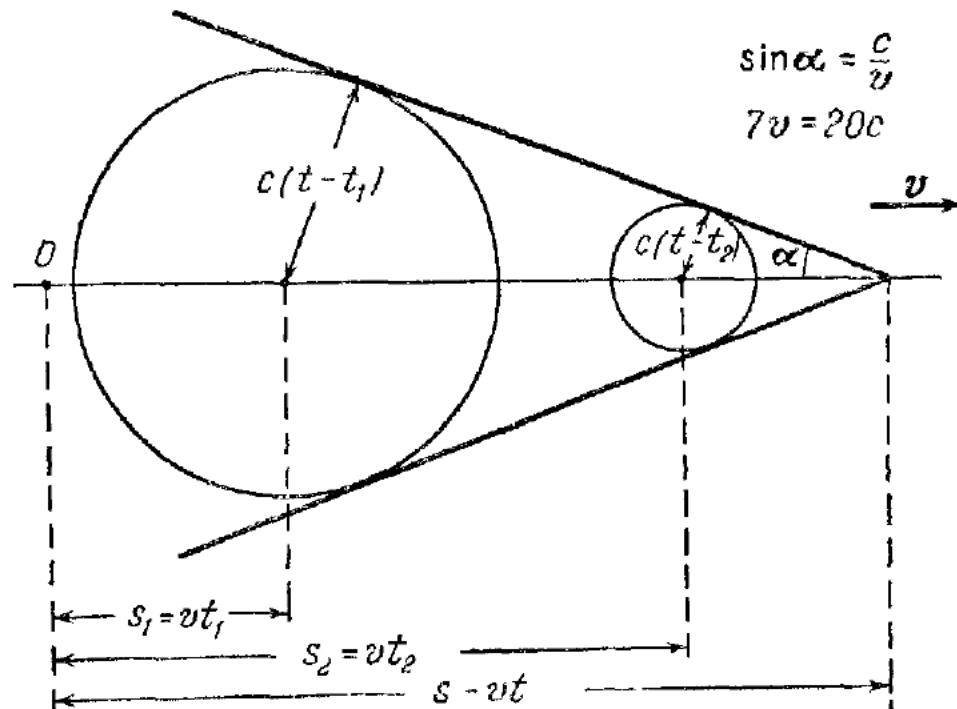


Рис. 337

плотности какой-то частицы газа, вызванное изменением давления  $\Delta p$ . Если заданное  $\Delta p$  вызовет только небольшое изменение плотности, газ или жидкость очень мало сожмется, то скорость звука будет велика. Несжимаемая жидкость соответствует  $\Delta p \rightarrow 0$  при конечном  $\Delta p$ , или скорость звука в несжимаемой жидкости должна стремиться к бесконечности.

Допустим, что маленькое твердое тело, которое можно считать точкой, движется прямолинейно со сверхзвуковой скоростью  $v$  в среде (газе). Во время движения тело сталкивается с покоящимися частицами среды. В результате этих ударов возникают импульсы, распространяющиеся во все стороны в окружающем пространстве с постоянной скоростью звука  $c$ . Очевидно, что фронт волны представляет собой сферу, так как частицы среды не движутся.

Этот процесс непрерывен: в момент времени  $t_1$  тело находится в точке с координатой  $s_1$  (рис. 337) и за промежуток времени  $dt$

претерпевает соударение с частицей газа длиной  $v dt$ ; от этой частицы за время  $t - t_1$  распространяется сферическая звуковая волна с радиусом  $c(t - t_1)$ ; то же происходит и во все последующие промежутки времени. Так, например, из точки с координатой  $s_2 = vt_2$  в момент времени  $t_2 > t_1$  начинает распространяться такая же сферическая волна, которая в момент  $t > t_2$  будет иметь радиус  $c(t - t_2)$ , и т. д. Можно представить себе огибающую поверхность совокупности всех сферических волн — она, очевидно, будет иметь форму конуса, вершина которого находится в данный момент  $t$  в точке с координатой  $s = vt$ , в которой находится движущееся тело. Конус имеет угол раствора при вершине, равный  $2\alpha$ ; величина  $\alpha$  определяется из уравнения

$$\sin \alpha = \frac{c(t - t_2)}{v(t - t_2)} = \frac{c}{v}. \quad (120.8)$$

Все участки волн, прилегающие к поверхности конуса, имеют одну и ту же форму; налагаясь, они здесь будут усиливать друг друга.

Важно, что только часть пространства, находящегося внутри конуса, который называют *конусом Маха*, «возмущена» движущейся частицей. Все остальные частицы среды в момент времени  $t$  находятся в покое. Следовательно, картину движения тела (точки) со сверхзвуковой скоростью можно представить себе как непрерывный процесс распространения последовательности звуковых волн внутри конуса Маха, движущегося вместе с телом. Чем больше скорость  $v$ , тем меньше  $\alpha$ , тем уже раствор конуса, тем меньшая область пространства возмущена движущейся частицей.

Ясно, что на образование волн расходуется энергия; кинетическая энергия тела от части превращается в энергию звуковых волн, и, следовательно, на тело действует «сила сопротивления движению», которая называется силой *волнового сопротивления*. Колебания в звуковых волнах со временем ослабляются, так как волны с течением времени занимают все большую область пространства и затухают вследствие внутреннего трения в газе; в конце концов «хвост» конуса рассеивается в пространстве.

Если бы частица двигалась не со сверхзвуковой скоростью, то от нее также распространялись бы звуковые волны, но характер их был бы совсем другим: возмущение занимало бы все пространство газа, что можно представить себе, рассматривая рис. 338, где положение тела и фронт посыпаемой им волны отмечены одинаковыми цифрами. Если частица долго двигалась до данного момента, то волны занимают все пространство.

При скорости тела, равной скорости звука, область возмущения занимает половину пространства, так как угол раствора конуса Маха равен  $2\alpha = \pi$  (соответствующая картина показана на рис. 339).

Описанный здесь воображаемый пример с движением маленького тела (точки) позволяет представить себе картину процессов, происходящих при движении больших тел со сверхзвуковой скоростью. Если крыло самолета достаточно тонко и имеет острую кромку, то в первом приближении его можно рассматривать как

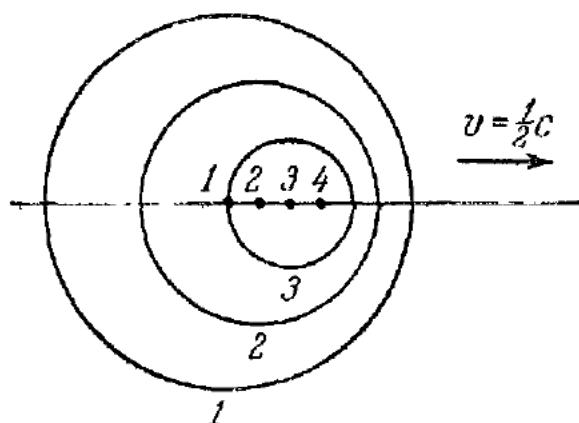


Рис. 338.

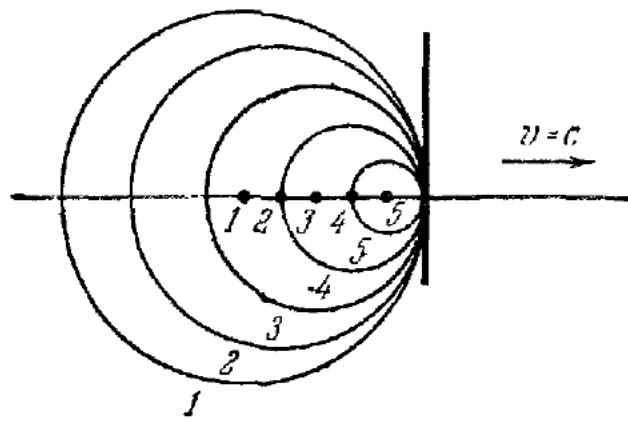


Рис. 339.

совокупность маленьких тел (точек, частиц), каждое из которых посылает в окружающее пространство сферическую звуковую волну. Результирующая волна будет состоять из наложенных друг на друга отдельных элементарных волн, идущих от каждой

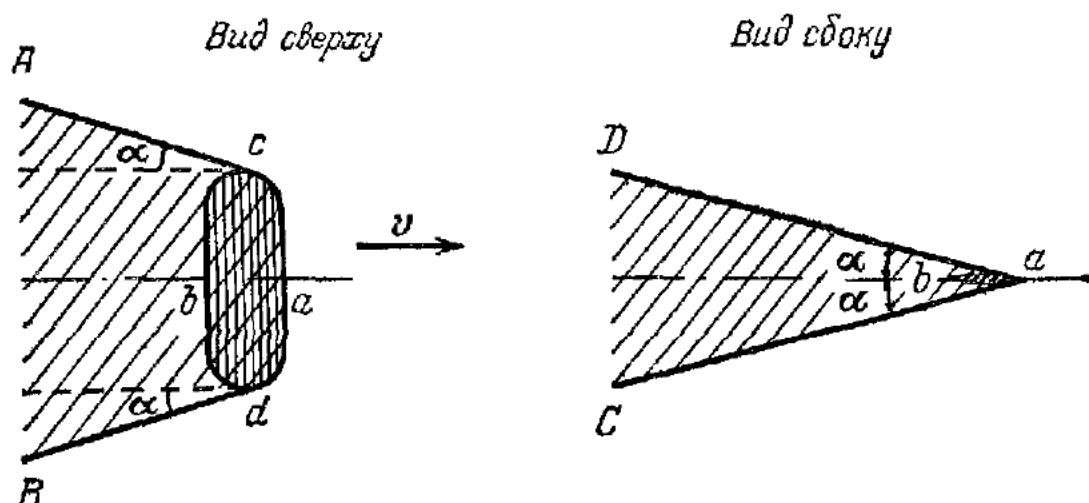


Рис. 340.

точки поверхности крыла, и область возмущений будет определяться совокупностью конусов Маха, движущихся с каждой точкой поверхности крыла. Поверхность возмущенной области пространства уже не будет конусом, но ее легко представить себе, если учитывать то, что она является огибающей всех конусов Маха. Например, рассматривая рис. 340, можно представить себе положение огибающей поверхности около некоторой тонкой пластиинки  $adb$ . (На рисунке показаны пересечения этой поверхности горизонтальной  $AcadB$  и вертикальной  $DaC$  плоскостями.) В первом приближении можно производить вычисления волнового сопро-

тивления крыла и его подъемной силы, пользуясь этой простой картиной распространения элементарных волн вокруг крыла.

В действительности картина явления сложнее, удары частиц среды о тело очень сильны, т. е. они вызывают достаточно большие изменения давления, и характер возмущений, распространяющихся в окружающем пространстве, оказывается несколько иным: возмущения уже не описываются совокупностью (суммой) простых акустических волн с малыми изменениями плотности среды и давления. Это отличие особенно заметно у относительно толстых тел с затупленным носком; о нем мы расскажем в следующем параграфе.

## § 121. Волны при большом изменении давления и движение тела с большой скоростью

В предыдущем параграфе мы предполагали, что скорость движения поршня очень мала:  $v \ll c$ , и  $\Delta p$  очень мало по сравнению с  $p_0$ . Затем мы считали, что поршень мгновенно приходит в движение, сразу получает конечную скорость  $v$ . Если время нарастания скорости поршня от нуля до  $v$ , равное  $\Delta t$ , много меньше  $\Delta t$ , то все наши выводы остаются в силе, но график переднего фронта волны давления (или скорости) уже не будет таким отвесным, как на рис. 336, б. За время  $\Delta t$  скорость частицы, находящейся на фронте волны, нарастает от нуля до  $v$ .

Теперь рассмотрим волну при большом изменении давления. Предположим, что давление поршня поднялось за время  $\Delta t$  на значительную величину  $p_1$  и распределение давления перед поршнем в момент  $\Delta t$  имеет форму, показанную на рис. 341, а. Распространение такой сложной волны можем представить как распространение последовательных элементарных волн с такой же малой интенсивностью, как и у волн, рассмотренных в предыдущем параграфе. Каждая из этих элементарных волн распространяется вслед за другой, и изменение давления в ней мало и равно  $\Delta p$ ; тогда  $\Delta x_1 = c\Delta t$ . Допустим, что элементарная волна давления величиной  $\Delta_1 p$  распространяется в среде, сжатой до  $p_0$ , так, как показано на рис. 341, б.

В среде, уже сжатой на величину  $p_0 + \Delta_1 p$ , распространяется следующая за ней элементарная волна давления величиной  $\Delta_2 p$ , и т. д. до величины  $p_1$ . Каждая из последующих элементарных волн распространяется в более плотной среде. Изменение плотности и давления связано законом адиабаты  $p = \text{const} \cdot \rho^\alpha$ , для воздуха  $\alpha = 1,4$ , а тангенс угла наклона касательной к адиабате по (120.5) равен квадрату скорости звука; поэтому скорость звука с увеличением плотности растет. Следовательно, более поздние элементарные волны будут догонять вышедшие раньше и *фронт волны* со временем будет становиться *круче и круче* и в конце

концов примет такой вид, как показано на рис. 341, *a* пунктиром: это значит, что далее в трубе будет распространяться *разрывная волна давлений*, в которой *скачком*, почти мгновенно, нарастают давление и скорость, и после скачка величины давления и скорости остаются постоянными<sup>1)</sup>. Скорость распространения разрывной волны определяется сложнее, она отличается от скорости звука и зависит от величины скачка давления. Следовательно, при больших и резких изменениях давления, например при взрыве снаряда или бомбы в воздухе, распространяются разрывные волны давления.

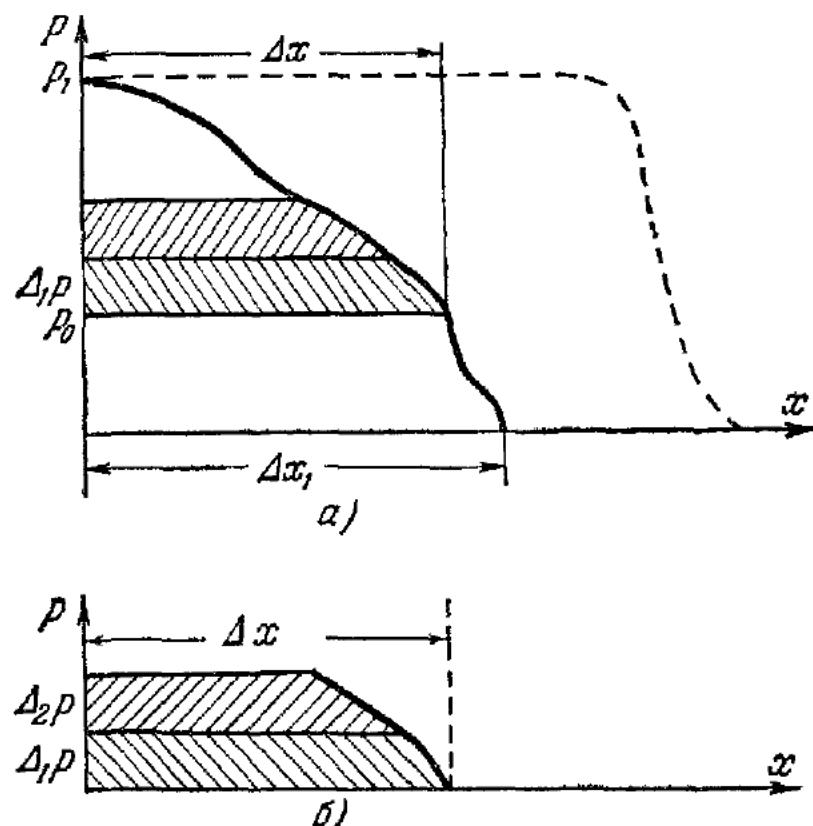


Рис. 341.

В этих волнах величина скачка давления также убывает с расстоянием, особенно если взрыв происходит в небольшой области и от него распространяется волна почти сферической формы.

Когда фронт разрывной волны проходит через данную частицу, она испытывает *удар* со стороны движущихся частиц, при котором скорость ее мгновенно нарастает от нуля до некоторого конечного значения. Поэтому разрывные волны называют еще *ударными волнами*.

Примерно такая же картина имеет место впереди и сбоку от затупленного тела, движущегося со скоростью, которая больше скорости звука в среде. В этом случае имеет место головной участок ударной волны, который при заостренном теле и при достаточно

<sup>1)</sup> Такие же соображения показывают, что если в среде распространяется волна разрежения, то фронт волны *разрежения* будет расплываться и становиться все *положе* и *положе* по мере распространения волны.

большой скорости очень близок к острию. Частицы впереди тела находятся в полном покое до того момента, пока их не встретит участок ударной волны, сопровождающей тело.

В тот момент, когда через частицу среды проходит ударная волна, частица мгновенно сжимается и получает некоторую скорость. Воздух между телом и фронтом ударной волны движется, и частицы расходятся в стороны, освобождая место для тела. Эта картина имеет сходство с волновым процессом, происходящим в цилиндрической трубе, только там слой сжатого газа между ударной волной и поршнем все время возрастает, а здесь частицы сжатого газа непрерывно расходятся в стороны (так как стенок нет) и слой между ударной волной и телом имеет постоянную толщину; частицы

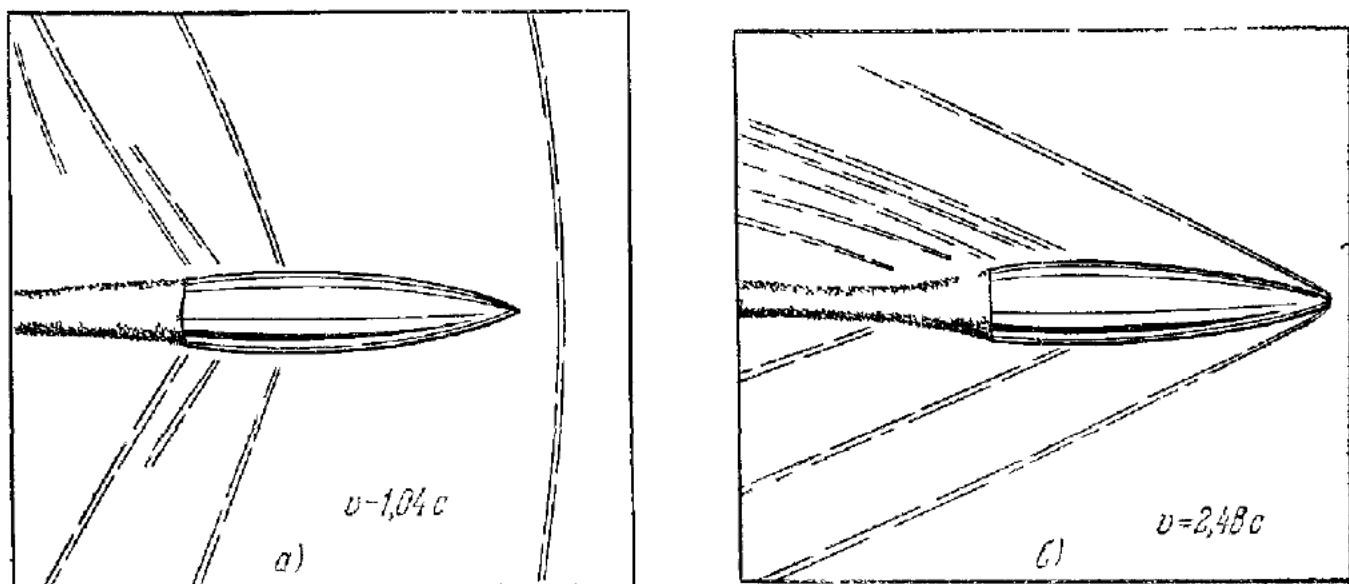


Рис. 342.

воздуха, непрерывно поступающие в этот слой, расходятся во все стороны, вызывая возмущение в окружающей среде. Возмущения распространяются с некоторой скоростью, которая зависит от величины скачка давления. Но естественно, что с удалением от тела величина скачка давления падает и скорость распространения возмущений уже мало отличается от скорости звука, и поэтому форма ударной волны становится похожей на соответствующий конус Маха.

У заостренных тел слой между носом и ударной волной при  $v > c$  может быть очень тонким и ударная волна «отходит» от передней точки тела. При очень большой скорости,  $v \gg c$ , ударная волна проходит совсем близко от поверхности тела, конус Маха сильно вытянут.

Ударная волна всегда сопровождает в полете сверхзвуковой самолет, и если он летит на недостаточно большой высоте, то величина скачка давлений около поверхности земли будет еще очень велика. Когда такая волна достигает нашего уха, мы слышим резкий «взрыв», похожий на взрыв гранаты или снаряда, и вслед за

ним обычный шум летящего самолета. Летчик, естественно, никаких подобных «взрывов» не слышит, он движется вместе с волной. На рис. 342 показаны пули, летящие со скоростью  $v = 1,04 c$  и  $v = 2,48 c$ ; тень ударной волны изображена в виде точек.

Энергия движущегося тела (снаряда, пули и т. п.) в значительной степени расходуется на образование ударных волн, сопровождающих его движение со сверхзвуковой скоростью. Сопротивление движению тела при такой скорости в основном является *волновым сопротивлением*. Частицы среды приходят в движение вследствие удара тела о частицы, встречающиеся на его пути. Частицы, о которые ударились тело, расступаясь, вызывают движение частиц окружающей среды, которое начинается после прохода головной ударной волны. Энергия, затраченная на движение частиц и на тепло при ударе частиц, получается за счет уменьшения кинетической энергии движущегося тела или за счет источника, приводящего тело в движение. Форма передней части тела существенно влияет на величину лобового сопротивления: тела с заостренным носом и с малым поперечным сечением имеют меньшее лобовое сопротивление. Форма задней части тела не имеет уже такого важного значения, как при небольшой скорости обтекания.

## § 122. Сверхзвуковой поток в трубе

Как мы видели в § 105, скорость потока газа, выходящего из отверстия в сосуде и находящегося под давлением  $p_n$ , теоретически может достигать большого значения. Так, например, воздух, находящийся под давлением в одну атмосферу, имеет, согласно формуле (105.5), скорость истечения в пространство с нулевым давлением (вакуум), равную

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_n}{\rho_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,405 \cdot 1,0133 \cdot 10^5}{0,405 \cdot 1,293}} \approx 750 \text{ м/с},$$

где коэффициент адиабаты  $\kappa = 1,405$ , атмосферное давление  $p_n = 1,0133 \cdot 10^5 \text{ кг/м} \cdot \text{с}^2$  и начальная плотность воздуха  $\rho_n = 1,293 \text{ кг/м}^3$ .

Эта скорость истечения больше чем в два раза превышает скорость звука. Однако если отверстие только сужающееся, как показано на рис. 301,  $a$ , то практически такое значение скорости потока не будет достигнуто. В самом деле, пусть снаружи сосуда и внутри него давление одинаково; будем постепенно понижать давление снаружи, полагая, что давление в сосуде поддерживается постоянным (одна атмосфера). Тогда максимальная скорость в узком сечении отверстия будет постепенно нарастать. При некотором значении давления снаружи, которое можно определить по формуле (105.5), скорость течения достигнет скорости звука и все сечение

отверстия будет занято участком газа, движущимся со скоростью звука.

Всякое изменение давления снаружи оказывает влияние на течение внутри сосуда в том случае, если это изменение в какой-то степени проникает внутрь сосуда. Изменение давления в газе распространяется со скоростью звука, и, следовательно, это изменение не может проникнуть внутрь сосуда через ту область, которую занимают частицы, движущиеся со скоростью звука. Таким образом, дальнейшее понижение давления снаружи не вызовет увеличения скорости потока в отверстии. Струя воздуха в отверстии будет иметь определенное давление, более высокое, чем окружающее давление. Поток со звуковой скоростью «запирает» отверстие. Этот вывод подтверждается и анализом условий существования стационарного сжимаемого потока газа вдоль трубы тока переменного сечения.

Пусть трубка тока стационарного потока сжимаемого газа имеет сечение  $S$ , которое будем считать функцией координаты  $x$ , направленной вдоль оси трубы по потоку. Тогда условие постоянства потока массы вдоль трубы при стационарном течении записывается так:

$$\rho v S = \text{const}, \quad (122.1)$$

где все величины — функции только  $x$ . При переходе от сечения с координатой  $x$  к сечению с координатой  $x + dx$  все величины изменяются, но между дифференциалами этих величин будет иметь место соотношение

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (122.2)$$

которое получается после дифференцирования выражения (122.1). По второму закону динамики

$$-dp = \rho v dv, \quad (122.3)$$

где  $dp$  — приращение давления при переходе от  $x$  к  $x + dx$ . Теперь учтем известное из § 120 соотношение для скорости звука

$$dp = c^2 d\rho; \quad (122.4)$$

подставим его в (122.3) и получим

$$\rho v dv = -c^2 d\rho,$$

или

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{c^2}. \quad (122.5)$$

Подставляя это выражение в (122.2), получаем связь между

поперечным сечением трубы и скоростью потока:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right). \quad (122.6)$$

Эта формула дает зависимость между изменением сечения трубы  $dS$  и изменением скорости  $v$ , она же показывает принципиальную роль отношения скорости потока к скорости звука  $c$ .

Если трубка тока сужается вдоль по потоку, или  $dS$  отрицательно, то по (122.6)  $dv > 0$  только при условии, что  $\frac{v}{c} < 1$ .

Это значит: в сужающейся трубке тока скорость  $v$  может нарастать вдоль потока только до некоторого значения, не превышающего значения скорости звука  $c$ . При положительном значении  $dv$ , при росте скорости, плотность  $\rho$  будет убывать всегда, как видно из условия (122.5). *В сужающейся трубке тока растет скорость потока, а плотность и давление падают вдоль потока, но скорость не может возрасти выше  $c$ .* К этому же выводу мы пришли ранее на основании элементарных рассуждений.

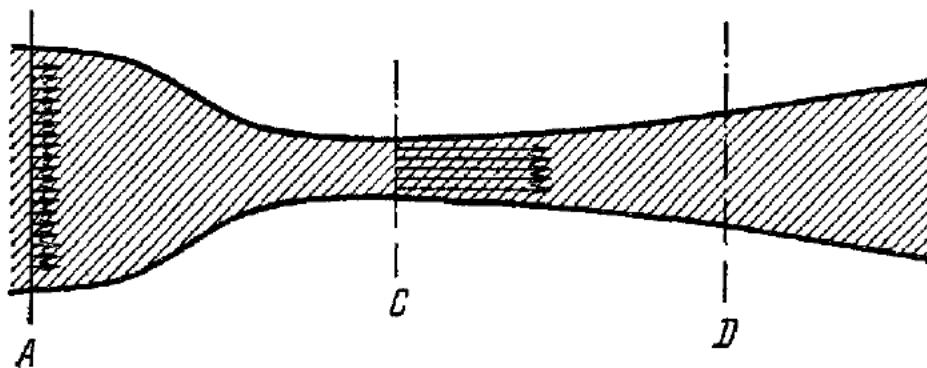


Рис. 343.

Если трубка тока расширяется ( $dS > 0$ ) и скорость потока в начале трубы меньше  $c$ , то  $dv < 0$  по (122.6). Это значит, что скорость потока будет уменьшаться вдоль потока, а давление и плотность — возрастать, как видно из (122.5). Если же в расширяющейся трубке тока скорость потока  $v$  выше скорости  $c$ , то  $dv > 0$  и скорость потока будет нарастать вдоль трубы, давление и плотность — падать.

Здесь мы имеем совсем другую картину, чем в потоке несжимаемой жидкости или в потоке газа при скорости потока, меньшей  $c$ . Действительно, при скорости потока, меньшей чем  $c$ , в расширяющейся трубке скорость будет падать, а давление и плотность будут возрастать по потоку. Для несжимаемой жидкости  $c \rightarrow \infty$ , поэтому в расширяющейся и сужающейся трубке изменение давления и скорости качественно то же, что и в газе при  $v < c$ .

Таким образом, для получения сверхзвуковой скорости потока в трубе нужно делать ее обязательно сначала сужающейся, а затем расширяющейся (рис. 343). При соответствующей разности дав-

лений скорость потока от сечения  $A$  до сечения  $C$  будет возрастать до скорости звука, а затем уже от сечения  $C$  до сечения  $D$  скорость будет расти вдоль потока, оставаясь выше скорости звука. Сечение трубы должно быть подобрано соответствующим образом, чтобы затраты давления для получения данной скорости были бы минимальны. Если же труба имеет неподходящее расширение, то в сверхзвуковой зоне могут образоваться «скачки» (*разрывные волны*), неподвижные относительно стенок трубы, и после скачка скорость падает. На причинах образования скачков мы останавливаться не можем.

Для испытания моделей в сверхзвуковом потоке строят аэродинамические трубы со сверхзвуковым потоком, которые имеют сечение примерно такое, как показано на рис. 343, причем модель располагается где-то в зоне сечения  $D$ . Около модели возникают разрывные волны, так же как и при полете в спокойном воздухе со сверхзвуковой скоростью.

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## Глава XIV

## КОЛЕБАНИЯ

## § 123. Периодические процессы

Среди явлений природы мы часто наблюдаем периодические процессы: смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли, движение планет и т. д. Так же в быту и технике: колебания маятника часов, вращение и движение частей разнообразных машин — все это периодические явления.

В периодическом явлении изменение какой-либо величины повторяется в том же виде через совершенно определенное время —

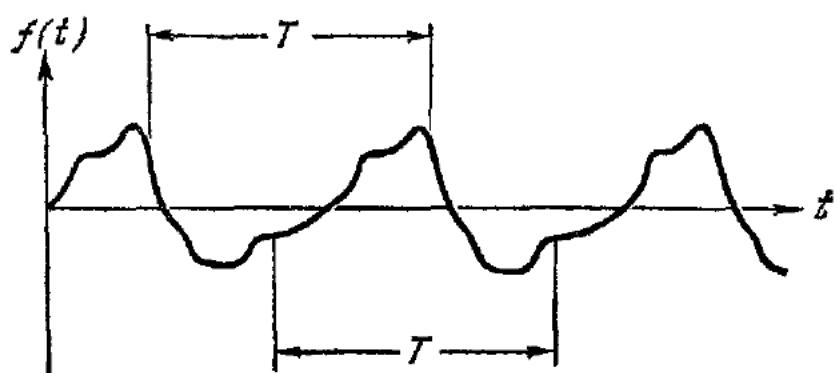


Рис. 344.

период. Математическое определение периодической величины таково: если  $f(t)$  есть периодическая функция  $t$  с периодом  $T$ , то при любом  $t$  функция  $f(t + T) = f(t)$ . График периодически изменяющейся величины повторяется в точности через период (рис. 344). Довольно часто мы встречаем непериодические явления, которые похожи на периодические движения, например, маятниковые колебания грузика, подвешенного на нити, колебания ветки дерева после того, как ее оттянут вниз, и т. д. Во всех этих явлениях процессы не будут периодическими, колебания будут постепенно убывать по величине. Все такие процессы и аналогичные им называют более общим термином — **колебания**, а периодические колебания представляют частный случай колебаний вообще.

Если колебания передаются от одной частицы к другой, как, например, колебания уровня воды, возникшие после падения камешка, передаются соседним частицам воды, то совокупность таких колебаний всех частиц называется *волновым процессом*.

Среди разнообразных колебаний, встречающихся в природе, основную и очень важную роль играют *гармонические колебания*.

### § 124. Гармонические колебания

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение наблюдаемой величины происходит по закону синуса (или косинуса). Например, проекция точки, движущейся равномерно по окружности, на линию, лежащую в плоскости движения точки (рис. 345), изменяется со временем по синусоидальному закону. Если окружность имеет радиус  $R$  и угловая скорость вращения точки  $\omega$ , то проекция  $x$  равна

$$x = R \sin \alpha = R \sin \omega t. \quad (124.1)$$

Период изменения  $x$ , очевидно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad (124.2)$$

через время  $T$ , время одного оборота точки, весь процесс в точности повторится. Поэтому  $T$  называют *периодом гармонических колебаний*, а  $\omega$  — *круговой* (или *циклической*) *частотой гармонических колебаний*. Число колебаний за единицу времени называют *частотой колебаний*,

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частоту  $\nu$  измеряют в *герцах*, размерность [Гц] = 1/с. Если тело совершает  $N$  колебаний в секунду, то частота его колебаний  $\nu = N$  Гц.

Гармоническое движение часто встречается там, где имеет место равномерное вращательное движение. Но, например, движение поршня паровой машины (или двигателя внутреннего сгорания) при равномерном вращении маховика не представляет собой чисто гармоническое движение, эти периодические движения будут близкими к гармоническим только при определенных условиях.

Мы привели только кинематическое описание гармонического движения, далее будут выяснены физические условия, при которых совершаются гармонические колебания.

Подвесим на нити небольшой грузик, как показано на рис. 346, и, отклонив его от положения равновесия в сторону, отпустим.

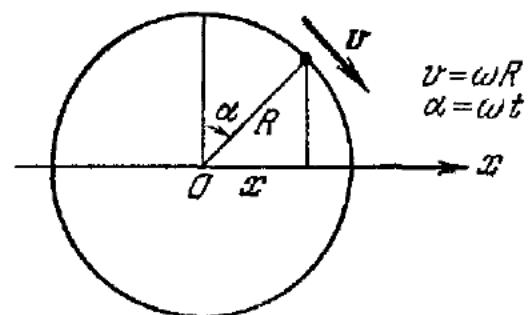


Рис. 345.

Грузик будет двигаться к положению равновесия с ускорением, которое возникло под действием силы натяжения нити  $N$  и силы тяжести  $P = mg$ . Достигнув положения равновесия  $O$ , где ускоряющая сила равна нулю, грузик по инерции пройдет положение равновесия и далее будет тормозиться той же силой, которая его ускоряла ранее. Затем он остановится и пойдет обратно — так возникнут *собственные колебания* маятника.

Собственными они называются потому, что во время колебаний грузик находится только под действием сил, определенных физическим устройством самого маятника, а не других тел.

С течением времени колебания маятника будут уменьшаться, или, как говорят, *затухать*. Это происходит по той причине, что начальная энергия, которая была сообщена грузику маятника при отклонении его рукой, постепенно переходит в тепло вследствие наличия сил трения. Колебания маятника будут негармоническими и непериодическими, но если силы трения уменьшить, то колебания будут очень *близки* к гармоническим.

Для того чтобы представить себе ясней законы колебаний маятника, вначале проанализируем предельный случай — колебания маятника в отсутствие силы трения, которые, очевидно, будут периодическими.

Рассмотрим небольшие собственные колебания такого маятника<sup>1)</sup>.

Обозначим угол отклонения маятника через  $\alpha$ . Нам нужно найти, как он будет изменяться со временем. Сила, действующая на грузик массы  $m$ , составляется из двух сил: силы тяжести  $P = mg$ , направленной отвесно вниз, и силы натяжения нити  $N$ , направленной вдоль нити к точке подвеса (см. рис. 346). Если угол отклонения  $\alpha$  все время остается очень малым, то дугу траектории грузика можно считать приближенно прямой. Отклонение грузика от положения равновесия обозначим через  $x$ ; тогда при малых углах  $\alpha$  можно приближенно считать

$$x \approx l\alpha, \quad (124.3)$$

где  $l$  — длина маятника от точки подвеса нити до центра тяжести грузика. Сила  $F$ , действующая вдоль дуги, равна  $P \sin \alpha$  или при малом  $\alpha$

$$F \approx m g \alpha. \quad (124.4)$$

<sup>1)</sup> Если размеры грузика очень малы и его можно считать материальной точкой и нить — невесомой, то такой маятник называют *математическим*.

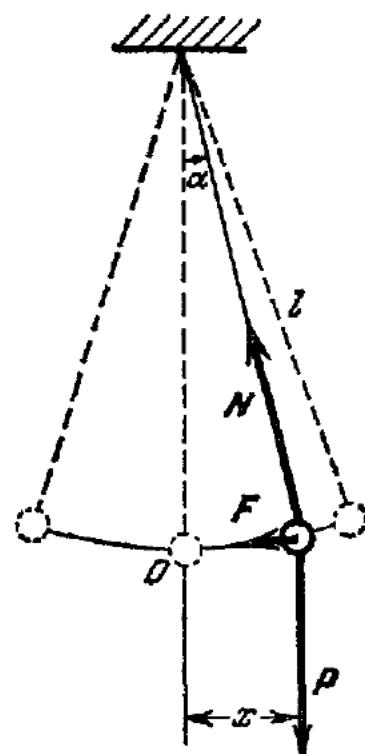


Рис. 346.

Тогда уравнение движения грузика будет

$$m\ddot{x} = -F. \quad (124.5)$$

Мы написали перед  $F$  знак минус, ибо сила  $F$  направлена против положительного направления координаты смещения  $x$ . Если в (124.4) заменим  $\alpha$  на  $x/l$ , то уравнение (124.5) можно записать так:

$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l}, \quad (124.6)$$

или, сокращая на  $m$ , получаем окончательно:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (124.7)$$

Движение грузика происходит под действием силы  $F = mg \frac{x}{l}$  (см. (124.6)), величина которой изменяется пропорционально отклонению грузика ( $x$ ) от положения равновесия ( $x = 0$ ), и направлена эта сила всегда к положению равновесия. Поэтому силу  $F$  называют *возвращающей силой*.

Решение уравнения (124.7) легко найти. Оно будет таково:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right), \quad (124.8)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — пока произвольные постоянные величины. Докажем, что (124.8) удовлетворяет уравнению (124.7). Действительно, про-дифференцировав  $x$  два раза, получаем

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) = -\frac{g}{l}x. \quad (124.9)$$

Равенство (124.9) полностью совпадает с уравнением (124.7). Обозначим

$$\frac{g}{l} = \omega^2 \quad (124.10)$$

и запишем движение грузика (124.8) в таком виде:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (124.11)$$

Таким образом, мы нашли, что  $x$  изменяется во времени по синусоидальному закону. Величина  $A$ , равная максимальному отклонению от положения равновесия, называется *амплитудой* гармонических колебаний. Величина амплитуды зависит от первоначального отклонения и от толчка, после которых начались колебания маятника. Величина, стоящая под знаком синуса,  $\omega t + \varphi$ , называется *фазой*. Фаза растет пропорционально времени. Величина  $\varphi$  — *начальная фаза*, или фаза в момент  $t = 0$ ; она зависит от отклонения и скорости в момент начала отсчета времени  $t$ .

Колебания происходят периодически, процесс повторяется через *период собственных колебаний*  $T$ . Очевидно, что смещение грузика  $x$  и его скорость  $\dot{x}$  будут теми же, если фаза  $\omega t + \phi$  изменится на величину  $2\pi$ . Фаза возрастет на величину  $2\pi$ , когда время изменится на величину периода  $T$ . Следовательно,

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}} T;$$

отсюда период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (124.12)$$

Подчеркнем, что через период маятник возвращается в то же положение и имеет ту же скорость. Период колебаний пропорционален корню квадратному из длины маятника  $l$ , и это очень легко проверить опытом. Маятник, имеющий в четыре раза большую длину, имеет в два раза больший период. Период маятника не зависит от массы грузика <sup>1)</sup> и не связан с амплитудой колебания. Последнее утверждение верно только при малых углах отклонения. Колебания с амплитудой в  $2^\circ$  практически имеют тот же период, что и колебания с амплитудой в  $4^\circ$ , а при обычной точности измерения периода (до 0,2%) это справедливо при колебаниях, когда углы отклонения маятника не превышают  $10^\circ$ .

При больших углах отклонения маятника приближенное уравнение (124.6) не будет справедливым. Уравнение колебаний в этом случае нужно записать так.

$$ml^2\alpha = -mgl \sin \alpha, \quad (124.13)$$

как уравнение вращения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса. Движение маятника при больших углах отклонения будет периодическим, но *негармоническим*, период колебаний будет зависеть от размаха

Частота колебаний маятника при малых углах отклонения, или *собственная частота*, по (124.12) равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (124.14)$$

а величину  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  называют *собственной круговой частотой маятника*. Из сравнения (124.10) и (124.14) видно, что круговая частота маятника равна

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (124.15)$$

Период и частота колебаний математического маятника при малых

<sup>1)</sup> В случаях, когда размеры грузика очень малы по сравнению с  $l$ .

углах отклонения зависят от длины его  $l$  и от  $g$ , от ускорения силы тяжести в данном месте.

*Собственные колебания физического маятника*, т. е. тяжелого тела, свободно вращающегося вокруг некоторой оси, будут происходить так же, как и колебания рассмотренного выше математического маятника. Пусть тело  $A$  (рис. 347) свободно вращается вокруг горизонтальной оси  $O$ , перпендикулярной к чертежу. Расстояние от центра масс до оси равно  $a$ ; тогда при повороте тела от положения равновесия на угол  $\alpha$  возникнет возвращающий момент силы тяжести, равный

$$mga \sin \alpha,$$

где  $m$  — масса тела.

При колебаниях только этот момент будет действовать на тело, следовательно, по второму закону динамики для вращающегося тела

$$I\ddot{\alpha} = -mga \sin \alpha,$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к чертежу. При малых углах отклонения  $\sin \alpha \approx \alpha$ ; тогда

$$I\ddot{\alpha} + mga\alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mga}{I}\alpha = 0. \quad (124.16)$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением (124.7). Следовательно,  $\alpha$  будет изменяться гармонически с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \quad (124.17)$$

которую легко получить, сравнивая формулы (124.16), (124.7) и (124.15). Следовательно, математический маятник, длина которого равна

$$l_0 = \frac{I}{ma}, \quad (124.18)$$

будет иметь ту же частоту колебаний, что и данный физический. Точка, находящаяся на расстоянии  $l_0$  от оси вращения по линии, проходящей через центр масс, называется *центром качания физического маятника*. Если ось вращения поместить в центре качания, то маятник будет совершать колебания с той же частотой.

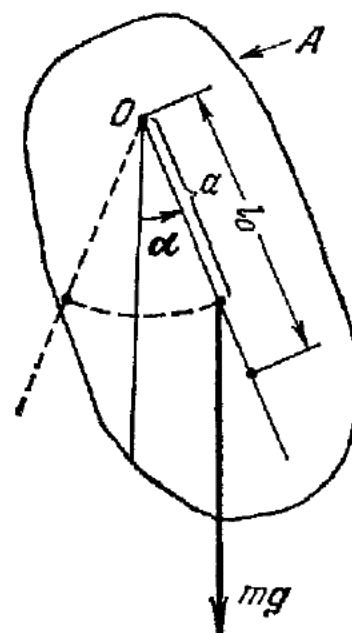


Рис. 347.

В этом можно убедиться расчетом, если вспомнить формулу Гюйгенса — Штейнера для момента инерции  $I = I_0 + ma^2$  (см. (59.16)) и записать выражение (124.18) так:

$$l_0 = \frac{I_0}{ma} + a, \quad (124.19)$$

где  $I_0$  — момент инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела. Из (124.19) следует:

$$a = \frac{I_0}{m(l_0 - a)}; \quad (124.20)$$

центр качания перевернутого маятника по (124.19) будет на расстоянии

$$l'_0 = \frac{I_0}{m(l_0 - a)} + l_0 - a. \quad (124.21)$$

Учитывая (124.20), находим, что  $l_0 = l'_0$ .

Формула (124.19) также показывает, что если  $\frac{I_0}{ma}$  ничтожно мало по сравнению с  $a$ , то физический маятник приближается к математическому, для которого  $I_0 = 0$ .

Зная точно длину  $l_0$  и определяя период колебаний физического маятника с помощью часов, можно измерить величину  $g$  в данном месте. Таким методом были произведены наиболее точные измерения силы тяжести и определены изменения ее в различных точках земной поверхности. С помощью таких измерений  $g$  определяют местные изменения плотности земной коры и на основании их судят о породах, залегающих на глубине (гравитационная разведка ископаемых).

Рассмотрим теперь *собственные колебания грузика на упругой пружине* (348, а). После отклонения грузика от положения равновесия он будет совершать вертикальные гармонические колебания, если упругая пружина такова, что сила деформации *пропорциональна* величине удлинения пружины. Сила деформации  $F$  пружины в зависимости от величины удлинения  $\Delta l$  изображается на графике прямой линией  $F = k \Delta l$  (рис. 348, б). Под действием силы  $mg$  пружина растягивается на величину  $\Delta l_0$ , или в состоянии равновесия пружина будет иметь деформацию  $\Delta l_0$ . Отклонение грузика от положения равновесия будем обозначать через  $x$ , при чем положительному значению  $x$  соответствует отклонение вниз. При отклонении груза на величину  $x$  на него будет действовать возвращающая сила  $f = kx$ , равная разности силы деформации пружины и силы тяжести.

Уравнение движения груза, имеющего массу  $m$ , будет почти таким же, как и для малых колебаний маятника, а именно:

$$m\ddot{x} = -f = -kx, \quad (124.22)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости (см. § 31). Решение уравнения (124.22) представляет собой также гармоническое движение:

$$x = A \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right). \quad (124.23)$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (124.24)$$

а круговая собственная частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (124.25)$$

Круговая частота равна квадратному корню из отношения коэффициента жесткости пружины  $k$  к массе груза  $m$ . С увеличением

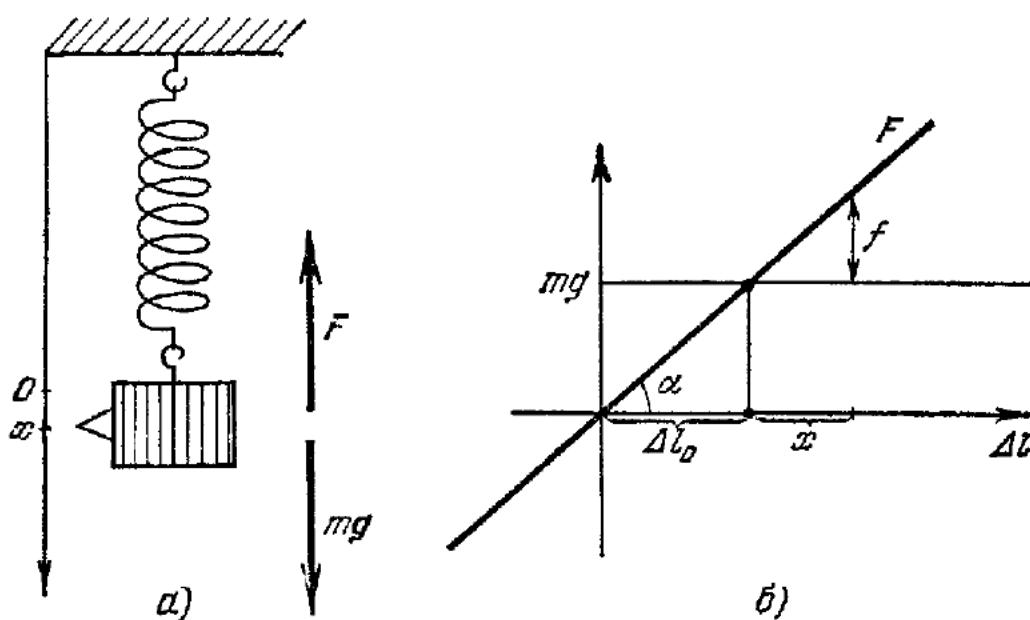


Рис. 348.

жесткости пружины повышается частота, увеличение массы понижает собственную частоту. Заметим, что величина силы тяжести не оказывает никакого влияния на характер колебаний груза на пружине, период колебаний данного груза на пружине будет тот же, если расположить пружину горизонтально и обеспечить такие условия, чтобы грузик двигался без трения.

Следовательно, груз, подвешенный на пружине, будет одинаково колебаться, если он будет находиться в различных точках поверхности земного шара, даже если его можно было бы перенести на другую планету и т. д. Характер собственных колебаний не зависит от постоянной силы тяжести, действующей на тело, а зависит только от переменной возвращающей силы пружины.

## § 125. Собственные колебания и изменение энергии во время колебаний

Сравнивая рассмотренные примеры (колебания математического и физического маятников при малых отклонениях, колебания грузика, подвешенного на пружине) и аналогичные им, можно сделать вывод, что *собственные гармонические колебания* всегда совершаются около устойчивого положения равновесия, когда возвращающая сила *пропорциональна* отклонению колеблющегося тела от положения равновесия.

Собственные колебания мы встречаем очень часто; кроме описанных примеров, можно указать еще и такие: колебания ареометра, погруженного в жидкость, колебания груза,

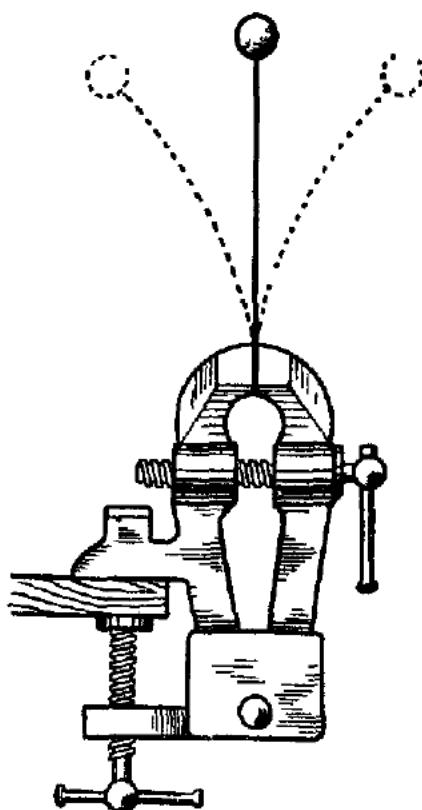


Рис. 349

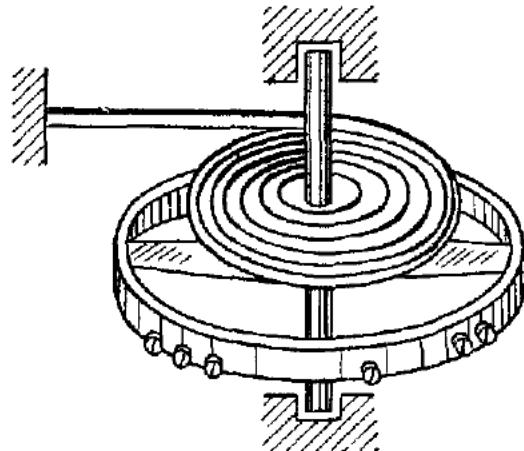


Рис. 350

прикрепленного к зажатой в тиски пластинке (рис. 349), колебания маятника карманных часов (рис. 350) и т. д.

Собственные гармонические колебания возникают после того, как тело выведено из положения равновесия или ему некоторым импульсом сообщена начальная скорость, или после того, как сделано и то и другое вместе, т. е. после того, как тело выведено из *состояния равновесия*. Если в системе нет трения, то колебания после начального «возмущения» будут продолжаться сколь угодно долго. Иначе говоря, в начальный момент системе, находящейся в положении равновесия, сообщили некоторый запас энергии, который при отсутствии сил трения будет сохраняться неизменным в системе в виде энергии колебаний.

Поэтому по закону сохранения энергии при гармонических колебаниях *полная энергия* остается постоянной, но кинетическая или потенциальная, каждая в отдельности, совершают колебания во времени. В момент, когда колеблющееся тело достигает крайнего положения и имеет скорость, равную нулю, вся энергия

является *потенциальной* — кинетическая равна нулю. Когда тело проходит через положение равновесия, вся энергия является *кинетической* — потенциальная энергия равна нулю (конечно, если заранее известно, что потенциальная энергия в положении равновесия полагается равной нулю). Поскольку тело за период колебаний проходит два раза через положение равновесия, то период колебаний кинетической энергии в два раза меньше периода колебаний груза. С таким же периодом колеблется и потенциальная энергия. На рис. 351 показан ход изменения со временем всех величин, характеризующих колебания.

Закон сохранения энергии позволяет просто определить собственную частоту (или период) колебаний. Пусть тело массы  $m$  совершает гармоническое колебание

$$x = A \sin \omega t.$$

Тогда скорость колебаний равна

$$\dot{x} = -\omega A \cos \omega t.$$

Скорость принимает максимальное значение, равное  $\omega A$  (значение амплитуды скорости), в те моменты, когда тело проходит через положение равновесия. Полная энергия в этот момент равна кинетической, или

$$E_{\text{полн}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (125.1)$$

Через четверть периода, когда тело дойдет до крайнего положения ( $x = A$  и скорость  $\dot{x} = 0$ ), полная энергия будет равна потенциальной энергии. При горизонтальных колебаниях груза на пружине потенциальная энергия будет равна <sup>1)</sup>  $\frac{kx^2}{2}$ , следовательно,

$$E_{\text{полн}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (125.2)$$

Сравнивая (125.1) и (125.2), получаем формулу (124.25) для определения собственной частоты:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

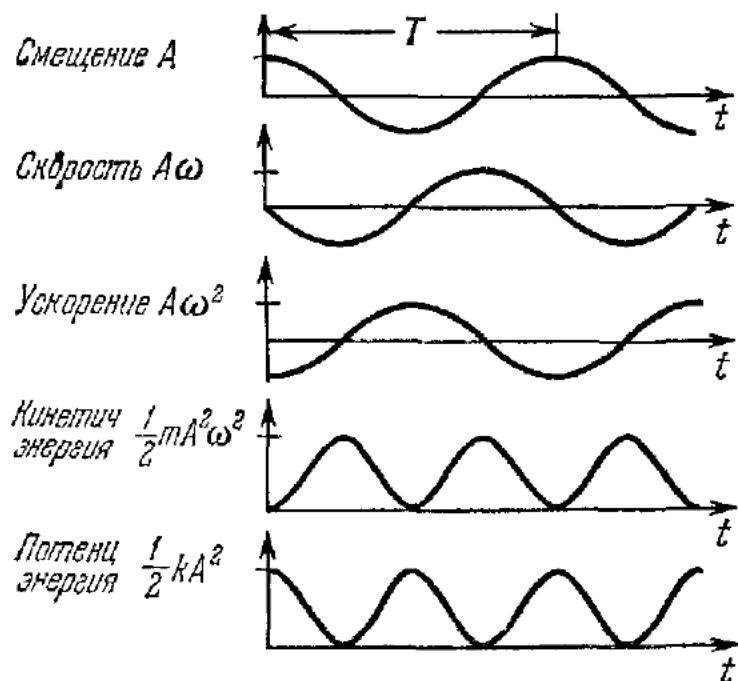


Рис. 351.

<sup>1)</sup> Выражение для потенциальной энергии деформированной пружины см. в § 31.

Подобное определение частоты колебаний из сравнения кинетической и потенциальной энергий является самым простым методом. Покажем это на следующих примерах.

**Пример 1.** Определить частоту колебаний жидкости в сообщающихся сосудах неправильной формы (рис. 352, а). Собственную частоту колебаний в сообщающихся сосудах цилиндрической формы и постоянного сечения (рис. 352, б) определить очень просто. При отклонении уровней жидкости от равновесия на величину  $x$  на жидкость действует сила тяжести неуравновешенной части  $2x\rho Sg$ , эта возвращающая сила и приводит в движение всю массу жидкости  $\rho Sl$ , где  $l$  — длина столба всей жидкости в сосуде,  $\rho$  — плотность жидкости, а  $S$  — поперечное сечение сосуда. Так как все частицы жидкости имеют одинаковое смещение  $x$ , то уравнение движения жидкости имеет вид

$$\rho Sl\ddot{x} = -2x\rho Sg;$$

сокращая на  $\rho S$ , получаем

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0. \quad (125.3)$$

Отсюда круговая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (125.4)$$

Рис. 352.

Но если сообщающиеся сосуды имеют неправильную форму, то смещение различных частиц жидкости при колебаниях будет различно, поэтому нельзя так просто составить уравнение (125.3).

При рассмотрении собственных колебаний в сообщающихся сосудах неправильной формы (см. рис. 352, а) лучше воспользоваться законом сохранения энергии, предположив, что вся масса жидкости совершает очень маленькие гармонические колебания с одной частотой  $\omega$ , а величина смещения зависит от поперечного сечения сосуда. Там, где сосуд широк, смещение будет меньше, чем в узкой его части. Пусть поперечное сечение  $S$  трубки есть известная функция расстояния  $s$  вдоль оси трубки. Форма трубки задана функцией  $S(s)$ . Масса налитой жидкости  $m = \int \rho S ds$  вдоль всего отрезка  $l$ , занятого жидкостью,  $\rho$  — плотность жидкости. Колебания настолько малы, что поперечное сечение трубки на расстоянии двойной амплитуды колебаний можно считать практически неизменным. Поэтому, если  $S_1$  и  $S_2$  — сечения свободных поверхностей правой и левой трубок соответственно, то

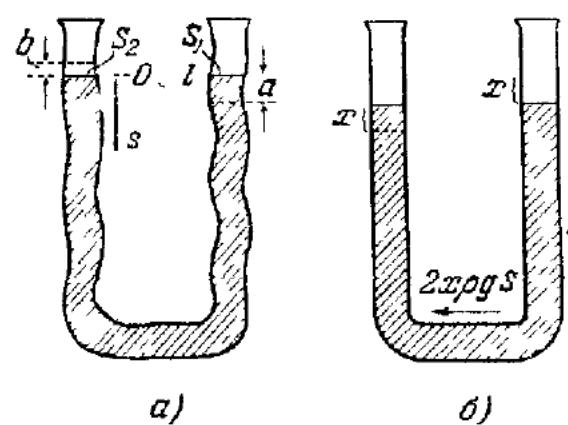
$$S_1 a = S_2 b, \quad (125.5)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний в правом колене, а  $b$  — амплитуда в левом. Пусть нуль координаты  $s$  выбран в плоскости свободной поверхности левой трубки, а свободная поверхность в правом колене находится при координате  $s = l$ , — все в положении равновесия. Тогда  $A$ , амплитуда колебаний в сечении с координатой  $s$  площадью  $S(s)$ , найдется из условия

$$aS_1 = AS;$$

отсюда амплитуда колебаний скорости в сечении с координатой  $s$  будет равна

$$v = \omega A = \omega a \frac{S_1}{S}.$$



Кинетическая энергия жидкости в тот момент, когда частицы жидкости проходят положение равновесия, равна полной энергии:

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} = \int_0^l \frac{\rho S ds v^2}{2} = \frac{\rho \omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S}. \quad (125.6)$$

Через четверть периода вся энергия будет потенциальной, она будет равна работе, которую нужно совершить, чтобы объем жидкости  $S_1a = S_2b$  поднять на высоту

$$\frac{a+b}{2}$$

(см. рис. 352, а). Действительно, перемещение жидкости из состояния равновесия можно представить себе так: все частицы остались на своих местах, только объем  $S_1a$  занял место  $S_2b$ . Поэтому потенциальная энергия будет равна

$$E_{\text{пот}} = \rho S_1 a \frac{a+b}{2} g;$$

по (125.5)  $b = \frac{S_1}{S_2} a$ , поэтому

$$E_{\text{пот}} = \frac{\rho S_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right). \quad (125.7)$$

Приравнивая (125.6) и (125.7), получаем

$$\frac{\rho \omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S} = \frac{\rho S_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right),$$

или

$$\omega^2 = \frac{g \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right)}{S_1 \int_0^l \frac{ds}{S}}; \quad (125.8)$$

при  $S = \text{const}$  это выражение переходит в обычную формулу (125.4) для круговой частоты колебаний в сосуде с постоянным сечением.

**Пример 2.** Определить собственную частоту колебаний груза на тяжелой упругой пружине. Если вес пружины сравним с весом груза (см. рис. 348, а), то период собственных колебаний уже нельзя определить по формуле (124.24), при выводе которой масса пружины считалась равной нулю. Более точное значение периода для однородной пружины можно определить по закону сохранения энергии. Допустим, что груз совершает малые собственные гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ ; тогда каждое кольцо пружины, находящееся на расстоянии  $y$  от точки подвеса в состоянии покоя, имеет амплитуду колебаний

$$A = \frac{y}{l} a,$$

где  $l$  — длина всей пружины в состоянии покоя. Пусть число витков пружины  $N$ , тогда амплитуда  $i$ -го витка (отсчет идет от точки подвеса) равна

$$A_i = \frac{ia}{N}.$$

Кинетическая энергия пружины, когда груз проходит положение равновесия, равна

$$E_{\text{кин}}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_{\text{пр}}}{N} \omega^2 A_i^2 = \frac{m_{\text{пр}}}{2N} \frac{\omega^2 a^2}{N^2} \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{m_{\text{пр}} \omega^2 a^2 N (N+1) (2N+1)}{2N^3 \cdot 6}, \quad (125 \ 9)$$

где  $m_{\text{пр}}$  — масса пружины.

Если  $N \gg 1$ , то

$$E_{\text{кин}}^0 \approx \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{3} \omega^2 a^2,$$

а вся кинетическая энергия — энергия груза и энергия пружины — будет равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{3} a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_{\text{пр}}}{3} \right) a^2 \omega^2.$$

Потенциальная энергия в момент наибольшего растяжения равна

$$E_{\text{пот}} = \frac{k a^2}{2},$$

где  $k$  — коэффициент жесткости пружины. Из равенства  $E_{\text{пот}} = E_{\text{кин}}$  получаем

$$k a^2 = \left( m + \frac{m_{\text{пр}}}{3} \right) a^2 \omega^2,$$

или

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{m_{\text{пр}}}{3}}. \quad (125 \ 10)$$

Таким образом, для более точного определения периода колебаний груза на пружине следует прибавлять к массе груза еще  $\frac{1}{3}$  массы пружины. Очевидно, что если масса пружины очень мала по сравнению с массой груза, то это уточнение не приведет к новому результату. Если число колец пружины невелико, то при определении частоты колебаний нужно учитывать формулу (125 9).

Методом сравнения энергий всегда легче определять частоту, если при колебаниях амплитуды различных точек системы различны, но связаны между собой каким-то определенным условием, на основании которого можно по амплитуде одной точки однозначно определить амплитуды всех остальных точек.

Как мы увидим в дальнейшем, величина собственной частоты системы, совершающей собственные гармонические колебания, имеет очень важное значение во многих явлениях; поэтому правильное ее определение является необходимой задачей.

## § 126. Затухающие собственные колебания

Как видно из самых простых опытов с гармоническими колебаниями — колебаниями маятника, колебаниями ареометра, плавающего в жидкости, и т. п., колебания, возникающие после некоторого толчка, постепенно ослабевают, затухают. В конце концов

колеблющееся тело приходит в состояние покоя. Происходит это потому, что всегда при движении любого тела возникают силы трения и механическая энергия, которую мы сообщили при начальном возбуждении колебаний, постепенно переходит в тепловую форму.

Силы трения довольно сложно зависят от скорости, но при колебаниях, когда скорость мала по абсолютной величине, можно считать с достаточной степенью точности, что силы трения пропорциональны скорости движения (см. § 39). Поэтому уравнение движения при колебаниях груза на пружине, описанных в § 124, будет иметь такой вид:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \quad (126.1)$$

где  $h\dot{x}$  — сила трения и  $h$  — коэффициент силы трения — постоянная величина. Решение (126.1) можно записать в виде

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (126.2)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — постоянные величины, зависящие от начальных условий,

$$\delta = \frac{h}{2m} \quad (126.3)$$

и

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \quad (126.4)$$

Движение представляется произведением экспоненциальной функции (затухающей)  $e^{-\delta t}$  на периодическую функцию  $\cos(\omega_1 t + \varphi)$ , период которой

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Эту величину иногда называют *условным периодом затухающего колебания* (126.2).

Движение представляет собой «затухающие синусоидальные» колебания, как показано на рис. 353. Колебания с течением времени постепенно ослабляются, и огибающая графика колебаний не выходит за пределы кривых  $\pm Ae^{-\delta t}$ . Коэффициент  $\delta = \frac{h}{2m}$ , характеризующий быстроту затухания колебаний во времени, называется *коэффициентом затухания*. Он определяется отношением коэффициента силы трения к величине удвоенной колеблющейся массы.

Возьмем маятники, шарики которых одинаковы по величине и различны по массе (например, свинцовый и пробковый), и будем наблюдать время, за которое размах колебаний уменьшится в определенное число раз. Так как масса свинцового шарика примерно

в 50 раз больше пробкового, то и коэффициент затухания маятника с пробковым шариком будет примерно в 50 раз больше. Поэтому и время, за которое колебания уменьшаются, например, в два раза, будет для маятника со свинцовыми шариками в 50 раз больше, чем для маятника с пробковым шариком.

Все процессы типа (126.2) начинаются в определенный момент времени и продолжаются теоретически бесконечно долго. Поэтому

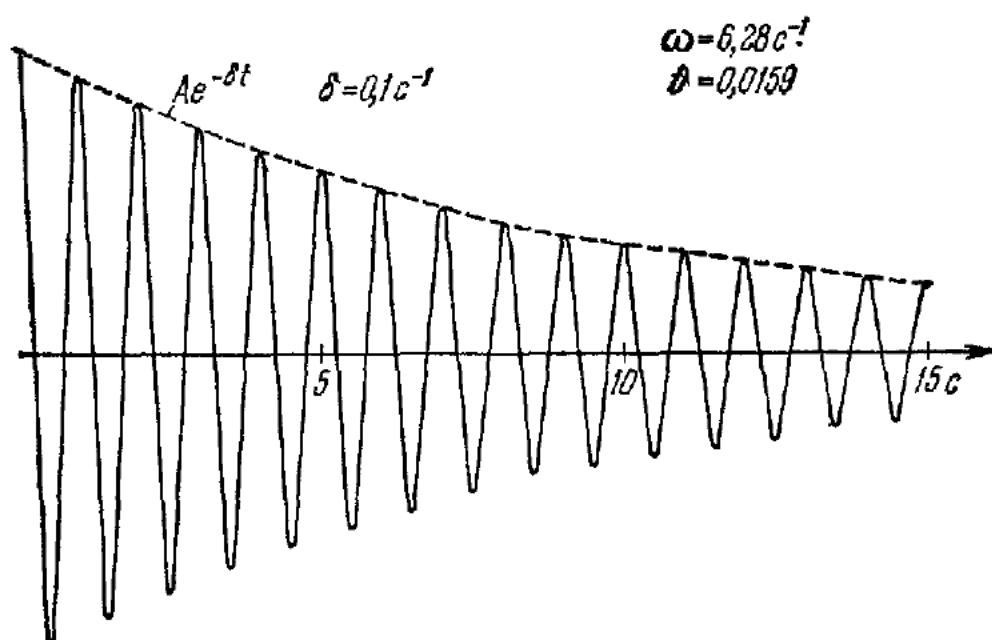


Рис. 353.

для оценки длительности таких процессов условно ввели величину  $\tau = \frac{1}{\delta}$ , имеющую размерность времени и называемую *временем релаксации*. За время релаксации  $\tau$  отклонение от положения равновесия в системе уменьшается в  $e \approx 2,73$  раза. Время релаксации условно называют «длительностью» такого процесса.

Сам по себе коэффициент затухания  $\delta$  (так же как и время релаксации) не характеризует колебательную систему. В зависимости от периода за одно и то же время  $\tau$  разные системы совершают разное число колебаний. Поэтому для оценки затухания системы в зависимости от числа колебаний пользуются не коэффициентом затухания, а *декрементом* (или логарифмическим декрементом) — безразмерной величиной, равной

$$\Phi = \frac{T}{\tau} = \delta T.$$

Здесь  $T$  — условный период затухающего колебания.

Величина, обратная декременту:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\tau}{T} = N,$$

показывает, сколько колебаний совершил система, прежде чем раз-

макс колебаний уменьшится в  $e$  раз, или, как условно принято считать, прежде чем процесс затухнет и система придет к положению равновесия. Допустим, декремент равен  $1/10$ , значит, через 10 колебаний размах их уменьшится почти в три раза.

Экспериментально декремент  $\Phi$  определяют следующим образом.

Если в некоторый момент отклонение было  $x_1$ , то через время  $T_1$ , равное условному периоду, отклонение будет иметь величину

$$x_2 = x_1 e^{-\delta T_1}.$$

Действительно,

$$x_1 = A e^{-\delta t_1} \cos(\omega_1 t_1 + \varphi),$$

$$x_2 = A e^{-\delta t_1 - \delta T_1} \cos(\omega_1 t_1 + \varphi + 2\pi) = x_1 e^{-\delta T_1},$$

так как

$$\omega_1(t_1 + T_1) = \omega_1 t_1 + \omega_1 T_1 = \omega_1 t_1 + 2\pi.$$

Поскольку  $\Phi = \delta T_1$ , отношение отклонений равно

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\Phi},$$

или

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \Phi. \quad (126.5)$$

По этой причине величина  $\Phi$  и называется *логарифмическим декрементом*. Заметим, что каждое последующее отклонение в одну сторону происходит через время  $T_1$ , поэтому *декремент равен натуральному логарифму отношения величин двух последовательных крайних отклонений в одну сторону*.

Пусть  $x_N$  будет отклонение, которое имеет место через время  $N T_1$ , т. е. через  $N$  колебаний после отклонения  $x_1$ . Рассуждая, как и выше, получим

$$\frac{x_N}{x_1} = e^{-N\Phi}$$

и

$$\ln \frac{x_1}{x_N} = N\Phi, \text{ или } \Phi = \frac{1}{N} \ln \frac{x_1}{x_N}. \quad (126.6)$$

Экспериментальная кривая записи колебаний маятника, состоящего из шарика, подвешенного на нити, показана на рис. 353. Можно вычислить на основании этой записи декремент затухания маятника; он равен 0,0159. Декремент затухания маятника той же длины с шариком того же диаметра, но с массой, в четыре раза

меньшей, имеет величину 0,0635; кривая записи его колебаний показана на рис. 354. Величины коэффициентов затухания указаны на рис. 353 и 354.

По записи затухающих колебаний можно убедиться в справедливости наших предположений, сделанных при выводе формулы (126.2). Проще всего это сделать так: на графике записи колебаний вдоль оси ординат отложить отрезки, пропорциональные логарифмам величин размахов колебаний для каждого периода, и провести через концы этих отрезков линию. Например, для колебаний, показанных на рис. 354, построена такая логарифмическая

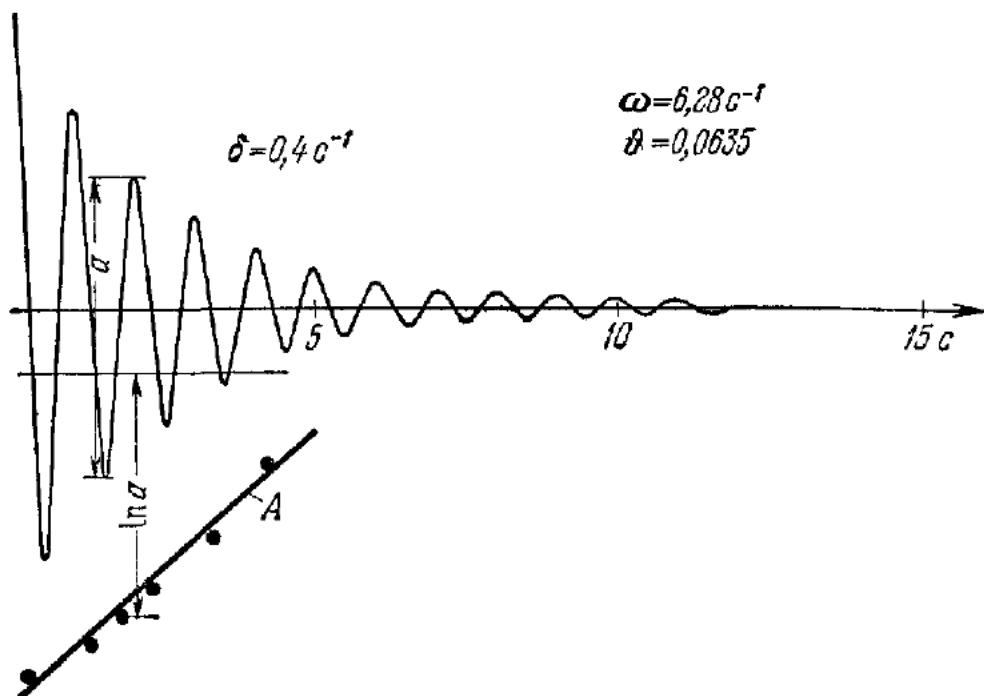


Рис. 354.

линия — прямая  $A$ , проведенная через точки концов отрезков, отложенных вниз от некоторого начала.

Если все точки линии  $A$  лежат на одной прямой, то в данном случае справедливы теоретические предположения, на основании которых был получен закон затухающих колебаний (126.2). Масса колеблющегося тела остается постоянной, пропорциональность возвращающей силы смещению из положения равновесия легко проверить опытом; обычно остается неясным только вопрос о силах трения. Поэтому, если точки на линии  $A$  не лежат на одной прямой, то это значит, что сила трения при колебаниях не пропорциональна скорости, а подчиняется иному, более сложному закону. Если точки лежат на прямой  $A$ , то по углу ее наклона к оси абсцисс можно определить декремент.

Если при колебаниях происходит скольжение одного тела по несмазанной поверхности другого, то существенное влияние на характер колебаний оказывает сила сухого трения. Сила сухого трения примерно постоянна по величине и направлена против скорости. Кривая записи колебаний в том случае, когда сила сухого

трения преобладает над силой вязкого трения, пропорциональной скорости, показана на рис. 355. На этом рисунке заштрихована

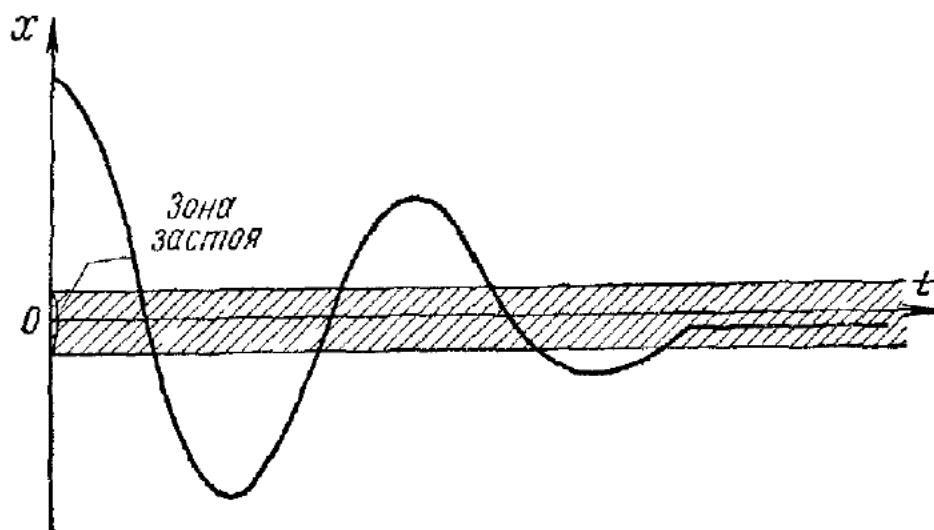


Рис 355.

«зона застоя»; при смещении тела в области застоя восстанавливающая сила пружины меньше силы трения, и если отклонить гело в зоне застоя, то никаких колебаний не возникнет — тело покойится в смещенном положении.

## § 127. Вынужденные колебания и резонанс

В отличие от собственных, вынужденные колебания происходят под действием внешней периодической силы. Например, если к стальной пластинке, зажатой в тиски (рис. 35б), поднесем электромагнит, обмотка которого питается переменным током  $J$  определенной частоты, то непосредственным наблюдением (по звуку или

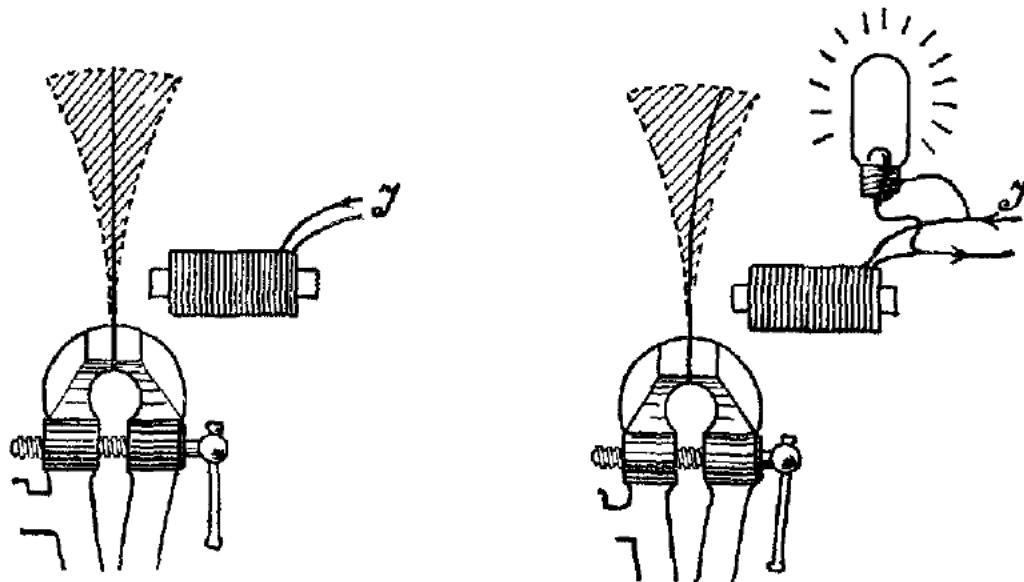


Рис. 356.

Рис. 357.

по колебаниям на экране луча света, отраженного от зеркальца, прикрепленного к пластинке) мы установим наличие колебаний пластиинки. Эти колебания будут вынужденными колебаниями.

*Вынужденные колебания происходят всегда с той частотой, с которой изменяется внешняя сила.* Если мы изменим частоту тока, питающего электромагнит, то изменится и частота колебаний пластиинки. Легко убедиться с помощью стробоскопа, что частота колебаний тока равна частоте колебаний пластиинки.

Для устройства стробоскопа нужно взять неоновую (или другую газоразрядную) лампу, сила света которой колеблется вместе с колебаниями питающего ее электрического тока  $J$ , и в свете этой неоновой лампочки рассматривать колебания пластиинки (рис. 357). Так как пластиинка будет освещаться только один раз в период и каждый раз в одном и том же положении, то вследствие инерции зрительного восприятия мы будем видеть пластиинку как бы покоящейся, а не колеблющейся. Если же колебания пластиинки и тока не были бы синхронны, т. е. происходили бы с различными

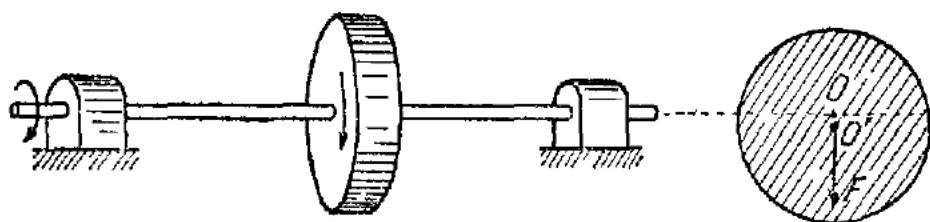


Рис. 358.

частотами, мы увидели бы размазанную картину колеблющейся пластиинки, примерно такую же, как при обычном освещении

Вынужденные колебания часто встречаются там, где имеют место вращающиеся или периодически движущиеся части машин. Например, маховик, вращающийся равномерно (рис. 358), всегда вызывает вынужденные колебания вала и подшипников, в которых вращается вал. Действительно, всегда имеется небольшая несбалансированность, т. е. центр тяжести маховика  $O'$  лежит не точно на оси, проходящей через центры подшипников. Поэтому при вращении возникает центробежная сила<sup>1)</sup>  $F = m\varpi^2$ , проекция которой, например, на горизонталь дает гармоническую силу, действующую на вал с частотой, равной частоте оборотов (здесь  $\rho$  — расстояние  $OO'$  между центром тяжести маховика и осью подшипников,  $m$  — масса маховика,  $\varpi$  — угловая скорость вращения).

Дрожание фундамента и прилегающих к нему сооружений при работе электромотора — это вынужденные колебания, вызываемые несбалансированностью ротора мотора. Тряска, вызванная работой двигателя внутреннего сгорания, парового двигателя, — это тоже вынужденные колебания. Возвратно-поступательное периодическое движение, например движение поршня в двигателе вну-

<sup>1)</sup> Здесь центробежной силой мы называем приложенную к валу силу, противодействующую центростремительной (по третьему закону динамики).

ренного сгорания, всегда является источником периодической силы, вызывающей колебания.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит не только (и не столько) от величины действующей силы, но и от ее частоты. Амплитуда вынужденных колебаний очень резко возрастает, если частота внешней силы близка к частоте собственных колебаний.

Будем ступенями изменять частоту внешней силы, оставляя амплитуду колебаний этой силы неизменной, и каждый раз отмечать амплитуду вынужденных колебаний. Результаты таких измерений изобразим графически: по оси абсцисс отложим отношение частоты внешнего воздействия  $\rho$  к частоте собственных колебаний  $\omega$ , а по оси ординат — безразмерную величину, пропорциональную амплитуде  $B$  вынужденных колебаний (см. § 128). Этот график носит название *резонансной кривой*, примерный вид его показан на рис. 359.

Явление резкого нарастания амплитуды колебаний в тех случаях, когда частота внешней силы приближается к собственной частоте, называется *резонансом*. Поставим электромоторчик на доску, закрепленную одним концом в стене (рис. 360), и будем постепенно увеличивать частоту оборотов моторчика с помощью

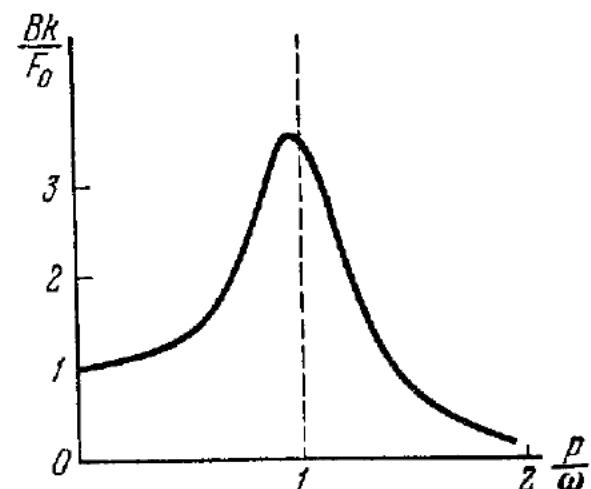


Рис. 359.

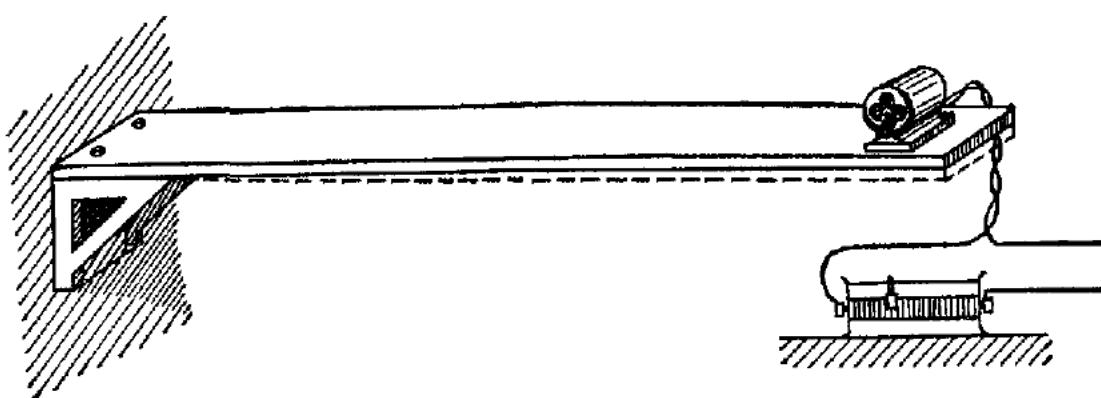


Рис. 360.

реостата. При малых оборотах мы замечаем очень небольшие колебания доски, замечаем их только на ощущение, слегка коснувшись пальцем доски. Затем при определенном числе оборотов амплитуда вертикальных колебаний доски резко увеличивается и хорошо заметна на глаз. Увеличивая обороты моторчика далее, мы наблюдаем уменьшение амплитуды колебаний, колебания совсем не видны, только слабая дрожь ощущается пальцем. Число оборотов, при котором наблюдается резонанс, мы отметим. Затем остановим

моторчик и ударим по нему сверху вниз, после удара возникнут собственные колебания доски с моторчиком, частота которых близка к резонансной частоте.

Следует отметить, что в описываемом случае амплитуда внешней силы не остается постоянной, а растет пропорционально квадрату числа оборотов, так как источником внешней силы является центробежная сила, величина которой растет пропорционально квадрату числа оборотов. Несмотря на это, амплитуда колебаний доски резко падает при повышении частоты оборотов выше собственной, или резонансной, частоты.

### § 128. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты

Какова же причина возрастания амплитуды при резонансе?

При резонансе система совершает как бы собственные колебания, а внешняя сила только подталкивает колеблющееся тело. Восстанавливающая сила при резонансе, так же как и при собственных колебаниях, сообщает нужное ускорение массе, а внешняя сила уравновешивает только силу трения. Вдали от резонанса внешняя сила уравновешивает не только силу трения, поэтому колебания слабее. Например, если частота колебаний внешней силы очень мала по сравнению с собственной частотой, то внешняя сила практически уравновешивается силой упругости пружины, т. е. внешняя сила растягивает и сжимает пружину в такт со своими изменениями. Но всю картину гораздо яснее можно представить себе после теоретического анализа колебаний под воздействием внешней гармонической силы.

Допустим, что на грузик маятника в горизонтальном направлении действует внешняя гармоническая сила  $F = F_0 \cos pt$ , где  $F_0$  — амплитуда силы, а  $p$  — ее круговая частота. Тогда к возвращающей силе  $-mg\frac{x}{l}$  (см. (124.6)) и к силе трения  $-h\dot{x}$  (см. (126.1)) прибавится еще сила  $F$  и уравнение движения грузика маятника при небольших углах отклонения примет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - h\dot{x} + F_0 \cos pt^1. \quad (128.1)$$

Если, как и раньше, обозначить коэффициент затухания  $\frac{h}{2m}$  через  $\delta$  и собственную частоту  $\sqrt{\frac{g}{l}}$  через  $\omega$ , то уравнение движения

<sup>1)</sup> Заметим, что такое же уравнение справедливо и для вынужденных колебаний грузика на пружинке, собственные колебания которого описываются уравнением (126.1), только вместо возвращающей силы  $-\frac{mg}{l}x$  в уравнении для грузика будет стоять возвращающая сила пружины  $-kx$ .

примет такой вид:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt. \quad (128.2)$$

Опыт показывает, что колебания маятника происходят с частотой  $p$ . Допустим, что колебания смещения имеют амплитуду  $B$  и начальную фазу  $\varphi$ . Колебания  $x$  можно записать так:

$$x = B \cos(pt + \varphi). \quad (128.3)$$

Требуется определить величину амплитуды вынужденных колебаний  $B$  и начальную фазу их  $\varphi$ . Подставим (128.3) в (128.2), предварительно продифференцировав (128.3); тогда получим

$$B \{(\omega^2 - p^2) \cos(pt + \varphi) - 2p\delta \sin(pt + \varphi)\} = \frac{F_0}{m} \cos pt.$$

Преобразуем это выражение по известным тригонометрическим формулам:

$$\left\{ B [(\omega^2 - p^2) \cos \varphi - 2p\delta \sin \varphi] - \frac{F_0}{m} \right\} \cos pt + \\ + B [-(\omega^2 - p^2) \sin \varphi - 2p\delta \cos \varphi] \sin pt = 0. \quad (128.4)$$

Это выражение представляет собой сумму двух гармонических членов:

$$a \cos pt + b \sin pt = 0, \quad (128.5)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные во времени величины. Очевидно, что последнее равенство может удовлетворяться при любом  $t$  в том и только в том случае, когда обе величины  $a$  и  $b$  равны нулю. Поэтому из (128.4) следует:

$$B [(\omega^2 - p^2) \cos \varphi - 2p\delta \sin \varphi] = \frac{F_0}{m}, \quad (128.6)$$

$$(\omega^2 - p^2) \sin \varphi + 2p\delta \cos \varphi = 0.$$

Из этих двух уравнений можно определить величины  $B$  и  $\varphi$ . Величину фазы  $\varphi$  получаем сразу из второго уравнения:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2p\delta}{\omega^2 - p^2}. \quad (128.7)$$

Поделим первое уравнение (128.6) на  $B$  и умножим на  $\sin \varphi$ , а второе уравнение умножим на  $\cos \varphi$  и, вычитая одно из другого, получим

$$\frac{F_0}{mB} \sin \varphi = -2p\delta. \quad (128.8)$$

Подставим  $\sin \varphi = -\frac{2\delta p m B}{F_0}$  во второе уравнение (128.6) и тогда получим

$$\cos \varphi = \frac{mB}{F_0} (\omega^2 - p^2). \quad (128.9)$$

Возведем в квадрат равенства (128.8) и (128.9) и сложим их:

$$\frac{m^2 B^2}{F_0^2} (\omega^2 - p^2)^2 + \frac{4\delta^2 p^2 m^2 B^2}{F_0^2} = 1. \quad (128.10)$$

Преобразуя последнее равенство, находим окончательное выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}. \quad (128.11)$$

Эта формула показывает, что амплитуда вынужденных колебаний всегда пропорциональна амплитуде действующей силы  $F_0$ , кроме того, имеется сложная зависимость от частоты. Если величина затухания мала ( $\delta$  мало по сравнению с  $\omega$ ), то радикал в знаменателе (128.11) будет иметь минимум где-то вблизи значения  $p = \omega$ , и поэтому при частотах  $p$ , близких к  $\omega$ , амплитуда колебаний  $B$  будет иметь наибольшее значение.

Если на грузик действует постоянная сила  $F_0$ , то он сместится от положения равновесия на величину  $B_{\text{ср}}$ . Смещение  $B_{\text{ср}}$  найдется из равенства

$$\frac{mg}{l} \cdot B_{\text{ср}} = F_0,$$

или

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Gamma_0 l}{mg}. \quad (128.12)$$

То же самое получим при  $p = 0$  из формулы (128.11), если вспомним, что собственная частота маятника  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . При  $p \rightarrow \infty$ , т. е. при очень большой частоте, амплитуда колебаний стремится к нулю.

Рассмотрим подробнее, как изменяется с частотой  $p$  соотношение между различными силами при вынужденных колебаниях; это позволит нам выяснить причины изменения амплитуды колебаний при изменении частоты.

Уравнение (128.1) выражает, что произведение «масса  $\times$  ускорение» равно сумме трех сил: возвращающей силы, силы трения и внешней силы. При вынужденных колебаниях все три силы совершают гармонические колебания с частотой  $p$ .

Перепишем основное соотношение между силами (128.4) так:

$$\underline{mB(\omega^2 - p^2) \cos(pt + \varphi)} - \underline{2\delta p m B \sin(pt + \varphi)} = \underline{F_0 \cos pt}. \quad (128.13)$$

«консервативная сила»      сила трения      внешняя сила

Возвращающую силу  $\left(\frac{mg}{l}B \cos(pt + \varphi)\right)$ , которую можно записать в виде  $m\omega^2 B \cos(pt + \varphi)$ , ибо  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ) плюс произведение массы тела на ускорение ( $m\ddot{x} = -mr^2 B \cos(pt + \varphi)$ ) мы назовем «консервативной силой». Легко проверить, что работа этой силы за период равна нулю. Второй член представляет собой силу трения. Таким образом, уравнение (128.13) показывает, что внешняя сила  $F$  уравновешена силой трения и консервативной силой.

При очень малых частотах ( $r \rightarrow 0$ ) сила трения и произведение массы на ускорение очень малы, поэтому внешняя сила  $F_0 \cos pt$  уравновешивается только возвращающей силой  $mB\omega^2 \cos(pt + \varphi)$ , следовательно,  $\varphi = 0$ . При малых частотах внешняя сила находится в фазе со смещением и система колебается почти так, как если бы была только одна возвращающая сила, а массы и силы трения не было бы.

При очень больших частотах ( $r \rightarrow \infty$ ) будет преобладать над остальными второй член консервативной силы  $-mBr^2 \cos(pt + \varphi)$ . Произведение массы на ускорение будет значительно больше возвращающей силы и силы трения. Только внешняя сила практически определяет ускорение, и поэтому приближенно можно написать

$$-mBr^2 \cos(pt + \varphi) \approx F_0 \cos pt. \quad (128.14)$$

Отсюда  $\varphi \approx 180^\circ$ , а  $B \approx \frac{F_0}{mr^2}$ . Тот же результат получается из (128.11) при  $r \gg \omega$  и  $r \gg \delta$ . При большой частоте колебаний смещение и сила находятся в противофазе и колебания происходят почти так, как если бы внешняя сила  $F_0 \cos pt$  была приложена к свободной массе  $m$ . При больших частотах колебаний главную роль играет масса, при малых — возвращающая сила.

Какова же картина при средних частотах внешней силы? Очевидно, что при  $r = \omega$  консервативная сила, т. е. первый член (128.13), всегда равна нулю, а внешняя сила уравновешивается только силой трения:

$$-hrB \sin(pt + \varphi) = F_0 \cos pt. \quad (128.15)$$

Это равенство (для любого  $t$ ) справедливо только при  $\varphi = -90^\circ$ , или  $x = B \cos(pt - 90^\circ)$ . Колебания смещения при  $r = \omega$ , при резонансе, всегда отстают от колебаний силы на  $90^\circ$ . При резонансе главную роль играет сила трения. Поэтому, если бы мы, не зная этого, пренебрели силой трения и положили бы  $h = 0$ , то пришли бы к такому выводу: амплитуда колебаний  $B$  при  $r = \omega$  должна быть равна бесконечности, чего физически не может быть. (Это следует как из формулы (128.11), так и из равенства (128.13) при  $h = \delta = 0$  и  $r = \omega$ .) Но при достаточно малом трении ампли-

туда колебаний при резонансе будет велика. По (128.13) при  $p = \omega$

$$B_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\omega} = \frac{F_0}{h\omega}. \quad (128.16)$$

Поэтому при небольшом значении  $h$  резонансная амплитуда колебаний может быть очень велика. Резонансные колебания большой амплитуды могут быть очень опасными для колеблющихся частей машины или сооружения и иногда могут привести даже к их разрушению.

Известны факты, когда дорогостоящие машины разрушались от резонансных колебаний, поэтому инженеры так рассчитывают собственные частоты различных элементов машины, чтобы избежать резонанса. Также, например, вследствие возможности резонанса запрещено войсковым соединениям переходить через мосты строем в ногу: были случаи, когда частота шага совпадала с собственной частотой моста и он разрушался.

Работа внешней силы за период вынужденных колебаний всегда равна работе сил трения за то же время; работа остальных сил равна нулю. Работа внешней силы при установившихся вынужденных колебаниях идет на образование тепла.

Амплитуда колебаний при низких частотах по (128.12) приблизительно равна

$$B \approx B_{\text{ст}} = \frac{F_0 l}{mg} = \frac{F_0}{k_0}, \quad (128.17)$$

она определяется амплитудой внешней силы  $F_0$  и коэффициентом восстанавливающей силы  $k_0 = \frac{mg}{l}$  и не зависит от силы трения.

При вынужденных колебаниях грузика на пружине жесткость пружины  $k = k_0^{-1}$ <sup>1)</sup> не зависит от массы  $m$ , а следовательно, и амплитуда  $B$  при низких частотах не зависит от  $m$ .

При высоких частотах амплитуда колебаний, согласно (128.14), примерно равна

$$B \approx \frac{F_0}{mp^2}, \quad (128.18)$$

т. е. обратно пропорциональна  $p^2$ ; амплитуда колебаний зависит от частоты колебаний и массы и почти не зависит от восстанавливающей силы и силы трения.

При резонансе, как было уже сказано (см. (128.16)), амплитуда зависит от коэффициента силы трения  $h$  и собственной частоты  $\omega$ , она обратно пропорциональна  $h\omega$ .

Еще раз следует упомянуть, что амплитуда колебаний всегда пропорциональна амплитуде действующей силы.

<sup>1)</sup> См. примечание к уравнению (128.1).

Из формулы (128.7) видно, что сдвиг по фазе изменяется с частотой примерно так, как показано на рис. 361. Для низких частот колебания смещения происходят в фазе с силой, при резонансе колебания смещения отстают по фазе от силы на  $90^\circ$ , при очень высоких частотах колебания смещения и сила находятся в противофазе. Все это согласуется с тем, что следует из анализа роли отдельных сил при колебаниях. Заметим, что все рассуждения относительно низких частот справедливы, когда  $p \ll \omega$ , т. е. когда частота колебаний много меньше собственной; то же справедливо для

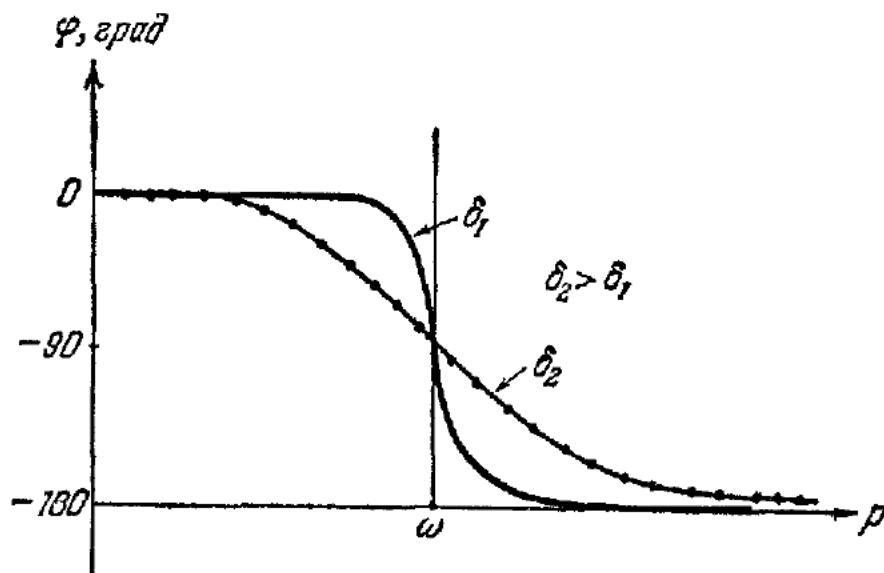


Рис. 361.

высоких частот — когда  $r > \omega$ ; иными словами, все резонансные закономерности определяются отношением  $r$  к  $\omega$ .

С уменьшением силы трения или коэффициента затухания  $\delta$  резонансный пик (см. рис. 359) становится значительно острей, амплитуда резко возрастает вблизи резонанса; изменение фазы колебаний при малом затухании также происходит очень резко около резонансной частоты (см. рис. 361).

Все законы вынужденных колебаний рассмотрены нами на примере колебаний маятника. Очевидно, что они будут справедливы для любой системы, уравнения движения в которой можно привести к виду (128.2). Колебания грузика на пружине, ареометра, погруженного в жидкость, тела, подвешенного на пружине (совершающего крутильные колебания аналогично маятнику карманных часов), и т. п. представляют примеры таких вынужденных колебаний, если на эти системы действует гармоническая сила.

## § 129. Колебания вала с диском

Во многих машинах (например, паровая турбина, маховик, вентилятор и т. д.) на валу вращается диск; простая модель вращающегося на валу диска показана на рис. 362. На спице, поставленной вертикально, наложен диск небольшого радиуса; диск всегда имеет некоторую разбалансировку, т. е. центр масс его не лежит на оси вала. В наших опытах ради наглядности разбаланси-

ровка увеличена небольшим грузиком  $m'$ . Если мы ударим по спице перпендикулярно к ней, то возникнут собственные колебания, частота которых  $\omega$  зависит от жесткости при прогибе спицы и от массы диска  $M$ . Пусть при смещении диска в сторону на величину  $x$  возникает возвращающая упругая сила  $kx$ , тогда частота собственных колебаний диска из-за прогиба спицы будет

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (129.1)$$

Собственные колебания происходят в любом направлении с одинаковой частотой. Если мы оттянем диск и толкнем его в сторону, то диск будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega$  в двух направлениях и центр диска будет двигаться по эллипсу (рис. 363). Плоскость  $(x, y)$  перпендикулярна к спице, и в состоянии покоя центр

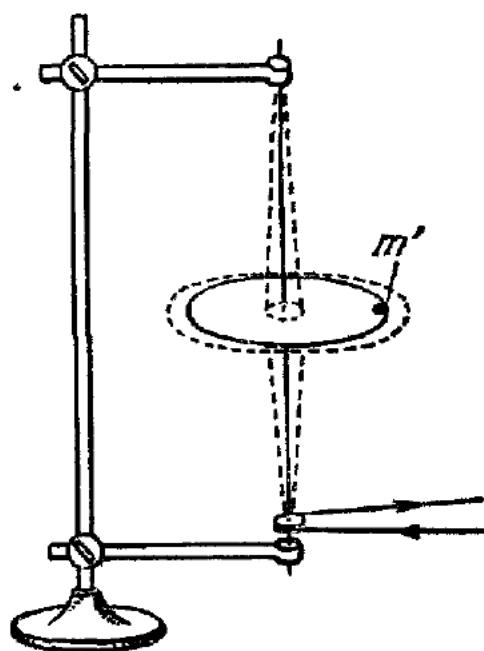


Рис. 362.

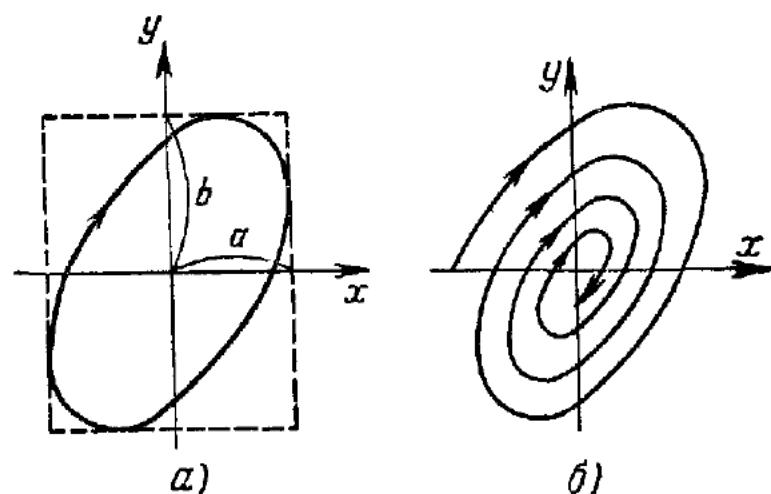


Рис. 363.

диска и ось спицы совпадают с началом координат. При колебаниях этот центр совершает гармоническое колебание вдоль оси  $x$ :

$$x = a \cos \omega t, \quad (129.2)$$

и вдоль оси  $y$  колебание с той же частотой

$$y = b \cos (\omega t + \varphi). \quad (129.3)$$

Исключаем  $\omega t$  и получаем

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (129.4)$$

— уравнение эллипса. Два гармонических колебания с одной частотой в двух взаимно перпендикулярных направлениях представляют собой движение по эллипсу, который расположен внутри прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  (рис. 363, а). Форма эллипса зависит от сдвига фаз между колебаниями, от  $\varphi$ . При  $\varphi = 90^\circ$  и  $\varphi = 270^\circ$  главные оси эллипса совпадают с осями координат; при  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$  эллипс вырождается в прямую, идущую по диагонали прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Если  $a = b$  и  $\varphi = 90^\circ$ , эллипс превращается в круг.

В действительности движение не будет таким, как представлено формулами (129.2) и (129.3), так как всегда имеет место затухание, и движение центра диска будет происходить по спирали, которая близка к эллипсу (рис. 363, б) или в частном случае к кругу.

Заметим кстати, что такого же вида будет траектория грузика, подвешенного на нити (рис. 364), если его отвести в сторону и толкнуть в перпендикуляр-

ном к его плоскости направлению; это — конический маятник, и нить его будет находиться на поверхности конуса. Колебания конического маятника представляют совокупность двух гармонических колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях с одной и той же частотой.

Теперь вернемся к вынужденным колебаниям вращающегося диска на спице. Допустим на минуту, что колебаний нет, а диск массы  $M$  вращается с угловой скоростью  $p$ ; тогда центробежная сила (см. сноску на стр. 438)

$$F_{\text{ц}} = MR_0 p^2, \quad (129.5)$$

где  $R_0$  — расстояние от центра тяжести до оси вращения, будет действовать на ось диска и все время вращаться с угловой скоростью  $p$ . Пусть в начальный момент  $t = 0$  центр тяжести находился на оси  $y$ ; тогда вдоль оси  $x$  будет действовать сила

$$F_{\text{ц}} \sin pt,$$

вдоль оси  $y$

$$F_{\text{ц}} \cos pt.$$

Под действием каждой из этих сил одновременно возникнут два колебания диска: вдоль оси  $x$  и вдоль оси  $y$ . Так как амплитуды этих сил одинаковы и свойства спицы одинаковы во взаимно перпендикулярных направлениях, то вынужденные колебания будут происходить по двум взаимно перпендикулярным направлениям с одинаковой амплитудой, т. е. под действием центробежной силы спица будет «ходить» по кругу с частотой оборотов. При очень малом числе оборотов колебания спицы будут таковы, что смещение центра тяжести диска будет больше смещения оси (или геометрического центра диска) и движение оси будет происходить по кругу так, как показано на рис. 365, а. Спика изгибается и отклоняется от оси вращения на величину  $R$ , но центр тяжести диска лежит

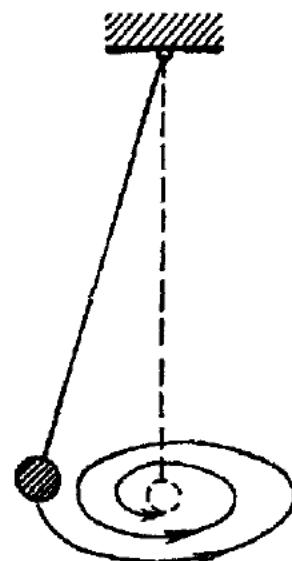


Рис. 364.

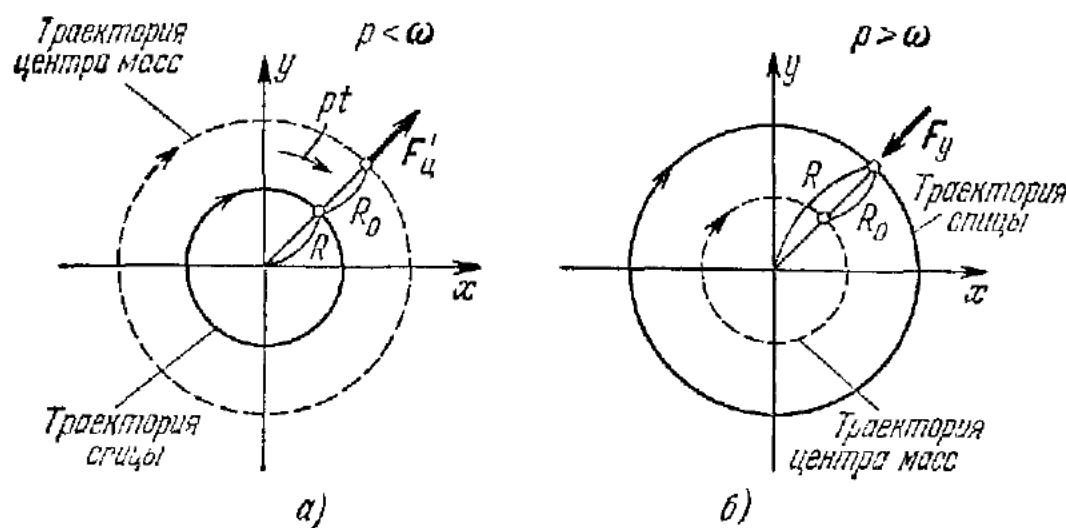


Рис. 365.

далее от начала координат примерно на том же радиусе. Центр диска будет отклоняться от оси вращения вследствие прогиба спицы, поэтому центробежные силы будут зависеть от этого прогиба, или от амплитуды колебаний спицы. При очень низкой частоте, когда скорость вращения  $p \ll \omega$ , спица будет изгибаться до тех пор, пока центробежная сила не уравновесится действием упругой силы изогнутой спицы.

При очень большой скорости вращения вала, когда  $p \gg \omega$ , движение спицы будет происходить по кругу, как показано на рис. 365, б, но теперь смещение

спицы всегда будет больше смещения центра диска. Расстояние между центром тяжести и геометрическим центром диска  $R_0$  обычно очень мало; поэтому амплитуда колебаний спицы будет мала; с увеличением частоты оборотов центр масс будет все ближе к началу и амплитуда колебаний спицы будет приближаться к  $R_0$ . При большой скорости вращения будут очень малые колебания спицы, что легко наблюдать при быстром вращении прибора, показанного на рис. 362. Наблюдая за диском посредством синхронного стробоскопического освещения, легко убедиться в справедливости наших заключений. Сделав  $R_0$  побольше, увеличив  $m$ , мы ясно увидим, что спица «ходит» вокруг центра тяжести диска.

Ради наглядности опытов можно сделать еще так. Снять диск со спицы и прикрепить к ней сбоку грузик (рис. 366, а). При низкой скорости вращения, до резонанса, грузик будет оттягивать спицу, изгибать ее (рис. 366, б).

При большой скорости вращения спица изгибаются так, что грузик находится ближе к оси вращения (рис. 366, в). Чем больше скорость вращения, тем ближе грузик будет находиться к оси вращения, оси, проходящей через центры подшипников.

При резонансе, когда угловая скорость вращения  $p$  будет близка к собственной частоте  $\omega$ , начнутся большие резонансные колебания спицы, которые, если их не ограничить, очень быстро достигнут такой амплитуды, что спица сломается. Если же довольно быстро увеличивать число оборотов и не останавливаться в резонансной

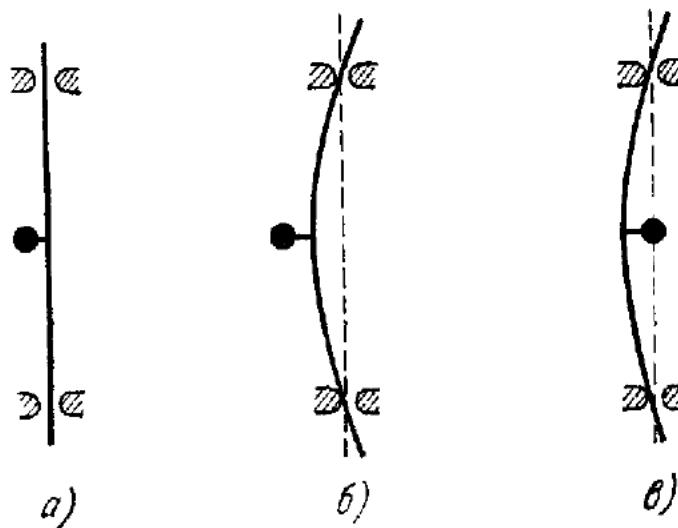


Рис. 366.

области, спица немного вздрогнет и успокоится и будет совершать очень малые колебания при  $p \gg \omega$ , как мы уже сказали.

Амплитуду колебаний диска нетрудно подсчитать, полагая, что вращение происходит до или после резонанса.

Представим себе движение диска в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $p$ . Диск будет покояться в этой системе, и равновесие его определяется тем, что центробежная сила уравновесится упругой силой деформации спицы.

При малой скорости вращения, когда  $p < \omega$ , центробежная сила

$$F_{\text{ц}}' = Mp^2 (R + R_0)$$

(обозначения см. на рис. 365), а возвращающая сила деформации

$$F_y = kR.$$

Равенство этих сил дает выражение для амплитуды колебания спицы в таком виде:

$$R = \frac{R_0}{\frac{k}{Mp^2} - 1} = \frac{R_0}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1},$$

где по (129.1)  $\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega$  есть собственная частота колебаний диска на спице.

При большой скорости вращения, при  $p > \omega$  (в соответствии с обозначениями рис. 365), центробежная сила

$$F_{\text{ц}}'' = Mp^2 (R - R_0),$$

а упругая сила представляется в том же виде, что и при  $p < \omega$ .

Из равенства сил получаем

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{k}{Mp^2}} = \frac{R_0}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}.$$

При резонансе ( $p = \omega$ ) имеем бесконечную амплитуду; если в расчете учесть силу трения, то получается конечная амплитуда.

Описанные здесь колебания диска на спице представляли решение довольно сложной для своего времени технической задачи. В конце прошлого века началось строительство паровых турбин, которые схематически можно представить как диск, насаженный на вал. С увеличением мощности и скорости вращения начались катастрофические разрушения. Возникали такие большие колебания, которые разрушали машину. Тогда, естественно, стали делать валы жестче, прочнее, но это не дало результатов: колебания и разрушения происходили, только при более высоких оборотах вала. Совершенно очевидно, что так и должно было быть: увеличивая жесткость вала, увеличивали частоту  $\omega$ , и резонанс наступал при более высокой скорости вращения. Тогда было предложено правильное решение: сделать вал еще тоньше, менее жестким и работать при такой скорости вращения, когда  $p > \omega$ . Это сделать значительно проще и дешевле, поэтому и стали поступать именно так.

Скорость вращения вала, соответствующую собственной частоте, называют *критической*. Теперь каждая машина рассчитывается так, чтобы при ее работе вал никогда не имел критической скорости вращения, и в инструкции по эксплуатации рекомендуется при разгоне машины проходить как можно быстрее зоны критических скоростей вращения, где возможны опасные резонансные колебания.

## § 130. Переходные процессы и сложные колебания. Гармонический анализ

Нами подробно рассмотрены стационарные вынужденные колебания. При изменении амплитуды внешней силы или при изменении ее частоты в той системе, на которую действует внешняя сила, всегда возникают собственные затухающие колебания. Поэтому только через некоторое время после какого-либо изменения внешней гармонической силы колебания в системе, на которую действует эта сила, будут гармоническими; вначале собственные колебания, складываясь с вынужденными, дадут сложное движение, которое называется *переходным процессом*.

На рис. 367, б показана запись колебаний маятника при включении внешней гармонической силы (рис. 367, а), частота которой

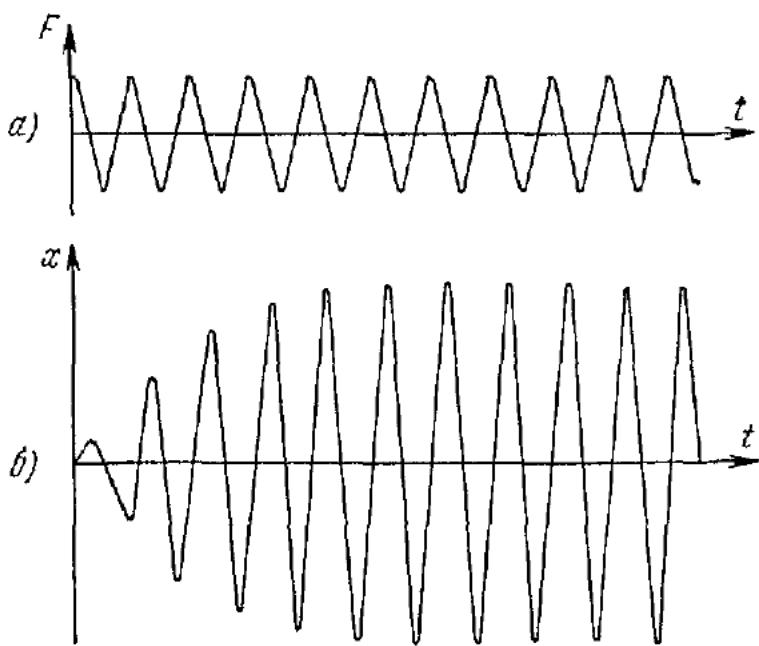


Рис. 367.

равна собственной частоте маятника. Только через некоторое время после включения силы маятник будет совершать стационарные гармонические вынужденные колебания, о которых все время шла речь в предыдущих параграфах. На рис. 367, б показана запись переходного процесса в этом случае.

В начальный момент возникают такие собственные колебания, которые уменьшают амплитуду вынужденных; когда собственные колебания затухнут, маятник будет совершать только вынужденные колебания. Переходный процесс будет продолжаться тем дольше, чем меньше затухание собственных колебаний.

Если на колебательную систему, допустим на маятник, действует не одна, а несколько гармонических сил различной частоты, то, как показывает опыт, каждая из этих сил вызывает вынужденные колебания со своей частотой.

Таким образом, результирующее колебание будет сложным и негармоническим, маятник будет совершать одновременно несколько колебаний с различными частотами, с частотами внешних гармонических сил, причем каждая сила вызовет такое вынужденное колебание, которое она вызвала бы в отсутствие остальных сил.

В математике доказывается, что любая периодическая функция периода  $T$  может быть представлена суммой гармонических

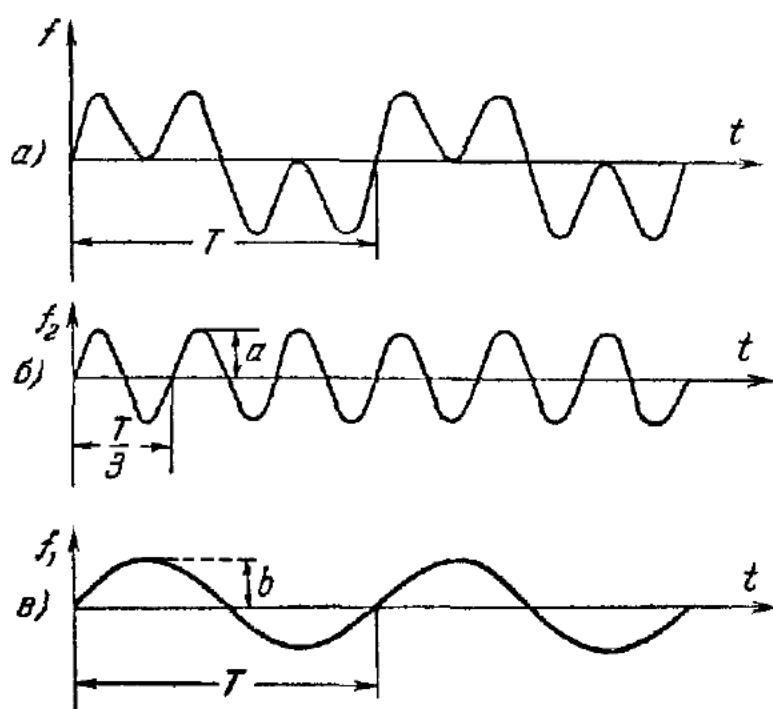


Рис. 368.

функций, периоды которых равны  $\frac{T}{n}$ , где  $n$ , вообще говоря, пробегает все значения ряда натуральных чисел,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Так, например, периодическая сила, показанная на рис. 368, а, может быть представлена суммой двух гармонических сил, которые показаны на рис. 368, б и в:

$$f = b \sin \frac{2\pi}{T} t + a \sin \frac{6\pi}{T} t. \quad (130.1)$$

Силы  $f_1 = b \sin \frac{2\pi}{T} t$  и  $f_2 = a \sin \frac{6\pi}{T} t$  называются гармониками силы  $f$ . Гармоника  $f_1$ , период которой совпадает с периодом силы  $f$ , называется основной. Под действием каждой из гармоник возникнут вынужденные гармонические колебания: под действи-

ем силы  $f_1$  — колебания с частотой  $p_1 = \frac{2\pi}{T}$ , под действием силы  $f_2$  — колебания с частотой  $p_2 = \frac{6\pi}{T}$ .

Если частота одной из гармоник совпадает с собственной частотой, допустим, частота гармоники  $p_2 = \omega$ , то колебания, вызываемые силой  $f_2$ , будут преобладать над колебаниями, вызываемыми основной гармоникой. Система, на которую действует сила  $f$ , в данном случае является резонатором — прибором, который выделяет из сложного колебания  $f$  колебания, соответствующие  $f_2$ , с частотой, примерно равной  $\omega$ .

Чем острей резонансная кривая, чем меньше затухание собственных колебаний резонатора, тем ближе будут к гармоническим резонансные колебания и тем лучше резонатор выделит колебания той частоты, которая близка к его собственной. Конечно, колебания, вызываемые остальными гармониками, всегда будут присутствовать, но при малом затухании они будут очень малы. Такое избирательное свойство резонатора широко используется в целом ряде технических устройств.

Если мы имеем совокупность резонаторов с различными собственными частотами, находящихся под действием сложных сил различной частоты, то по колебаниям этих резонаторов мы можем судить о составе сложной силы, действующей на резонатор, можем анализировать сложное воздействие и выделять из него колебания определенной частоты.

Например, на перекладине  $AA'$  висит целый ряд легких маятников различной длины (рис. 369). Легкой штангой  $CC'$  подставка  $AA'$  соединена с подставкой  $BB'$ , на которой висят два тяжелых маятника 1, 2. Качнем тяжелые маятники; колебания их вызовут колебания подставки, на которой они висят, а через штангу  $CC'$  — небольшие колебания подставки  $AA'$ , на которой подведен набор маятников. Через некоторое время все маятники придут в колебательное движение, будут совершать вынужденные колебания. Но больше всех будут колебаться маятники  $1'$  и  $2'$ , частоты которых близки к частотам маятников 1 и 2.

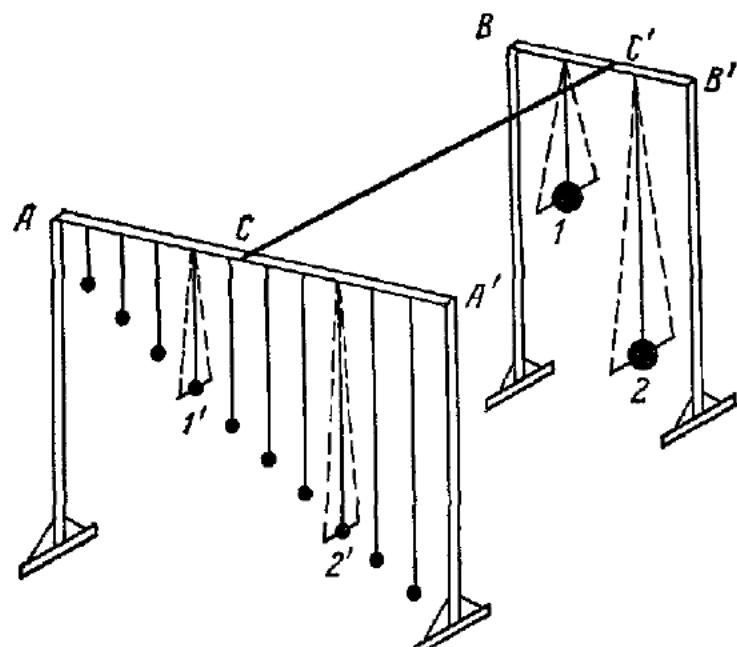


Рис. 369.

Воздействие со стороны штанги  $CC'$  раскачивает подставку с двумя частотами, которые равны собственным частотам колебаний тяжелых маятников, а вместе с подставкой будут раскачиваться подвешенные к ней маятники. Это воздействие примерно в одинаковой мере приложено ко всем маятникам, и все они колеблются с двумя частотами, но в маятнике  $2'$  преобладают колебания низкой частоты, а в маятнике  $1'$  — колебания более высокой частоты. Допустим, что мы не видели подставки  $BB'$ , тогда на основании колебаний маятников на подставке  $AA'$  могли бы сделать определенное заключение о частотах, с которыми происходят колебания



Рис. 370

штанги  $CC'$ . Система маятников (резонаторов) является здесь гармоническим анализатором сложного воздействия.

Эти свойства резонаторов могут быть использованы в технических приборах, предназначенных для измерений и анализа колебаний.

Язычковый частотометр для переменного тока (рис. 370) и язычковый тахометр — это приборы, построенные на принципе резонанса. Они предназначены: первый — для определения частоты

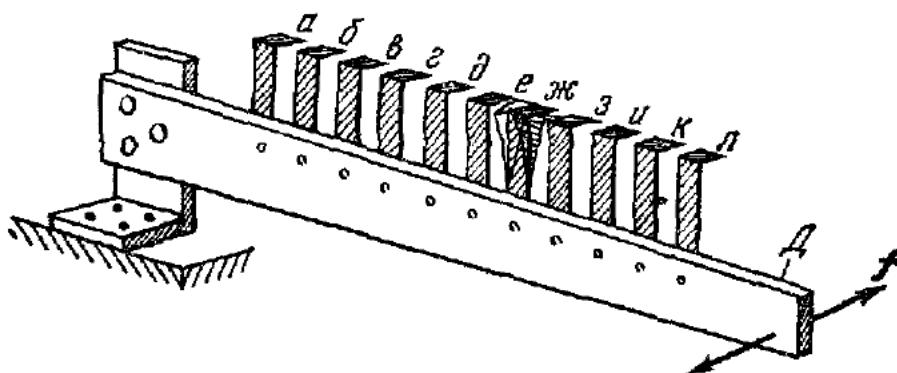


Рис. 371.

переменного тока, второй — частоты оборотов вала. Основным элементом этих приборов является набор резонаторов с различной собственной частотой, укрепленных на одном основании. Обычно на одной пластинке (рис. 371) укреплен ряд язычков ( $a$ ,  $б$ ,  $в$ , ...) различной длины, имеющих небольшую массу на конце. Размеры и материал язычков, а также массы на концах подбираются таким образом, чтобы собственные частоты каждой из них соответствовали определенным заданным частотам  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и т. д.

Колебание, частоту которого  $\omega_0$  желают измерить, вызывает колебания пластиинки  $D$ , на которой закреплены язычки; вследст-

вие этого тот язычок, собственная частота которого ближе всего к частоте колебаний  $\omega_0$ , будет совершать колебания с наибольшей амплитудой, которую легко определить по размытию вида головки язычка. В частотомере переменный ток посыпается в электромагнит, который вызывает колебания пластиинки  $D$ , а картина колебаний язычка видна на рис. 370; против каждого язычка показана его собственная частота в герцах. Следовательно, измеряемая частота переменного тока в данном случае равна 50 Гц (50 колебаний в секунду). В тахометре находящаяся внутри корпуса прибора пластиинка  $D$  связана со стержнем («щупом»); колебания этого стержня передаются пластиинке  $D$ . Приставляя щуп тахометра к машине, вал которой вращается с определенной скоростью, мы заставляем щуп и пластиинку  $D$  колебаться с частотой колебаний корпуса машины, которая почти всегда равна числу оборотов вала.

Довольно наглядно можно показать действие этого прибора, если присоединить пластиинку с язычками к оправе гироскопа. Если предварительно раскрученный гироскоп будет постепенно останавливаться, то можно наблюдать, как постепенно, один за другим, раскачиваются до большой амплитуды язычки. Таким же образом можно наблюдать, как падает со временем скорость вращения мотора.

Резонансные явления положены в основу устройства целого ряда приборов для измерения частоты колебаний. Например, на рис. 372 показана схема язычкового частотомера, основу которого

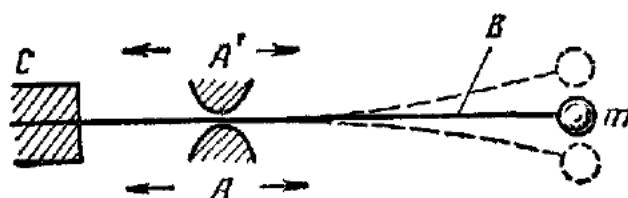


Рис. 372.

представляет один язычок — пластиинка  $B$  с массой  $m$  на конце, закрепленная другим концом в корпусе прибора  $C$ ; на некотором расстоянии от места крепления пластиинка зажата упорами  $A$  и  $A'$ . Прикоснувшись кориусом прибора к колеблющемуся телу, частоту которого собираются измерить, вызывают вынужденные колебания язычка. Затем начинают передвигать зажим  $AA'$  вдоль пластиинки, пока не найдут положение, при котором язычок будет иметь максимальную амплитуду колебаний. Собственная частота колебаний при данном положении упора  $AA'$  известна и показана на шкале язычкового частотомера. Следовательно, она и равна измеряемой частоте колебаний.

Если колебание сложное, состоит из гармонических колебаний различной частоты, то прибор обнаруживает все частоты, когда они не очень близки друг к другу.

Во всех приборах такого рода основным чувствительным элементом является «резонатор», собственную частоту которого можно легко изменить.

В акустике, оптике, радиотехнике и ряде других областей резонаторы вследствие их анализирующего действия играют огромную роль.

### § 131. Автоколебания

При определенных условиях мы наблюдаем постоянные периодические колебания в такой системе, которая не подвержена периодическому внешнему воздействию. Например, на струну дует ветер постоянной силы, который при неподвижной струне вызывает только постоянное отклонение ее в сторону. Но под действием такого постоянного ветра мы часто наблюдаем стационарные периодические колебания струны, частота которых почти равна ее собственной частоте.

По скрипичной струне ведут равномерно смычком, сила трения смычки о струну должна бы оттянуть струну, однако всем известно, что при этом возникают периодические колебания струны. Если бы в отсутствие ветра и смычки мы отклонили струну от положения равновесия и отпустили, то возникли бы собственные колебания, которые через некоторое время прекратились бы. Но при наличии ветра или движении смычки силы, действующие на колеблющуюся струну, изменяются таким образом, что поддерживают колебания; работа этих сил идет на компенсацию работы остальных сил трения, неизбежно возникающих при колебании струны. При колебаниях струны возникают такие условия, при которых появляется определенная периодическая сила, поддерживающая эти колебания; в отсутствие колебаний внешнее воздействие со стороны смычки осталось бы постоянным.

*Системы, в которых возникают периодические колебания в отсутствие заданного периодического внешнего воздействия, называются автоколебательными, а сам процесс — автоколебаниями.*

В качестве наиболее простого примера автоколебаний рассмотрим автоколебания маятника на врачающемся валу (рис. 373, а). Силы трения муфты маятника о врачающийся вал действуют на маятник и создают определенный момент  $M_{тр}$ <sup>1)</sup>. Рассмотрим работу, которую совершают этот момент при периодических колебаниях маятника. За одну половину периода работа момента сил трения  $M_{тр}$  равна энергии, отнятой у маятника, когда вал и маятник врачаются в противоположных направлениях (рис. 373, б); за вторую половину периода, наоборот, когда маятник и вал врачаются в одинаковом направлении, работа момента сил трения  $M_{тр}$  добав-

<sup>1)</sup> Предполагается, что скорость вращения вала всегда больше по абсолютной величине скорости вращения маятника при колебаниях.

ляет энергию маятнику (рис. 373, *в*). При некоторых условиях сила сухого трения почти не зависит от скорости скольжения; тогда работа сил трения, переданная маятником, будет равна нулю, и трение о такой подвесе не внесет затухания.

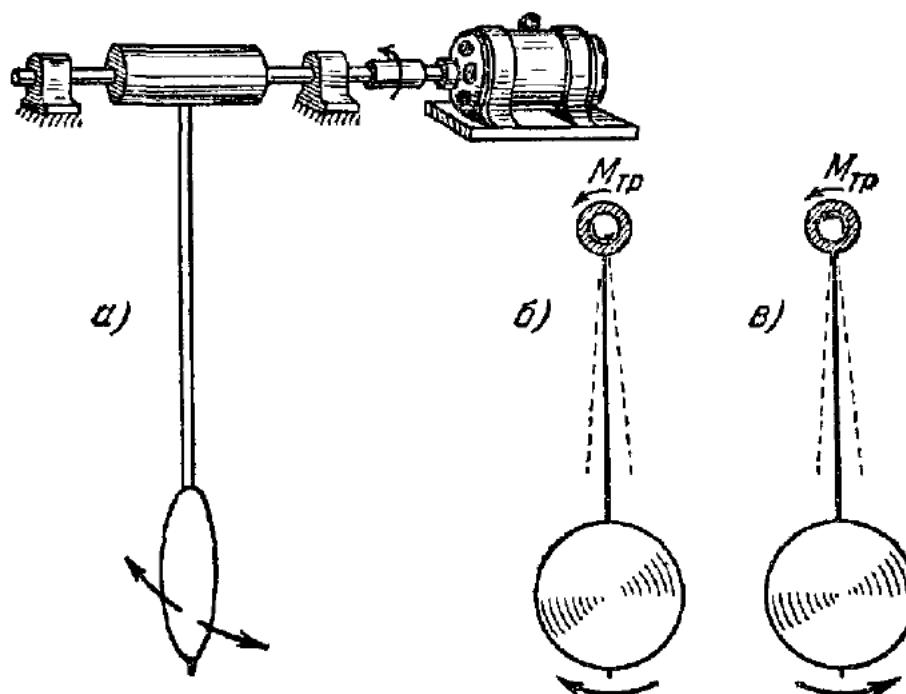


Рис. 373.

Если же сила трения вала о муфту маятника зависит от скорости скольжения, то картина изменится. Допустим, что сила трения растет со скоростью скольжения; тогда момент сил трения в состоянии, показанном на рис. 373, *б*, будет больше, чем в состоянии, показанном на рис. 373, *в*; следовательно, действие сил трения *отнимает* энергию у маятника за период и колебания маятника будут сильнее затухать. Энергия колебаний маятника расходуется в подвесе, и трение о вращающийся вал только увеличивает затухание колебаний.

Картина явления может принципиально измениться, если сила трения *падает* с увеличением скорости скольжения. При небольшой смазке в определенном диапазоне изменения скорости скольжения такие условия можно осуществить. Типичная кривая зависимости момента силы трения при неподвижном маятнике от скорости вращения вала показана на рис. 374.

Пусть скорости вращения вала соответствует абсцисса точки *A*; тогда энергия колебаний маятника за период будет возрастать, что легко доказать на основании рассуждений, аналогичных сделанным

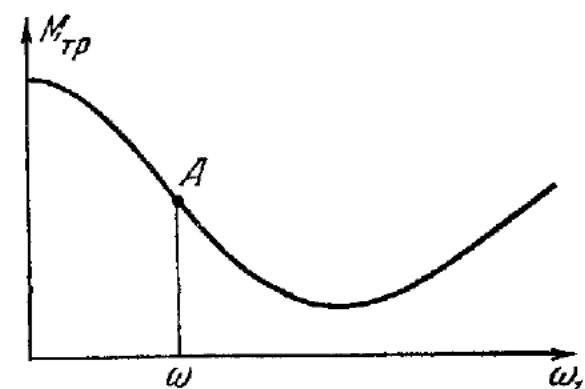


Рис. 374.

выше. Колеблющийся маятник будет получать от вала определенную порцию энергии за период, и если эта порция больше энергии, идущей на трение о воздух, то амплитуда колебаний маятника со временем будет *нарастать*.

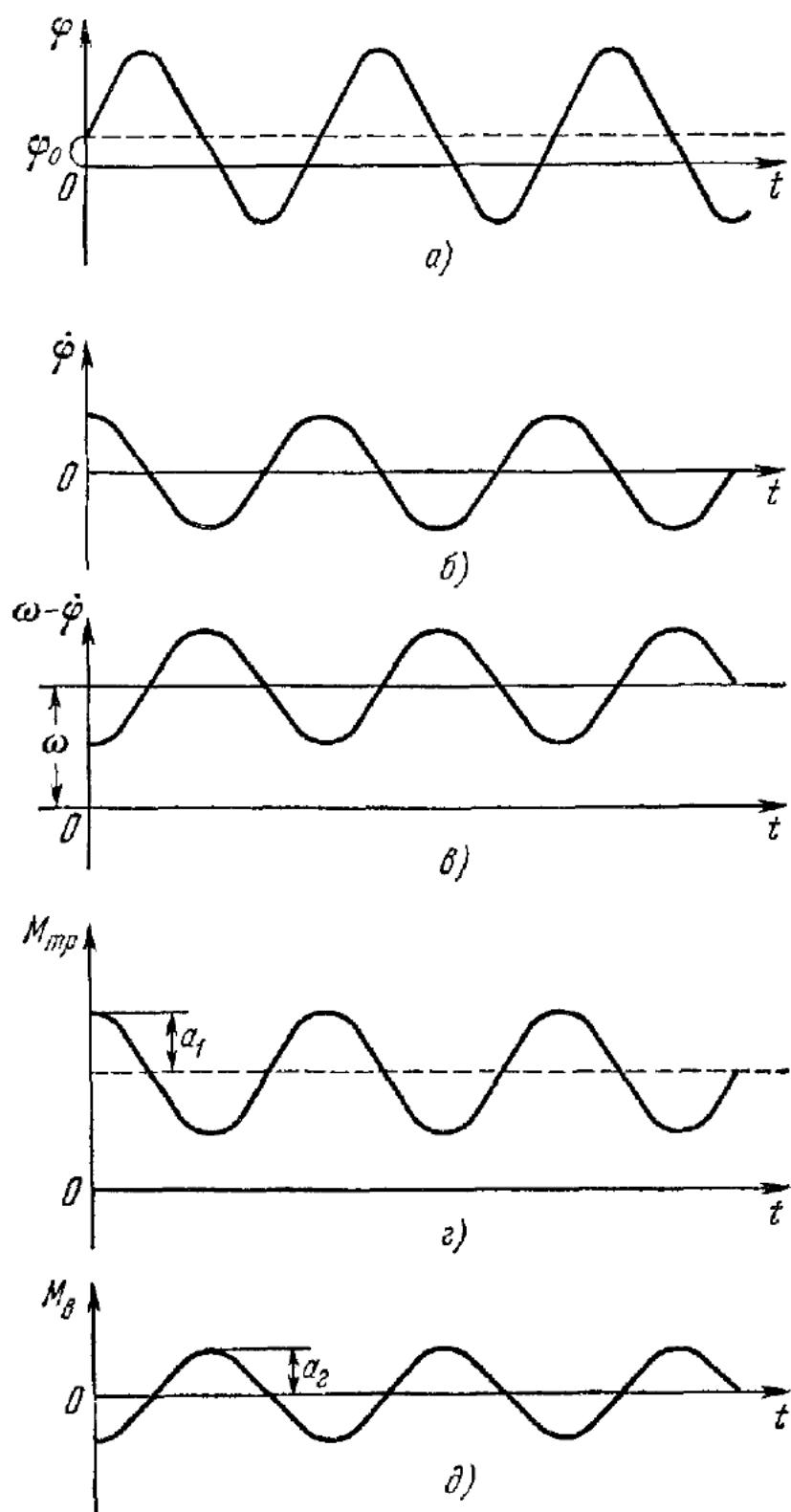


Рис. 375.

Картину колебаний можно представить себе, рассматривая графики, изображенные на рис. 375. График *а* показывает колебания угла отклонения маятника  $\varphi$  со временем; график *б* — изменение скорости вращения маятника  $\dot{\varphi}$ ; график *в* — колебания относительной скорости вращения (скорости скольжения)  $\omega_1 = \omega - \dot{\varphi}$ ; они

происходят около постоянной скорости вращения вала  $\omega$ ; график  $g$  показывает колебания момента сил трения вала о муфту  $M_{tr}$ , если сила трения падает с увеличением скорости скольжения, и график  $d$  — изменение момента сил трения о воздух  $M_v$ ; этот момент находится всегда в противофазе с колебаниями  $\phi$ . Очевидно, что если амплитуда  $a_1$  больше амплитуды  $a_2$ , то колебания нарастают.

С ростом амплитуды колебаний маятника амплитуда момента силы трения о вал  $a_1$  возрастает медленнее амплитуды момента силы трения о воздух  $a_2$ , и при некотором значении амплитуды колебаний маятника они сравняются; тогда маятник будет совершать стационарные колебания — *автоколебания*.

Вращающийся вал мотора сообщает маятнику энергию, необходимую на покрытие потерь энергии на тепло при стационарных автоколебаниях. Энергия передается от мотора к маятнику силой трения скольжения. Из всех рассуждений очевидно, что частота автоколебаний определяется собственной частотой колебаний маятника. Опыт показывает, что частота автоколебаний и в других случаях близка к собственной частоте резонатора, который входит в состав колебательной системы.

Автоколебательные системы, совершающие почти гармонические колебания, всегда состоят из *резонатора* (маятника), совершающего колебания, и связанного с ним источника энергии (мотора); при колебаниях резонатора последний воздействует на источник энергии так, что сила, действующая на резонатор, становится периодической и поддерживает колебания в резонаторе. Всегда имеется *обратная связь* между источником энергии и резонатором, которая обеспечивает колебания силы, создаваемой источником энергии. В нашем примере колебания скорости скольжения обеспечили обратную связь, которая осуществляется через колебания сил трения о вал, поддерживающие колебания маятника. Для возникновения автоколебаний необходим некоторый (хотя и очень маленький) толчок, ибо весь описанный процесс начнется тогда, когда маятник отклонится от положения равновесия и начнет колебаться.

Колебания маятника на вращающемся валу представляют собой пример почти гармонических автоколебаний. Но автоколебания могут и не быть гармоническими; например, скрип отворяемой двери появляется вследствие автоколебаний, связанных с силой сухого трения в петлях дверей, и т. п. Типичным примером негармонических автоколебаний такого вида являются автоколебания *перемежающихся* источников, известных еще в древности.

Схема устройства такого источника показана на рис. 376. В стенку сосуда вделана сифонная трубка. Еслипустить в сосуд из крана  $A$  постоянную струю воды, то можно так орегулировать скорость ее течения, что возникнут периодические колебания уровня воды в сосуде. Допустим, что вначале не было воды в сосуде. Пустим из крана струю, и уровень воды постепенно начнет повышаться; как только уровень воды достигнет отметки  $B$  (см. рис. 376), вода начнет переливаться из трубки сифона, течение воды увлечет с собой воздух, наход-

дящийся в трубке, и вода заполнит всю достаточно широкую трубку сифона; затем вода будет вытесняться из сосуда через сифон, причем значительно быстрей, чем она пополняется струей из крана, и уровень воды будет опускаться, пока не достигнет отметки  $C$  у нижнего края сифонной трубки. Теперь воздух войдет с короткого конца в сифонную трубку, вода выльется из сифона, и действие его прекратится. Далее описанный процесс будет повторяться сколь угодно долго:

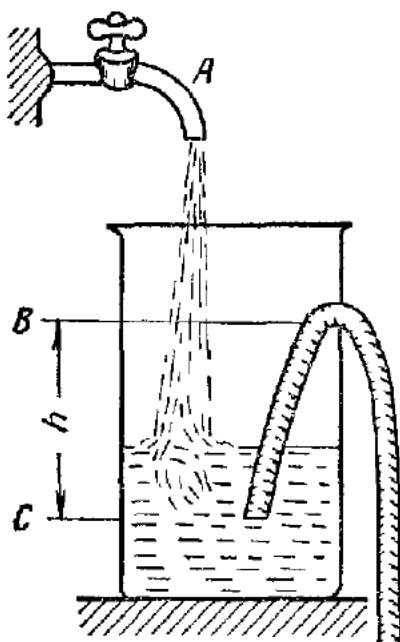


Рис. 376.

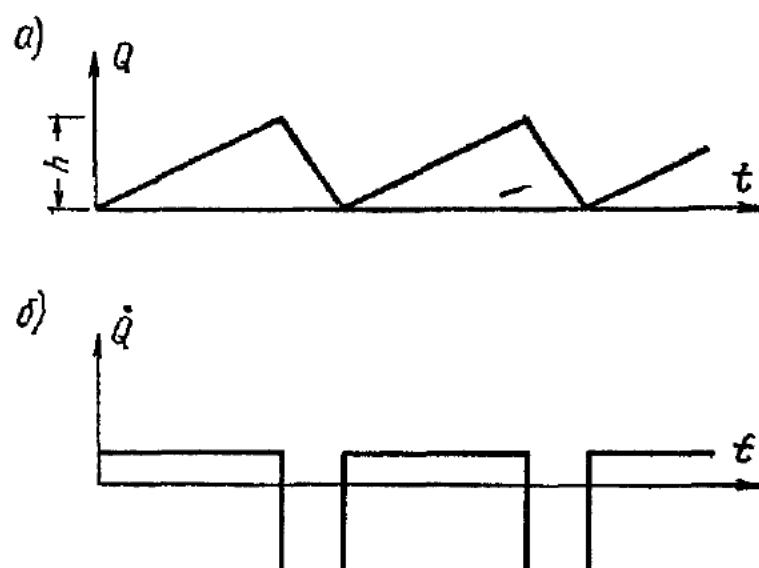


Рис. 377.

вода будет периодически подниматься и опускаться в сосуде примерно так, как показано на рис. 377,  $a$ , сифон будет периодически опорожнять сосуд от отметки  $B$  до отметки  $C$ . Скорость изменения уровня воды показана на рис. 377,  $b$ .

По графикам видно, что колебания здесь уже совсем не гармонические. Особенно резко меняется скорость движения уровня в моменты, когда «включается» и «выключается» сифон. Но колебания здесь чисто периодические и они поддерживаются равномерным потоком воды из крана. Процесс можно описать так, при некотором уровне подъема воды сосуд становится «дырявым» и

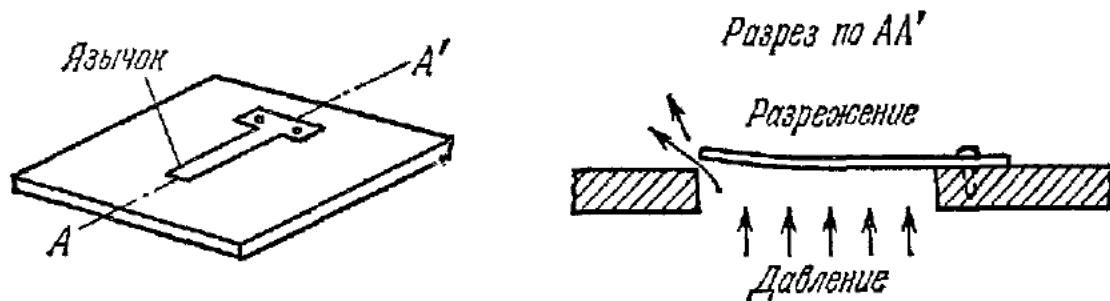


Рис. 378.

вода начинает уходить из него, пока при определенном понижении уровня «отверстие» не закроется. «Отверстие» закрывается и открывается водой, наполняющей сосуд, — в этом и заключается «обратная связь». Колебания уровня воды как бы изменяют свойства сосуда.

Такого же типа автоколебания возникают при скольжении тела на пружине по сухой поверхности. Автоколебания уровня воды в сосуде или груза на пружине являются *негармоническими* колебаниями и называются *разрывными автоколебаниями*, ибо графики движения или скорости движения представляются кривыми, которые по своему виду близки к разрывным функциям,

Укажем еще на несколько примеров автоколебаний, вызываемых струей воздуха или воды, так как такие явления встречаются довольно часто в обычной жизни.

Звук, возникающий в гармонии и в других язычковых музыкальных инструментах, является следствием автоколебаний язычка (к тапана) — очень тонкой пластиинки, находящейся в вырывающейся из щели струе воздуха (рис. 378).

Колебания воздуха в органных трубах, в свистках и других аналогичных устройствах возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых непрерывной струей воздуха, разрезающейся острием (рис. 379). Резонатором здесь является воздух, находящийся в трубе.

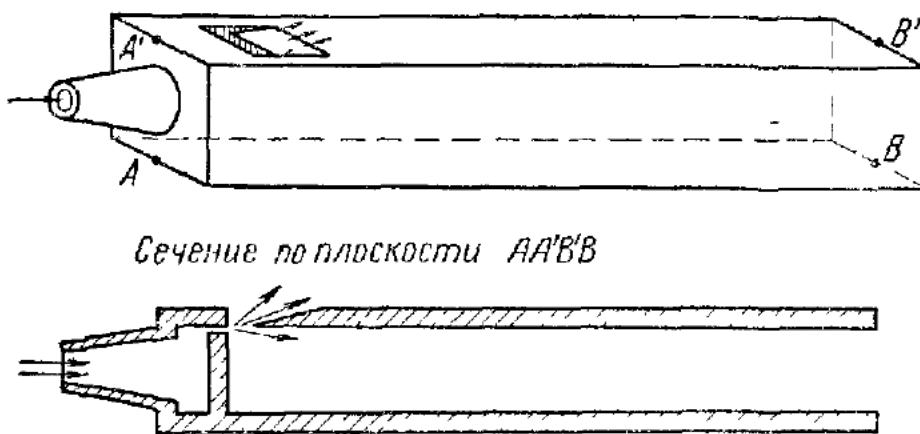


Рис. 379.

Резкий звук колебаний водопроводной трубы, который можно услышать при определенной величине открытия крана плохо закрепленной трубы, также есть следствие автоколебаний, вызываемых струей воды, протекающей через щель крана.

Колебания маятника часов, стенных и карманных, — типичные примеры автоколебаний.

## § 132. Собственные колебания системы со многими степенями свободы

В предыдущих параграфах мы рассматривали колебания одного тела: или грузика, подвешенного на нити, или тела, прикрепленного к пружине, или тела, погруженного в жидкость, и т. д. Если колебания совершала жидкость, находящаяся в сообщающихся сосудах, то гармонические колебания одной частицы *однозначно* определяли колебания всех частиц жидкости. Такие движения имеют *одну степень свободы*; достаточно знать изменение только одной величины, чтобы полностью знать весь процесс движения.

Но предположим, что мы вызываем вертикальные колебания двух грузов, подвешенных на пружинках один под другим (рис. 380). Здесь нижняя пружинка будет во время колебаний деформироваться и смещение верхней массы  $x_1$  уже не равно смещению нижней  $x_2$ . Во время колебаний будут изменяться одновременно две величины:  $x_1$  и  $x_2$ . Возбудим, например, колебания только нижнего груза,

сообщим ему резким толчком некоторую скорость; немедленно возникнут колебания и верхней массы, пружинка между ними, растягиваясь и сжимаясь, приведет в колебательное движение и верхний грузик. Поэтому при анализе колебаний мы обязаны учитывать одновременное движение обоих грузиков, — подобная колебательная система имеет две *степени свободы*.

Точно так же и два маятника, связанные легкой пружинкой  $a$  (рис. 381) и могущие совершать колебания только в вертикальной плоскости, проходящей через точки их подвеса, являются системой с двумя степенями свободы. Колебания одного маятника закономерно связаны с колебаниями другого.

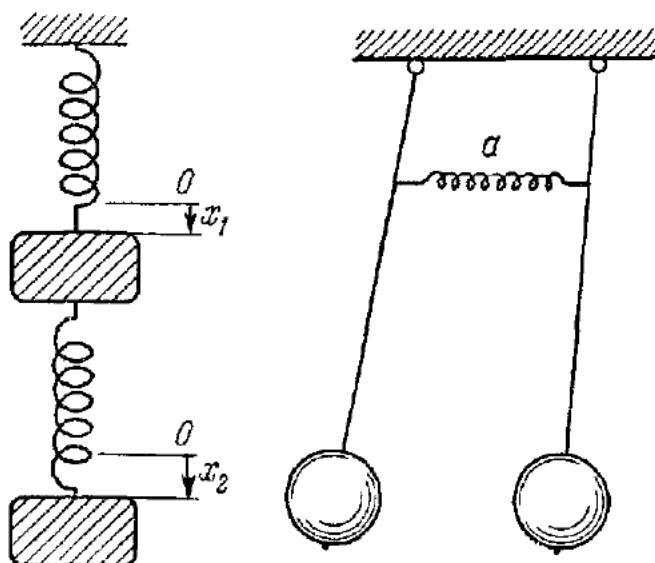


Рис. 380.

Рис. 381.

Можно наблюдать колебания трех, четырех и т. д. маятников, связанных пружинками; каждую совокупность трех, четырех и т. д. маятников следует рассматривать как единую систему с тремя, четырьмя и т. д. степенями свободы, потому что одновременно будут колебаться три, четыре и т. д. маятника.

Если в такой системе отклоним как-то один или несколько маятников и будем наблюдать колебания, то увидим довольно

сложную картину колебаний каждого из маятников. Прежде всего, наблюдая колебания за некоторое сравнительно небольшое время, когда еще не сказалось действие сил трения, мы увидим, что колебания каждого из маятников *негармоничны*.

Рассмотрим подробнее колебания в одной из простейших систем, а именно колебания двух одинаковых маятников, связанных пружинкой (см. рис. 381). Отклоним один из них, а второй задержим на месте. Затем одновременно отпустим оба маятника и запишем на один лист колебания обоих маятников. Картина колебаний можно представить себе по графику, показанному на рис. 382.

Вначале первый маятник качается примерно так же, как если бы второй мы удерживали рукой, и пружинка между ними заметно сжимается и разжимается; сила пружинки будет действовать на второй маятник, и он постепенно начнет раскачиваться. Так как энергия, сообщенная первому маятнику, будет передаваться отчасти второму, то амплитуда колебаний первого маятника будет постепенно убывать, в то время как амплитуда второго маятника — нарастать.

Все это будет продолжаться какое-то время  $\tau/2$ , до тех пор, пока первый маятник не остановится, а второй (если потери на трение

малы) не будет качаться почти с такой же амплитудой, как и первый в самом начале. Затем маятники меняются ролями: второй раскачивает первый, и процесс полностью повторяется, ибо маятники одинаковы. Маятники будут совершать то нарастающие, то убывающие колебания и через время  $\tau$  будут обмениваться энергией. Такие колебания называются *биениями*, а время  $\tau$  — *периодом биений*. Механическая энергия будет все время почти полностью

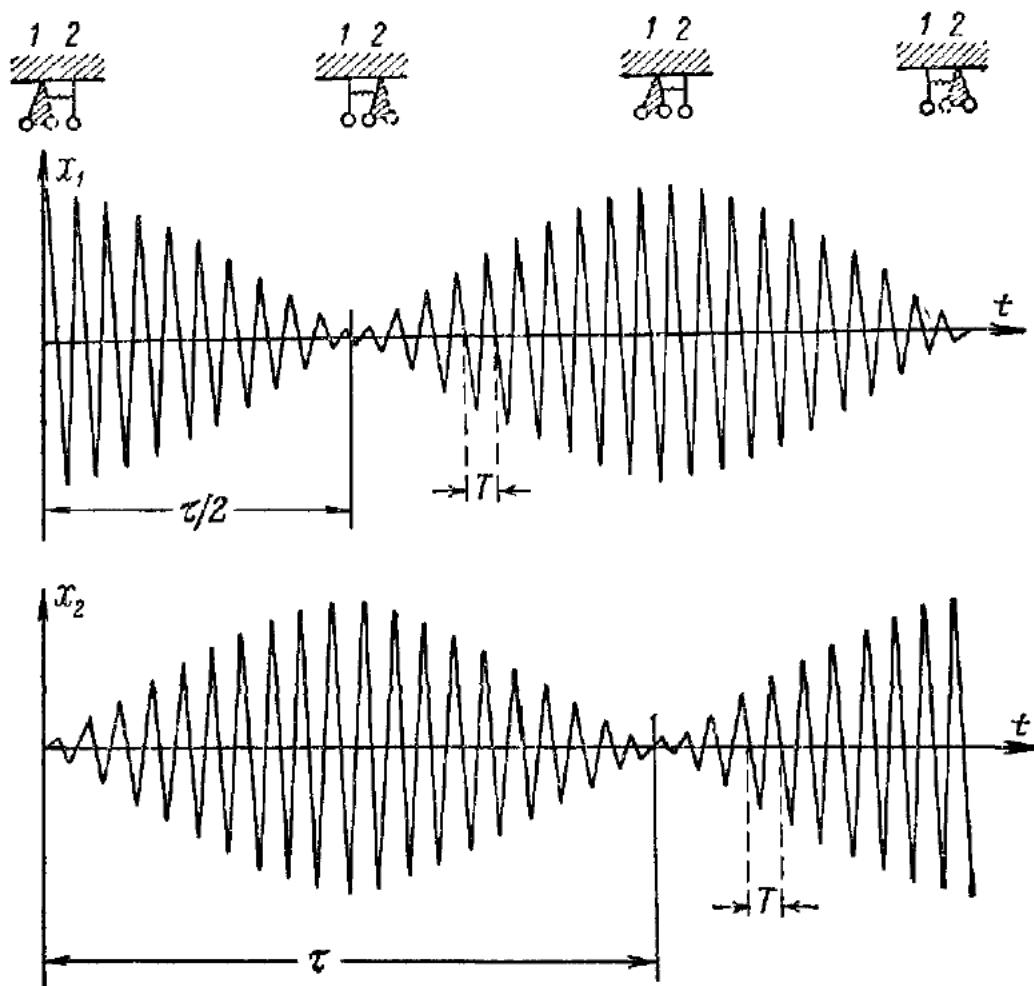


Рис. 382.

переходить от одного маятника к другому, пока она не превратится в тепловую и маятники не остановятся.

Теперь как-то отклоним оба маятника и, отпустив их, снова запишем процесс колебаний. В этом случае амплитуда колебаний одного маятника также не будет оставаться постоянной: она будет то возрастать, то убывать; соответственная картина будет наблюдаться и со вторым маятником; как и прежде, если амплитуда первого маятника нарастает, то второго — обязательно убывает. Но теперь амплитуда колебаний одного маятника не убывает до нуля, а только изменяется от некоторого максимума до некоторого минимума, примерно так, как схематически показано на рис. 383. Время же «перекачки» энергии, т. е. время, за которое амплитуда колебаний изменяется от своего максимума до своего минимума, равно  $\tau/2$  — той же самой величине. Как бы ни возбуждали маятники, всегда период биений будет одним и тем же; в зависимости

от способа возбуждения изменяется только разница между максимумом и минимумом амплитуды колебаний маятников.

Колебания каждого из маятников, вообще говоря, во всех случаях являются негармоническими. Каждый маятник совершает как бы гармоническое колебание, но амплитуда его периодически изменяется с одним и тем же периодом биений  $\tau$ . Величина, или глубина, изменений амплитуды при биениях зависит от способа возбуждения колебаний. Очевидно, можно попытаться найти такой

способ возбуждения, после которого биения очень слабы и колебания близки к гармоническим.

Из соображений, основанных на симметрии маятников, можно сразу указать два таких способа возбуждения, после которых колебания маятников будут чисто гармоническими: первый — оба маятника отклонить одинаково в одну сторону и отпустить, второй — оба маятника отклонить одинаково в разные стороны и

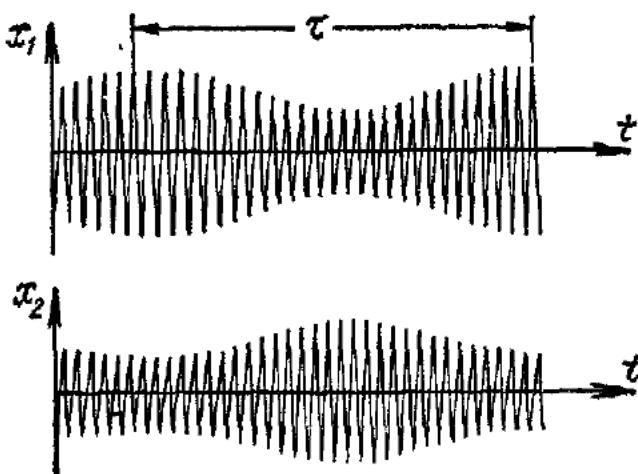


Рис. 383.

отпустить. После возбуждения первого рода оба маятника будут совершать колебания так, как если бы пружинки не было, она не изменяет своей длины во время колебаний. Если пружинка имеет ничтожный вес, то маятники колеблются с таким же периодом  $T_2$ , с которым совершал бы собственные колебания один маятник.

После возбуждения вторым способом маятники будут совершать колебания в противофазе, пружинка будет сжиматься и разжиматься, но середина ее останется в покое, и эту точку можно считать закрепленной. Оба маятника находятся в одинаковых условиях и совершают гармонические колебания с периодом  $T_1$ . Легко понять, что период  $T_1$  будет меньше  $T_2$ , так как во втором случае к восстанавливающей силе маятника присоединяется еще восстанавливающая сила пружинки.

Если же мы дадим немного разные начальные отклонения, то в том и другом маятнике возникнут небольшие биения.

### § 133. Теоретический анализ биений

Для того чтобы разобраться в картине биений, рассмотрим теоретически вопрос о сложении двух гармонических колебаний различной частоты. Предварительно заметим, что сложение двух колебаний одной и той же частоты всегда дает гармоническое колебание той же частоты.

В самом деле, пусть точка совершает колебание относительно какой-то системы отсчета  $A \sin(\omega t + \varphi_1)$  в некотором направлении, а сама система от-

счета совершают колебание  $B \sin(\omega t + \varphi_2)$  в том же направлении. Тогда колебания точки относительно неподвижной системы отсчета будут

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) + B \sin(\omega t + \varphi_2) = (A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2) \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi), \quad (133.1)$$

где

$$C = \sqrt{(A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2)^2 + (A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2}{A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2}.$$

Колебание, получившееся в результате сложения двух гармонических колебаний, имеющих одно направление, но различные частоты, представляет иную картину, оно не будет гармоническим. Пусть

$$x_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Тогда результирующее, суммарное, колебание

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + \\ &\quad + (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (133.2)$$

Первый член не является гармоническим колебанием, ибо представляет собой произведение двух гармонических сомножителей, один сомножитель имеет частоту  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ , другой — частоту  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ . Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не очень отличаются друг от друга, то частота  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  примерно одного порядка с  $\omega_1$  (или  $\omega_2$ ), но частота  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$  будет по сравнению с  $\omega_1$  (или  $\omega_2$ ) очень малой. Тогда первый член результирующего колебания (133.2) можно представить себе как почти гармоническое колебание с частотой  $\omega_1$  (или  $\omega_2$ ), у которого «амплитуда» равна  $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$ , или «амплитуда» медленно изменяется со временем. График таких колебаний будет точно совпадать с тем, что показано на рис. 382 для первого маятника, и их можно назвать «чистыми биениями», причем очевидно, что период биений равен

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (133.3)$$

Второй член результирующего колебания (133.2) представляет гармонические колебания с частотой  $\omega_2$ . Сложение «чистых биений» с гармоническими колебаниями даст картину биений, при которых «амплитуда» колебаний изменяется с периодом биений  $\tau$ , но никогда не достигает нуля; график таких колебаний показан на рис. 383. При сложении двух колебаний с одинаковой амплитудой  $A = B$  биения будут чистыми, а при  $A \neq B$  будут обычные биения, причем частота их  $v_b = \frac{1}{\tau}$  по (133.3) всегда равна

$$v_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\tau} = v_1 - v_2,$$

где  $v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ ,  $v_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$  — частоты гармонических колебаний, дающих при

сложении биений. Частота биений равна разности частот составляющих колебаний и не зависит от их амплитуд и начальных фаз.

Время между двумя последовательными прохождениями в одну сторону через нуль

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

(см. рис. 382) можно назвать *малым периодом* сложных колебаний.

Явление биений можно представить себе наглядно еще так. При сложении двух близких гармонических колебаний, совершающихся в одном направлении, они дадут максимальные отклонения в тот момент  $t_1$ , когда оба колебания находятся в фазе; далее с течением времени амплитуда результирующих колебаний уменьшается, и в момент  $t_2$ , когда слагающие будут в противофазе, колебания достигнут минимума; затем опять колебания будут нарастать, и в момент  $t_3$ , когда составляющие колебания снова окажутся в фазе, амплитуда результирующих колебаний опять станет максимальной, и т. д.

Период биений  $\tau$ , очевидно, равен

$$t_3 - t_1 = \tau. \quad (133.4)$$

Допустим, что разность фаз в момент  $t_1$  равнялась нулю, или

$$\omega_1 t_1 + \varphi_1 - \omega_2 t_1 - \varphi_2 = 0; \quad (133.5)$$

тогда в момент  $t_3$  она равна  $2\pi$ , или

$$\omega_1 t_3 + \varphi_1 - \omega_2 t_3 - \varphi_2 = 2\pi. \quad (133.6)$$

Вычитая почленно (133.5) из (133.6), получаем

$$(\omega_1 - \omega_2)(t_3 - t_1) = 2\pi;$$

отсюда, учитывая (133.4), находим, что период биений

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (133.7)$$

Сравнивая результаты теоретического анализа сложения двух гармонических колебаний различной частоты, приходим к заключению, что собственные колебания двух маятников состоят из суммы двух гармонических колебаний, причем *разность частот этих колебаний равна частоте биений*.

### § 134. Собственные частоты связанных маятников

Опыты показывают, а теоретические расчеты подтверждают, что при любом способе возбуждения собственные колебания связанных маятников представляют биения одного характера<sup>1)</sup>; это зна-

<sup>1)</sup> Период биений  $\tau$  и «малый период»  $T$  при любых начальных условиях имеют одну и ту же величину.

чит, что колебания каждого из них состоят из *суммы* двух гармонических колебаний с частотами

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{\tau}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{\tau}.$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  зависят от физических параметров маятников: длины их, массы грузов, от жесткости пружины и места ее прикрепления к маятнику, но не зависят от начальных условий, после которых возникают колебания. Поэтому частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  называются *собственными частотами* системы двух маятников. От способа возбуждения, от начальных условий зависит только, какую амплитуду и начальную фазу будет иметь то или иное гармоническое колебание первого или второго маятника.

От способа возбуждения зависит лишь «глубина» биений; если колебания одной частоты имеют очень маленькую амплитуду по сравнению с амплитудой другой частоты, то «глубина» биений также очень мала и, значит, такие колебания близки к гармоническим колебаниям с большей амплитудой.

Если выберем начальные условия так, что колебания каждого маятника происходят только с одной частотой (без биений), то частота этих колебаний есть одна из собственных частот,  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . Поэтому гармонические колебания после отклонения маятников в фазе (см. § 132) есть собственные колебания с меньшей частотой  $\omega_2$ ; собственные колебания с большей частотой  $\omega_1$  наблюдаются при отклонении обоих маятников в противофазе. Значит, собственные колебания с меньшей частотой суть *синфазные* гармонические колебания обоих маятников, а собственные колебания с большей частотой суть *антифазные* гармонические колебания обоих маятников.

Более подробные исследования показывают, что любые собственные колебания маятников, возникающие после любых начальных условий, состоят из *суммы* синфазных колебаний обоих маятников с частотой  $\omega_2$  и антифазных колебаний с частотой  $\omega_1$ .

Справедливость такого заключения подтверждают следующие рассуждения. Допустим, первый маятник имел какое-то начальное отклонение  $x_{10}$ , а второй  $x_{20}$ . Всегда можно подобрать такое отклонение обоих маятников в одну сторону на величину  $a$  и такое отклонение их в разные стороны на величину  $b$ , чтобы в результате получились заданные отклонения  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . В самом деле, величины  $a$  и  $b$  однозначно найдутся из уравнений

$$x_{10} = a - b, \quad x_{20} = a + b,$$

или

$$a = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}, \quad b = \frac{x_{20} - x_{10}}{2}.$$

Отклонения  $x_{10}$  и  $x_{20}$  считаются положительными при отклонениях маятников в одну сторону.

Отклонение маятников в одну сторону на величину  $a$  вызовет синфазные собственные колебания с частотой  $\omega_2$ , а отклонение их в разные стороны на величину  $b$  вызовет антифазные колебания с частотой  $\omega_1$ . Сложение этих движений и даст результирующее колебание; поэтому колебания, возникающие после

отклонения обоих маятников на  $x_{10}$  и  $x_{20}$ , будут состоять из синфазных колебаний частоты  $\omega_2$  с амплитудой  $a$  и из антифазных колебаний частоты  $\omega_1$  с амплитудой  $b$ . Такова в общем виде картина собственных колебаний двух одинаковых маятников.

Если маятники различны, то, также при любых начальных условиях, колебания каждого маятника состоят из суммы двух гармонических колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — собственными частотами данной системы маятников. Такие колебания, при которых оба маятника колеблются только с одной из собственных частот, можно также возбудить, подбирая начальные условия, но без теоретического расчета для маятников различной длины трудно заранее определить их.

### § 135. Собственные колебания трех связанных маятников

Собственные колебания трех связанных маятников, или *системы с тремя степенями свободы*, еще сложнее и также представляются суммой трех гармонических колебаний. Система из трех маятников обладает тремя собственными частотами.

Колебания с одной из собственных частот системы трех одинаковых связанных маятников можно легко наблюдать на опыте. Здесь

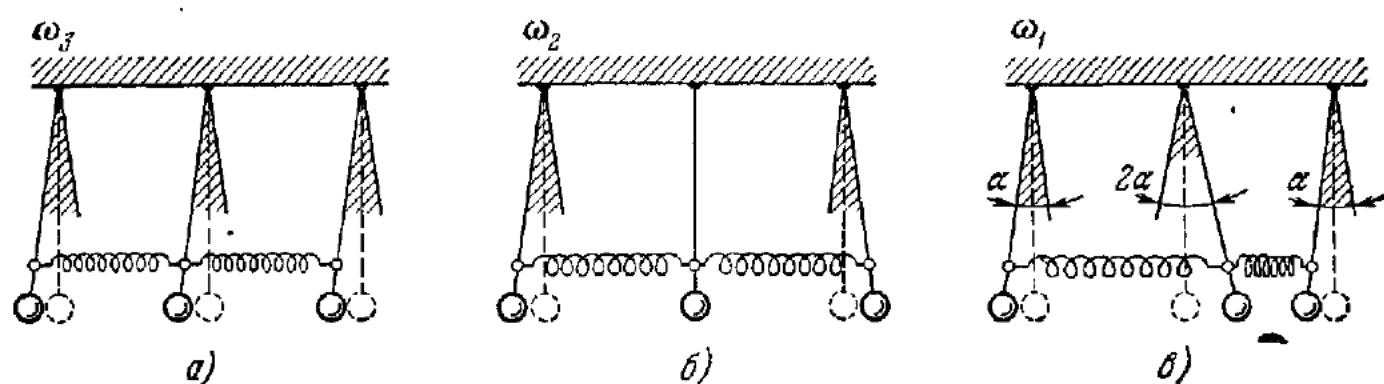


Рис. 384.

так же, как и в случае двух маятников, если нам удастся подобрать начальные условия таким образом, что после них все маятники будут совершать гармонические колебания с *одной* частотой, частота этих колебаний и будет одной из собственных частот системы.

На рис. 384 показаны начальные условия, при которых возникает каждое из трех собственных колебаний в системе связанных маятников с собственными частотами  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ . Очевидно, что после начальных условий, изображенных на рис. 384, *а* и *б*, возникнут гармонические колебания маятников<sup>1)</sup> с частотами  $\omega_3$  и  $\omega_2$ .

<sup>1)</sup> Амплитуда колебаний среднего маятника во втором случае равна нулю; поэтому можно говорить, что он колеблется с частотой  $\omega_2$ , но с нулевой амплитудой.

В первом случае все маятники колеблются синфазно с той частотой, с которой колебался отдельно каждый маятник, будучи не связанным с другими, и пружины не принимают участия в колебаниях, они не деформируются.

Во втором случае крайние маятники колеблются антифазно, силы пружин, действующих на средний маятник, уравновешивают друг друга и поэтому он не совершает колебаний. Частота колебаний во втором случае больше, чем в первом, ибо здесь к «маятниковой» части восстанавливающей силы<sup>1)</sup> прибавляется еще сила деформации пружины.

Возникновение гармонических колебаний после начальных отклонений в случае, изображенном на рис. 384, в, не сразу ясно. Но можно сообразить, что восстанавливающая сила каждого маятника пропорциональна отклонению, причем коэффициент пропорциональности одинаков. Действительно, «маятниковая» часть восстанавливающей силы для среднего маятника в два раза больше, так как его отклонение равно  $\alpha$ , а отклонение крайних — только  $\frac{1}{2}\alpha$ ; так же и часть восстанавливающей силы от пружин, действующих на средний маятник, будет в два раза больше, чем действующих на крайние, так как одна пружина растянулась на величину, пропорциональную  $\frac{3}{2}\alpha$ , а вторая сжалась на такую же величину. Массы маятников одинаковы, и одинаковы коэффициенты восстанавливающих сил, следовательно, и периоды колебаний одинаковы. Очевидно, что  $\omega_1 > \omega_2$ , ибо пружины в третьем случае значительно больше деформируются (при той же амплитуде крайнего маятника), чем при колебаниях во втором случае. Колебания трех маятников, возникающие после начальных условий, показанных на рис. 384, представляют согласованные гармонические колебания всех маятников с одной из собственных частот.

Так же как и при двух маятниках, любые собственные колебания трех маятников могут быть представлены суммой трех колебаний, каждое из которых соответствует согласованному гармоническому колебанию с одной собственной частотой. Каждое из таких согласованных колебаний называется *нормальным колебанием*, соответствующим определенной собственной частоте всей сложной системы. Поэтому коротко говорят: *любые собственные колебания системы есть сумма нормальных колебаний*.

Совершенно аналогичная картина будет и для колебаний системы, состоящей из большого числа различных маятников или колеблющихся тел. Сложная картина собственных колебаний после любых начальных условий состоит из совокупности простых гармонических, или нормальных, колебаний. Число нормальных

<sup>1)</sup> «Маятниковая» часть восстанавливающей силы равна  $mg\alpha$ , где  $\alpha$  — угол отклонения, а  $mg$  — сила веса маятника.

колебаний, так же как и число собственных частот, равно числу степеней свободы всех колеблющихся тел.

В заключение обратим внимание на то, что картина колебаний сложных систем рассматривалась нами в предположении, что трение отсутствует или, иначе, силы трения очень малы. Небольшие силы трения внесут мало изменения в картину колебаний за некоторый отрезок времени, но с течением времени колебания будут затухать. Наличие значительных сил трения, конечно, радикально изменит картину собственных колебаний. Например, при очень слабой пружине, связывающей маятники, но при заметном трении картина колебаний двух маятников может быть такой, как она показана на рис. 385; колебания первого, возбужденного маятника успеют затухнуть прежде, чем они в какой-то заметной степени будут переданы второму, невозбужденному маятнику (ср. с рис. 382).

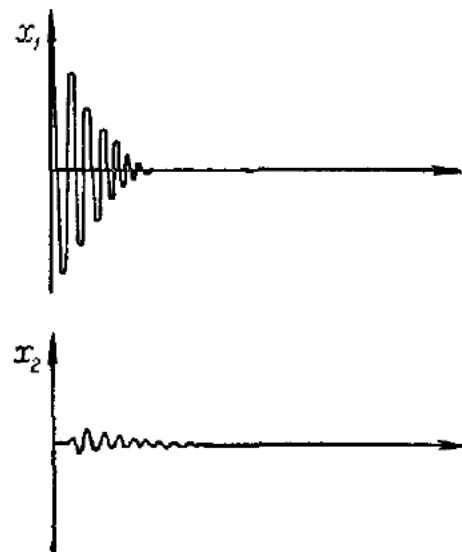


Рис. 385.

При очень большой величине силы трения движения маятников уже не будут колебательными, и после отклонения из положения равновесия отклоненный маятник будет медленно приближаться к положению равновесия, вызывая очень малое движение такого же типа и у остальных маятников, причем маятники, слабо связанные с возбужденным, почти совсем не будут отклоняться.

При очень большой величине силы трения движения маятников уже не будут колебательными, и после отклонения из положения равновесия отклоненный маятник будет медленно приближаться к положению равновесия, вызывая очень малое движение такого же типа и у остальных маятников, причем маятники, слабо связанные с возбужденным, почти совсем не будут отклоняться.

### § 136. Вынужденные колебания в сложных системах<sup>1</sup>

Под действием внешней гармонической силы  $F$  частоты  $p$ , приложенной к одному из связанных маятников (рис. 386), оба маятника будут совершать гармонические вынужденные колебания с частотой  $p$ . Амплитуды колебаний каждого из маятников, также как и при вынужденных колебаниях с одной степенью свободы, будут зависеть от частоты, причем эта зависимость особенно резко выражена при малом затухании. *Резонанс колебаний*, или колебания обоих маятников с максимальной амплитудой, будет наблюдаться тогда, когда одна из собственных частот связанных маятников равна частоте внешней силы. Аналогично для системы из  $n$  маятников резонанс будет наблюдаваться при  $n$  значениях частоты внешней силы.

Зависимость амплитуды колебаний одного из маятников от частоты при постоянной амплитуде внешней силы показана на рис. 387, где видны два резонансных пика вблизи собственных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Существенное значение имеет и характерный минимум амплитуды колебаний при частоте, обозначенной  $n_1$ ; об этом ми-

нимуем скажем далее. Эта резонансная кривая вычерчена для амплитуды колебаний длинного маятника, на который действует внешняя сила  $F = a \cos pt$ . При резонансе, когда  $p = \omega_2$  (или  $p = \omega_1$ ), действие внешней силы будет уравновешиваться действием сил трения. Если силы трения очень малы и внешняя сила достаточно мала, то вынужденные колебания в системе при резонансе

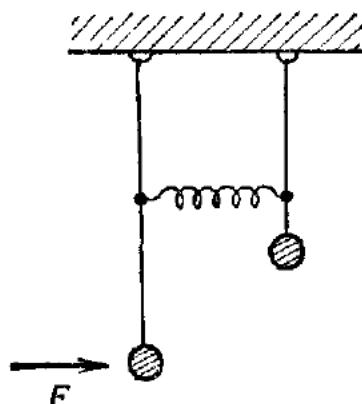


Рис. 386.

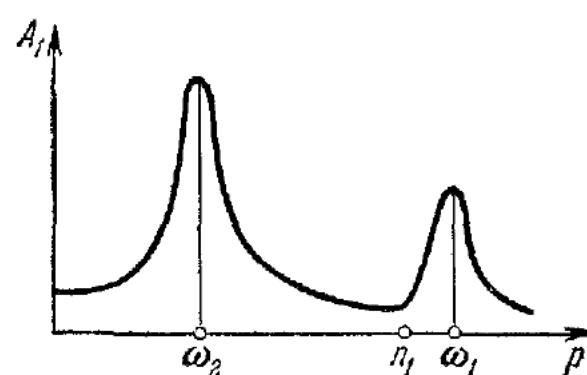


Рис. 387.

похожи на нормальное колебание, так как частота вынужденных колебаний равна собственной.

При первом резонансе ( $p = \omega_2$ ) соотношение амплитуд и фаз будет примерно такое, как показано на рис. 388, а. Оба маятника «ходят» в фазе, но угол отклонения длинного маятника больше; частота  $\omega_2$  близка к собственной частоте одного длинного маятника, он колеблется с частотой, близкой к своей собственной, и с этой же частотой «таскает» за собой короткий маятник, собственная частота которого значительно выше; сила пружины<sup>1)</sup> действует на короткий маятник в фазе с его колебаниями; пружина оказывается больше всего растянутой в положении, которое показано на рис. 388, а, и будет иметь наибольшее сжатие через половину периода.

При втором резонансе ( $p = \omega_1$ ) колебания маятников будут близки к нормальному колебанию с частотой  $\omega_1$ ; примерный вид их показан на рис. 388, б. Это будут антифазные колебания с частотой  $\omega_1$ , близкой к собственной частоте короткого маятника.

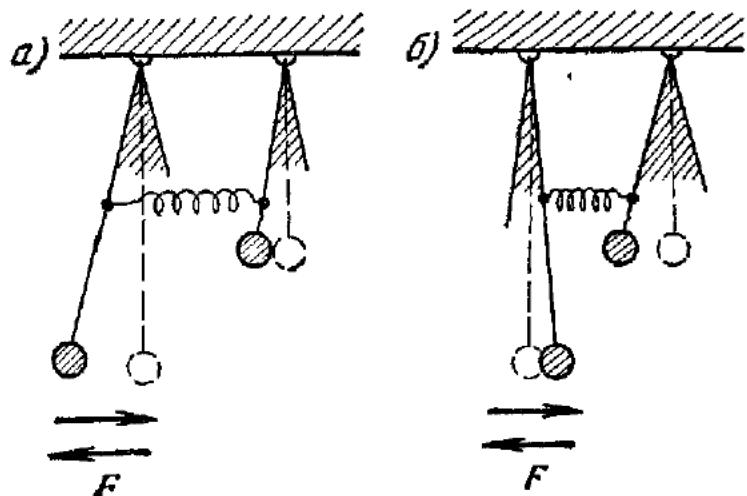


Рис. 388.

<sup>1)</sup> Которую можно рассматривать как «внешнюю» силу по отношению к короткому маятнику.

Теперь короткий маятник «толкает» длинный, который колеблется с более высокой частотой, чем его собственная; поэтому сила пружины и смещение длинного маятника будут в противофазе. На рис. 388 резонансные амплитуды кажутся небольшими, но при маленькой силе  $F$  при других (не резонансных) частотах маятники практически стоят на месте.

Все явления вынужденных колебаний с двумя маятниками очень легко демонстрировать на установке, схема которой показана на рис. 389. Пружина  $B$  должна быть выбрана достаточно легкой и мягкой, а радиус кривошипа  $R$  должен быть много больше смещения другого конца пружины при колебаниях.

Особый интерес представляет случай, когда частота колебаний  $p = n_1$ , при которой амплитуда колебаний длинного маятника очень

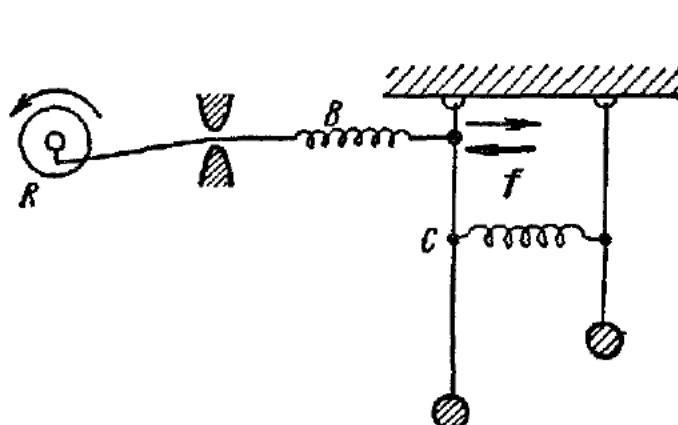


Рис. 389.

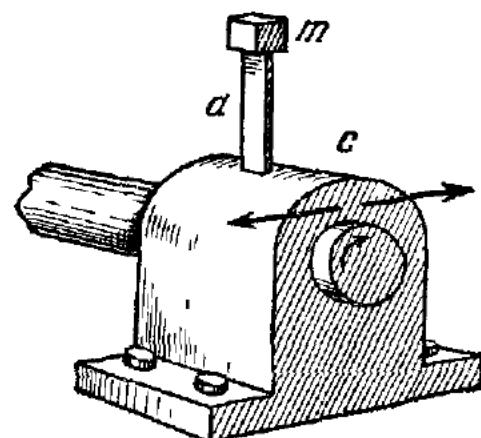


Рис. 390.

мала. Это явление используется для демпфирования нежелательных колебаний. Опыт и расчет показывают, что частота  $n_1$  равна собственной частоте колебаний короткого маятника при покоящемся длинном маятнике. При частоте вынужденных колебаний  $p = n_1$  короткий маятник колеблется с собственной частотой  $n_1$ , так, что сила пружины в точке  $C$  (см. рис. 389) уравновешивает действие внешней силы  $f$  и длинный маятник практически стоит на месте.

Применение связанных колебаний для демпфирования вибраций возможно в тех случаях, когда вредные вибрации имеют постоянную частоту. Так, например, для устранения нежелательных горизонтальных вибраций подшипника с машины (рис. 390), работающей при постоянном числе оборотов  $n$ , на подшипнике устанавливают пластинку  $a$  с массой  $m$  на конце. Собственная частота колебаний массы на пластинке подбирается равной  $n$ . При работе машины возникают довольно большие колебания пластинки, но подшипник машины стоит почти совсем неподвижно и опасные его вибрации, таким образом, устраняются. Такое устройство называется *динамическим демпфером*.

Динамические демпферы, применяемые для устранения опасных крутильных колебаний коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, устраивают на этом же принципе.

При воздействии внешней периодической силы на систему, имеющую много степеней свободы и обладающую целым рядом собственных частот, мы, вообще говоря, будем наблюдать резонанс на каждой из собственных частот. Поэтому для устранения нежелательных последствий резонанса необходимо избегать совпадения частоты внешней силы с каждой собственной частотой. Безусловное выполнение этого требования необходимо в тех случаях, когда известно, что силы трения очень малы. Если же демпфирующие силы достаточны, то резонанса можно и не опасаться.

## Г л а в а XV

### КОЛЕБАНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

#### § 137. Волны

Мы уже знаем (§ 120), что всякое изменение давления или плотности сплошной среды передается с определенной скоростью соседним частицам и там происходят аналогичные изменения; в среде распространяется волна изменений давления (плотности и т. п.). Колебания частиц воздуха, вызываемые колебаниями голосовых связок человека или колебаниями диафрагмы громкоговорителя, передаются от одной частицы воздуха к другой, и в воздухе распространяется звуковая волна.

Звуковая волна от громкоговорителя в однородной среде распространяется по всем направлениям одинаково. На достаточно больших расстояниях от источника звука точки, до которых к данному моменту времени дошло возмущение, располагаются приблизительно по сфере. Поэтому такие волны называют *сферическими*. *Волновой поверхностью* называют такую поверхность, на которой все частицы однородной среды совершают одинаковые движения. Очевидно, волновой поверхностью сферической волны является любая сфера, в центре которой находится вызывающий колебания источник ничтожно малых размеров.

Наглядным примером распространения волны являются хорошо известные всем волны, идущие по поверхности жидкости. Волны, идущие по поверхности воды от брошенного камня, называются *круговыми*. Если какое-либо тело, например поплавок, совершает гармонические колебания с какой-то частотой, то от него будут распространяться круговые регулярные волны. Здесь «горбы» и «впадины» волны кругами распространяются по поверхности воды (рис. 391); волновая линия в этом случае, очевидно, будет окружностью.

Простейший вид волнового движения — это волны, распространяющиеся в одном направлении, например волны в воздухе, распространяющиеся вдоль оси трубы от колеблющегося поршня (рис. 392). Волны сгущений и разрежений бегут от поршня в одном

направлении, все частицы воздуха, принимающие участие в волновом колебательном движении, движутся вдоль оси трубы. Такие же волны в одном направлении можно вызвать в упругом стержне, если ударять по одному из его концов. Волновыми поверхностями в данном случае будут плоскости, перпендикулярные к оси трубы или оси стержня; поэтому такие волны называются *плоскими*.

Волны, в которых частицы совершают колебания вдоль направления распространения колебаний, называются *продольными волнами* (на рис. 392 показан пример продольных волн). Волны, в которых частицы движутся поперек направления распространения волны, называются *поперечными* (на рис. 391 показан пример поперечной волны).

Поперечная волна может распространяться вдоль натянутой веревки, резиновой трубы, струны и т. п. (рис. 393). Если резко ударим по натянутой резиновой трубке, то увидим, как от места удара побежит «горбик» («изгиб») вдоль трубы. Когда «горбик» проходит через какой-то участок трубы, то частицы трубы совершают колебания в поперечном направлении.

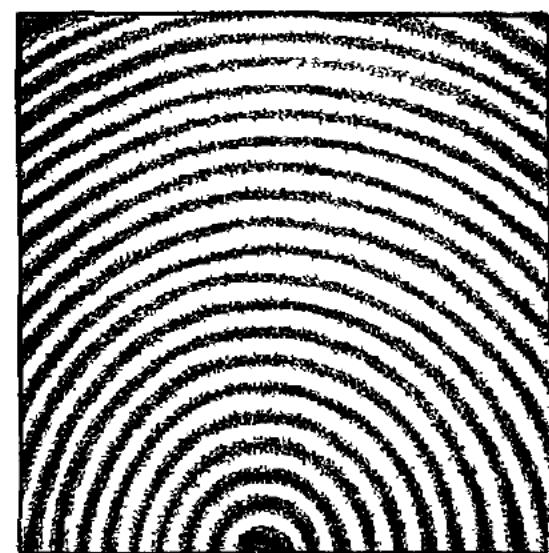


Рис. 391.

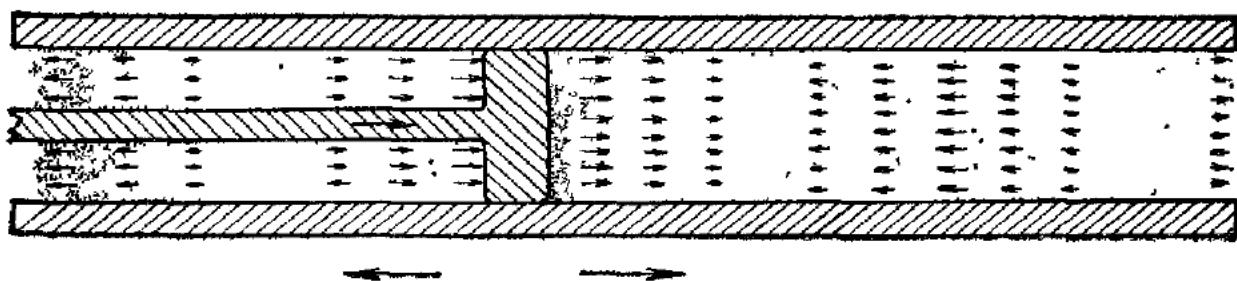


Рис. 392

Волна вдоль струны представляет собой простейшее волновое движение. Рассмотрим подробнее, как распространяется волна вдоль струны. «Горбик» распространяется вдоль струны с определенной скоростью  $c$ , которая зависит от свойств струны и ее натяжения. Волна во время распространения не изменяет своей формы. Величину  $c$  называют *скоростью распространения волны*<sup>1</sup>). Нужно различать скорость распространения волны  $c$  и скорость движения данной частицы струны  $v$ . Если представим себе волну, бегущую по струне, через очень малый промежуток времени  $dt$  (рис. 394), то

<sup>1)</sup> Точнее, скоростью перенесения формы волны

вертикальный отрезок  $v dt$  показывает смещение данной точки струны, а горизонтальный отрезок  $c dt$  — смещение волны за время  $dt$ . Скорость  $v$  точки струны изменяется со временем и зависит от формы волны, причем она различна для различных точек, а скорость  $c$  постоянна во времени и одинакова для всех мест струны. Если  $dx$

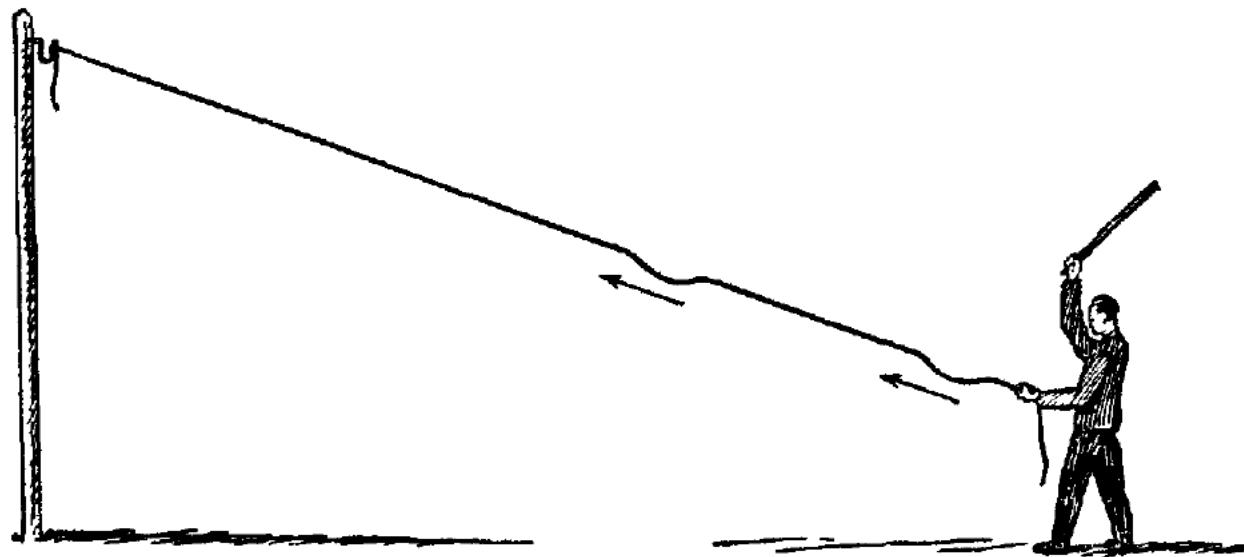


Рис. 393.

есть расстояние между ближайшими точками струны, которые через  $dt$  будут иметь одно и то же отклонение  $a$  от положения равновесия, то, очевидно,  $c = \frac{dx}{dt}$ .

Пусть в некоторый момент времени натянутая струна имеет такой вид, как показано на рис. 395. Вид струны в данный момент показы-

вает форму волны, но не указывает, в каком направлении она движется, такая волна может двигаться как вправо, так и влево; по виду струны мы можем только заключить, что на элементы  $a$  и  $a'$  действует сила, направленная вверх, а на элемент  $b$  — сила, направленная вниз. Эти силы возникают вследствие натяжения и изгиба струны; они тем больше, чем больше изгиб струны в данном месте; в точках

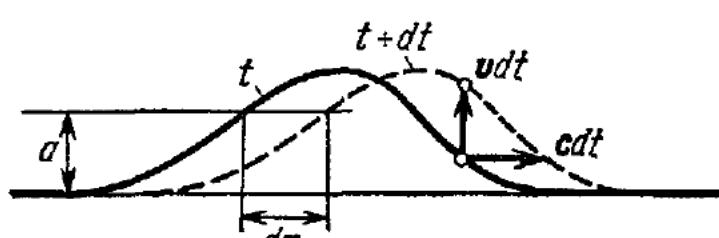


Рис. 394.

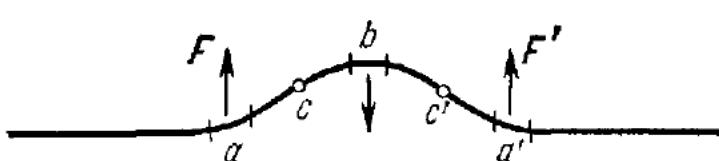


Рис. 395.

перегиба  $c, c'$  (см. рис. 395) силы равны нулю. Возникновение этих сил объясняется так.

Мысленно вырежем небольшой отрезок струны (как это изображено на рис. 399), к концам его со стороны остальных частей струны приложены силы натяжения  $T$  и  $T'$ , нормальные к сечению струны,

равнодействующая этих сил  $F$  направлена почти перпендикулярно к струне. Таким образом, изгиб натянутой струны определяет и направление и величину силы, действующей на некоторый участок струны, но на основании этого еще ничего нельзя заключить о том, куда движется данный участок струны, сила указывает только, как меняется скорость движения в поперечном направлении частицы струны.

Если же нам известны скорости движения точек струны в данный момент, то направление движения волны можно будет определить.

Допустим, что скорости движения точек струны таковы, как показано стрелками на рис. 396, а Тогда сила  $F'$ , действующая

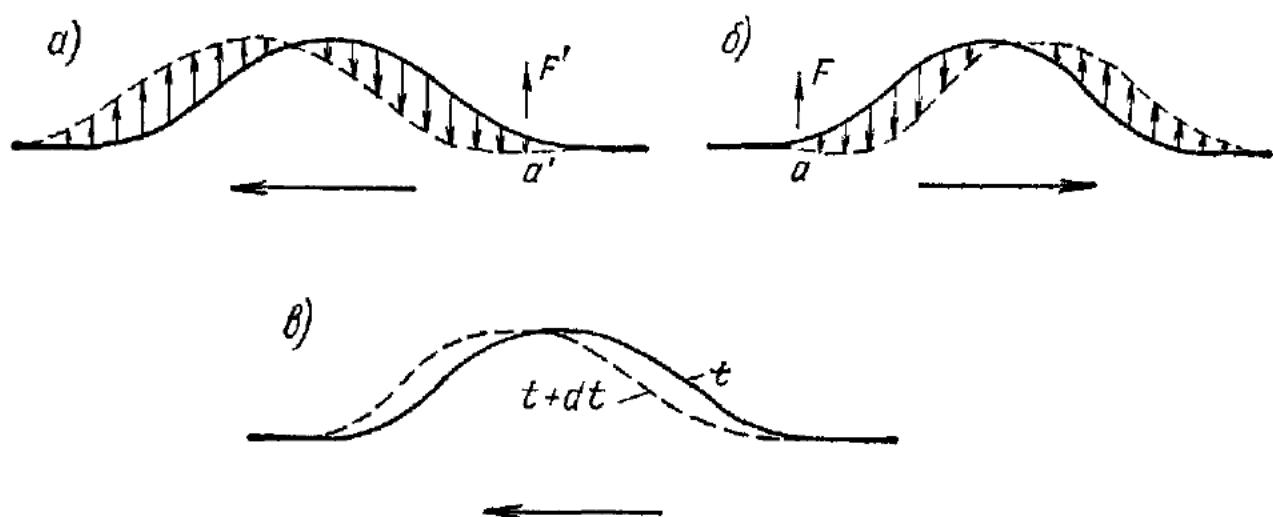


Рис. 396.

на частицу  $a'$ , будет останавливать ее, уменьшать ее скорость. Очевидно, что это распределение скоростей соответствует волне, бегущей влево.

Если мы знаем скорости отдельных точек струны в момент  $t$ , то мы можем построить положение их в следующий момент  $t + dt$ . На рис. 396, в такое построение выполнено для волны, показанной на рис. 396, а. Можно также установить и обратное: каковы будут скорости движения различных точек струны в данный момент, если вся волна изгиба струны, не изменяя своей формы, передвигается в определенном направлении. На рис. 396, б показаны скорости частиц струны для волны, движущейся вправо. Если бы, отклоняя струну в данном месте, мы сообщили струне толчком соответствующие скорости, то от этого побежал бы волновой импульс в одном определенном направлении.

Связь между волной смещений и волной скоростей очень удобно показать на волне смещений трапециевидной формы. На рис. 397, а показаны два состояния струны в волне, бегущей вправо; в моменты  $t$  (сплошная кривая) и  $t + dt$  (пунктирная) точка с струны перемещается в положение  $a$ , а точка  $d$  — в положение  $b$ . Отрезки  $ca$

и  $db$ , очевидно, пропорциональны скоростям, все точки струны на переднем и заднем склонах волны (фронтах волны) движутся с одинаковой и постоянной скоростью, так как склоны прямолинейны. Скорость изменяется скачком в момент прохода изгиба

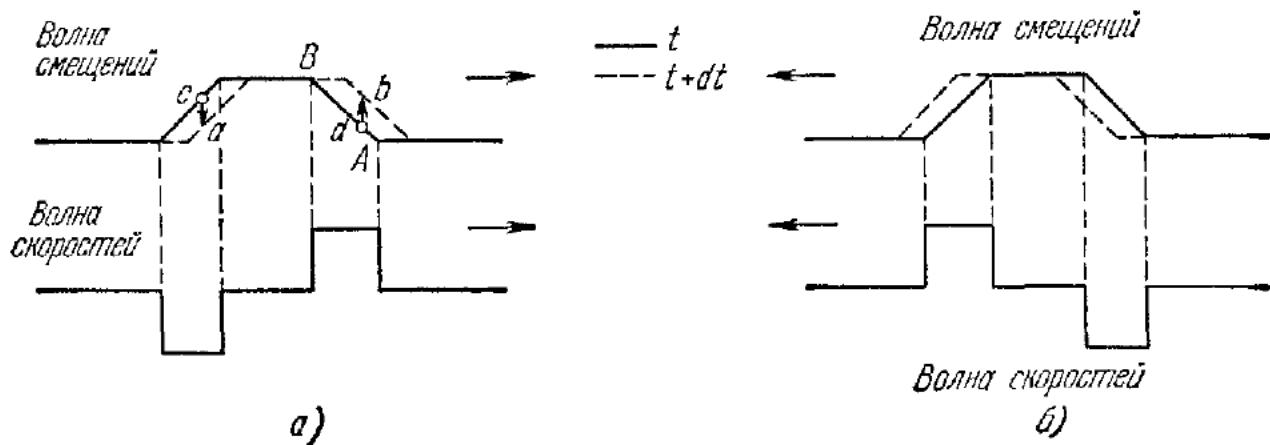


Рис. 397.

волны: в момент  $t$  в точке  $A$  скорость возрастает скачком, в точке  $B$  — убывает до нуля и т. д. Волна, бегущая влево, показана на рис. 397, б.

Волну любой формы, распространяющуюся без искажения вдоль струны, можно всегда представить в таком общем виде:

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (137.1)$$

где  $y(x, t)$  есть отклонение в момент времени  $t$  частицы струны, которая имеет координату  $x$  вдоль струны. Отклонение  $y$  — функция двух переменных:  $x$  и  $t$ ; функция  $f$  от двучлена  $t - \frac{x}{c}$  представляет форму струны в какой-то момент  $t$  как функцию  $x$ . Можно

показать, что волна любой формы, представленная функцией  $f$ , распространяется со скоростью  $c$ .

Пусть к моменту  $t_1$  волна имеет вид, показанный на рис. 398 сплошной линией. К моменту времени  $t_2$ , не искажая своей формы,

волна переместится вправо (пунктирная линия). При этом частица с координатой  $x_2$  сместится на величину  $y(x_2, t_2) = y(x_1, t_1)$  — такую же, как частица с координатой  $x_1 < x_2$  в более ранний момент времени  $t_1 < t_2$ . Очевидно, что аргументы функции  $y(x, t)$  при этом должны быть одинаковыми:

$$t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}.$$

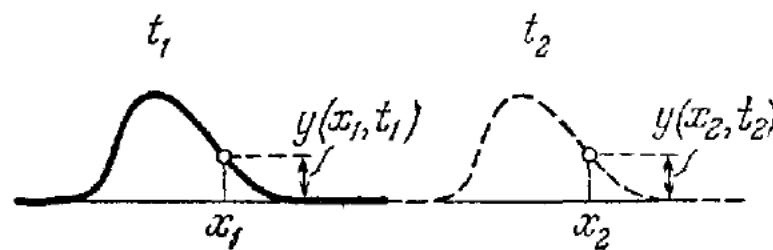


Рис. 398.

Отсюда следует, что

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1),$$

т. е. что волна переместилась со скоростью  $c$  в направлении положительных значений  $x$ , если  $x_2 > x_1$ .

Общее выражение для волны (137.1) пригодно для любой плоской волны, распространяющейся вдоль направления оси  $x$ , в том случае, когда частицы, имеющие координату  $x$ , одинаково отклоняются на  $y(x, t)$  от положения равновесия в момент  $t$ . Таким же путем можно убедиться, что выражение

$$y(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

представляет волну, распространяющуюся со скоростью  $c$  в сторону отрицательных значений  $x$ .

Скорость движения волны по натянутой струне можно определить, рассуждая следующим образом. При распространении волны по струне бежит «горбик», форма которого остается *неизменной*. Представим себе, что на струну надета тонкая стеклянная трубочка, изогнутая по форме данной волны, и она движется вдоль струны со скоростью распространения волны  $c$ ; в этом случае струна не будет испытывать никаких сил, действующих со стороны трубы. Теперь представим себе такую картину: трубочка стоит на месте, а натянутая струна протягивается через нее с постоянной скоростью  $c$  в противоположном направлении; здесь также на трубку не будет действовать сила со стороны струны; действительно, волна бежит вправо вдоль движущейся струны с той же скоростью  $c$ , оставаясь неподвижной в пространстве. Если бы осторожно разбили трубку, то «горб» волны остался бы на месте.

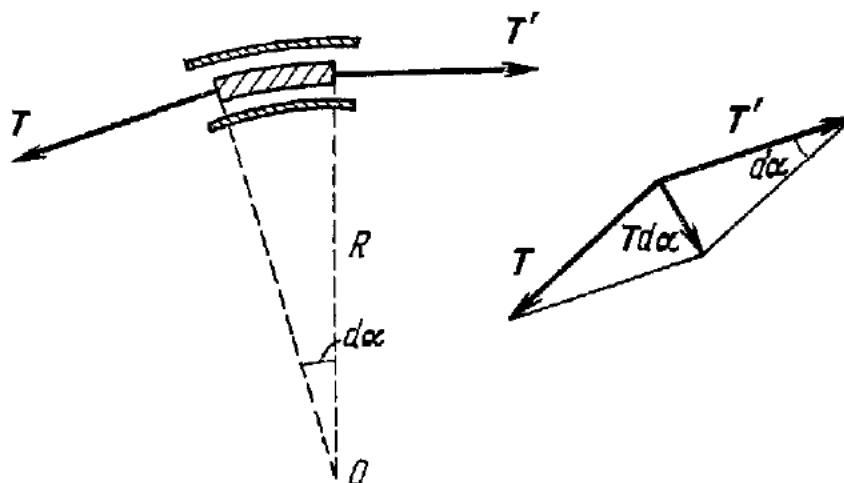


Рис. 399.

Основываясь на этой схеме, найдем, при какой скорости  $c$  изогнутая трубка не будет давить на протягиваемую сквозь нее натянутую струну. Пусть радиус закругления трубы в данном месте равен  $R$  (рис. 399). Вырежем мысленно элемент струны длиной

$R d\alpha$ ; на концы его действуют силы натяжения струны  $T$  и  $T'$ , одинаковые по величине, но действующие под углом  $\pi - d\alpha$ . Если угол  $d\alpha$  мал, то результирующая этих сил равна

$$T d\alpha$$

и направлена к центру кривизны  $O$ . Так как никакие силы со стороны трубы на струну, по предположению, не действуют, то только эта сила вызывает центростремительное ускорение элемента, движущегося со скоростью  $c$  по кругу радиуса  $R$ , или

$$T d\alpha = \rho R d\alpha \frac{c^2}{R}, \quad (137.2)$$

где  $\rho R d\alpha$  — масса элемента струны, а  $\rho$  — масса единицы длины струны («погонная масса», или «линейная плотность»).

После сокращения получаем выражение для скорости распространения волны:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (137.3)$$

Скорость распространения волны равна корню квадратному из отношения натяжения  $T$  к погонной массе струны  $\rho$ . Проверим размерность формулы (137.3):

$$[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}}, \quad \left[ \frac{T}{\rho} \right] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

При выводе формулы для скорости распространения считалось, что струна абсолютно гибкая; это значит, что в ненатянутом состоянии, как и для хорошо смазанной цепочки, не нужно никакого усилия для ее изгиба. На натянутой жесткой стальной проволоке действие изгибающих сил сравнимо с действием сил натяжения, поэтому распространение волны вдоль нее будет уже сложным процессом; волновой импульс с течением времени будет деформироваться, и различные по форме импульсы, вообще говоря, будут распространяться различно.

### § 138. Плоская синусоидальная звуковая волна

Волна, распространяющаяся в воздухе, заключенном в трубе, и создаваемая колеблющимся поршнем (см. рис. 392), представляет собой плоскую звуковую волну, если частота колебаний поршня лежит в области звуковых частот (примерно от 16 до 10 000 Гц) и амплитуды колебаний поршня очень малы. Когда поршень совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$ , то от него распространяется синусоидальная плоская волна.

Пусть поршень совершает гармоническое колебание  $y_0(t) = A \cos \omega t$ . Тогда частицы газа, прилегающие к поршню, имеют то же смещение, что и сам поршень.

Смещение же частиц газа, которые в состоянии покоя находились на расстоянии  $x$  от частиц, прилегающих к поршню, будет происходить с запозданием на время  $\tau = x/c$ , необходимое для распространения волны на расстояние  $x$ . Поэтому колебания смещений этих частиц можно записать так:

$$y(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right). \quad (138.1)$$

Это — аналитическая запись *бегущей плоской синусоидальной волны*; она указывает для любого момента времени  $t$  отклонение от положения равновесия частицы газа, находившейся при покое на расстоянии  $x$  от начала отсчета. Отклонение (смещение)  $y(x, t)$  является как функцией координаты  $x$  частицы при покое, так и функцией времени  $t$ . Все частицы совершают гармонические колебания с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$ , но фаза колебаний частиц, имеющих различные координаты  $x$ , различна. Очевидно, что *фронт волны* есть плоскость, нормальная к оси  $x$ . Функция

$$y = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

представляет собой синусоидальную волну, бегущую в сторону отрицательных значений  $x$ .

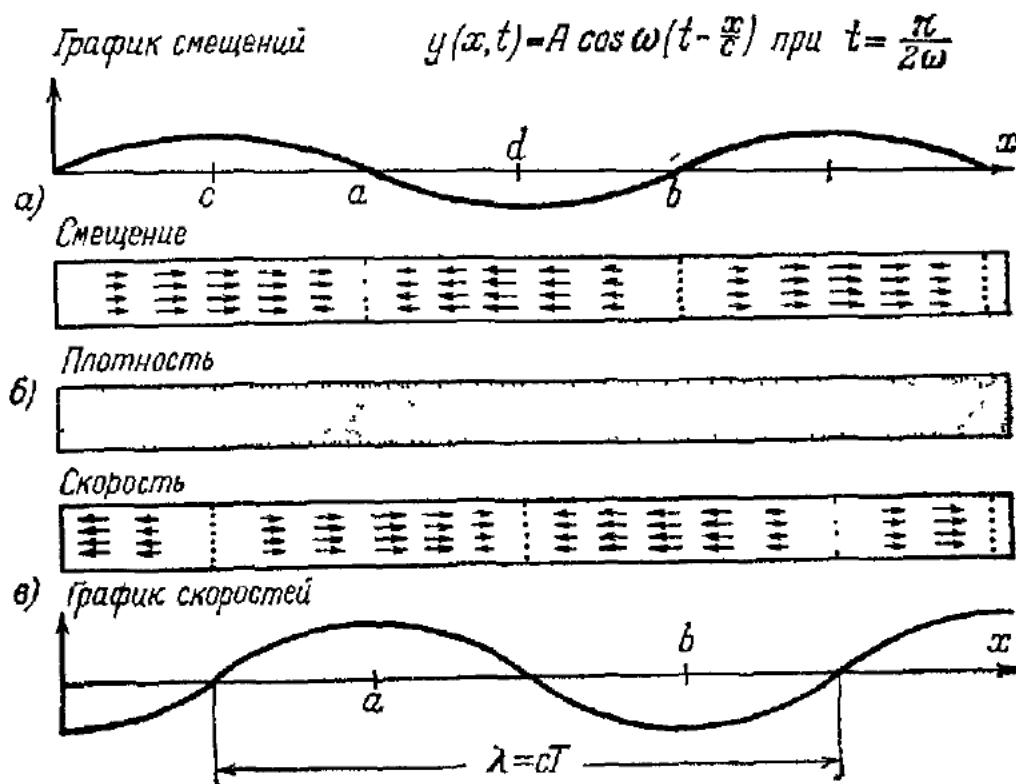


Рис. 400.

График смещений в момент  $t = T/4$  всех точек бегущей синусоидальной волны (138.1) показан на рис. 400, *а*; положительное направление оси  $y$  означает смещение точки с координатой  $x$  вдоль направления возрастания  $x$ .

Легко убедиться, что в точке  $a$  имеет место наибольшее сгущение, а в точке  $b$  — наибольшее разрежение, ибо сзади от точки  $a$  частицы сместились вперед, а перед ней — назад; вблизи точки  $b$  все происходит наоборот (рис. 400, б). В точках  $c$  и  $d$  нет изменения плотности, ибо соседние частицы сместились почти одинаково.

Наибольшую скорость имеют частицы, находящиеся в точках  $a$  и  $b$ , скорость частиц в точке  $a$  направлена вперед, а скорость частиц в точке  $b$  — назад (рис. 400, в). Волна скоростей частиц имеет вид

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \quad (138.2)$$

График скоростей этой волны в момент  $t$  показан на рис. 400, в.

Расстояние между двумя ближайшими точками, которые совершают колебания в фазе друг с другом, называется *длиной волны*  $\lambda$ . Разность фаз колебаний точек, находящихся на расстоянии  $s$  друг от друга, равна

$$\varphi_s = \frac{\omega s}{c} = \frac{2\pi s}{cT}, \quad (138.3)$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период гармонических колебаний точек в синусоидальной волне. Тогда ближайшие точки, колеблющиеся в фазе, будут иметь разность фаз, равную  $2\pi$ , или

$$\varphi_\lambda = 2\pi = \frac{\omega\lambda}{c} = \frac{2\pi\lambda}{cT}. \quad (138.4)$$

Отсюда длина волны

$$\lambda = cT. \quad (138.5)$$

На основании этой формулы можно дать несколько иное определение величины длины волны: длина волны равна пути, который проходит волна за период колебаний  $T$ . Очевидно, что расстояние между двумя последовательными сгущениями (или разрежениями) равно  $\lambda$ .

Такие же синусоидальные волны смещений и скоростей могут распространяться и вдоль длинной однородной натянутой струны; в этом случае  $y(x, t)$  — отклонение точки с координатой  $x$  по перек направления струны в момент времени  $t$ .

Рассматривая процессы в звуковой волне (см. рис. 400), мы видим, что волна смещений всегда связана с волной изменений плотности, которая, очевидно, связана с волной изменений давления, с волной скоростей частиц, с волной ускорений и т. п., — все эти величины гармонически изменяются со временем (колеблются), а колебания их распространяются со скоростью  $c$  в пространстве. Аналогичную картину можно представить и для волны вдоль

струны. Поэтому можно сказать, что *волновое движение представляет собой распространение в пространстве изменений плотности частиц среды или состояния движения их.*

Вместе с распространением состояния движения в волне передается от одних частиц среды к другим и *энергия*. Поэтому можно сказать, что *волновое движение представляет собой один из видов распространения энергии в пространстве.*

### § 139. Энергия звуковой волны

Колеблющиеся в звуковой волне частицы среды обладают как кинетической энергией, так и потенциальной энергией деформации. Частицы, находящиеся в данный момент в местах максимального сгущения или разрежения, обладают максимальной потенциальной энергией сжатия (или расширения), а также и максимальным значением кинетической энергии, так как и скорость движения в этих местах имеет наибольшее значение (см. рис. 400, в), а частицы, находящиеся в местах неизменной плотности, не обладают ни кинетической, ни потенциальной энергией.

Кинетическая энергия движения частиц, находящихся в единице объема (плотность кинетической энергии), равна

$$E_k = \frac{(\rho_0 + \rho) v^2}{2}, \quad (139.1)$$

или

$$E_k \approx \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (139.2)$$

где  $\rho_0$  — плотность среды до прихода волны,  $\rho$  — добавочная плотность, возникающая вследствие сжатия в волне, и  $v$  — скорость частиц. Обычно в звуковой волне имеют место очень малые изменения плотности, и поэтому можем пренебречь величиной  $\rho$  по сравнению с  $\rho_0$  в формуле (139.1). Плотность кинетической энергии в любой точке гармонической волны можно записать так:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right), \quad (139.3)$$

если подставим в (139.2) выражение для волны скоростей из формулы (138.2).

Для определения потенциальной энергии сжатия в единице объема найдем величину прироста давления  $p$ . Пусть давление в покое равно  $p_0$ . Изменения давления и объема связаны законом адиабаты (см. § 105)

$$(p_0 + p)(V_0 + V)^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa}, \quad (139.4)$$

где  $V_0$  — объем частицы в покое, а  $V$  — увеличение его в волне. Из (139.4) следует, что<sup>1)</sup>

$$p = -\kappa \frac{p_0}{V_0} V, \quad (139.5)$$

если пренебречь членами второго порядка малости по отношению к величинам  $\frac{p}{p_0}$  и  $\frac{V}{V_0}$ .

Найдем изменение объема в волне. Рассмотрим объем  $S dx = V_0$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения трубы. Вследствие смещения частиц они будут занимать объем (рис. 401)

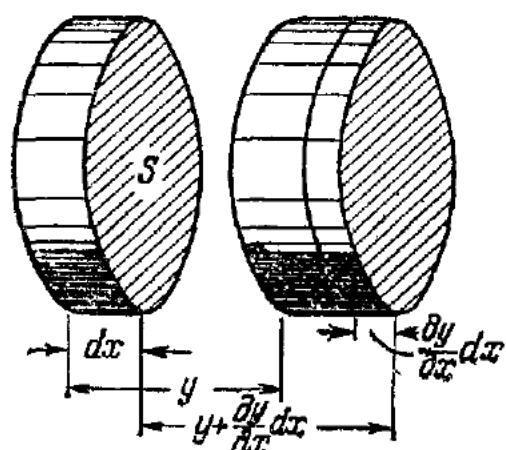


Рис. 401.

$$V_0 + V = S \left( dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx \right).$$

Отсюда

$$V = S \frac{\partial y}{\partial x} dx. \quad (139.6)$$

Подставляя (139.6) в (139.5), получаем изменение давления в волне:

$$\begin{aligned} p &= -\kappa \frac{p_0}{V_0} S \frac{\partial y}{\partial x} dx = -\kappa \frac{p_0}{S dx} S \frac{\partial y}{\partial x} dx = \\ &= -\kappa p_0 \frac{\partial y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (139.7)$$

Приращение давления в данном месте волны пропорционально производной от смещения  $y$  по координате  $x$ , но обратно по знаку.

Вспоминая, что скорость звука в среде  $c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}}$  (см. § 120), можем выражение (139.7) для давления  $p$  записать так:

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (139.8)$$

Следовательно, волна давлений, соответствующая волне смещения (138.1), имеет вид

$$p(x, t) = -\rho_0 c^2 \frac{A \omega}{c} \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right) = -\rho_0 A \omega c \sin \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right), \quad (139.9)$$

т. е. колебания давления всегда совпадают по фазе с колебаниями скорости частиц (ср. (138.2) и (139.9)). В тех местах, где в данный момент наибольшая плотность кинетической энергии, и потенциальная энергия сжатия наибольшая.

<sup>1)</sup> При преобразовании следует иметь в виду, что при малом  $\frac{V}{V_0}$

$$(V_0 + V)^{\kappa} = V_0^{\kappa} \left( 1 + \frac{V}{V_0} \right)^{\kappa} \approx V_0^{\kappa} \left( 1 + \kappa \frac{V}{V_0} \right).$$

Потенциальная энергия равна работе, которую необходимо затратить, чтобы увеличить (уменьшить) давление газа на небольшую величину  $p$  или уменьшить (увеличить) объем  $V_0$  на величину  $V$ . При малом изменении давления и объема ( $\frac{p}{p_0} \ll 1$ ,  $\frac{V}{V_0} \ll 1$ ) можно всегда считать изменение давления  $p$  пропорциональным изменению объема  $V$  согласно (139.5). Тогда работа сжатия объема  $V_0$  равна  $-\frac{pV^1}{2}$ <sup>1)</sup>. Поэтому потенциальная энергия единицы объема может быть записана так:

$$E_{\text{п}} = -\frac{pV}{2V_0}. \quad (139.10)$$

Подставляя сюда изменение объема по (139.6) и изменение давления по (139.8), получаем плотность потенциальной энергии:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (139.11)$$

Следовательно, волна изменений плотности потенциальной энергии такова:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} A \cos \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right). \quad (139.12)$$

Сравнивая это выражение с выражением плотности для кинетической энергии (139.3), видим, что в любой момент времени в каждой точке бегущей звуковой волны плотности кинетической и потенциальной энергий частицы *одинаковы*. Поэтому плотность полной энергии в волне равна

$$E = E_{\text{k}} + E_{\text{п}} = \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right). \quad (139.13)$$

За очень малое время  $\Delta t$  волновое движение распространится на участок с  $\Delta t$ ; следовательно, через единицу площади плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, пройдет энергия

$$\Delta U_{\text{э}} = Ec \Delta t. \quad (139.14)$$

Отношение величины энергии, прошедшей за время  $\Delta t$  через единицу площади, к промежутку времени  $\Delta t$  называют *потоком энергии*. В нашем случае поток энергии равен

$$U_{\text{э}} = \frac{\Delta U_{\text{э}}}{\Delta t} = Ec = \rho_0 A^2 \omega^2 c \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right). \quad (139.15)$$

1) Действительно, изменение давления  $p = -aV$ , где  $a$  — константа. Тогда работа равна  $-\int_0^p p dV = \frac{1}{a} \int_0^p p dp = \frac{p^2}{2a} = -\frac{pV}{2}$ .

Поток энергии изображают вектором, показывающим направление распространения и величину энергии, проходящей через единицу площади за единицу времени. Этот вектор называют *вектором Умова*.

На рис. 402 показаны графики волны смещений, скоростей, давлений, а также распределение плотности энергии и

потока ее вдоль направления распространения волны. По графикам рис. 402 видно, что средняя плотность <sup>1)</sup> полной энергии равна половине максимального значения плотности энергии (139.13), или

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2. \quad (139.16)$$

Следовательно, средняя плотность энергии равна максимальному значению плотности кинетической (или потенциальной) энергии.

Мы проанализировали движение частиц и распространение энергии в плоской волне

не в трубе; диаметр трубы может быть каким угодно, и, следовательно, все сказанное относится к любой плоской гармонической бегущей звуковой волне.

Рис. 402.

## § 140. Плоские волны в газе и упругой однородной среде

Фронт плоской волны есть плоскость, нормальная к направлению распространения волны. В цилиндрической трубе распространяется плоская волна. Мы рассмотрели синусоидальные волны, но там могут распространяться плоские волны любого вида, как и по струне. Найдем общее уравнение, которому удовлетворяет любая плоская волна (137.1), для газа.

Возьмем цилиндр газа длиною  $dx$  (рис. 403) и по второму закону динамики, учитывая обозначения § 138 и § 139, запишем равенство

$$\rho S - \left( \rho + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) S = \rho_0 S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

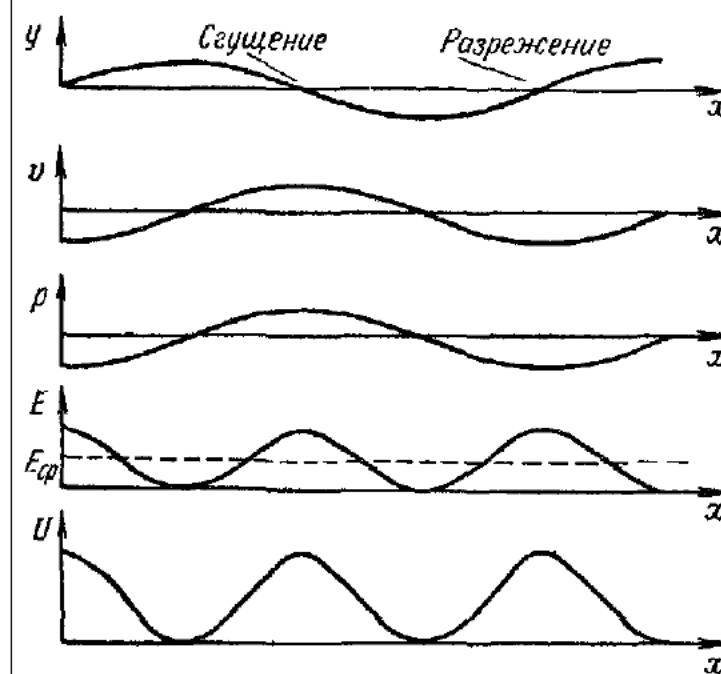
или

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (140.1)$$

<sup>1)</sup> Средней плотностью считают или «среднюю плотность по времени» в данной точке  $x = \text{const}$ , или «среднюю по } x \text{ при } t = \text{const}; первая вычисляется по

формуле  $E_{\text{ср}}^T = \frac{1}{T} \int_0^T E dt$  при  $x = \text{const}$ , вторая  $E_{\text{ср}}^x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda E dx$  при  $t = \text{const}$ ,

где  $\lambda = cT$  — длина волны. Очевидно,  $E_{\text{ср}}^x = E_{\text{ср}}^T = E_{\text{ср}}$ .



Вспоминая выражение (139.8), находим, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Сравнивая это с (140.1), получаем

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (140.2)$$

— волновое уравнение плоской волны в газе. Легко убедиться, что

$$y(x, t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

будет решением этого уравнения.

Действительно,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f'', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f'',$$

где  $f''$  — вторая производная функции  $f$  по аргументу  $t \pm \frac{x}{c}$ . Функция  $f$  может быть любой непрерывной функцией своего аргумента, она определяет форму волны, распространяющейся без искажения с постоянной скоростью  $c$ . Все точки плоскости фронта, соответствующие

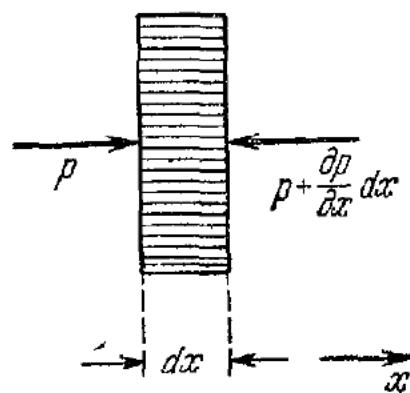


Рис. 403.

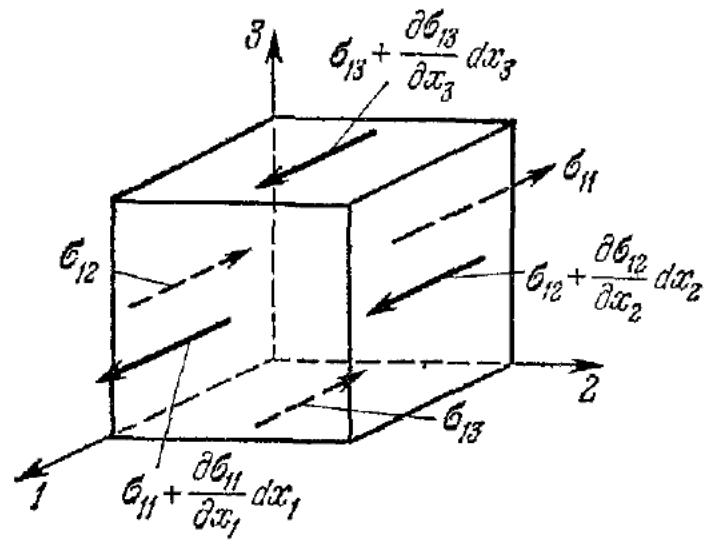


Рис. 404.

какому-то значению координаты  $x$ , имеют одинаковое смещение частиц  $y$ , одинаковое давление  $p$ , плотность  $\rho$  и т. д. в данный момент  $t$ .

В упругой среде, представляющей собой сплошное упругое твердое тело или пространство, занятые однородным и изотропным упругим веществом, также могут распространяться **возмущения деформации, напряжений, смещений**.

Законы распространения упругих волн в общем случае довольно сложны даже в однородной изотропной среде. Если по какой-либо причине в некотором месте возникает неоднородная деформация, то неоднородные напряжения вызовут деформации и перемещения соседних элементов, которые в свою очередь будут передаваться окружающим элементам, и в среде будут распространяться упругие волны.

Для того чтобы составить уравнение движения элемента объема  $dv$  под действием неоднородных напряжений, найдем силу, действующую в этом случае на достаточно малый элемент  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$  со стороны окружающей среды. Полагаем, что напряжения в каждой точке зависят от координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Определим составляющую силы вдоль оси 1 (рис. 404), выпишем все усилия, действующие на элемент  $dv$  в направлении этой оси (см. § 85):

$$\begin{aligned} dF_1 &= \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \\ &+ \left( \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 - \sigma_{12} dx_3 dx_1 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{13} dx_1 dx_2 = \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Следовательно, «плотность» составляющей силы вдоль оси 1 будет

$$f_1 = \frac{dF_1}{dv} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}. \quad (140.3)$$

Таким же путем найдем

$$f_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \quad f_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}. \quad (140.4)$$

По закону динамики сила, действующая на объем  $dv$ , должна быть равна его массе  $\rho dv$ , умноженной на ускорение. Поэтому

$$f_1 dv = \rho dv \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}, \quad f_2 dv = \rho dv \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}, \quad f_3 dv = \rho dv \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}, \quad (140.5)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $s_1, s_2, s_3$  — компоненты смещения частицы в точке  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Для того чтобы найти уравнение волн смещений, нужно выразить  $f_1, f_2, f_3$  через компоненты смещения  $s$ . В общем случае уравнения (140.5) имеют сложный вид и анализ их представляет очень трудную задачу. Здесь мы рассмотрим простой случай плоской волны. Например, для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x_1$ , все величины будут зависеть только от координаты  $x_1$  и времени  $t$ , поэтому все производные по  $x_2$  и  $x_3$  равны нулю.

Тогда из (140.3) и (140.5) следует:

$$f_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}. \quad (140.6)$$

Вспомним (87.15):  $\sigma_{11} = 2G \left( \epsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\epsilon \right)$ , где  $\epsilon_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$  и  $3\epsilon = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3}$ . Поэтому

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 2G \left[ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\mu}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} (3\epsilon) \right] = 2G \left[ \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} \right].$$

Теперь (140.6) можно записать так:

$$2G \left( 1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \right) \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}; \quad (140.7)$$

это — уравнение распространения продольной упругой волны, или просто *волновое уравнение плоской продольной волны*, так как смещение частиц  $s_1$  в волне происходит вдоль оси  $x_1$ , вдоль направления распространения волны. Уравнение (140.7) имеет вид (140.2), поэтому скорость распространения волны смещений  $s_1$  вдоль оси  $x_1$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho} \left( 1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \right)} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}. \quad (140.8)$$

Скорость волны зависит от  $E$ ,  $\rho$  и  $\mu$ .

Для смещений  $s_2$  и  $s_3$  по направлению осей 2 и 3 можно при тех же условиях из (140.4) и (140.5) записать следующие уравнения:

$$f_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}, \quad f_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}. \quad (140.9)$$

Из (87.6)  $\sigma_{12} = G \gamma_{12} = G \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right)$ . Отсюда находим

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = G \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2}.$$

Подставляя это в уравнение (140.9), получаем волновое уравнение для  $s_2$ :

$$G \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}. \quad (140.10)$$

Аналогично для  $s_3$ :

$$G \frac{\partial^2 s_3}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}.$$

Скорость распространения этих волн

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}}. \quad (140.11)$$

Такие волны называют *поперечными* или волнами *сдвига*; здесь смещение  $s_2$  (и  $s_3$ ) происходит по нормали к направлению распространения волны  $x_1$ .

Заметим, что для продольных волн в стержне скорость распространения равна

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (140.12)$$

Действительно, если ось стержня совпадает с осью 1, то в этом случае  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  и из общего равенства (87.1)  $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$  следует:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad \sigma_{11} = E \frac{\partial s_1}{\partial x_1}.$$

Поэтому уравнение (140.6) примет вид:

$$E \frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}. \quad (140.13)$$

Скорость распространения таких волн меньше скорости продольных волн в среде и больше скорости волн сдвига в среде. Действительно,

$$\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \geq 1 > \frac{1}{2(1+\mu)} \quad (140.14)$$

при  $\frac{1}{2} > \mu \geq 0.$

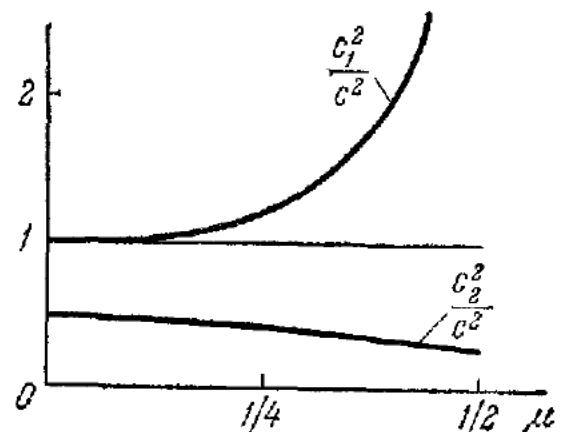


Рис. 405.

Зависимость скоростей распространения волн от значения коэффициента Пуассона  $\mu$  показана на рис. 405. Для всех этих случаев синусоидальные волны любой частоты распространяются с одинаковой скоростью. Это означает, что для таких волн среда не обладает *дисперсией*, т. е. нет зависимости скорости распространения от частоты.

Заметим, что плоские волны в безграничном пространстве, которые мы рассматривали здесь, представляют собой определенную абстракцию. В действи-

тельности такие волны можно наблюдать либо в трубе, либо в стержне, либо в ограниченной части пространства. Например, продольные (или поперечные) плоские волны можно наблюдать в некоторой области вблизи поверхности жесткого поршня, возбуждающего соответствующие колебания, примерно так же, как волны на поверхности воды, идущие от колеблющейся пластиинки.

В областях, далеких от поршня, в сторону от нормали к его плоскости, уже не будет плоских волн, там наблюдаются более сложные волновые колебания.

В газе в некоторой области пространства, вдали от точечного источника волн, можно считать волны плоскими, если размеры области достаточно малы по сравнению с расстоянием до источника. Здесь можно приближенно считать участки сферической волны почти плоскими.

### § 141. Наложение волн (интерференция)

Если в среде одновременно распространяется несколько волн, то, как показывает опыт, частица среды одновременно участвует в нескольких волновых движениях, причем для звуковых волн справедлив *принцип наложения* (или *принцип суперпозиции*). Принцип наложения волн означает, что каждая волна распространяется в среде *независимо* от наличия других волн; каждый волновой процесс происходит так, как если бы всех остальных волн не было. Для определения движения частицы среды мы должны найти движение частицы в каждой волне в отдельности, а затем все эти движения сложить.

Явление наложения двух (или нескольких) волновых движений при определенных условиях называется *интерференцией*.

Рассмотрим интерференцию двух звуковых волн в трубе. Предположим, что в трубе одновременно имеются две волны одинаковой частоты, распространяющиеся в противоположных направлениях. Пусть одна волна смещений распространяется в положительном направлении оси  $x$  и определена так:

$$y_1 = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

а вторая

$$y_2 = B \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

распространяется навстречу первой.

Каково будет сложное результирующее волновое движение? Совершенно очевидно, что отклонение каждой точки от положения равновесия в момент  $t$  будет равно

$$y_1 + y_2 = y.$$

Вторую волну  $y_2$  всегда можно представить как сумму двух бегущих волн, а именно:

$$y_2 = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + (B - A) \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (141.1)$$

Тогда результирующее колебание  $y(x, t)$  можно представить так:

$$y = y_1 + y_2 =$$

$$= A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + A \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + (B - A) \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = \\ = 2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t + (B - A) \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (141.2)$$

Результирующее волновое движение состоит из двух частей: из *стоячей волны*

$$2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t \quad (141.3)$$

и *бегущей волны*

$$(B - A) \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (141.4)$$

При  $B = A$ , т. е. когда две бегущие в противоположных направлениях волны имеют одинаковые амплитуды, результирующее волновое движение будет *стоячей волной*. Движение частиц в стоячей волне можно наглядно представить себе, если графически сложить через одинаковые промежутки времени отклонения частиц в двух одинаковых бегущих волнах, как это и сделано на рис. 406, где пунктиром показана волна, идущая влево, точками — волна, идущая вправо, и сплошной линией — положение частиц в стоячей волне (для большей наглядности построений на рис. 406 представлена волна, имеющая начальную фазу  $-\pi/8$ ).

Из формулы (141.3) видно, что все частицы в стоячей волне колеблются или в фазе, или в противофазе, но амплитуда колебаний всех точек вообще различная; то же мы видим и на рис. 406. Частицы, находящиеся в точках  $O, O', O'', \dots$ , все время будут в покое; эти точки называются *узлами стоячей волны смещений*, амплитуда этих точек равна нулю. Узлы расположены на расстоянии полуволны  $\frac{\lambda}{2}$  друг от друга. Если учесть, что  $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$ , то выражение для стоячей волны (141.3) можно переписать так:

$$2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (141.5)$$

Отсюда видно, что узлы расположены в данной волне при значениях координаты  $x = \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{2}$ . Частицы, находившиеся в покое в точках  $A, A', A'', \dots$ , отмеченные кружками, совершают колебания с наибольшей амплитудой; эти точки называются *пучностями стоячей волны смещений*. Пучности соответствуют точкам с координатами  $x_n = n \frac{\lambda}{2}$ , где  $n$  — целое число, если стоячая волна представлена формулой (141.5).

На рис. 407 показано последовательное положение частиц между двумя узлами  $O-O'$  в те моменты, для которых вычерчены кривые

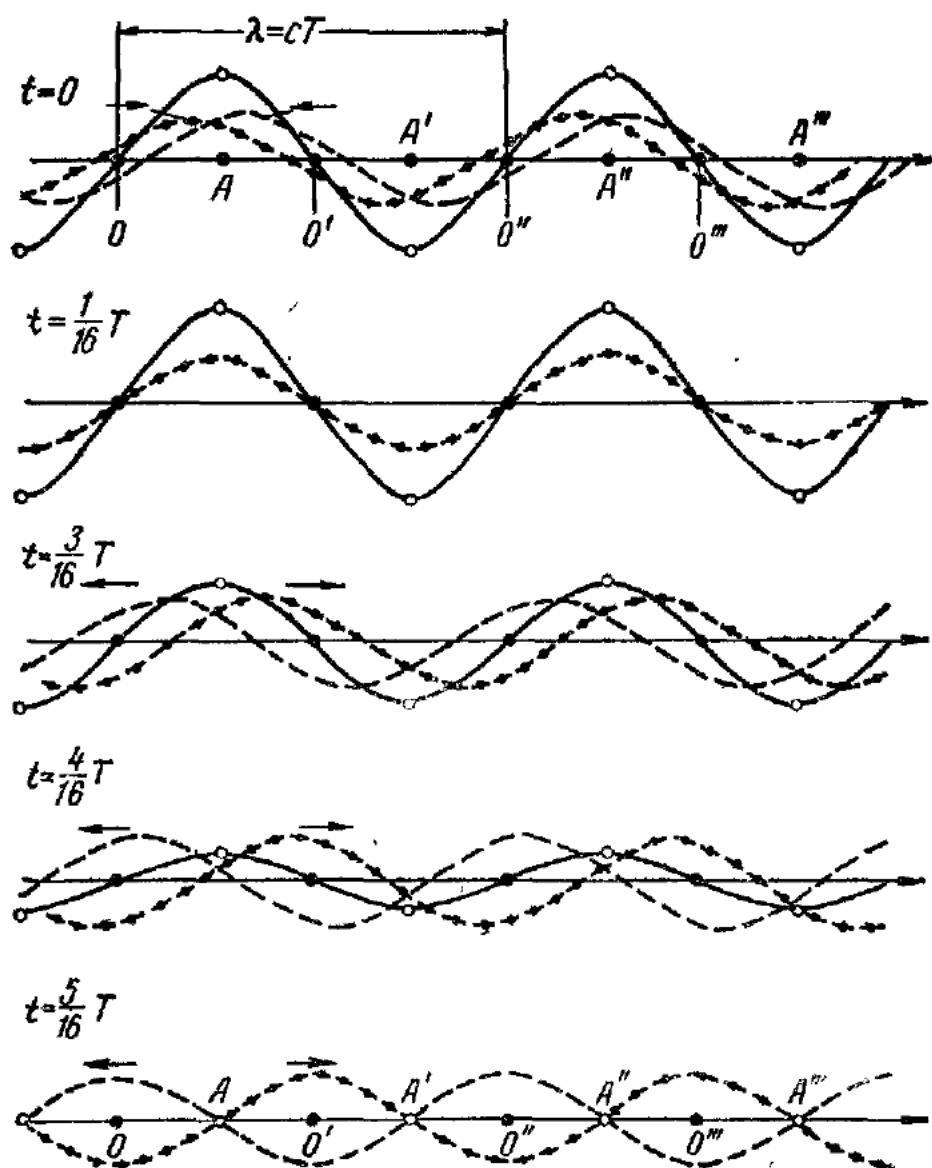


Рис. 406.

рис. 406. Все частицы, расположенные между двумя соседними узлами, совершают гармонические колебания в одинаковой фазе — все одновременно достигают крайнего положения и одновременно проходят через нуль, но амплитуда колебаний всех частиц различна.

Так как частицы, находящиеся в узлах, совсем не двигаются, то нет передачи энергии через узловые точки, энергия не распространяется вдоль стоячей волны; только частицы, находящиеся между

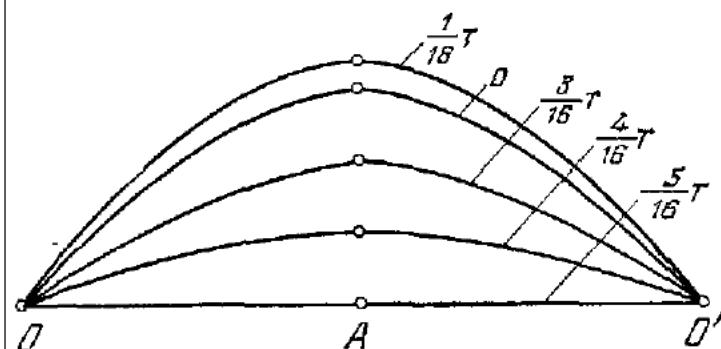


Рис. 407.

узлами, обмениваются энергией. Поэтому движение в стоячей волне, по существу, уже не является волновым движением,

хотя и получается в результате интерференции двух бегущих волн с одинаковой амплитудой.

Если амплитуды бегущих навстречу волн не равны, то волновое движение состоит из стоячей (141.3) и бегущей волны (141.4), амплитуда которой будет равна разности амплитуд основных бегущих волн. Иногда величину

$$k_\sigma = \frac{|A - B|}{B} \quad (141.6)$$

называют коэффициентом *бегучести*. Отличие от нуля этого коэффициента означает, что энергия передается в том направлении, куда бежит волна большей амплитуды.

## § 142. Отражение волн

Стоячие волны обычно образуются при отражении бегущей волны от границы среды. Волна, достигая границы, на которой резко изменяются свойства среды, отражается и, накладываясь на набегающую волну, образует вместе с ней стоячие волны.

Рассмотрим механизм отражения волн на примере отражения волнового импульса изгиба, бегущего по натянутой резиновой трубке, струне, веревке и т. п.

По натянутой резиновой трубке посыпают волновые импульсы, как было показано на рис. 393. Эти импульсы доходят до закрепленного конца трубки, отражаются и бегут обратно. Опыт показывает, что отраженный импульс имеет такую же форму, как и набегающий, но *противоположную «фазу»*. Если набегающий импульс представлял собой изгиб вверх, то отраженный имеет изгиб вниз, и наоборот.

В момент отражения волнового импульса на закрепленную частицу трубки действует перпендикулярная к трубке сила. Действие этой силы не только обеспечивает покой частицы трубки в точке закрепления, но и порождает отраженную волну, имеющую отклонение в противоположном направлении (рис. 408, а).

В самом деле, если трубка изогнута вверх, то сила со стороны закрепления будет действовать вниз, что соответствует удару, направленному вниз (рис. 408, б).

Точка закрепления остается все время неподвижной, поэтому энергия волнового движения не может передаваться далее, и, следовательно, отраженный волновой импульс по закону сохранения

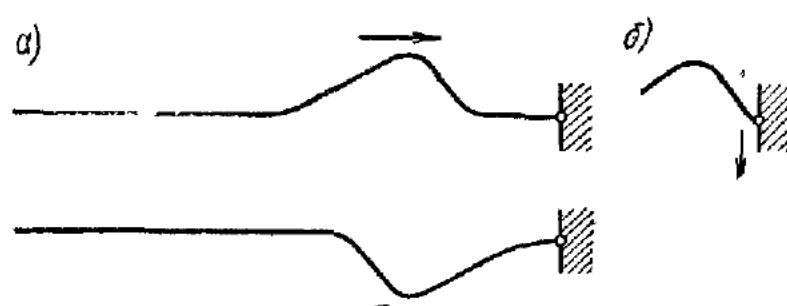


Рис. 408.

энергии должен иметь тот же самый вид, что и набегающий. Теоретические расчеты подтверждают это. (Конечно, мы полагаем, что потерей энергии при изгибе трубы (струны) можно пренебречь.)

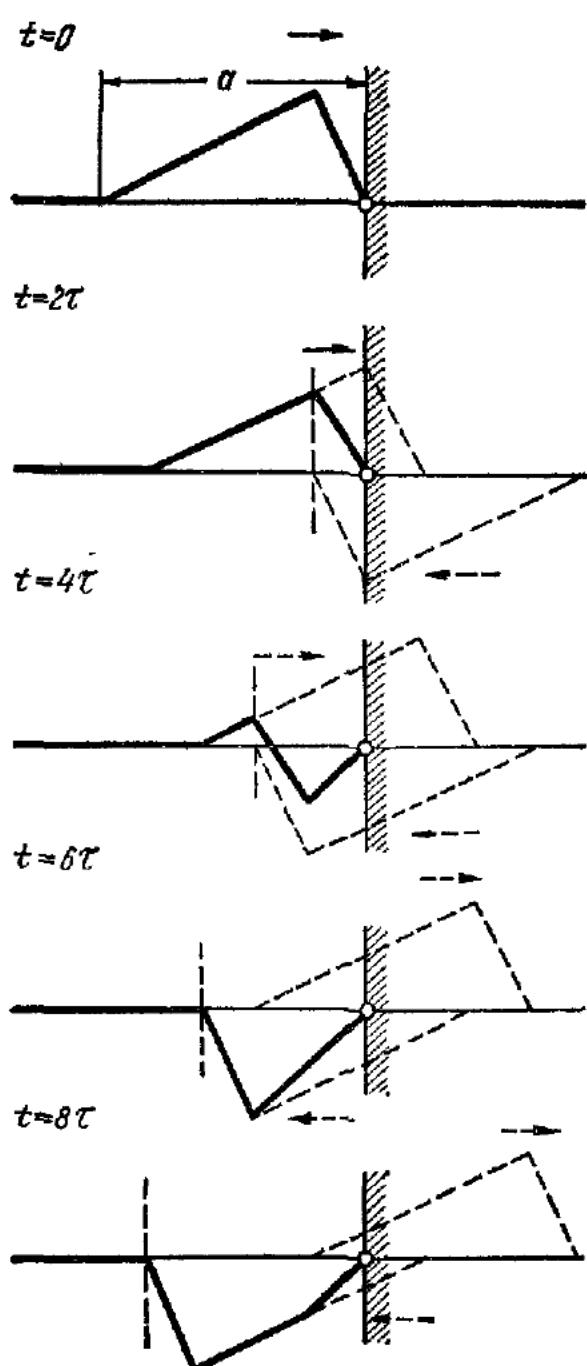


Рис. 409.

гом. Зная это, можно всегда еще кроме формы отраженной волны найти и скорости частиц струны при отражении, складывая геометрически скорости в набегающем и отраженном импульсах. Так, например, можно видеть, что прямой участок струны, прилегающий к точке крепления во время от  $2\tau$  до  $6\tau$ , будет иметь скорость, равную нулю. Частицы струны на этом участке начнут приобретать

Форму изгиба струны в момент отражения импульса можно просто найти, если представить себе мысленно такую картину: набегающий импульс уходит за точку крепления без искажения, но одновременно с ним в противоположном направлении «бежит» неискаженный импульс, причем в каждый момент отклонение частицы струны в точке закрепления в набегающем импульсе равно и противоположно отклонению в отраженном импульсе, и действительное положение точек струны в любой момент получится в результате сложения этих двух «воображаемых» импульсов<sup>1)</sup>.

На рис. 409 пунктиром показаны воображаемые набегающий и отраженный импульсы в различные моменты времени, а сплошной линией — положение точек струны в те же мгновения. Скорость волны равна  $c$ , длина импульса  $a$ , форма его показана через промежутки времени  $2\tau = \frac{a}{5c}$ .

Прежде чем рассматривать картину отражения, отметим, что форма импульса на рис. 409 такая, при которой частицы на крутом склоне волны имеют скорость в четыре раза большую, чем на пологом.

Во избежание недоразумений следует указать, что только те части этих волн не существуют, которые находятся за точкой крепления струны, а «воображаемые» волны до точки крепления действительно существуют как составные части падающего и отражающегося импульсов.

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений следует указать, что только те части этих волн не существуют, которые находятся за точкой крепления струны, а «воображаемые» волны до точки крепления действительно существуют как составные части падающего и отражающегося импульсов.

нужную скорость после  $t = 6\tau$ , и от излома побежит к точке закрепления еще излом, который можно видеть на струне в момент  $t = 8\tau$ . Этот излом добежит до точки крепления при  $t = 10\tau$ , когда начнет отходить оформленная отраженная волна.

Внимательное рассмотрение показывает, что изменение вертикальной скорости частицы происходит в те моменты, когда через нее проходит излом формы волны, в этот момент частица получает толчок, который и изменяет ее скорость. В самом деле, только в этот момент времени силы натяжения, действующие на частицу струны с обеих сторон, дадут вертикальную составляющую. Сила, действующая на частицу струны, пропорциональна изменению (производной) угла наклона фронта волны в данном месте. Это рассмотрение отражения волнового импульса от закрепленного конца показывает, что во время отражения форма импульса деформируется, но отраженный (уходящий) импульс имеет тот же самый вид (форму), только фаза его меняется на обратную.

По такому же закону происходит и отражение звуковой волны от неподвижной стенки. Допустим, что по трубе распространяется бегущая звуковая волна в виде импульса, каждая частица сжимается

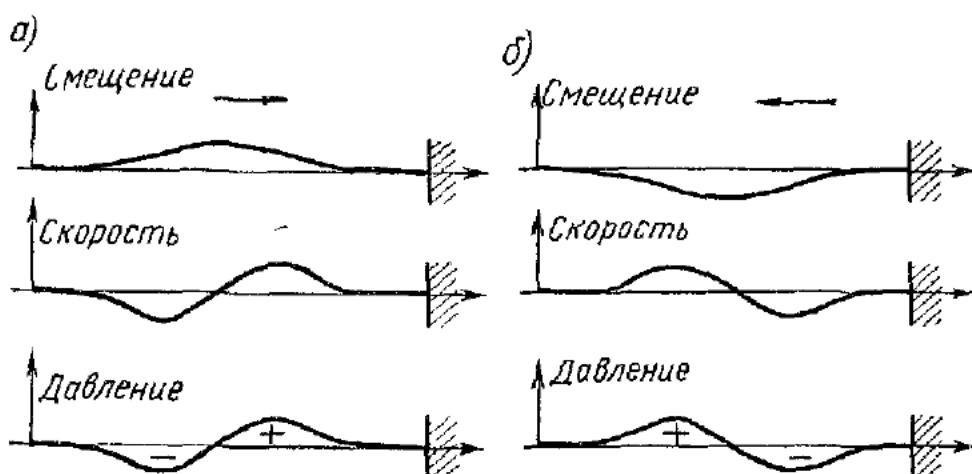


Рис. 410.

под действием близстоящей сзади нее частицы, получает определенную скорость и передает такое же действие соседней частице впереди и т. д. У неподвижной стенки иная картина: частицы, прилегающие к ней, сжимаются, но не могут получить скорости, следовательно, сжатие их должно быть больше, чем остальных частиц, и это дополнительное сжатие вызовет отраженную волну, бегущую от стенки назад в противоположной фазе. На рис. 410, а показаны графики различных величин в волновом импульсе, бегущем вправо: график смещений частиц, график скоростей частиц и график изменения давлений (или плотности), а на рис. 410, б показаны графики тех же величин для того же волнового импульса после его отражения от неподвижной стенки. Из этих графиков видно, что сгущение всегда имеет место в передней части волны, а скорость и давление в бегущей волне всегда находятся в фазе друг с другом.

Совсем иная картина наблюдается при отражении волны от свободной границы среды. Например, звуковая волна, бегущая вдоль упругого стального стержня, доходит до его конца и отражается обратно, так как плотность воздуха очень мала по сравнению с плотностью стали и движение окружающих частиц воздуха не оказывает никакого влияния на движение частиц стержня. Частицы стали у поверхности стержня будут двигаться почти так, как если бы стержень находился в пустоте. Энергия движения волны не может быть передана далее, и поэтому волна отразится и пойдет назад.

Отражение поперечной волны от свободного конца струны можно проследить, сделав такой опыт (рис. 411). К концу резиновой трубы привязать достаточно тонкую и легкую бечевку, конец которой закреплен. Затем натянуть трубку и наблюдать волновые импульсы, посыпаемые резкими ударами по трубке. Легко

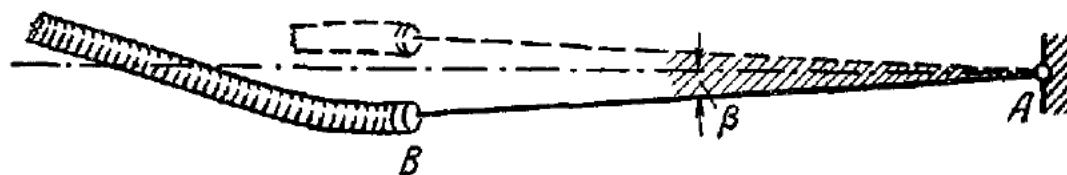


Рис. 411.

видеть, что импульсы будут отражаться от места прикрепления бечевки и следовать обратно с *той же* фазой, т. е. импульс, вызывающий смещение частиц вниз, отразившись, также вызывает смещение частиц вниз. Конец трубы, привязанный к бечевке, здесь можно считать свободным потому, что погонная плотность бечевки много меньше погонной плотности трубы, а натяжение остается постоянным для трубы и бечевки. Поэтому бечевка может принять только очень малую долю энергии, идущей с волной, почти вся энергия отразится обратно. Конец бечевки будет двигаться так, как если бы на него никакие силы в поперечном направлении не действовали: бечевка в любой момент будет представлять прямую линию, идущую от точки закрепления *A* к концу трубы *B* (рис. 411). Угол отклонения бечевки  $\beta$  ничтожно мал по сравнению с углом, который имеет трубка при движении по ней волны, поэтому поперечной составляющей натяжения бечевки можно пренебречь по сравнению с составляющей при изгибе трубы.

Отраженная от свободной границы волна имеет одинаковую фазу с набегающей волной. Действительно, частица стального стержня, находящаяся у свободного конца, не может быть сжата, так как нет силы, действующей на нее со стороны свободной границы, поэтому действие на нее силы со стороны частицы, стоящей за ней, пойдет на сообщение ей скорости, и смещение этой частицы должно быть больше смещения остальных. Такое смещение (которое будет в два раза больше, чем в набегающей волне) вызывает *отраженную волну*, бегущую от свободного конца. Амплитуда отраженной волны должна быть равна амплитуде набегающей волны, что следует из закона сохранения энергии.

Последовательные этапы отражения треугольного волнового импульса от свободного конца струны показаны на рис. 412. Свобод-

ный конец получает двойное смещение в тот момент, когда максимум набегающей волны достигает его.

Как было показано раньше, две бегущие в противоположном направлении синусоидальные волны с одинаковой частотой и амплитудой образуют *стоячую волну*. При отражении синусоидальной волны, бегущей по трубе, от закрытого (или открытого) конца всегда в трубе образуется стоячая волна, если при отражении не происходит потерь энергии. Таким образом, в закрытой с обоих концов трубе или на струне с закрепленными концами возможны гармонические колебания в виде стоячих волн, при которых у закрытого конца трубы имеется *узел волны смещения*; то же наблюдается и у закрепленных концов струны.

В стоячей волне нет распространения энергии вдоль волны, ибо энергия не может передаваться через те сечения трубы, которые совпадают с узлом волны смещений, точки этого сечения остаются в покое все время, и поэтому они не могут передавать работу (энергию) от одних частиц к другим. Только в промежутке между двумя узлами происходит обмен энергией между частицами при колебаниях.

Действительно, в тот момент, когда частицы проходят положение равновесия (при  $t = \frac{5}{16} T$ , см. рис. 407), все частицы обладают только кинетической энергией, наибольшую скорость имеет частица, расположенная посередине между узлами, следовательно, кинетическая энергия частиц (равная полной) в этот момент наибольшая в середине и постепенно уменьшается к узловым точкам. В тот момент, когда все частицы достигнут крайнего положения (при  $t = \frac{1}{16} T$ ), скорость их будет равна нулю, поэтому они будут обладать только потенциальной энергией сжатия (или растяжения); средние частицы не будут испытывать деформации, так как посередине между узлами  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$  и по формуле (139.6) изменение давления равно нулю; вместе с тем частицы, лежащие ближе к узлам, будут иметь тем большие деформации, чем ближе

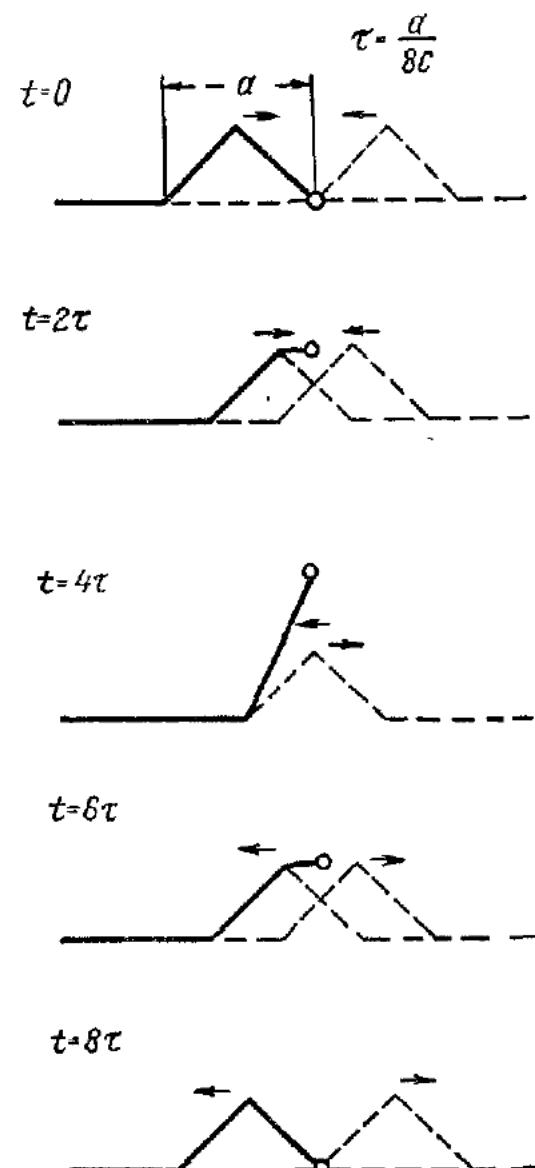


Рис. 412.

они лежат к узлу, следовательно, в этот момент частицы, лежащие вблизи узлов, имеют наибольший запас энергии. Таким образом, в стоячей волне энергия в промежутке между узлами «переливается» от концов к середине промежутка два раза за период.

В стоячей волне в каждом промежутке между двумя узлами колебания происходят как бы совершенно независимо от остальных участков. На самом деле, представим, что на месте *узловых* сечений стоячей волны в трубе поставлены жесткие стенки, тогда колебания в этом сечении трубы будут происходить так же, как и до этого. То же самое будет и на струне; если закрепим струну в узловых точках стоячей волны, то колебания будут продолжаться так же, как если бы струна в этих местах была свободна.

### § 143. Собственные колебания струны и воздуха в трубе

Представим себе струну, натянутую между двумя неподвижными зажимами, или воздух, заключенный в закрытой с обоих концов трубе. Если дадим какое-то начальное «возмущение», которое выведет частицы струны из состояния равновесия, то на струне возникнут колебания.

Ударим струну или оттянем и затем отпустим; сожмем внезапно поршнем воздух в трубе, а затем отпустим и закрепим поршень, и т. п.; после всех этих «возмущений» возникнут колебания, которые следует называть *собственными колебаниями струны* (или *собственными колебаниями воздуха в трубе*), так как они происходят под действием сил, присущих системе колеблющихся частиц. В общем случае, т. е. после любого «возмущения», колебания будут иметь довольно сложный вид: частицы струны будут совершать какие-то сложные периодические колебания (если не принимать во внимание затухания), и притом все частицы будут колебаться по-разному. В том, что колебания будут периодическими, можно убедиться на основании следующих простых рассуждений.

Допустим, что на струне после возмущения возник один импульс, бегущий вправо. На рис. 413, *а* этот импульс изображен в момент времени  $t_1$ ; через некоторое время импульс отразится от точки закрепления (рис. 413, *б*) и пойдет обратно, затем, отразившись еще раз, в момент времени  $t = t_2$  (рис. 413, *в*) займет то же положение, что и в начальный момент  $t = t_1$ . В следующие промежутки частицы будут совершать точь-в-точь такие же движения, как и за промежуток времени  $t_2 - t_1$ , и т. д., поэтому промежуток  $t_2 - t_1 = T$  и будет периодом колебаний всех точек струны. Очевидно, что время  $t_2 - t_1 = T$  равно тому, за которое импульс проходит расстояние, равное  $2l$ , удвоенной длине струны<sup>1)</sup>. Поэтому, если скорость

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что эти рассуждения справедливы, если импульс при распространении и оражении не изменяет своей формы.

распространения волнового импульса  $c$ , то период собственных колебаний струны будет равен

$$T = \frac{2l}{c}. \quad (143.1)$$

Если «возмущения» не состоят из одного простого волнового импульса, то всегда их можно представить как сумму простых, и для каждого из них останется в силе заключение о периоде колебаний.

Только здесь необходимо сделать существенную оговорку: период, определенный по формуле (143.1), будет наибольшим периодом колебаний. Легко себе представить такие специальные начальные возмущения, при которых период колебаний будет в два, три, четыре и т. д. раза меньше  $T$ . В самом деле, пусть в начальный момент в результате возмущения получились два бегущих вдоль струны импульса, которые в момент  $t = t_1$  занимают положение, показанное на рис. 413, г. Импульсы, одинаковые по форме, находятся на одинаковых расстояниях от концов, имеют противоположные фазы и направления. Можно просто убедиться, что период колебаний каждой частицы в этом случае будет равен  $\frac{1}{2}T$ . Так же нетрудно найти такое начальное расположение импульсов, когда период колебаний будет равен  $\frac{1}{3}T$ ,  $\frac{1}{4}T$  и т. д.

Отметим, что в общем случае собственные колебания частиц струны (или частиц воздуха в трубе) будут *периодическими, но не гармоническими*, т. е. колебание каждой частицы со временем, вообще говоря, не будет происходить по закону синуса (или косинуса).

Но после определенного начального возмущения струна может совершать *гармонические* собственные колебания. Представим себе, что все участки струны отклонены от положения равновесия по «синусоидальному» закону так, как показано на рис. 414, а, и затем освобождены. Каково будет движение частиц струны? Оно будет таким же, как и движение их в стоячей волне на той же струне с длиной волны  $\lambda = 2l$ .

Действительно, представим себе достаточно длинную струну, натяжение и плотность которой равны натяжению и плотности

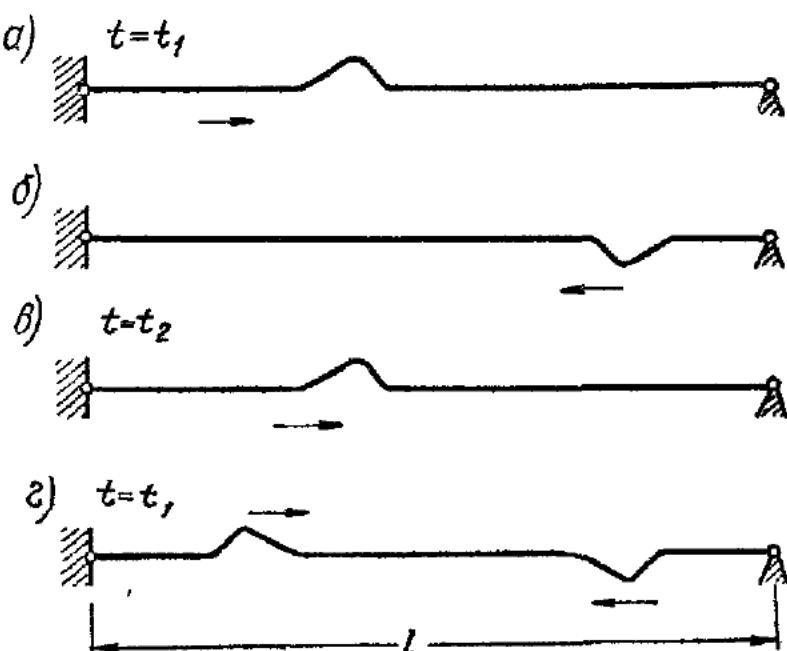


Рис. 413.

короткой струны с закрепленными концами. Если на длинной струне образовались такие стоячие волны, что расстояние между узлами в точности равно длине короткой струны  $l$  и максимальное отклонение в стоячей волне совпадает с начальным отклонением короткой струны, то движение струны между узлами и движение короткой струны будут одинаковы, так как они совершаются под действием одинаковых сил натяжения и при одинаковых начальных условиях. Поэтому колебание каждой частицы струны будет гармоническим, все точки струны колеблются по синусоидальному закону в фазе друг с другом (рис. 414, *б* и *в*).

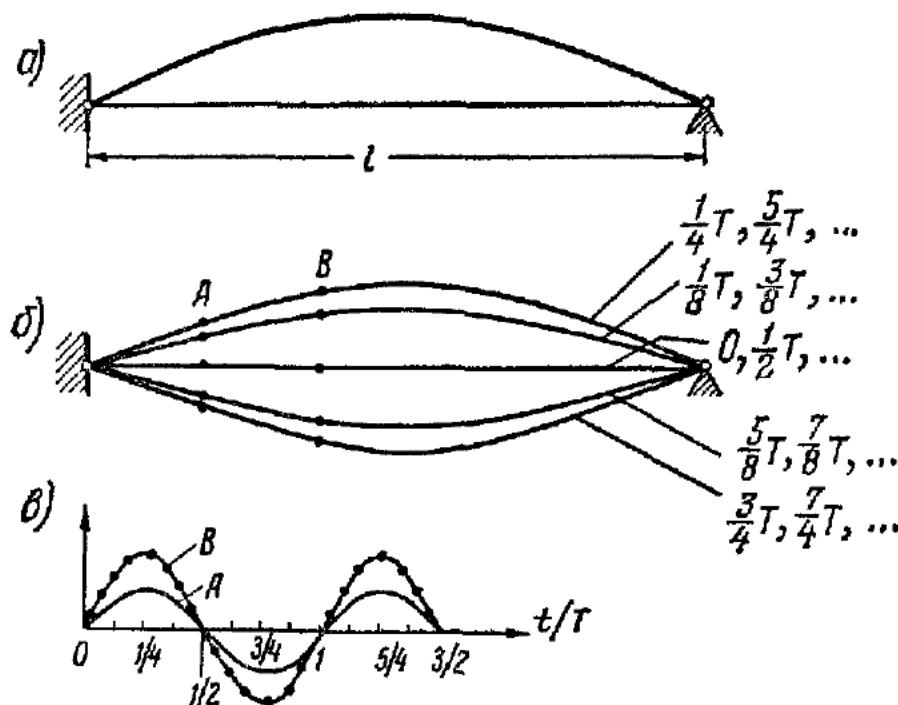


Рис. 414.

Вспомним, что длина волны  $\lambda$  и период колебаний  $T$  связаны со скоростью распространения волны  $c$  следующим равенством:

$$T = \frac{\lambda}{c}. \quad (143.2)$$

Период колебаний и длина волны не зависят от амплитуды волны, и период собственных колебаний не зависит от амплитуды. Из условий (143.1) и (143.2) находим, что наибольший период собственного колебания струны, показанной на рис. 414, *а*, равен

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{2l}{c}.$$

Аналогичные рассуждения убеждают нас, что после такого начального отклонения струны, которое показано на рис. 415, *а*, струна будет совершать гармонические собственные колебания с периодом

$$T_2 = \frac{l}{c},$$

так как в этом случае  $\lambda = l$ .

А из положения, показанного на рис. 415, б, струна будет совершать гармонические собственные колебания с периодом

$$T_3 = \frac{2l}{3c},$$

так как  $\lambda = \frac{2}{3}l$ .

Таким образом, струна с закрепленными концами может совершать гармонические собственные колебания с различными периодами:

$$T_1 = \frac{2l}{c}, \quad T_2 = \frac{2l}{2c}, \quad T_3 = \frac{2l}{3c}, \dots, \quad T_n = \frac{2l}{nc}, \dots, \quad (143.3)$$

в зависимости от начального состояния. Струна имеет бесконечное число собственных периодов, или бесконечное число собственных частот

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{2l} nc = \frac{\pi nc}{l}, \quad (143.4)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При колебаниях с любой собственной частотой  $\omega_n$  струна в каждый момент имеет определенную форму. Форма собственного колебания в данном случае представляется такой синусоидой, при которой на длине струны укладывается  $n$  половинок этой синусоиды.

Если же каким-нибудь иным способом возбудить струну, ударить как-то или как-то отклонить из положения равновесия, то возбудится несколько собственных колебаний с различными частотами и движение будет сложным, но состоящим из собственных гармонических колебаний.

Наблюдать чистые собственные колебания струны с одной частотой трудно, ибо они относительно быстро (во времени) затухают. Поэтому проще всего наблюдать собственные колебания струны в режиме автоколебаний. Как уже говорилось ранее (см. § 131), при автоколебаниях почти всегда происходят колебания, близкие к собственной частоте, и поэтому форма их близка к форме собственных колебаний.

Форму собственных колебаний натянутого резинового шнуря можно видеть в следующем демонстрационном опыте. Автоколебания натянутого резинового шнуря (обычно резиновой трубы диаметром 3—5 мм) длиной в несколько метров возбуждаются струей воздуха, вытекающего из небольшого сопла<sup>1)</sup> диаметром 1—2 мм

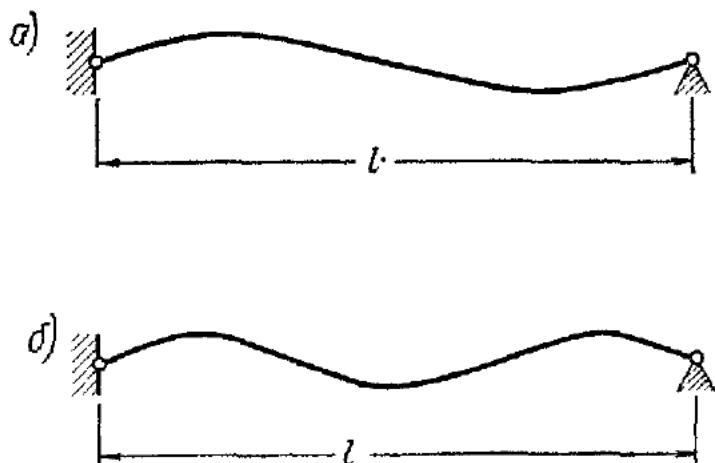


Рис. 415.

<sup>1)</sup> Источником потока можно взять насос обычного комнатного пылесоса или воздуховодку.

(рис. 416). Если струя направлена перпендикулярно к шнуру так, что в положении равновесия шнур проходит не через центр струи, то шнур приходит в автоколебания с одной из собственных частот. Легким прикосновением руки в месте узла можно заставить шнур колебаться с любой собственной частотой. Практически удается на длинном шнуре получать устойчивые колебания с частотами от первой до седьмой собственной частоты по порядку. Демонстрация колебаний шнура очень наглядна в теневой проекции.

Так же можно возбудить собственные колебания струны и скрипичным смычком: при легком и равномерном нажиме, выбирая место возбуждения и касаясь легонько пальцем в месте узла желаемого тона, можно после некоторой тренировки возбуждать различные собственные колебания струны. Форму их наблюдать в аудитории

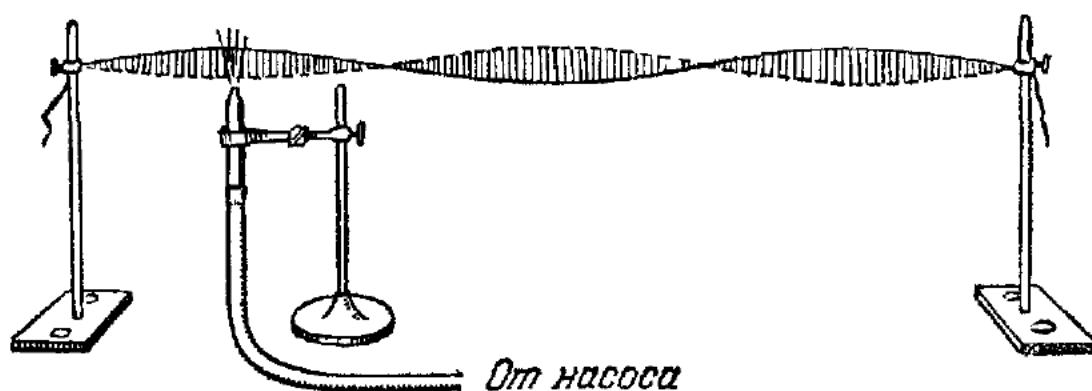


Рис. 416.

трудно, но частоту определить просто — по высоте звука, издаваемого колеблющейся струной.

Собственные колебания столба воздуха (или другого газа), заключенного в трубу, совершенно аналогичны собственным колебаниям струны, только в струне частицы совершают поперечные колебания (перпендикулярные к направлению распространения волн), а в газе частицы совершают продольные колебания (вдоль направления распространения волн).

На рис. 417 показаны графики собственных колебаний в закрытой с обоих концов трубе при низшей собственной частоте  $\omega = \frac{\pi c}{l}$ . На рисунке приведены графики четырех величин: а) смещения частиц, б) плотности, в) изменения давления и г) скорости — для трех различных моментов одного периода колебаний. При  $t = 0$  все частицы имеют равную нулевую скорость и крайнее отклонение вправо от положения равновесия; через четверть периода, при  $t = T/4$ , все частицы имеют максимальную скорость влево, но давление и плотность одинаковы для всех частиц и находятся они в положении равновесия; при  $T/2$  все частицы имеют максимальные отклонения влево, и т. д.

Колебания с низшей частотой  $\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$  (первый тон) происходят так, что частицы попеременно сгущаются то к одному концу, то к другому. Сжатие у одного конца при  $t = 0$  (см. рис. 417) выравнивается и создает движение частиц в сторону разрежения; в момент  $t = T/4$  сжатие исчезает, плотность становится равномерной, но частицы имеют наибольшую скорость; двигаясь далее «по инерции», частицы опять сжимают газ у другого конца ( $t = T/2$ ), и т. д.

Частицы в узлах волны смещения (у концов трубы) не совершают колебаний, и скорость их все время равна нулю, но они находятся в *пучностях давления и плотности*, они претерпевают наибольшие изменения давления и плотности, в то время как частицы, совершающие наибольшие отклонения от положения

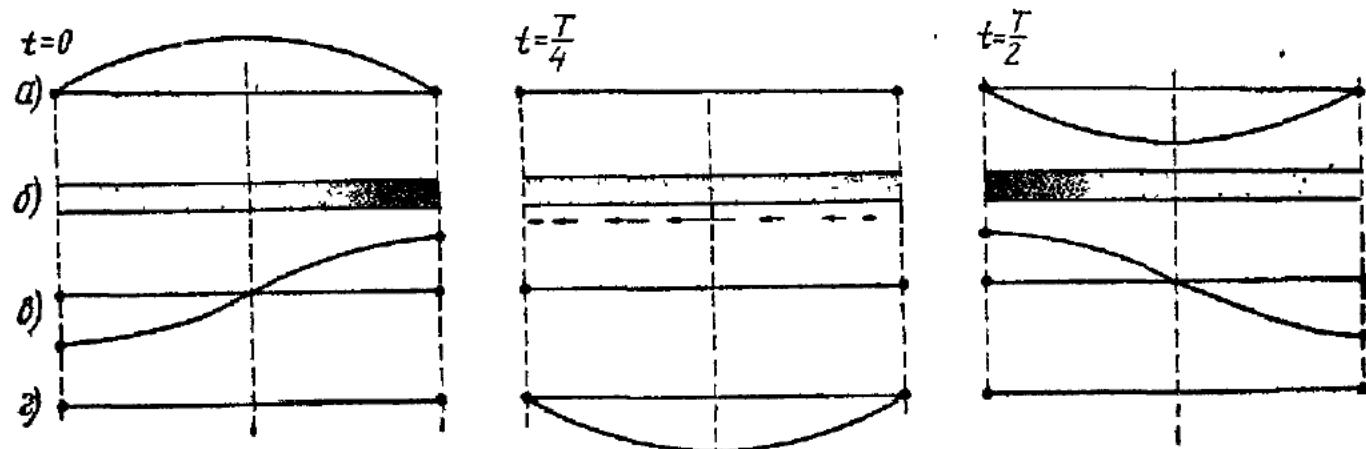


Рис. 417.

равновесия при колебаниях, или частицы, находящиеся в *пучностях смещения* (в середине трубы), совсем не испытывают изменений давления и плотности — они находятся в *узле колебаний давления и плотности*.

В момент  $t = 0$  все частицы имеют только потенциальную энергию сжатия, причем максимум энергии имеют частицы, лежащие у концов трубы. Через четверть периода, при  $t = T/4$ , все частицы имеют только кинетическую энергию; плотность частиц такова, какова она была в состоянии равновесия, потенциальная энергия сжатия равна нулю, максимальной кинетической энергией обладают частицы, находящиеся в середине трубы. В промежутке между этими двумя моментами частицы обладают как кинетической, так и потенциальной энергией, и за это время энергия переходит от концов (из пучностей давления) к середине (к пучностям смещения).

В трубе могут возбуждаться собственные колебания с различными периодами; например, в трубе, закрытой с обоих концов, могут совершаться только такие собственные колебания, что при каждом из них по длине трубы укладывается целое число полуволн. Если первое колебание имеет два узла смещений, то второе —

три, и т. д. Картина колебаний между двумя узлами любого собственного колебания будет такая же, как и для первого тона (см. рис. 417).

Собственные колебания в трубе, открытой с одного конца, имеют совсем иной вид. Графики распределения смещений в момент максимального отклонения показаны на рис. 418, верхний — для первого собственного колебания, нижний — для второго.

В этом случае на открытом конце трубы всегда будет пучность смещения, поэтому на длине трубы будет укладываться нечетное число четвертей длин волн. Собственные частоты колебаний воздуха в такой трубе относятся друг к другу, как натуральный ряд нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, ...

Отметим общий закон собственных колебаний. Если колеблющаяся система имеет одну степень свободы (маятник и т. п.),

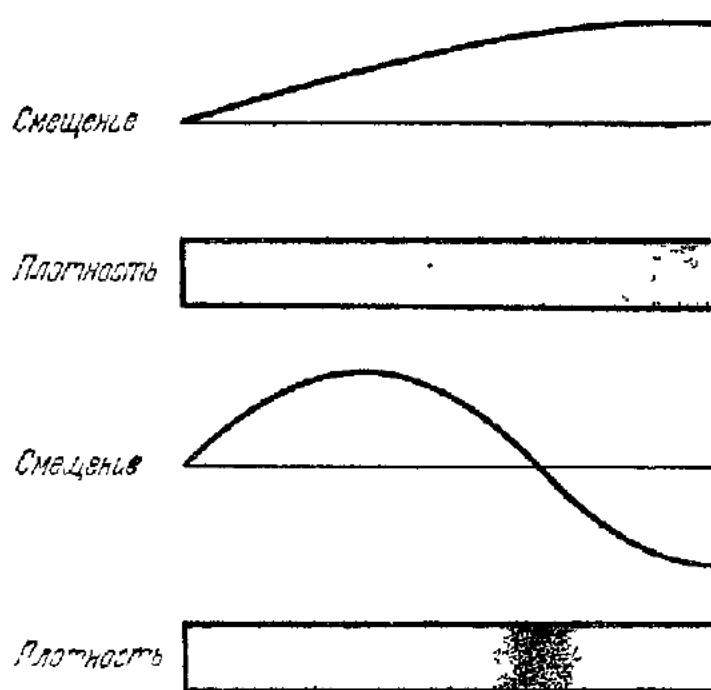


Рис. 418.

то она совершает собственные колебания *с одной частотой*. Система с двумя степенями свободы (два связанных маятника) имеет *две* собственные частоты. Струна имеет бесконечное число частиц, бесконечное число степеней свободы, и она имеет *бесконечное* число собственных частот:  $\omega_1, \omega_2, \dots$  Следовательно, *число собственных частот системы равно числу степеней свободы*.

## Г л а в а XVI

### ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

#### § 144. Основные явления

Ощущение звука возникает в результате воздействия механических колебаний на слуховой аппарат человека. Ухо человека воспринимает колебания определенной частоты и интенсивности, поэтому колебания, частота которых лежит в пределах от 16 до 20 000 Гц и которые могут быть восприняты ухом, называются *звуковыми*.

Любое тело, совершающее механические колебания, частота которых лежит в указанном диапазоне, является источником звука. Так, например, колеблющаяся струна, мембрана, пластинка и т. п. вызывают продольные колебания в окружающей среде. Источником звука может быть и не твердое тело, а газообразное или жидкое, например паровозный свисток, органная труба, голосовой аппарат человека, водопроводный кран (его «пение») и т. п. Здесь источником звука являются колебания газа или жидкости, заключенных в определенном объеме или протекающих по некоторым каналам. Источник звука, вызывая вблизи себя определенные колебания плотности (или давления), вызывает такие же колебания плотности частиц окружающей среды, распространяющиеся в виде волн, вообще говоря, во все стороны.

Законы распространения звуковых волн от данного источника определяются как устройством самого источника, так и свойствами окружающей среды. Если размеры источника звука малы по сравнению с длиной излучаемой им звуковой волны  $\lambda$  (напомним, что  $\lambda = cT$ , где  $c$  — скорость звука в среде,  $T$  — период колебаний), то такой источник можно считать «точечным»: если представить этот источник в однородной среде, то от него будут распространяться *сферические волны*.

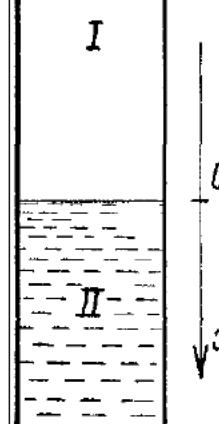
Так, например, какова будет волна звука паровозного свистка с частотой примерно 350 Гц? Для этой частоты длина волны в воздухе примерно равна 1 м, а размеры отверстия паровозного свистка порядка 1 см, поэтому волну, распространяющуюся от свистка,

можно считать приближенно волной от точечного источника, сферической. Конечно, наличие земли и частей самого паровоза нарушит сферическую форму волны, но вверх и в стороны приближению можно считать (при спокойном воздухе) форму волны частью сферы.

Если размеры источника велики по сравнению с длиной волны, то форма распространяющейся волны получается более сложной; ее можно найти, воспользовавшись принципом Френеля — Гюйгенса. Согласно этому принципу каждый маленький кусочек поверхности волны излучает *элементарную сферическую волну* и положение волновой поверхности в последующий момент совпадет с огибающей элементарных волн, которая получилась в результате их интерференции. Если поверхность колеблющегося тела представляет собой плоскость, все точки которой колеблются в фазе, и если размеры этой плоскости велики по сравнению с длиной волны, то будет излучаться плоская волна в направлении перпендикуляра к плоскости, которая только вблизи краев плоскости и на некотором расстоянии от них будет искажена вследствие интерференции элементарных волн.

### § 145. Отражение звуковых волн от препятствий

Звуковые волны отражаются от границы двух различных сред, где механические свойства резко меняются. Например, при переходе волны из воздуха в воду (или обратно) значительная часть энергии отразится и только небольшая доля энергии пройдет в другую среду.



Звуковые волны в воздухе отражаются и от твердых тел, например от поверхности земли, это известно каждому из наблюдения явления эхо. При отражении звуковых волн существенную роль играет изменение плотности среды  $\rho$  и скорости звука  $c$ , точнее, изменение величины  $\rho c$ . Чем больше изменение величины  $\rho c$  при переходе из одной среды в другую, тем больше энергии звуковой волны отражается от границы раздела этих двух сред.

Выведем законы отражения звуковых волн для простейшего случая нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела двух сред. Пусть длинная труба, вдоль оси которой распространяется плоская волна, наполнена различными веществами (рис. 419).

Допустим, что источник находится в среде  $I$  и от него идет бегущая волна смещений  $y_1 = a_1 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1} \right)$ , где  $a_1$  — амплитуда,  $x$  — координата вдоль оси трубы,  $\omega$  и  $\lambda_1$  — частота и длина волны. От границы раздела сред пойдет назад отраженная волна  $y_2 = a_2 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \Phi_1 \right)$ , и во второй среде за границей раз-

Рис. 419.

дела пойдет проходящая волна  $y_3 = a_3 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_2} + \varphi_2\right)$ . На границе раздела, допустим, при  $x = 0$ , должны соблюдаться условие непрерывности смещения

$$y_1 + y_2 = y_3 \quad (145.1)$$

и равенство давлений

$$p_1 + p_2 = p_3 \quad (145.2)$$

в каждый момент времени  $t$ . В этих формулах  $p_1$  есть изменение давления в падающей волне,  $p_2$  и  $p_3$  — соответственно в отраженной и проходящей. В силу условия (145.1) должно выполняться следующее равенство (при  $x = 0$ ):

$$a_1 \cos \omega t + a_2 \cos (\omega t + \varphi_1) = a_3 \cos (\omega t + \varphi_2). \quad (145.3)$$

Вспомним (см. (139.7)), что давление в плоской волне  $p = -\kappa p_0 \frac{\partial y}{\partial x}$  (здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты); подставляя сюда выражение для смещений, получаем

$$p_1 = -\kappa_1 p_0 a_1 \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$$

и аналогичные выражения для  $p_2$  и  $p_3$ . Подставляя эти выражения в условие (145.2), получаем

$$\frac{\kappa_1}{\lambda_1} \{-a_1 \sin \omega t + a_2 \sin (\omega t + \varphi_1)\} = -\frac{\kappa_2}{\lambda_2} a_3 \sin (\omega t + \varphi_2). \quad (145.4)$$

Равенства (145.3) и (145.4) должны удовлетворяться при любом значении  $t$ ; поэтому выделим в каждом равенстве члены, содержащие  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , и приравняем коэффициенты при них нулю. Отсюда получим следующие четыре уравнения для четырех неизвестных величин  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \cos \varphi_1 &= a_3 \cos \varphi_2, & a_2 \sin \varphi_1 &= a_3 \sin \varphi_2, \\ -a_1 + a_2 \cos \varphi_1 &= -\frac{\lambda_1 \kappa_2}{\lambda_2 \kappa_1} a_3 \cos \varphi_2, & a_2 \sin \varphi_1 &= -\frac{\lambda_1 \kappa_2}{\lambda_2 \kappa_1} a_3 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (145.5)$$

Решаем эти уравнения. Вычитая из второго четвертое, получаем

$$a_3 (1 + \Delta) \sin \varphi_2 = 0, \quad \text{где } \Delta = \frac{\lambda_1 \kappa_2}{\lambda_2 \kappa_1} \neq 0 \quad \text{и } \Delta > 0.$$

Учитывая это, видим, что последнее равенство может быть удовлетворено только при  $\varphi_2 = k\pi$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Обращаясь ко второму уравнению, учитывая, что  $a_3 \neq 0$ , находим, что  $\varphi_1 = m\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  Вычитая из первого уравнения третье, получаем

$2a_1 = a_3(1 + \Delta) \cos \varphi_2$ . Так как  $a_3 > 0$  и  $\Delta > 0$ , то  $\cos \varphi_2 = +1$ , или  $\varphi_2 = 0, 2\pi, \dots$  Следовательно, амплитуда проходящей волны

$$a_3 = a_1 \frac{2}{1 + \Delta}. \quad (145.6)$$

Подставляя это в первое уравнение и учитывая, что  $\cos \varphi_2 = +1$ , получаем

$$a_2 \cos \varphi_1 = a_1 \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}. \quad (145.7)$$

По предыдущему  $\cos \varphi_1$  может быть равен  $+1$  или  $-1$ . Из последнего равенства, учитывая, что все величины положительны, получаем:

$$\text{при } \Delta < 1 \quad \cos \varphi_1 = +1, \quad \varphi_1 = 0;$$

$$\text{при } \Delta > 1 \quad \cos \varphi_1 = -1, \quad \varphi_1 = \pi.$$

Теперь проанализируем следствия расчета. Условие  $\varphi_2 = 0, 2\pi, \dots$  означает, что фаза проходящей волны равна фазе падающей, на границе раздела фаза проходящей волны не изменяется. Последние равенства говорят нам, что фаза отраженной волны может быть либо нулем, либо  $\pi$ , т. е. отраженная волна должна быть либо в фазе с падающей, либо иметь противоположную fazу, смотря по тому, больше или меньше единицы  $\Delta$ . Величина  $\Delta$  отображает физические свойства среды.

Вспомнив, что  $c_1 = \sqrt{\frac{\kappa_1 p_0}{\rho_1}}$ , или  $c_1^2 \rho_1 = \kappa_1 p_0$ , ее можно записать так:

$$\Delta = \frac{\lambda_1 \kappa_2}{\lambda_2 \kappa_1} = \frac{c_1 \kappa_2}{c_2 \kappa_1} = \frac{c_1 \kappa_2 p_0}{c_2 \kappa_1 p_0} = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}. \quad (145.8)$$

Величину  $\rho c$  называют *акустическим волновым сопротивлением среды*. Фаза отраженной волны зависит от того, какая среда имеет большее волновое сопротивление. Если волновое сопротивление второй среды меньше, то отражение происходит без потери фазы; наоборот, если волновое сопротивление второй среды больше, отраженная волна имеет обратную fazу.

Амплитуды отраженной и проходящей волн будут зависеть от отношения волновых сопротивлений среды (от величины  $\Delta$ ). Например, для воздуха  $\rho c \approx \approx 43 \text{ г}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$ , а для воды  $14,2 \cdot 10^4 \text{ г}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$ , при переходе из воздуха в воду  $\Delta = \frac{14,2}{43} \cdot 10^4 \approx 3300$ . Следовательно, амплитуда проходящей волны  $a_2 = a_1 \frac{2}{1 + \Delta} \approx \frac{1}{1650} a_1$  будет составлять приблизительно одну полуторатысячную долю амплитуды падающей волны. При падении волны из воды в воздух амплитуда проходящей волны

$$a_3 = a_1 \frac{2}{1 + \frac{1}{3300}} \approx 2a_1.$$

Амплитуда колебаний в воздухе примерно в два раза больше, чем амплитуда колебаний в воде.

Если акустические сопротивления обеих сред равны, то  $\Delta = 1$  и  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = a_3$ , отражения не будет и вся энергия пройдет во вторую среду.

Теперь рассмотрим, как будет проходить энергия через границу раздела двух сред. Изменение амплитуды при прохождении волны через границу раздела непосредственно еще совсем не характеризует величину потока энергии через границу раздела.

Вспомним, что средний поток энергии в плоской волне определяется величиной

$$\frac{1}{2} \rho c a^2 \omega^2,$$

где  $a$  — амплитуда смещения (см. § 139). Тогда, учитывая (145.6) и (145.8), средний поток энергии проходящей волны можно записать так:

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_2 c_2 a_2^2 \omega^2 = \frac{\rho_2 c_2 \omega^2 4 a_1^2}{2(1+\Delta)^2} \cdot \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} \frac{1}{2} \rho_1 c_1 a_1^2 \omega^2 = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} E_1,$$

где  $E_1$  — средний поток энергии падающей волны. Доля энергии, проходящей через границу раздела, не зависит от направления распространения. Действительно,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} = \frac{4\Delta'}{(1+\Delta')^2},$$

где  $\Delta' = \frac{1}{\Delta}$ .

Так, например, при нормальном падении на границу раздела вода — воздух (и обратно) только  $\approx \frac{1}{825}$  часть энергии проходит в другую среду; это можно легко вычислить, если подставить в формулу для  $E_2/E_1$  величину  $\Delta' \approx \frac{1}{3300}$ .

## § 146. Распространение звуковых волн

При распространении звуковых волн при обычных условиях мы имеем довольно сложную картину. Звуковые волны, встречая препятствие, легкогибают его в тех случаях, когда длина волны много больше размеров препятствия, и отражаются от него примерно так же, как свет, если длина волны много меньше размеров препятствия.

При отражении звука от горы, стены и других значительных препятствий можно наблюдать, что угол падения волны равен углу отражения. В тех случаях, когда размеры препятствия сравнимы с длиной волны, законы распространения звуковой волны около препятствий становятся более сложными, имеет место и некоторое отражение, и огибание (дифракция), как около небольших (по

сравнению с длиной волны) препятствий. Заметим, что препятствием, от которого происходит отражение, является всякая граница, на которой изменяется величина  $\rho c$ , величина волнового сопротивления вещества. Так, например, может произойти отражение волны от более нагретого слоя воздуха, от границы тумана, облака и т. п.

Явление преломления и отражения звука на границах раздела слоев воздуха различной температуры делает законы распространения звука в атмосфере более сложными. Например, при изучении слышимости звука взрыва давно уже наблюдали отражение звуковых волн от слоя атмосферы на высоте 40 — 50 км, вследствие чего взрыв бывает слышен на очень большом расстоянии и совершенно не слышен на более близких расстояниях, куда не доходила прямая волна взрыва.

При обсуждении этих наблюдений выдвигали гипотезу, что на высоте 40 — 50 км начинается повышение температуры, непосредственные измерения последних лет подтвердили эту гипотезу.

### § 147. Слух

Человеческое ухо воспринимает колебания воздуха определенной частоты и интенсивности. Интенсивность звуковой волны измеряют величиной энергии, проходящей через 1 м<sup>2</sup> в единицу времени, обычно ее принято измерять либо в Вт/м<sup>2</sup> (в системе СИ), либо в эрг/(см<sup>2</sup>·с) (в системе СГС).

При определенной минимальной интенсивности ухо человека перестает воспринимать звук, эта минимальная интенсивность (вообще говоря, не одинаковая для различных частот) называется *порогом слышимости*.

На рис. 420 приведена кривая порога слышимости для всего звукового диапазона. Наиболее чувствительно наше ухо к волнам частоты примерно 3000 Гц: интенсивности  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> уже достаточно, чтобы ухо восприняло звук. При частоте 50 Гц порог слышимости лежит при  $10^{-7}$  Вт/м<sup>2</sup>, т. е. интенсивность колебаний при этой частоте должна быть примерно в 100 000 раз больше, чтобы звук можно было услышать.

При слишком большом увеличении интенсивности колебаний ухо перестает воспринимать колебания как звук, а испытывает болевое ощущение, такая интенсивность, выше которой отмечается боль, называется *порогом болевого ощущения*. Порог болевого ощущения соответствует интенсивности, равной примерно 1 Вт/м<sup>2</sup> для всех частот, как это видно на рис. 420.

Таким образом, ухо воспринимает огромный диапазон изменения интенсивности звука, от 1 до  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>; вследствие этого в технике предпочитают измерять изменение интенсивности звука не по изменению энергии волны (как отмечено справа на рис. 420), а в других единицах — *децибелах* (дБ) (слева на рис. 420).

Если некоторая интенсивность звука  $I_0$  принята за исходную, то какой-либо интенсивности  $I_1$  будет соответствовать изменение уровня интенсивности на  $10 \lg \frac{I_1}{I_0}$  дБ. Иначе говоря, число децибел, деленное на 10, даст десятичный логарифм отношения интенсивностей. Обычно за  $I_0$  принимают интенсивность звука на пороге слышимости при 1000 Гц, тогда уровень интенсивности, соответствующий порогу болевого ощущения, будет соответствовать величине,

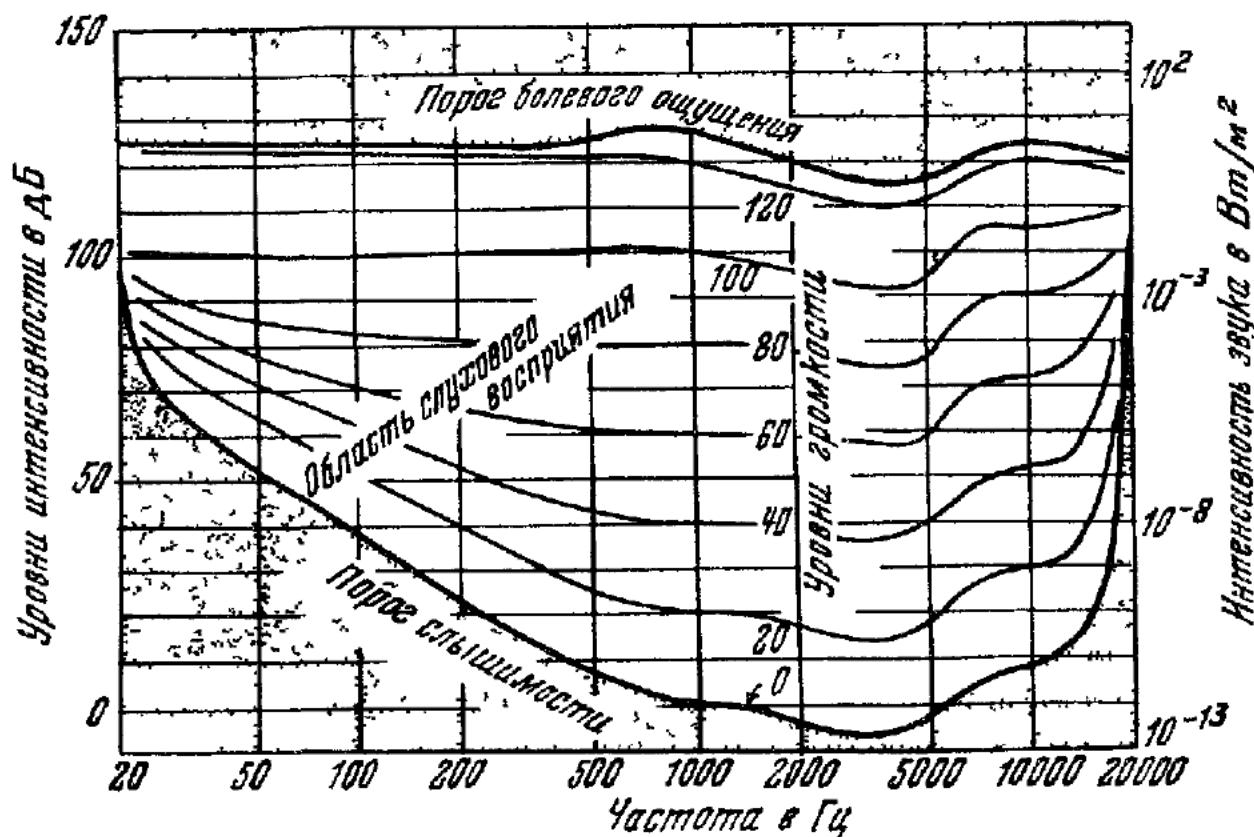


Рис. 420.

примерно равной 120—130 дБ. При измерениях уровня интенсивности в децибалах порог слышимости при 50 Гц лежит примерно при 50 дБ. Порог слышимости изменяется с частотой, так же изменяется и громкость звука; кривые интенсивности звуков равной громкости для различных частот показаны на рис. 420 сплошными линиями.

Например, звук, имеющий уровень интенсивности в 20 дБ на частоте 1000 Гц, будет иметь такую же громкость, как и звук в 50 дБ на частоте 100 Гц, и т. д. Измерение уровня интенсивности звука в децибалах проще и поэтому принято и в технике, и в физике. Кривые равной громкости соответствуют различным величинам интенсивности в децибалах; поэтому введена новая единица уровня громкости — *фон*. Если громкость данного звука равна  $N$  фонам, то это значит, что звук имеет такую же громкость, как и звук частотой 1000 Гц, имеющий интенсивность в  $N$  дБ над порогом слышимости. Звуки низкой частоты (менее 1000 Гц) при той же громкости имеют большую интенсивность, чем звуки более высоких частот.

(1000—3000 Гц). Уровень громкости различных звуков примерно таков: шум в вагоне метро при большой скорости — 90—95 фон, громкий разговор на расстоянии 0,5 м — приблизительно 30 фон, шепот — около 10 фон.

### § 148. Ультразвуковые колебания

Акустические колебания (точнее, механические колебания среды или тел), частоты которых лежат выше 20 000 Гц, т. е. за пределом чувствительности уха, называются *ультразвуками*. Механические колебания столь высокой частоты обычно получаются с помощью явлений пьезоэффекта или магнитострикции.

*Пьезоэфектом* называют такое свойство кристаллов, благодаря которому они деформируются при наличии электрического поля и, наоборот, электризуются определенным образом при деформации. *Магнитострикция* — аналогичное явление, возникающее под действием магнитного поля.

Источником ультразвуковых волн может служить пластинка, совершающая механические колебания высокой частоты под действием переменного электрического или магнитного поля, подаваемого на эту пластинку от электромагнитного генератора той же частоты. При рассмотрении картины волн, распространяющихся от ультразвукового источника, следует принять во внимание малую длину ультразвуковых волн. Так, например, при частоте в 350 кГц длина ультразвуковой волны в воздухе имеет порядок 1 мм, а при 3 МГц — около 0,1 мм. Следовательно, если размеры плоской пластиинки, являющейся источником ультразвука, велики по сравнению с длиной волны, то от пластиинки будет распространяться плоская волна, которая представляет собой как бы параллельный пучок лучей, распространяющийся от поверхности пластиинки аналогично тому, как распространяется свет от прожектора. Поэтому такими ультразвуковыми лучами пользуются для измерения расстояний в воде.

От источника ультразвука на корабле в определенный момент посыпается импульс ультразвуковых волн в воду по определенному направлению. Встречая на своем пути препятствие, этот импульс отражается, и через некоторое время отраженные волны достигают приемника, находящегося на корабле. Особые приборы измеряют время, прошедшее между посылкой импульса и прибытием отраженного сигнала, по которому и определяется расстояние до препятствия, отразившего волны.

Такой принцип измерения расстояний в воде с помощью ультразвуковых импульсов положен в основу устройства эхолота, измеряющего глубину моря, а также различных гидролокационных установок, измеряющих расстояние до подводных лодок, до айсбергов и т. п. В последнее время ультразвуковые колебания находят самое разнообразное применение в технике, в медицине и т. д.

## Глава XVII

### ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 149. Принцип относительности Галилея

Все системы отсчета, движущиеся поступательно и равномерно друг относительно друга, называются *инерциальными* в том случае, если в одной из них (любой) справедливы законы динамики Ньютона. Тогда во всех инерциальных системах законы классической динамики имеют одинаковую форму. Это — главное положение *принципа относительности Галилея*. Инерциальные системы называют еще *галилеевыми*; они все равноправны с точки зрения динамики, но кинематика движения относительно различных инерциальных систем, очевидно, различна.

Зная закон движения точки в системе отсчета  $A$ , легко установить закон движения этой же точки в инерциальной системе  $B$ , если известна скорость движения системы  $B$  относительно  $A$ .

Допустим, что система  $B$  движется поступательно относительно системы  $A$  с постоянной скоростью  $v$ . Тогда зависимость между координатами произвольной точки в системе  $A$ , обозначенными через  $r$  ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), и координатами относительно системы  $B$  запишется так (рис. 421):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad (149.1)$$

а зависимость между скоростями — так:

$$u' = u - v, \quad \text{где } u = \frac{dr}{dt}, \quad u' = \frac{dr'}{dt} \quad \text{и} \quad v = \frac{dr_0}{dt}.$$

Если в момент  $t = 0$  вектор  $\mathbf{r}_0 = 0$ , то  $\mathbf{r}_0 = vt$ , и связь между координатами примет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - vt. \quad (149.2)$$

Очевидно, что ускорения в обеих системах одинаковы:

$$\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt}.$$

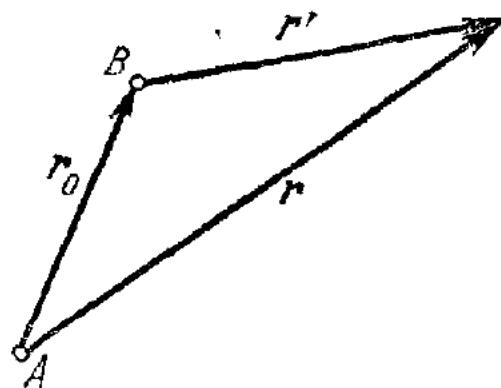


Рис. 421.

Ради простоты дальнейших вычислений предположим, что система  $B$  движется со скоростью  $v$  относительно  $A$  так, что оси  $x$  и  $x'$  лежат на одной прямой (рис. 422) и направлены одинаково и, кроме того, в момент  $t = 0$  начала координат обеих систем совпадают.

Тогда, если в момент  $t$  какая-то точка имеет координаты  $x, y, z$  в системе  $A$ , то ее координаты в системе  $B$  можно записать так:

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{array} \right\} \quad (149.3)$$

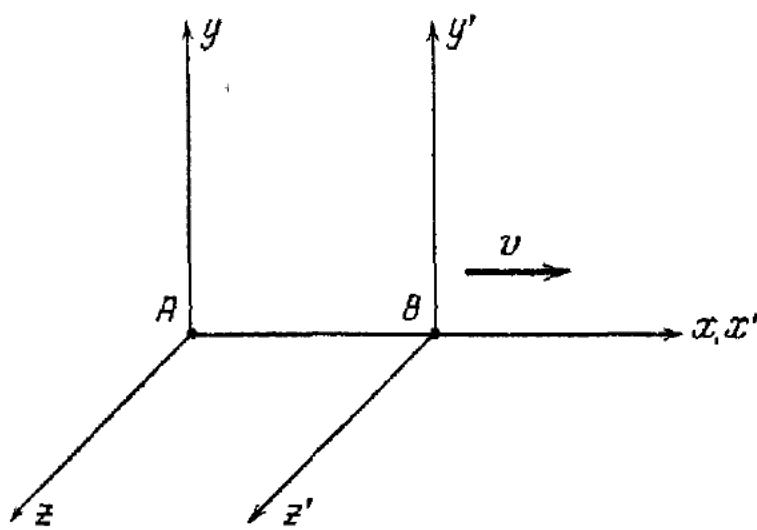


Рис. 422.

При выводе этих равенств считается, что течение времени *абсолютно и неизменно* для всех систем

отсчета. Это интуитивное положение принимается без доказательств в классической механике. Оно считается «естественным», «само собой разумеющимся» и не требующим обоснования. Это положение не противоречит всем опытам в механике и технике, в которых происходят движения тел со скоростями, значительно меньшими скорости света  $c$  ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Если обозначить, пока чисто формально, время в системе  $B$  через  $t'$ , то в ньютоновской механике считается, что всегда

$$t' = t. \quad (149.4)$$

Формулы (149.1) и (149.2) носят название *преобразований Галилея*; они устанавливают связь между «координатами» какого-то события в системе  $A$  и координатами того же события в системе  $B$ . Например, пусть материальная точка движется относительно системы  $A$  и в момент времени  $t$  находится в точке  $(x, y, z)$ . Этот факт можно рассматривать как «событие» с «координатами»  $x, y, z, t$  в системе  $A$ ; то же «событие» имеет «координаты»  $x', y', z', t'$  в системе  $B$ .

Из преобразований Галилея следует закон сложения скоростей, который нам знаком с самого начала изучения механики:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}. \end{array} \right\} \quad (149.5)$$

Скорость тела вдоль оси  $x$  относительно системы  $A$  равна сумме проекции скорости по оси  $x$  того же тела в системе  $B$  и скорости самой системы  $B$ , равной  $v$ .

Все приведенные соотношения просты и известны из классической механики. Мы останавливаемся на них только потому, что при помощи аналогичных математических выражений обычно формулируются основные положения специальной теории относительности.

При преобразовании координат всегда можно указать некоторые соотношения между ними, которые остаются неизменными (инвариантными) при этом преобразовании; такие соотношения называются *инвариантами*. Например, расстояние между двумя точками инвариантно при галилеевом преобразовании.

То же самое можно сказать относительно механических величин: одни изменяются при преобразовании Галилея — *вариантные* величины, другие остаются неизменными — *инварианты*. Например, координаты, скорость, импульс, кинетическая энергия и т. д. — варианты величины.

Посмотрим, как будут изменяться при переходе от одной инерциальной системы к другой основные механические величины и как эти изменения связаны с законами динамики и с законами сохранения количества движения и энергии для системы частиц (или тел).

Если движение системы тел (частиц) рассматривается относительно инерциальной системы отсчета  $A$ , то при переходе к другой инерциальной системе  $B$  изменяется и количество движения (импульс), и кинетическая энергия системы частиц (тел).

Обозначим через  $u'_i$  скорость  $i$ -й частицы в системе  $B$ , а через  $u_i$  — в системе  $A$ ; тогда по (149.1)

$$u_i = u'_i + v. \quad (149.6)$$

Количество движения системы частиц относительно  $A$  можно записать так:

$$K = \sum m_i u_i = \sum m_i u'_i + \sum m_i v = K' + mv, \quad (149.7)$$

где  $K' = \sum m_i u'_i$  — количество движения системы частиц относительно  $B$ , а  $m = \sum m_i$  — масса системы частиц. Это равенство справедливо при всех условиях. Из него следует, что если количество движения в системе  $A$  постоянно во времени, то оно остается постоянным и в  $B$ , поскольку  $m$  и  $v$  неизменны. Так будет и в любой инерциальной системе. *Закон инерции справедлив во всех инерциальных системах отсчета.*

Кинетическая энергия системы частиц в системе отсчета  $A$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (u'_i + v)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i u'^2 + \sum m_i u'_i v + \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = T' + K'v + \frac{1}{2} mv^2, \end{aligned} \quad (149.8)$$

где  $T'$  — кинетическая энергия в  $B$ . Равенство (149.8) показывает изменение кинетической энергии при переходе от одной инерциальной системы к другой, оно справедливо при всех условиях.

Если система частиц (тел) изолирована (замкнута),  $K'$  постоянно во времени. Если при этом между частицами только упругие взаимодействия (например, упругие удары), то  $T'$  остается постоянной, а следовательно, и  $T$  (кинетическая энергия относительно другой инерциальной системы отсчета  $A$ ) остается постоянной. *Закон сохранения кинетической энергии справедлив во всех инерциальных системах, если он справедлив в одной из них.*

Количество движения *изолированной* системы частиц остается *постоянным* всегда и при неупругом взаимодействии, при неупругих ударах частиц, а кинетическая энергия в этом случае уменьшается. Причем из равенства (149.8) следует, что  $T$  и  $T'$  для замкнутой системы частиц уменьшаются со временем на одну и ту же величину во всех инерциальных системах отсчета. Это уменьшение — инвариант.

Необходимо еще заметить, что возможен и такой случай, когда система частиц *неизолированная*, а  $K'$  постоянно. Это будет тогда, когда результирующая (векторная сумма) всех внешних сил (сил, исходящих со стороны тел, не принадлежащих системе) равна нулю. Тогда кинетическая энергия может изменяться со временем, причем, вследствие равенства (149.8), такое изменение будет одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Это изменение энергии — инвариант.

Между частицами могут действовать силы, зависящие только от расстояния между ними и направленные по линии, их соединяющей (см. § 36). Тогда каждая конфигурация частиц обладает определенной потенциальной энергией  $U$ . Взаимные расстояния отдельных пар частиц не изменяются при переходе к другой инерциальной системе. Поэтому не меняется потенциальная энергия  $U$ . И в равенство (149.8) можно добавить член  $U$ , или

$$T + U = T' + U + K'v + \frac{1}{2}mv^2. \quad (149.9)$$

Если между частицами изолированной системы происходит такое взаимодействие, что сумма кинетической и потенциальной энергий остается неизменной со временем, то она будет оставаться *постоянной* во всех инерциальных системах отсчета. *Закон сохранения энергии справедлив во всех инерциальных системах.*

Силы зависят от относительного расположения тел или от их относительных скоростей, и то и другое — инварианты. Поэтому и сила — инвариант.

Следовательно, кинетическая энергия и импульс изменяются при переходе к другой инерциальной системе — это вариантовые величины, но потенциальная энергия, масса, сила — инварианты.

Инвариантными будут также изменения энергии со временем в указанных выше случаях.

Очевидно, что все три закона динамики справедливы во всех инерциальных системах.

### § 150. Постоянство скорости света

Изучение природы света и законов его распространения было одной из главных проблем физики прошлого века. Еще во времена Ньютона датский ученый Олаф Рёмер, наблюдая затмение спутников Юпитера, впервые приблизенно определил величину скорости света. По волновой теории свет представляет собой волны, распространяющиеся в среде наподобие звуковых волн. В какой среде распространяется свет и с какой системой отсчета она связана? Этот вопрос встал во второй половине XIX века.

Допустим, что «светоносная» среда, или «эфир», как ее называли тогда, связана с Солнцем. Тогда скорость света на Земле должна зависеть от скорости движения Земли относительно системы координат, связанной с Солнцем. Если скорость света относительно среды равна  $c$ , то по закону сложения скоростей скорость света в направлении движения Земли должна равняться  $c - v$ , а в противоположном направлении  $c + v$ .

Хотя скорость движения Земли ( $v = 30$  км/с) и очень велика по сравнению со скоростями, которые наблюдаются в обычной механике, но в то же время она ничтожно мала по сравнению со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с. Поэтому наблюдение и измерение влияния движения Земли на скорость света наталкивалось на большие трудности. Были придуманы и проделаны точнейшие специальные опыты, которые должны были проверить закон сложения скоростей света и Земли. Первые такие опыты были выполнены Майкельсоном и Морли в 1887 г.; впоследствии результаты аналогичных опытов многократно проверялись и уточнялись<sup>1)</sup>. Ни в одном из этих опытов не удалось обнаружить влияния скорости движения Земли на величину скорости распространения света. Предположение о том, что скорость света остается постоянной только относительно Земли, противоречит астрономическим и другим наблюдениям.

В итоге длительного и кропотливого обсуждения всех результатов опытов и наблюдений ученые в начале этого столетия пришли к выводу: *скорость света в пустоте постоянна и не зависит от движения источника и приемника*.

Этот факт явно противоречит принципу относительности Галилея, закону сложения скоростей.

Выход был предложен А. Эйнштейном в 1905 г. совсем в ином направлении. Бесплодные попытки экспериментально обнаружить

<sup>1)</sup> Об этих опытах более подробно будет сказано в разделе оптики.

равномерное движение относительно «абсолютной системы отсчета» показали, что такой системы нет, все инерциальные системы равноправны, во всех явлениях природы, а не только в механике. В связи с этим необходимо пересмотреть основные понятия пространства и времени, исходя из допущения справедливости двух постулатов.

1. *Все инерциальные системы равноправны.*

2. *Скорость света в пустоте не зависит от движения источника.*

Эти постулаты принимаются как следствие известных опытных фактов и исследований распространения света. Первый постулат утверждает, что для всех природных явлений имеет место «специальный принцип относительности» — основные законы физических явлений неизменны во всех инерциальных системах отсчета. Из второго и первого постулатов следует, что скорость света в пустоте одинакова по любому направлению во всех инерциальных системах отсчета.

### § 151. Одновременность событий

Прежде чем анализировать следствия постулатов Эйнштейна, необходимо рассмотреть подробнее определение одновременности двух событий, происходящих в разных местах. Когда события происходят почти в одном месте (близко друг к другу, в «одной точке»), то их одновременность зафиксировать просто — наблюдая эти события, допустим, фотографируя их на пленку или регистрируя их каким-либо другим способом. Одновременность событий, происходящих в разных местах, можно установить, только пользуясь каким-то сигналом, передающим сведения из одного места в другое.

Так как скорость света достаточно велика и *постоянна*, то Эйнштейн предложил воспользоваться для этой цели световыми сигналами. Других, более быстрых сигналов в природе нет, по крайней мере о них ничего не известно. Если бы скорость света была бесконечна, то определение одновременности в разных местах было бы возможно в принципе так же, как и в одном месте. Возможность такого определения подразумевалась в нерелятивистской физике, и поэтому там промежутки времени считались абсолютными; противоречия с опытом не отмечалось, так как скорость света очень велика по сравнению с наблюдаемыми скоростями. Скорость света велика, но *конечна*, поэтому при больших скоростях движения тел существенно влияние конечности и постоянства скорости света на определение одновременности событий.

Представим себе две одинаковые системы отсчета *A* и *B*, которые движутся относительно друг друга со скоростью *v* (рис. 423, *a*). Системы представляют собой две очень близко расположенные параллельные линии, движение систем происходит вдоль этих линий, система *B* движется вправо относительно *A*. Пусть в точке *O* системы *A* произошла вспышка света, она одновременно отмечена

в противолежащей точке  $O'$  системы  $B$ . Если точки  $C$  и  $C'$  находятся на равных расстояниях от  $O$ , то через некоторое время сигналы света достигнут одновременно точек  $C$  и  $C'$ , так как скорость света одинакова в обе стороны. Так будет зафиксировано событие (вспышка света) в системе  $A$  (рис. 423, а).

Но в движущейся системе  $B$  эти одновременные (в  $A$ ) события будут отмечены в различное время, потому что скорость света имеет то же самое значение и относительно системы  $B$ .

В самом деле, за время  $\Delta t$  распространения света от точки  $O$  до  $C$  (или  $C'$ ) система  $B$  передвинется вправо на некоторое расстояние, точка  $O'$  сдвинется на ту же величину, и вспышки в  $C$  и  $C'$  будут отмечены в точках  $D$  и  $D'$  системы  $B$ , которые находятся на разных расстояниях от точки  $O'$ . Принимая во внимание постоянство скорости света, следует заключить, что относительно  $B$  событие в  $D'$  произошло раньше, чем в  $D$ . Иными словами, одновременность событий *относительна*, а следовательно, и промежутки времени, прошедшие между двумя событиями, зависят от системы отсчета.

При переходе от одной системы к другой необходимо учитывать изменение времени, *нет абсолютного времени*. Нетрудно заметить, что запаздывание событий в точке  $D$  системы  $B$  относительно

события в точке  $D'$  зависит от расстояния  $CC'$ , от разности координат событий в системе  $A$ . Поэтому при описании событий, происходящих в системе  $A$ , со стороны системы  $B$  следует учитывать изменение времени и его зависимость от координаты.

Важно отметить, что все рассуждения обратны: события, отмеченные одновременно в  $B$ , не будут таковыми в  $A$ . Выберем

в системе  $B$  точки  $M$  и  $M'$  на равных расстояниях от  $O'$  (рис. 424); тогда приход сигналов света в точки  $M$  и  $M'$  будет отмечен в точках  $N$  и  $N'$  системы  $A$ , находящихся на разных расстояниях от  $O$ , откуда и следует аналогичный вывод. Определяя одновременность событий в близких (или совпадающих) точках различных систем:  $O$  и  $O'$ ,  $M$  и  $N$ ,  $M'$  и  $N'$ , — необходимо учитывать, что расстояния между этими точками в  $B$  одинаковые ( $MO' = O'M'$ ), но в  $A$  различные ( $NO < ON'$ ).

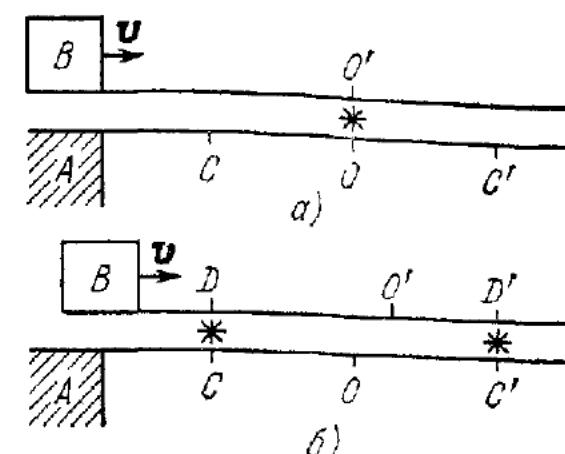


Рис. 423

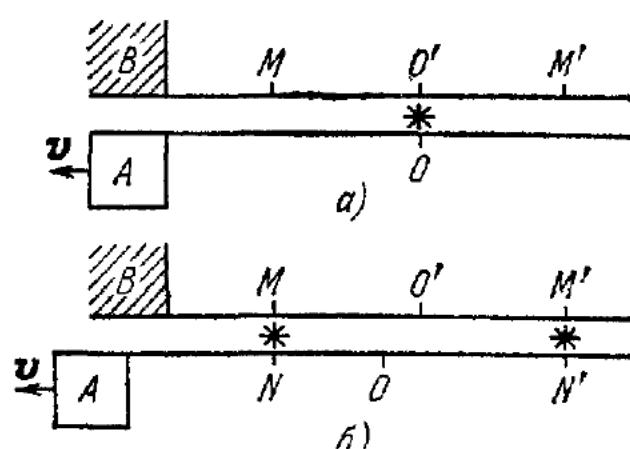
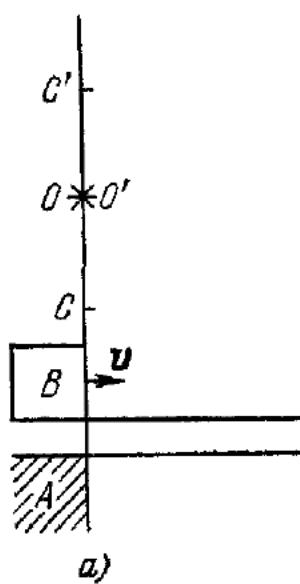


Рис. 424.

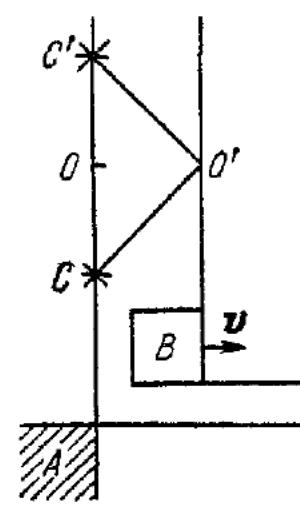
Легко убедиться, что при  $v \ll c$  точки  $O$  и  $O'$  практически за время  $\Delta t$  не сдвинутся с места, и тогда события, отмеченные одновременно в  $A$ , останутся такими же и в системе  $B$ . Это соответствует допущению абсолютного времени (одинакового для всех движущихся систем отсчета), времени по Ньютону. Только теперь неизменность времени является справедливым приближением более общего закона.

Для наглядного представления изменения времени часто прибегают к следующему приему. Предположим, что в каждой системе отсчета установлены достаточно близко друг к другу одинаковые часы, отмечающие время. С помощью световых сигналов часы в каждой системе синхронизированы, идут синхронно. Синхронизацию часов устанавливают таким путем. Расстояние между двумя часами делят пополам и в этой точке производят вспышку света. Если приход света совпадает с одинаковыми показаниями часов, то следовательно, они идут синхронно. Очевидно,

что если часы  $a$  идут синхронно с часами  $b$ , а часы  $b$  идут синхронно с часами  $c$ , то и часы  $a$  идут синхронно с часами  $c$ , и т. д. Так можно синхронизировать все часы в каждой системе. Считается, что расстояние всегда измеряется одним и тем же эталоном в каждой системе.



a)



б)

Рис. 425.

Заметим еще, что если часы установлены на линии, перпендикулярной к скорости движения систем  $v$ , то синхронные в  $A$  часы будут идти синхронно и относительно  $B$ . В самом деле, через время  $\Delta t$ , когда сигналы света из  $O$  дойдут до точек  $C$  и  $C'$  (рис. 425), система  $B$  сдвинется на расстояние  $v\Delta t$ , но расстояния от точки  $O'$  до  $C$  и  $C'$  одинаковы, поэтому эти события будут зарегистрированы в системе  $B$  одновременно. Изменение времени при переходе от одной системы к другой (движущейся) зависит только от координаты, направленной вдоль скорости  $v$ .

Вывод об относительности одновременности можно теперь сформулировать так. Синхронно идущие часы в системе  $A$  не будут идти синхронно при наблюдении их со стороны системы  $B$ , и наоборот. Часы в системе  $A$  показывают разное время, если его отмечать одновременно по часам  $B$  в различных местах системы  $B$ . Все это будет выяснено более подробно на основе закона перехода от одной системы к другой.

Заметим еще, что если часы установлены на линии, перпендикулярной к скорости движения систем  $v$ , то синхронные в  $A$  часы будут идти синхронно и относительно  $B$ .

## § 152. Преобразование Лоренца

Теперь можно поставить и решить основную задачу о преобразовании координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Как уже было сказано, полагаем, что системы  $A$  и  $B$  одинаковы, масштабы длины и времени одни и те же. Система  $B$  движется со скоростью  $v$  относительно  $A$  вдоль совпадающих осей  $x$  и  $x'$  так, что в момент  $t = t' = 0$  начала осей координат находятся в одной точке.

Допустим, что в момент  $t = t' = 0$  в начале координат произошла вспышка света, тогда через некоторое время  $t$  в системе  $A$  свет достигнет точек, лежащих на сфере радиуса  $ct$ , аналогично и в системе  $B$  через время  $t'$  свет пройдет расстояние  $ct'$ . Или в системе  $A$  точки «световой» сферы будут удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (152.1)$$

а в системе  $B$  — уравнению

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (152.2)$$

Это следует из постулатов Эйнштейна.

Считая, что пространство и время однородны, предполагаем, что между координатами и временем различных систем существует линейная связь. Тогда между координатами  $x$  и  $x'$  возможна такая зависимость:

$$x' = \gamma (x - vt). \quad (152.3)$$

Она следует из того, что точка  $x' = 0$  (начало отсчета системы  $B$ ) движется со скоростью  $v$  относительно системы  $A$  и в момент  $t = 0$  точки  $x = 0$  и  $x' = 0$  совпадают. Величина  $\gamma$  — пока неизвестный коэффициент, который при  $v \ll c$  должен обращаться в единицу, как в преобразовании Галилея;  $\gamma$ , видимо, зависит от  $v$  и  $c$ .

Координаты  $y$  и  $y'$ ,  $z$  и  $z'$  не должны изменяться при движении систем вдоль оси  $x$ , или

$$y' = y, \quad z' = z, \quad (152.4)$$

как и при преобразовании Галилея.

Время  $t'$  в системе  $B$  будет линейно зависеть от времени  $t$  и от координаты  $x$  в системе  $A$ ; поэтому положим

$$t' = at + bx, \quad (152.5)$$

где  $a$  и  $b$  — неизвестные постоянные, которые при  $v \ll c$  должны принимать значения  $a \rightarrow 1$ ,  $b \rightarrow 0$ .

Подставляя (152.3), (152.4) и (152.5) в (152.2), получим

$$\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (at + bx)^2. \quad (152.6)$$

Необходимо так выбрать значения коэффициентов  $\gamma$ ,  $a$  и  $b$ , чтобы (152.6) равнялось (152.1). Очевидно, для этого должны удовлетворяться следующие равенства:

$$\gamma^2 - c^2 b^2 = 1, \quad \gamma^2 v + c^2 ab = 0, \quad c^2 a^2 - \gamma^2 v^2 = c^2.$$

Подставляя  $b$  из второго уравнения в первое и учитывая третье получаем

$$a^2 = \gamma^2.$$

Тогда третье уравнение дает

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}.$$

Затем из второго уравнения находим

$$b = -\gamma \frac{v}{c^2}.$$

По физическому смыслу  $\gamma$  и  $a$  больше нуля, поэтому (рис. 426)

$$\gamma = a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (152.7)$$

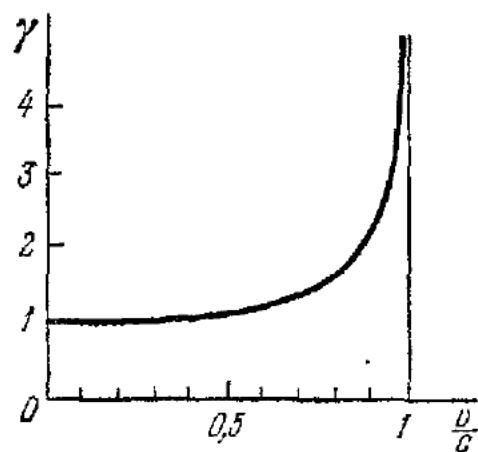


Рис. 426.

Таким путем приходим к преобразованию координат системы  $A$  к координатам системы  $B$ , удовлетворяющему постулатам Эйнштейна:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right), \\ x' &= \gamma (x - vt), \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ \gamma &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (152.8)$$

Это и есть знаменитое теперь *преобразование Лоренца*, которое было получено им в теории электромагнитных явлений. Но, по Эйнштейну, это преобразование имеет универсальный характер, поскольку оно относится только к пространству и времени. Легко видеть, что при  $v \ll c$  преобразование Лоренца превращается в галилеево.

Можно разрешить равенства (152.8) относительно координат системы  $A$  и найти обратное преобразование, от  $B$  к  $A$ ; это будет:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right), \\ x &= \gamma (x' + vt'), \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned} \quad (152.9)$$

Обратное преобразование отличается от (152.8) только знаком при скорости  $v$ , как и должно быть, ведь система  $A$  движется относительно  $B$  в сторону отрицательных значений  $x'$ .

Прежде всего отметим: вид коэффициента  $\gamma$  показывает, что скорость  $v$  меньше  $c$ . Системы отсчета всегда связаны с материальными телами, следовательно, относительная скорость тел не может быть больше скорости света. Скорость света — предельная скорость движения. Это один из принципиальных выводов теории относительности.

### § 153. Следствия лоренцевых преобразований

Анализ преобразований Лоренца позволяет сделать ряд важных выводов, вытекающих из связи между координатами и временем.

Предварительно запишем эти преобразования в приращениях:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Delta t' &= \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right), & 2) \quad \Delta t &= \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right), \\ 3) \quad \Delta x' &= \gamma (\Delta x - v \Delta t), & 4) \quad \Delta x &= \gamma (\Delta x' + v \Delta t'), \\ 5) \quad \Delta y' &= \Delta y, & 6) \quad \Delta z' &= \Delta z. \end{aligned} \quad (153.1)$$

Поскольку все соотношения (152.8) и (152.9) — линейные, следовательно, они справедливы и для приращений.

1. Относительность одновременности. Раньше приводились чисто качественные соображения об относительности одновременности. Теперь можно уже оценить и количественно разницу во времени, отмечаемую в различных инерциальных системах отсчета. Течение времени связано только с координатами  $x$  и  $x'$ .

Пусть два события в системе  $A$  произошли одновременно на расстоянии  $\Delta x$  друг от друга, для них  $\Delta t = 0$ ; какое  $\Delta t'$  будет для этих событий в системе  $B$ ?

Подставляем  $\Delta t = 0$  в первое равенство (153.1) и получаем

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x. \quad (153.2)$$

Следовательно, события, одновременные в  $A$ , регистрируются в  $B$  в разные моменты времени. Причем событие, произшедшее в месте с большей координатой  $x$ , наступит в системе  $B$  раньше. Опережает то событие, которое расположено в сторону движения системы  $B$ . Опережение растет со скоростью  $v$  и расстоянием  $\Delta x$ .

Аналогично, события, одновременные в системе  $B$ , для которых  $\Delta t' = 0$  и  $\Delta x' \neq 0$ , отмечаются в  $A$  через время

$$\Delta t = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x', \quad (153.3)$$

как следует из второго равенства (153.1). Опять событие, расположенное в сторону движения, опережает.

Можно пояснить на схеме с часами, что при наблюдении из системы  $A$  часы в  $B$  идут несинхронно. Представим себе, что в каждой системе отсчета вдоль осей  $x$  и  $x'$  довольно часто расположены одинаковые синхронизированные часы. Часы синхронизированы в каждой системе сигналами света, как было указано раньше

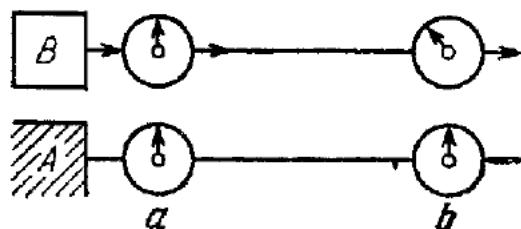


Рис. 427.

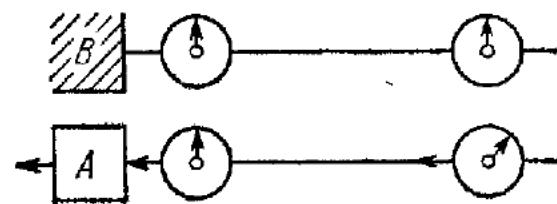


Рис. 428.

(§ 151). Выберем в системе  $A$  двое часов  $a$  и  $b$ , расположенных на расстоянии  $\Delta x$  друг от друга. В один и тот же момент по часам  $A$  зафиксируем показания тех движущихся часов (системы  $B$ ), которые находятся против часов  $a$  и  $b$ . Эти часы покажут различное время в соответствии с (153.2), причем часы, движущиеся впереди, отстают (рис. 427).

Такая же картина будет наблюдаться, если выберем двое часов в системе  $B$  на расстоянии  $\Delta x'$  и одновременно по этим часам отметим показания проходящих мимо часов (рис. 428).

Можно истолковать эти мысленные опыты и таким образом. Например, в системе  $A$  отмечают время на проходящих мимо часах системы  $B$  в различные моменты по часам  $A$ . Всегда можно подобрать

$\Delta t$  (разницу во времени отметки) так, чтобы проходящие мимо часы показывали одно и то же время ( $\Delta t' = 0$ ). Из первого равенства (153.1) следует:

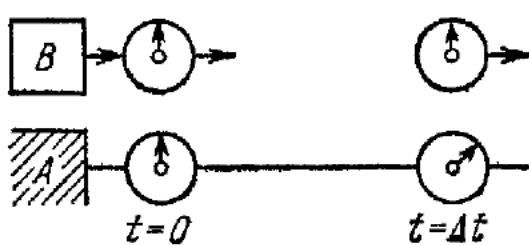


Рис. 429.

Поэтому отметку нужно делать на  $\Delta t$  раньше у часов, стоящих сзади по направлению движения (рис. 429). Одновременные в  $B$  события отмечаются в разное время в системе  $A$ . Относительность хода часов полностью взаимна.

2. Сокращение расстояний. Пусть в системе  $B$  выделен отрезок  $l_0 = \Delta x'$ , его можно понимать как длину определенного стержня, расположенного вдоль оси  $x'$ . Измерить длину этого стержня в системе  $B$  просто, нужно приложить к нему мерную линейку и отметить на ней концы стержня. Но как измерить длину этого стержня в системе  $A$ , относительно которой он дви-

жется? Это можно сделать так: отметить в системе  $A$  концы стержня  $l_0 = \Delta x'$  на оси  $x$  в один и тот же момент по часам в  $A$ ; пусть этот отрезок равен  $l_d = \Delta x$ . Нужно найти связь между  $l_0 = \Delta x'$  и  $l_d = \Delta x$  при  $\Delta t = 0$ . Из третьего равенства (153.1) следует:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \quad l_d = \frac{l_0}{\gamma}, \quad (153.4)$$

где  $l_0$  — длина покоящегося (в  $B$ ) стержня, а  $l_d$  — длина того же стержня, движущегося (в  $A$ ). Длина покоящегося стержня больше длины движущегося, так как  $\gamma > 1$ . Или: движущийся стержень «сокращается» в длине. Лучше сказать: *длина относительна*, она зависит от системы отсчета, в которой ее измеряют.

Аналогичные рассуждения показывают, что стержень, покоящийся в  $A$  и измеряемый в системе  $B$ , имеет меньшую длину в  $B$ . В этом случае  $\Delta x = l_0$  и определяется при  $\Delta t' = 0$ . Из четвертого равенства (153.1) получаем

$$\Delta x = \gamma \Delta x', \quad l_d = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (153.5)$$

Движущийся стержень имеет меньшую длину.

Между формулами (153.4) и (153.5) нет противоречия, ибо каждый раз имеются в виду различные измерения, хотя процедура измерений относительно каждой системы совершенно одинакова. В каждой системе получаем одинаковый результат; относительность длины, как и относительность времени, *взаимна*.

Расстояния вдоль осей  $y$  и  $z$ , очевидно, не изменяются при переходе от системы  $A$  к  $B$ , и наоборот. Только разности координат вдоль осей  $x$  и  $x'$ , вдоль скорости движения систем, изменяются.

**3. Замедление хода движущихся часов.** Часы, находящиеся в системе  $B$ , движутся относительно системы  $A$ . Как связаны показания этих часов  $\Delta t'$  с показаниями покоящихся часов  $\Delta t$  при наблюдении из системы  $A$ ?

За время  $\Delta t$  движущиеся часы перемещаются на расстояние  $\Delta x = v \Delta t$ , и для них  $\Delta x' = 0$ , поэтому из первого равенства (153.1) следует:

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v^2}{c^2} \Delta t \right) = \gamma \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad (153.6)$$

так как  $\gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1$ . Промежуток времени  $\Delta t'$ , отмечаемый движущимися часами, меньше соответствующих показаний покоящихся часов. Движущиеся часы «идут» медленнее. Это и называют *замедлением хода часов*.

Заметим, что условие (153.6) мы можем получить прямо из второго равенства (153.1), полагая  $\Delta x' = 0$ .

Аналогичные рассуждения о ходе часов, движущихся относительно системы  $B$ , приводят нас к выводу, что

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}, \quad (153.7)$$

где  $\Delta t$  — показания движущихся часов. Движущиеся часы «отстают».

Замедление времени можно проиллюстрировать такими мысленными опытами с часами. Одни, движущиеся относительно  $A$ , часы сравниваются в разные моменты времени с синхронными часами, покоящимися в системе  $A$  (рис. 430).

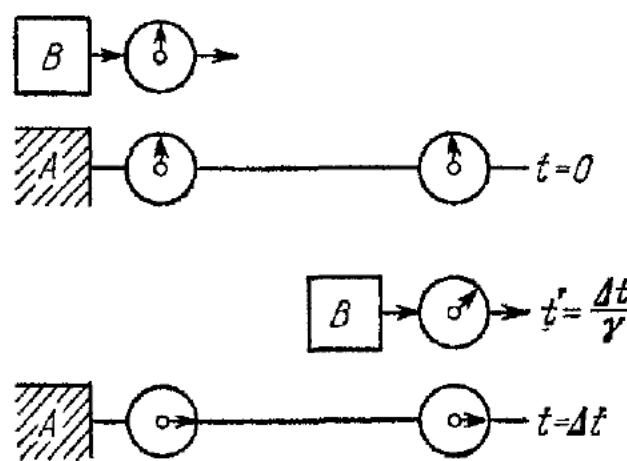


Рис. 430.

Пусть в момент  $t = 0$  показания часов в  $A$  и  $B$  совпадают. За время  $\Delta t$  движущиеся часы передвинулись в другое место и показывают иное время, чем находящиеся против них, и т. д.

Картины показаний синхронных часов в системе  $B$ , наблюдаемых из системы  $A$ , можно объединить в одну. На этой картине нарисуем несколько движущихся часов (секундомеров) через одинаковые промежутки времени  $\Delta t = 2$  с (рис. 431). Цифры в кружках указывают секунды на каждом секундомере в определенные моменты времени по часам  $A$ . Время и расстояния вычислены для  $\gamma = 2$ , что соответствует  $v \approx 0,87$  с. Косые линии соединяют один и тот же секундомер в системе  $B$ . Вычисления проводились по формулам:  $\Delta x = v \Delta t$ ,  $\Delta t' = \Delta t / \gamma$ ,  $\Delta t'_1 = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x = (1 - \gamma^2) \Delta t'$ .

Следовательно,

$$\Delta t' = 1 \text{ с}, \quad \Delta t = 2 \text{ с}, \quad \Delta t'_1 = -3 \text{ с}, \quad \Delta x \approx 5,2 \cdot 10^5 \text{ км}.$$

На рис. 431 видны и замедление хода, и неодновременность показаний движущихся часов. Обратите внимание на величину расстояний и изменений времени. Если бы мы представили себе такую же картину при  $\Delta t = 2$  мкс, то получили бы  $\Delta x \approx 520$  м.

Замедлением времени объясняется долгое время «жизни» движущихся мезонов. Мезоны — элементарные частицы, образующиеся при столкновении быстро летящих частиц с веществом. Они наблюдаются в космических лучах и в опытах с ускорителями заряженных частиц. Найдено, что мезон<sup>1)</sup> — нестабильная частица и в среднем примерно за  $10^{-6}$  с он распадается.

<sup>1)</sup> Имеется в виду мю-мезон, среднее время жизни которого равно  $2,2 \cdot 10^{-6}$  с.

Известно, что мезоны наблюдаются на высоте порядка 10—20 км, и в то же время их обнаруживают в лабораториях космических лучей на поверхности Земли. Если бы среднее время жизни оставалось неизменным, то за это время мезон прошел бы расстояние порядка 300 м даже в том случае, если бы он двигался со скоростью, близкой к скорости света. Наличие мезонов у поверхности Земли объясняется замедлением времени движущегося мезона. Среднее

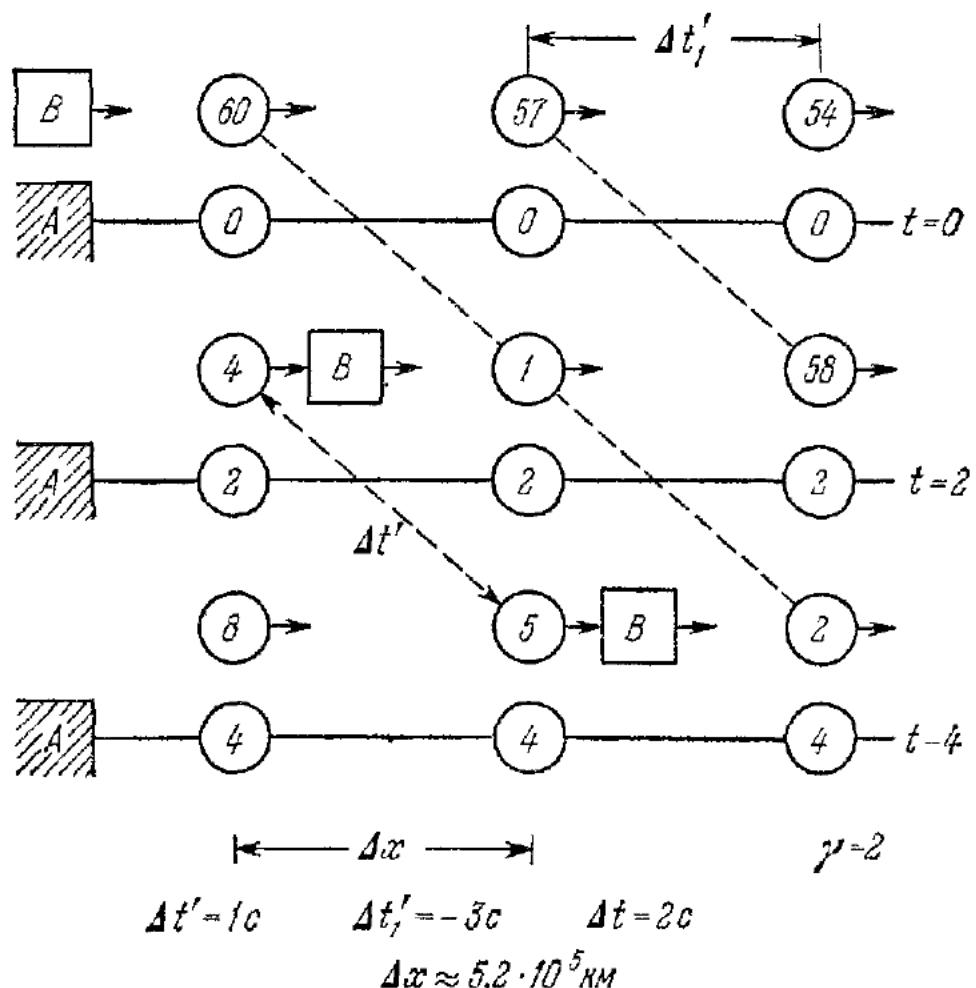


Рис. 431.

время жизни покоящегося в системе  $B$  мезона  $\Delta t' \sim 2 \cdot 10^{-6}$  с соответствует интервалу  $\Delta t$  по часам, покоящимся относительно Земли (система  $A$ ). Эти интервалы времени связаны равенством  $\Delta t = \gamma \Delta t'$  (153.6).

За время  $\Delta t$  мезон может достичь поверхности Земли, если  $\gamma$  достаточно велико. Действительно, для мезонов в космических лучах  $\gamma \sim 50$ , и поэтому за время  $\Delta t$  мезон может пройти расстояние порядка

$$s \sim c \Delta t = c \gamma \Delta t' = 3 \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 30 \text{ км.}$$

Заметим, что при  $\gamma \sim 50$  частица движется со скоростью, меньшей скорости света примерно на 60 км/с.

К выводу о растяжении времени движущихся частиц приходят физики при анализе распада этих частиц в ускорителях. Там же

отмечалось увеличение пробега частиц (примерно до 100 раз), которое можно объяснить только замедлением времени. Результаты и других опытов с быстро движущимися частицами ( $\sim c$ ) убедительно подтверждают справедливость положений специальной теории относительности.

4. Преобразование скоростей («сложение» скоростей). Допустим, что в системе  $B$  движется частица со скоростью  $\mathbf{u}'$  ( $u'_x, u'_y, u'_z$ ). Скорость в системе  $B$  определяется, как обычно<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \left( \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right),$$

где  $\mathbf{r}'$  ( $x', y', z'$ ) — радиус-вектор в системе  $B$ . Какова будет скорость частицы в системе  $A$ ? Ее, очевидно, следует определить так:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right);$$

$\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ) — радиус-вектор в системе  $A$ . Из уравнений (153.1) следует связь между дифференциалами в различных системах отсчета:

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right), \\ dx' &= \gamma (dx - v dt), \\ dy' &= dy, \quad dz' = dz. \end{aligned} \tag{153.8}$$

Учитывая эти равенства, можно записать:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - v dt)}{\gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \delta (u_x - v), \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{u_y}{\gamma \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} = \frac{\delta}{\gamma} u_y, \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{\delta}{\gamma} u_z, \end{aligned} \tag{153.9}$$

где ради сокращения обозначено:

$$\delta = \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)^{-1}. \tag{153.10}$$

Напомним, что  $\gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1$ .

<sup>1)</sup> Далее мы будем записывать компоненты вектора в скобках при векторе.

Тем же самым путем можно показать, что

$$u_x = \delta' (u'_x + v), \quad u_y = \frac{\delta'}{\gamma} u'_y, \quad u_z = \frac{\delta'}{\gamma} u'_z, \quad (153.11)$$

где

$$\delta' = \left( 1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)^{-1}. \quad (153.12)$$

Сравнение (153.9) и (153.11) показывает, что

$$\delta \delta' = \gamma^2. \quad (153.13)$$

Прежде всего отметим, что закон преобразования скоростей принципиально отличается от закона сложения скоростей в ньютоновской механике. При галилеевом преобразовании, при  $v \ll c$ ,

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

Теперь сумма скоростей вдоль оси  $x$  умножается на  $\delta'$  — величину, зависящую от  $u'_x$ ,  $v$  и  $c$ . Изменяются и составляющие скорости вдоль осей  $y$  и  $z$ , хотя разности координат не меняются, но разности времени другие,  $dt \neq dt'$ .

Важно отметить, что ньютонов закон сложения скоростей не имеет места для скорости света. Если в системе  $B$  скорость света  $u'_x = c$ , то и в системе  $A$  скорость  $u_x = c$ . Действительно, по (153.11)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c,$$

как и следовало ожидать из основных положений теории относительности.

Кстати, если представим себе, что луч света в системе  $B$  распространяется вдоль оси  $y'$ , то, как можно получить из формул (153.11), полагая  $u'_y = c$ ,  $u'_x = 0$ ,  $u'_z = 0$ , компонентами его скорости в системе  $A$  будут

$$u_y = \frac{c}{\gamma}, \quad u_x = v, \quad u_z = 0,$$

а величина скорости

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c.$$

Следовательно, луч света, идущий в системе  $B$  нормально к оси  $x'$ , имеет другое направление в системе  $A$ , но величина скорости, конечно, остается равной  $c$ .

Обращаясь опять к выражениям (153.11), можно показать, что угол  $\varphi$  луча света с осью  $x$  в  $A$  определится из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi'}{\gamma \left( \cos \varphi' + \frac{v}{c} \right)},$$

если в системе  $B$  он составляет угол  $\varphi'$  с осью  $x'$ . Такое изменение угла направления луча света объясняет aberrацию звезд — кажущееся изменение положения звезд на небе вследствие движения Земли по орбите. Для звезды в зените смещение составляет порядка  $40''$  за полгода.

Все эти выводы на первый взгляд кажутся довольно необычными, но они являются естественными следствиями наблюдаемых фактов: инерциальные системы равноправны, и скорость света относительно них одинакова.

Отметим одно важное для дальнейшего соотношение между модулями скоростей в системах  $A$  и  $B$ . Обозначим

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad \text{и} \quad u'^2 = u'_x^2 + u'_y^2 + u'_z^2,$$

тогда из (153.9) имеем:

$$u'^2 = \delta^2 \left[ (u_x - v)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (u_y^2 + u_z^2) \right]. \quad (153.14)$$

Вычислим величину  $1 - \frac{u'^2}{c^2}$ , опуская простые выкладки:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{u'^2}{c^2} &= \delta^2 \left[ \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{c^2} (u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2 \gamma^2} (u_y^2 + u_z^2) \right] = \\ &= \delta^2 \left[ \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)^2 - \frac{1}{c^2} (u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (u_y^2 + u_z^2) \right] = \\ &= \delta^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{\delta^2}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (153.15)$$

Далее часто придется иметь дело с этим равенством, поэтому сокращенно запишем его так:

$$\delta \alpha' = \gamma \alpha, \quad (153.16)$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad \alpha' = \left( 1 - \frac{u'^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (153.17)$$

(Все величины в (153.16) положительные.) Учитывая (153.13), можно показать, что

$$\delta' \alpha = \gamma \alpha'. \quad (153.18)$$

В заключение параграфа приведем уравнения преобразования Лоренца в векторном виде. Если обозначим единичные векторы по

осям  $x, y, z$  через  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  соответственно, то  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ . В этих обозначениях

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \gamma(x - vt)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + x\mathbf{e}_1 - v\mathbf{e}_1 = \\ &= \mathbf{r} + (\gamma - 1)x\mathbf{e}_1 - \gamma v t \mathbf{e}_1,\end{aligned}\quad (153.19)$$

или преобразование координат представлено одной формулой. Запишем очевидные равенства

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad x = r\mathbf{e}_1 = \frac{r\mathbf{v}}{v}, \quad vx = \mathbf{v}r$$

и получим (153.19) в общей форме:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{r\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma v t. \quad (153.20)$$

Преобразование времени теперь примет такой вид:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vr}{c^2} \right). \quad (153.21)$$

Формулы (153.20) и (153.21) представляют собой преобразования Лоренца для любого направления  $\mathbf{v}$  и любой точки  $\mathbf{r}$ , только следует помнить, что система  $B$  движется поступательно относительно системы  $A$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} = 0$  при  $t = t' = 0$ . Выделенным направлением является направление вектора скорости  $\mathbf{v}$ ; составляющие вектора  $\mathbf{r}$ , нормальные к  $\mathbf{v}$ , не изменяются. Только проекция вектора  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{v}$  и сам вектор  $\mathbf{v}$  связывают пространственные координаты и время. При  $\gamma \rightarrow 1$  получаем галилеево преобразование в векторном виде:

$$t' \rightarrow t, \quad \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{v}t.$$

Преобразования Лоренца показывают, что время неотделимо от пространства, и наоборот. Все физические явления, все процессы в мире происходят в пространстве и времени. Пространство и время представляют единую совокупность тех условий, при которых совершается всякое движение материи. Это полностью согласуется с философским определением пространства и времени как формы существования материи», которое дает диалектический материализм.

## § 154. Количество движения (импульс)

Движение со скоростью, сравнимой со скоростью света, в физике впервые встретилось при исследовании потока заряженных частиц (электронов), испускаемых радиоактивным веществом. Зная законы действия электрического и магнитного полей на движущийся заряд, можно определить величину скорости и массу электронов.

Опыты, проделанные в начале нынешнего столетия, показали, что существует зависимость инертной массы от скорости, вернее,

от отношения скорости движения к скорости света. Вначале полагали, что таким свойством обладают только заряженные частицы вследствие «инерции» электромагнитного поля, окружающего электрон («электромагнитная масса»). Однако Эйнштейн показал, что зависимость массы от скорости — это свойство всех материальных тел. Непостоянство массы тел — следствие постулатов теории относительности.

В механике любое тело (твердое, жидкое, газообразное) можно представлять в виде совокупности взаимодействующих движущихся частиц, как систему частиц. Будут ли эти частицы достаточно малыми частями тела или молекулами — это не важно. Важно только то, что размеры каждой частицы малы по сравнению с размерами тела (всей системы частиц).

Закон сохранения количества движения *изолированной* системы частиц (изолированного тела) можно толковать как следствие закона инерции. Как бы ни изменялись скорости отдельных частиц из-за взаимодействия между ними, скорость изолированной системы в целом (скорость поступательного движения) остается постоянной.

Количество движения системы частиц представляется суммой импульсов отдельных частиц:

$$K = \sum m_i u_i, \quad (154.1)$$

только в релятивистской механике масса частицы  $m_i$  считается переменной. Можно ввести *среднюю* скорость движения системы частиц следующим образом:

$$u = \frac{\sum m_i u_i}{\sum m_i}, \quad (154.2)$$

как скорость движения системы в *целом*. Эта скорость равна среднему количеству движения на единицу массы.

В ньютоновой механике (при  $m_i = \text{const}$ ) из этого определения следует, что  $u$  есть скорость центра масс системы частиц. В данном случае это не совсем верно, так как  $m_i$  — переменная величина (зависит от времени). Поэтому ограничимся определением средней скорости  $u$  по формуле (154.2), полагая, что  $u dt$  есть поступательное перемещение системы частиц как целого (перемещение тела) за время  $dt$ . Дальше условно будем называть  $u$  скоростью «центра масс» системы.

Закон сохранения количества движения изолированной системы можно записать так:

$$K = \sum m_i u_i = u \sum m_i = mu = \text{const}, \quad (154.3)$$

где  $m = \sum m_i$ .

Следует подчеркнуть, что  $m = \sum m_i$  в этом случае неизменно, несмотря на то, что каждое  $m_i$  — переменное. Только при постоянных  $\mathbf{K}$  и  $m$  скорость  $\mathbf{u}$  будет постоянна, или закон инерции требует *неизменности* массы *изолированной* системы.

### § 155. Зависимость массы от скорости движения

Обратимся к основной задаче — определению зависимости массы от скорости движения. Для этого необходимо потребовать, чтобы при переходе от системы отсчета  $B$  к системе  $A$  равенство

$$\sum m'_i u'_i = u' \sum m'_i$$

переходило в

$$\sum m_i u_i = u \sum m_i, \quad (155.1)$$

где  $m'_i$  — значение массы  $i$ -й частицы в системе  $B$ ; причем  $u'_i$  и  $u'$  преобразуются в  $u_i$  и  $u$  в соответствии с лоренцевыми формулами (153.9). Отсюда можно найти зависимость массы от скорости, а затем законы преобразования масс и количества движения при переходе от системы  $B$  к  $A$ .

Ради простоты выкладок рассмотрим систему, состоящую только из двух частиц, и притом положим, что количество движения относительно  $B$  равно нулю, или

$$\begin{aligned} m'_1 u'_{1x} + m'_2 u'_{2x} &= 0, \\ m'_1 u'_{1y} + m'_2 u'_{2y} &= 0, \\ m'_1 u'_{1z} + m'_2 u'_{2z} &= 0. \end{aligned} \quad (155.2)$$

Следовательно, скорость центра масс в системе  $B$  равна нулю, поэтому относительно  $A$  она равна  $v$  — скорости движения системы  $B$ . Это можно проверить и по формулам (153.11):  $u'_x = 0$ ,  $u'_y = u'_z = 0$ , поэтому  $u_x = v$ ,  $u_y = u_z = 0$ .

Сначала рассмотрим компоненту количества движения системы частиц вдоль оси  $x$ . В системе  $A$  эта компонента равна

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = (m_1 + m_2) v. \quad (155.3)$$

Подставляя в первое равенство (155.2) скорости относительно системы  $A$ , из (153.9) найдем, что

$$\delta_1 m'_1 (u_{1x} - v) + \delta_2 m'_2 (u_{2x} - v) = 0.$$

Равенство (155.3) перепишем так:

$$m_1 (u_{1x} - v) + m_2 (u_{2x} - v) = 0. \quad (155.4)$$

Получаем два однородных уравнения относительно двух неизвестных (стоящих в скобках) величин. Эти уравнения только тогда имеют отличные от нуля решения, когда

$$\delta_1 m'_1 m_2 - \delta_2 m'_2 m_1 = 0. \quad (155.5)$$

Подставим сюда значения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  по формуле (153.16):

$$\frac{\gamma \alpha_1}{\alpha'_1} m'_1 m_2 = \frac{\gamma \alpha_2}{\alpha'_2} m'_2 m_1.$$

Сокращая на  $\gamma$ , это равенство представим так:

$$\frac{\alpha_1 m'_1}{\alpha'_1 m_1} = \frac{\alpha_2 m'_2}{\alpha'_2 m_2}. \quad (155.6)$$

Слева стоят величины, зависящие от свойств и характеристик только первой частицы, а справа — только второй частицы. Следовательно, равенство (155.6) возможно только тогда, когда обе части равны константе, например  $D$ . Тогда

$$\frac{m'_1}{m_1} = D \frac{\alpha'_1}{\alpha_1}, \quad \frac{m'_2}{m_2} = D \frac{\alpha'_2}{\alpha_2}.$$

Воспользуемся обозначениями (153.17) для  $\alpha_1$  и  $\alpha'_1$  и запишем первое равенство в таком виде:

$$\frac{m'_1}{m_1} = D \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_1}{c^2}}}. \quad (155.7)$$

Отсюда выясняется зависимость массы частицы от модуля скорости.

Пусть в системе  $B$  скорость  $u'_1 = 0$  — частица покоятся в  $B$  — и ее масса  $m'_1$  равна  $m_{10}$  — массе покоящейся частицы. Тогда из (155.7) следует, что масса первой частицы в системе  $A$  равна

$$m_1 = \frac{1}{D} \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}. \quad (155.8)$$

Это соотношение должно быть справедливо и при  $u_1 \ll c$  (в случае ньютоновской механики), а тогда  $m_1 = m_{10}$ , поэтому  $D = 1$ . Аналогичное равенство получим и для второй частицы.

Следовательно, любая частица, движущаяся относительно  $A$  со скоростью  $u$ , имеет массу

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \alpha, \quad (155.9)$$

где  $m_0$  — масса покоящейся частицы (или движущейся со скоростью  $u \ll c$ ),  $u$  — модуль скорости.

Далее не будем пользоваться обозначением  $m_0$  для массы покоящейся частицы, а будем просто обозначать ее через  $m$ . Масса частицы, движущейся со скоростью  $u$  относительно  $A$ , тогда записывается в виде произведения

$$m\alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (155.10)$$

а масса этой же частицы в системе  $B$  — в виде произведения

$$m\alpha' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}. \quad (155.11)$$

Зависимость массы от скорости — одно из основных положений механики Эйнштейна: *инертная* масса зависит от величины скорости, вернее, от *отношения* скорости к скорости света, с увеличением скорости инерция тела растет и при  $u \rightarrow c$  стремится к  $\infty$ . Значит, ни одно тело при  $m > 0$  не может достичь скорости  $c$ .

Опыты на ускорителях, где изучались движения быстрых частиц, скорость которых приближалась к скорости света, убедительно подтвердили зависимость массы от скорости и правильность формулы (155.9).

### § 156. Преобразование импульса и массы

Зависимость массы от скорости была получена при преобразовании проекции количества движения системы, состоящей из двух частиц, на ось  $x$ , вдоль которой происходит движение систем отсчета. И этого вполне достаточно для определения изменения количества движения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Во-первых, компоненты скорости центра масс вдоль осей  $y'$  и  $z'$  были равны нулю в системе  $B$  и они останутся такими же и в системе  $A$ . Во-вторых, если масса зависит от скорости по формуле (155.10), то, как покажем далее, компоненты количества движения вдоль осей  $y'$  и  $z'$  каждой частицы останутся неизменными при переходе к системе  $A$ .

Масса зависит от скорости по (155.10), поэтому количество движения (импульс) частицы относительно  $A$  определяется так:

$$K = m\alpha u = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (156.1)$$

Относительно  $B$  количество движения этой же частицы равно

$$K' = m\alpha' u'. \quad (156.2)$$

Вспоминая преобразование скоростей, можно найти преобразование компонент количества движения  $K$  при переходе к системе  $B$ . Возьмем компоненту  $K'_x$  в системе  $B$ :

$$K'_x = m\alpha' u'_x.$$

Вспоминая, что  $u'_x = \delta(u_x - v)$ , а  $\delta = \frac{\gamma\alpha}{\alpha'}$ , и воспользовавшись (153.16), найдем

$$K'_x = m\alpha' \delta(u_x - v) = \gamma m\alpha(u_x - v),$$

или

$$K'_x = \gamma(K_x - v m\alpha). \quad (156.3)$$

Заметим, что компонента  $K'_x$  меняется аналогично координате  $x'$ , если заменить  $x$  на  $K_x$ , а  $t$  на  $m\alpha$ .

Теперь рассмотрим компоненты  $K'_y$  и  $K'_z$ . Достаточно рассмотреть одну из них. По определению

$$K'_y = m\alpha' u'_y;$$

вспомним, что  $u'_y = \frac{\delta}{\gamma} u_y$ , и учтем (153.16):

$$K'_y = m\alpha' \frac{\delta}{\gamma} u_y = m\alpha u_y = K_y. \quad (156.4)$$

Проекция количества движения частицы на ось  $y$  (и ось  $z$ ) не изменяется, как не изменяются координаты  $y$  и  $z$ . Следовательно, проекции количества движения преобразуются подобно координатам при переходе от системы  $B$  к системе  $A$  (конечно, так же и обратно). Только вместо времени  $t$  в формулы преобразования входит масса  $m\alpha$ .

Теперь естественно проследить связь между  $m\alpha'$  и  $m\alpha$ , т. е. закон преобразования массы. Это просто сделать, производя замену величин по тем же формулам (153.10) и (153.16):

$$m\alpha' = m \frac{\gamma\alpha}{\delta} = \gamma m\alpha \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right),$$

или

$$m\alpha' = \gamma \left(m\alpha - \frac{K_x v}{c^2}\right). \quad (156.5)$$

И здесь, как и следовало ожидать, существует та же аналогия:  $t \sim m\alpha$  и  $x \sim K_x$ .

Таким образом, масса  $m\alpha$ , так же как и количество движения  $K$ , относительна. Последнее обстоятельство не было известно в дарвинистской физике.

Полезно выписать все формулы преобразования массы и импульса вместе:

$$\begin{aligned} m\alpha' &= \gamma \left( m\alpha - \frac{vK_x}{c^2} \right), \\ K'_x &= \gamma (K_x - vma), \\ K'_y &= K_y, \quad K'_z = K_z. \end{aligned} \quad (156.6)$$

Время  $t$  и вектор положения  $\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ) преобразуются при переходе от системы  $A$  к системе  $B$ , таким же образом преобразуется масса  $m\alpha$  и вектор количества движения  $\mathbf{K}$  любой частицы. Очевидно, что формулы обратного преобразования, от  $B$  к  $A$ , имеют тот же вид, за исключением положительного знака при скорости  $v$ .

По аналогии с (153.20) можно записать (156.6) в векторном виде:

$$\begin{aligned} m\alpha' &= \gamma \left( m\alpha - \frac{\mathbf{K}\mathbf{v}}{c^2} \right), \\ \mathbf{K}' &= \mathbf{K} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{K}\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma m\alpha \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (156.7)$$

Любое тело можно рассматривать как частицу, если идет речь о его поступательном движении, поэтому импульс тела равен

$$\mathbf{K} = m\alpha u,$$

где  $m$  — масса покоя тела (при  $u \ll c$ ), а  $u$  — его скорость. Второй закон динамики при движении тела относительно инерциальной системы отсчета формулируется так, как это сделано было еще Ньютона (см. § 19): сила равна производной от количества движения, или

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\alpha u) = m \frac{d}{dt} (\alpha u). \quad (156.8)$$

Пользуясь этим законом, можно решать задачу о движении тела с большими скоростями, если известна сила, действующая на тело. В общем случае сила  $\mathbf{F}$

не совпадает с ускорением  $\frac{du}{dt}$ ,

ибо

$$\mathbf{F} = mu \frac{d\alpha}{dt} + m\alpha \frac{du}{dt}. \quad (156.9)$$

Отсюда видно, что векторы силы, скорости и ускорения лежат в одной плоскости. Для выяснения связи между силой и ускорением следует разложить векторы силы и ускорения на составляющие в этой плоскости: по направлению скорости  $u$  и по нормали к ней (рис. 432). Теперь можно записать:

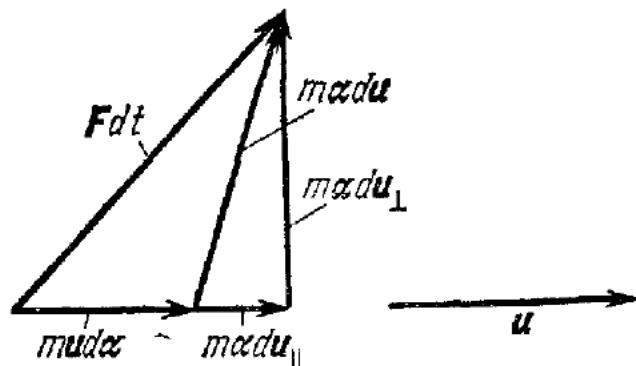


Рис. 432.

$$F_{\perp} dt = m\alpha du_{\perp}, \quad F_{\parallel} dt = mu d\alpha + m\alpha du_{\parallel}. \quad (156.10)$$

Так как  $du_{\parallel}$  равно  $du$  (приращению модуля  $u$ ), то, учитывая, что

$$d\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{u \, du}{c^2} = \frac{\alpha^3}{c^2} u \, du, \quad (156.11)$$

второе равенство (156.10) представим так:

$$F_{\parallel} dt = m\alpha \left(1 + \alpha^2 \frac{u^2}{c^2}\right) du_{\parallel} = m\alpha^3 du_{\parallel}.$$

Сила совпадает с ускорением только в тех случаях, когда она нормальна к скорости или направлена по скорости.

Следовательно, связь между компонентами силы и ускорения можно всегда представить в такой форме:

$$\begin{pmatrix} F_{\perp} \\ F_{\parallel} \end{pmatrix} = m\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_{\perp}}{dt} \\ \frac{du_{\parallel}}{dt} \end{pmatrix}. \quad (156.12)$$

Этим выражением удобно пользоваться для определения силы при заданной массе и ускорении, и наоборот. Обычно матрицу

$$m\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

не называют «массой», а считают динамической массой величину  $m\alpha$ , принимая во внимание определение импульса как произведения массы на скорость.

## § 157. Энергия

Из общего выражения для массы тела, движущегося со скоростью  $u$ ,

$$m\alpha = m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

можно сделать важные выводы о закономерной связи между массой и энергией. Масса растет со скоростью, следовательно, можно предполагать связь массы с кинетической энергией.

Посмотрим, какова эта связь при малых значениях  $u/c$  в случае ньютоновской механики. Разложим  $\alpha$  в ряд по  $u/c$ :

$$m\alpha = m + \frac{1}{c^2} \frac{mu^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{mu^4}{c^4} + \dots \quad (157.1)$$

Отсюда видно, что при малом отношении  $u/c$

$$m\alpha \approx m + \frac{1}{c^2} \frac{mu^2}{2} = m + \frac{1}{c^2} T, \quad (157.2)$$

где  $T = \frac{mu^2}{2}$  — кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью  $u$ , определяемая в ньютоновской механике. По принципу

относительности, если некоторый закон справедлив относительно одной инерциальной системы, то он должен быть справедлив относительно любой, движущейся с большей скоростью. Поэтому кинетическая энергия при больших скоростях движения будет определяться аналогично (157.2), или

$$T = mac^2 - mc^2 = mc^2(\alpha - 1). \quad (157.3)$$

Учитывая разложение (157.1), можно записать кинетическую энергию при любом  $u/c$  (только при  $u < c$ ) в таком виде:

$$T = \frac{mu^2}{2} \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right]. \quad (157.4)$$

Из этих выражений для  $T$  видно, что при  $u \rightarrow c$  кинетическая энергия  $T \rightarrow \infty$ , так как  $mac \rightarrow \infty$ .

Величину  $mac^2 = E$  называют *полной* энергией движущегося тела, а  $mc^2 = E_0$  — энергией покоящегося тела. И равенство (157.3) можно представить так:

$$E = E_0 + T, \quad (157.5)$$

полная энергия равна сумме кинетической энергии и энергии покоя  $E_0$ .

Такая величина не фигурировала в дарвинистской физике, это совершенно новое понятие, оно имеет фундаментальное значение для всей физики. Тело с инертной массой покоя  $m$  (массой при  $u \ll c$ ) обладает определенным запасом энергии, пропорциональным  $m$ , и при этом совсем не малым по сравнению с кинетической энергией, когда  $u \ll c$ .

Прежде чем обсуждать физическое значение закона, связывающего энергию и массу:

$$E = mac^2, \quad (157.6)$$

приведем несколько иной вывод основного равенства для  $T$ .

Полагаем, что работа силы, приложенной к свободному телу, равна увеличению его кинетической энергии, как и в ньютоновой механике. Только учтем, что сила

$$F = \frac{dK}{dt} = m \frac{d}{dt}(\alpha u), \quad (157.7)$$

где  $\alpha$  учитывает релятивистское изменение массы. Тогда

$$dT = F dr = \frac{dK}{dt} dr = dK u,$$

так как  $u = \frac{dr}{dt}$ . Подставляем сюда  $dK = m d(\alpha u)$ :

$$dT = m d(\alpha u) u = m da uu + m au du = mu^2 d\alpha + m\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (157.8)$$

Согласно равенству (156.11) величина  $d\alpha = \frac{\alpha^3}{c^2} d\left(\frac{u^2}{2}\right)$ ; отсюда видно, что

$$\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{c^2}{\alpha^2} d\alpha = c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) d\alpha = (c^2 - u^2) d\alpha.$$

Подставляя это в (157.8), находим простое соотношение:

$$dT = mc^2 d\alpha.$$

Интегрируем его:

$$T = mc^2\alpha + C,$$

здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Считаем, что в покое  $T = 0$  и  $\alpha = 1$ , из этого условия определяем  $C = -mc^2$ . Следовательно, приходим к выражению (157.3).

Закон  $E = m\alpha c^2$  показывает, что между энергией тела  $E$  и его инертной массой  $m\alpha$  существует неизменная простая пропорциональная зависимость. Энергия и инертная масса — различные физические характеристики тела: первая — способность производить работу, вторая — мера инертности тела. Но между этими величинами есть *универсальная* взаимная связь. Если известно, что инертная масса увеличивается на какую-то величину  $\Delta(m\alpha)$ , то это означает увеличение энергии на  $c^2\Delta(m\alpha)$ , и, наоборот, увеличение энергии на  $\Delta E$  какого-либо физического объекта означает увеличение его инертной массы на  $\Delta E/c^2$ .

Отметим, что такое положение должно относиться к любому известному виду энергии, например кинетической, потенциальной, электромагнитной и др. Еще в 1905 г. Эйнштейн на простом примере показал, что количество энергии электромагнитного излучения  $E$  обладает инертной массой  $E/c^2$ . Иногда это называют *эквивалентностью* массы и энергии. Поэтому можно иначе представить уравнения преобразования массы и количества движения (156.6), если вместо массы  $m\alpha$  ввести равную ей величину  $E/c^2$ , и тогда эти преобразования примут такой вид:

$$E' = \gamma(E - vK_x), \quad K'_x = \gamma\left(K_x - \frac{vE}{c^2}\right). \quad (157.9)$$

В векторном виде общее преобразование энергии и импульса, очевидно, запишется так:

$$E' = \gamma(E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}), \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} + (\gamma - 1) \frac{K\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma \frac{E}{c^2} \mathbf{v}. \quad (157.10)$$

Равенства (157.10) получены заменой массы  $m\alpha$  на  $E/c^2$  в (156.7). Из этих равенств видно, что законы сохранения энергии и количества движения (импульса) связаны между собой. Если в системе  $A$  энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{K}$  постоянны, то они будут постоянны и в системе  $B$ .

Особенное значение имеет энергия покоя  $E_0$ , о которой дарелятивистская физика не имела представления. Нагретое тело должно иметь большую массу, чем то же тело, но холодное; скатая пружина имеет большую массу; вещества, химически прореагировавшие с выделением энергии, будут иметь меньшую массу, и т. п. Но практически такие изменения массы никогда не наблюдались вследствие очень малых относительных изменений массы — величина  $\Delta E/c^2$  (где  $\Delta E$  — приращение энергии) обычно ничтожно мала относительно массы  $m$  тел. Точность измерений недостаточна для определения таких изменений.

Однако в физике ядерных процессов и явлений, происходящих при соударении быстро летящих атомных частиц, соответствующие изменения массы вполне измеримы и дают надежную оценку энергии, поглощаемой и выделяемой при таких процессах. Особенно показательно в этом отношении явление «аннигиляции» частиц (или «рождения» пары частиц), когда две частицы одинаковой массы, но с противоположными зарядами (например, электрон и позитрон) сталкиваются и их масса «превращается» в энергию электромагнитного излучения. Или лучше сказать так: в соответствии с законом сохранения энергии взаимодействующих частиц энергия перешла в такое количество энергии электромагнитного излучения, которое имеет массу, равную массе сталкивающихся частиц. Опыты атомной и ядерной физики не только подтверждают выводы теории относительности, но многие из них были поставлены на основе выводов этой теории.

Приведем еще один пример. В классической механике при полностью неупругом ударе двух тел сохранялось количество движения, а механическая энергия не сохранялась. Здесь сохраняется и количество движения, и энергия, только масса покоя после удара больше суммы масс покоя соударяющихся тел. Часть кинетической энергии (или вся энергия) перешла в энергию массы покоя. Пусть две одинаковые частицы летят с одинаковыми скоростями навстречу друг другу и соударяются полностью неупруго. Тогда масса, эквивалентная кинетической энергии частиц, перейдет в массу покоя частицы, образовавшейся после удара. Поэтому ее масса покоя больше суммы масс покоя частиц.

Практические выводы из представлений теории о неизменной связи между энергией и массой трудно переоценить. Величина множителя  $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2$  показывает, какие огромные запасы энергии содержатся в обычном веществе: 1 г-моль вещества содержит энергию в  $9 \cdot 10^{13}$  Дж. Пока что только очень небольшая доля таких запасов энергии в веществе используется в атомных энергетических установках, имеющих большие преимущества по сравнению с обычными тепловыми, особенно в тех случаях, когда количество потребляемого топлива имеет решающее значение.

### § 158. Количество движения и энергия системы частиц

В рамках механики можно рассматривать любое тело как систему частиц, взаимодействующих между собой при непосредственном соприкосновении или при «столкновении». Тем самым исключаются силы тяготения между отдельными частицами тела<sup>1)</sup>.

В ядерной физике приходится иметь дело со столкновениями быстро движущихся заряженных частиц, взаимодействующих на расстоянии, но там обычно энергия этого взаимодействия мала по сравнению с полной энергией  $mc^2$ , и ею пренебрегают. Поэтому считают частицы взаимодействующими при непосредственном соударении. При соударении энергия частиц остается неизменной.

Так как полная энергия каждой частицы состоит из энергии, локализованной в самой частице (энергия покоя), плюс кинетическая энергия, то полную энергию системы частиц можно представить суммой энергий отдельных частиц и записать так:

$$c^2 \sum m_i \alpha_i = c^2 m \alpha, \quad (158.1)$$

где  $m$  — масса системы частиц, покоящейся в системе отсчета «центра масс», в системе, движущейся со скоростью

$$\alpha = \frac{\sum m_i \alpha_i u_i}{\sum m_i \alpha_i}.$$

Напоминаем, что  $\alpha^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 1$ . Поэтому и полный импульс системы частиц (тела) можно представить, как и для одной частицы:

$$K = m \alpha u = \sum m_i \alpha_i u_i. \quad (158.2)$$

Все уравнения преобразования энергии и количества движения при переходе от системы  $A$  к инерциальной системе  $B$  будут иметь тот же вид, что и для частицы, — (156.6) и (156.7).

Рассмотрим законы сохранения для *изолированной* системы частиц. Формулы преобразований (156.6) показывают неразрывную связь между законом сохранения количества движения для изолированной (замкнутой) системы частиц и законом сохранения ее энергии (массы). Допустим, что изолированная система частиц обладает постоянным во времени количеством движения относительно инерциальной системы отсчета  $A$ . Тогда та же система частиц будет сохранять постоянное количество движения относительно другой инерциальной системы  $B$  лишь в том случае, если не только количество движения, но и энергия (масса) системы частиц постоянна в  $A$ :  $K = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$ . Законы сохранения энергии (массы)

<sup>1)</sup> В космических масштабах, где силы тяготения играют решающую роль, так рассматривать движение нельзя. Но это вопросы общей теории относительности, они выходят за рамки специальной теории относительности.

и количества движения для изолированной системы неразрывно связаны между собой.

В ньютоновой механике масса при всех условиях считалась постоянной, поэтому не обращалось особого внимания на важность закона сохранения массы изолированной системы частиц.

Различие в представлениях релятивистской и ньютоновой механики можно показать на простом примере. Допустим, что две частицы соударяются, тогда закон сохранения количества движения дает

$$m_1\alpha_1 u_1 + m_2\alpha_2 u_2 = m_1^* \alpha_1^* u_1^* + m_2^* \alpha_2^* u_2^*,$$

где звездочкой обозначены величины после удара. Это справедливо и в «прежней», и в «новой» механике. Но в нерелятивистской механике масса отдельной частицы неизменна, а в релятивистской — неизменна только сумма:

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = m_1^* \alpha_1^* + m_2^* \alpha_2^*.$$

В первом случае сохраняется масса каждой частицы, во-втором — масса всей системы частиц, так как частица не изолирована, она взаимодействует с другой частицей, а система в целом изолирована, не взаимодействует с другими телами.

Другими словами: *изолированное* тело (система) или изолированная частица движутся *по инерции* с постоянной скоростью, их количество движения и массы постоянны. Для них соблюдается закон инерции как в «старой», так и в «новой» механике. Однако неизолированная система по «новой» механике (в отличие от «старой») может изменять не только количество движения, но и свою массу.

В общем виде тот же вывод следует из определения массы системы частиц:

$$m\alpha = \sum m_i \alpha_i,$$

где  $m$  — масса покоя *системы*, а  $m_i$  — масса покоя каждой частицы. Если перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $u$ , то количество движения  $K' = 0$  и  $u' = 0$ . Поэтому  $\alpha' = 1$  и

$$m = \sum m_i \alpha_i.$$

Значит,  $m \geq \sum m_i$ , так как  $\alpha'_i \geq 1$ . Масса покоя системы больше или равна сумме масс покоя отдельных частиц. Равенство имеет место только тогда, когда все частицы покоятся относительно друг друга,  $\alpha'_i = 1$  или все  $\alpha'_i = \alpha'$ , это может быть только тогда, когда все  $u'_i = u$ .

Заметим, что при соударении двух частиц масса покоя каждой частицы может измениться или вместо двух частиц может образоваться одна или больше двух частиц. А может быть и так, что массы покоя каждой частицы останутся неизменными, — в этом

случае удар называется *упругим*, во всех остальных — *неупругим*. Если две частицы при ударе образуют одну, то удар будет полностью неупругим. Но при всех этих ударах, в отличие от нерелятивистской механики, полная энергия при ударе всегда сохраняется.

### § 159. Инварианты

При преобразовании Лоренца изменяются координаты и время, они относительны. Но есть такие величины, которые не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой, они остаются неизменными, их называют *инвариантами*.

Существование инвариантных величин имеет принципиальное значение — не все меняется при переходе от одной системы к другой. Название «теория относительности» отражает только одну сторону теории — относительность, на самом деле одни величины изменяются, другие остаются постоянными. Поэтому название «теория относительности» не совсем удачно, как не было бы подходящим и название «теория инвариантов», хотя оно и отражает правильно другую сторону теории.

Прежде всего заметим: основы теории построены на том, что скорость света — инвариант. Важным инвариантом является *интервал* события. Квадрат интервала события определяется следующим образом:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t^2 - r^2. \quad (159.1)$$

Величины  $y^2$  и  $z^2$  не меняются при переходе от системы  $A$  к системе отсчета  $B$ , и

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad (159.2)$$

Это соотношение нетрудно проверить по формулам преобразования времени и координаты  $x$  (152.8):

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 \left[ c^2 \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 - (x - vt)^2 \right] = \\ &= \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (c^2 t^2 - x^2) = c^2 t^2 - x^2. \end{aligned}$$

Величина интервала события  $s$  остается неизменной во всех инерциальных системах отсчета.

Аналогично, при преобразовании энергии и количества движения (157.9) должна оставаться неизменной величина

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E^2}{c^2} - (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2). \quad (159.3)$$

Сравнивая (159.1) и (159.3), видим, что  $t$  соответствует  $E/c^2$ , а  $x \sim K_x$ ,  $y \sim K_y$  и  $z \sim K_z$ ; поэтому равенству (159.2) соответствует

$$c^2 \frac{E^2}{c^4} - K_x^2 = c^2 \frac{E'^2}{c^4} - K_x'^2,$$

или величина

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E'^2}{c^2} - K'^2 \quad (159.4)$$

представляет собой *инвариант* преобразования энергии и количества движения при переходе к другой инерциальной системе.

Отсюда следует важная зависимость между энергией  $E$  и количеством движения  $K$ . Допустим, что в системе  $B$  тело покоятся; тогда  $K' = 0$  и  $E' = E_0$  — энергии покоящегося тела, и из (159.4) следует:

$$E^2 - c^2 K^2 = E_0^2,$$

или

$$E^2 = c^2 K^2 + E_0^2. \quad (159.5)$$

Квадрат энергии тела равен сумме квадратов — энергии тела в покое и произведения  $c$  на количество движения  $K$  (рис. 433). Иногда энергию покоя записывают так:  $E_0 = mc^2$ . Тогда и равенство (159.5) примет следующий вид:

$$E^2 - c^2 K^2 = m^2 c^4. \quad (159.6)$$

Отсюда видно, что масса покоя (и энергия покоя  $E_0$ ) — *инвариант*, что вполне соответствует их физическому смыслу.

Кстати, из последнего равенства следует зависимость полной энергии тела, движущегося со скоростью  $v$ , от массы покоя:

$$E = m v c^2. \quad (159.7)$$

Действительно, количество движения тела равно  $K = \frac{E}{c^2} v$ . Подставляя это в (159.6) и вспоминая, что  $\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$ , получаем (159.7).

Кинетическая энергия

$$T = E - m c^2$$

выражается через количество движения  $K$  следующим образом:

$$T = m c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{K^2}{m^2 c^2}} - 1 \right),$$

что легко установить, используя (159.6).

При  $K \ll m c$  разложим корень в ряд и перейдем к пределу  $c \rightarrow \infty$ , тогда получим

$$T \approx \frac{K^2}{2m} \quad (159.8)$$

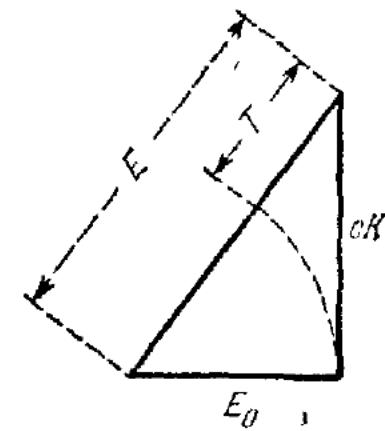


Рис. 433.

— известное нерелятивистское равенство.

### § 160. Четырехвектор и интервал

В механике теории относительности, особенно при анализе задач динамики частиц, движущихся с большими скоростями, удобно перейти от обычной системы единиц, например от системы СИ, к системе, в которой скорость света принята за единицу,  $c = 1$ .

Действительно, во многие формулы входит  $c$  и избавление от этого множителя значительно их упрощает. Если примем  $c = 1$ , то нужно выбрать еще только две основные единицы. В качестве таковых можно принять единицы длины и энергии, ради простоты выберем метр (м) и джоуль (Дж)<sup>1)</sup>. В этом случае за единицу времени принимается время, за которое свет проходит 1 м, или  $\frac{1}{c} \cdot 10^{-8}$  с.

Вспомним некоторые основные равенства (масса движущегося тела  $m\alpha$ , или  $E/c^2$ , импульс  $K = m\alpha u = Eu/c^2$ ):

$$E^2 - c^2 K^2 = m^2 c^4, \quad T = E - mc^2, \quad F = m \frac{d(\alpha u)}{dt} \text{ и т. д.}$$

Полагая в этих формулах  $c = 1$ , получим эти выражения в системе [м, Дж,  $c = 1$ ]. Пока обозначим значения соответствующих величин в этой системе звездочкой.

Из размерности получим следующую таблицу связи между значениями величин, выраженных в единицах СИ и единицах новой системы при  $c = 1$ :

Система \ Размерность	м	Дж		$m^{-1}$	$Dж \cdot m^{-1}$	Безразмерные		
СИ	$r$	$ct$	$mc^2$	$cK$	$E$	$wc^{-1}$	$F$	$uc^{-1}$
м, Дж, $c = 1$	$r$	$t^*$	$m^*$	$K^*$	$E$	$w^*$	$F$	$u^*$
							$\alpha$	$\gamma$

Обозначения всех величин в таблице нам известны, не использовалось только ускорение  $w = du/dt$ . Рассматривая таблицу, видим, что при перемене системы единиц не изменяются: длина, энергия, сила и также безразмерные величины  $\alpha$  и  $\gamma$ . Масса покоя и количество движения (импульс) в новой системе единиц измерены энергетической единицей, скорость безразмерна, она измеряется в долях скорости света.

Переход от новой системы к обычной прост: нужно заменить в уравнениях величины со звездочками соответствующими значе-

<sup>1)</sup> С таким же правом можно выбрать метр и ньютон или секунду и джоуль и т. д.

ниями величин в системе СИ, которые расположены в таблице вверху. А прямой переход от СИ к новой системе совсем элементарен: положим  $c = 1$ , и соответствующие величины будут выражаться в новой системе. Поэтому дальше не будем отмечать звездочкой величины в новой системе, а будем просто оставлять те же обозначения, имея в виду, что все величины представлены в системе [м, Дж,  $c = 1$ ].

Заметим, что в новой системе единиц  $K = m\alpha$ , так же как и в СИ, но  $K = Eu$  и энергия  $E = m\alpha$ , здесь отличие на множитель  $c^2$ .

Для примера запишем преобразования Лоренца и преобразование энергии-импульса:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx), & E' &= \gamma(E - vK_x), \\ x' &= \gamma(x - vt), & K'_x &= \gamma(K_x - vE), \\ y' &= y, & K'_y &= K_y, & K'_z &= K_z, \\ y^2(1 - v^2) &= 1, \end{aligned} \quad (160.1)$$

$$\text{инвариант: } s^2 = t^2 - r^2; \quad \text{инвариант: } m^2 = E^2 - K^2. \quad (160.2)$$

Формулы преобразования для координаты  $x$  ( $K_x$ ) и времени  $t$  ( $E$ ) совершенно симметричны, координата  $x$  совпадает с направлением  $v$ .

Каждое событие отмечается четырьмя числами, четырьмя «координатами»:  $t, x, y, z$ , — оно происходит в момент  $t$  в месте  $\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ). В математике упорядоченная система четырех чисел («координат») представляет точку; совокупность всех точек образует математическое пространство четырех измерений. Поэтому можно рассматривать событие как «точку» в четырехмерном пространстве-времени. При переходе от одной инерциальной системы к другой координаты точек (событий) в пространстве-времени изменяются в соответствии с лоренцевым преобразованием.

Координаты вдоль осей  $x$  и  $x'$ , направленных по скорости относительного движения системы  $v$ , в нашем случае связаны взаимно с  $t$  и  $t'$ . Координата  $x'$  зависит от  $x$  и  $t$ , так же как координата  $t'$  — от  $t$  и  $x$  (аналогично тому, как связаны декартовы координаты на плоскости при повороте системы координат на некоторый угол). Координаты по осям, нормальным к  $v$ , не изменяются.

Можно ввести вектор  $\mathbf{R}$  в четырехмерном пространстве-времени как величину с компонентами  $t, x, y, z$  (или  $t, \mathbf{r}$ ) и записать так:  $\mathbf{R}(t, x, y, z)$ , или  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r})$ . Вектор  $\mathbf{R}$  называют *четырехвектором* (4-вектором). В обычном трехмерном пространстве при повороте декартовой системы остается постоянной длина радиуса-вектора, длина  $\mathbf{r}$ , или квадратный корень из  $\mathbf{rr}$  (скалярного произведения  $\mathbf{r}$  на самого себя). Вообще говоря, скалярное произведение двух векторов при повороте системы координат остается неизменным.

В четырехмерном пространстве-времени при лоренцевом преобразовании не меняется величина интервала  $s$ , как показано в § 158. Квадрат интервала теперь можно записать так:

$$s^2 = t^2 - r^2 = t^2 - \mathbf{rr} = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (160.3)$$

Интервал  $s$  между событиями  $\mathbf{R}(0, 0)$  и  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r})$ , т. е. событием, происходящим в момент  $t=0$  в начале координат  $\mathbf{r}=0$ , и событием в момент  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ , имеет одну и ту же величину при переходе от  $t$  и  $\mathbf{r}$  к  $t'$  и  $\mathbf{r}'$ . Величину квадрата интервала можно рассматривать как скалярное произведение вектора  $\mathbf{R}$  на  $\mathbf{R}$  в пространстве-времени,  $s^2 = \mathbf{RR} = t^2 - \mathbf{rr}$ . В обычном пространстве

$$\mathbf{rr} = x^2 + y^2 + z^2$$

— скалярное произведение  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r}$  равно сумме квадратов компонент вектора в декартовой системе. Квадрат интервала — также алгебраическая сумма квадратов компонент вектора  $\mathbf{R}$ , только знаки у квадратов временной и пространственных компонент разные. В этом — существенное физическое отличие временной компоненты от пространственных и отличие пространства-времени от математического четырехмерного евклидова пространства.

Интервал  $s = \sqrt{\mathbf{RR}}$  между  $\mathbf{R}(0, 0)$  и  $\mathbf{R}(t, \mathbf{r})$  будет действительным числом, когда  $t^2 > r^2$ , и мнимым, когда  $t^2 < r^2$ .

Обозначим модуль мнимого интервала через  $s_0$ , тогда

$$s = is_0, \text{ или } s_0^2 = t^2 - r^2.$$

Действительный интервал «соединяет» два события 0 и  $\mathbf{R}$ , которые могут быть причинно связаны друг с другом, т. е. одно событие может воздействовать на другое. В самом деле, тело (или сигнал) может за время  $t$  перейти из точки 0 в точку  $\mathbf{r}$  (или из точки  $\mathbf{r}$  в точку 0), двигаясь с постоянной скоростью

$$u = r/t < 1$$

вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Поэтому события, происходящие в одной точке, могут повлиять на события в другой.

В этом случае всегда можно представить систему отсчета  $B$ , движущуюся со скоростью  $u$  по радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , в которой оба события 0 и  $\mathbf{R}$  происходят в одном месте. При  $t > 0$  скорость  $u$  совпадает по направлению с  $\mathbf{r}$ , а при  $t < 0$  скорость  $u$  противоположна  $\mathbf{r}$ . В первом случае начало системы  $B$  передвинется за время  $t$  из 0 в  $\mathbf{r}$  и оба события произойдут в одном месте ( $\mathbf{r}' = 0$ ) системы  $B$ . Во втором за отрезок времени  $t$  начало системы  $B$  перейдет из точки  $\mathbf{r}$  в 0 и в момент  $t = 0$  будет совпадать с началом системы  $A$ . Промежуток времени  $t'$ , через которое в системе  $B$  произойдут оба события, можно определить из постоянства интервала

$$t'^2 - r'^2 = t^2 - r^2,$$

Так как  $r' = 0$ , то

$$t' = \sqrt{t^2 - r^2} = t \sqrt{1 - u^2} = \frac{t}{\alpha},$$

весь  $r = ut$ .

Действительный интервал называют *времениподобным* интервалом, потому что всегда можно указать такую систему отсчета, в которой интервал данных двух событий определяется только промежутком времени.

Если события  $R = 0$  и  $R$  «соединены» мнимым интервалом при  $t^2 < r^2$ , то они не могут быть причинно связанными, ибо никакое тело (никакой сигнал) не может двигаться со скоростью  $u = r/t > 1$ . Событие  $R = 0$  не может повлиять на событие  $R$ . В этом случае всегда можно указать такую систему отсчета, в которой оба события происходят одновременно в различных местах. Это следует из постоянства интервала, ведь квадрат модуля интервала

$$s_0^2 = r^2 - t^2 = r'^2 - t'^2 > 0.$$

Поэтому всегда есть такая система  $B$ , в которой  $t' = 0$ , т. е. оба события происходят *одновременно* на расстоянии

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

Если эта система  $B$  движется со скоростью  $v$  вдоль  $r$ , то время в системе  $B$  равно  $t' = \gamma(t - rv)$ . Если выберем величину скорости системы  $B$  так<sup>1)</sup>, что

$$v = \frac{t}{r} < 1,$$

то  $t' = 0$ . Иначе говоря, в такой системе  $B$  оба события происходят одновременно. Расстояние между событиями в этой системе отсчета

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - r^2 v^2} = r \sqrt{1 - v^2} = \frac{r}{\gamma},$$

скорость  $v < 1$ .

Мнимый интервал называют *пространственноподобным*, так как всегда существует такая инерциальная система отсчета, в которой оба события происходят одновременно в разных местах.

Нулевой интервал,  $s = \sqrt{RR} = 0$  и  $t^2 = r^2$ , соответствует событиям, связанным световым сигналом с событием  $R = 0$ ; такой интервал называют *светоподобным*. Он разделяет события с пространственноподобным интервалом и события с времениподобным, интервалом. Все события с нулевым интервалом располагаются на поверхности, определяемой уравнением

$$t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (160.4)$$

<sup>1)</sup> Не следует забывать принятые единицы, в них скорость  $v$  безразмерная. В системе СИ  $v = c(ct/r)$  и  $r^2 > c^2 t^2$ .

которое представляет поверхность «конуса» в пространстве-времени с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью времени  $t$ . Этот конус называют *световым конусом*.

Сечение светового конуса координатной плоскостью  $(x, t)$  показано на рис. 434. Такие же сечения будут с любой плоскостью, проходящей через ось  $t$ . События, произошедшие при  $t < 0$  и лежащие внутри светового конуса (заштрихованная часть), в принципе могли повлиять на событие в точке 0, они представляют собой *прошлое* по отношению к 0. С другой стороны, событие в точке 0 может повлиять на события, лежащие внутри светового конуса при  $t > 0$  (*будущее*). События, лежащие вне светового конуса, никак не могут воздействовать на события в точке 0, они абсолютно «безразличны» по отношению к событию в точке 0.

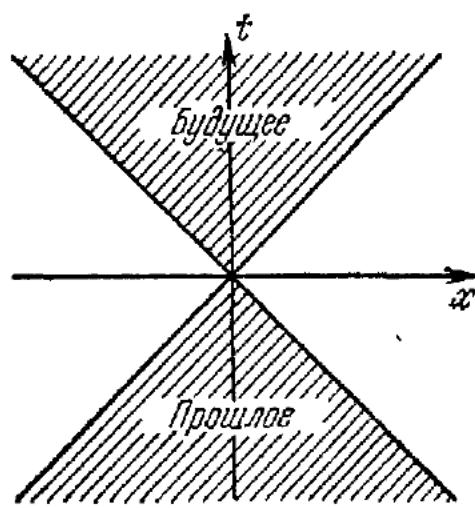


Рис. 434.

Но таким же образом можно найти интервал между двумя любыми событиями  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ . Можно прямыми вычислениями показать, что квадрат интервала будет равен

$$\begin{aligned} s^2 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^2 &= (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \\ &= (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]. \end{aligned}$$

При лоренцевом преобразовании

$$s^2 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)^2 = (\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}'_1)^2, \quad (160.5)$$

величина  $s$  остается неизменной. Ранее рассмотренный интервал представляет собой частный случай этого общего интервала, он соответствовал  $\mathbf{R}_1 = 0$ . Аналогично, квадрат интервала между событиями  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$  равен

$$ds^2 = d\mathbf{R} d\mathbf{R} = dt^2 - d\mathbf{r} d\mathbf{r} = dt^2 - dr^2.$$

Принимая во внимание общее определение интервала, можно представить себе вершину светового конуса проходящей через любую точку пространства-времени  $\mathbf{R}_1$  и разбить все события в мире по отношению к событию в  $\mathbf{R}_1$  по знаку квадрата интервала на области будущего, прошлого и абсолютно безразличного.

## § 161. Механика теории относительности

Вектор  $\mathbf{R}$  называют 4-вектором (четырехвектором) в отличие от 3-вектора  $\mathbf{r}$  обычного пространства. Всякую физическую величину, представленную тремя числами, которые изменяются при повороте системы декартовых координат на некоторый угол так же,

как меняются компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , по определению называют векторной величиной в трехмерном пространстве или просто вектором в этом пространстве. Аналогично, 4-вектором в пространстве-времени считают всякую упорядоченную совокупность четырех чисел, представляющих собой определенные физические величины, чисел, которые изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой в соответствии с лоренцевыми преобразованиями. Скалярное произведение двух 4-векторов определяется так:

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = t_1 t_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \quad (161.1)$$

оно — инвариант преобразования Лоренца<sup>1)</sup>.

Вектор  $\mathbf{R}$  есть вектор «положения» точки в пространстве-времени относительно инерциальной системы отсчета (допустим, системы  $A$ ). Определим 4-вектор скорости. Если частица движется в пространстве со скоростью  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то 4-вектор  $\mathbf{R}$  изменяется со временем: очевидно, что за время  $dt$  он изменится на величину  $d\mathbf{R}(dt, d\mathbf{r})$ , которая будет 4-вектором, «длина» этого вектора (соответствующий интервал) неизменна при лоренцевом преобразовании. Но отношение  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} \left(1, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$  не будет 4-вектором в соответствии с его определением, так как величины  $1, u_x, u_y, u_z$  при переходе к системе  $B$  не будут изменяться как  $t, x, y, z$ .

Поэтому вместо приращения времени  $dt$  берут приращение другой величины, которую называют «собственным временем»  $\tau$ , и определяют  $d\tau$  так:

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2. \quad (161.2)$$

Это — квадрат интервала между событиями  $(t, \mathbf{r})$  и  $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ . Величину  $d\tau$  можно истолковать следующим образом.

В системе, движущейся с постоянной скоростью  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  относительно  $A$ , находятся часы, и эти часы показывают приращение времени  $dt$  за время  $dt$ . Тогда радиус-вектор положения в движущейся системе  $\mathbf{r}' = \text{const}$  и  $d\mathbf{r}' = 0$ . Запишем элементарный интервал в этих двух системах:

$$d\tau^2 - dr'^2 = dt^2 - dr^2,$$

и, полагая  $dr' = 0$ , получим

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - u^2}.$$

---

<sup>1)</sup> Это можно проверить непосредственным вычислением по формулам (160.1).

Ради краткости можно записать:

$$\alpha d\tau = dt, \quad (161.3)$$

где, как и раньше,  $\alpha = (1 - u^2)^{-1/2}$ . Очевидно, величина  $d\tau$  — инвариант лоренцева преобразования, подобно интервалу  $dR$ .

Приращение «собственного» времени  $\tau$  представляет приращение времени, которое покажут часы, покоящиеся в системе, движущейся вместе с телом с постоянной скоростью  $u$ , в данный момент времени. С изменением величины скорости  $u$  соотношение между  $d\tau$  и  $dt$  меняется, так как меняется величина  $\alpha$ . Поэтому собственное время можно определить следующим образом:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - u^2} dt. \quad (161.4)$$

Очевидно, что собственное время  $\tau_2 - \tau_1$  всегда будет меньше  $t_2 - t_1$ , время в движущейся системе «замедлено».

Четырехвектором «скорости» в пространстве-времени называют величину

$$U = \frac{dR}{d\tau}, \quad (161.5)$$

компоненты которой уже будут изменяться в соответствии с лоренцевым преобразованием. Компоненты 4-вектора «скорости» найдем следующим путем:

$$U = \frac{dR(dt, dr)}{d\tau} = U \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau} \right) = U(\alpha, \alpha u), \quad (161.6)$$

так как  $\frac{dt}{d\tau} = \alpha$ ,  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \alpha \frac{dr}{dt} = \alpha u$ . Следовательно, 4-вектор «скорости» частицы (тела) имеет «временную» компоненту  $\alpha$  и пространственные  $\alpha u$ , где  $u$  — скорость обычная (3-вектор). Отметим, что «длина» вектора «скорости»  $U$  равна 1. Действительно,

$$U^2 = UU = \alpha^2 - \alpha^2 u^2 = \alpha^2 (1 - u^2) = 1; \quad (161.7)$$

этого можно было ожидать, так как  $d\tau$  равно интервалу  $dR$ .

Можно ввести и четырехвектор «ускорения» (хотя он почти не употребляется):

$$W = \frac{dU}{d\tau} = W \left( \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d}{d\tau} (\alpha u) \right) = W \left( \alpha \frac{d\alpha}{dt}, \alpha \frac{d(\alpha u)}{dt} \right). \quad (161.8)$$

Чаще в ходу четырехвектор импульса, который естественно определить как произведение массы на скорость:

$$P = mU = P(m\alpha, m\alpha u) = P(E, K). \quad (161.9)$$

Временная компонента 4-вектора импульса равна энергии, а пространственные — компонентам количества движения (3-вектора им-

пульса). Поэтому вектор  $\mathbf{P}$  называют *вектором энергии-импульса* в пространстве-времени. Квадрат «длины» этого вектора, очевидно, равен

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = E^2 - K^2.$$

Обычно это равенство записывается так:

$$\mathbf{P}\mathbf{P} = E^2 - K^2 = m^2, \quad (161.10)$$

потому что в системе, где тело поконится,  $K' = 0$  и энергия  $E$  равна энергии массы покоя  $m$ . Это уравнение можно получить и следующим образом:

$$\mathbf{P}\mathbf{P} = m^2 \mathbf{U}\mathbf{U} = m^2,$$

так как  $\mathbf{U}\mathbf{U} = 1$ .

Из универсального соотношения (161.10) между энергией, массой и количеством движения следует связь между энергией и работой силы. Если продифференцировать равенство (161.10) по времени<sup>1)</sup>, то получим

$$E \frac{dE}{dt} = K \frac{dK}{dt},$$

или

$$E \frac{dE}{dt} = K \mathbf{F},$$

так как  $\frac{dK}{dt} = \mathbf{F}$ .

Вспоминая, что  $E = m\alpha$  и  $K = m\alpha u$ , приходим к следующему знакомому равенству:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}u. \quad (161.11)$$

Оно имеет такой же вид и в системе СИ. Действительно, заменяя  $t$  на  $ct$  и  $u$  на  $u/c$ , видим, что  $c$  сокращается, так как  $E$  и  $\mathbf{F}$  не изменяются. Равенство (161.11) можно записать так:

$$dE = \mathbf{F}dr.$$

Приращение энергии равно работе внешней силы, действующей на частицу (тело), как и в механике Ньютона. Этим равенством мы пользовались при определении релятивистского значения энергии движущегося тела, подставляя сюда

$$\mathbf{F} = \frac{dK}{dt} = m \frac{d}{dt} (\alpha u).$$

<sup>1)</sup> Можно продифференцировать по  $\tau$ , результат будет тот же самый.

Далее естественно образовать 4-вектор

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \quad (161.12)$$

и считать его 4-вектором «силы» в пространстве-времени. Для выяснения значения его компонент пойдем тем же путем:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} \left( \frac{dE}{d\tau}, \frac{dK}{d\tau} \right) = \mathbf{f} \left( \alpha \frac{dE}{dt}, \alpha \frac{dK}{dt} \right) = \mathbf{f} \left( \alpha \frac{dE}{dt}, \alpha F \right).$$

Следовательно, 4-вектор силы имеет «временную» компоненту — производную от энергии по времени (мощность), умноженную на  $\alpha$ , и пространственные компоненты, равные компонентам 3-вектора силы, умноженным на  $\alpha$ . Можно записать «силу» и в таком виде:

$$\mathbf{f} - m \frac{dU}{d\tau} = m W, \quad (161.13)$$

аналогичном по форме закону Ньютона — «произведение массы на ускорение равно силе».

Заметим, что  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{f}$  ортогональны в пространстве-времени. В самом деле, по (160.10)

$$\mathbf{P}\mathbf{P} = m^2,$$

отсюда

$$\mathbf{P} \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{f} = 0,$$

из этого условия можно получить равенство (161.11).

Закон сохранения для изолированной системы частиц (изолированного тела) можно теперь записать так:

$$\sum \mathbf{P}_t = \text{const.} \quad (161.14)$$

Он содержит как сохранение энергии:

$$\sum E_t = \text{const.}$$

так и сохранение количества движения:

$$\sum \mathbf{K}_t = \text{const.}$$

При вычислениях с 4-векторами полезно иметь в виду, что скалярное произведение этих векторов является инвариантом преобразования Лоренца. Так, например,

$$\mathbf{P}\mathbf{R} = Et - \mathbf{K}\mathbf{r}, \quad \mathbf{f}\mathbf{R} = \alpha \frac{dE}{dt} - \alpha F\mathbf{r} \text{ и т. д.}$$

— инварианты.

Подводя итог, можно основные определения кинематики и динамики частицы в теории относительности с помощью 4-векторов записать следующим образом:

«положение»  $R$ ,

$$\text{«скорость» } U = \frac{dR}{d\tau},$$

$$\text{«ускорение» } W = \frac{dU}{d\tau}, \quad (161.15)$$

«импульс»  $P = mU$ ,

$$\text{«сила» } f = \frac{dP}{d\tau} = m \frac{dU}{d\tau} = mW.$$

Очевидно, что все эти определения по форме полностью соответствуют ньютоновой механике, только вместо 4-векторов следует подставить 3-векторы, «время»  $\tau$  заменить на  $t$  и массу оставить прежней.

Здесь необходимо отметить, что компоненты 4-векторов были записаны в системе [м, Дж,  $c = 1$ ]; в единицах системы СИ они будут иметь несколько иной вид. Для сравнения приведем следующую таблицу:

Вектор Система	$R$	$U$	$W$	$P$	$f$
СИ	$ct, r$	$\alpha c, \alpha u$	$\alpha c \frac{d\alpha}{dt}, \alpha \frac{d(\alpha u)}{dt}$	$c^{-1}L, K$	$c^{-1}\alpha \frac{dE}{dt}, \alpha F$
м, Дж, $c = 1$	$t, r$	$\alpha, \alpha u$	$\alpha \frac{d\alpha}{dt}, \alpha \frac{d(\alpha u)}{dt}$	$E, K$	$\alpha \frac{dE}{dt}, \alpha F$

Изменяется только вид временных компонент, вид пространственных остается тем же самым. Только следует учитывать, что размерности компонент 4-векторов другие, за исключением  $R$  и  $f$ .

Мы сказали, что только форма основных определений совпадает с формой ньютоновской механики. По существу, конечно, только при  $u < 1$  мы переходим к дорелятивистской механике, как к некоторому приближению более точной релятивистской механики, которая поконится на постулате независимости скорости света от движения приемника и источника и постулате относительности. Из этих положений последовало представление о едином пространстве-времени, о зависимости массы, длины и времени от системы отсчета, о неизменной связи между энергией и массой. Все это из-за малости скорости движения по сравнению со скоростью света

полностью отсутствовало в нерелятивистском приближении, лоренцевы преобразования превращались в галилеевы, пространство и время были независимы, масса, длина и время неизменны в любых инерциальных системах отсчета, энергия не связана с массой тела.

### § 162. Теория упругого удара двух частиц

В задаче об упругом соударении двух частиц рассматривается такой случай, в котором после короткого взаимодействия (в момент удара) массы покоя частиц остаются неизменными. Все остальные случаи следует отнести к области неупругих ударов, при которых могут изменяться энергии покоя соударяющихся частиц и даже могут появляться новые частицы в результате удара («распад»). Сюда, конечно, следует отнести классический случай полностью неупрого удара, когда масса покоя образовавшейся частицы возрастает.

Задачу упругого удара (как и неупрого) можно решать или рассматривая движение относительно «лабораторной» системы отсчета, или сначала в «системе центра масс» (где полное количество движения равно нулю), а затем уже перейти к лабораторной. Второй метод предпочтительней. Для того чтобы представить себе это более отчетливо, рассмотрим сначала первый способ, а затем второй.

Пусть первая частица (1) массы  $m_1$  движется и сталкивается со второй покоящейся частицей (2) массы  $m_2$ . Это соответствует условиям опытов, в которых поток ускоренных частиц падает на «мишень» — ядра покоящихся атомов.

До удара количество движения частицы 1 равно  $K$  и ее полная энергия  $E_h$ , причем

$$E_h^2 = K^2 + m_1^2. \quad (162.1)$$

Энергия второй частицы равна  $m_2$ .

После удара количества движения (импульсы) частиц будут  $K_1$  и  $K_2$ , а энергии —  $E_1$  и  $E_2$  соответственно для частиц 1 и 2.

Законы сохранения для этого случая дают:

$$K = K_1 + K_2, \quad (162.2)$$

$$E = E_h + m_2 = E_1 + E_2. \quad (162.3)$$

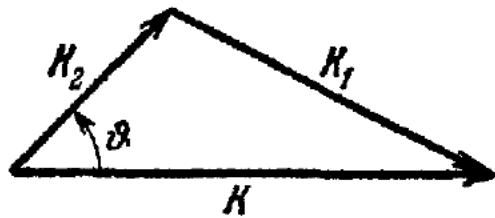


Рис. 435.

Предположим, что частица 2 после удара имеет скорость, направленную под углом  $\varphi$  к скорости частицы 1 до удара (к вектору  $K$ ). Тогда закон сохранения количества движения можно представить так, как показано на рис. 435, т. е. записать:

$$K_1^2 = K^2 + K_2^2 - 2KK_2 \cos \varphi. \quad (162.4)$$

Выразим  $K_1^2$  через известные  $E$ ,  $m_2$ ,  $K$  и подставим в (162.4). Квадрат количества движения частицы 1

$$K_1^2 = E_1^2 - m_1^2. \quad (162.5)$$

Учитывая равенства (162.1) и (162.3), получаем

$$K_1^2 = E_1^2 + K^2 - (E - m_2)^2. \quad (162.6)$$

Вспомним, что

$$E_2^2 = K^2 + m_2^2.$$

Тогда закон сохранения энергии (162.3) имеет вид:

$$E_1 = E - \sqrt{K^2 + m_2^2}. \quad (162.7)$$

Подставляем это в (162.6), а затем в (162.4), приходим к следующему равенству:

$$(E - \sqrt{K_2^2 + m_2^2})^2 = (E - m_2)^2 + K_2^2 - 2KK_2 \cos \vartheta.$$

Освобождаясь от радикала, получаем окончательное уравнение

$$E^2 K_2^2 = K^2 K_2^2 \cos^2 \vartheta + 2Em_2 K K_2 \cos \vartheta, \quad (162.8)$$

связывающее известные  $K$ ,  $E$ ,  $m_2$  и неизвестное  $K_2$  при любой величине угла  $\vartheta$ . Отсюда можно найти все возможные значения количества движения частицы 2 после удара.

Обозначим

$$K_2 \cos \vartheta = x, \quad K_2 \sin \vartheta = y$$

и подставим в (162.8). В результате получим уравнение кривой, представляющей все возможные значения конца вектора  $K_2$ . Это уравнение

$$E^2 (x^2 + y^2) = K^2 x^2 + 2EKm_2 x \quad (162.9)$$

есть уравнение эллипса, проходящего через начало координат  $x = y = 0$ , начало вектора  $K$ . Полуси эллипса равны:

вдоль оси  $x$

$$a = \frac{m_2 E}{E^2 - K^2} K, \quad (162.10)$$

параллельно оси  $y$

$$b = \frac{m_2}{\sqrt{E^2 - K^2}} K. \quad (162.11)$$

Заметим, что  $b < a$ , так как

$$b = a \sqrt{1 - \frac{K^2}{E^2}}. \quad (162.12)$$

Если преобразуем значения  $a$ , то найдем, что при  $m_1 > m_2$   $2a < K$ ; при  $m_1 < m_2$  будет  $2a > K$  и, конечно, при  $m_1 = m_2$  имеем  $2a = K$ . Действительно, учитывая (162.1) и (162.3), найдем

$$E^2 - K^2 = 2E_m m_2 + m_1^2 + m_2^2 = 2Em_2 + m_1^2 - m_2^2. \quad (162.13)$$

Подставляя это выражение в (162.10), получим

$$a = \frac{K}{2 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{Em_2}}. \quad (162.14)$$

Отсюда следует сказанное выше.

Таким образом, при  $m_1 > m_2$  эллипс, описываемый концом вектора  $K_2$ , будет иметь вид, показанный на рис. 436. Обе частицы

после удара летят всегда вперед, по направлению  $K$ . Угол  $\vartheta$  может принимать любые значения от  $\pi/2$  до 0, угол  $\varphi < \varphi_{\max}$ , причем  $\varphi_{\max}$  меньше  $\pi/2$ . Одному значению  $\varphi$ , вообще говоря, соответствуют два значения  $\vartheta$ . Точка  $B$  представляет «лобовой» удар, обе частицы после удара движутся в направлении  $K$ . Точка  $A$  — «прострел» (частица 1 пролетает мимо покоящейся частицы 2, не задевая ее, не взаимодействуя с ней,  $K_1 = K$ ).

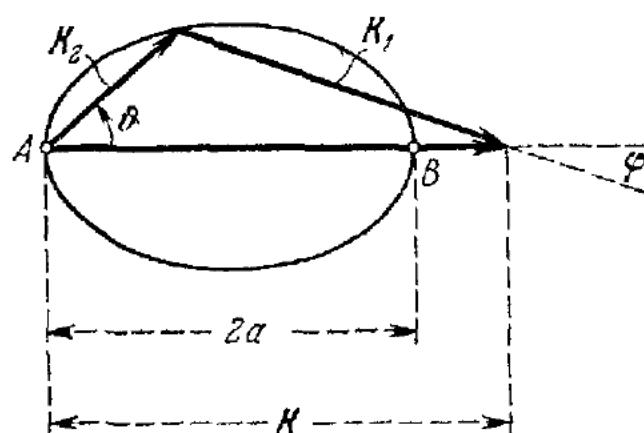


Рис. 436.

При  $m_1 < m_2$  картина возможных импульсов после соударения несколько иная, она показана на рис. 437. Угол отклонения налетающей частицы  $\varphi$  может изменяться от 0 до  $\pi$ , частица 1 после удара может лететь назад («отразиться»). Точка  $B$  соответствует

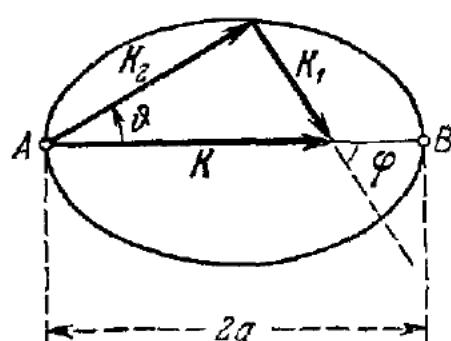


Рис. 437.

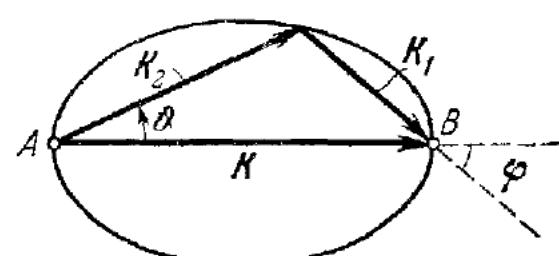


Рис. 438.

«лобовому» удару, в этом случае частица 1 отлетает назад, а частица 2 движется вперед по направлению  $K$ , причем  $K_2 > K$ . Точка  $A$  — «прострел». Каждому значению  $\vartheta$  соответствует одно значение  $\varphi$ .

При  $m_1 = m_2$  картина возможных соударений показана на рис. 438. Здесь  $\phi$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ . При «лобовом» ударе (точка  $B$ ) частица 1 останавливается, а частица 2 продолжает движение со скоростью частицы 1 до удара,  $K_2 = K$ ,  $\phi = 0$ .

Теперь рассмотрим задачу об упругом соударении двух частиц в системе «центра масс». В этой системе суммарное количество движения равно нулю, поэтому обе частицы будут двигаться навстречу друг другу и после удара будут разлетаться с одинаковыми и противоположными количествами движения. Скорость центра масс (ц. м.) системы частиц  $v$  определится из известного равенства, которое (в принятых единицах) запишется так:

$$v = \frac{\sum K_i}{\sum E_i}.$$

В нашем случае скорость системы ц. м. относительно лабораторной системы отсчета будет равна

$$v = \frac{K}{E}. \quad (162.15)$$

Законы сохранения в системе ц. м. количества движения и энергии:

до удара

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 0, \quad e_1 + e_2 = E', \quad (162.16)$$

после удара

$$\kappa'_1 + \kappa'_2 = 0, \quad e'_1 + e'_2 = E,$$

где  $\kappa$  — соответствующий импульс частицы, а  $e$  — ее энергия.

Из законов сохранения и постоянства масс покоя можно заключить, что

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa'_1 = \kappa'_2 = \kappa. \quad (162.17)$$

Действительно, представим закон  $e^2 = \kappa^2 + m^2$  для каждой частицы до удара геометрически на рис. 439 вместе с условием  $\kappa_1 = \kappa_2$ . Так как  $e'_1 + e'_2 = e_1 + e_2$ , то расстояние  $OA$  должно равняться  $\kappa'_1 = \kappa'_2 = \kappa$ . Отсюда следует, что

$$e_1 = e'_1, \quad e_2 = e'_2. \quad (162.18)$$

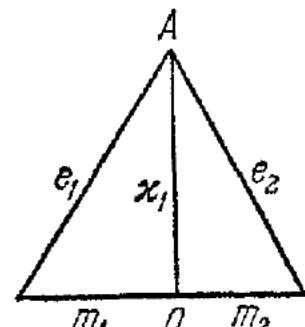


Рис. 439.

Абсолютные значения импульса каждой частицы до и после удара равны друг другу, в этом главное упрощение картины удара в системе ц. м. При ударе может измениться только направление количества движения частиц (рис. 440), угол  $\phi$  может быть любым.

Система ц. м. движется со скоростью  $v$  в направлении  $K$  относительно лабораторной системы отсчета, поэтому покоящаяся в ней частица 2 до удара имеет в системе ц. м. импульс

$$\kappa_2 = -\gamma m_2 v,$$

где  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ , как всегда. Отсюда следует, в соответствии с (162.17), что

$$x = \gamma m_2 v, \quad (162.19)$$

а энергия частицы 2 в системе ц. м.

$$e_2 = \gamma m_2 = e_2^*. \quad (162.20)$$

По законам преобразования количества движения и энергии можно записать величину энергии частицы 1 в системе ц. м., но это для дальнейшего не нужно.

Теперь перейдем из системы ц. м. обратно в лабораторную систему и найдем в этой системе вектор импульса второй частицы

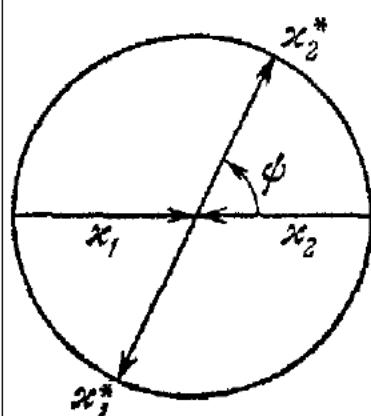


Рис. 440.

после удара  $K_2$ . Обозначим проекцию вектора  $K_2$  на направление  $K$  (или  $v$ ) через  $x$ , а на перпендикуляр к  $v$  — через  $y$ . Тогда, имея в виду обозначения рис. 440, по формуле преобразования импульса из движущейся системы ц. м. в лабораторную можно записать:

$$x = \gamma (x \cos \psi + v e_2) = \\ = \gamma x (1 + \cos \psi), \quad (162.21)$$

$$y = x \sin \psi \quad (162.22)$$

(см. (162.19) и (162.20)). Исключая из этих уравнений  $\psi$ , получаем уравнение эллипса:

$$\left( \frac{x}{\gamma x} - 1 \right)^2 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 = 1. \quad (162.23)$$

Это есть уравнение того же самого эллипса (162.9), проходящего через начало координат ( $x = y = 0$ ) и представляющего концы вектора количества движения второй частицы после удара. Полуоси этого эллипса

$$a = \gamma x, \quad b = x,$$

очевидно, равны значениям (162.10) и (162.11), если примем во внимание (162.15) и (162.19).

Второй метод значительно удобнее, так как законы удара в системе ц. м. выражаются проще.

Если происходит неупругий удар и массы покоя частиц изменяются при ударе, то в системе ц. м. импульсы после удара равны и противоположны друг другу, но величина их не останется той же самой, какой она была до удара. Расчеты становятся сложней, и их также предпочитают делать сначала для системы ц. м.

Законы соударений частиц в обычной (ньютоновой) механике можно получить из релятивистских соотношений, полагая скорости  $u \ll c$ , т. е. мы должны пренебречь величиной  $K$  по сравнению с  $m_1$ . Легко убедиться, что это условие в единицах СИ записывается так:  $m_1 u_1 \ll m_1 c$ , где  $u_1$  — скорость частицы 1 до удара. Из (162.1) и (162.3) следует:

$$E = m_2 + \sqrt{K^2 + m_1^2},$$

и в принятом приближении

$$E = m_1 + m_2.$$

Поэтому в формулах (162.10) и (162.11) пренебрегаем  $K^2$  по сравнению с  $E^2$  и получаем

$$a = \frac{m_2 E}{E^2 - K^2} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K,$$

$$b = \frac{m_2}{\sqrt{E^2 - K^2}} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K.$$

Эллипс вырождается в окружность, проходящую через начало вектора  $K$  (как было найдено в § 34).

Результаты теории относительности, составляющие *механику Эйнштейна*, не только нашли полное согласие с результатами лабораторных опытов в различных областях физики (в первую очередь в атомной и ядерной), но послужили основой замечательных достижений физики за последние десятилетия. Эти достижения физики в свою очередь вызвали развитие совершенно новых областей техники, например таких, как мощные энергетические установки и двигатели, работающие на ядерном горючем, и т. д. Поэтому можно сказать, что *справедливость законов механики Эйнштейна, так же как и законов механики Ньютона, подтверждается техническим опытом человечества*.

*Сергей Павлович Стрелков*

**МЕХАНИКА**

М., 1975 г., 560 стр. с илл.

Редактор Г. М. Карасева

Технический редактор В. Н. Кондакова

Корректоры Т. С. Плетнева, Т. С. Вайсберг

---

Сдано в набор 2/IV 1975 г. Подписано к печати 11/IX 1975 г. Бумага 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 35. Условн. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 34,13. Тираж 60 000 экз. Цена книги 1р. 33 к. Заказ № 1959.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.