1、三大分布的结论（加上正态四个）

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$

①正态分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $U=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

①可加性 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\mu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$

$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2$

③ $Y=C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\mu=C_1\mu_1+C_2\mu_2+\cdots+C_n\mu_2$

$\sigma^2=C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+\cdots+C_n^2\sigma_n^2$

②卡方分布

设总体 $X\sim N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是 X 的样本

$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$，$X_i\sim N(0,1)$

$\chi^2\sim\chi^2(n)$（称 χ^2 服从自由度是 n 的卡方分布）

① $E(\chi^2(n))=n$　　$D(\chi^2(n))=2n$

②可加性 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$　$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

且 χ_1^2 和 χ_2^2 相互独立

③当 $n=2$ 时，$\chi^2(2)$ 为指数分布

③ t分布

设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X、Y 相互独立

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$ (称 T 服从自由度是 n 的 t 分布)

① $f(t)$ 关于 $t=0$ (y 轴) 对称

② $n \to \infty$ 时，t 分布的极限为标准正态分布

④ F分布

设 $U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且 U、V 相互独立

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$ (称 F 服从自由度是 n_1、n_2 的 F 分布)

2、正态总体的抽样分布定理

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是其样本

记样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2

① $U = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

② $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

③ $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3. 矩估计

总体的k阶原点矩：$\mu_k = E(X^k)$

样本的k阶原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

$E(A_k) = \mu_k$

4、极大似然估计法

①概率连乘写 $L(\theta)$

②两边取对数 $\ln L(\theta)$

③求导，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$

求解 θ

若有两个参数 θ、λ

则分别对 θ、λ 求偏导.

5、点估计的无偏性

$\hat{\theta}$是θ的一个估计量，若$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量

即证 $E(\hat{\theta})=\theta$

6、点估计的有效性

$\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$是θ的两个无偏估计量，若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$ ，则称θ_1比θ_2有效

① $$I(\theta)=E\left[\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right]^2=-E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right] \cdots\cdots ①$$

② $$D(\hat{\theta})=\frac{1}{nI(\theta)} \cdots\cdots ②$$

立即推 $\hat{\theta}$是有效估计量

7. 正态总体参数的置信区间（区间估计）

①写出置信区间公式

②写出 n，α，相关计算查表数据

③计算端点，写出区间

对均值 μ：

σ 已知 $\rightarrow U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

σ 未知 $\rightarrow T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

对方差 σ^2 $\longrightarrow$ μ 未知 $\rightarrow \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$\xrightarrow[\text{区间}]{\text{画图找}}$ 代入，解析的不等式，即置信区间公式

$\xrightarrow[\text{计算}]{\text{查表}}$ 即得.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\left|u_{\frac{\alpha}{2}}\right|$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\mu>\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>-u_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$$

8、单个正态总体均值或方差的假设检验

①写出原假设与备选假设、检验统计量、拒绝域。

②写出 n、α，相关计算，查表数据。

③统计判决，给出结论

类似区间估计

针对 u 或 σ，选取一个检验统计量 $\begin{cases} u \\ T \\ \chi^2 \end{cases}$

列拒绝域 eg. $t = \dfrac{\bar{x}-u}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha}(n-1)$

算值，代入，比较，等式满足则拒绝。

9. 单因素方差分析法

h_0: $\mu_1=\mu_2=\cdots\mu_n$ h_1: μ_i不完全相等 → 建立假设

水平	数据	n_i	$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	$\frac{1}{n_i}(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij})^2$	$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$
照抄	照抄	① 数数	② 数据求和	③$=\frac{②^2}{①}$	④ 数据平方求和
Σ		⑤	⑥	⑦	⑧
P.Q.R值		$P=\frac{⑥^2}{⑤}$		$Q=⑦$	$R=⑧$

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和	F值
组间	$S_A=Q-P$ ①	$k-1$ ② 水平总和	⑤$=\frac{①}{②}$ MS_A	⑦$=\frac{⑤}{⑥}$
组内	$S_E=R-Q$ ③	$n-k$ ④ 数量总和	⑥$=\frac{③}{④}$ MS_E	

算得F的值，如果$F\geq F_\alpha(k-1,n-k)$，则拒绝假设H_0，认为因素A对总体有显著影响

如果$F<F_\alpha(k-1,n-k)$，则接受假设H_0，认为因素A对总体的影响不显著。

10、正交试验数据分析

11、一元线性回归分析

①回归方程

$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$

$\Rightarrow \hat{b}=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$　$\hat{a}=\bar{y}-\bar{x}\hat{b}$　过定点$(\bar{x},\bar{y})$

②参数估计

$S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2$

$Q_e=S_{yy}-(\hat{b})^2S_{xx}$

$\hat{\sigma}^2=\dfrac{Q_e}{n-2}$

$Q_e=S_{yy}-(\hat{b})^2S_{xy}$

$\hat{\sigma}^2=\dfrac{Q_e}{n-2}$

③显著性检验

① $h_0: b=0$　$h_1: b\neq 0$

$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}$

$\hat{\sigma}^2=\dfrac{Q_e}{n-2}$

② 检验统计量 $T=\dfrac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}\sim t(n-2)$

拒绝域为 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，拒绝，显著.

③ 检验统计量 $F=\dfrac{S_{yy}-Q_E}{Q_E/(n-2)}\sim F(1,n-2)$

拒绝域为 $|F|\geq F_{\alpha}(1,n-2)$，拒绝，显著.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xx}}{S_{xy}} \qquad \hat{a} = \hat{b}\bar{x} - \bar{y}$$

$$Q_e = S_{yy} - (\hat{b})^2 S_{xx}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q_e}{n-2}$$

$$T = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}} \sim t(n-1)$$

$$|t| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

6. $H_0: \mu = 3 \quad H_1: \mu > 3$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域 $t > t_\alpha(n-1)$

$\bar{X} = 3.207$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 0.189$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.207}{0.435/3.873} = 1.843 > 1.7613$$

拒绝 H_0，接受 H_1

不标准。