第 3 章　确定性推理方法

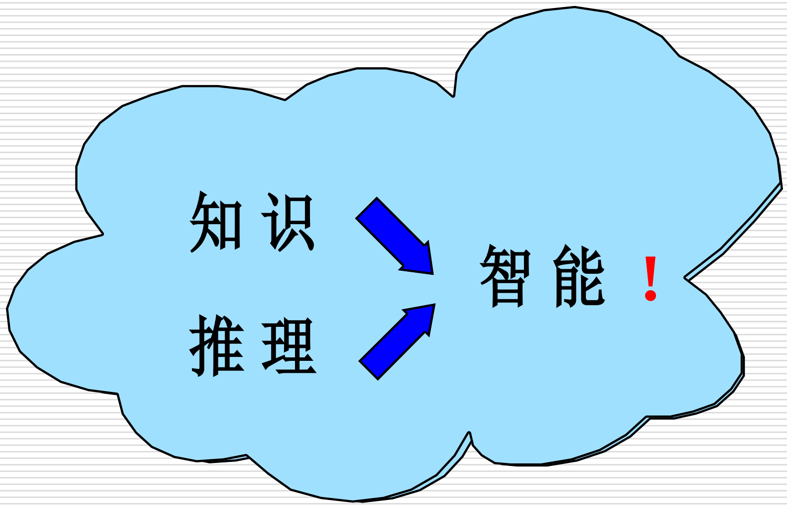
符号主义学派：

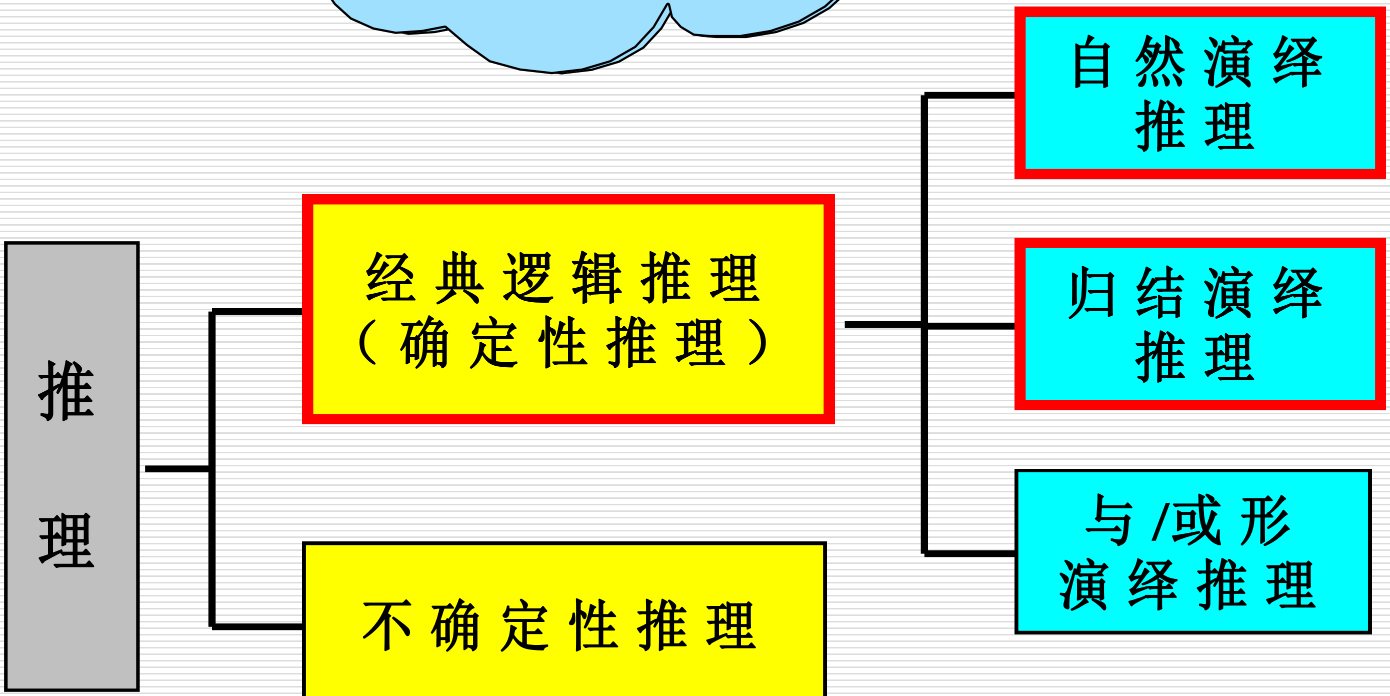
人工智能的核心是知识表示和知识推理。

第3章 确定性推理方法

- 前面讨论了把知识用某种模式表示出来存储到计算机中去。但是，为使计算机具有智能，还必须使它具有思维能力。推理是求解问题的一种重要方法。因此，推理方法成为人工智能的一个重要研究课题。
- 下面首先讨论关于推理的基本概念，然后着重介绍鲁宾逊归结原理及其在机器定理证明和问题求解中的应用。鲁宾逊归结原理使定理证明能够在计算机上实现。

第3章 确定性推理方法





第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

第3章 确定性推理方法

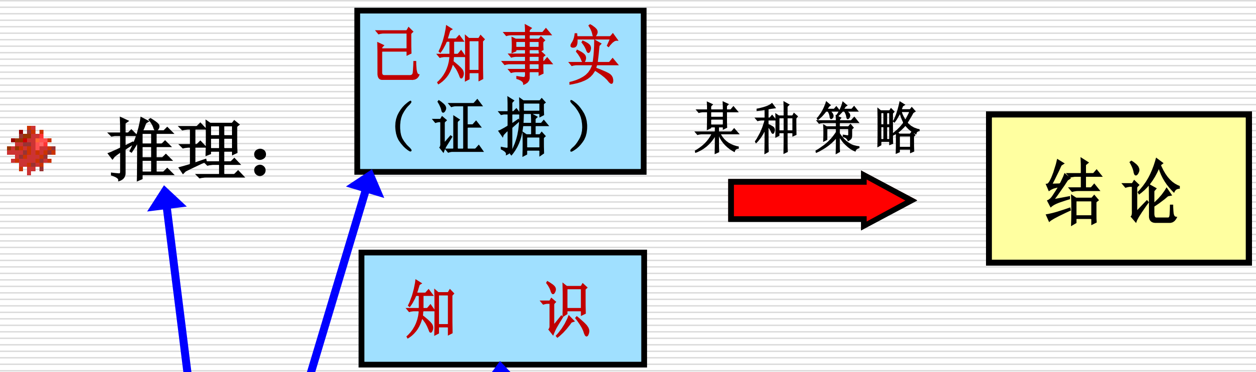
- ✓ 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

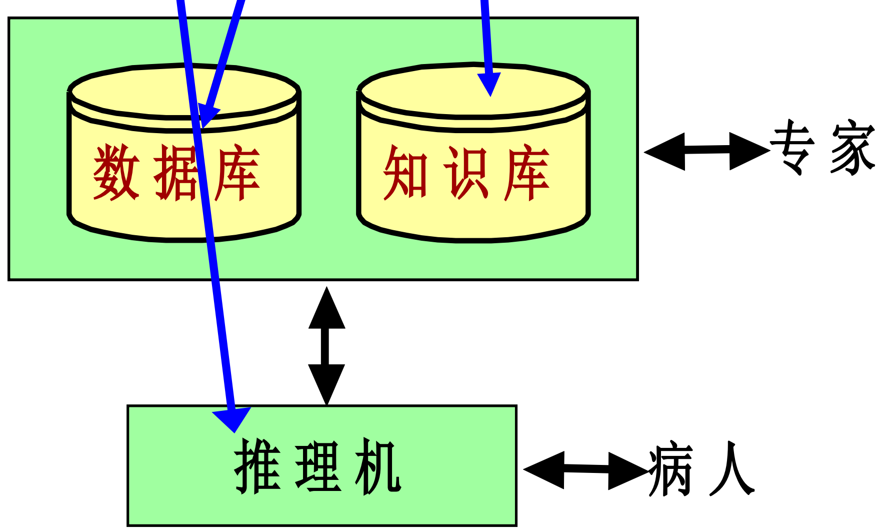
3.1 推理的基本概念

- **3.1.1 推理的定义**
- **3.1.2 推理方式及其分类**
- **3.1.3 推理的方向**
- **3.1.4 冲突消解策略**
- **3.1.5 模式匹配及其变量代换**

3.1.1 推理的定义



医疗专家系统



知识	专家的经验、医学常识
初始证据	病人的症状、化验结果
证据	中间结论

3.1 推理的基本概念

- **3.1.1 推理的定义**
- **3.1.2 推理方式及其分类**
- **3.1.3 推理的方向**
- **3.1.4 冲突消解策略**
- **3.1.5 模式匹配及其变量代换**

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（1）**演绎推理 (deductive reasoning) :** 一般 ⟶ 个别

- 三段论式（三段论法）

① 足球运动员的身体都是强壮的； （ 大前提 ）

② 高波是一名足球运动员； （ 小前提 ）

---

③ 所以，高波的身体是强壮的。 （ 结　论 ）

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（2）归纳推理 **(inductive reasoning):** 个别 → 一般

- 完全归纳推理（必然性推理）
- 不完全归纳推理（非必然性推理）

检查全部产品合格 —— 完全归纳推理 → 该厂产品合格

检查全部样品合格 —— 不完全归纳推理 → 该厂产品合格

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（3）默认推理（default reasoning，缺省推理）

- 知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理。

A 成立 *B* 成立？ （默认*B*成立）	→	结 论

制造鸟笼 鸟会飞？ （默认成立）	→	鸟笼要有盖子

3.1.2 推理方式及其分类

2. 确定性推理、不确定性推理

（1）**确定性推理**：推理时所用的知识与证据都是确定的，推出的结论也是确定的，其真值或者为真或者为假。

（2）**不确定性推理**：推理时所用的知识与证据不都是确定的，推出的结论也是不确定的。

- 不确定性推理
  - 似然推理（概率论）
  - 近似推理或模糊推理（模糊逻辑）

3. 单调推理、非单调推理

（1）**单调推理**：随着推理向前推进及新知识的加入，推出的结论越来越接近最终目标。

基于经典逻辑的演绎推理

（2）**非单调推理** 仅没有加强已推出的结论，反而要否定它，使推理退回到前面的某一步，重新开始。

默认推理是非单调推理

X：鸟 → X：不会飞 →

X：企鹅

3.1.2 推理方式及其分类

4. 启发式推理、非启发式推理

- **启发性知识**：与问题有关且能加快推理过程、提高搜索效率的知识。

- 目标：在脑膜炎、肺炎、流感中选择一个
- 产生式规则

  r_1：脑膜炎

  r_2：肺 炎

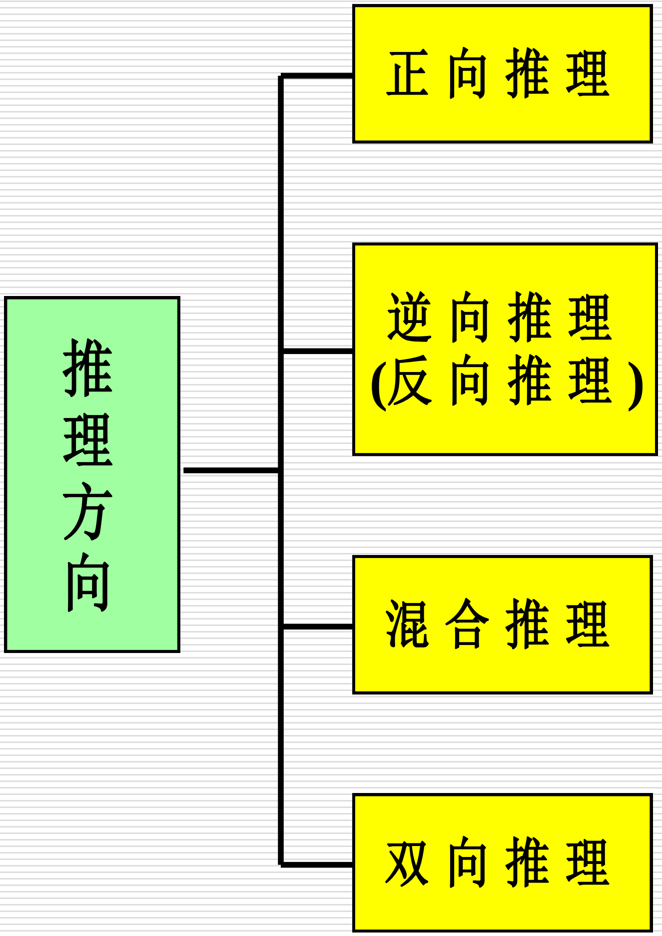
  r_3：流 感

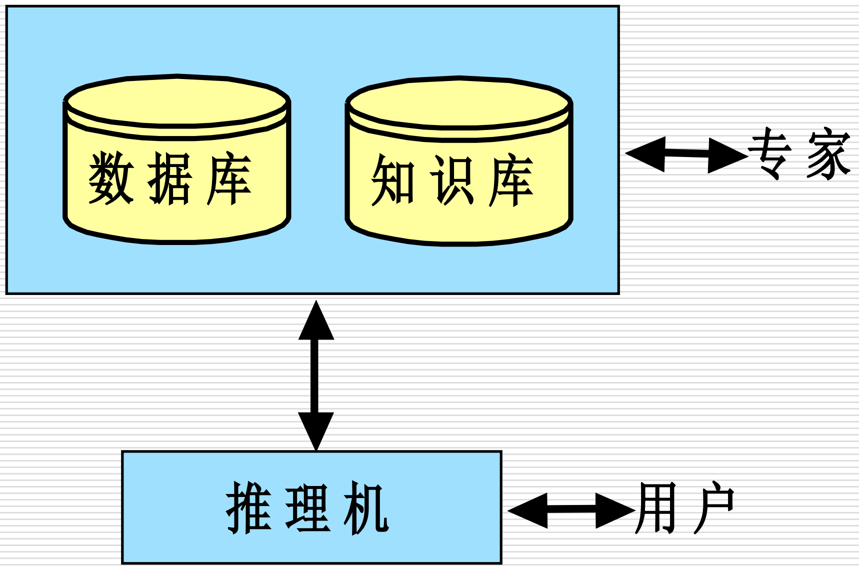
- 启发式知识：“脑膜炎危险”、“目前正在盛行流感”。

3.1 推理的基本概念

- **3.1.1 推理的定义**
- **3.1.2 推理方式及其分类**
- **3.1.3 推理的方向**
- **3.1.4 冲突消解策略**
- **3.1.5 模式匹配及其变量代换**

3.1.3 推理的方向





3.1.3 推理的方向

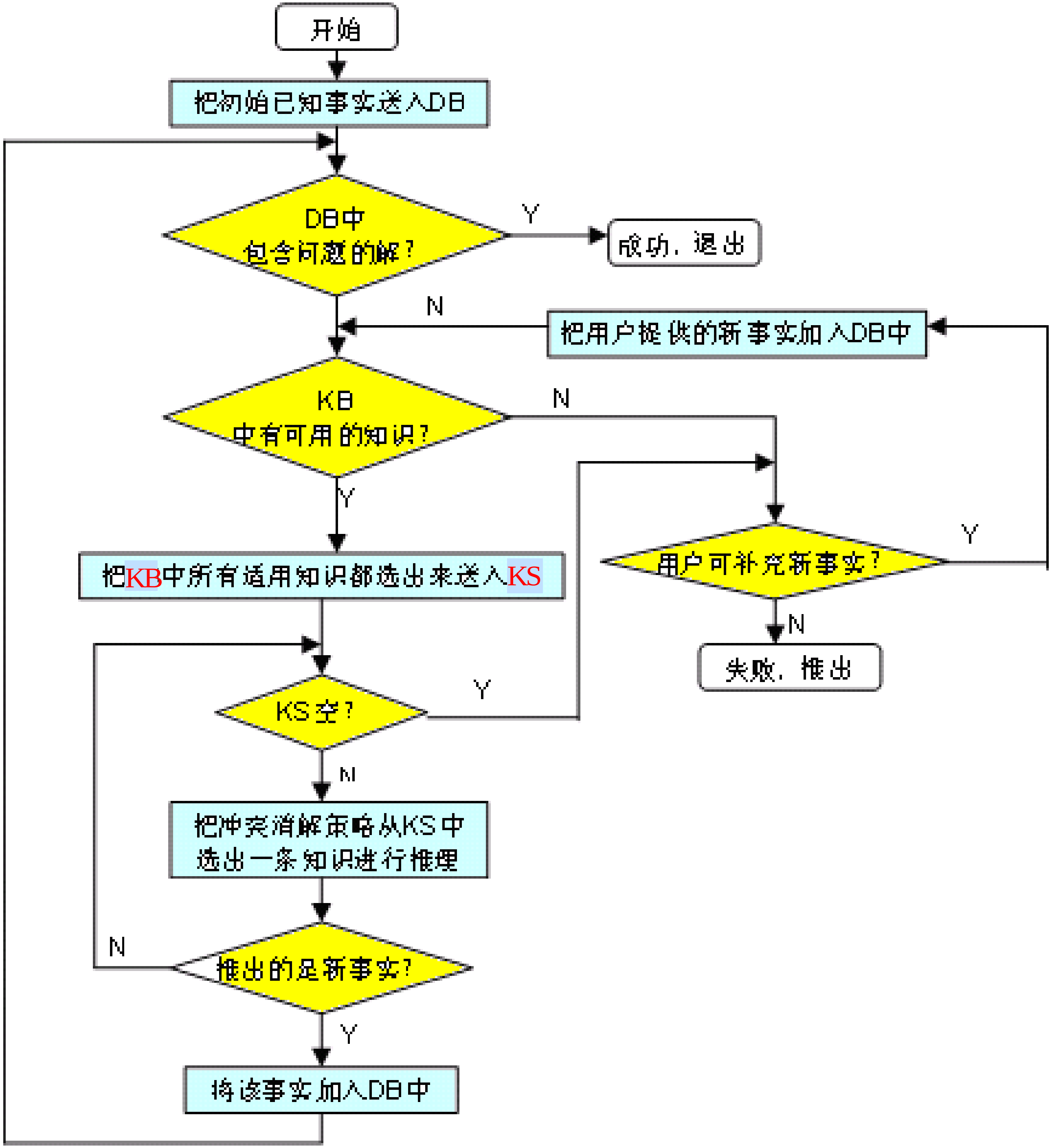
1. 正向推理

- **正向推理（事实驱动推理）：** 已知事实 → 结论
- **基本思想**

（1）从初始已知事实出发，在知识库*KB*中找出当前可适用的知识，构成可适用知识集*KS*。

（2）按某种冲突消解策略从*KS*中选出一条知识进行推理，并将推出的新事实加入到数据库*DB*中作为下一步推理的已知事实，再在*KB*中选取可适用知识构成*KS* 。

（3）重复（2），直到求得问题的解或*KB*中再无可适用的知识。



开始
把初始已知事实送入DB
DB中
包含问题的解？
Y
成功，退出
N
把用户提供的新事实加入DB中
KB
中有可用的知识？
N
Y
用户可补充新事实？
Y
N
失败，推出
把KB中所有适用知识都选出来送入KS
KS空？
Y
N
把冲突消解策略从KS中
选出一条知识进行推理
推出的是新事实?
N
Y
将该事实加入DB中

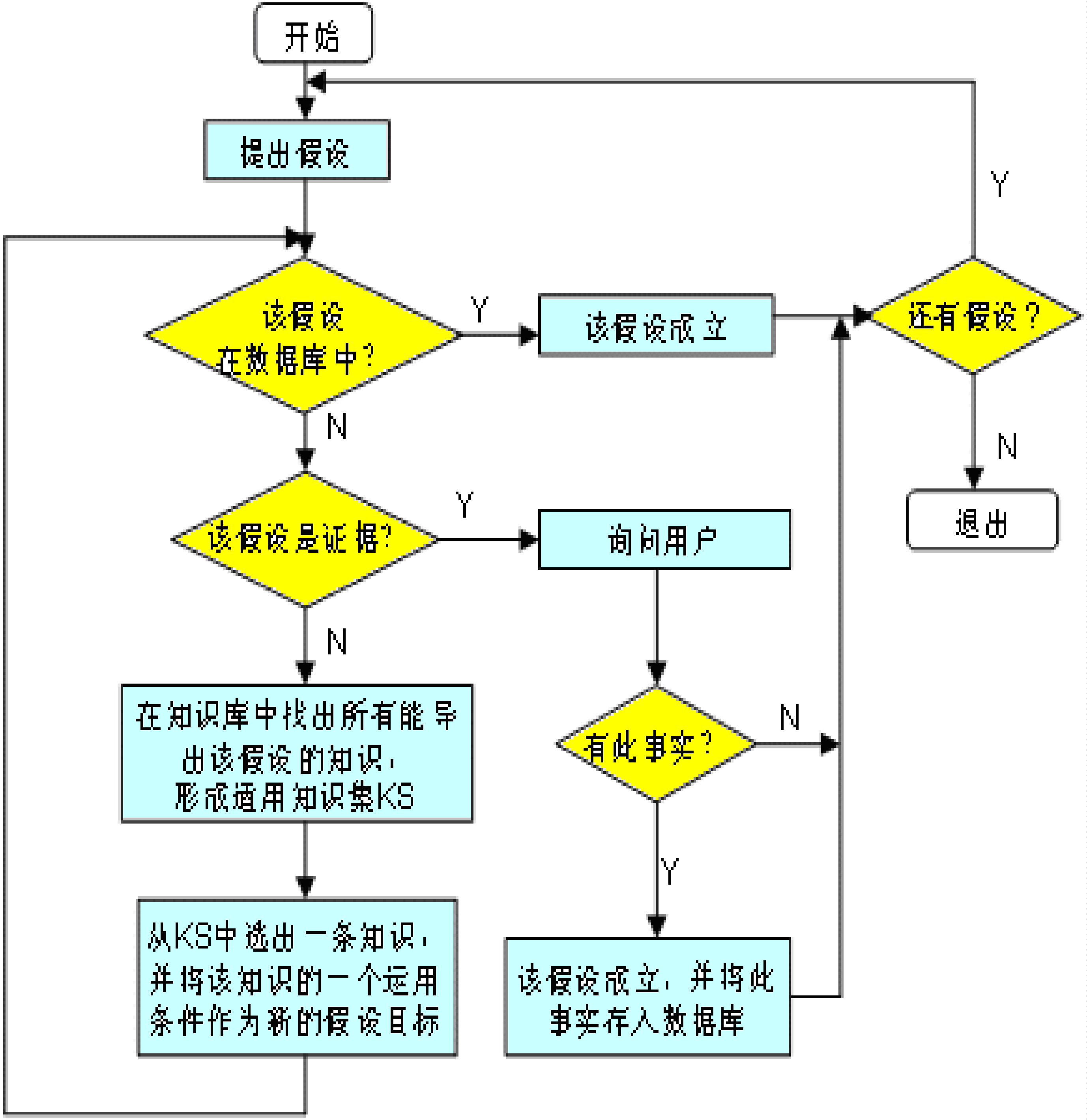
3.1.3 推理的方向

1. 正向推理

- 实现正向推理需要解决的问题：
  - 确定匹配（知识与已知事实）的方法。
  - 按什么策略搜索知识库。
  - 冲突消解策略。
- 正向推理简单，易实现，但目的性不强，效率低。

2. 逆向推理

- **逆向推理（目标驱动推理）：**以某个假设目标作为出发点。
- **基本思想：**
  - 选定一个假设目标。
  - 寻找支持该假设的证据，若所需的证据都能找到，则原假设成立；若无论如何都找不到所需要的证据，说明原假设不成立的；为此需要另作新的假设。
- **主要优点：**不必使用与目标无关的知识，目的性强，同时它还有利于向用户提供解释。
- **主要缺点：**起始目标的选择有盲目性。


开始
提出假设
该假设在数据库中？
Y
该假设成立
还有假设？
Y
N
退出
N
该假设是证据？
Y
询问用户
N
在知识库中找出所有能导出该假设的知识，形成适用知识集KS
有此事实？
N
Y
从KS中选出一条知识，并将该知识的一个运用条件作为新的假设目标
该假设成立，并将此事实存入数据库

3.1.3 推理的方向

2. 逆向推理

- 逆向推理需要解决的问题：
  - 如何判断一个假设是否是证据？
  - 当导出假设的知识有多条时，如何确定先选哪一条？
  - 一条知识的运用条件一般都有多个，当其中的一个经验证成立后，如何自动地换为对另一个的验证？
  - ……..
- 逆向推理：目的性强，利于向用户提供解释，但选择初始目标时具有盲目性，比正向推理复杂。

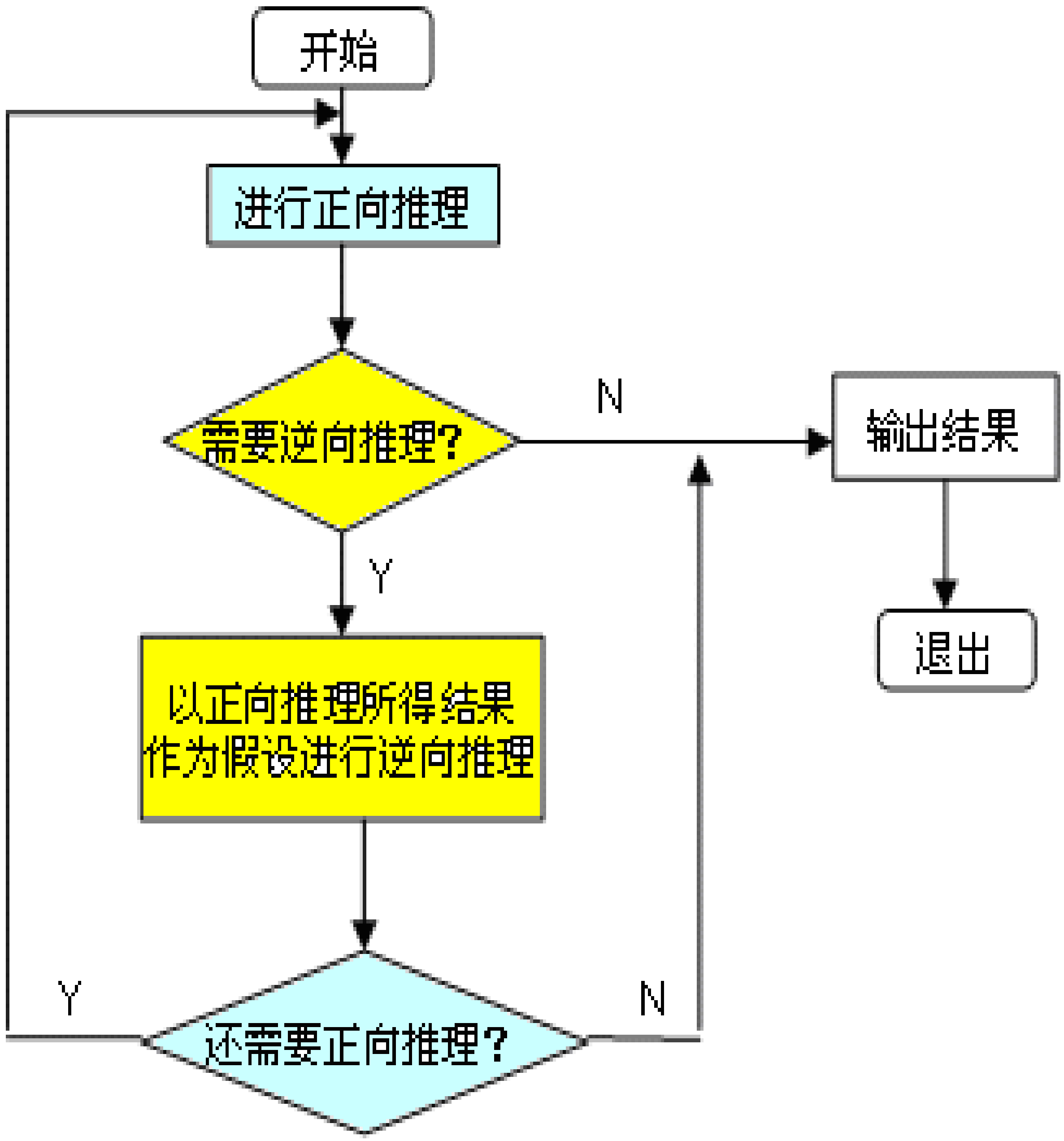
3.1.3 推理的方向

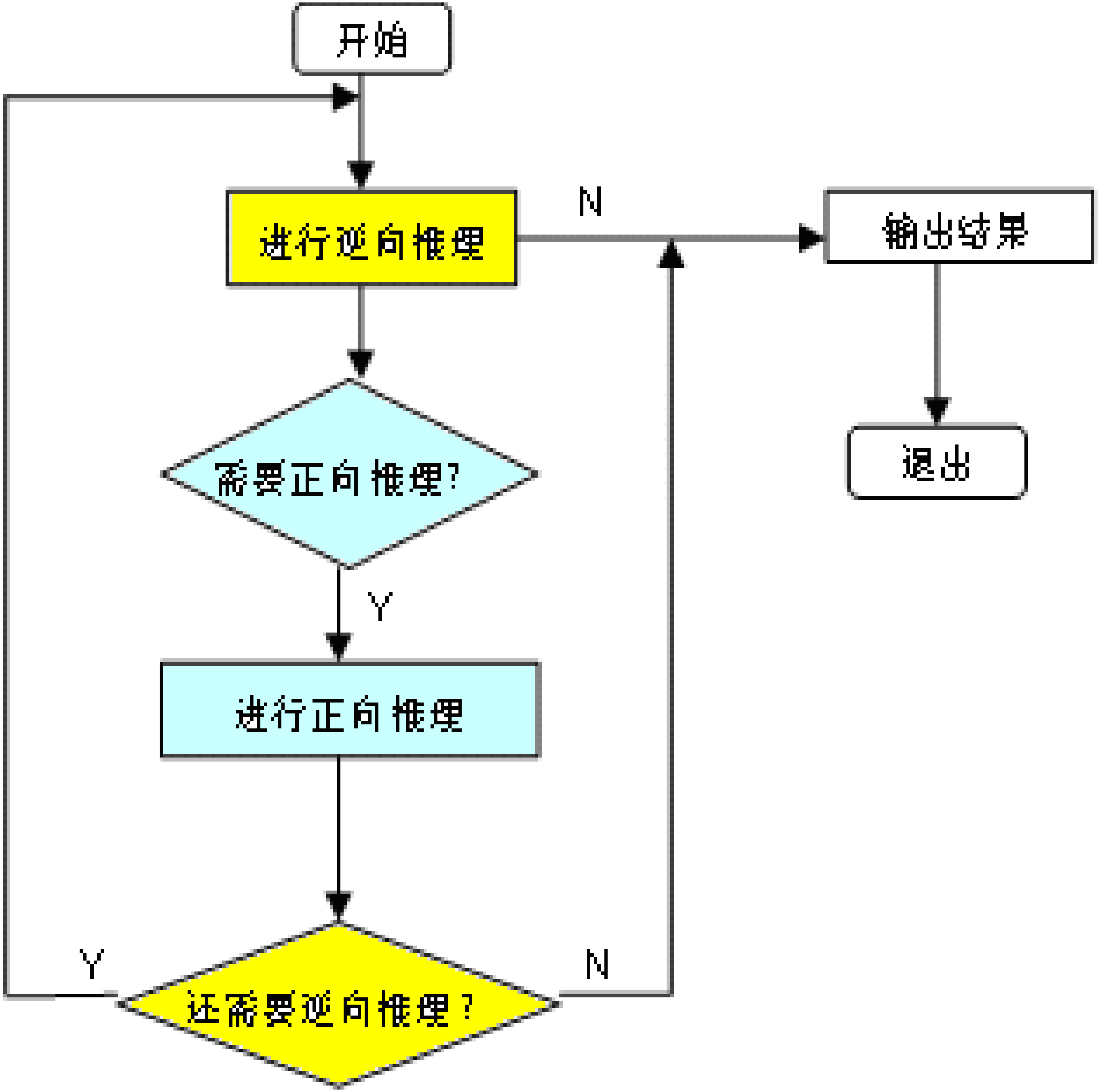
3. 混合推理

- **正向推理:** 盲目、效率低。
- **逆向推理:** 若提出的假设目标不符合实际，会降低效率。
- **正反向混合推理:**

（1）**先正向后逆向：**先进行正向推理，帮助选择某个目标，即从已知事实演绎出部分结果，然后再用逆向推理证实该目标或提高其可信度；

（2）**先逆向后正向：**先假设一个目标进行逆向推理，然后再利用逆向推理中得到的信息进行正向推理，以推出更多的结论。

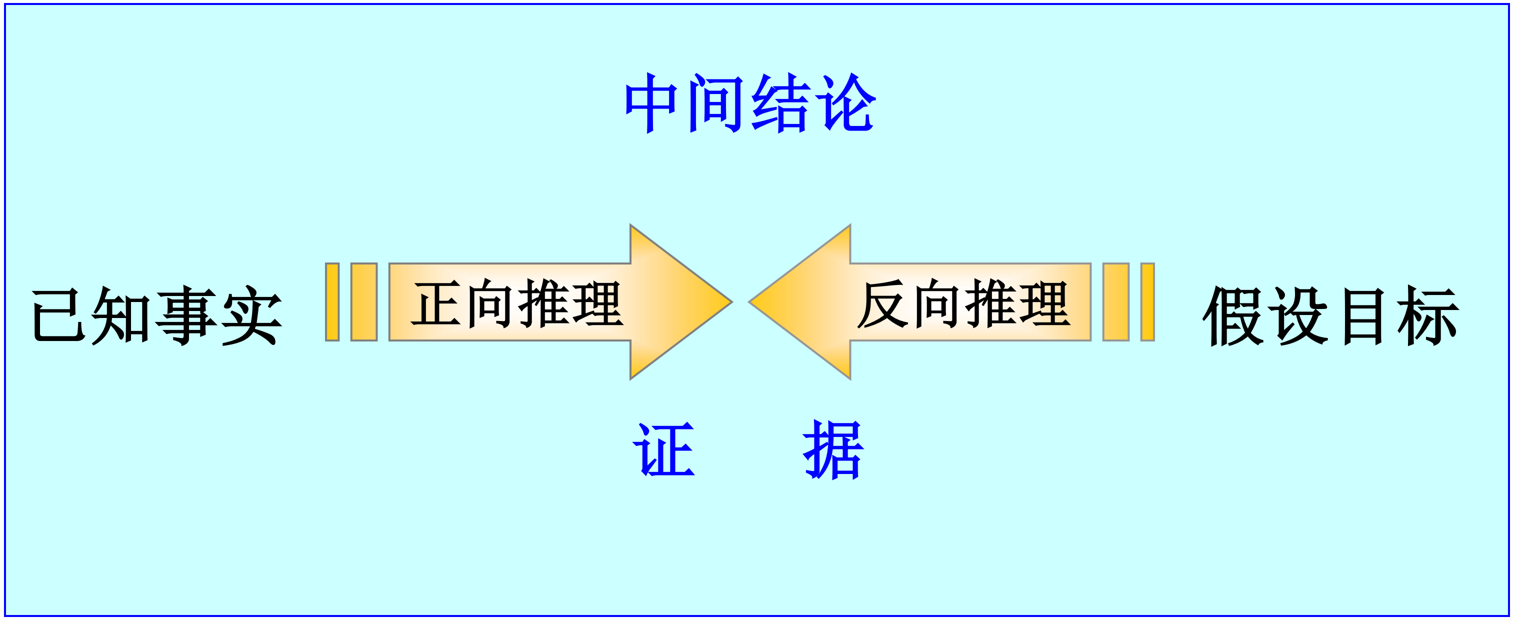

开始
进行正向推理
需要逆向推理?
N
输出结果
退出
Y
以正向推理所得结果
作为假设进行逆向推理
Y
还需要正向推理?
N


开始
进行逆向推理
N
输出结果
退出
需要正向推理?
Y
进行正向推理
Y
还需要逆向推理？
N

3.1.3 推理的方向

4. 双向推理

- **双向推理：** 正向推理与逆向推理同时进行，且在推理过程中的某一步骤上“**碰头**”的一种推理。



3.1 推理的基本概念

- **3.1.1 推理的定义**
- **3.1.2 推理方式及其分类**
- **3.1.3 推理的方向**
- **3.1.4 冲突消解策略**
- **3.1.5 模式匹配及其变量代换**

3.1.4 冲突消解策略

- 已知事实与知识的三种匹配情况：

（1）恰好匹配成功（一对一）；

（2）不能匹配成功；

（3）多种匹配成功（一对多、多对一、多对多）

3.1.4 冲突消解策略

- 多种冲突消解策略：

（1）按针对性排序

（2）按已知事实的新鲜性排序

（3）按匹配度排序

$r1$: IF $A1$ AND $A2$ THEN $H1$

$r2$: IF $A1$ AND $A2$ AND $A3$ AND $A4$ THEN $H2$

（4）按条件个数排序

3.1 推理的基本概念

- **3.1.1 推理的定义**
- **3.1.2 推理方式及其分类**
- **3.1.3 推理的方向**
- **3.1.4 冲突消解策略**
- **3.1.5 模式匹配及其变量代换**

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- **模式匹配**是指两个知识模式（如两个谓词公式、两个框架片断等）的比较，检查这两个知识模式是否完全一致或近似一致。如果两者完全一致，或者虽不完全一致但其相似程度落在指定的限度内，就称它们是可匹配的，否则为不可匹配。
- 按匹配时两个知识模式的相似程度划分，模式匹配可分为：
  - 确定性匹配
  - 不确定性匹配

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- 确定性匹配是指两个知识模式完全一致，或者经过变量代换后变得完全一致。
- 例如，设有如下两个知识模式：

  P_1：Father（李四，李小四）and Man (李小四)

  P_2：Father(x,y) and Man (y)
- 若用“李四”代换变量**x**，用“李小四”代换变量**y**，则**P1**与**P2**就变得完全一致。
- 不确定性匹配是指两个知识模式不完全一致，但从总体上看，它们的相似程度又落在规定的限度内。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- 在不同谓词公式中，往往会出现谓词名相同但其个体不同的情况，此时推理过程是不能直接进行匹配的，需要先进行代换。
- **代换（置换）可简单的理解为是在一个谓词公式中用置换项去替换变量。**
- **定义3.1代换（置换）是形如**
- **$\{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\}$ 的有限集合。其中，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项；$x_1, x_2, \ldots, x_n$是互不相同的变元；t_i/x_i表示用t_i替换x_i。并且要求t_i与x_i不能相同，xi不能循环地出现在另一个t_i中。**

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- 例如， {a/x, c/y, f(b)/z} 是一个置换。
- 但{g(y)/x, f(x)/y}不是一个置换。
  - 原因是它在x与y之间出现了循环置换现象。即当用g(y)置换x,用f(g(y))置换y时，既没有消去x，也没有消去y。
- 若改为{g(a)/x, f(x)/y}即可，
  - 原因是用g(a)置换x，用f(g(a))置换y，则消去了x和y。
- 通常，置换是用希腊字母θ、σ、 α、 λ等来表示的。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- 定义3.2 设
- $\theta=\{t_1/x_1,t_2/x_2,\ldots,t_n/x_n\}$
- $\lambda=\{ u_1/y_1, u_2/y_2, \ldots , u_m/y_m \}$
- 是两个置换。则θ与λ的复合（合成）也是一个置换，记作θ° λ。它是从集合
- $\{ t_1\lambda/x_1, t_2\lambda/x_2, \ldots , t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, u_2/y_2, \ldots , u_m/y_m \}$
- 中删去以下两种元素
- ① 当$t_i\lambda=x_i$时， 删去$t_i\lambda/x_i$ (i=1, 2 ,…, n);
- ② 当$y_j\in\{ x_1, x_2 ,\ldots, x_n \}$时， 删去$u_j/y_j$ (j=1, 2 ,…, m)
- 最后剩下的元素所构成的集合。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- **例　设θ={ f(y)/x, z/y }，λ={a/x, b/y ,y/z }，求θ与λ的合成。**
- 解:先求出集合　{f(b/y)/x, (y/z)/y, a/x, b/y , y/z}=

  {f(b)/x, y/y, a/x, b/y , y/z}

  - 其中，f(b)/x中的f(b)是置换λ作用于f(y)的结果；y/y 中的y是置换λ作用于z的结果。
  - 在该集合中，y/y满足定义中的条件①，需要删除；

  a/x和b/y满足定义中的条件②，也需要删除。

- **最后得θ°λ={f(b)/x, y/z}**

3.1.5 模式匹配及其变量代换

合一可理解为是寻找项对变量的置换，使两个谓词公式一致。可定义为：

定义3.3 设有公式集$F=\{F_1, F_2,\ldots,F_n\}$，若存在一个置换θ，可使

$$F_1\theta=F_2\theta=\ldots=F_n\theta,$$

则称θ是F的一个合一。称$F_1,F_2,\ldots,F_n$是可合一的。

例如，设有公式集$F=\{P(x,y,f(y)), P(a,g(x),z)\}$，则

$$\lambda=\{a/x, g(a)/y, f(g(a))/z\}$$

是它的一个合一。一般来说，一个公式集的合一不是唯一的。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- **定义3.4** 设σ是公式集F的一个合一，如果对F的任一个合一θ都存在一个代换λ，使得θ=σ°λ，则称σ是一个最一般合一。（Most General Unifier）
  - 一个公式集的最一般合一是唯一的。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- 差异集的概念。
  - 设有如下两个谓词公式:

$$F_1\text{：}P(x,\ y,\ z)$$

$$F_2\text{：}P(x,\ f(A),\ h(B))$$

分别从F_1与F_2的第一个符号开始，逐个向右比较，此时发现F_1与F_2构差异集:

$$D_1=\{y,\ f(A)\},\quad D_2=\{z,\ h(B)\}$$

3.1.5 模式匹配及其变量代换

- **求最一般合一算法**

（1）初始化，令k=0, F_k=F,σ_k=Φ。其中，Φ是代换空集。

（2）若F_k只含一个表达式，则算法停止，σ_k就是最一般合一；否则转步骤（3）。

（3）找出F_k的差异集D_k。

（4）若D_k中存在变元x_k和项t_k，且x_k不在t_k中出现，则：

$$\sigma_{k+1}=\sigma \circ \{t_k/x_k\}$$

$$F_{k+1}=F_k\{t_k/x_k\}$$

$$k=k+1$$

转步骤（2）；否则，算法终止，F的最一般合一不存在。

3.1.5 模式匹配及其变量代换

例　设有公式集

$$F=\{P(A, x, f\ (g\ (y))),\ P(z, f\ (z), f\ (u))\ \}$$

求其最一般合一。

解：初始化，令k=0，$\sigma_0=\varepsilon$，

$$F_0=F=\{\ P\ (A, x, f\ (g\ (y))),\ P(z, f\ (z),\ f\ (u))\ \}$$

3.1.5 模式匹配及其变量代换

Loop 1： $F_0=\{\ P\ (A,\ x,\ f\ (g\ (y))),\ \ P(z,\ f\ (z)),\ \ f\ (u))\ \}$

含有2个表达式，故σ_0不是最一般合一。

F_0的差异集$D_0=\{A,\ z\}$，可有代换A/z，

$$\sigma_1=\sigma_0\ ^\circ\ \{A/z\}=\{A/z\}$$

$F_1=F_0\{A/z\}=\{\ P(A,\ x,\ \ f\ (g\ (y))),\ \ P(A,\ \ f\ (A),\ \ f\ (u))\ \}$

3.1.5 模式匹配及其变量代换

Loop 2：

$F_1=\{P(A, x, f(g(y))), P(A, f(A), f(u))\}$含有2个表达式，故$\sigma_1$不是最一般合一

F_1的差异集$D_1=\{x, f(A)\}$，可有代换

$\{f(A)/x\}$，

$\sigma_2=\sigma_1 \circ \{f(A)/x\}=\{A/z\} \circ \{f(A)/x\}=\{A/z, f(A)/x\}$

$F_2=F_1\{f(A)/x\}=\{P(A, f(A), f(g(y))), P(A, f(A), f(u))\}$

3.1.5 模式匹配及其变量代换

Loop 3:

F_2={ P(A, f(A), $f(g(y))$),P(A, f(A), $f(u)$)}含有2个表达式，故σ_2不是最一般合一

F_2的差异集D2={$g(y)$，u}，可有代换{$g(y)/u$}，

$\sigma_3=\sigma_2 \circ \{g(y)/u\}=\{A/z, f(A)/x\} \circ \{g(y)/u\}=\{A/z, f(A)/x, g(y)/u\}$

$F_3=F_2\{g(y)/u\}$={ P(A, f(A), $f(g(y))$), P(A, f(A), $f(g(y))$) }= { P(A, f(A), $f(g(y))$) }

3.1.5 模式匹配及其变量代换

Loop 4：F_3中只含有一个表达式，故算法成功终止，$\sigma_3=\{A/z, f(A)/x, g(y)/u\}$，即为公式集F的最一般合一。

- 3.1 推理的基本概念
- ✓ 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

3.2 自然演绎推理

- 自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。

- 推理规则：*P*规则、*T*规则、假言推理、拒取式推理

- 假言推理：P, $P \rightarrow Q \quad \Rightarrow Q$
- "如果x是金属，则x能导电"，"铜是金属" 推出 "铜能导电"

- 拒取式推理：$P \rightarrow Q$, $\neg Q \quad \Rightarrow \quad \neg P$
- "如果下雨，则地下就湿"，"地上不湿" 推出 "没有下雨"

3.2 自然演绎推理

- 错误1——否定前件：$P \rightarrow Q$, $\neg P \not\Rightarrow \neg Q$

（1） 如果下雨，则地上是湿的（$P \rightarrow Q$）；

（2）没有下雨（$\neg P$）；

（3）所以，地上不湿（$\neg Q$）。

- 错误2——肯定后件：$P \rightarrow Q$, $Q \not\Rightarrow P$

（1）如果行星系统是以太阳为中心的，则金星会显示出位相变化（$P \rightarrow Q$）；

（2）金星显示出位相变化（Q）；

（3） 所以，行星系统是以太阳为中心（P）。

- 例3. 1 已知事实：

  （1）凡是容易的课程小王(Wang)都喜欢；

  （2）C 班的课程都是容易的；

  （3）ds 是 C 班的一门课程。

- 求证：小王喜欢 ds 这门课程。

3.2 自然演绎推理

- 证明：
- 定义谓词：

  $EASY(x)$：x 是容易的

  $LIKE(x, y)$：x 喜欢 y

  $C(x)$：x 是 C 班的一门课程

- 已知事实和结论用谓词公式表示：

  $(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$

  $(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

  $C(ds)$

  $LIKE(Wang, ds)$

- 应用推理规则进行推理：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$

$EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$　　全称固化

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(y) \rightarrow EASY(y)$　　全称固化

所以 $C(ds), C(y) \rightarrow EASY(y)$

$\Rightarrow EASY(ds)$　　P规则及假言推理

所以 $EASY(ds), EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$

$\Rightarrow LIKE(Wang, ds)$　　T规则及假言推理

3.2 自然演绎推理

- **优点：**
  - 表达定理证明过程自然，易理解。
  - 拥有丰富的推理规则，推理过程灵活。
  - 便于嵌入领域启发式知识。

- **缺点：** 易产生组合爆炸，得到的中间结论一般呈指数形式递增。

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

归结演绎推理

- **反证法：** $P \Rightarrow Q$，当且仅当 $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow F$，即 Q为 P 的逻辑结论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

- **定理：Q 为 P_1, P_2，…，P_n的逻辑结论，当且仅当** $(P_1 \wedge P_2 \wedge \Lambda \wedge P_n) \wedge \neg Q$**是不可满足的。**

归结演绎推理

- **思路：定理** $P \Rightarrow Q$ ⟶ $P \wedge \neg Q$ 不可满足

  ⟶ 子句集不可满足 ⟶ **海伯伦定理**

  ↓

  鲁宾逊归结原理

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- **原子（atom）谓词公式：** 一个不能再分解的命题。
- **文字（literal）：** 原子谓词公式及其否定。
- P：正文字，$\neg P$：负文字。
- **子句（clause）：** 任何文字的析取式。任何文字本身也都是子句。

$$P(x) \vee Q(x), \qquad \neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))$$

- **空子句（NIL）：** 不包含任何文字的子句。

空子句是永假的，不可满足的。

- **子句集：**

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- 例3.2 将下列谓词公式化为子句集。

$$(\forall x)((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$$

- 解： （1）消去谓词公式中的“$\rightarrow$”和“$\leftrightarrow$”符号

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\forall y)(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$$

（2）把否定符号 $\neg$ 移到紧靠谓词的位置上

双重否定律 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists y)(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

德.摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$, $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

量词转换律 $\neg(\exists x)P \Leftrightarrow (\forall x)\neg P$, $\neg(\forall x)P \Leftrightarrow (\exists x)\neg P$

（3）变量标准化

$(\exists x)P(x) \equiv (\exists y)P(y)$, $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

$$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

（4）消去存在量词

a. 存在量词不出现在全称量词的辖域内。

b. 存在量词出现在一个或者多个全称量词的辖域内。

对于一般情况

$$(\forall x_1)((\forall x_2)\Lambda\ ((\forall x_n)((\exists y)P(x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n,y)))\ldots)$$

存在量词y的Skolem函数为 $y = f(x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n)$

Skolem化：用Skolem函数代替每个存在量词量化的变量的过程。

（5）化为前束形

前束形=（前缀）{母式}

（前缀）：全称量词串。

{母式}：不含量词的谓词公式。

（6）化为 Skolem 标准形

$$(\forall x)((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))))$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

…$(\forall x_1)(\forall x_2) \wedge (\forall x_n) M$ …，称为Skolem标准形的母式。

（7）略去全称量词

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

（8）消去合取词

$$\{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)),\quad \neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))\}$$

（9）子句变量标准化

$$\{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)),\quad \neg P(y, f(y)) \vee \neg R(y, g(y))\}$$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- **例3.3 将下列谓词公式化为子句集。**

$$(\forall x)\{[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\rightarrow(\exists y)[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall x)[P(x)\vee B(x)]$$

- **（1）消去蕴含符号**

$$(\forall x)\{\neg[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\vee(\exists y)[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall x)[P(x)\vee B(x)]$$

- **（2）把否定符号移到每个谓词前面**

$$(\forall x)\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee(\exists y)[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall x)[P(x)\vee B(x)]$$

- **（3）变量标准化**

$$(\forall x)\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee(\exists y)[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall w)[P(w)\vee B(w)]$$

- **（4）消去存在量词，设*y*的函数是*f(x)*，则**

$$(\forall x)\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge(\forall w)[P(w)\vee B(w)]$$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- 例3.3 将下列谓词公式化为子句集。（续）

（5）化为前束形

$$(\forall x)(\forall w)\{\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

（6）化为标准形

$$(\forall x)(\forall w)\{\{[Q(x)\wedge P(x)]\vee[Q(x)\wedge S(x,f(x))]\}\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

$$(\forall x)(\forall w)\{Q(x)\wedge[P(x)\vee S(x,f(x))]\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

（7）略去全称量词

$$Q(x)\wedge[P(x)\vee S(x,f(x))]\wedge[P(w)\vee B(w)]$$

（8）消去合取词，把母式用子句集表示

$$\{Q(x),\ P(x)\vee S(x,f(x)),\ P(w)\vee B(w)\}$$

（9）子句变量标准化 $\{Q(x),\ P(y)\vee S(y,f(y)),\ P(w)\vee B(w)\}$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- **例3.5** 将下列谓词公式化为不含存在量词的前束形。

$$(\exists x)(\forall y)((\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(x,z)) \rightarrow R(x,y,f(a)))$$

- **（1）消去存在量词**

$$(\forall y)((\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(b,z)) \rightarrow R(b,y,f(a)))$$

- **（2）消去蕴含符号**

$$(\forall y)(\neg(\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(b,z)) \vee R(b,y,f(a)))$$

$$(\forall y)((\exists z)(\neg P(z) \vee Q(b,z)) \vee R(b,y,f(a)))$$

- **（3）设*z*的函数是*g*(*y*)，则**

$$(\forall y)(\neg P(g(y)) \vee Q(b,g(y)) \vee R(b,y,f(a)))$$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

谓词公式不可满足性 ⟷ 子句集不可满足性 ?

定理 3.1:

谓词公式不可满足的充要条件是其子句集不可满足。

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

3.4 鲁宾逊归结原理

- 子句集中子句之间是合取关系，只要有一个子句不可满足，则子句集就不可满足。

- 鲁宾逊归结原理（消解原理）的基本思想：
  - 检查子句集 *S* 中是否包含空子句，若包含，则 *S* 不可满足。
  - 若不包含，在 *S* 中选择合适的子句进行归结，一旦归结出空子句，就说明 *S* 是不可满足的。

3.4 鲁宾逊归结原理

1. 命题逻辑中的归结原理（基于子句的归结）

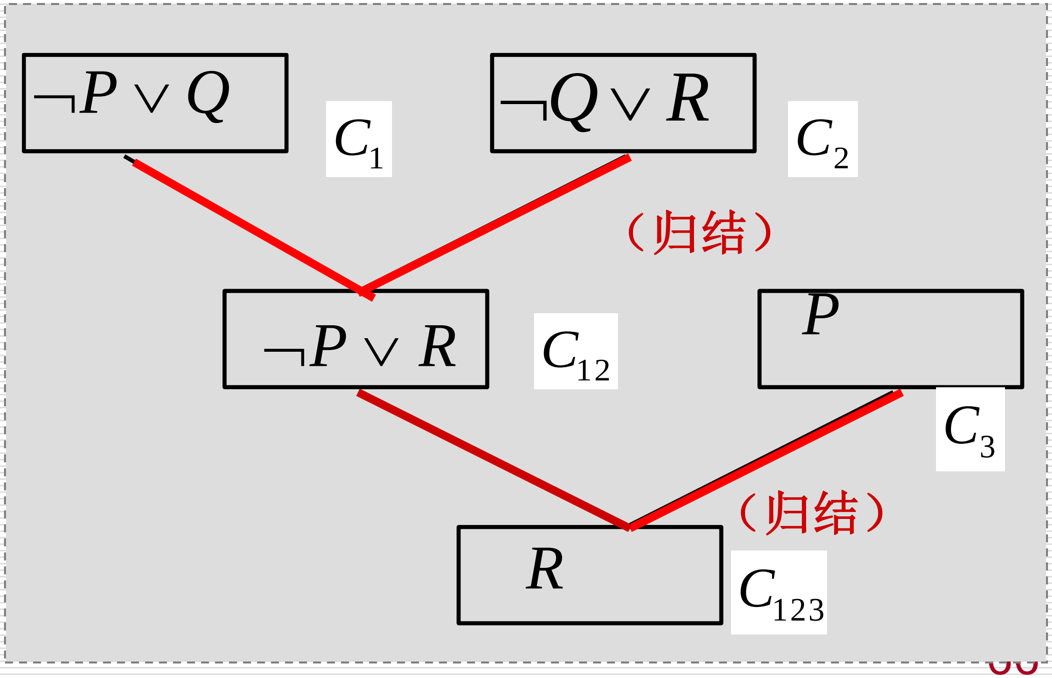
定义3.1（归结）： 设C_1与C_2是子句集中的任意两个子句，如果 C_1中的文字L_1与 C_2中的文字L_2互补，那么从C_1和 C_2中分别消去L_1和L_2，并将二个子句中余下的部分析取，构成一个新子句C_{12}。

C_{12}：C_1和C_2的归结式

C_1、C_2：C_{12}的亲本子句

例，设$C_1=\neg P\vee Q$，

$C_2=\neg Q\vee R$，$C_3=P$



3.4 鲁宾逊归结原理

◆ **定理3.2：** 归结式C_{12}是其亲本子句C_1与C_2的逻辑结论。即如果C_1与C_2为真，则C_{12}为真。

◆ **推论1：** 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若用C_{12}代替C_1与C_2后得到新子句集S_1，则由S_1不可满足性可推出原子句集S的不可满足性，即：

S_1 **的不可满足性** $\Rightarrow$ S **的不可满足性**

◆ **推论2：** 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若C_{12} 加入原子句集S，得到新子句集S_1，则S与S_1在不可满足的意义上是等价的，即：

S_1**的不可满足性** $\Leftrightarrow$ S**的不可满足性**

2. 谓词逻辑中的归结原理（含有变量的子句的归结）

例：

$C_1 = P(x) \vee Q(x)$

$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

?

最一般合一

$\sigma = \{a/x\}$

$C_1\sigma = P(a) \vee Q(a)$

$C_2\sigma = \neg P(a) \vee R(y)$

$C_{12} = Q(a) \vee R(y)$

定义 3.2： 设 C_1与C_2 是两个没有相同变元的子句，L_1 和 L_2 分别是C_1和C_2 中的文字，若 σ 是L_1和$\neg L_2$ 的最一般合一，则称

$$C_{12} = (C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \vee (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

为 C_1和C_2的二元归结式。

- **例3.7 设：**

$$C_1 = P(x) \vee Q(a), \quad C_2 = \neg P(b) \vee R(x)$$

求其二元归结式。

- **解：令** $C_2 = \neg P(b) \vee R(y)$

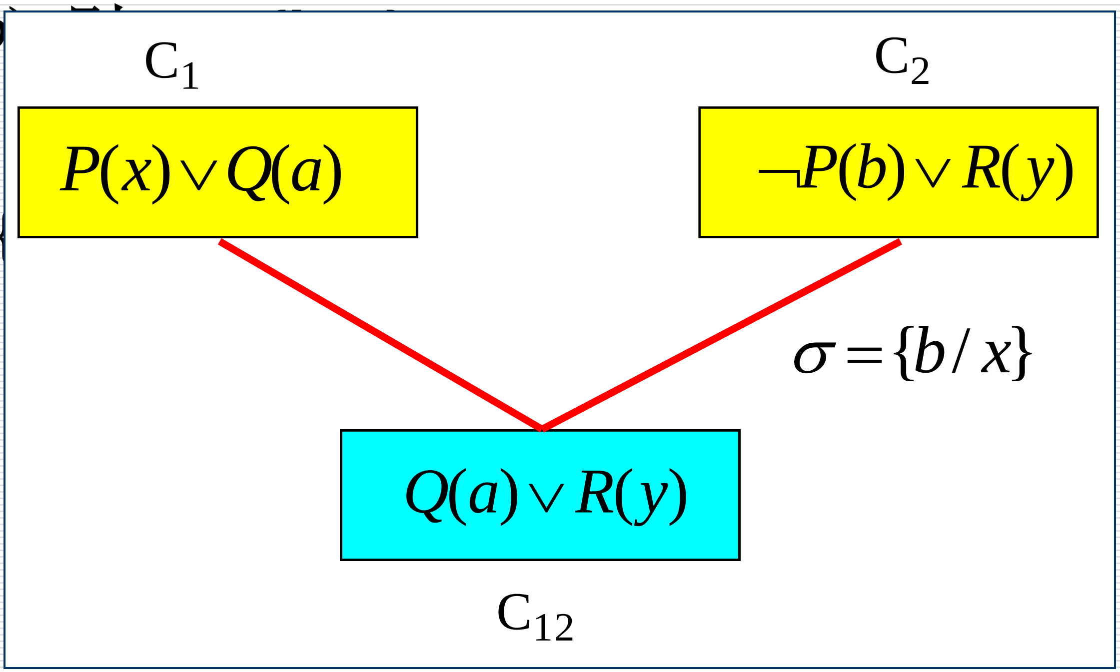
选 $L_1 = P(x), L_2 = \neg P(b$ …

得：

$C_{12} = (\{P(b), Q(a)\} - \{$ …

$= \{Q(a), R(y)\}$

$= Q(a) \vee R(y)$



- **例3.8 设：**

$$C_1 = P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x), \quad C_2 = \neg P(y) \vee R(b)$$

求其二元归结式。

- 解：$\sigma = \{f(a)/x\}$ $\qquad C_1\sigma = P(f(a)) \vee Q(f(a)),$

选 $L_1 = P(f(a)), L_2 = \neg P(y)$ $\qquad \sigma = \{f(a)/y\}$

则得：$C_{12} = R(b) \vee Q(f(a))$

3.4 鲁宾逊归结原理

- 对于谓词逻辑，归结式是其亲本子句的逻辑结论。
- 对于一阶谓词逻辑，即若子句集是不可满足的，则必存在一个从该子句集到空子句的归结演绎；若从子句集存在一个到空子句的演绎，则该子句集是不可满足的。
- 如果没有归结出空子句，则既不能说 S 不可满足，也不能说 S 是可满足的。

第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

3.5 归结反演

- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式F。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{F, \neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。

- 例3.9 某公司招聘工作人员，A，B，C 三人应试，经面试后公司表示如下想法：

（1） 三人中至少录取一人。

（2） 如果录取 A 而不录取 B，则一定录取 C。

（3） 如果录取 B，则一定录取 C。

- **求证：公司一定录取 C。**

3.5 归结反演

- 证明：公司的想法用谓词公式表示：$P(x)$：录取x 。

（1） $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（2） $P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$

（3） $P(B) \rightarrow P(C)$

- 把要求证的结论用谓词公式表示出来并否定，得：

（4）$\neg P(C)$

- 把上述公式化成子句集：

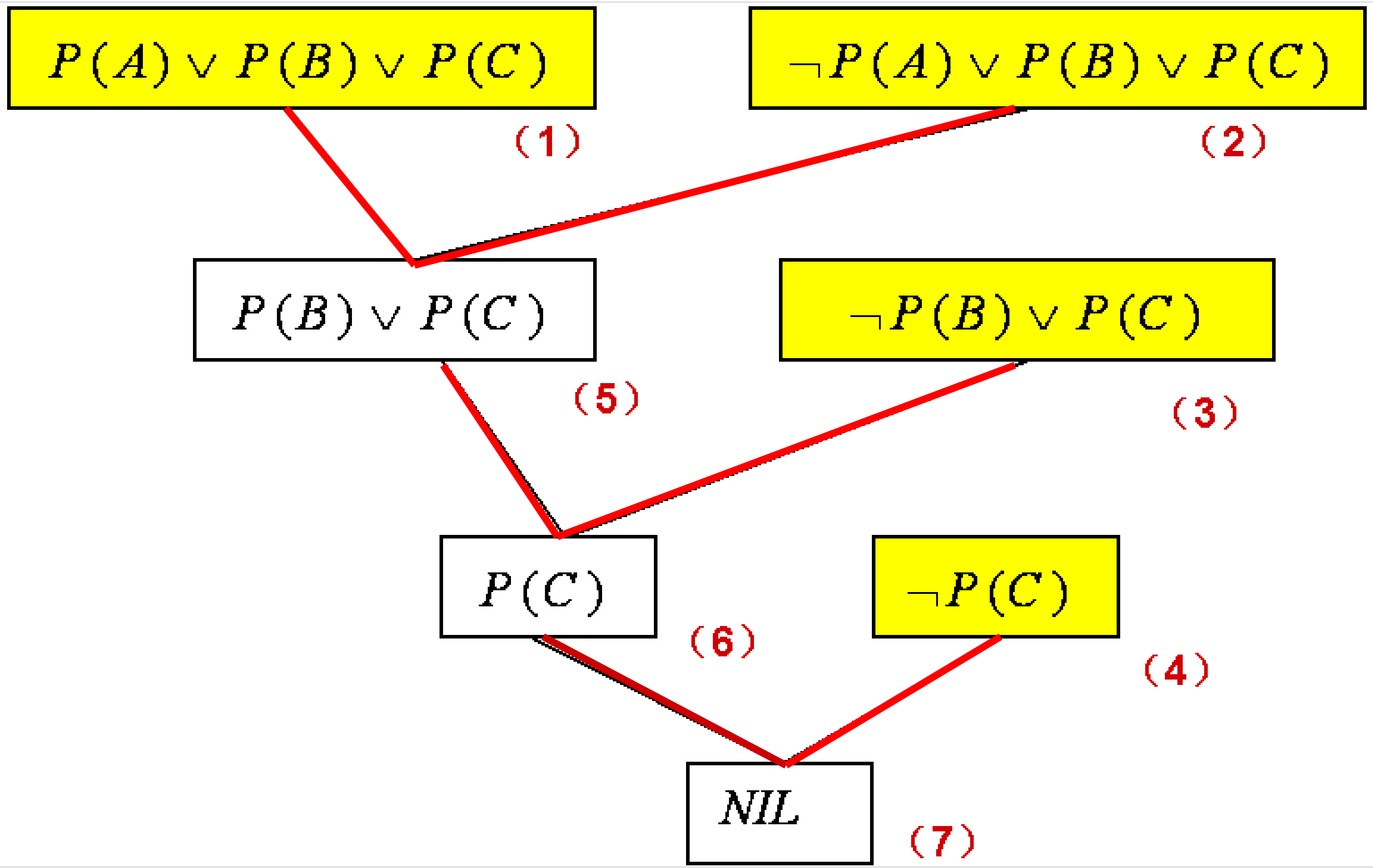
（1） $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（2） $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（3） $\neg P(B) \vee P(C)$

（4） $\neg P(C)$

- 应用归结原理进行归结：


$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$
(1)
$\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$
(2)
$P(B) \vee P(C)$
(5)
$\neg P(B) \vee P(C)$
(3)
$P(C)$
(6)
$\neg P(C)$
(4)
NIL
(7)

- **例3.10 已知：**

  规则1：任何人的兄弟不是女性；

  规则2：任何人的姐妹必是女性。

  事 实：*Mary* 是 *Bill* 的姐妹。

  求证： *Mary* 不是 *Tom* 的兄弟。

- **证明：定义谓词**

  ***brother* (*x*, *y*)： *x* 是 *y* 的兄弟**

  ***sister* (*x*, *y*)： *x* 是 *y* 的姐妹**

  ***woman* (*x*)： *x* 是女性**

3.5 归结反演

- 证明：将规则与事实用谓词公式表示：

（1）$(\forall x)(\forall y)(brother(x,y) \rightarrow \neg woman(x))$

（2）$(\forall x)(\forall y)(sister(x,y) \rightarrow woman(x))$

（3）$sister(Mary, Bill)$

- 把要求证的结论用谓词公式表示出来并否定，得：

（4）$brother(Mary, Tom)$

- 把上述公式化成子句集：

$C_1 = \neg brother(x,y) \vee \neg woman(x)$

$C_2 = \neg sister(x,y) \vee woman(x)$

$C_3 = sister(Mary, Bill)$

$C_4 = brother(Mary, Tom)$

- 将子句集进行归结：

$C_{23} = woman(Mary)$

$C_{123} = \neg brother(Mary, y)$

$C_{1234} = NIL$

第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 鲁宾逊归结原理
- 3.5 归结反演
- 3.6 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

3.6 应用归结原理求解问题

- 应用归结原理求解问题的步骤：

（1）已知前提 F 用谓词公式表示，并化为子句集 S；

（2）把待求解的问题 Q 用谓词公式表示，并否定 Q，再与 $ANSWER$ 构成析取式（$\neg Q \vee ANSWER$）；

（3）把（$\neg Q \vee ANSWER$）化为子句集，并入到子句集 S 中，得到子句集 ；S'

（4）对 S' 应用归结原理进行归结；

（5）若得到归结式 $ANSWER$，则答案就在 $ANSWER$ 中。

例3. 11 已知：

F_1：王（Wang）先生是小李（Li）的老师。

F_2：小李与小张（Zhang）是同班同学。

F_3：如果x与y是同班同学，则x的老师也是y的老师。

求：小张的老师是谁？

3.6 应用归结原理求解问题

◆ **解：**

- **定义谓词：**

  $T(x,y)$： x 是

  $C(x,y)$： x 与

F_1：王（**Wang**）先生是小李（**Li**）的老师。

F_2：小李与小张（**Zhang**）是同班同学。

F_3：如果 x 与 y 是同班同学，则 x 的老师也是 y 的老师。

求：小张的老师是谁？

- **把已知前提表示成谓词公式：**

  F_1： $T(Wang, Li)$

  F_2： $C(Li, Zhang)$

  F_3： $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(C(x,y) \wedge T(z,x) \rightarrow T(z,y))$

- **把目标表示成谓词公式，并把它否定后与 *ANSWER* 析取：**

  G： $\neg(\exists x)T(x, Zhang) \vee ANSWER(x)$

3.6 应用归结原理求解问题

- 把上述公式化为子句集：

（1） $T(Wang, Li)$

（2） $C(Li, Zhang)$

（3） $\neg C(x, y) \vee \neg T(z, x) \vee T(z, y)$

（4） $\neg T(u, Zhang) \vee ANSWER(u)$

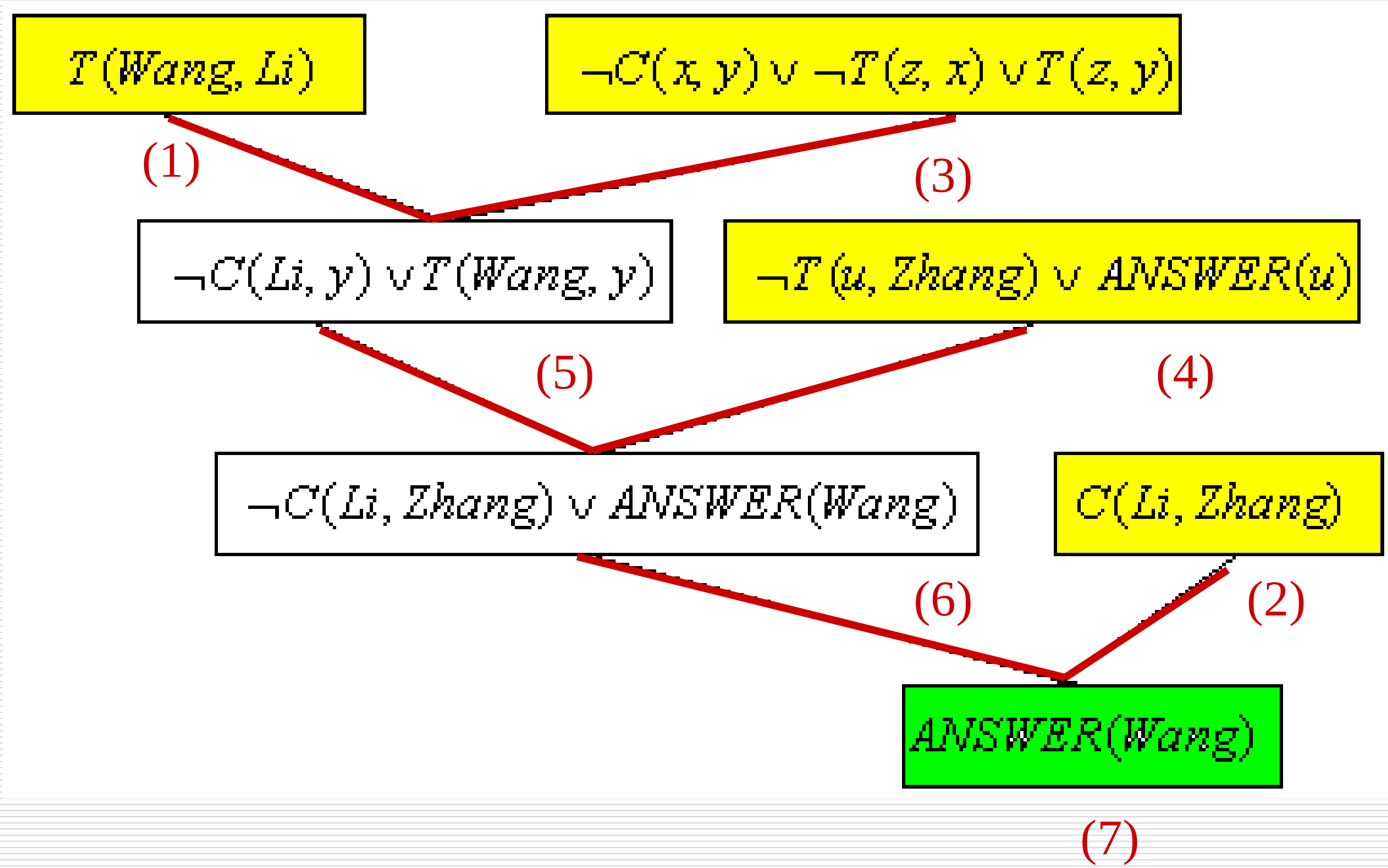
- 应用归结原理进行归结：

（5） $\neg C(Li, y) \vee T(Wang, y)$ （1）与（3）归结

（6） $\neg C(Li, Zhang) \vee ANSWER(Wang)$ （4）与（5）归结

（7） $ANSWER(Wang)$ （2）与（6）归结

3.6 应用归结原理求解问题



THE END

课堂练习

1.以下推理错误的是（ ）

A. $P, P \to Q \Rightarrow Q$ B. $\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

C. $Q, P \to Q \Rightarrow P$ D. $\neg P, P \to Q \Rightarrow \neg Q$

2. $P \to Q\ Q \to R \Rightarrow P \to R$ 该永真蕴含式属于（ ）

A 假言推理 B 拒取式推理 C 假言三段论 D 全称固化

3.以下属于不合法代换的有( )

A $\{f(a)/b\}$ B $\{x/y, f(y)/x\}$ C $\{a/y, f(y)/x\}$ D $\{f(x)/y, x/z\}$

4.复合代换满足交换律（ ）

课堂练习

5 若C1=P(x) ∨Q(x)，C2=┐P(a) ∨R(y)，则C1和C2的归结式R（C1，C2）=(　)

A. P(x) ∨Q(x)　　B. P(a) ∨Q(x)

C. Q(x) ∨R(y)　　D. Q(a) ∨R(y)

6. 下述公式集F是否可合一，若可合一，则求出F的最一般合一。

$$F = \{P(f(y), y, x), P(x, f(A), f(B))\}$$

课堂练习

6.下述公式集合F是否可合一，若可合一，则求出F的最一般合一。

$$F=\{P(f(y), y, x)),\ P(x, f(A), f(B))\}$$

解：初始化，令$k=0$，$\sigma_0=\varepsilon$，

$$F_0=F=\{P(f(y), y, x)),\ P(x, f(A), f(B))\}$$

课堂练习

Loop 1： $F_0=\{P(f(y), y, x)), P(x, f(A), f(B))\}$

含有2个表达式，故σ_0不是最一般合一。

F_0的差异集$D_0=\{f(y), x\}$，可有代换$f(y)/x$，

$$\sigma_1=\sigma_0 \circ \{f(y)/x\}=\{f(y)/x\}$$

$F_1=F_0\{f(y)/x\}=\{P(f(y), y, f(y))), P(f(y), f(A), f(B))\}$

课堂练习

Loop 2：

$F_1=\{ P(f(y), y, f(y)), P(f(y), f(A), f(B)) \}$含有2个表达式，故$\sigma_1$不是最一般合一

F_1的差异集$D_1=\{y，f(A)\}$，可有代换

$\{f(A)/y\}$，

$\sigma_2=\sigma_1 \circ \{f(A)/y\}=\{f(y)/x\} \circ \{f(A)/y\}=$

$\{f(f(A))/x,\ f(A)/y\}$

$F_2=F_1\{f(A)/y\}=\{ P(f(f(A)),\ f(A), f(f(A))),$

$P(f(f(A)),\ f(A), f(B))\}$

课堂练习

Loop 3:

$F_2=\{f(f(A)), f(A), f(f(A))), P(f(f(A)), f(A), f(B))\}$

由于$f(f(A))$和$f(B)$都是常量，无法进行代换,所以:

1)如果$f(f(A)) \neq f(B)$ F_2含有2个表达式，并且不能进行差异集代换，不存在最一般合一，公式F不可合一。

2) 如果$f(f(A)) = f(B)$ $F_2= \{P(f(f(A)), f(A), f(B))\}$ 只含有1个表达式，故算法成功终止，

$\sigma_2 = \{f(f(A))/x, f(A)/y\}$，即为公式集F的最一般合一，公式F可合一。