第 4 章 不确定性推理方法

The only certain thing in this world is uncertain

第4章 不确定性推理方法

- 现实世界中由于客观上存在的随机性、模糊性，反映到知识以及由观察所得到的证据上来，就分别形成了不确定性的知识及不确定性的证据。因而还必须对不确定性知识的表示及推理进行研究。这就是本章将要讨论的不确定性推理。
- 下面首先讨论不确定性推理中的基本问题，然后着重介绍基于概率论的有关理论发展起来的不确定性推理方法，主要介绍可信度方法、证据理论，最后介绍目前在专家系统、信息处理、自动控制等领域广泛应用的依据模糊理论发展起来的模糊推理方法。

第4章 不确定性推理方法

- **4.1 不确定性推理的基本概念**
- **4.2 概率方法**
- **4.3 主观Bayes方法**
- **4.4 可信度方法**
- **4.5 证据理论**
- **4.6 模糊推理方法**

- ✓ **4.1 不确定性推理中的基本问题**
- □ **4.2 概率方法**
- □ **4.3 主观Bayes方法**
- □ **4.4 可信度方法**
- □ **4.5 证据理论**
- □ **4.6 模糊推理方法**

4.1 不确定性推理中的基本问题

- 推理：从已知事实（证据）出发，通过运用相关知识逐步推出结论或者证明某个假设成立或不成立的思维过程。
- 不确定性推理：从不确定性的初始证据出发，通过运用不确定性的知识，最终推出具有一定程度的不确定性但却是合理或者近乎合理的结论的思维过程。

4.1 不确定性推理中的基本问题

- 不确定性的表示与量度
- 不确定性匹配算法及阈值的选择
- 组合证据不确定性的算法
- 不确定性的传递算法
- 结论不确定性的合成

4.1 不确定性推理中的基本问题

1. 不确定性的表示与量度

（1）知识不确定性的表示

（2）证据不确定性的表示

（3）不确定性的量度

在专家系统中知识的不确定性一般

▪ 用户在求解问题时提供的初始证据。

① 能充分表达相应知识及证据不确定性的程度。

② 度量范围的指定便于领域专家及用户对不确定性的估计。

③ 便于对不确定性的传递进行计算，而且对结论算出的不确定性量度不能超出量度规定的范围。

④ 度量的确定应当是直观的，同时应有相应的理论依据。

4.1 不确定性推理中的基本问题

2. 不确定性匹配算法及阈值的选择

- 不确定性匹配算法：用来计算匹配双方相似程度的算法。
- 阈值：用来指出相似的“限度”。

3. 组合证据不确定性的算法：

- 最大最小方法、Hamacher方法、概率方法、有界方法、Einstein方法等。

4.1 不确定性推理中的基本问题

4. 不确定性的传递算法

（1）在每一步推理中，如何把证据及知识的不确定性传递给结论。

（2）在多步推理中，如何把初始证据的不确定性传递给最终结论。

5. 结论不确定性的合成

- □ 4.1 不确定性推理的基本概念
- ✓ 4.2 概率方法
- □ 4.3 主观Bayes方法
- □ 4.4 可信度方法
- □ 4.5 证据理论
- □ 4.6 模糊推理方法
- □ 4.7 模糊控制

4.2 概率方法

- **4.2.1 经典概率方法**
- **4.2.2 逆概率方法**

4.2.1 经典概率方法

- **产生式规则：**

$$\text{IF} \quad E \quad \text{THEN} \quad H_i \qquad i = 1, 2, \Lambda\ , n$$

$\boldsymbol{E}$： 前提条件， H_i： 结论

$P(H_i \mid E)$： 在证据 E 出现的条件下，结论 H_i 成立的确定性程度。

- **复合条件：**

$$E = E_{\mathrm{i}} \quad \text{AND} \quad E_2 \quad \text{AND} \quad \cdots \quad \text{AND} \quad E_{\boldsymbol{m}}$$

$P(H_i \mid E_1, E_2, \Lambda\ , E_{\mathrm{m}})$： 在证据 $E_1, E_2, \Lambda\ , E_{\mathrm{m}}$ 出现时结论的确定程度。

4.2.2 逆概率方法

1. 逆概率方法的基本思想：

- **Bayes定理**：

逆概率 $P(E \mid H_i)$ ⟹ 原概率 $P(H_i \mid E)$

- 例如：

E：咳嗽，　　H_i：支气管炎，

条件概率 $P(H_i \mid E)$：统计咳嗽的人中有多少是患支气管炎的。

逆概率 $P(E \mid H_i)$：统计患支气管炎的人中有多少人是咳嗽的。

4.2.2 逆概率方法

2. 单个证据的情况

- 产生式规则： IF E THEN H_i $i=1,2,\Lambda,n$

- **Bayes公式：** $P(H_i \mid E)=\dfrac{P(E \mid H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E \mid H_j)P(H_j)}$ $i=1,2,\Lambda,n$

结论 H_i 成立时前提条件 E 所对应的证据出现的条件概率

结论 H_i 的先验概率

4.2.2 逆概率方法

例1 H_1, H_2, H_3：结论，E：证据。

已知：$P(H_1)=0.3,\quad P(H_2)=0.4,\quad P(H_3)=0.5,$

$P(E \mid H_1)=0.5,\quad P(E \mid H_2)=0.3,\quad P(E \mid H_3)=0.4,$

求：$P(H_1 \mid E)$，$P(H_2 \mid E)$，$P(H_3 \mid E)$ ？

解：$$P(H_1 \mid E)=\frac{P(H_1)P(E \mid H_1)}{P(H_1)P(E \mid H_1)+P(H_2)P(E \mid H_2)+P(H_3)P(E \mid H_3)}$$

$$=\frac{0.3\times 0.5}{0.3\times 0.5+0.4\times 0.3+0.5\times 0.4}$$

$$=0.32$$

同理可得：$P(H_2 \mid E)=0.26$，$P(H_3 \mid E)=0.43$

3. 多个证据的情况

- 多个证据 E_1, E_2, Λ, E_m ，多个结论 H_1, H_2, Λ, H_n ，且每个证据都以一定程度支持结论。
- 扩充后的公式：

$$P(H_i \mid E_1 E_2 \Lambda E_m) = \frac{P(E_1 \mid H_i) P(E_2 \mid H_i) \Lambda P(E_m \mid H_i) P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_1 \mid H_j) P(E_2 \mid H_j) \Lambda P(E_m \mid H_j) P(H_j)}$$

$$i = 1, 2, \Lambda, n$$

- **例2 已知：**

$P(H_1)=0.4$, $P(H_2)=0.3$, $P(H_3)=0.3$, $P(E_1 \mid H_1)=0.5$,

$P(E_1 \mid H_2)=0.6$, $P(E_1 \mid H_3)=0.3$, $P(E_2 \mid H_1)=0.7$,

$P(E_2 \mid H_2)=0.9$, $P(E_2 \mid H_3)=0.1$。

求： $P(H_1 \mid E_1E_2)$，$P(H_1 \mid E_1E_2)$，$P(H_1 \mid E_1E_2)$ ？

4.2.2 逆概率方法

解：

$$P(H_1|E_1E_2)=\frac{P(E_1|H_1)P(E_2|H_1)P(H_1)}{P(E_1|H_1)P(E_2|H_1)P(H_1)+P(E_1|H_2)P(E_2|H_2)P(H_2)+P(E_1|H_3)P(E_2|H_3)P(H_3)}$$

$$=\frac{0.5\times0.7\times0.4}{0.5\times0.7\times0.4+0.6\times0.9\times0.3+0.3\times0.1\times0.3}$$

$$=0.45$$

同理可得：$P(H_2|E_1E_2)=0.52$

$P(H_3|E_1E_2)=0.03$

4.2.2 逆概率方法

4. 逆概率方法的优缺点

- 优点：较强的理论背景和良好的数学特征，当证据及结论都彼此独立时计算的复杂度比较低。
- 缺点: 要求给出结论 H_i的先验概率 $P(H_i)$及证据E_j的条件概率 $P(E_j \mid H_i)$。

- ☐ 4.1 不确定性推理的基本概念
- ☐ 4.2 概率方法
- ✓ 4.3 主观Bayes方法
- ☐ 4.4 可信度方法
- ☐ 4.5 证据理论
- ☐ 4.6 模糊推理方法

4.3 主观 Bayes 方法

- **1976年，杜达（R.O.Duda）、哈特（P.E.Hart）等人提出主观Bayes方法，建立了不确定性推理模型，并在地矿勘探专家系统PROSPECTOR中得到了成功的应用。**

4.3 主观Bayes方法

- **4.3.1** 知识不确定性的表示
- **4.3.2** 证据不确定性的表示
- **4.3.3** 组合证据不确定性的算法
- **4.3.4** 不确定性的传递算法

4.3.1 知识不确定性的表示

- 知识： IF E THEN (LS, LN) H $(P(H))$

E：前提条件（简单条件或复合条件）

H：结论

(LS, LN)：规则强度

$$LS=\frac{P(E|H)}{P(E|\neg H)}$$ ——规则成立的充分性度量

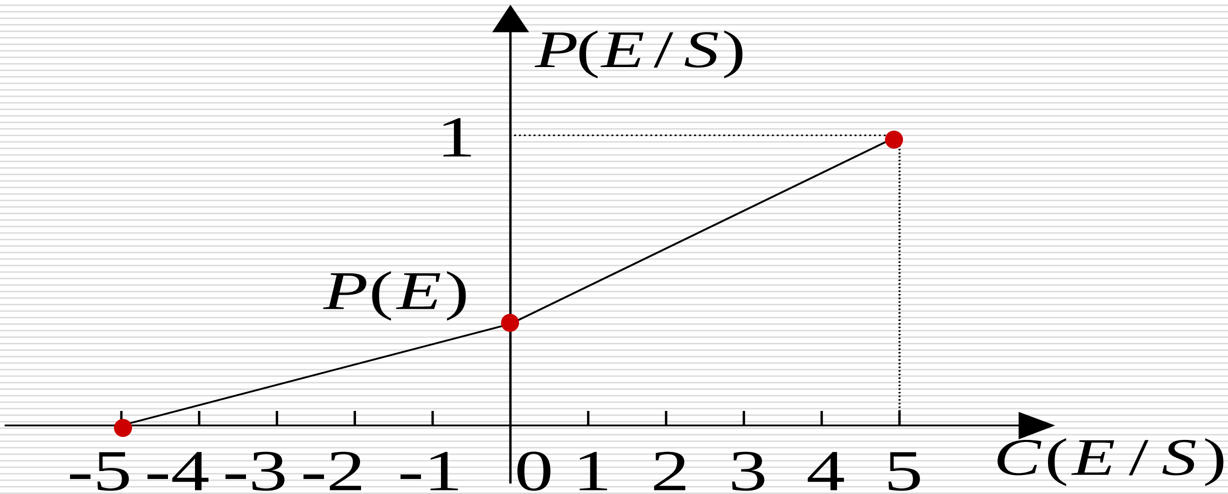
$$LN=\frac{P(\neg E|H)}{P(\neg E|\neg H)}=\frac{1-P(E|H)}{1-P(E|\neg H)}$$

——规则成立的必要性度量

4.3.2 证据不确定性的表示

$P(E|S)$：对于初始证据 E，由用户根据观察 S 给出的概率。

可 信 度$C(E|S)$：对 所 提 供 的 证 据 可 以 相 信 的 程 度 。



$$P(E|S)=\begin{cases}\dfrac{C(E|S)+P(E)\times(5-C(E|S))}{5} & 若0< C(E/S)< 5\\[2ex] \dfrac{P(E)\times(C(E|S)+5)}{5} & 若-5< C(E/S)<0\end{cases}$$

4.3.3 组合证据不确定性的算法

- 多个单一证据的**合取**：

$$E = E_1 \quad AND \quad E_2 \quad AND \quad \Lambda \quad AND \quad E_n$$

则组合证据的概率：

$$P(E/S) = \min\{P(E_1/S), P(E_2/S), \mathrm{L}\ , P(E_n/S)\}$$

- 多个单一证据的**析取**：

$$E = E_1 \quad OR \quad E_2 \quad OR \quad \Lambda \quad OR \quad E_n$$

则组合证据的概率：

$$P(E \mid S) = \max\{P(E_1 \mid S), P(E_2 \mid S), \Lambda\ , P(E_n \mid S)\}$$

- **非**运算： $P(\neg E/S) = 1 - P(E/S)$

4.3.4 不确定性的传递算法

- $P(H)$：专家对结论 H 给出的先验概率，在没有考虑任何证据的情况下根据经验给出的。
- 主观Bayes方法推理的任务：

$$P(H) \xrightarrow{PE,LS,LN} P(H/E)\text{或}P(H/\neg E)\ ?$$

先验概率

后验概率

1. 证据肯定存在的情况

- 证据肯定存在时，$P(E)=P(E\mid S)=1$

  结论H成立的概率：$P(H/E)=P(E/H)\times P(H)/P(E)$

  结论H不成立的概率：$P(\neg H/E)=P(E/\neg H)\times P(\neg H)/P(E)$

$$\frac{P(H/E)}{P(\neg H/E)}=\frac{P(E/H)}{P(E/\neg H)}\times\frac{P(H)}{P(\neg H)}$$

4.3.4 不确定性的传递算法

1. 证据肯定存在的情况

- **几率（odds）函数：** $O(x) = \dfrac{P(x)}{P(\neg x)} = \dfrac{P(x)}{1 - P(x)}$

- **概率：** $P(x) = \dfrac{O(x)}{1 + O(x)}$

$P(x) \in [0,1], \qquad O(x) \in [0, \infty)$。

- 几率函数和概率函数有相同的单调性。

4.3.4 不确定性的传递算法

1. 证据肯定存在的情况

$$\frac{P(H/E)}{P(\neg H/E)}=\frac{P(E/H)}{P(E/\neg H)}\times\frac{P(H)}{P(\neg H)}$$

$$O(H/E)=LS\times O(H)$$

Bayes修正公式

$$P(H/E)=\frac{LS\times P(H)}{(LS-1)\times P(H)+1}$$

4.3.4 不确定性的传递算法

1. 证据肯定存在的情况

- 充分性量度 ***LS*** 的意义：

（1）***LS*** **> 1,** $O(H/E) > O(H)$ ⟹ $P(H/E) > P(H)$

（2）***LS*****＝1,** $O(H/E) = O(H)$

（3）***LS*** **<1,** $O(H/E) < O(H)$

（4）***LS*****=0,** $O(H/E) = 0$

4.3.4 不确定性的传递算法

2. 证据肯定不存在的情况

- **证据肯定不存在时,** $P(E)=P(E/S)=0, P(\neg E)=1$

$$P(H/\neg E)=P(\neg E/H)\times P(H)/P(\neg E)$$

$$P(\neg H/\neg E)=P(\neg E/\neg H)\times P(\neg H)/P(\neg E)$$

$$\frac{P(H/\neg E)}{P(\neg H/\neg E)}=\frac{P(\neg E/H)}{P(\neg E/\neg H)}\times\frac{P(H)}{P(\neg H)}$$

4.3.4 不确定性的传递算法

2. 证据肯定不存在的情况

- **Bayes修正公式:**

$$O(H/\neg E) = LN \times O(H)$$

$$P(H/\neg E) = \frac{LN \times P(H)}{(LN-1) \times P(H) + 1}$$

4.3.4 不确定性的传递算法

2. 证据肯定不存在的情况

- **必要性量度 *LN* 的意义：**

（1）*LN* > 1, $O(H/\neg E) > O(H)$ ⇨ $P(H/\neg E) > P(H)$

（2）*LN*＝1， $O(H/\neg E) = O(H)$

（3）*LN* <1, $O(H/\neg E) < O(H)$

（4）*LN*=0, $O(H/\neg E) = 0$

4.3.4 不确定性的传递算法

- E和$\neg E$不可能同时支持 H 或同时反对 H，
- 不应该存在：

  （1）$LS > 1$， $LN > 1$

  （2）$LS < 1$， $LN < 1$

- 存在两种情况：

  （1） $LS \geq 1$ 且 $LN \leq 1$

  （2） $LS \leq 1$ 且 $LN \geq 1$

4.3.4 不确定性的传递算法

- 例1 设有如下知识：

$$r_1: \quad \text{IF} \quad E_1 \quad \text{THEN} \quad (10,1) \quad H_1 \quad (0.03)$$

$$r_2: \quad \text{IF} \quad E_2 \quad \text{THEN} \quad (20,1) \quad H_2 \quad (0.05)$$

$$r_3: \quad \text{IF} \quad E_3 \quad \text{THEN} \quad (1,0.002) \quad H_3 \quad (0.3)$$

- 求：当证据 E_1, E_2, E_3 存在及不存在时，$P(H_i \mid E_i)$ 及 $P(H_i \mid \neg E_i)$ 的值各是多少？

4.3.4 不确定性的传递算法

解：

$$P(H_1|E_1)=\frac{LS_1\times P(H_1)}{(LS_1-1)\times P(H_1)+1}$$

$$=\frac{10\times 0.03}{(10-1)\times 0.03+1}$$

$$=0.24$$

$$P(H_2|E_2)=\frac{LS_2\times P(H_2)}{(LS_2-1)\times P(H_2)+1}$$

$$=\frac{20\times 0.05}{(20-1)\times 0.05+1}$$

$$=0.51$$

$$\frac{P(H_1|E_1)}{P(H_1)}=\frac{0.24}{0.03}=8$$

$$\frac{P(H_2|E_2)}{P(H_2)}=\frac{0.51}{0.05}=10.2$$

解：（续）

$$P(H_3|\neg E_3)=\frac{LN_3\times P(H_3)}{(LN_3-1)\times P(H_3)+1}$$

$$=\frac{0.002\times 0.3}{(0.002-1)\times 0.3+1}$$

$$=0.00086$$

$$\frac{P(H_3)}{P(H_3|\neg E_3)}\approx 350$$

4.3.4 不确定性的传递算法

- **例3** 设有如下知识：

$$r_1: \quad E_1 \to H \quad LS_1 = 20 \quad LN_1 = 1$$

$$r_2: \quad E_2 \to H \quad LS_2 = 300 \quad LN_2 = 1$$

$$P(H) = 0.03$$

- 若 E_1, E_2 依次出现，求 $P(H / E_1, E_2)$ 的值。

4.3.4 不确定性的传递算法

解：

$$P(H|E_1)=\frac{LS_1\times P(H)}{(LS_1-1)\times P(H)+1}$$

$$=\frac{20\times 0.03}{(20-1)\times 0.03+1}$$

$$=0.382$$

$$P(H|E_1,E_2)=\frac{LS_2\times P(H|E_1)}{(LS_2-1)\times P(H|E_1)+1}$$

$$=\frac{300\times 0.382}{(300-1)\times 0.382+1}$$

$$=0.994$$

4.3.4 不确定性的传递算法

3. 证据不确定的情况

- **用户告知只有60%的把握说明证据 *E* 是真的，表示初始证据*E*为真的程度为0.6，即$P(E|S)$ =0.6。**
- **在 $0 < P(E \mid S) < 1$ 的情况下,确定的后验概率 $P(H \mid S)$,要用杜达等人1976年证明了的公式:**

$$P(H/S) = P(H/E) \times P(E/S) + P(H/\neg E) \times P(\neg E/S)$$

4.3.4 不确定性的传递算法

$$P(H/S)=P(H/E)\times P(E/S)+P(H/\neg E)\times P(\neg E/S)$$

（1） $P(E/S)=1 \Rightarrow P(\neg E/S)=0$

$$P(H/S)=P(H/E)=\frac{LS\times P(H)}{(LS-1)\times P(H)+1}$$

（2） $P(E/S)=0 \Rightarrow P(\neg E/S)=1$

$$P(H/S)=P(H/\neg E)=\frac{LN\times P(H)}{(LN-1)\times P(H)+1}$$

4.3.4 不确定性的传递算法

$$P(H/S)=P(H/E)\times P(E/S)+P(H/\neg E)\times P(\neg E/S)$$

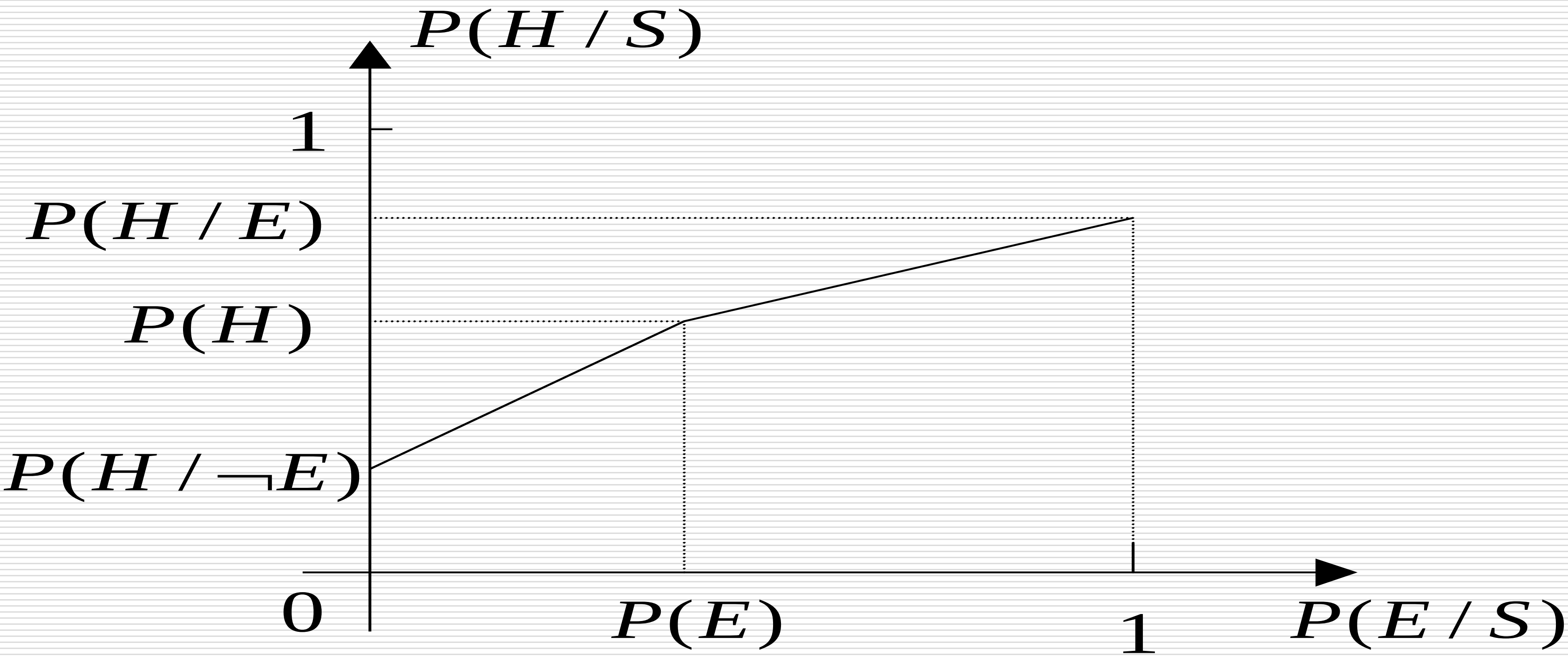
（3） $P(E/S)=P(E)$

$$P(H/S)=P(H/E)\times P(E)+P(H/\neg E)\times P(\neg E)=P(H)$$

（4）$P(E/S)$为其他值，用线性插值得 **EH** 或 **UED** 公式：

$$P(H/S)=\begin{cases}P(H/\neg E)+\dfrac{P(H)-P(H/\neg E)}{P(E)}\times P(E/S),\text{若}0\le P(E/S)<P(E)\\ P(H)+\dfrac{P(H/E)-P(H)}{1-P(E)}\times[P(E/S)-P(E)],\text{若}P(E)\le P(E/S)\le 1\end{cases}$$

4.3.4 不确定性的传递算法



CP 公式:

可信度

$$P(H/S)=\begin{cases} P(H/\neg E)+[P(H)-P(H/\neg E)]\times[\frac{1}{5}C(E/S)+1], \text{若} C(E/S)\le 0 \\ P(H)+[P(H/E)-P(H)]\times\frac{1}{5C(E/S)}, \text{若} C(E/S)>0 \end{cases}$$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

- 若n条知识都支持相同的结论，且每条知识的前提条件所对应的证据$E_i(i=1,2\cdots,n)$都有相应的观察S_i与之对应，则先对每条知识分别求出$O(H/S_i)$，然后求出$O(H/S_1,S_2,S_n)$：

$$O(H/S_1,S_2,\ldots S_n)=\frac{O(H/S_1)}{O(H)}\frac{O(H/S_2)}{O(H)}\cdots\frac{O(H/S_n)}{O(H)}O(H)$$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

- **例4 设有如下知识：**

$$r_1: \quad \text{IF} \quad E_1 \quad \text{THEN} \quad (2, 0.001) \quad H_1$$

$$r_2: \quad \text{IF} \quad E_2 \quad \text{THEN} \quad (100, 0.001) \quad H_1$$

$$r_3: \quad \text{IF} \quad H_1 \quad \text{THEN} \quad (200, 0.01) \quad H_2$$

- **已知：** $O(H_1)=0.1, O(H_2)=0.01, C(E_1/S_1)=2, C\left(E_2/S_2\right)=1$
- **求：** $O(H_2/S_1, S_2)=?$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

解：

（1）计算 $O(H_1 \mid S_1)$

$$P(H_1)=\frac{O(H_1)}{1+O(H_1)}=\frac{0.1}{1+0.1}=0.09$$

$$P(H_1 \mid E_1)=\frac{O(H_1 \mid E_1)}{1+O(H_1 \mid E_1)}=\frac{LS_1\times O(H_1)}{1+LS_1\times O(H_1)}=\frac{2\times 0.1}{1+2\times 0.1}=0.17$$

因为 $C(E_1 \mid S_1)=2>0$

$$P(H_1 \mid S_1)=P(H_1)+[P(H_1 \mid E_1)-P(H_1)]\frac{1}{5}C(E_1 \mid S_1)=0.09+[0.17-0.09]\times\frac{2}{5}=0.122$$

$$O(H_1 \mid S_1)=\frac{P(H_1 \mid S_1)}{1-P(H_1 \mid S_1)}=\frac{0.122}{0.878}=0.14$$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

（2）计算 $O(H_1|S_2)$

$$P(H_1|E_2)=\frac{O(H_1|E_2)}{1+O(H_1|E_2)}=\frac{LS_2\times O(H_1)}{1+LS_2\times O(H_1)}=\frac{100\times 0.1}{1+100\times 0.1}=0.91$$

因为 $C(E_2|S_2)=1>0$

$$P(H_1|S_2)=P(H_1)+[P(H_1|E_2)-P(H_1)]\frac{1}{5}C(E_2/S_2)$$

$$=0.09+[0.91-0.09]\times\frac{1}{5}=0.254$$

$$O(H_1|S_2)=\frac{P(H_1|S_2)}{1-P(H_1|S_2)}=\frac{0.254}{1-0.254}=0.34$$

（3）计算 $O(H_1 \mid S_1, S_2)$

$$O(H_1 \mid S_1, S_2) = \frac{O(H_1 \mid S_1)}{O(H_1)} \frac{O(H_1 \mid S_2)}{O(H_1)} O(H_1) = \frac{0.14}{0.1} \times \frac{0.34}{0.1} \times 0.1 = 0.476$$

（4）计算 $P(H_2 \mid S_1, S_2)$, $O(H_2 \mid S_1, S_2)$

因为 $O(H_1 \mid S_1, S_2) = 0.476$，$O(H_1) = 0.1$

所以 $O(H_1 \mid S_1, S_2) > O(H_1)$

$P(H_1 \mid S_1, S_2) > P(H_1)$

$$P(H_2 \mid S_1, S_2) = P(H_2) + \frac{P(H_1 \mid S_1, S_2) - P(H_1)}{1 - P(H_1)} [P(H_2 \mid H_1) - P(H_2)]$$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

（4）计算 $P(H_2 \mid S_1, S_2)$, $O(H_2 \mid S_1, S_2)$

因为 $P(H_2) = \dfrac{O(H_2)}{1+O(H_2)} = \dfrac{0.01}{1+0.01} = 0.01$

$$P(H_1 \mid S_1, S_2) = \frac{O(H_1 \mid S_1, S_2)}{1+O(H_1 \mid S_1, S_2)} = \frac{0.476}{1.476} = 0.32$$

$$P(H_2 \mid H_1) = \frac{O(H_2 \mid H_1)}{1+O(H_2 \mid H_1)} = \frac{LS_3 \times O(H_2)}{1+LS_3 \times O(H_2)} = \frac{200 \times 0.01}{1+200 \times 0.01} = 0.67$$

所以 $P(H_2 \mid S_1, S_2) = 0.01 + \dfrac{0.32-0.09}{1-0.09} \times (0.67-0.01) = 0.175$

$$O(H_2 \mid S_1, S_2) = \frac{P(H_2 \mid S_1, S_2)}{1-P(H_2 \mid S_1, S_2)} = \frac{0.175}{1-0.175} = 0.212$$

4.3.5 结论不确定性的合成算法

- 主观**Bayes**方法的主要优点：

（1）具有较坚实的理论基础。

（2）知识的静态强度 ***LS*** 及***LN*** 是由领域专家根据实践经验给出的，推出的结论有较准确的确定性。

（3）主观**Bayes**方法是一种比较实用且较灵活的不确定性推理方法。

- 主观**Bayes**方法的主要缺点 ：

（1）要求领域专家在给出知识时，同时给出***H***的先验概率。

（2）**Bayes**定理中关于事件独立性的要求使主观**Bayes** 方法的应用受到了限制。

第4章 不确定性推理方法

- □ 4.1 不确定性推理的基本概念
- □ 4.2 概率方法
- □ 4.3 主观Bayes方法
- ✓ 4.4 可信度方法
- □ 4.5 证据理论
- □ 4.6 模糊推理方法
- □ 4.7 模糊控制

4.4 可信度方法

- 1975年肖特里菲（E. H. Shortliffe）等人在确定性理论（theory of confirmation）的基础上，结合概率论等提出的一种不确定性推理方法。
- 优点：直观、简单，且效果好。

4.4 可信度方法

- **4.4.1 可信度的概念**
- **4.4.2 C－F模型**

4.4.1 可信度的概念

- 可信度：根据经验对一个事物或现象为真的相信程度。
- 可信度带有较大的主观性和经验性，其准确性难以把握。
- C－F模型：基于可信度表示的不确定性推理的基本方法。

4.4.2 C－F模型

1. 知识不确定性的表示

- **产生式规则表示:**

$$\text{IF} \quad E \quad \text{THEN} \quad H \quad (CF(H,E))$$

$CF(H,E)$: 可信度因子（certainty factor），反映前提条件与结论的联系强度。

IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 （0.7）

4.4.2 C－F模型

1. 知识不确定性的表示

- **CF（H，E）的取值范围: [-1,1]。**
- **若由于相应证据的出现增加结论 H 为真的可信度，则 CF（H，E）> 0，证据的出现越是支持 H 为真，就使CF（H，E) 的值越大。**
- **反之，CF（H，E）< 0，证据的出现越是支持 H 为假，CF（H，E）的值就越小。**
- **若证据的出现与否与 H 无关，则 CF（H，E）= 0。**

4.4.2 C－F模型

2. 证据不确定性的表示

$CF(E)=0.6$： E的可信度为0.6

- 证据E的可信度取值范围：[-1，1]。
- 对于初始证据，若所有观察S能肯定它为真，则$CF(E)=1$。
- 若肯定它为假，则 $CF(E) = -1$。
- 若以某种程度为真，则 $0 < CF(E) < 1$。
- 若以某种程度为假，则 $-1 < CF(E) < 0$ 。
- 若未获得任何相关的观察，则 $CF(E) = 0$。

2. 证据不确定性的表示

- **静态强度**$CF(H, E)$：知识的强度，即当 E 所对应的证据为真时对 H 的影响程度。
- **动态强度** $CF(E)$：证据 E 当前的不确定性程度。

3. 组合证据不确定性的算法

- 组合证据：多个单一证据的合取

$$E = E_1 \quad \text{AND} \quad E_2 \quad \text{AND} \quad \cdots \quad \text{AND} \quad E_n$$

则 $CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$

- 组合证据：多个单一证据的析取

$$E = E_1 \quad \text{OR} \quad E_2 \quad \text{OR} \quad \cdots \quad \text{OR} \quad E_n$$

则 $CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \Lambda, CF(E_n)\}$

4. 不确定性的传递算法

- C－F模型中的不确定性推理：从不确定的初始证据出发，通过运用相关的不确定性知识，最终推出结论并求出结论的可信度值。结论 H 的可信度由下式计算：

$$CF(H)=CF(H,E)\times\max\{0,CF(E)\}$$

当$CF(E)<0$时，则$CF(H)=0$

当$CF(E)=1$时，则$CF(H)=CF(H,E)$

5. 结论不确定性的合成算法

- 设知识：

$$\text{IF} \quad E_1 \quad \text{THEN} \quad H \qquad (CF(H,E_1))$$

$$\text{IF} \quad E_2 \quad \text{THEN} \quad H \qquad (CF(H,E_2))$$

（1）分别对每一条知识求出*CF*（*H*）：

$$CF_1(H)=CF(H,E_1)\times\max\{0,CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H)=CF(H,E_2)\times\max\{0,CF(E_2)\}$$

5. 结论不确定性的合成算法

（2）求出E_1与E_2对H的综合影响所形成的可信度 $CF_{1,2}(H)$：

$$CF_{1,2}(H)=\begin{cases} CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)CF_2(H) & CF_1(H)\geq 0,\quad CF_2(H)\geq 0 \\ CF_1(H)+CF_2(H)+CF_1(H)CF_2(H) & CF_1(H)<0,\quad CF_2(H)<0 \\ \dfrac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min\{|CF_1(H)|,|CF_2(H)|\}} & CF_1(H)\qquad CF_2(H) \end{cases}$$

4.4.2 C—F模型

- **例4** 设有如下一组知识：

r_1: IF E_1 THEN H (0.8)

r_2: IF E_2 THEN H (0.6)

r_3: IF E_3 THEN H (–0.5)

r_4: IF E_4 AND (E_5 OR E_6) THEN E_1 (0.7)

r_5: IF E_7 AND E_8 THEN E_3 (0.9)

已知：$CF(E_2)=0.8,\ CF(E_4)=0.5, CF(E_5)=0.6,\ \ CF(E_6)=0.7,$

$CF(E_7)=0.6,\ \ CF(E_8)=0.9.$

求：$CF(H)$

解：

第一步：对每一条规则求出**CF（H）**。

r_4：

$$CF(E_1) = 0.7 \times \max\{0, CF[E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6)]\}$$

$$= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \quad OR \quad E_6)\}\}$$

$$= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\}$$

$$= 0.7 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.7\}\}\}$$

$$= 0.7 \times \max\{0, 0.5\}$$

$$= 0.35$$

4.4.2 C—F模型

解：

第一步：对每一条规则求出***CF***（***H***）。

$$
\begin{aligned}
r_5: \quad CF(E_3) &= 0.9 \times \max\{0, CF(E_7 \quad AND \quad E_8)\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, 0.6\} \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_1: \quad CF_1(H) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_1)\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, 0.35\} \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

解：

第一步：对每一条规则求出***CF***（***H***）。

r_2：

$$
\begin{aligned}
CF_2(H) &= 0.6 \times \max\{0, CF(E_2)\} \\
&= 0.6 \times \max\{0, 0.8\} \\
&= 0.48
\end{aligned}
$$

r_3：

$$
\begin{aligned}
CF_3(H) &= -0.5 \times \max\{0, CF(E_3)\} \\
&= -0.5 \times \max\{0, 0.54\} \\
&= -0.27
\end{aligned}
$$

第二步：根据结论不确定性的合成算法得到：

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H)$$

$$= 0.28 + 0.48 - 0.28 \times 0.48 \quad = 0.63$$

$$CF_{1,2,3}(H) = \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}}$$

$$= \frac{0.63 - 0.27}{1 - \min\{0.63, 0.27\}} \quad = \frac{0.36}{0.73} \quad = 0.49$$

综合可信度：$CF(H) = 0.49$

- □ 4.1 不确定性推理的基本概念
- □ 4.2 概率方法
- □ 4.3 主观Bayes方法
- □ 4.4 可信度方法
- ✓ **4.5 证据理论**
- □ 4.6 模糊推理方法
- □ 4.7 模糊控制

4.5 证据理论

- 证据理论(theory of evidence)：又称D－S理论，是德普斯特（A. P. Dempster）首先提出，沙佛（G. Shafer）进一步发展起来的一种处理不确定性的理论。
- 1981年巴纳特（J. A. Barnett）把该理论引入专家系统中，同年卡威（J. Garvey）等人用它实现了不确定性推理。
- 目前，在证据理论的基础上已经发展了多种不确定性推理模型。

4.5 证据理论

- **4.5.1** 概率分配函数
- **4.5.2** 信任函数
- **4.5.3** 似然函数
- **4.5.4** 信任函数与似然函数的关系
- **4.5.5** 概率分配函数的正交和（证据的组合）

4.5.1 概率分配函数

- 设 D 是变量 x 所有可能取值的集合，且 D 中的元素是互斥的，在任一时刻 x 都取且只能取 D 中的某一个元素为值，则称 D 为 x 的样本空间。

- 在证据理论中，D 的任何一个子集 A 都对应于一个关于 x 的命题，称该命题为“ x 的值是在 A 中”。

- 设 x：所看到的颜色，D={红，黄，蓝}，

则 A={红}：“ x 是红色”；

A={红，蓝}：“x 或者是红色，或者是蓝色”。

4.5.1 概率分配函数

- 设D为样本空间，领域内的命题都用D的子集表示，则概率分配函数（basic probability assignment function）定义如下：

定义4.1 设函数 $M: 2^D \to [0,1]$, （对任何一个属于D的子集A，命它对应一个数$M \in [0，1]$） 且满足

$$M(\Phi) = 0$$

$$\sum_{A \subseteq D} M(A) = 1$$

则 M: 2^D 上的基本概率分配函数，M（A）: A的基本概率数。

几点说明：

（1）设样本空间D中有n个元素，则D中子集的个数为2^n个。

2^D：

- 设 D={红，黄，蓝}

- 设 D={红，黄，蓝}

则其子集个数 $2^3=8$，具体为：

A={红}，A={黄}，A={蓝}，A={红，黄}，

A={红，蓝}，A={黄，蓝}，A={红，黄，蓝}，A={ Φ }

（2）概

上的一

$A\subseteq D$

- 例如，设A={红}，

M（A）=0.3：命题“x是红色”的信任度是0.3。

（3）概

4.5.2 信任函数

定义4.2 **命题的信任函数（belief function）Bel：**

$$2^D \to [0,1] \text{ 且 } Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} M(B) \qquad \forall A \subseteq D$$

$Bel(A)$：**对命题A为真的总的信任程度。**

- **设 D ={红，黄，蓝}**

M（{红}）=0.3， M（{黄}）=0，M（{红，黄}）=0.2，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\})$$
$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

- 由

B

Be $\sum_{B \subseteq D}$

4.5.3 似然函数

- 似然函数（plausibility function）：不可驳斥函数或上限函数。

定义4.3 似然函数 $Pl: 2^D \rightarrow [0,1]$ 且

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) \quad \text{对所有的} \ A \subseteq D$$

- **设 D ={红，黄，蓝}**

M（{红}）=0.3，M（{黄}）=0，M（{红，黄}）=0.2，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\})$$
$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$Pl(\{蓝\}) = 1 - Bel(\neg\{蓝\}) = 1 - Bel(\{红，黄\}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

4.5.4 信任函数与似然函数的关系

因为 $$Bel(A)+Bel(\neg A)=\sum_{B\subseteq A}M(B)+\sum_{C\subseteq\neg A}M(C)$$

$$\le\sum_{B\subseteq D}M(E)=1$$

所以 $$Pl(A)-Bel(A)=1-Bel(\neg A)-Bel(A)$$

$$=1-(Bel(\neg A)+Bel(A))\ge 0$$

所以 $Pl(A)\ge Bel(A)$

$Bel(A)$：对A为真的信任程度。

$Pl(A)$ ：对A为非假的信任程度。

$A(Bel(A),Pl(A))$：对A信任程度的下限与上限。

4.5.5 概率分配函数的正交和（证据的组合）

定义4.4 设 M_1 和 M_2 是两个概率分配函数；则其正交和 $M = M_1 \oplus M_2$ ： $M(\Phi)=0$

$$M(A)=K^{-1}\sum_{x\cap y=\Phi} M_1(x)M_2(y)$$

其中： $K=1-\sum_{x\cap y=\Phi} M_1(x)M_2(y)=\sum_{x\cap y\neq\Phi} M_1(x)M_2(y)$

如果 $K\neq 0$，则正交和 M也是一个概率分配函数；

如果 $K=0$，则不存在正交和 M，即没有可能存在概率函数，称M_1与M_2矛盾。

4.5.5 概率分配函数的正交和

定义4.5 设 $M_1, M_2, \ldots M_n$ 是n个概率分配函数，则其正交和 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ 为

$$M(\Phi) = 0$$

$$M(A) = K^{-1} \sum_{\cap A_i = A} \prod_{1 \le i \le n} M_i(A_i)$$

其中：

$$K = \sum_{\cap A_i \ne \Phi} \prod_{1 \le i \le n} M_i(A_i)$$

4.5.5 概率分配函数的正交和

- 设 D ={黑，白}，且设

$$M_2(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.6,0.3,0.1,0)$$

$$M_1(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.3,0.5,0.2,0)$$

则：

$$K=1-\sum_{x\cap y=\Phi} M_1(x)M_2(y)$$

$$=1-[M_1(\{黑\})M_2(\{白\})+M_1(\{白\})M_2(\{黑\})]$$

$$=1-[0.3\times 0.3+0.5\times 0.6] \quad =0.61$$

$$M(\{hei\})=K^{-1}\sum_{x\cap y=\{hei\}} M_1(x)M_2(y)$$

$$=\frac{1}{0.61}[M_1(\{黑\})M_2(\{黑\})+M_1(\{黑\})M_2(\{黑,白\})+ M_1(\{黑,白\})M(\{黑\})]$$

$$=\frac{1}{0.61}[0.3\times 0.6+0.3\times 0.1+0.2\times 0.6] \ =0.54$$

4.5.5 概率分配函数的正交和

- 同理可得：$M(\{白\}) = 0.43$

  $$M(\{黑, 白\}) = 0.03$$

- 组合后得到的概率分配函数：

$$M(\{黑\}), \{白\}, \{黑, 白\}, \Phi) = (0.54, 0.43, 0.03, 0)$$

4.5.6 基于证据理论的不确定性推理

- 基于证据理论的不确定性推理的步骤：

（1）建立问题的样本空间D。

（2）由经验给出，或者由随机性规则和事实的信度度量算基本概率分配函数。

（3）计算所关心的子集的信任函数值、似然函数值。

（4）由信任函数值、似然函数值得出结论。

4.5.6 基于证据理论的不确定性推理

例5 设有规则：

（1）如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.9）
或 过敏性鼻炎但非感冒（0.1）。

（2）如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.8）
或 过敏性鼻炎但非感冒（0.05）。

有事实：

（1）小王流鼻涕（0.9）。

（2）小王眼发炎（0.4）。

问：小王患的什么病？

4.5.6 基于证据理论的不确定性推理

取样本空间：$D=\{h_1,h_2,h_3\}$

h_1 表示“感冒但非过敏性鼻炎”，

h_2 表示“过敏性鼻炎但非感冒”，

h_3 表示“同时得了两种病”。

取下面的基本概率分配函数：

$$M_1(\{h_1\})=0.9\times0.9=0.81$$

$$M_1(\{h_2\})=0.9\times0.1=0.09$$

$$M_1(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_1(\{h_1\})-M_1(\{h_2\})=1-0.81-0.09=0.1$$

$$M_2(\{h_1\})=0.4\times0.8=0.32$$

$$M_2(\{h_2\})=0.4\times0.05=0.02$$

$$M_2(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_2(\{h_1\})-M_2(\{h_2\})=1-0.32-0.02=0.66$$

将两个概率分配函数组合：

$$K=1/\{1-[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_2\})+M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1\})]\}$$
$$=1/\{1-[0.81\times 0.02+0.09\times 0.32]\}$$
$$=1/\{1-0.045\}=1/0.955=1.05$$

$$M(\{h_1\})=K[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1\})+M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1,h_2,h_3\}$$
$$+M_1(\{h_1,h_2,h_3\})M_2(\{h_1\})]$$
$$=1.05\times 0.8258=0.87$$

$$M(\{h_2\})=K[M_1(\{h_2\})M_2(\{h_2\})+M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1,h_2,h_3\}$$
$$+M_1(\{h_1,h_2,h_3\})M_2(\{h_2\})]$$
$$=1.05\times 0.0632=0.066$$

$$M(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M(\{h_1\})-M(\{h_2\})=1-0.87-0.066=0.064$$

信任函数：

$$Bel(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) = 0.87$$

$$Bel(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) = 0.066$$

似然函数：

$$Pl(\{h_1\}) = 1 - Bel(\neg\{h_1\}) = 1 - Bel(\{h_2, h_3\})$$
$$= 1 - [M(\{h_2\} + M(\{h_3\}) = 1 - [0.066 + 0] = 0.934$$

$$Pl(\{h_2\}) = 1 - Bel(\neg\{h_2\}) = 1 - Bel(\{h_1, h_3\})$$
$$= 1 - [M(\{h_1\} + M(\{h_3\}) = 1 - [0.87 + 0] = 0.13$$

结论：小王可能是感冒了。

第4章 不确定性推理方法

- 4.1 不确定性推理的基本概念
- 4.2 概率方法
- 4.3 主观Bayes方法
- 4.4 可信度方法
- 4.5 证据理论
- 4.6 模糊推理方法

4.6 模糊推理方法

- **4.6.1 模糊逻辑的提出与发展**
- **4.6.2 模糊集合**
- **4.6.3 模糊集合的运算**
- **4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成**
- **4.6.5 模糊推理**

4.6.1 模糊逻辑的提出与发展

- 1965年，美国L. A. Zadeh发表了“fuzzy set”的论文，首先提出了模糊理论。
- 从1965年到20世纪80年代，在美国、欧洲、中国和日本，只有少数科学家研究模糊理论。
- 1974年，英国Mamdani首次将模糊理论应用于热电厂的蒸汽机控制。
- 1976年，Mamdani又将模糊理论应用于水泥旋转炉的控制。

4.6.1 模糊逻辑的提出与发展

- 1983年日本Fuji Electric公司实现了饮水处理装置的模糊控制。
- 1987年日本Hitachi公司研制出地铁的模糊控制系统。
- 1987年－1990年在日本申报的模糊产品专利就达319种。
- 目前，各种模糊产品充满日本、西欧和美国市场，如模糊洗衣机、模糊吸尘器、模糊电冰箱等。

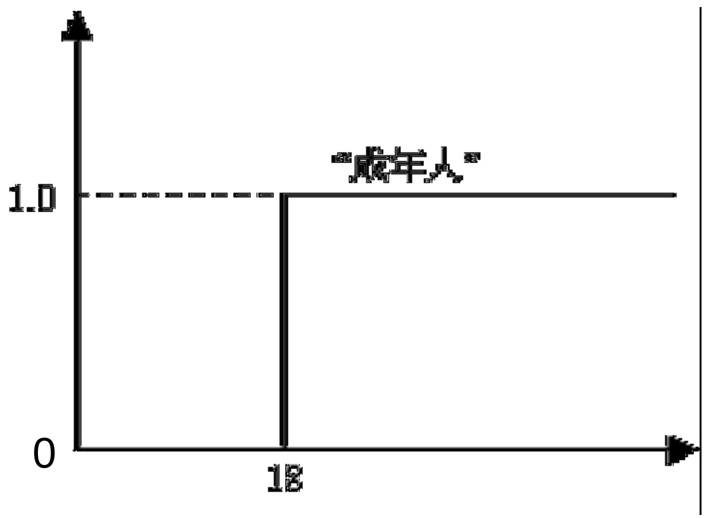
4.6.2 模糊集合

1. 模糊集合的定义

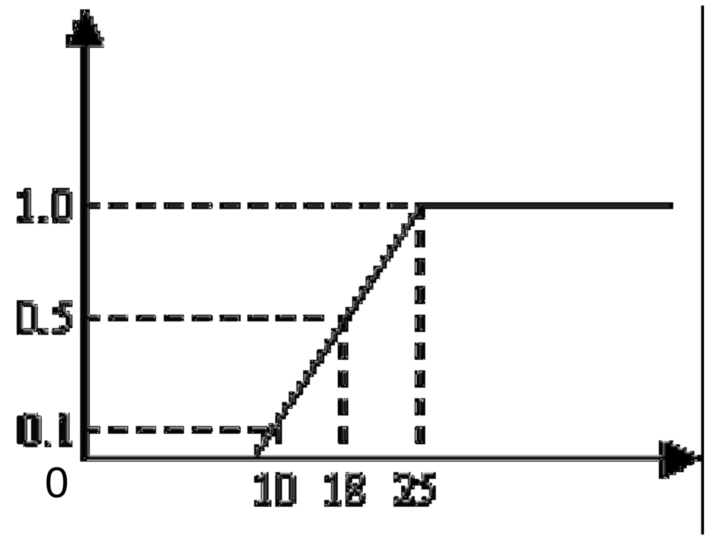
- 论域：所讨论的全体对象，用 U 等表示。
- 元素：论域中的每个对象，常用a,b,c,x,y,z表示。
- 集合：论域中具有某种相同属性的确定的、可以彼此区别的元素的全体，常用A，B等表示。
- 元素a和集合A的关系：a属于A或a不属于A，即只有两个真值"真"和"假"。
- 模糊逻辑给集合中每一个元素赋予一个介于0和1之间的实数，描述其属于一个集合的强度，该实数称为元素属于一个集合的隶属度。集合中所有元素的隶属度全体构成集合的隶属函数。

1. 模糊集合的定义

- 例如，“成年人”集合$\mu_{成年人}(x)=\begin{cases}1 & x\geq 18\\ 0 & x<18\end{cases}$



“成年人”特征函数图



“成年人”隶属度函数图

2. 模糊集合的表示方法

- 当论域中元素数目有限时，模糊集合 A的数学描述为

$$A=\{(x,\mu_A(x)),x\in X\}$$

$\mu_A(x)$：元素 x 属于模糊集 A 的隶属度，X 是元素 x 的论域。

4.6.2 模糊集合

2． 模糊集合的表示方法

（1）Zadeh表示法

（1）论域是离散且元素数目有限：

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\Lambda+\mu_A(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$$

或

$$A=\{\mu_A(x_1)/x_1,\mu_A(x_2)/x_2,\Lambda,\mu_A(x_n)/x_n\}$$

（2）论域是连续的，或者元素数目无限：

$$A=\int_{x\in U}\mu_A(x)/x$$

2．模糊集合的表示方法

（2）序偶表示法

$$A = \{(\mu_A(x_1), x_1), (\mu_A(x_2), x_2), \Lambda\ , (\mu_A(x_n), x_n)\}$$

（3）向量表示法

$$A = \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \Lambda\ , \mu_A(x_n)\}$$

4.6.2 模糊集合

3. 隶属函数

- 常见的隶属函数有正态分布、三角分布、梯形分布等。
- 隶属函数确定方法：

（1）模糊统计法

（2）专家经验法

（3）二元对比排序法

（4）基本概念扩充法

3． 隶属函数

- 例如：以年龄作论域，取 $U=[0,200]$，扎德给出了“年老” O 与“年青” Y 两个模糊集合的隶属函数为

$$\mu_O(u)=\begin{cases}0 & 0\le u\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{5}{u-50}\right)^2\right]^{-1} & 50<u\le 200\end{cases}\qquad \mu_Y(u)=\begin{cases}1 & 0\le u\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25<u\le 200\end{cases}$$

- 采用Zadeh表示法：

$$O=\int_{50<u\le 200}[1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1}\Big/u \qquad Y=\int_{0<u\le 25}1\big/u+\int_{25<u\le 200}[1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1}\Big/u$$

4.6.3 模糊集合的运算

（1）模糊集合的包含关系

- 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$，则 $A \supseteq B$

（2）模糊集合的相等关系

- 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$，则 $A = B$

（3）模糊集合的交并补运算

① 交运算(intersection) $A \cap B$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

4.6.3 模糊集合的运算

② 并运算(union) $A \cup B$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$$

③ 补运算(complement) $\overline{A}$ 或者 A^C

$$\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$$

▪**例6** 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，A及B是论域上的两个模糊集合，已知：

$$A=0.3/x_1+0.5/x_2+0.7/x_3+0.4/x_4$$

$$B=0.5/x_1+1/x_2+0.8/x_3$$

求 $\overline{A}$、$\overline{B}$、 $A\cap B$ 、 $A\cup B$

4.6.3 模糊集合的运算

解：

$$\overline{A} = 0.7/x_1 + 0.5/x_2 + 0.3/x_3 + 0.6/x_4$$

$$\overline{B} = 0.5/x_1 + 0.2/x_3 + 1/x_4$$

$$A \cap B = \frac{0.3 \wedge 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \wedge 1}{x_2} + \frac{0.7 \wedge 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \wedge 0}{x_4}$$

$$= 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3$$

$$A \cup B = \frac{0.3 \vee 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \vee 1}{x_2} + \frac{0.7 \vee 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \vee 0}{x_4}$$

$$= 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3 + 0.4/x_4$$

4.6.3 模糊集合的运算

（4）模糊集合的代数运算

① 代数积： $\mu_{AB}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x)$

② 代数和： $\mu_{A+B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{AB}(x)$

③ 有界和：

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\}=1\wedge[\mu_A(x)+\mu_B(x)]$$

④ 有界积：

$$\mu_{A\otimes B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}=0\vee[\mu_A(x)+\mu_B(x)-1]$$

4.6.3 模糊集合的运算

- **例6 设论域** $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，***A*** **及** ***B*** **是论域上的两个模糊集合，已知：**

$$A=0.2/x_1+0.4/x_2+0.9/x_3+0.5/x_5$$

$$B=0.1/x_1+0.7/x_3+1.0/x_4+0.3/x_5$$

求$A\cdot B$、$A+B$、$A\oplus B$、$A\otimes B$。

解：

$$A\cdot B=0.02/x_1+0.63/x_3+0.15/x_5$$

$$A+B=0.28/x_1+0.4/x_2+0.97/x_3+1.0/x_4+0.65/x_5$$

$$A\oplus B=0.3/x_1+0.4/x_2+1.0/x_3+1.0/x_4+0.8/x_5$$

$$A\otimes B=0.6/x_3$$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

1．模糊关系

- **例7　某地区人的身高论域*X*={140,150,160,170,180}（单位：cm），体重论域 *Y*={40,50,60,70,80}。**

身高与体重的模糊关系表

R (X \ Y)	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

- 从*X*到*Y*的一个模糊关系*R*，用模糊矩阵表示：

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

1. 模糊关系

- 模糊关系的定义：
- **A、B**：模糊集合，模糊关系用叉积(cartesian product)表示：

$$R: A \times B \rightarrow [0,1]$$

- 叉积常用最小算子运算：

$$\mu_{A\times B}(a,b) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$$

- **A、B**：离散模糊集，其隶属函数分别为：

$$\mu_A = [\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \mathrm{L}\ , \mu_A(a_n)], \quad \mu_B = [\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \Lambda\ , \mu_B(b_n)]$$

则其叉积运算： $\mu_{A\times B}(a,b) = \mu_A^T \circ \mu_B$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

1. 模糊关系

- **例8 已知输入的模糊集合*A*和输出的模糊集合*B*：**

$$A = 1.0/a_1 + 0.8/a_2 + 0.5/a_3 + 0.2/a_4 + 0.0/a_5$$

$$B = 0.7/b_1 + 1.0/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$$

- **求*A*到*B*的模糊关系*R*。**
- **解：**

$$R = A \times B = \mu_A^{\mathrm{T}} \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

1. 模糊关系

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 \wedge 0.7 & 1.0 \wedge 1.0 & 1.0 \wedge 0.6 & 1.0 \wedge 0.0 \\ 0.8 \wedge 0.7 & 0.8 \wedge 1.0 & 0.8 \wedge 0.6 & 0.8 \wedge 0.0 \\ 0.5 \wedge 0.7 & 0.5 \wedge 1.0 & 0.5 \wedge 0.6 & 0.5 \wedge 0.0 \\ 0.2 \wedge 0.7 & 0.2 \wedge 1.0 & 0.2 \wedge 0.6 & 0.2 \wedge 0.0 \\ 0.0 \wedge 0.7 & 0.0 \wedge 1.0 & 0.0 \wedge 0.6 & 0.0 \wedge 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

2. 模糊关系的合成

- 设 ***Q***：***U***到***V***的模糊关系，***R***：***V***到***W***的模糊关系，

则***Q***与***R***的合成 $Q \circ R$ 为***U***到***W***的一个模糊关系，其隶属函数：

$$\mu_{Q \circ R}(u,w) = \bigvee_{v \in V} (\mu_Q(u,v) \wedge \mu_R(v,w))$$

- 设 $Q=(q_{ij})_{n\times m}$，$R=(r_{jk})_{m\times l}$，$S=(s_{ik})_{n\times l}$

则

$$S_{ik} = \bigvee_{j=1}^{m} (q_{ij} \wedge r_{jk})$$

2. 模糊关系的合成

- **例9** 设模糊集合 $X=\{x_1,x_2x_3,x_4\},Y=\{y_1,y_2,y_3\},Z=\{z_1,z_2\}$

$Q\in X\times Y,R\in Y\times Z,S\in X\times Z,$求$S$。

$$Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.3\\ 0.7 & 0.4 & 1\\ 0 & 0.8 & 0\\ 1 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0.8 & 0.4\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

4.6.4 模糊关系与模糊关系的合成

2. 模糊关系的合成

- **解：**

$$S = Q \circ R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.5\wedge 0.2)\vee(0.6\wedge 0.8)\vee(0.3\wedge 0.5) & (0.5\wedge 1)\vee(0.6\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.3) \\ (0.7\wedge 0.2)\vee(0.4\wedge 0.8)\vee(1\wedge 0.5) & (0.7\wedge 1)\vee(0.4\wedge 0.4)\vee(1\wedge 0.3) \\ (0\wedge 0.2)\vee(0.8\wedge 0.8)\vee(0\wedge 0.5) & (0\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.4)\vee(0\wedge 0.3) \\ (1\wedge 0.2)\vee(0.2\wedge 0.8)\vee(0.9\wedge 0.5) & (1\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.4)\vee(0.9\wedge 0.3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6.5 模糊推理

1. 模糊知识表示

- 人类思维判断的基本形式：

如果 （条件） → 则 （结论）

- 例如：如果 压力较高且温度在慢慢上升 则 阀门略开

- 模糊规则：从条件论域到结论论域的模糊关系矩阵 ***R***。通过条件模糊向量与模糊关系 ***R*** 的合成进行模糊推理，得到结论的模糊向量，然后采用“清晰化”方法将模糊结论转换为精确量。

4.6.5 模糊推理

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- 若已知输入为 *A*，则输出为 *B*；若现在已知输入为 A'，则输出 B' 用合成规则求取 $B' = A' \circ R$

其中模糊关系*R*：$\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

- 控制规则库的*N* 条规则有*N* 个模糊关系：$R_1, R_2, \ldots, R_n$

对于整个系统的全部控制规则所对应的模糊关系*R*：

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- **例10** 已知输入的模糊集合***A***和输出的模糊集合***B***：

$$A = 1.0/a_1 + 0.8/a_2 + 0.5/a_3 + 0.2/a_4 + 0.0/a_5$$

$$B = 0.7/b_1 + 1.0/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$$

- 前面已经求得模糊关系为：

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- 当输入： $A' = 0.4/a_1 + 0.7/a_2 + 1.0/a_3 + 0.6/a_4 + 0.0/a_5$

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = (0.7, 0.7, 0.6, 0.0)$$

则： $B' = 0.7/b_1 + 0.7/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$

4.6.5 模糊推理

3. 对 IF x is A and $\cdots$ and y is B THEN z is C 类型的模糊规则的推理

- **MIMO系统，专家知识的一般形式：**

$$R = \{R_{MIMO}^{1}, R_{MIMO}^{2}, \ldots, R_{MIMO}^{N}\}$$

$$R_{MIMO}^{i}: if \quad (x \quad is \quad A_i \quad and \ldots and \quad y \quad is \quad B_i) \quad then \quad (z_1 \quad is \quad C_i, \ldots, z_q \quad is \quad D_i)$$

$$R_{MISO}^{1}: (x \quad is \quad A_i \quad and \ldots and \quad y \quad is \quad B_i) \quad then \quad (z_1 \quad is \quad C_i)$$

$$\vdots$$

$$R_{MISO}^{q}: (x \quad is \quad A_i \quad and \ldots and \quad y \quad is \quad B_i) \quad then \quad (z_q \quad is \quad D_i)$$

3. 对 IF x is A and ⋯ and y is B THEN z is C 类型的模糊规则的推理

- 两个输入一个输出的模糊系统：

$$
\begin{aligned}
& R_1: if \quad x \ is \ A_1 \quad and \quad y \ is \ B_1 \quad then \quad z \ is \ C_1 \\
\text{also} \quad & R_2: if \quad x \ is \ A_2 \quad and \quad y \ is \ B_2 \quad then \quad z \ is \ C_2 \\
& \vdots \\
\text{also} \quad & R_n: if \quad x \ is \ A_n \quad and \quad y \ is \ B_n \quad then \quad z \ is \ C_n
\end{aligned}
$$

- 输入：$x \ is \ A' \quad and \quad y \ is \ B'$
- 输出：$z \ is \ C'$

4.6.5 模糊推理

3. 对 IF x is A and … and y is B THEN z is C 类型的模糊规则的推理

- 模糊控制规则 “$if \;\; x \;\; is \;\; A_i \;\; and \;\; y \;\; is \;\; B_i \;\; then \;\; z \;\; is \;\; C_i$”

其模糊蕴含关系： $R_i = (A_i \;\; and \;\; B_i) \to C_i$

$$\mu_{R_i} = [\mu_{A_i}(x) \quad \text{and} \quad \mu_{B_i}(y)] \to \mu_{C_i}(z)$$

- n 条模糊控制规则的总的模糊蕴含关系：

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

- 推理的结论：$C' = (A' \;\; and \;\; B') \circ R$

$$\mu_{(A' \text{and} B')}(x, y) = \mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)$$

3. 对 IF x is A and … and y is B THEN z is C 类型的模糊规则的推理

- 例11　已知双输入单输出的模糊系统的输入量为 x和 y，输出量为 z，其输入输出关系如模糊规则描述：

$$R_1: if \quad x \ is \ A_1 \quad and \quad y \ is \ B_1 \quad then \quad z \ is \ C_1$$

$$\text{also} \quad R_2: if \quad x \ is \ A_2 \quad and \quad y \ is \ B_2 \quad then \quad z \ is \ C_2$$

- 现已知 x is A' and y is B'，求输出量 z 。

3. 对 IF x is A and … and y is B THEN z is C 类型的模糊规则的推理

- 例 11（续）已知：

$$A_1 = \frac{1.0}{a_1} + \frac{0.5}{a_2} + \frac{0.0}{a_3} \qquad B_1 = \frac{1.0}{b_1} + \frac{0.6}{b_2} + \frac{0.2}{b_3} \qquad C_1 = \frac{1.0}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{0.0}{c_3}$$

$$A_2 = \frac{0.0}{a_1} + \frac{0.5}{a_2} + \frac{1.0}{a_3} \qquad B_2 = \frac{0.2}{b_1} + \frac{0.6}{b_2} + \frac{1.0}{b_3} \qquad C_2 = \frac{0.0}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{1.0}{c_3}$$

$$A' = \frac{0.5}{a_1} + \frac{1.0}{a_2} + \frac{0.5}{a_3} \qquad B' = \frac{0.6}{b_1} + \frac{1.0}{b_2} + \frac{0.6}{b_3}$$

解：（1）求每条规则的蕴含关系

$$A_1 and B_1 = A_1 \times B_1 = A_1^T \wedge B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_{A_1 \times B_1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = (A_1 and B_1) \to C_1 = \overline{R}_{A_1 \times B_1}^T \wedge C_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6.5 模糊推理

同样求得:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$$

4.6.5 模糊推理

（2）求总的模糊蕴含关系 *R*

$$R = R_1 \cup R_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$$

（3）计算输入量的模糊集合

$$A' and\ B' = A' \times B' = A'^{\mathrm{T}} \wedge B' = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.6 & 1.0 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 1.0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_{A' \times B'} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C' = (A' and B') \circ R = \overline{R}_{A' \times B'} \circ R$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

输出量的模糊集合： $C' = \frac{0.5}{c_1} + \frac{0.4}{c_2} + \frac{0.5}{c_3}$

4.6.6 模糊决策

□ "模糊决策"("模糊判决"、"解模糊"或"清晰化")：由模糊推理得到的结论或操作是一个模糊向量，转化为确定值的过程。

1. 最大隶属度法

- 例如，得到模糊向量：

$$U' = 0.5/-3 + 0.5/-2 + 0.5/-1 + 0.0/0 + 0.0/1 + 0.0/2 + 0.0/3$$

取结论：

$$U = \frac{-3-2-1}{3} = -2$$

2. 加权平均判决法

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i)}$$

- 例如 $U' = 0.1/2 + 0.6/3 + 0.5/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

则

$$U' = \frac{0.1 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.2 \times 6}{0.1 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.2} = 4$$

4.6.6 模糊决策

3. 中位数法

- 例如

$$U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.1/-2 + 0.0/-1 + 0.1/0 + 0.2/1 + 0.4/2 + 0.5/3 + 0.1/4$$

$$u^* = u_6\text{时，}\quad \sum_{u_1}^{u_6}\mu(u_i) = \sum_{u_7}^{u_9}\mu(u_i) = 1$$

所以中位数$u^* = u_6$，则$U = 1$

3. 中位数法

- 例如

$$U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.3/-2 + 0.1/-1 + 0.1/0 + 0.4/1 + 0.5/2 + 0.1/3 + 0.2/4$$

用线性插值处理，即 $\Delta u = 1.2/(1.1+1.2) = 0.522$

所以 $u^* = u_5 + \Delta u = 0.522$

4.6.7 模糊推理的应用

例12 设有模糊控制规则：

“如果温度低，则将风门开大”。设温度和风门开度的论域为{1，2，3，4，5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

“温度低”=1/1+0.6/2+0.3/3+0.0/4+0/5

“风门大” =0/1+0.0/2+0.3/3+0.6/4+1/5

已知事实“温度较低”，可以表示为

“温度较低”=0.8/1+1/2+0.6/3+0.3/4+0/5

试用模糊推理确定风门开度。

- **解：（1）确定模糊关系 *R***

$$R=\begin{bmatrix}1.0\\0.6\\0.3\\0.0\\0.0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

4.6.7 模糊推理的应用

- 解:

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$=(0.0，0.0，0.3，0.6，0.8)$$

（3）模糊决策

用最大隶属度法进行决策得风门开度为5。
用加权平均判决法和中位数法进行决策得风门开度为4。

第4章 不确定性推理方法

- 4.1 不确定性推理的基本概念
- 4.2 概率方法
- 4.3 主观Bayes方法
- 4.4 可信度方法
- 4.5 证据理论
- 4.6 模糊推理方法

THE END