# 항공 유한 요소법

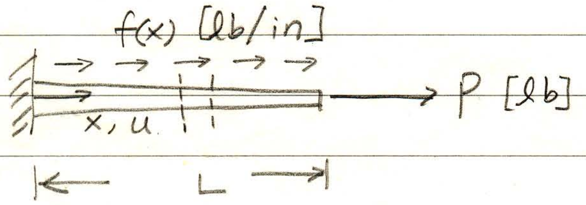
구조 역학 문제는 수학적으로 두 가지 방법으로 표시

(1) 미분 방정식 – 힘 평형

(2) 적분 방정식 – 에너지 평형

## Chap 1 미분 방정식

(1) 1-d bar prob.

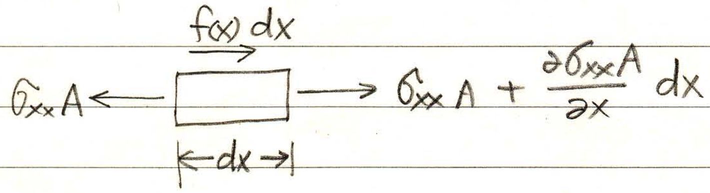



$f(x)$ = 단위길이 당 분포하중

$A(x)$ = 단면적

$P$ = $(x=L)$에 작용하는 집중하중

bar의 한 부분을 잘라보면




$\sigma_{xx}$ = axial stress

힘 평형식

$$\left(\sigma_{xx}A + \frac{\partial \sigma_{xx}A}{\partial x}dx\right) - \sigma_{xx}A + f(x)dx = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}A}{\partial x} + f(x) = 0$$

한편 stress - strain - displacement relation 에서

$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx} = E\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad \varepsilon_{xx}$ = axial strain

$u$ = axial displacement

$E$ = Young's Modulus

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x) = 0 \qquad \text{미분 방정식} \qquad (1)$$

경계조건 at $x=0$ $\quad u=0$ $\qquad$ ( geometric BC)

at $x=L$ $\quad \sigma_{xx}A = EA\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$ ( force BC )

if $E, A$ = const , 식 (1) 에서

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) = 0.$$

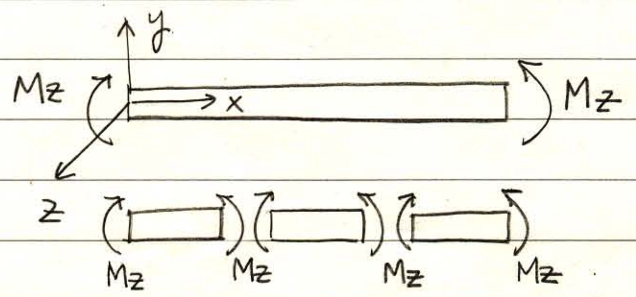
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{EA}\int f(x)\,dx + C_1$$

$$u = -\frac{1}{EA}\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2$$

2개의 경계조건을 이용하여 $C_1$ , $C_2$ 결정

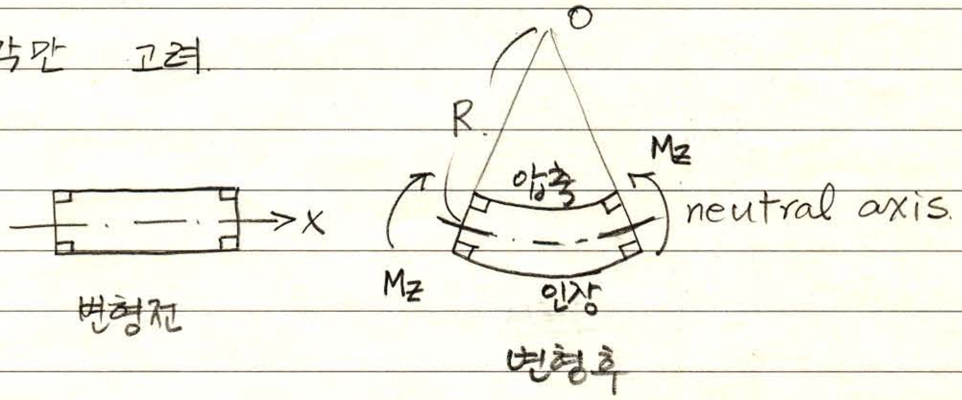
(2) pure beam bending prob.

pure bending = bending moment 만 작용.
no tension, no torsion.




모멘트는 길이 방향으로 일정.
beam의 모든 단면에서 모멘트 일정.

한 조각만 고려.

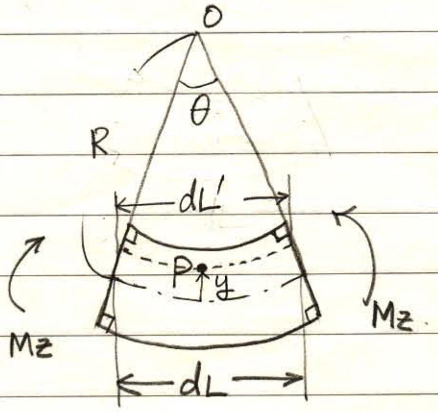



pure bending에서 neutral axis를 따라 길이 불변
$\varepsilon_{xx} = 0$.

윗면과 아래면에서 strain은 크기 같고 부호 반대.

윗면과 아래면은 점 O를 중심으로 하는 동심원으로 변형.

neutral axis 에서 $y$ 만큼 떨어진 P 점의 strain



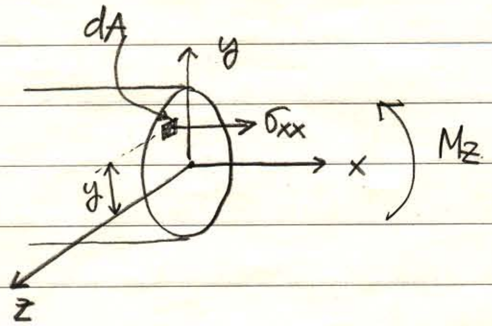

$$dL = R\theta$$

$$dL' = (R-y)\,\theta$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dL' - dL}{dL} = -\frac{y}{R} \qquad (2)$$

(Note) pure bending 에서 $\varepsilon_{xx}$ (or $\sigma_{xx}$)는 $y$축을 따라 선형 변화.

양 단면에 걸리는 $M_z$ 와 $\varepsilon_{xx}$ 의 관계는.




$$M_z = -\int_A \sigma_{xx}\, y\, dA = -\int_A E\,\varepsilon_{xx}\, y\, dA$$

$$= \int_A \frac{E y^2}{R}\, dA \qquad (3)$$

Isotropic 재료에서 $E$ = constant

pure bending 에서 $R$ = constant

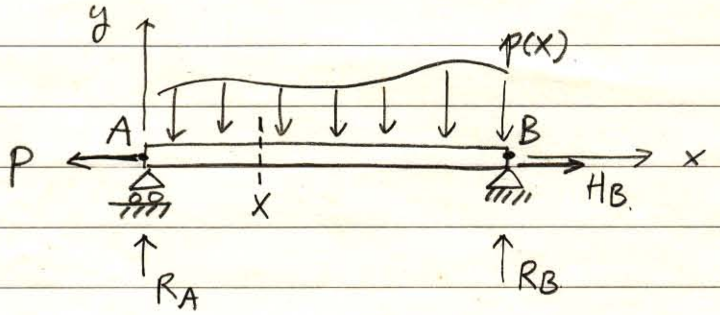
$$M_z = \frac{E}{R}\int y^2 dA = \frac{E I_{zz}}{R} = E I_{zz}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$I_{zz} = \int y^2\, dA = \text{moment of inertia}$$

(3) Beam under transverse forces.

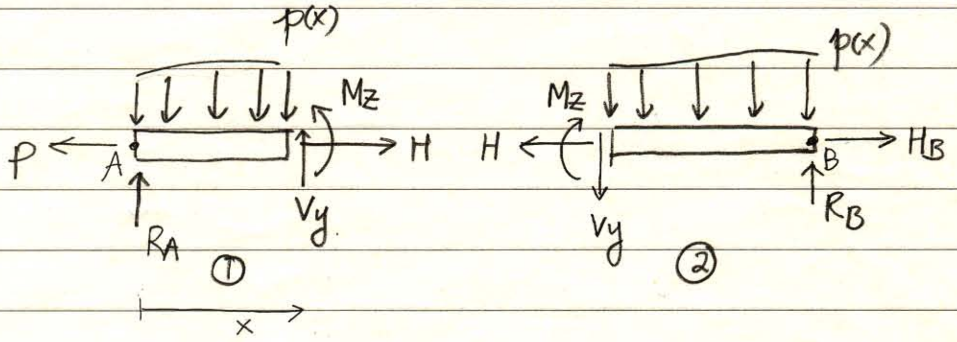
(a) Shear, Axial force & Bending moment.

S-S beam under 분포하중 & 집중하중.




힘 평형, 모멘트 평형으로 $R_A$, $R_B$, $H_B$ 계산

beam이 평형상태에 있을 때 두 부분으로 나누면
(자유도 or free body diagram)




$V_y$ = shear force (positive x-surface 에서 +y 방향이 +ve $V_y$)

$M_y$ = bending moment (윗면 압축 +ve $M_z$)

$H$ = axial force ( +ve surf 에서 +x 방향이 +ve H )

If 반력 $R_A$, $R_B$, $H_B$ are known,

① 자유도 에서

$$\Sigma F_x = -P + H = 0 \qquad H = P$$

$$\Sigma F_y = V_y + R_A - \int_0^x p(x)\,dx = 0$$

$$V_y = -R_A + \int_0^x p(x)\,dx$$

$$\Sigma M_A = M_z - \int_0^x p(x)\,x\,dx + V_y x = 0$$

$$M_z = \int_0^x p(x)\,x\,dx - V_y x$$

② 자유도에서

$$\Sigma F_x = -H + H_B = 0 \qquad H = H_B$$

$$\Sigma F_y = -V_y + R_B - \int_x^L p(x)\,dx = 0$$

$$V_y = R_B - \int_x^L p(x)\,dx$$

$$\Sigma M_B = -M_z + V_y(L-x) + \int_x^L p(x)(L-x)\,dx = 0$$

$$M_z = V_y(L-x) + \int_x^L p(x)(L-x)\,dx$$

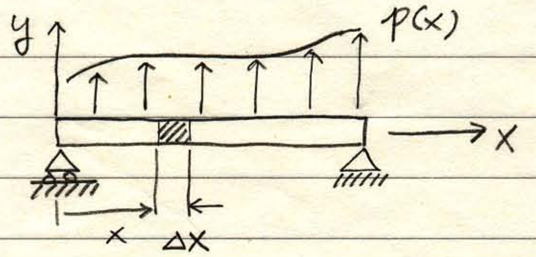
① 자유도 or ② 자유도에서 단면 force or 모멘트 $H$, $V_y$, $M_z$ 계산 가능

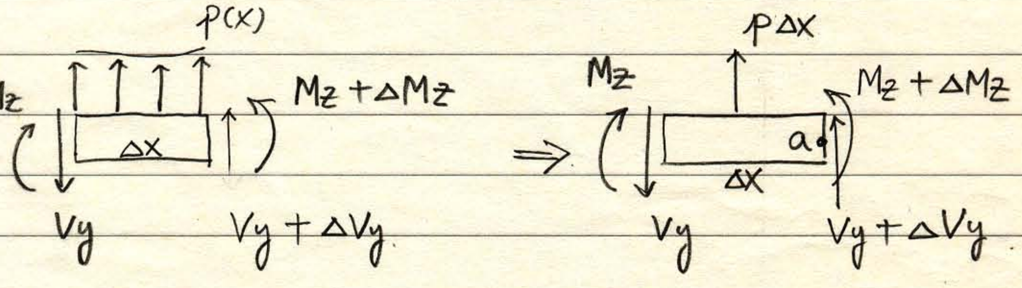
$H$, $V_y$, $M_z$ 를 알면 각 단면 stress 계산

(b) Differential equation for equilibrium

° 앞 section 에서는 구조물을 두부분으로 나누고 한 부분에 힘 평형식, 모멘트 평형식 적용 → 단면 shear force, 모멘트 계산

° 여기서는 구조물의 일부를 잘라내어 힘과 모멘트 평형식 적용 → 미분 방정식 유도




힘 평형

$$\Sigma F_y = -V_y + (V_y + \Delta V_y) + p\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V_y = -p\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta x} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = -p \qquad (5)$$

모멘트 평형.

$$\Sigma M_a = -M_z + V_y \Delta x - p \Delta x \left(\frac{1}{2}\Delta x\right) + M_z + \Delta M_z = 0$$

$$\Delta M_z = -V_y \Delta x + p\left(\frac{1}{2}\Delta x^2\right)$$

HOT.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M_z}{\Delta x} = \frac{\partial M_z}{\partial x} = -V_y + \cancel{\frac{1}{2} p \Delta x} \qquad (6)$$

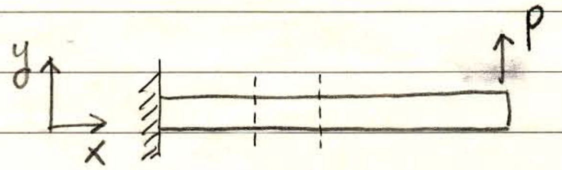
식 (5) & (6) 에서

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} = p \qquad (7).$$

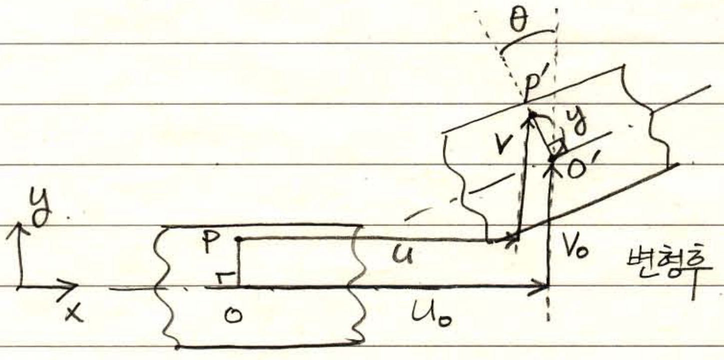
## (4) Bernoulli - Euler beam theory

B-E beam 에서 transverse shear strain 무시

if not, Timoshenko beam theory




beam의 한 부분을 잘라 생각하면




변형전

p 점이 p' 점으로 변형할 때

$$u = u_0(x) - y\theta$$

$$v = v_0(x) \qquad (8)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \cdot (6)$$ (∵ B-E beam 에서 shear strain 무시)

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\therefore \quad u = u_0(x) - y \dfrac{\partial v(x)}{\partial x}$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (9)$$

$$= \varepsilon_0 - y\kappa$$

여기서 $u_0$ = neutral axis 의 변위

$\varepsilon_0$ = neutral axis 의 strain.

$\kappa$ = curvature (곡률) $= \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{1}{R}$

if no axial force, neutral axis는 불변.

$u_0 = 0 \quad \& \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0.$

from 식(4), $\quad M_z = \dfrac{EI_{zz}}{R}$

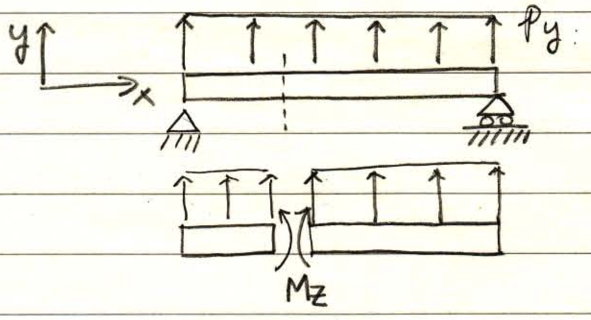
$$\therefore \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \qquad (10)$$

$$= \frac{M_z}{EI_{zz}}$$

(Note) if beam axis를 따라 $M_z$ = const (pure bending)

변위 $v$ 는 $x$의 2차 함수

if 분포 하중이 작용하면.




from 식(7), $\dfrac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} = p_y$ (11)

(10) & (11) 에서

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[ EI_{zz} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = p_y$$

If 축방향 (x)을 따라 단면 형상과 크기가 같고 ($I_{zz}$ = const),

등방성이면 ( E = const).

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = \frac{p_y}{EI_{zz}} \qquad (12)$$

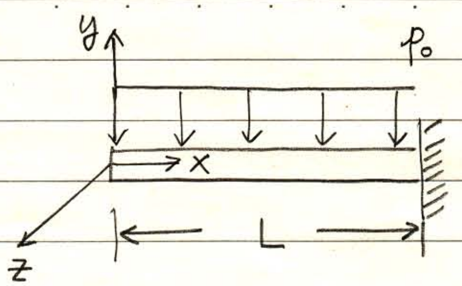
(Note) 일정 분포하중 문제에서 변위 V는 X의 4차식

집중하중 $V \sim x^3$

pure bending $V \sim x^2$

(참고) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{M_z}{EI_{zz}}$ (10)

(예제)




E, I

식 (12) 에서

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{p_0}{EI}$$

4번 적분 & 경계조건 부과

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -\frac{p_0}{EI}\left[x + C_1\right] \quad \sim \text{shear force}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{p_0}{EI}\left[\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right] \quad \sim \text{moment}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{p_0}{EI}\left[\frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\right] \quad \sim \text{slope}$$

$$v = -\frac{p_0}{EI}\left[\frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4\right] \quad \sim \text{변위}$$

경계조건

at $x = 0$ shear force $V = 0$ $\longrightarrow$ $C_1 = 0$

$x = 0$ bending moment $M = 0$ $\longrightarrow$ $C_2 = 0$

at $x = L$ slope $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{p_0}{EI}\left[\frac{L^3}{6} + C_3\right] = 0$

$x = L$ 변위 $v = -\frac{p_0}{EI}\left[\frac{L^4}{24} + C_3 L + C_4\right] = 0$

$$\therefore\ V = -\frac{p_o}{EI}\left[\frac{X^4}{24} - \frac{L^3}{6}X + \frac{L^4}{8}\right]$$

(Note) 4차 미분식을 푸는 대신, 분포하중에 의한

단면 모멘트를 계산하여 식(10) 2차 미분식에서

시작해도 O.K.

$$M_z = -\int_0^x p_o x\,dx = -\frac{1}{2}p_o x^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{M_z}{EI_{zz}} = -\frac{p_o}{EI_{zz}}\frac{X^2}{2}$$

(NOTE) $p \underset{\text{미분}}{\overset{\text{적분}}{\rightleftarrows}} V_y \rightleftarrows M_z \rightleftarrows \text{slope} \rightleftarrows \text{변위}$