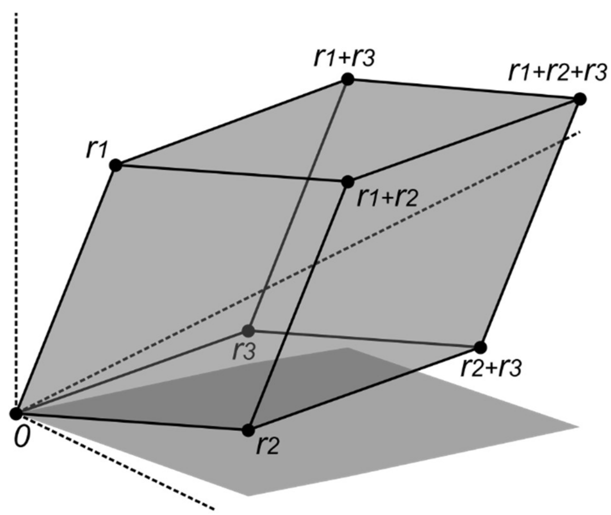
আমার ইশকুল

ক্লাস ২

নির্ণায়ক



ইন্সট্রাক্টর

কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ,
ইলেকট্রিক্যাল এন্ড ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ,
শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট।
Email: cast.shariat@gmail.com

Definition 2.1

Transpose of a Matrix: The transpose of a matrix is found by interchanging its rows into columns or columns into rows. If A is a matrix of order $\mathrm{i} \times \mathrm{j}$ then the transpose of A or $\mathrm{A^T}$ will have the order $\mathrm{j} \times \mathrm{i}$.

If

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_j \\ b_1 & b_2 & \dots & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_1 & i_2 & \dots & i_j \end{pmatrix}$$

Then

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & i_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_j & b_j & \dots & i_j \end{pmatrix}$$

(ক) নিচের ম্যাট্রিক্সগুলোর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বের করো –

i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

ii. $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 11 & -15 & -13 \end{pmatrix}$

(খ) যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ হয় তাহলে $A - A^T$ এর মান কত?

(গ) যদি $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ হয় তাহলে $\phi\phi^T$ এর মান কত?

(ঘ) যদি A ও B দুইটি ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে প্রমাণ করো যে –

i. $(A + B)^T = A^T + B^T$

ii. $(AB)^T = B^T A^T$

§ Determinants

ম্যাট্রিক্সের [ ] বা () চিহ্ন সরিয়ে | | চিহ্ন দিলে ঐ গঠনটিকে আর ম্যাট্রিক্স বলা হয় না, বরং নির্ণায়ক (Determinant) বলা হয়। আর নির্ণায়ক কেবল বর্গাকারেরই হয়।

Definition 2.2

Determinant of a 2×2 Square Matrix: If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ then the determinant of A or

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Definition 2.3

Singular Matrix: If the determinant of the matrix is 0 then the matrix is called singular matrix.

যেমন এই ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যাতিক্রমি ম্যাট্রিক্স $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ কারন –

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 6 = 0$$

(ক) λ এর মান কত হলে নিচের ম্যাট্রিক্সটি ব্যাতিক্রমি হবে –

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 6 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

(খ) যদি $1 + \omega + \omega^2 = 0$ হয় তাহলে নিচের ম্যাট্রিক্সটি কি ব্যাতিক্রমী ম্যাট্রিক্স?

$$\begin{pmatrix} 1 + \omega & -1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$$

Definition 2.4

Cofactor: Suppose we have a 3×3 matrix A and we want to determine the cofactor of x_4 element.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

Then the cofactor will be

$$(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

Algorithm:

Step 1: First define the position of the element, i.e., row number, column number. Then the sign of the cofactor will be

$$(-1)^{\text{row+colum}}$$

Step 2: Remove the row and column in which the element is situated and take the determinant of 2×2 matrix with all the other elements. For example, for the element x_4 the result will be,

$$A' = \begin{pmatrix} & x_2 & x_3 \\ & & \\ & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

$$|\,A'\,| = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

Step 3: Now put the values from Step 1 and Step 2 together and you will get the co factor of the required element. (x_4 has the row value 2 and column value 1)

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(ক) উপরের ম্যাট্রিক্সটির প্রতিটি ইলিমেন্টের সহগুণক (Cofactor) বের কর। যেমন 3 হচ্ছে 1,1 তম ইলিমেন্ট। তাহলে এর সহগুণক হবে –

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 54 = 29$$

(খ) উপরের ম্যাথে নয়টি সহগুণক বের হবে। সেই সহগুণকগুলোকে তাদের যথাস্থানে সাজিয়ে ট্রান্সপোজ করে একটি ম্যাট্রিক্স গঠন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে বলা হয় Adjoint matrix। মূল ম্যাট্রিক্সটি যদি A হয় আর এর সহগুণকগুলো যদি C_{11}, C_{12}, ... C_{33} হয় তাহলে এর Adjoint matrix হবে –

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

উপরের ম্যাট্রিক্সটির অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বের করো।

Algorithm to determine the Determinant of a 3×3 matrix

Suppose A is a 3×3 matrix:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

Then the determinant of A:

$$|A| = x_1\,|C_{x1}| + x_2\,|C_{x2}| + x_3\,|C_{x3}|$$

$$|A| = x_1(x_5x_9 - x_6x_8) - x_2(x_4x_9 - x_6x_7) + x_3(x_4x_8 - x_5x_7)$$

For example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

তাহলে এর নির্ণায়কের মান হবে –

$$|A| = 1(2 \times 5 - 0 \times 5) - 3(8 \times 5 - 0 \times 0) + 0(8 \times 5 - 0 \times 0) = 10 - 120 = -110$$

Sarrus' Law: If A is a 3×3 matrix, then we can calculate the determinant of the matrix by rewriting the first two columns at the end and then multiply diagonally and then subtract the reversely arranged multiplications.

If

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Then

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1(-1)1 + (-1)8(-3) + 3 \times 2 \times 3 - (-3)(-1)3 - 3 \times 8 \times 1 - 1 \times 2(-1)$$
$$= -1 + 24 + 18 - 9 - 24 + 2 = 10$$

Theorem 2.1
If A is a square matrix of order n and λ is a scalar quantity then

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

Theorem 2.2
If A is a square matrix, then

$$|A^T| = |A|$$

Theorem 2.3
If A is a square matrix, then

$$|AB| = |A||B|$$

Prove Theorem 2.1, 2.2 and 2.3

Definition 2.5
Inverse matrix: If A is a non-singular matrix, then the inverse matrix of A is defined as:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

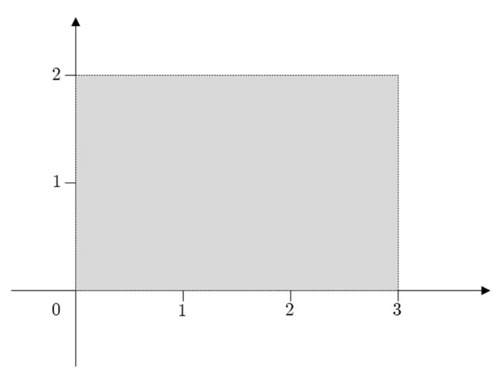
(ক) উপরের ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(গ) দুইটি ম্যাট্রিক্স A, B হলে সাধারণত $AB \neq BA$। তবে কোন নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে $AB = BA$ হবে তা বের করো।

§ Geometrical Interpretation of Determinants

ধরেন আপনার কাছে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুইটা বিন্দু আছে (3,0) আর (0,2) I এই দুইটি বিন্দুকে যদি আমি ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দেখাতে চাই তাহলে লিখব এভাবে - $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$। এই ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক কী বুঝাবে তাহলে? নির্ণায়ক বুঝাবে যে, এই দুই বিন্দুকে মূলবিন্দুর সাথে যুক্ত করলে দুইটি রেখা পাওয়া যাবে। এই দুই রেখাকে সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিক আঁকলে যে ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে, তা হচ্ছে নির্নায়কের মান। আমরা যদি চিত্র থেকে লক্ষ্য করি -



এই সামান্তরিকটির দৈর্ঘ্য হচ্ছে 3 একক আর উচ্চতা হচ্ছে 2 একক। তাহলে এর ক্ষেত্রফল হবে $3 \times 2 = 6$

আমরা যদি এর নির্ণায়কের মান বের করি তাহলে দেখতে পাবো,
$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

অর্থাৎ, ক্ষেত্রফল আর নির্ণায়কের মান সমান। মজার ব্যাপার হচ্ছে, আমরা কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেভাবে ক্ষেত্রফল বের করলাম সেভাবে চাইলে ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় আয়তনও বের করা সম্ভব। তবে জ্যামিতি দিয়ে বের করতে চাইলে সেটি অনেক জটিল হয়ে যায়। ধরো তোমার কাছে তিনটি বিন্দু দেওয়া আছে (3,0,0), (0,1,0), (0,0,4)। তাহলে এদেরকে সন্নিহিত বাহুর শীর্ষবিন্দু ধরে একটি ত্রিমাত্রিক গঠন আঁকলে যে আয়তন পাওয়া যাবে তা হবে -

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$