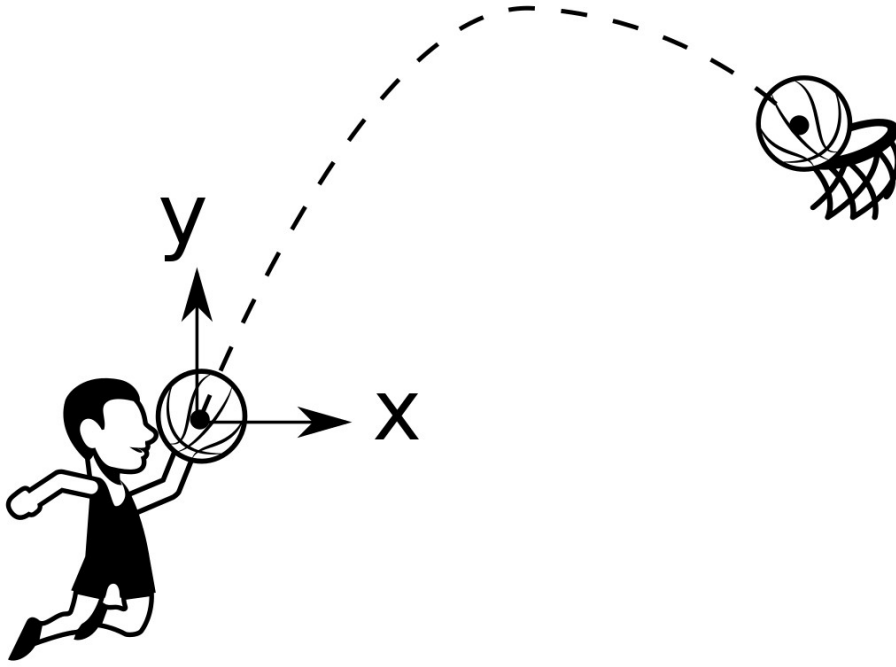


# আমার ইশকুল

ক্লাস ১৬

দ্বিমাত্রিক গতিবিদ্যা



ইনস্ট্রাক্টর

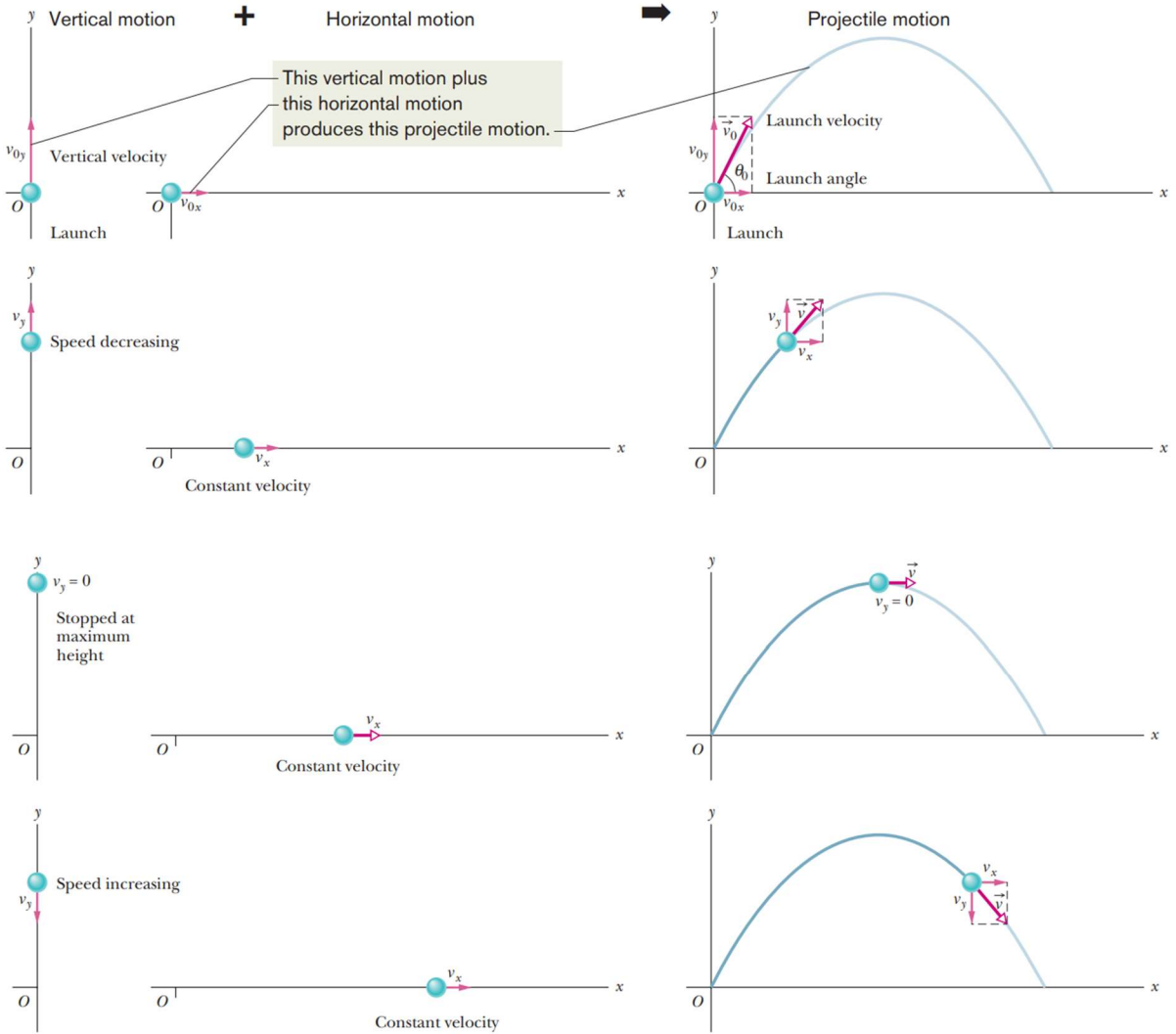
কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ,  
ইলেকট্রিক্যাল এন্ড ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ,  
শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট।

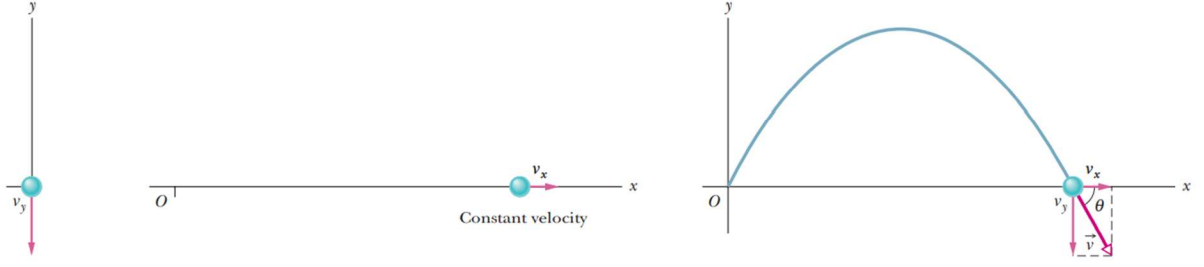
Email: [cast.shariat@gmail.com](mailto:cast.shariat@gmail.com)

দ্বিমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে আমরা ধরে নিব বস্তুটির গতি  $xy$  সমতল বরাবর হচ্ছে। যেহেতু এটি দ্বিমাত্রিক গতির উদাহরণ তাই এখানে সবধরনের রাশি দুইটি আলাদা আলাদা উপাংশে ভাগ হয়ে যাবে।  $x$  অক্ষ বরাবর একটি উপাংশ থাকবে এবং  $y$  অক্ষ বরাবর আরেকটি উপাংশ থাকবে। সেক্ষেত্রে গতির সূত্রগুলোকেও দুইটি আলাদা আলাদা উপাংশে ভাগ করে ফেলা লাগে।

## প্রাস

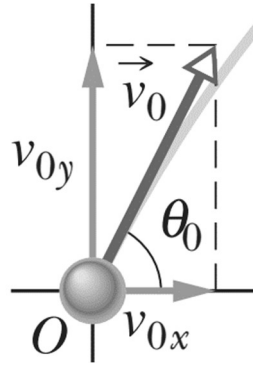
অভিকর্ষের প্রভাবে শূন্য স্থানে ভূমির সাথে তীর্যকভাবে একটি নির্দিষ্ট কোণে নিষ্ক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথকে প্রাসের গতিপথ বলে। যেমন ধরুন, ক্রিকেট খেলার সময় ছক্কা মারা হলে বলটি কিছুটা সামনে যায় এবং কিছুটা উপরে উঠে। এখানে বলটির গতি দ্বি মাত্রিক। আর বলটির গতিপথকে এক্ষেত্রে আমরা প্রাসের গতিপথ বলব।





চিত্র ১৬.১ – প্রাসের গতিপথের নানা অবস্থা। সূত্র – Fundamentals of Physics by HRK

ধরি একটি বস্তুকে  $v_0$  আদিবেগে  $\theta_0$  কোণে ভূমির সাথে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। খেয়াল করার মত বিষয় হচ্ছে এখানে  $x$  অক্ষ বরাবর কোনো ত্বরণ নেই তবে  $y$  অক্ষ বরাবর অভিকর্ষজ ত্বরণ  $g$  কাজ করছে। এই অভিকর্ষজ ত্বরণের কারণেই উপরের দিকে যে বেগ কাজ করছে তা কমা শুরু করবে। যত উপরে উঠবে বস্তুর বেগ  $v_0$  থেকে কমা শুরু করবে। কমতে কমতে একসময় বেগ শূন্য হয়ে যাবে। যখন বেগ শূন্য হয়ে যাবে তখন বস্তুটি আর উপরে উঠবে না। ফলে তা আবার নিচে নামা শুরু করবে। নিচে নামার সময় বেগ শূন্য থেকে আন্তে আন্তে বৃদ্ধি পেতে থাকবে। যখন বস্তুটি ভূমিকে আঘাত করবে তখন আবার  $v_0$  বেগেই আঘাত করবে।



প্রাথমিক অবস্থাটি খেয়াল করি যেসময় বস্তুটিকে নিক্ষেপ করা হয়েছে তখন  $v_0$  আদিবেগে বস্তুটিকে ছুড়ে মারা হয়েছে। এখন এটি যেহেতু দ্বিমাত্রিক একটি গতি তার এর দুইটি উপাংশ থাকবে। একটি  $x$  অক্ষ বরাবর। আরেকটি  $y$  অক্ষ বরাবর। ধরি  $x$  অক্ষ আদিবেগের উপাংশ  $v_{0x}$  আর  $y$  অক্ষ বরাবর আদিবেগের উপাংশ  $v_{0y}$

উপাংশের সূত্র হতে আমরা পাই –

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

$t$  সময় পর বস্তুটির বেগ কিন্তু আর  $v_0$  থাকবে না। যেহেতু এখানে অভিকর্ষজ ত্বরণ কাজ করছে।  $x$  অক্ষ বরাবর কোনো ত্বরণ নেই, অভিকর্ষজ ত্বরণটি কাজ করছে  $y$  অক্ষ বরাবর। তাই  $t$  সময় পর বস্তুটির বেগের উপর যে প্রভাব পড়বে তাও হচ্ছে  $y$  অক্ষ বরাবর বেগের। করছে।  $x$  অক্ষ বরাবর কোনো ত্বরণ নেই বলে করছে।  $x$  অক্ষ বরাবর বেগের কোনো পরিবর্তন হবে না।

$t$  সময় পর  $x$  অক্ষ বরাবর বেগ

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + a_x t \\ \text{কিন্তু } a_x &= 0 \\ v_x &= v_0 \cos \theta_0\end{aligned}$$

$t$  সময় পর  $y$  অক্ষ বরাবর বেগ

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} + a_y t \\ \text{কিন্তু } a_y &= -g \\ v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt\end{aligned}$$

$$t \text{ সময় পর লব্ধি বেগ } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\text{বেগের দিক } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{v_y}{v_x} \right)$$

$x$  অক্ষ ও  $y$  অক্ষ বরাবর বেগের উপাংশগুলোকে সমাকলন করলেই আমরা দূরত্বের সূত্র পেয়ে যাব।

$$x = v_0 \cos \theta_0 t$$

$$y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

এখন আমরা যদি  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$  এর মান  $y$  এর সমীকরণে বসাই তাহলে পাই -

$$y = v_0 \sin \theta_0 \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2 = \tan \theta_0 x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$y = ax - bx^2$  আকারের একটি সমীকরণ এটি। এটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। প্রাসের গতিপথ মূলত একটি পরাবৃত্ত।

**উদাহরণ** একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30 ডিগ্রি কোণে  $30 \text{ ms}^{-1}$  বেগে কিক করা হলো। 1 সেকেন্ড পর ফুটবলের বেগের মান কত? এবং ফুটবলটি কোথায় অবস্থান করবে?

**উদাহরণ** আনুভূমিকের সাথে 30 ডিগ্রি কোণে ভূপৃষ্ঠ থেকে  $40 \text{ ms}^{-1}$  বেগে একটি বুলেট ছোড়া হলো। বুলেটটি 20 m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে?

প্রাসটি সর্বোচ্চ যেই উচ্চতায় উঠে সেই উচ্চতায় কোনো উলম্ব বেগ থাকে না। মানে  $v_y = 0$ । উলম্ব বেগ যতক্ষণ থাকবে তত উপরে উঠতে থাকবে। যত উপরে উঠতে থাকে উলম্ব বেগ তত কমতে থাকে। উলম্ব বেগ কমার কারণ অভিকর্ষজ ত্বরণ।

**পাল্লা** প্রাসের গতিতে নিষ্ক্ষেপের স্থান থেকে আনুভূমিকভাবে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে পাল্লা (Range) বলে।

$$\text{পাল্লা } R = \frac{v^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

যখন  $\theta_0 = 45^\circ$  হলে পাল্লার মান সর্বোচ্চ হয়

$$R_{max} = \frac{v^2}{g}$$

প্রাস যতক্ষণ আনুভূমিকে ফিরে না আসে সেই সময়কে বলা হয় উড্ডয়নকাল বা বিচরণকাল।

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

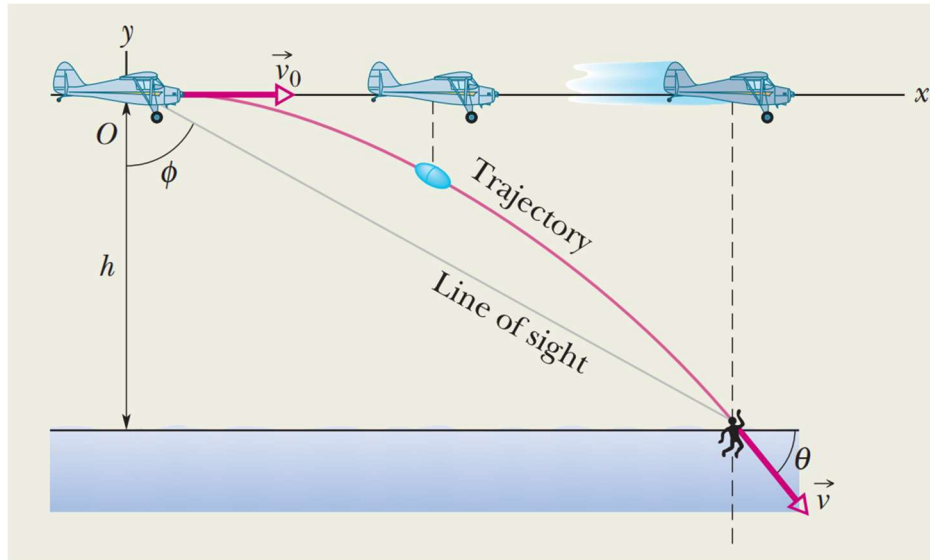
যাত্রা শুরু করার অর্ধেক পথ যেতে যেই সময় লাগে বা সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে যেই সময় লাগে সেই সময়

$$t = \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

সর্বোচ্চ উচ্চতা

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

**প্রশ্ন** একজন লোক পানিতে ডুবে যাচ্ছিল। ওই লোককে বাঁচানোর জন্য একটি উদ্ধারকারী বিমান ভূমি থেকে  $500\text{ m}$  উচ্চতায়  $55\text{ m/s}$  সমবেগে চলছে। লোক থেকে কত আনুভূমিক দূরত্বে থাকা অবস্থায় রেস্কিউ ক্যাপসুলটি ছাড়তে হবে বিমান থেকে নির্ণয় করুন।



একটি বিষয় এখানে খেয়াল করুন, এটিও একপ্রকার প্রাসের গতিপথ। শুধু ভিন্নতা হচ্ছে এখানে প্রাস ভূমি থেকে উৎক্ষেপিত না হয়ে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে উপর থেকে আনুভূমিক বরাবর ছেড়ে দেওয়া হয়েছে। এসব গতিকে আমরা আনুভূমিক দ্বিমাত্রিক গতি বলি। এসব ক্ষেত্রেও প্রাসের সব সূত্র খাটবে। শুধু  $\theta_0 = 0$  বসিয়ে দিলেই চলবে।

যেমন এখানে আমাদেরকে বের করতে বলা হয়েছে  $x$  এর মান। দেওয়া আছে ভূমি থেকে উচ্চতা  $y$ । খেয়াল করুন, এখানে যেহেতু ভূমি থেকে প্রাস উপরের দিকে আছে তাই এখানে আমরা  $y = -500 \text{ m}$  ধরব। আদিবেগ  $v_0 = 55 \text{ m/s}$ । তাহলে আমরা জানি,

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$-500 = x \tan 0 - 9.8 \times \frac{x^2}{2(55)^2 \cos^2 0}$$

$$-500 = -1.62 \times 10^{-3} x^2$$

$$x = 555.5 \text{ m}$$

অর্থাৎ লোকটি থেকে 555.5 m আনুভূমিক দূরত্বে লোকটিকে রেক্সিউ ক্যাপসুল ছুড়ে মারতে হবে। তাহলে ক্যাপসুলটি একদম লোকের কাছে যেয়ে পড়বে।

নোট - আমরা যদি প্রাসের সূত্রগুলোতে  $\theta_0 = 90^\circ$  বসালে উল্লম্বভাবে নিষ্ক্ষিপ্ত বস্তুর সূত্রগুলো পাওয়া যাবে।

## অনুশীলনী

[ক] একটি প্রাসের আনুভূমিক পাল্লা 96 m এবং আদিবেগ 60 m/s হলে নিষ্ক্ষেপণ কোণ কত?

[খ] কত কোণে নিষ্ক্ষেপ করলে একটি প্রাসের আনুভূমিক পাল্লা তার সর্বোচ্চ উচ্চতার সমান হবে?

[গ] সাইফ আর আবরার দুই বন্ধুর উচ্চতা যথাক্রমে 1.5 m ও 1.8 m। কলেজের বার্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় উভয়েই 10 m/s বেগে গোলক নিষ্ক্ষেপ করে। কিন্তু সাইফ আনুভূমিকের সাথে 40 ডিগ্রি কোণ করে গোলক নিষ্ক্ষেপ করলেও আবরার 45 ডিগ্রি কোণে নিষ্ক্ষেপ করে।

(১) ভূপৃষ্ঠ থেকে আবরারের নিষ্ক্ষেপ করা গোলকের সর্বাধিক উচ্চতা কত?

(২) সাইফ আর আবরারের মাঝে কে বিজয়ী হবে তা নির্ণয় করো।

[ঘ] একটি পাথরকে খাড়া উপরের দিকে 30 m/s বেগে নিষ্ক্ষেপ করা হলো। 5s পর এর বেগ ও উচ্চতা কত হবে?

[ঙ] কত বেগে একটি বুলেটকে খাড়া উপরের দিকে শ্যুট করলে তা 500 m উচ্চতায় উঠবে? ঐ উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে?

[চ] 125 m/s বেগে গতিশীল একটি বিমান বিধ্বংসী গোলা খাড়া উপরের দিকে নিষ্ক্ষেপ করা হলো। 600 m উচ্চতায় একটি বিমানকে তা কত বেগে আঘাত করবে?

[ছ] একটি প্রাসের আনুভূমিক পাল্লা 96 m এবং আদিবেগ 36 m/s হলে নিষ্ক্ষেপণ কোণ কত?

[জ] ভূমিতে বিস্ফোরিত একটি বোমার কণাগুলোর সর্বোচ্চ বেগ  $100 \text{ m/s}$ । ভূপৃষ্ঠে যে বৃত্তাকার অংশ জুড়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়বে তার ব্যাস নির্ণয় করো।

[ঝ] একটি কামানের গোলার সর্বোচ্চ আনুভূমিক পাল্লা  $6.5 \text{ km}$ । গোলার নিক্ষেপণ বেগ, সর্বোচ্চ উচ্চতা ও বিচরণকাল নির্ণয় করো।

[ঞ] একটি বলকে  $25 \text{ m/s}$  বেগে নিক্ষেপ করা হলে তা  $40 \text{ m}$  দূরে গিয়ে পড়ে। নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় করো।

[1] An airplane flying horizontally at a constant speed of  $350 \text{ km/h}$  over level ground releases a bundle of food supplies. Ignore the effect of the air on the bundle. What are the bundle's initial (a) vertical and (b) horizontal components of velocity? (c) What is its horizontal component of velocity just before hitting the ground? (d) If the airplane's speed were, instead,  $450 \text{ km/h}$ , would the time of fall be longer, shorter, or the same?

[2] While riding in a moving car, you toss an egg directly upward. Does the egg tend to land behind you, in front of you, or back in your hands if the car is (a) traveling at a constant speed, (b) increasing in speed, and (c) decreasing in speed?