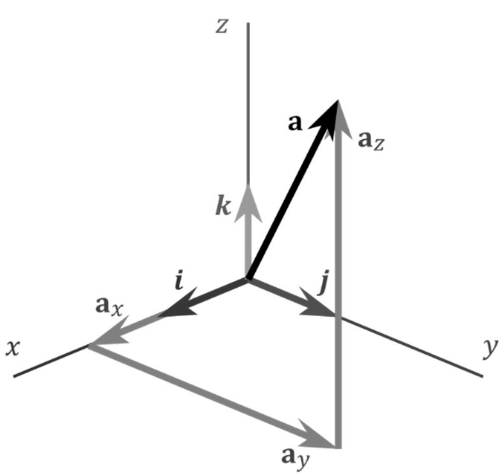
আমার ইশকুল

ক্লাস ৩

ভেক্টর



ইন্সট্রাক্টর

কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ,

ইলেকট্রিক্যাল এন্ড ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ,

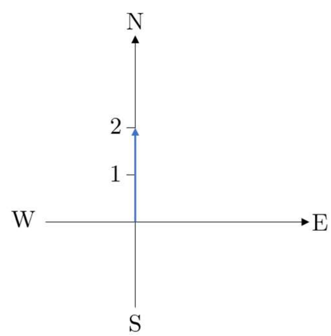
শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট।

Email: cast.shariat@gmail.com

How to Represent a Vector

আমরা জানি, মূলত দুই ধরনের রাশি হয়। (ক) স্কেলার বা অদিক রাশি (খ) ভেক্টর বা দিক রাশি। মূলত যেসব রাশিকে কেবল মানের মাধ্যমেই প্রকাশ করা ফেলা যায় তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে। আর যেসব রাশিকে প্রকাশ করতে মান এবং দিক উভয়েরই প্রয়োজন পড়ে তাকে বলে ভেক্টর রাশি। যেমন আমার দেহের তাপমাত্রা কত? ৯৮ ডিগ্রি সেলসিয়াস উত্তরে বলে দিলেই উত্তর হয়ে যায়। তাই তাপমাত্রা একটা স্কেলার রাশি। কিন্তু আমি যদি জিজ্ঞেস করি, সাস্ট কীভাবে যাবো? কেউ যদি উত্তরে বলে ২ কিলোমিটার দূরে যাও, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে সম্ভাব্য সকল ২ কিলোমিটার দূরে যেয়ে যেয়ে আমাকে দেখতে হবে সেখানে সাস্ট আছে কি না। এখানে বলে দিতে হবে যে ২ কিলোমিটার পূর্ব দিকের সাথে ২৫ ডিগ্রি কোণে যাও। তাহলে সাস্টে পৌঁছে যাবে। এখানে কেবলই মান (২ কিলোমিটার) বলে দেওয়া যথেষ্ট হচ্ছে না, দিকের (পূর্ব দিকের সাথে ২৫ ডিগ্রি) কথাও উল্লেখ করা জরুরি। তাই সরণ একটা ভেক্টর রাশি।

জ্যামিতিকভাবে আঁকার সময় একটি তীরচিহ্ন দিয়ে ভেক্টর আঁকা হয়। ধরো, তুমি তোমার বাসা থেকে উত্তর দিকে ২ কিলোমিটার গিয়েছ। তোমার বাসাকে যদি আমরা প্রসঙ্গবিন্দু ধরি তাহলে তোমার বাসা থেকে উত্তরদিকে ২ কিলোমিটার অতিক্রান্ত দূরত্বকে আমরা দেখাবো এভাবে –



এইযে বাসা থেকে ২ কিলোমিটার উত্তরে একে আমরা একটি তীর চিহ্ন দিয়ে দেখালাম, আমরা চাইলে একে একটা চিহ্ন দিয়েও প্রকাশ করতে পারি। ধরি এই ভেক্টরটার নাম দিলাম A। কিন্তু এই চিহ্নটা দেখে আমরা সরাসরি আন্দাজ করতে পারছি না এটা কোনো ভেক্টর না কি অন্যকিছু। ভেক্টরকে আলাদাভাবে শনাক্ত করতে আমরা তিনভাবে একে নোটিফাই করতে পারি –

(ক) $\vec{A}$ [চিহ্নের উপরে একটি তীরচিহ্ন দিয়ে]

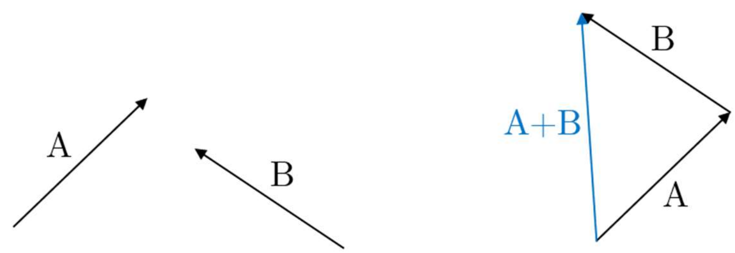
(খ) $\underline{A}$ [চিহ্নের নিচে একটি দাগ দিয়ে]

(গ) $\boldsymbol{A}$ [বোল্ড বা মোটা অক্ষরে লিখে]

বড় সাইজের তীরচিহ্ন মানে বড় কোনো মান রিপ্রেজেন্ট করছে, আর ছোট তীরচিহ্ন মানে ছোট কোনো মান রিপ্রেজেন্ট করছে। আচ্ছা, কারেন্টের তো একটা নির্দিষ্ট দিক আছে, আবার মানও আছে। একে কি একটি ভেক্টর রাশি বলা যায়? ভাবো তো।

How To Add/Subtract Vectors

ধরো তোমার কাছে দুইটি ভেক্টর আছে। এদেরকে যোগ করতে চাও। তাহলে তুমি কী করবে? মনে রাখো যে, একটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য (মান) ও কোণ (দিক) পরিবর্তন না করে এদেরকে তুমি যেকোনো জায়গায় সরিয়ে নিতে পারো তোমার সুবিধার জন্য। তো ধরো তোমার কাছে নিচের দুইটি ভেক্টর দেওয়া আছে। তুমি যোগ করতে চাও। তাহলে প্রথম ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে দ্বিতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু বসাতে হবে। এরপর প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু আর দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু বসালেই আমরা পেয়ে যাবো আমাদের যোগফল ভেক্টর।

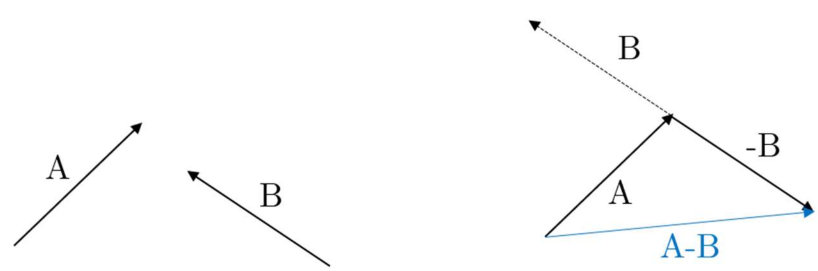


একটি ভেক্টর

আরেকটি ভেক্টর

একটির শীর্ষবিন্দুতে আরেকটির পাদবিন্দু বসালাম, এরপর প্রথমটির পাদবিন্দুর সাথে শেষের শীর্ষবিন্দু যোগ করলাম

যদি দুইটা ভেক্টর বিয়োগ করতে চাই, তাহলে যেই ভেক্টরের আগে মাইনার চিহ্ন আছে সেটাকে ১৮০ ডিগ্রি ঘুরিয়ে দিতে হবে। এরপর সেইম প্রসেসে আগালে যোগফল পাওয়া যাবে। যেমন –



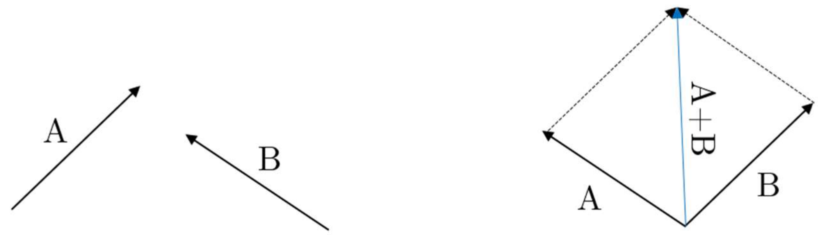
একটি ভেক্টর

আরেকটি ভেক্টর

দ্বিতীয় ভেক্টরটিকে ১৮০ ডিগ্রি ঘুরিয়ে চিহ্ন চেইঞ্জ করে নিলাম। এরপর একটির শীর্ষবিন্দুতে আরেকটির পাদবিন্দু বসালাম, এরপর প্রথমটির পাদবিন্দুর সাথে শেষের শীর্ষবিন্দু যোগ করলাম

এই একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর সাথে অপরটির পাদবিন্দু যোগ করে এরপর প্রথমটির পাদবিন্দু আর শেষেরটির শীর্ষবিন্দু যোগ করে যোগফল বের করাকে বলা হয় ত্রিভুজ সূত্র। তবে আমরা সাধারণত যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করি না। যোগের/বিয়োগের ক্ষেত্রে আমরা ব্যবহার করি সামান্তরিক সূত্র।

সামান্তরিক সূত্র : কোনো বিন্দুর উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায় তবে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল (লব্ধি) নির্দেশ করবে।



একটি ভেক্টর   আরেকটি ভেক্টর   ভেক্টর দুইটির পাদবিন্দু একসাথে যোগ করলাম। এরপর এদেরকে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিক আঁকলাম। সামান্তরিকটির কর্ণ আঁকলাম। কর্ণ হচ্ছে যোগফল।

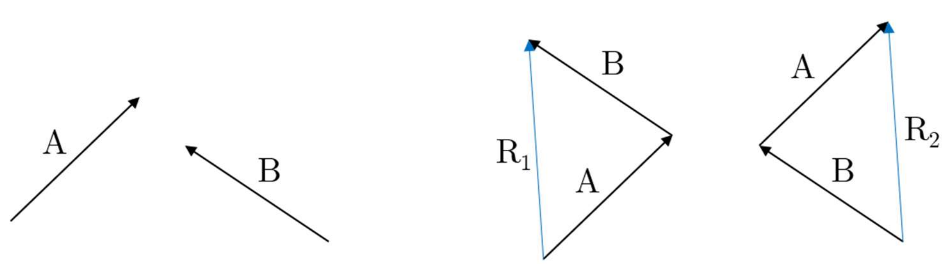
Definition 3.1
A vector is a geometric concept that has both a defined magnitude and direction and follows the below given laws:

(a) Commutative Law: If A and B are two vectors then $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
(b) Associative Law: If A, B and C are three vectors then $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
(c) Distribution Law: If A and B are two vectors and λ is a scalar then $\lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$

আমরা একটু বিনিময় (Commutative) সূত্রটা জ্যামিতিকভাবে বোঝার চেষ্টা করি। এখানে প্রথমে A ভেক্টর ও পরে B ভেক্টর যোগ করা হয়েছে। এর ফলে যে যোগফলটি পাওয়া গেছে বলা হচ্ছে আগে B রেখে পরে A ভেক্টর যোগ করা গেলেও সেইম ভেক্টরই পাওয়া যাবে। চলো, যাচাই করে দেখি জ্যামিতিকভাবে।

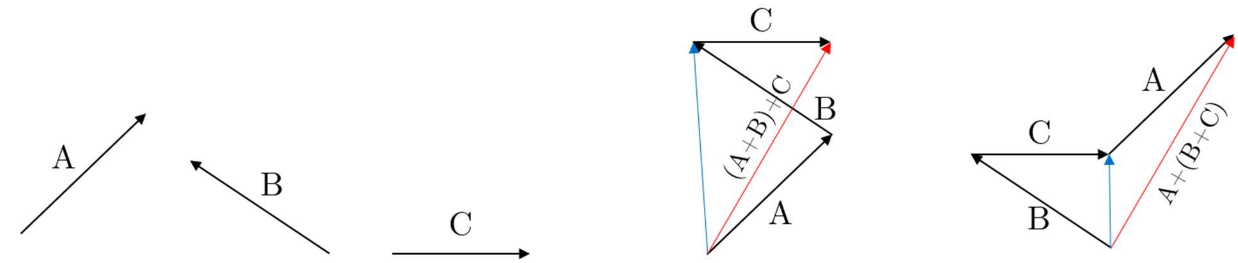
ধরি, আগে A ভেক্টর ও পরে B ভেক্টর যোগ করলে পাওয়া যাবে $\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{R_1}$ আর আগে B রেখে পরে A ভেক্টর যোগ করা হলে পাওয়া যাবে $\vec{B} + \vec{A} = \overrightarrow{R_2}$। জ্যামিতিকভাবে আঁকলে –

স্কেল ও কোণ দিয়ে মাপলে দেখা যাবে এই $R_1 = R_2$



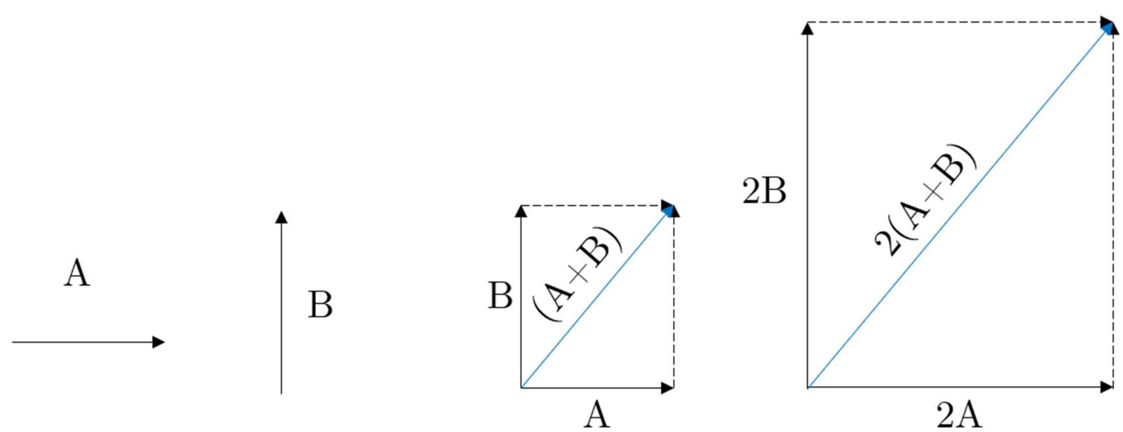
একটি ভেক্টর   আরেকটি ভেক্টর   আগে A ও পরে B যোগ করার ফলে প্রাপ্ত লব্ধি R_1 আগে B ও পরে A যোগ করার ফলে প্রাপ্ত লব্ধি R_2

আমরা যদি জ্যামিতিকভাবে সংযোগ (Associative) সূত্রটি এবার দেখার চেষ্টা করি তা হচ্ছে প্রথমে দুইটি ভেক্টর যোগ করে তারপর যদি তৃতীয় কোনো একটি ভেক্টর যোগ করি তাহলে যা যোগফল আসবে, শেষের দুই ভেক্টর আগে যোগ করে সর্বশেষে যদি প্রথম ভেক্টরটি যোগ করি তাহলেও তাই আসবে। মূলত ভেক্টরের যোগ বা বিয়োগে ক্রম রক্ষা করা কোনো গুরুত্বপূর্ণ বিষয় না এটিই হচ্ছে এই সূত্রের মূল কথা।



একটি ভেক্টর | আরেকটি ভেক্টর | তৃতীয় ভেক্টর | A+B এর সাথে C যোগ করা হয়েছে | B+C এর সাথে A যোগ করা হয়েছে

এবার আমরা বন্টন (Distribution) বিধিটা বুঝার চেষ্টা করি। কোনো একটা স্কেলার (2, 5, $0.5, \pi$ ইত্যাদি) দিয়ে একটি ভেক্টরকে গুণ করা মানে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করা। তো বন্টল বিধি আমাদেরকে বলে আমরা যদি ভেক্টরের যোগফলকে একটি স্কেলার রাশি দিয়ে গুণ দেই তাহলে যা পাওয়া যাবে তা ঐ প্রতিটি ভেক্টরকে ঐ স্কেলার দিয়ে আগে গুণ করে পরে যোগ করলে যে যোগফল পাওয়া যাবে তার সমান। যেমন –



একটি ভেক্টর | আরেকটি ভেক্টর | ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল | ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলকে দ্বিগুণ করতে হলে এদের প্রত্যেককে দুই গুণ করলেই চলবে

জ্যামিতিকভাবে তো আমরা অনেক কিছুই যোগ বিয়োগ করা শিখলাম। এখন আমরা গাণিতিকভাবে বিষয়টা দেখার চেষ্টা করি।

Definition 3.2

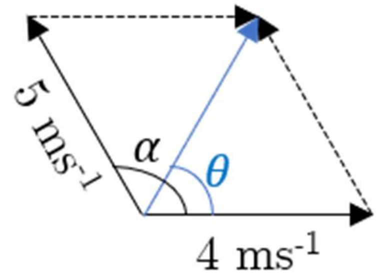
If $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ are two vectors whose magnitudes are P and Q and the angle in between them is α then the resultant of them is:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

The angle θ in between the vector $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{R}$ is

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{P\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right)$$

একজন সাতারু নদীর স্রোতের প্রতিকূলে 120 ডিগ্রি কোণে অপরপ্রান্তে পৌঁছানোর জন্য রওয়ানা করল। নদীতে পানির বেগ 4 ms^{-1} আর সাতারুর বেগ 5 ms^{-1} হলে সাতারুর লব্ধি বেগ ও গতির দিক বেক কর।



দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ $\vec{u} = 4\, ms^{-1}$, সাতারুর বেগ $\vec{v} = 5\, ms^{-1}$। এই দুই ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 120°$। তাহলে এদের লব্ধি –

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 \times 4 \times 5 \times \cos 120} = \sqrt{21}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4\sin 120}{5 + 4\cos 120}\right) = 49.11°$$

•••