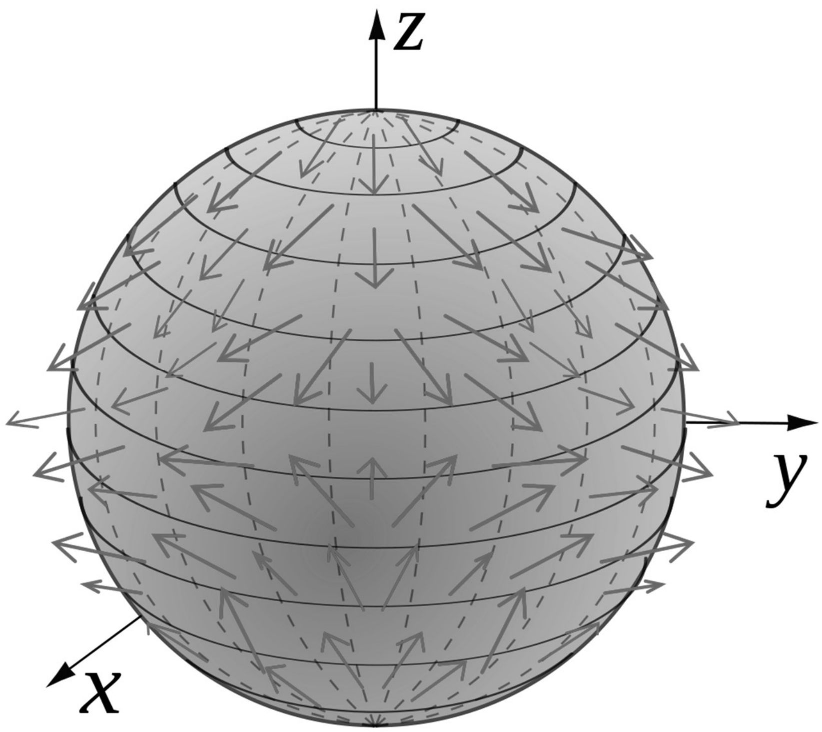
আমার ইশকুল

ক্লাস ১৪

ভেক্টর ক্যালকুলাস



ইন্সট্রাক্টর

কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ,

ইলেকট্রিক্যাল এন্ড ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ,

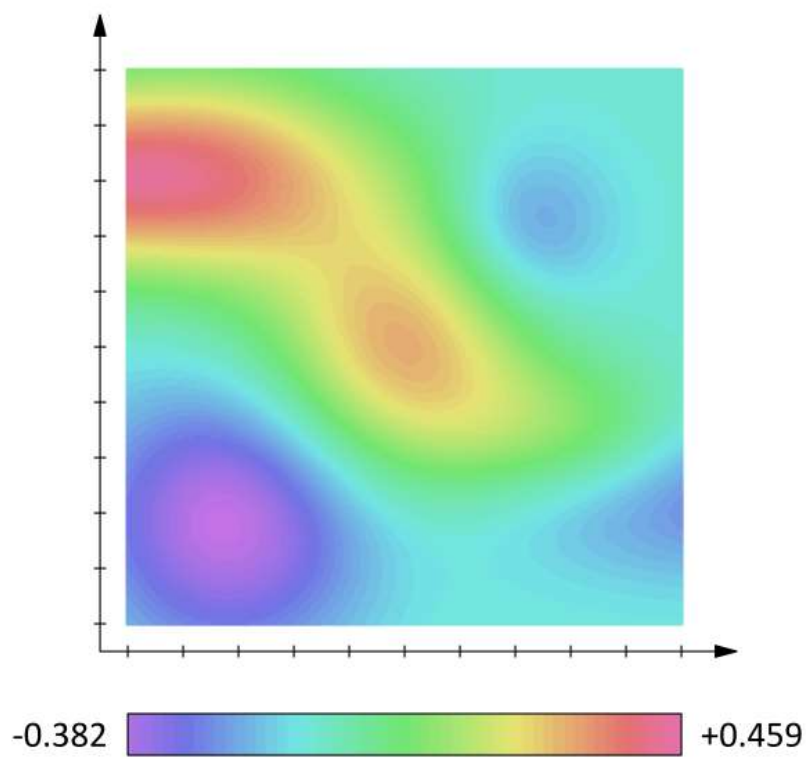
শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট।

Email: cast.shariat@gmail.com

Scalar and Vector Fields

ভেক্টর ক্যালকুলাসের আমরা মূলত দুই ধরনের ফিল্ড নিয়ে কাজ করে থাকি। স্কেলার ফিল্ড এবং ভেক্টর ফিল্ড। স্কেলার ফিল্ড এবং ভেক্টর ফিল্ড এরা আসলে এক বা একাধিক চলকের একটি ফাংশন। যদি কোনো এমন ফাংশন কোনো একটি নির্দিষ্ট পয়েন্টে শুধু মান প্রকাশ করে তাহলে তাকে বলা হয় স্কেলার ফিল্ড। আর যদি ফাংশনের প্রত্যেকটা পয়েন্টে একটি মান এবং মানের সাথে একটি দিকও দেওয়া থাকে তাহলে সেই ফাংশনকে ভেক্টর ফিল্ড বলা হয়।

ধরুন আমরা আমাদের ক্লাসরুমের তাপমাত্রা পরিমাপ করলাম এরপর রুমের কোন জায়গায় তাপমাত্রা কেমন তা একটি গ্রাফে রং দিয়ে চিহ্নিত করলাম। সেটি দেখতে অনেকটা চিত্র ১৪.১ এর মত দেখাবে। এখানে রুমের প্রত্যেকটা পয়েন্টে একটি তাপমাত্রা (মান) পাওয়া যাবে। যেহেতু এই তাপমাত্রার ফাংশনটি কেবলই মান দেখাচ্ছে, কোনো দিক এর সাথে সম্পর্কযুক্ত নয়, তাই এটি একটি স্কেলার ফিল্ড।

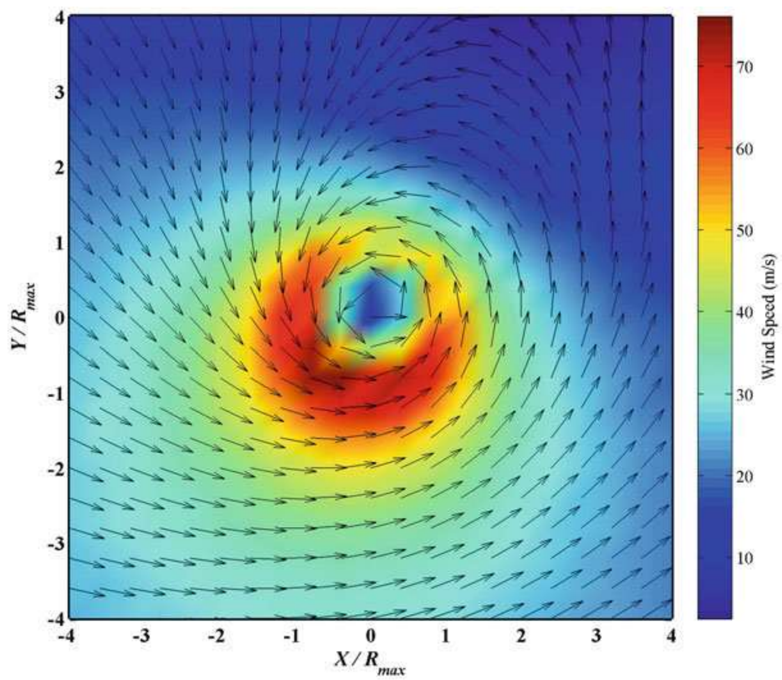


চিত্র ১৪.১ ক্লাসরুমের তাপমাত্রার স্কেলার ফিল্ড। সূত্র – উইকিমিডিয়া

বি. দ্র. সকল স্কেলার ফাংশনই স্কেলার ফিল্ড হিসেবে গণ্য হবে না। যেসব স্কেলার ফাংশন স্থানাঙ্কের পরিবর্তন করলে, অক্ষকে ঘুরালে বা অন্য কোনো ট্রান্সফর্ম করলে অপরিবর্তিত থাকে তাকে স্কেলার ফিল্ড বলা হবে।

যেমন $\phi = 2x^3y^2z^4 - 5x^2$ একটি স্কেলার ফিল্ড। এক্সপ্রেশন দেখে বুঝার উপায় হচ্ছে, স্কেলার ফিল্ডে শুধু x, y, z চলকগুলো আছে। কোনো আয়তএকক ভেক্টর যেমন $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ থাকে না। এখানে যেহেতু আয়ত একক ভেক্টর নেই, তাই এটি একটি স্কেলার ফিল্ড।

ধরুন একটা ঘুর্ণিঝড় হচ্ছে। ঘুর্ণিঝড়ের বাতাসগুলোর ফ্লো দেখতে অনেকটা নিচের চিত্রের মত দেখায় না? এই যে ফ্লো দেখানোর জন্য ছোট ছোট তীর চিহ্ন ব্যবহার করে একটা ক্ষেত্রে দেখানো হচ্ছে একে আমরা বলব একটা ভেক্টর ফিল্ড। এই ফিল্ডের যে-কোনো পয়েন্ট সিলেক্ট করুন। সেখানে একটা মান ও একটা দিক দেওয়া থাকবে। যেমন বাতাস কত বেগে আর কোন দিকে যাচ্ছে এইটা পাওয়া যাবে যে-কোনো পয়েন্টে।



চিত্র ১৪.২ জপলিন টর্নেডো (২০১১) এর বাতাসের গতিপথের ভেক্টর ফিল্ড। সূত্র – Xinlai Peng

যেমন $\vec{V} = 2x^2z\,\hat{\imath} - xy^2z\,\hat{\jmath} + 3yz^2\hat{k}$ একটি ভেক্টর ফিল্ড। এক্সপ্রেশন দেখে বুঝার উপায় হচ্ছে, ভেক্টর ফিল্ডে আয়ত একক ভেক্টর যেমন $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ উপস্থিত থাকে। যেহেতু এই এক্সপ্রেশনে আয়ত একক ভেক্টরের মধ্যে কিছু উপস্থিত আছে তাই এটি একটি ভেক্টর ফিল্ড।

Vector Operator

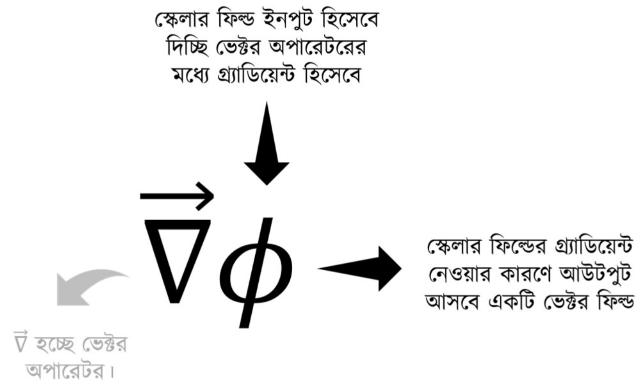
$\vec{\nabla}$ কে বলা হয় ভেক্টর অপারেটর। যেখানে

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Gradient

ভেক্টর অপারেটরের সাথে স্কেলার ফিল্ডের বীজগাণিতিক গুণকে গ্র্যাডিয়েন্ট বলে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}$ যদি আমার ভেক্টর অপারেটর হয়, আর ϕ যদি আমার স্কেলার ফিল্ড হয়, তাহলে ϕ এর গ্র্যাডিয়েন্ট হবে $\vec{\nabla}\phi$

খেয়াল করুন, $\vec{\nabla}$ একটি ভেক্টর রাশি। আর ϕ একটি স্কেলার রাশি। আমরা জানি একটি স্কেলার রাশির সাথে একটি ভেক্টর রাশি গুণ করলে সেটি একটি ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর হয়ে যায়। তাই $\vec{\nabla}$ (ভেক্টর অপারেটর)-এর সাথে ϕ (স্কেলার ফিল্ড) গুণ করার ফলে তা একটি ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তরিত হয়ে যাবে।



একটি স্কেলার ফিল্ড $\phi = 3x^2y - y^3z^2$ দেওয়া আছে। এর গ্র্যাডিয়েন্ট কত হবে?

সমাধান করতে হলে আমাদের যেভাবে আগানো লাগবে তা হচ্ছে, গ্র্যাডিয়েন্ট বের করতে কী লাগে? গ্র্যাডিয়েন্ট বের করার সূত্র হচ্ছে $\vec{\nabla}\phi$। এখানে দুইটা জিনিস লাগবে। একটা হচ্ছে ভেক্টর অপারেটর আরেকটা স্কেলার ফিল্ড। প্রশ্নে স্কেলার ফিল্ড দেওয়া আছে। আর ভেক্টর অপারেটর হচ্ছে

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

এখন এই দুইটার বীজগাণিতিক গুণ করে দিলে $\vec{\nabla}\phi$ চলে আসবে। তাহলে,

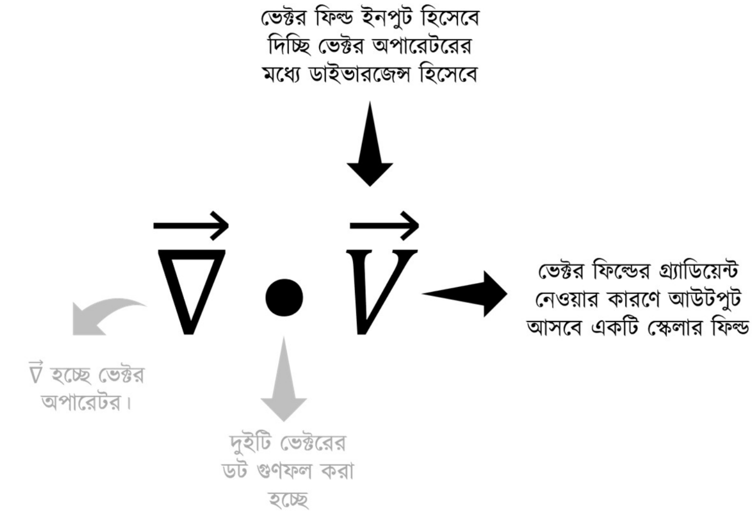
$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(3x^2y - y^3z^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2)\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2)\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2)\hat{k} \\
&= (3y \times 2x - y^3z^2 \times 0)\hat{\imath} + (3x^2 \times 1 - z^2 \times 3y^2)\hat{\jmath} + (3x^2y \times 0 - y^3 \times 2z)\hat{k} \\
&= 6xy\hat{\imath} + (3x^2 - 3y^2z^2)\hat{\jmath} - 2y^3z\hat{k}
\end{aligned}$$

এটিই হচ্ছে আমাদের গ্র্যাডিয়েন্ট। দেখুন, শুরুতে আমরা কাজ করছিলাম $(3x^2y - y^3z^2)$ স্কেলার ফিল্ডটি নিয়ে। কিন্তু উত্তরে যেটি বের হয়েছে সেটি হচ্ছে একটি ভেক্টর ফিল্ড। গ্র্যাডিয়েন্ট স্কেলার ফিল্ডকে ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তর করছে।

Divergence

ভেক্টর অপারেটরের সাথে ভেক্টর ফিল্ডের ডট গুণকে ডাইভারজেন্স বলে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}$ যদি আমার ভেক্টর অপারেটর হয়, আর $\vec{V}$ যদি আমার ভেক্টর ফিল্ড হয়, তাহলে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স হবে $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$।

খেয়াল করুন, $\vec{\nabla}$ একটি ভেক্টর রাশি। আর $\vec{V}$ -ও একটি ভেক্টর রাশি। আমরা জানি একটি ভেক্টর রাশির সাথে আরেকটি ভেক্টর রাশির ডট গুণ করলে সেটি একটি স্কেলার রাশিতে রূপান্তর হয়ে যায়। তাই $\vec{\nabla}$ (ভেক্টর অপারেটর)-এর সাথে $\vec{V}$ (ভেক্টর ফিল্ড) গুণ করার ফলে তা একটি স্কেলার ফিল্ডে রূপান্তরিত হয়ে যাবে।



একটি ভেক্টর ফিল্ড $\vec{V} = x^2z\hat{\imath} - 2y^3z^2\hat{\jmath} + xy^2z\hat{k}$ দেওয়া আছে। এর ডাইভারজেন্স কত হবে?

সমাধান করতে হলে আমাদের যেভাবে আগানো লাগবে তা হচ্ছে, ডাইভারজেন্স বের করতে কী লাগে? ডাইভারজেন্সের সূত্র হচ্ছে $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$। ভেক্টর ফিল্ডটি আমাদের প্রশ্নেই দেওয়া আছে। আর ভেক্টর অপারেটর

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

এই দুইয়ের ডট গুণ করলেই যে স্কেলার রাশি চলে আসবে তা হচ্ছে ডাইভারজেন্স। তাহলে ডাইভারজেন্স,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(x^2z\hat{\imath} - 2y^3z^2\hat{\jmath} + xy^2z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$

$$= z(2x) - 2z^2(3y^2) + xy^2(1)$$

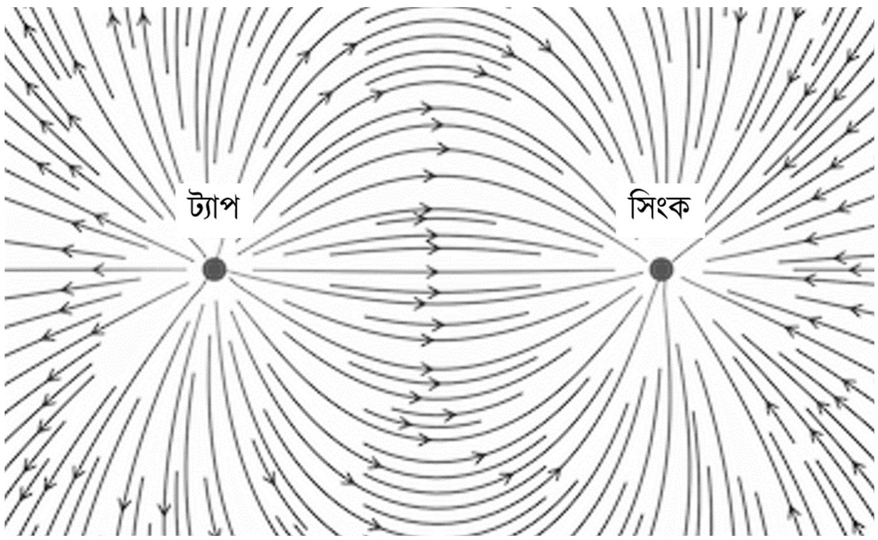
$$= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$$

এটিই হচ্ছে আমাদের ডাইভারজেন্স। দেখুন, শুরুতে আমরা কাজ করছিলাম $\left(x^2z\hat{\imath} - 2y^3z^2\hat{\jmath} + xy^2z\hat{k}\right)$ ভেক্টর ফিল্ডটি নিয়ে। কিন্তু উত্তরে যেটি বের হয়েছে সেটি হচ্ছে একটি স্কেলার ফিল্ড। ডাইভারজেন্স স্কেলার ফিল্ডকে ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তর করছে।

যদি জিজ্ঞেস করা হয় $(1,0,-1)$ বিন্দুতে উপরে প্রদত্ত ভেক্টর ফিল্ডটির ডাইভারজেন্সের মান কত? তাহলে আমরা শুধু ডাইভারজেন্সের রাশিতে $x = 1, y = 0, z = -1$ বসিয়ে দিয়ে যে মান পাওয়া যাবে তাই হবে উত্তর। যেমন উপরের উত্তরের ক্ষেত্রে এটা হবে

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right)_{(1,0,-1)} = 2(1)(-1) - 6(0)^2(-1)^2 + (1)(0)^2 = -2$$

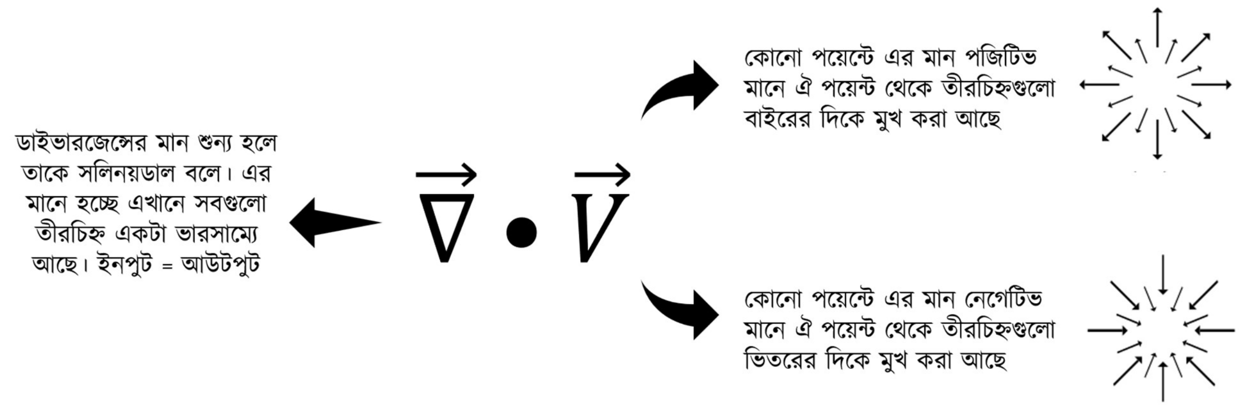
আমরা চাইলে একটা অ্যানালজি দিয়ে বুঝতে পারি কোনো একটি পয়েন্টে ডাইভারজেন্সের মান পজিটিভ, নেগেটিভ বা শুন্য বলতে আসলে কী বুঝায়।



উপরে একটি বাথটবের চিত্র দেওয়া আছে। ট্যাপ থেকে পানি পড়ে নিচের অংশে কোন কোন দিকে ফ্লো হচ্ছে তার ডিরেকশন দেখানো হচ্ছে। সেই পানি নিচে পড়ে চলে যাচ্ছে সিংক-এর দিকে। মেইন কথা, বাথটবের মধ্যে পানির ফ্লো কোন দিকে হচ্ছে তা দেখানো হচ্ছে তীর চিহ্নগুলো দিয়ে। এইটা আমাদের ভেক্টর ফিল্ড। যে-কোনো পয়েন্টে আমরা এখানে পানির গতির মান ও কোন দিকে পানি ফ্লো হচ্ছে তা দেখতে পাবো।

এখন আমরা যদি ট্যাপের ঠিক নিচ বরাবর এই ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স বের করি তাহলে দেখতে পাবো ডাইভারজেন্সের মান আসবে পজিটিভ। আর যদি সিংকের ঠিক বরাবর এই ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স বের করি তাহলে দেখতে পাবো ডাইভারজেন্স আসবে নেগেটিভ।

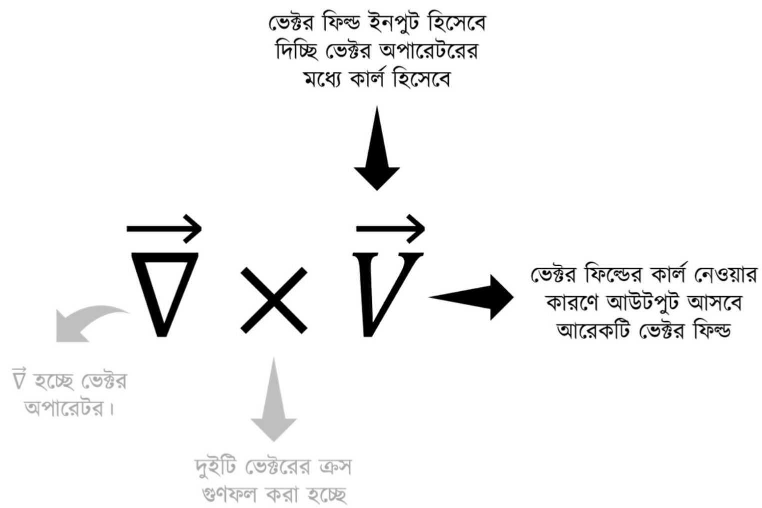
অর্থাৎ



Curl

ভেক্টর অপারেটরের সাথে ভেক্টর ফিল্ডের ক্রস গুণকে কার্ল বলে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}$ যদি আমার ভেক্টর অপারেটর হয়, আর $\vec{V}$ যদি আমার ভেক্টর ফিল্ড হয়, তাহলে $\vec{V}$ এর কার্ল হবে $\vec{\nabla} \times \vec{V}$।

খেয়াল করুন, $\vec{\nabla}$ একটি ভেক্টর রাশি। আর $\vec{V}$ -ও একটি ভেক্টর রাশি। আমরা জানি একটি ভেক্টর রাশির সাথে আরেকটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণ করলে সেটি আরেকটি ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর হয়ে যায়। তাই $\vec{\nabla}$ (ভেক্টর অপারেটর)-এর সাথে $\vec{V}$ (ভেক্টর ফিল্ড) ক্রস গুণ করার ফলে তা আরেকটি ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তরিত হয়ে যাবে।



একটি ভেক্টর ফিল্ড $\vec{V} = xz^3\hat{\imath} - 2x^2yz\hat{\jmath} + 2yz^4\hat{k}$ দেওয়া আছে। এর কার্ল কত হবে?

সমাধান করতে হলে আমাদের যেভাবে আগানো লাগবে তা হচ্ছে, কার্ল বের করতে কী লাগে? কার্লের সূত্র হচ্ছে $\vec{\nabla} \times \vec{V}$। ভেক্টর ফিল্ডটি আমাদের প্রশ্নেই দেওয়া আছে। আর ভেক্টর অপারেটর

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

এই দুইয়ের ক্রস গুণ করলেই যে ভেক্টর রাশি চলে আসবে তা হচ্ছে কার্ল। তাহলে কার্ল,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}2yz^4 - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,2yz^4 - \frac{\partial}{\partial z}xz^3\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}xz^3\right)$$

$$= \hat{\imath}\left(2z^4(1) - \left(-2x^2y(1)\right)\right) - \hat{\jmath}\left(2yz^4(0) - x(3z^2)\right) + \hat{k}(-2)$$

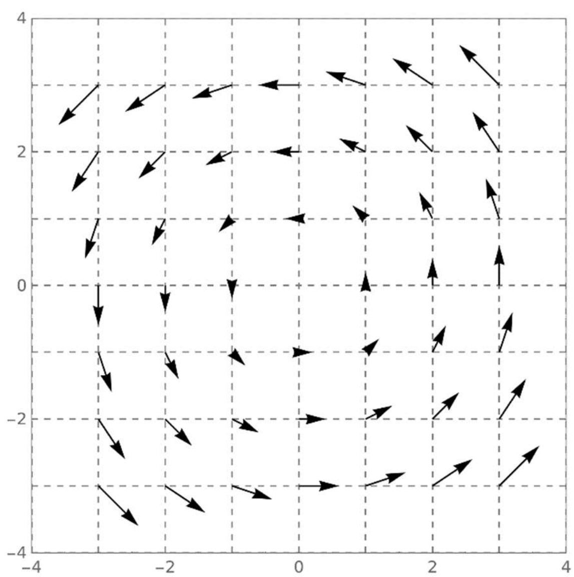
$$= (2z^4 + 2x^2y)\hat{\imath} + 3xz^2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

এটিই হচ্ছে আমাদের কার্ল। দেখুন, শুরুতে আমরা কাজ করছিলাম $xz^3\hat{\imath} - 2x^2yz\hat{\jmath} + 2yz^4\hat{k}$ ভেক্টর ফিল্ডটি নিয়ে। কিন্তু উত্তরে যেটি বের হয়েছে সেটি হচ্ছে অন্য আরেকটি ভেক্টর ফিল্ড। কার্ল একটি ভেক্টর ফিল্ডকে আরেকটি ভেক্টর ফিল্ডে রূপান্তর করে ফেলেছে।

যদি জিজ্ঞেস করা হয় $(1,0,-1)$ বিন্দুতে উপরে প্রদত্ত ভেক্টর ফিল্ডটির কার্লের মান কত? তাহলে আমরা শুধু কার্লের রাশিতে $x = 1, y = 0, z = -1$ বসিয়ে দিয়ে যে মান পাওয়া যাবে তাই হবে উত্তর। যেমন উপরের উত্তরের ক্ষেত্রে এটা হবে

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_{1,0,-1} = \left(2(-1)^4 + 2(1)^2(0)\right)\hat{\imath} + 3(1)(-1)^2\hat{\jmath} - 2\hat{k} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

যদি কখনও কার্লের মান শুন্য আসে তখন বুঝতে হবে ঐ পয়েন্টে ভেক্টর ফিল্ডগুলো অঘুর্ণনশীল।



একটি ঘুর্ণনশীল ভেক্টর ফিল্ড। সূত্র - https://ximera.osu.edu/

অনুশীলনী

যদি স্কেলার ফিল্ড $\phi = 2x^3y^2z^4$ ও একটি ভেক্টর ফিল্ড $\vec{V} = 2x^2z\,\hat{\imath} - xy^2z\,\hat{\jmath} + 3yz^2\hat{k}$ হয় তবে -

(ক) স্কেলার ফিল্ডের গ্র্যাডিয়েন্ট বের করো।

(খ) ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স বের করো।

(গ) ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল বের করো।

(ঘ) $(1, -1, 0)$ বিন্দুতে ডাইভারজেন্সের মান কত? আর অই মান কী বুঝায় তার একটি ব্যাখ্যা প্রদান করো।

(১) দেখাও যে $\vec{A} = 3y^4z^2\hat{\imath} + 4x^3z^2\hat{\jmath} - 3x^2y^2\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল।

(২) দেখাও যে $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{\imath} + (3x^2 - z)\hat{\jmath} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।