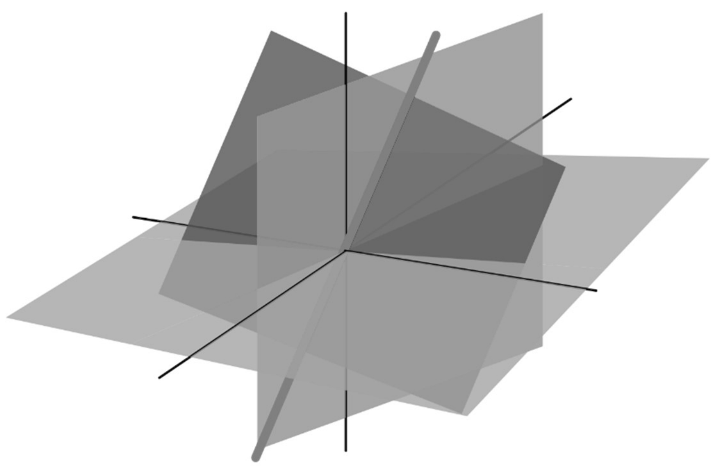
আমার ইশকুল

ক্লাস ১

ম্যাট্রিক্স



ইন্সট্রাক্টর

কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ,

ইলেকট্রিক্যাল এন্ড ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ,

শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট।

Email: cast.shariat@gmail.com

Definition 1.1

Matrix: A matrix is a rectangular array or table of numbers, symbols, or expressions, arranged in rows and columns, which is used to represent a mathematical object or a property of such an object.

ম্যাট্রিক্স: ম্যাট্রিক্স হচ্ছে একটি আয়তাকার বিন্যাস যাতে কিছু নাম্বার থাকতে পারে, কিছু চিহ্ন থাকতে পারে বা কিছু রাশি থাকতে পারে। এই জিনিসগুলো কিছু কলাম (Column) আর কিছু সারির (Row) সাহায্যে সাজানো থাকে। কলাম ও সারিকে [] বা () বন্ধনীর মাধ্যমে আবদ্ধ করে দেওয়া হয়। যেমন –

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

একটি ম্যাট্রিক্স। এখানে দুইটি সারি আছে, আর তিনটি কলাম আছে।

Definition 1.2

Order of a Matrix: If a matrix has m rows and n columns then $m \times n$ is called the order of the matrix

ম্যাট্রিক্স এর ক্রম: যদি একটি ম্যাট্রিক্সের m সংখ্যক সারি থাকে আর n সংখ্যক কলাম থাকে তাহলে $m \times n$ কে ঐ ম্যাট্রিক্সের ক্রম বলে। যেমন

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

একটি ম্যাট্রিক্স। এখানে দুইটি সারি আছে, আর তিনটি কলাম আছে। তাহলে এর ক্রম হচ্ছে 2×3

নিচের ম্যাট্রিক্সগুলোর ক্রম নির্ণয় করো –

(ক) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (খ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (গ) $\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (ঘ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A matrix with $i \times j$ order can be written in a standard form as follows:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} \end{pmatrix}$$

Definition 1.3

Scalar Multiplication with a Matrix: If λ is a scalar quantity (e.g., 2, 3, 9.8, π etc.) and A is a matrix of order $i \times j$ then

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \cdots & \lambda x_{1j} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} & \cdots & \lambda x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda x_{i1} & \lambda x_{i2} & \cdots & \lambda x_{ij} \end{pmatrix}$$

Definition 1.4

Addition of two Matrices: If we have two matrices A and B of the same order then the addition (or subtraction) can be defined as

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} x_{11} + a_{11} & x_{12} + a_{12} & \cdots & x_{1j} + a_{1j} \\ x_{21} + a_{21} & x_{22} + a_{22} & \cdots & x_{2j} + a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} + a_{i1} & x_{i2} + a_{i2} & \cdots & x_{ij} + a_{ij} \end{pmatrix}$$

নিচের ম্যাট্রিক্সগুলোর যোগফল বের করো –

(ক) যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ হয় তাহলে $3A - 2B$ এর মান কত?

(খ) I কে বলা হয় অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity Matrix) । এটির সারি আর কলাম সংখ্যা সবসময় সমান হয়। উল্লেখ্য যেসব ম্যাট্রিক্সের সারি আর কলাম সংখ্যা সমান সেগুলোকে বর্গাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

$$2 \times 2 \text{ ক্রমের অভেদক ম্যাট্রিক্স হচ্ছে } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3 \text{ ক্রমের অভেদক ম্যাট্রিক্স হচ্ছে } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

দেখাও যে,

$$1\,I_3 + 2I_3 + 3I_3 + \cdots + nI_3 = \frac{n(n+1)}{2} I_3$$

Theorem 1.1

Equivalence Theorem: If A and B are two matrices of the same order and A=B then the corresponding elements of A and B are equal.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Then,

$$x_{11} = a_{11}$$
$$x_{12} = a_{12}$$
$$x_{21} = a_{21}$$
$$\cdots$$
$$x_{ij} = a_{ij}$$

(গ) যদি $3A - 3B = I_2$ হয় তাহলে x এবং y এর মান বের করো যেখানে

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

Definition 1.5

Multiplication of two Matrices: If we have two matrices A of order $l \times m$ and B of order $m \times n$ then they are multipliable. If

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l1} & x_{l2} & \cdots & x_{lm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + \cdots + x_{1m}a_{m1} & x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + \cdots + x_{1m}a_{m2} & \dots & x_{11}a_{1n} + x_{12}a_{2n} + \cdots + x_{1m}a_{mn} \\ x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} + \cdots + x_{2m}a_{m1} & x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} + \cdots + x_{2m}a_{m2} & \dots & x_{21}a_{1n} + x_{22}a_{2n} + \cdots + x_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{l1}a_{11} + x_{l2}a_{21} + \cdots + x_{lm}a_{m1} & x_{l1}a_{12} + x_{l2}a_{22} + \cdots + x_{lm}a_{m2} & \dots & x_{l1}a_{1n} + x_{l2}a_{2n} + \cdots + x_{lm}a_{mn} \end{pmatrix}$$

উদাহরণস্বরুপ নিচের দুইটি ম্যাট্রিক্সকে গুণ করার জন্য প্রথমেই যেটি যাচাই করতে হবে তা হচ্ছে প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম আর দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সমান আছে কি না। সমান না হলে গুন করা যাবে না।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

এখানে, A এর ক্রম হচ্ছে 2×3। আর B এর ক্রম হচ্ছে 3×2। অর্থাৎ প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা আর দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা সমান। তাহলে এদেরকে গুণ করা যাবে। আর সেই গুনফল হবে –

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 9 + 3 & 8 - 6 + 3 \\ -18 + 2 + 27 & -16 + 12 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Theorem 1.2

If A is a matrix of order $l \times m$ and B is a matrix of order $m \times n$ then the order of AB will be $l \times n$

Theorem 1.3

If A is a square matrix and I is a matrix of the same order as A then AI = A

Theorem 1.4

If A, B and C are square matrices then A(B+C) = AB + AC and (A+B)C = AC+BC

DIY: Prove Theorem 1.2, Theorem 1.3 and Theorem 1.4

System of Equations and Matrices

ধরো তোমার কাছে দুইটি ম্যাট্রিক্স আছে। একটি ম্যাট্রিক্স হচ্ছে 2×2 ক্রমের। আরেকটি হচ্ছে 2×1 ক্রমের। তাহলে এদের গুনফল যে ম্যাট্রিক্স আসবে তার ক্রম Theorem 1.2 অনুসারে আসবে 2×1। আমি তোমাকে একটা উদাহরণ দেই- ধরো, তোমার কাছে একটি ম্যাট্রিক্স হচ্ছে $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ এর ক্রম 2×2 । আর আরেকটা ম্যাট্রিক্স হচ্ছে $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এর ক্রম 2×1। ধরলাম এদের গুন করার ফলে একটা নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$। তো

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x + y \end{pmatrix}$$

এখন বলা আছে, গুনফলটা হচ্ছে $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ এর সমান। মানে

$$\begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

তাহলে উপপাদ্য ১.১ অনুসারে

$$3x + y = l$$

$$4x + y = m$$

এগুলো দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি লিনিয়ার সমীকরণ। আমরা উল্টাভাবে চিন্তা করলে যেকোনো k সংখ্যক চলকবিশিষ্ট সমীকরণের সিস্টেমকে $k \times k$ ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স আর $k \times 1$ ক্রমের চলক ধারণকারী একটি ম্যাট্রিক্সের গুনফল আকারে লিখে ফেলা যায়। যেমন

$$5x + 3y - 9z = 10$$

$$2x - 2y + 5z = 2$$

$$7x + y - 4z = 8$$

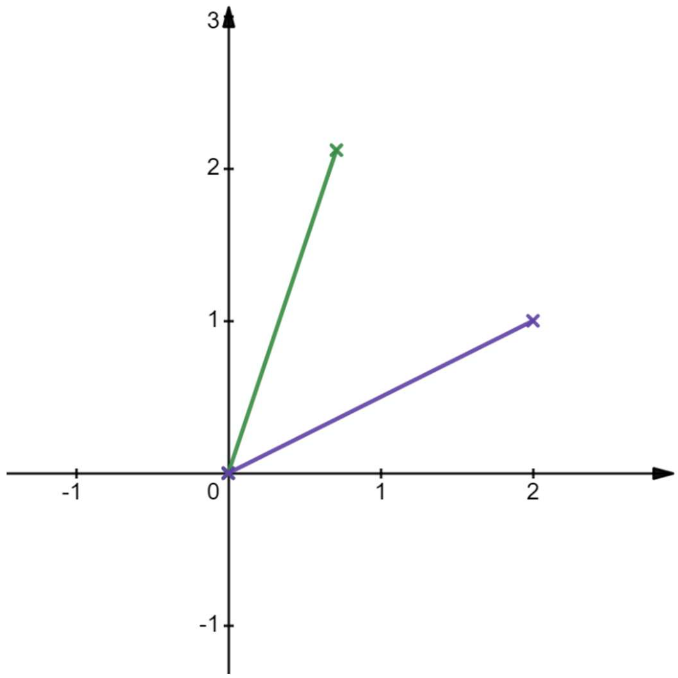
তিন চলকের লিনিয়ার সমীকরণের একটি সিস্টেম। এদেরকে ম্যাট্রিক্স আকারে লিখতে গেলে এভাবে লেখা যাবে –

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Geometrical Interpretation of Matrix Multiplication

একটি কলাম ম্যাট্রিক্স আসলে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। যেমন $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ হচ্ছে কার্তেশীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $(2,1)$ বিন্দুটি। এবার ধরো আমি একে θ ডিগ্রি কোণে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরাতে চাই। তাহলে আমি কী যা করব তা হচ্ছে $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে এই কলাম ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করে দিব। গুণফল হিসেবে আমি একটি কলাম ম্যাট্রিক্স পাব। সেই কলাম ম্যাট্রিক্সটি হচ্ছে θ ডিগ্রি কোণে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে যাওয়ার পর প্রাপ্ত নতুন বিন্দুর স্থানাঙ্ক। যেমন আমি যদি $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ কে ৪৫ ডিগ্রি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরাতে চাই তাহলে যা করব তা হচ্ছে

$$\begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.71 \\ 2.12 \end{pmatrix}$$



বেগুনি রঙের রেখাটি দিয়ে বুঝানো হচ্ছে $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি। আর সবুজ রঙের রেখাটি দিয়ে বুঝানো হচ্ছে আগের রেখার সাথে ৪৫ ডিগ্রি কোণে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে সরে যাওয়া নতুন কলাম ম্যাট্রিক্স $\begin{pmatrix}0.71\\2.12\end{pmatrix}$

এছাড়াও এই বিন্দুকে ওই রেখা বরাবরই অন্য কোথাও স্থানান্তর, বা কোনো রেখার সাপেক্ষে প্রতিফলিত করা যেতে পারে ম্যাট্রিক্স গুণনের সাহায্যে।

আপনার জন্য কাজ –

(ক) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে ৪৫ ডিগ্রি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরাতে কোন ম্যাট্রিক্স দিয়ে গুণ করতে হবে?

(খ) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সকে ১৮০ ডিগ্রি ঘুরিয়ে দিতে কোন ম্যাট্রিক্স দিয়ে গুন করতে হবে?

(গ) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি দিয়ে গুন করলে তা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে থিটা কোণে ঘুরিয়ে দেয়, এটি প্রমাণ করতে পারবে?

•••