

21 世纪

高等学校电子信息类系列教材

《数字信号处理（第二版）》

学习指导

■ 高西全 丁玉美 编著

- 
- 学习要点
 - 例题分析
 - 自测题
 - 习题参考答案



第一章

时域离散信号与系统理论分析基础

本章 1.1 节“学习要点”和 1.2 节“例题”部分的内容对应教材第一、二章内容。

为了便于归纳总结,我们将《数字信号处理(第二版)》教材中第一章和第二章的内容合并在一起叙述,这样使读者对时域离散线性时不变系统的描述与分析方法建立一个完整的概念,以便在分析和解决问题时,能全面考虑各种有效途径,选择最好的解决方案。

基础知识往往是最重要的,各种实际的应用技术都是基于相应的理论基础。本书中滤波器分析、设计与实现方法,均是基于第一、二、三、四章的数字信号处理理论基础。但第三、四章的 DFT 及 FFT 讲述离散化频域的数字信号处理原理,所以本书只将第一、二章合在一起归纳总结。

第一、二章的内容可归纳为:① 时域离散信号;② 时域离散信号的两种变换(FT 和 ZT);③ 时域离散线性时不变系统的描述与分析(时域和频域)。

在《数字信号处理(第二版)》教材中,用绝大部分篇幅讨论时域离散线性时不变系统的分析、设计与实现。这是由于时域离散线性时不变系统的理论较成熟,便于讲解,而数字系统则不然。数字系统实际上是时域离散线性时不变系统系数量化的结果。也就是说,考虑了时域离散系统系数量化效应之后,就得到相应的数字系统的性能。有限字长效应(即量化误差)分析理论比较成熟,所以,按这种结构形式学习数字信号处理是合理的。特别是现代数字系统(如 DSP)的字长越来越长,处理精度越来越高(16 位, 32 位, 64 位等),这时,如果忽略系数量化误差,则可认为时域离散系统与数字系统就无差别了。

1.1 学习要点

1.1.1 时域离散信号——序列

时域离散信号(以下简称序列)是时域离散系统处理的对象,研究时域离散系统离不开序列。例如,在时域离散线性时不变系统的时域描述中,系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 就是系统对单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的响应输出序列。掌握 $\delta(n)$ 的时域和频域特性,对分析讨论系统的时域特性描述函数 $h(n)$ 和频域特性描述函数 $H(e^{j\omega})$ 和 $H(z)$ 是必不可少的。

1. 序列的概念

在数字信号处理中,一般用 $x(n)$ 表示时域离散信号(序列)。 $x(n)$ 可看作对模拟信号 $x_a(t)$ 的采样,即 $x(n) = x_a(nT)$,也可以看作一组有序的数据集合。

要点 在数字信号处理中,序列 $x(n)$ 是一个离散函数, n 为整数,如图 1.1 所示。当 n 为整数时,

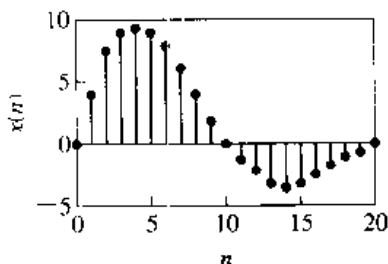


图 1.1 序列 $x(n)$ 图示方法

$x(n)$ 无定义,但不能理解为零。当 $x(n)=x_a(nT)$ 时,这一点容易理解。当 n = 整数时, $x(n)=x_a(nT)$, 为 $x_a(t)$ 在 $t=nT$ 时刻的采样值,非整数倍 T 时刻未采样,而并非为零,在学习连续信号的采样与恢复时会看到, $x(n)$ 经过低通滤波后,相邻的 $nT \sim (n+1)T$ 之间的 $x_a(t)$ 的值就得到恢复。

例如, $x(n)$ 为一序列,取 $y(n)=x(n/2)$, n 为整数是不正确的,因为当 n = 奇数时, $y(n)$ 无定义(无确定的值)。

2. 常用序列

为了学习后面的内容,必须熟悉一些常用序列,以便讨论其傅里叶变换和 Z 变换及其基本性质等。常用序列有六种:① 单位脉冲序列 $\delta(n)$, ② 矩形序列 $R_N(n)$, ③ 指数序列 $a^n u(n)$, ④ 正弦序列 $\cos(\omega n)$ 、 $\sin(\omega n)$, ⑤ 复指数序列 $e^{j\omega n}$, ⑥ 周期序列。由于前三种序列非常简单,而后面三种与相应的模拟信号的特点大不相同,所以下面仅对后三种序列的定义及特点进行小结。

1) 正弦序列和复指数序列

正弦序列指 $\cos(\omega n)$ 和 $\sin(\omega n)$ 。复指数序列指 $e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$, 其实部和虚部为正弦序列。由此可见,正弦序列和复指数序列的特性相同,所以放在一起讨论。

ω 为数字域频率,单位为弧度,表示两个相邻 n 之间正弦序列的相位、复指数序列的相角的变化量,所以 ω 表示正弦序列的变化快慢。如果将 $x(n) = \cos(\omega n)$ 看作对连续正弦信号 $x_a(t) = \cos(\Omega t)$ 的等间隔采样,即

$$x(n) = \cos(\omega n) = x_a(nT) = \cos(\Omega nT)$$

则 $\omega = \Omega T$, 数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 成线性关系, Ω 的单位为 rad/s, 所以 ω 的单位应为 rad(采样间隔 T 以秒为单位), ω 表示在一个采样间隔 T 上正弦波相位的变化量。

要点 正弦序列 $\cos(\omega n)$ 与模拟正弦信号 $\cos(\Omega t)$ 的唯一不同点为 n 只能取离散整数,且无量纲,而 t 为连续时间变量,以秒为单位。由此不同点引起正弦序列随 ω 的变化规律与连续正弦函数随 Ω 的变化规律有很大差别,这一点造成数字滤波器频域特性与模拟滤波器的频域特性也有很大差别(见滤波器设计)。

(1) $e^{j\omega n} = e^{j(\omega + 2\pi m)n}$, $\cos(\omega n) = \cos((\omega + 2\pi m)n)$, 但是, $e^{j\Omega t} \neq e^{j(\Omega + 2\pi m)t}$, $\cos(\Omega t) \neq \cos((\Omega + 2\pi m)t)$ 。正弦序列和复指数序列对 ω 变化呈以 2π 为周期,所以,在数字频域考虑问题时,取数字频率的主值区: $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$, 前者用于时域离散信号与系统的傅里叶分析中,而后者适用于离散傅里叶变换(DFT)。

(2) 当 $\omega = 0$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最慢(不变化);当 $\omega = \pi$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最快。所以在序列的频谱分析和数字滤波器描述中,在主值区上,将 $\omega = 0$ 附近称为数字低频,而将 $\omega = \pi$ 附近称为数字高频。容易证明,当满足时域采样定理 $(1/T \geq 2f_c)$ 时,模拟信号的最高频率 f_c 对应的数字频率 $\omega_c = 2\pi f_c T \leq \pi$ 。当取奈奎斯特采样速率 $f_s = 2f_c$ 时, $\omega_c = 2\pi f_c T = 2\pi f_c / f_s = \pi$ 。

这一特点与模拟正弦信号 $x_a(t) = \cos(\Omega t)$ 截然不同, Ω 越大, $\cos(\Omega t)$ 变化越快,其原因是 t 连续取值,而 n 只取整数。

(3) 由以上两点可以推知,数字滤波器(时域离散系统)的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 必须以 2π 为周期。后面会证明,频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 就是对激励信号 $e^{j\omega n}$ 的响应加权函数,即

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y(n) = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

已知 $e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n}$, 所以, 如果 $H(e^{j(\omega_0 + 2\pi m)}) \neq H(e^{j\omega_0})$, 即系统对 $e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n}$ 的响应输出与系统对 $e^{j\omega_0 n}$ 的响应不相同, 产生物理矛盾: “同一系统对相同的激励信号的响应不同。”

2) 周期序列

如果 $x(n) = x(n + mN)$, m 和 N 为整数, $N > 0$, 则称 $x(n)$ 为周期序列, 周期为 N , 记为 $\tilde{x}_N(n)$ 。

周期序列的定义只有一点与模拟周期信号定义不同, 即周期序列的自变量 n 和周期 N 只能取整数。正是这一区别, 使得某些模拟周期信号, 离散化后就不一定是周期序列。

例如, $e^{j\Omega_0 t}$ 一定是周期函数, 周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, 而 $e^{j\omega n}$ 是否是周期序列, 取决于数字频率的取值。为了说明这个问题, 我们假设 $e^{j\omega n}$ 以 N 为周期, 导出 $e^{j\omega n}$ 为周期序列的条件。

由以上假设及周期序列的定义可知, $e^{j\omega n}$ 应满足

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n + kN)}, \quad k \text{ 和 } N \text{ 为整数, } N > 0$$

所以必须满足 $\omega k N = 2\pi m$, m 为整数

当 $k=1$ 时, $\omega N = 2\pi m$ 。所以, 只有当 $N/m = 2\pi/\omega$ 为有理数时, N 和 m 才有整数解, $e^{j\omega n}$ 才是周期序列。此时只要将 $2\pi/\omega$ 化成最简分数(分子分母化为整数), 则分子就是周期 N 。

例如, $x_1(n) = \cos((\pi/7)n)$, $x_2(n) = \cos(n/7)$ 。对 $x_1(n)$, $\omega = \pi/7$, $2\pi/\omega = 2\pi/(\pi/7) = 14$, 所以 $x_1(n)$ 为周期序列, 周期 $N_1 = 14$; 对 $x_2(n)$, $\omega = 1/7$, $N_2/m = 2\pi/\omega = 2\pi/(1/7) = 14\pi$, 为无理数, 即 N_2 和 m 无整数解, 所以 $x_2(n)$ 不是周期序列。因此, 正弦序列和复指数序列不一定是周期序列, 当 $\omega = a\pi$ (a 为有理数) 时, 它们一定是周期序列。

1.1.2 序列的傅里叶变换(FT)

1. 序列傅里叶变换定义

以下两式:

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} x(n) = \text{IFT}[X(e^{j\omega})] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{cases} \quad (1.2)$$

称为傅里叶变换对。

$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$ 存在的条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.3)$$

2. 周期序列的傅里叶变换

周期序列不满足(1.3)式, 但为了将傅里叶变换分析法用于周期信号, 引入奇异函数 $\delta(\omega)$, 可定义周期序列的傅里叶变换。

设 $\tilde{x}_N(n)$ 表示以 N 为周期的周期序列, 则其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}_N(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_N(k) \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}k\right] \quad (1.4)$$

其中, $\delta(\omega)$ 为单位冲激函数, $\tilde{X}_N(k)$ 称为 $\tilde{x}_N(n)$ 的离散傅里叶级数(DFS)系数, 计算公式为

$$\tilde{X}_N(k) = \sum_{\langle n \rangle} \tilde{x}_N(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1.5)$$

其中, $\sum_{\langle n \rangle}$ 表示在任意一个周期区间上求和。 $\tilde{X}_N(k)$ 也是以 N 为周期。

由于 $\tilde{x}_N(n)$ 不满足(1.3)式, 因此按(1.1)式不能直接计算出 $\text{FT}[\tilde{x}_N(n)]$ 。所以, 对周期序列进行傅里叶变换时, 应先按式(1.5)求得 $\tilde{X}_N(k)$, 再套用(1.4)式得到 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}_N(n)]$ 。

3. 序列的傅里叶变换具有唯一性

序列的傅里叶变换具有的唯一性可用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{1:1} x(n)$$

4. 傅里叶变换的基本性质

序列傅里叶变换的基本性质列于表 1.1 中。下面仅对非常重要的共轭对称性进行小结, 以便读者掌握。

表 1.1 序列傅里叶变换的基本性质

序 列	傅 里 叶 变 换
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$
$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$, a, b 为常数
$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{-j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$	$j \int_{-\pi}^{\pi} dX(e^{j\omega})$
$\text{Re}[x(n)]$	$X_r(e^{j\omega})$
$j \text{Im}[x(n)]$	$X_i(e^{j\omega})$
$x_r(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_i(n)$	$j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_N(k) ^2$	

序列傅里叶变换的共轭对称性的基本内容有如下两种情况:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} x(n) & = & x_r(n) + jx_i(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(e^{j\omega}) & = & X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \end{array} \quad (1.6)$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} x(n) & = & x_e(n) - jx_o(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(e^{j\omega}) & = & X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \end{array} \quad (1.7)$$

式中, 符号 \leftrightarrow 表示两端为傅里叶变换关系, $x_r(n) = \text{Re}[x(n)]$ 为 $x(n)$ 的实部, $x_i(n) = \text{Im}[x(n)]$ 为 $x(n)$ 的虚部, $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ 和 $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$ 分别表示 $x(n)$ 的共轭对称序列和共轭反对称序列; $X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$, $X_I(e^{j\omega}) = \text{Im}[X(e^{j\omega})]$; $X_e(e^{j\omega}) = [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j(-\omega)})]/2$ 和 $X_o(e^{j\omega}) = [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j(-\omega)})]/2$ 分别表示 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称函数和共轭反对称函数。

共轭对称函数 $f_e(x)$ 和共轭反对称函数 $f_o(x)$ 分别定义为满足如下关系式的函数:

$$f_e(x) = f_e^*(-x)$$

$$f_o(x) = -f_o^*(-x)$$

式(1.6)和(1.7)完全为时域和频域的对偶关系: (1.6)式将时域 $x(n)$ 写成实部与虚部之和, 频谱 $X(e^{j\omega})$ 写成共轭对称分量与共轭反对称分量之和; 而(1.7)式将时域 $x(n)$ 写成共轭对称分量与共轭反对称分量之和, 频谱 $X(e^{j\omega})$ 写成实部与虚部之和。所以很容易记忆。

这里特别提请读者注意, 实序列傅里叶变换的共轭对称性可由(1.6)式和(1.7)式得出, 不用死记硬背。

$x(n)$ 可分为以下 4 种情况:

(1) $x(n)$ 为实序列, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 可得到 $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega})$ 为共轭对称函数, 即 $X(e^{j\omega})$ 满足

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j(-\omega)})$$

(2) 若 $x(n)$ 为实偶序列, 即 $x(n) = x(-n)$, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 及(1.7)式中 $x_o(n) = 0$ 可知, $X(e^{j\omega})$ 为实偶函数, 即

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(-\omega)})$$

(3) 若 $x(n)$ 为实奇序列, 即 $x(n) = -x(-n)$, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 及(1.7)式中 $x_e(n) = 0$ 可知, $X(e^{j\omega})$ 为纯虚奇对称函数, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j(-\omega)}) = -X(e^{j(-\omega)})$$

(4) 若 $x(n)$ 为实因果序列, 且 $x(n)$ 表示为

$$x(n) = x_e(n) - x_o(n)$$

则

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), & n > 0 \\ x_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

或
$$x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), & n > 0 \\ x(0), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

所以说,对实因果序列,只要知道 $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$,则可求得 $x(n)$ 及 $X(e^{j\omega})=\text{FT}[x(n)]$,过程如下:

已知

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{FT}[x_c(n)] \xrightarrow{\text{IFT}} x_c(n) \xrightarrow{(1.8)} x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

只要已知 $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ 和 $x(0)$, 则

$$j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \xrightarrow{\text{IFT}} x_o(n) \xrightarrow{(1.9)} x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

由上达可见,对实因果序列 $x(n)$,其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的实部包含了 $X(e^{j\omega})$ 或 $x(n)$ 的全部信息,即 $X(e^{j\omega})$ 中有冗余信息。

1.1.3 序列的 Z 变换(ZT)

1. Z 变换定义

Z 变换定义如下:

$$\begin{cases} X(z) = \text{ZT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ x(n) = \text{IZT}[X(z)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz \end{cases} \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

其中, c 是一条在 $X(z)$ 的收敛域上,并包含原点的逆时针闭合围线。显然,如果不知道 $X(z)$ 的收敛域,则 c 不能确定, $\text{IZT}[x(n)]$ 则无法计算。由此可看出 Z 变换的收敛域的重要性。

2. $X(z)=\text{ZT}[x(n)]$ 存在的条件与 $X(z)$ 的收敛域

Z 变换存在的条件指能使 $|X(z)| < \infty$ 的条件。为了讨论方便,将 z 写成极坐标形式

$$z = re^{j\omega}, \quad r = |z|, \quad \omega = \arg[z]$$

则

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

Z 变换存在的条件为

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

即 $X(z)$ 存在的充分条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty \quad (1.12)$$

$X(z)$ 存在的条件比 $X(e^{j\omega})$ 存在的条件宽得多。只要 $|x(n)|$ 的增长速度小于 r^n ,则 $\text{ZT}[x(n)]$ 就存在。

$X(z)=\text{ZT}[x(n)]$ 的收敛域定义为满足(1.12)式的 r 的取值域。换言之,使 $|X(z)| < \infty$ 的 $|z|$ 的取值域称为 $X(z)$ 的收敛域。显然, $X(z)$ 的收敛域与 $x(n)$ 有关。

要点 $x(n) \xrightarrow{1-1} [X(z), \text{收敛域}]$,也就是说,对一个确定的 $x(n)$,其 Z 变换 $X(z)$ 的

表达式及其收敛域是一个整体,二者共同唯一确定 $x(n)$ 。

例如:

$$(1) \quad x_1(n) = a^n u(n)$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$(2) \quad x_2(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

这两个序列截然不同,但 $X_1(z)$ 与 $X_2(z)$ 表达式完全相同,只能靠收敛域的区别来唯一确定 $X_1(z)$ 与 $X_2(z)$ 的 IZT。

3. 典型序列 Z 变换的收敛域

(1) 双边序列的 Z 变换收敛域为一环域,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_- < |z| < R_+$$

(2) 因果序列的 Z 变换收敛域为某圆外,包括无穷远处,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_- < |z| \leq \infty$$

双边序列和因果序列是时域离散线性非移变系统分析与设计中最常用的序列,在 IZT 的计算中,以上概念很有用。其它类型的序列,根据具体情况,确定其 Z 变换的收敛域。

4. 逆 Z 变换 (IZT) 的计算

逆 Z 变换的计算方法有幂级数法(长除法),部分分式法和留数法^[1]。下面仅对较通用的留数法进行介绍。

IZT $[X(z)]$ 的原始计算公式为(1.11)式的围线积分

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

可根据留数定理计算该围线积分。为了方便,令 $F(z) = X(z)z^{n-1}$, 并设

$\{a_k\}$ —— $F(z)$ 在 c 内的极点集

$\{b_k\}$ —— $F(z)$ 在 c 外的极点集

$$\text{则} \quad x(n) = \sum_k \text{Res}[F(z), a_k] \quad (1.13)$$

$$\text{或} \quad x(n) = - \sum_k \text{Res}[F(z), b_k] \quad (1.14)$$

使用(1.14)式的条件为 $n \leq N - M - 1$, 其中 N 和 M 分别为 $X(z)$ 的分母和分子(z 的正次幂)多项式的次数。 $\text{Res}[F(z), z_k]$ 表示 $F(z)$ 在极点 z_k 处的留数。

(1.13)和(1.14)式说明, $x(n) = \text{IZT}[X(z)]$ 等于 $F(z)$ 在 c 内的所有极点的留数之和,或等于 $F(z)$ 在 c 外的所有极点的留数之和并取负号。

留数计算公式:

将 $F(z)$ 化为 z 的正次幂有理分式,设 z_0 为 $F(z)$ 的一个 m 阶极点,则 $F(z)$ 可表示成

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \psi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 处无极点}$$

$$\text{Res}[F(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \psi(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z=z_0} \quad (1.15)$$

当 $m=1$ 时

$$\text{Res}[F(z), z_0] = \psi(z)|_{z=z_0} = F(z)(z - z_0)|_{z=z_0} \quad (1.16)$$

由此可见, 一阶极点的留数计算非常简单。而数字信号处理课程中, 大多数情况下为一阶极点。

5. Z 变换的主要性质与定理

为了便于读者查阅, 将 Z 变换的主要性质与定理列在表 1.2 中, 表中,

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)], \quad R_- < |z| < R_+$$

$$Y(z) = \text{ZT}[y(n)], \quad R_y < |z| < R_{y+}$$

表 1.2 Z 变换的主要性质与定理

序号	名称	性质与定理内容	备注
1	线性	$\text{ZT}[ax(n)+by(n)] = aX(z)+bY(z),$ $R_- < z < R_+$	$R_- = \max[R_{x-}, R_{y-}]$ $R_+ = \min[R_{x+}, R_{y+}]$
2	时域移位	$\text{ZT}[X(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z), R_{x-} < z < R_{x+}$	对某些特殊序列, 收敛域有变化
3	乘指数序列	$\text{ZT}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), a R_- < z < a R_+$	
4	序列乘 n	$\text{ZT}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, R_- < z < R_+$	
5	初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	$x(n)$ 为因果序列
6	终值定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	$x(n)$ 为因果序列 $X(z)$ 的极点, 除一个可以在单位圆上外, 其余全位于单位圆内
7	时域卷积定理	$\text{ZT}[x(n) * y(n)] = X(z) \cdot Y(z), R_- < z < R_+$	R_- 和 R_+ 同 1

6. 傅里叶变换与 Z 变换的关系

比较 $X(e^{j\omega})$ 与 $X(z)$ 的定义公式:

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

容易得到二者的关系为

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.17)$$

这说明, 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的取值。即傅里叶变换是 Z 变换的特例 ($z=e^{j\omega}$)。只有当 $X(z)$ 的收敛域包含单位圆时, $x(n)$ 才存在傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

1.1.4 时域离散线性时不变系统的描述与分析

1. 系统模型

时域离散系统可以用图 1.2 表示。

$$y(n) = T[x(n)]$$

$T[\cdot]$ 表示系统对输入信号的处理变换函数, 这种变换函数可以是线性时不变的, 也可以是非线性时不变、线性时变或非线性时变的。对于线性时不变系统, $T[\cdot]$ 应满足以下约束条件:

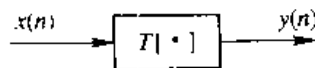


图 1.2 时域离散系统模型

(1) $T[\cdot]$ 具有线性特性。即满足齐次性和可加性, 其数学描述如下:

如果

$$T[x_1(n)] = y_1(n), \quad T[x_2(n)] = y_2(n)$$

则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

其中 a 和 b 为常数。

(2) $T[\cdot]$ 具有时不变性。

如果

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

系统对输入信号的处理特性不随时间变化。

2. 时域离散线性时不变系统的描述

时域离散线性时不变系统可以在时域或频域描述。

(1) 时域描述:

① 单位脉冲响应序列: $h(n) = T[\delta(n)]$ 表示系统对 $\delta(n)$ 的响应输出, 它可以将输出输入信号联系起来 ($y(n) = h(n) * x(n)$), 所以可用 $h(n)$ 表示系统对输入信号的处理功能。

② 差分方程:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

实质上, 系统特性完全由差分方程的系数决定。由于讨论的是线性时不变系统, 所以 a_k 和 b_k 均为常数 (不随 n 变化)。

(2) 频域描述:

① 系统函数

$$H(z) = ZT[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1.18)$$

② 频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 在数字滤波器设计中有很重要的作用(见第五、六、七章)。 $H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 也可以由系统差分方程求得。

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (1.19)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.20)$$

显然, $H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 完全由系数 a_k 和 b_k 确定, 而与输入和输出信号无关。在第五章中会看到, 系统的一种实现网络结构直接由 a_k 和 b_k 确定。

(3) 系统频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 的特点。因为 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$, 所以, $H(e^{j\omega})$ 的特点就是序列傅里叶变换(即序列频谱)的特点。为了不重复叙述, 将二者放在一起讨论。

① $H(e^{j\omega})$ 一般为复函数, 所以常表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.21)$$

$|H(e^{j\omega})|$ ——幅频特性函数, 表示系统对输入序列 $e^{j\omega n}$ 的增益。

$\theta(\omega)$ ——相频特性函数, 表示系统对 $e^{j\omega n}$ 的相角(复角)的改变量。

如果 $h(n)$ 为实序列, 则

$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{j(-\omega)})|$, 即 $|H(e^{j\omega})|$ 为偶函数;

$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$, 即 $\theta(\omega)$ 为奇函数。

② $H(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期。这一特点与模拟滤波器大相径庭, 所以要特别注意。

③ 低通滤波器的通带以 $\omega = 2\pi k$ 为中心, 高通滤波器则以 $\omega = (2k+1)\pi$ 为通带中心。物理解释是: $\omega = 2\pi k$ 附近, $\cos(\omega n)$ 变化很慢, 可称为低频正弦序列, 而 $\omega = (2k+1)\pi$ 附近, $\cos(\omega n)$ 变化很快, 可称为高频正弦序列(k 为整数)。

3. 时域离散线性时不变系统的输入/输出关系

时域离散线性时不变系统的每一种描述函数($h(n)$, $H(z)$, $H(e^{j\omega})$)都是其输入到输出的变换函数。

(1) 时域:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.22)$$

或

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a_k, b_k \text{ 为常数}$$

(2) 频域:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \quad (1.23)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (1.24)$$

应当特别注意, 以上对时域离散线性时不变系统的描述及 I/O 关系, 不能用于非线性及时变系统, 因为这些关系公式只有对线性时不变系统才能推导出。例如, 输入/输出关系(1.22)式推导过程如下:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \\
 y(n) &= T[x(n)] \\
 &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)\right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{根据线性性质} \\ \text{根据非移变性} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot T[\delta(n-m)] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) \\
 &= x(n) * h(n)
 \end{aligned}$$

如果不满足线性时不变条件, 则如上卷积关系(1.22)式是推导不出来的。

(3) 序列卷积的计算方法: 此内容在教材中和第一章习题解答中都较详细地进行了介绍, 这里不再重复。

4. 时域离散线性时不变系统的稳定性及因果性判断

(1) 时域:

稳定条件:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad h(n) \text{ 为系统单位脉冲响应(下同)}$$

因果系统定义: 系统输出变化不会发生在输入变化之前。该定义等价于因果系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 为因果序列, 即当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$ (证明见例 1.5)。

因果稳定条件:

$$\begin{cases} h(n) = 0, & n < 0, & \text{因果条件} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, & & \text{稳定条件} \end{cases}$$

(2) z 域:

稳定条件: $H(z) = \text{ZT}[h(n)]$ 的收敛域包含单位圆。

因果稳定条件: $H(z)$ 的所有极点全部在单位圆内。

实质上, 时域条件和频域条件是完全统一的。当 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆时, (1.12) 式对 $r=1$ 成立, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, 这正是时域稳定条件。当 $H(z)$ 的所有极点均在单位圆内时, $H(z)$ 的收敛域必然为 $R_- < |z|$, 且 $R_- < 1$, 所以必有 $h(n) = \text{IZT}[H(z)]$ 为一因果序列, 且 $h(n)$ 存在傅里叶变换。故 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases} h(n) = 0, & n < 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

这正是系统因果稳定的时域条件。在滤波器分析设计中, z 域因果稳定条件用得较多。

5. 系统函数 $H(z)$ 的极、零点与系统幅频特性函数 $H(e^{j\omega})$:

一般情况下, $H(z)$ 可表示为有理分式形式

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^k}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \quad (1.25)$$

其中, c_k 为 $H(z)$ 的零点, d_k 为 $H(z)$ 的极点。当 $N > M$ 时, $H(z)$ 在原点有 $(N-M)$ 阶零点, 当 $N < M$ 时, $H(z)$ 在原点有 $(M-N)$ 阶极点。

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - c_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

为了叙述方便, 令 $B = e^{j\omega}$, $c_k B = B - c_k$ 为第 k 个零点矢量, $d_k B = B - d_k$ 为第 k 个极点矢量。由于 B 是随数字频率 ω 旋转的矢量, 所以 $c_k B$ 和 $d_k B$ 也是随 ω 变化的矢量。代入以上符号, $H(e^{j\omega})$ 可以写成如下形式(令 $A=1$):

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M c_k B}{\prod_{k=1}^N d_k B} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

所以

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{k=1}^M |c_k B|}{\prod_{k=1}^N |d_k B|} = \frac{H(z) \text{ 的所有零点矢量模之积}}{H(z) \text{ 的所有极点矢量模之积}} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M \arg[c_k B] - \sum_{k=1}^N \arg[d_k B] \\ &= \omega(N-M) + (H(z) \text{ 的所有零点矢量相角之和}) \\ &\quad - (H(z) \text{ 的所有极点矢量相角之和}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

例如, 当 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$ 时, $H(z)$ 的零点 $c_1=0$, $c_2=-1$, 极点 $d_1=0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$, $d_2=0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}$ 。 $H(z)$ 的零点和极点位置如图 1.3(a) 所示, $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 1.3(b) 所示。

由图可见, $|H(e^{j\omega})|$ 曲线截止特性不好, 通带中心 $\omega=0$ 处衰减较大。为了改善通带平稳性, 再加一个极点 $d_3=0.5$, 为了使截止特性变陡些, 加入零点 $c_3=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$, $c_4=e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$, 这时 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})(1-jz^{-1})(1+jz^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

改进后的 $H(z)$ 零、极点位置和 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 1.3(c) 和 (d) 所示。

综上所述, 关于 $H(z)$ 的零、极点对 $|H(e^{j\omega})|$ 的贡献, 可得出如下结论:

(1) 位于原点的零点和极点不影响 $|H(e^{j\omega})|$, 只影响 $\theta(\omega)$ 。因为位于原点的零点矢量(或极点矢量)的模恒为 1, 不随 ω 变化。

(2) 单位圆附近的零点 $c_k = |c_k| e^{j\arg[c_k]}$ 对应的零点矢量的模 $|c_k B|$ 在 $\omega = \arg[c_k]$ 时为最

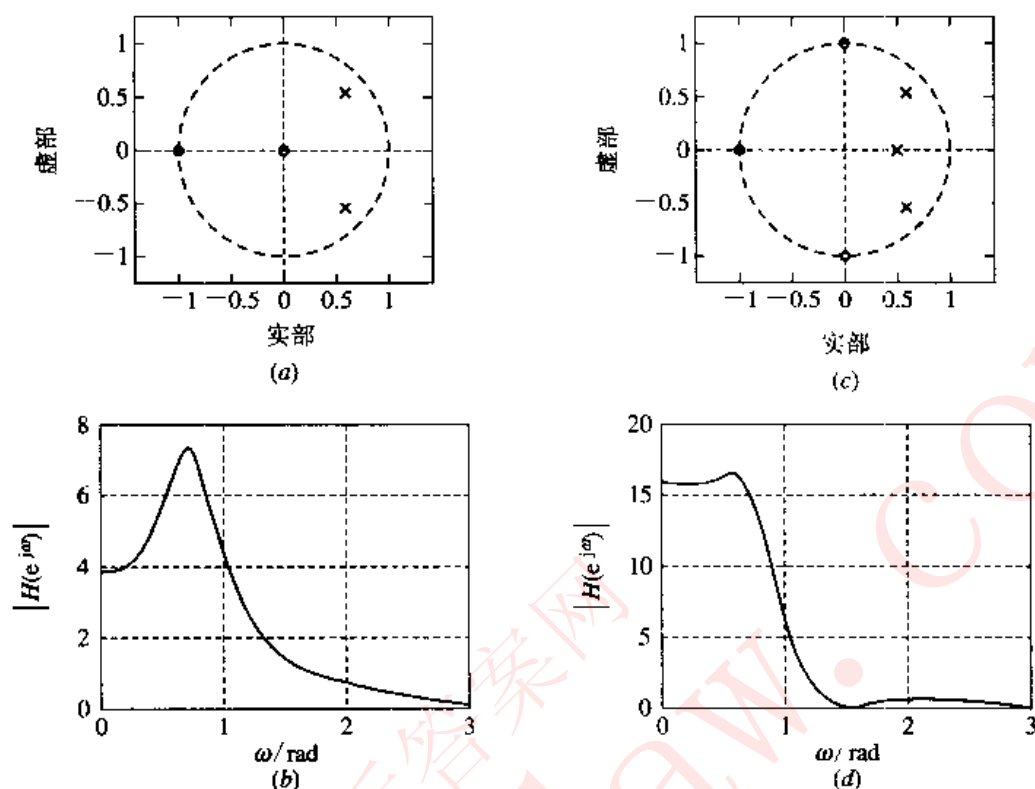


图 1.3 $H(z)$ 的零、极点分布及 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线

(a) 零、极点图; (b) 幅频特性; (c) 改进后的零、极点图; (d) 改进后的幅频特性

短, 使(1.26)式表示的 $|H(e^{j\omega})|$ 的分子变小, 即 $|H(e^{j\omega})|$ 在 $\omega = \arg[c_k]$ 频点形成波谷。而且, c_k 越靠近单位圆, 波谷就越低, 单位圆上的零点形成 $|H(e^{j\omega})|$ 的零点。

(3) 同理, 单位圆附近的极点 $d_k = |d_k|e^{j\arg d_k}$ 在 $\omega = \arg d_k$ 频点形成 $|H(e^{j\omega})|$ 的波峰, 且极点愈靠近单位圆, 波峰越尖锐(选择性越好)。但极点不能位于单位圆上, 否则系统不稳定。

请读者将图 1.3(a) 中的零点和极点沿径向移动以改变其到单位圆的距离, 并画出相应幅频特性, 验证以上结论。

根据以上结论, 对低阶 $H(z)$, 可根据 $H(z)$ 的零、极点位置, 定性画出 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线; 也可以由此概念, 通过设置适当的零、极点, 设计要求不高的简单数字滤波器, 即所谓的零、极点累试设计法。

1.1.5 模拟信号的采样与恢复

在信号处理领域, 一般将信号分为三大类: ① 模拟信号(连续信号); ② 时域离散信号; ③ 数字信号。每一类信号又有一维、二维、三维和多维信号。本书只讨论一维信号分析与处理, 在通信与信号处理中, 一维信号一般为时间 t 的函数, 连续信号是其幅度和时间都连续的信号, 记为 $x_a(t)$; 时域离散信号是时间上离散, 幅度取值仍连续的信号, 记为 $x(n)$, 简称为序列, $x(n)$ 可看作 $x_a(t)$ 的时域采样: $x(n) = x_a(nT)$, T 为采样周期, 数字信号是一种时间上和幅度上都离散化的信号, 记为 $x_d(n)$, $x_d(n)$ 可看成对 $x(n)$ 的幅度量化的结果。数字信号的最大优点是其幅度可用有限位二进制数来表示, 由于时间上也是离散

的,所以,有限时间内信号的数据量也有限,适合计算机处理。下面仅对理想采样与时域采样定理作以归纳:

设 $x_a(t)$ 是最高频率成分为 f_c (或 $\Omega_c = 2\pi f_c$) 的模拟信号,其理想采样信号用 $\hat{x}_a(t)$ 表示,则

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$

其中, T 为采样周期, $f_s = \frac{1}{T}$ 称为采样频率, $\delta(t)$ 是单位冲激函数。

如果 $X_a(j\Omega) = \text{FT}[x_a(t)]$, 如图 1.4(a) 所示, 则理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱函数为^[1]

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \text{FT}[\hat{x}_a(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - \frac{2\pi}{T}k)) \quad (1.28(a))$$

(1.28(a)) 式表明, 理想采样信号的频谱函数为被采样模拟信号频谱函数的周期延拓函数, 延拓周期为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。当 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$ (或 $f_s \geq 2f_c$) 时, 周期延拓无频率混叠失真, 如图 1.4(b) 所示。这时, 可用低通滤波器由 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 无失真恢复 $x_a(t)$; 当 $\Omega_s < 2\Omega_c$ 时, 产生频率混叠失真, 如图 1.4(c) 所示。这时, 不能由 $\hat{x}_a(t)$ 恢复 $x_a(t)$ 。

当 $f_s = 2f_c$ 时, 称为奈奎斯特采样频率; 由图 1.4(c) 可以看出, 频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 中, $|\Omega| < \frac{\pi}{T}$ 处的混叠值相当于将 $X_a(j\Omega)$ 中 Ω 超过 $\frac{\pi}{T}$ 的部分折叠回来的值, 所以, 将 $\frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$ 称为折叠频率。

由以上所述可得出有名的时域采样定理:

设模拟信号的最高频率成分为 Ω_c , 即

$$X_a(j\Omega) = \text{FT}[x_a(t)] = 0, \quad |\Omega| > \Omega_c$$

则只有当采样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$ 时, 经过采样后才不丢失 $x_a(t)$ 的信息。这时, 可使理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过图 1.5 所示理想低通滤波器 $G(j\Omega)$, 无失真恢复出 $x_a(t)$ 。

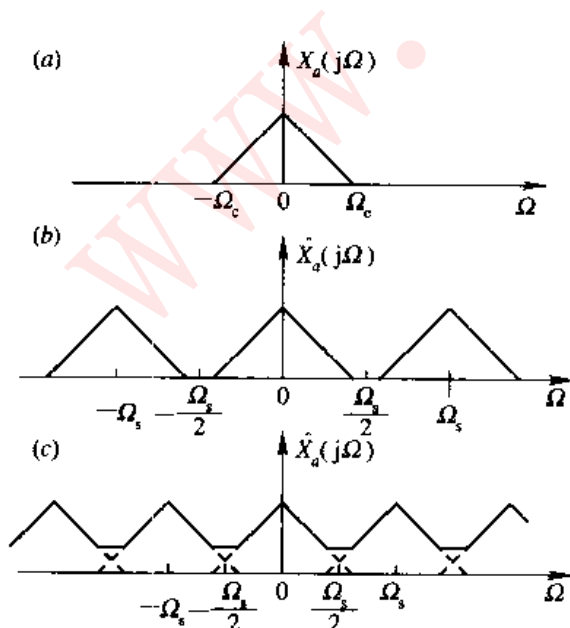


图 1.4 信号采样前后的频谱图

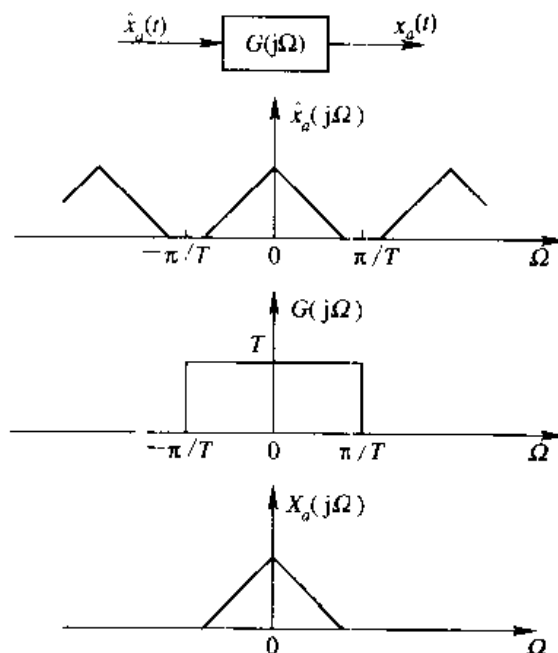


图 1.5 采样恢复的频域说明

学习过程中,只有熟悉采样前后的频谱关系,才能在模拟信号数字化的实际工作中正确选取采样频率和 A/D 及 D/A 变换系统。在后续课程(如通信原理)中,会介绍实际采样量化与恢复方法,到时看到,对各种实际采样方式,采样频率都必须满足采样定理。

1.1.6 理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 与采样序列 $x_a(nT)$ 的频谱关系

理想采样只是一种数学模型,它使采样定理的证明大大简化,但实际工程中无法实现。实际上可采用采样保持电路和量化电路及采样时钟组成的 A/D 变换器得到采样序列 $x(n)=x_a(nT)$ 的近似值(存在量化误差,但选用字长较长的 A/D 变换器,可控制量化误差在工程允许的范围)。所以,通常用采样序列 $x(n)$ 的频谱来描述理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱,观察频率混叠失真现象,验证时域采样理论。下面推导 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系。

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= \text{FT}[\hat{x}_a(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} = \text{FT}[x_a(nT)]|_{\omega=\Omega T} \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})\end{aligned}\quad (1.28(b))$$

由上式可见, $\hat{X}_a(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 之间仅有的差别是尺度变换 $\omega = \Omega T$, 第三章所讲的离散傅里叶变换(DFT)可以计算 $X(e^{j\omega})$ 的采样值。所以可在计算机上用 DFT 计算 $X(e^{j\omega})$ 的采样,来讨论 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的特性。

1.2 例 题

例 1.1 如果时域离散线性时不变系统的单位脉冲响应为 $h(n)$, 输入 $x(n)$ 是以 N 为周期的周期序列, 试证明其输出 $y(n)$ 亦是以 N 为周期的周期序列。

证

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$y(n+kN) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n+kN-m), \quad k \text{ 为整数}$$

因为 $x(n)$ 以 N 为周期, 所以

$$\begin{aligned}x(n+kN-m) &= x(n-m) \\ y(n+kN) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = y(n)\end{aligned}$$

即 $y(n)$ 也是周期序列, 且周期为 N 。

例 1.2 如果系统的输出 $y(n)$ 是输入 $x(n)$ 乘上一个复数, 则该输入 $x(n)$ 称为系统的本征信号。

(1) 证明序列 $x(n)=z^n$ 是时域离散线性时不变系统的一个本征信号, 其中 z 为一个复常数。

(2) 证明 $z^n u(n)$ 不是时域离散线性时不变系统的本征信号。其中 z 是一个复常数。

证 (1) $y(n) = h(n) * x(n)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{n-m} \\ &= z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} \end{aligned}$$

因为 z 是一个复常数, 所以 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}$ 是一个复常数, 故 z^n 为线性时不变系统的一个本征信号。特别是当 $z=e^{j\omega}$ 时, 可得出如下非常重要的关系式:

$$x(n) = z^n = e^{j\omega n}, \quad \omega \text{ 为数字频率}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

即复指数序列 $e^{j\omega n}$ 是线性时不变系统的一个特征信号。 $H(e^{j\omega})$ 为系统的频率响应函数。

$$(2) \quad y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

代入 $x(n)=z^n u(n)$ 得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{n-m}u(n-m) \\ &= z^n u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} \frac{u(n-m)}{u(n)} \end{aligned}$$

上式中, $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} \frac{u(n-m)}{u(n)}$ 与 n 有关, 不是复常数, 所以, $z^n u(n)$ 不是线性时不变系统的本征信号。

例 1.3 已知一个线性非移变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 在区间 $N_0 \leq n \leq N_1$ 之外全为零; 输入信号 $x(n)$ 在区间 $N_2 \leq n \leq N_3$ 之外全为零; 其输出响应在区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之外全为零。试确定 N_4 、 N_5 与 N_0 、 N_1 、 N_2 和 N_3 的关系式。

解 根据题意可画出 $h(m)$ 、 $x(m)$ 、 $x(-m)$ 、 $x(N_4-m)$ 、 $x(N_5-m)$ 及 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$ 的非零区间图分别如图 1.6(a)、(b)、(c)、(d)、(e) 和 (f) 所示。由卷积的图解计算方法可知,

$$N_4 = N_0 + N_2, \quad N_5 = N_1 + N_3$$

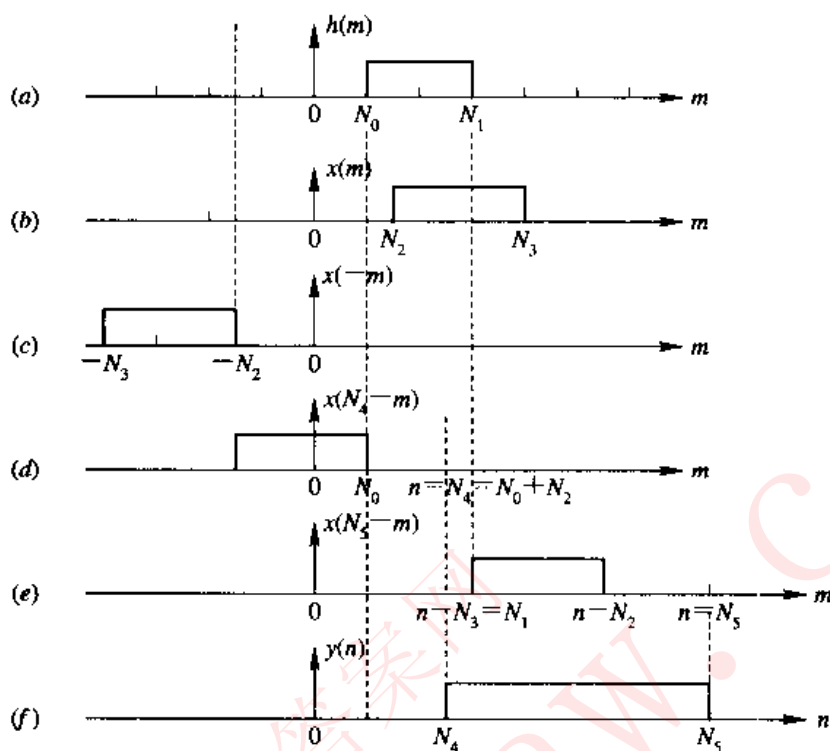


图 1.6 例 1.3 中计算 $y(n)$ 的定限示意图

例 1.4 已知线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 为

$$h(n) = a^{-n}u(-n), \quad 0 < a < 1$$

计算该系统的单位阶跃响应。

解 用 $s(n)$ 表示系统的单位阶跃响应, 则

$$\begin{aligned} s(n) &= h(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{-m}u(-m)u(n-m), \quad 0 < a < 1 \end{aligned}$$

(1) 当 $n \leq 0$ 时, $u(-m)u(n-m) = \begin{cases} 1, & -\infty \leq m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases}$, 所以

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{m=-\infty}^n a^{-m} = \sum_{m=-n}^{\infty} a^m = \sum_{m=-n}^0 a^m - \sum_{m=0}^{\infty} a^m - 1 \\ &= \frac{1 - a^{-(n+1)}}{1 - a^{-1}} + \frac{1}{1-a} - 1 \\ &= \frac{a - a^{-n}}{a-1} + \frac{a}{1-a} = \frac{a^{-n}}{1-a} \end{aligned}$$

(2) 当 $n > 0$ 时, $u(-m)u(n-m) = \begin{cases} 1, & -\infty \leq m \leq 0 \\ 0, & m > 0 \end{cases}$, 因此

$$s(n) = \sum_{m=-\infty}^0 a^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m = \frac{1}{1-a}$$

所以

$$s(n) = \frac{1}{1-a} [a^{-n}u(-n) + u(n-1)]$$

例 1.5 如果系统的输出变化不会发生在输入变化之前,则称该系统为因果系统。证明此定义等价于:当 $n < 0$ 时,线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n) = 0$,则该系统必然为因果系统。

证 (1) 必要性证明:由因果系统定义,若

$$x_1(n_1) = x_2(n_1), \quad n_1 < n_0$$

则

$$y_1(n_1) = y_2(n_1), \quad n_1 < n_0$$

其中, $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 为线性时不变系统分别对 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的响应序列。

$$y_1(n_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_1(n_1-m)$$

$$y_2(n_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_2(n_1-m)$$

已知条件为:当 $n < n_0$ 时, $x_1(n) = x_2(n)$, 但当 $n > n_0$ 时, $x_1(n)$ 就不一定等于 $x_2(n)$ 。对 $n_1 < n_0$, 当上面求 $y_1(n_1)$ 和 $y_2(n_1)$ 的两个求和号的求和变量 $m < 0$ 时,可能使 $(n_1 - m) > n_0$, 从而 $x_1(n_1 - m)$ 就不一定满足 $x_1(n_1 - m) = x_2(n_1 - m)$ 。所以,要使 $y_1(n_1) = y_2(n_1)$, 必须满足

$$h(m) = 0, \quad m < 0$$

(2) 充分性证明:当 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$, 则

$$y_1(n_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_1(n_1-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x_1(n_1-m)$$

$$y_2(n_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_2(n_1-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x_2(n_1-m)$$

这时,对任意 $n_1 < n_0$, 由于 $m \geq 0$, 所以 $x_1(n_1 - m) = x_2(n_1 - m)$, 因此,

$$y_1(n_1) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x_1(n_1-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x_2(n_1-m) = y_2(n_1)$$

由因果系统定义知,该系统必为因果系统。

例 1.6 设时域离散线性非移变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入激励信号 $x(n)$ 分别为

$$h(n) = \left(\frac{j}{2}\right)^n u(n), \quad j = \sqrt{-1}$$

$$x(n) = \cos(\pi n)u(n)$$

求系统对 $x(n)$ 的稳态响应(n 足够大时的响应 $y(n)$)。

解 由于 $x(n) = \cos(\pi n)u(n) = (-1)^n u(n)$, 所以

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^m u(m) (-1)^{n-m} u(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^n \left(\frac{j}{2}\right)^m (-1)^{n-m} = (-1)^n \sum_{m=0}^n \left(-\frac{j}{2}\right)^m$$

$$= (-1)^n \frac{1 - (-j/2)^{n+1}}{1 + j/2}$$

当 n 足够大时, $(-j/2)^n$ 趋于零, 所以, 稳态解为

$$y(n) = \frac{(-1)^n}{1 - j/2} = (-1)^n \left| \frac{1}{5} - j \frac{2}{5} \right|$$

例 1.7 在信号处理系统中经常遇到图 1.7 所示的两种运算。取样器保留了输入序列中的偶数点而使奇数点为零；压缩器产生一个仅由输入序列中偶数点组成的序列。

图 1.8(a)、(b)所示的两个级联系统中，FA 和 FB 表示线性非移变因果滤波器，其中 FA 的频率响应函数为

$$H_A(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

试求图 1.8(a)和(b)所示两个系统等效时，FB 的频率响应函数 $H_B(e^{j\omega})$ 。

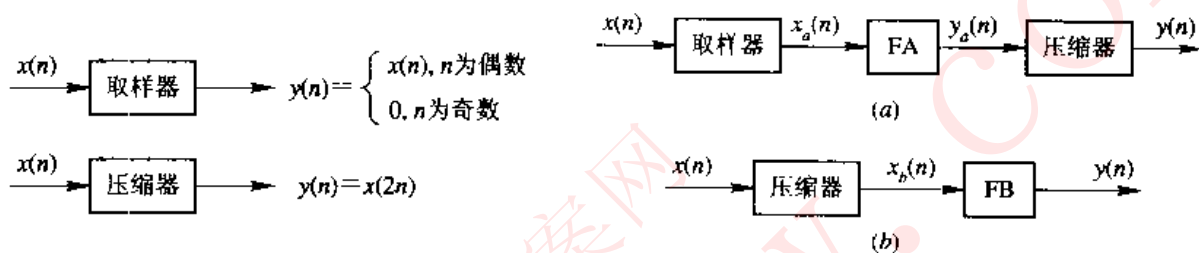


图 1.7 取样器和压缩器框图

图 1.8

解 方法 1

由题意知道图 1.8(a)中

$$x_a(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

FA 的单位脉冲响应为

$$h_A(n) = \text{IFT}[H_A(e^{j\omega})] = a^n u(n)$$

所以

$$y_a(n) = x_a(n) * h_A(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(m) h_A(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(2m) a^{n-2m} u(n-2m)$$

$$y(n) = y_a(2n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(2m) a^{2n-2m} u(2n-2m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(2m) a^{2n-2m} u(n-m)$$

图 1.8(b)中， $x_b(n) = x(2n)$ ，设 $h_B(n) = \text{IFT}[H_B(e^{j\omega})]$

$$y(n) = x_b(n) * h_B(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_b(m) h_B(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(2m) h_B(n-m)$$

当图 1.8(a)和图 1.8(b)两个系统等效时，比较上面 $y(n)$ 的两个表达式可知，要使两个系统输出相等，必须有

$$h_B(n-m) = a^{2n-2m}u(n-m)$$

即

$$h_B(n) = a^{2n}u(n)$$

故

$$H_B(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_B(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-a^2e^{-j2\omega}}$$

方法 2 图 1.8(a)中取样器输出 $x_a(n)$ 为

$$x_a(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]x(n)$$

$$X_a(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x(n)[1 + (-1)^n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x(n)e^{-j\omega n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-e^{-j\omega n})$$

$$= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X(-e^{j\omega})]$$

$$Y_a(e^{j\omega}) = H_A(e^{j\omega}) \cdot X_a(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \left[\frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X(-e^{j\omega}) \right]$$

压缩器输出

$$y(n) = y_a(2n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_a(2n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=\text{偶数}} y_a(n)e^{-j\frac{\omega}{2}n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}y_a(n)[1 + (-1)^n]e^{-j\frac{\omega}{2}n}$$

$$= \frac{1}{2}[Y_a(e^{j\frac{\omega}{2}}) + Y_a(-e^{j\frac{\omega}{2}})]$$

代入 $Y_a(e^{j\omega})$ 得到

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1-ae^{-j\frac{\omega}{2}}} [X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})] + \frac{1}{1+ae^{-j\frac{\omega}{2}}} [X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1-a^2e^{-j\omega}} [X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})] \right\}$$

图 1.8(b)中, 压缩器输出 $x_b(n)$ 的频谱为

$$X_b(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H_B(e^{j\omega})X_b(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}H_B(e^{j\omega})[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})]$$

比较两种系统输出 $y(n)$ 的频谱函数 $Y(e^{j\omega})$ 的表达式, 可以得出

$$H_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a^2e^{-j\omega}}$$

例 1.8 序列 $x(n] = x_r(n) + jx_i(n)$, $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 为实序列。 $X(z) = ZT[x(n)]$ 在单位圆下半部分为零。已知

$$x_r(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ -\frac{1}{4}, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ 的实部与虚部。

解 因为 $x_r(n)$ 为实序列, 所以根据傅里叶变换的共轭对称性知道

$$X_r(e^{j\omega}) = FT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X(e^{j(2\pi-\omega)})]$$

$$\begin{aligned} FT[x_r(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{j2\omega} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega) \end{aligned}$$

已知

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \pi \leq \omega \leq 2\pi$$

所以

$$X(e^{j(2\pi-\omega)}) = X(e^{j(2\pi-\omega)}) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时,

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = 2X_r(e^{j\omega}) = 1 - \cos 2\omega$$

当 $\pi < \omega \leq 2\pi$ 时, $X(e^{j\omega}) = 0$, 即

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - \cos 2\omega, & 0 \leq \omega \leq \pi \\ 0, & \pi < \omega \leq 2\pi \end{cases}$$

故

$$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = X(e^{j\omega})$$

$$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = 0$$

例 1.9 已知

$$x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N \\ 2N - n, & N + 1 \leq n \leq 2N \\ 0, & n < 0, 2N < n \end{cases}$$

求 $x(n)$ 的 Z 变换。

解 题中所给 $x(n)$ 为一三角序列, 可以看作两个相同的矩形序列的卷积。设 $y(n) = R_N(n) * R_N(n)$, 则

$$y(n) = R_N(n) * R_N(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n + 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 2N - (n + 1), & N \leq n \leq 2N - 1 \\ 0, & 2N \leq n \end{cases}$$

比较本题中的 $x(n)$ 与上面的 $y(n)$ 的表达式可得到

$$y(n - 1) = x(n)$$

00088883

所以 $Y(z)z^{-1} = X(z)$

$$Y(z) = ZT[R_N(n)] \cdot ZT[R_N(n)]$$

$$ZT[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}, \quad 0 < |z|$$

故 $X(z) = z^{-1} \frac{z^{N-1}-1}{z^{N-1}(z-1)} \cdot \frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)} = \frac{1}{z^{2N-1}} \left(\frac{z^N-1}{z-1} \right)^2, \quad 0 < |z|$

例 1.10 已知 $X(z) = ZT[x(n)] = e^z + e^{1/z} (z \neq 0)$, 求 $x(n)$ 。

解 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^{-n}$

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \cdots + \frac{z^{-n}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = e^z + e^{1/z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \\ &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|!} z^{-n} \end{aligned}$$

所以 $x(n) = \delta(n) + \frac{1}{|n|!}$

例 1.11 已知 $x(n]$ 为实序列, 且 $X(z) = ZT[x(n)]$ 的所有零点和极点皆位于单位圆之内。试求出一个不等于 $x(n)$ 的实序列 $x_1(n)$, 并要求 $x_1(n)$ 满足条件: ① $x_1(0) = x(0)$, ② $|x_1(n)| = |x(n)|$, ③ $X_1(z) = ZT[x_1(n)]$ 的所有零点和极点均位于单位圆内。

解 由 Z 变换的性质知道, 如果 $X(z) = ZT[x(n)]$, 则 $ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$ 。当 $a = e^{j\theta}$ 时, 满足条件①、②和③, 但不满足 $x_1(n)$ 为实序列的要求。所以, 只能取 $\theta = \pi$, 可得实序列

$$x_1(n) = a^n x(n) = e^{j\pi n} x(n) = (-1)^n x(n)$$

这时, $x_1(0) = x(0)$

$$|x_1(n)| = |(-1)^n x(n)| = |x(n)|$$

$$X_1(z) = X(-z), \quad \text{所有零、极点均在单位圆内}$$

$$x_1(n) \neq x(n)$$

满足要求。

例 1.12 工程实际中, 经常采用数字滤波器对模拟信号进行滤波处理, 处理系统框图如图 1.9 所示。图中 T 为采样周期, 假设 T 满足采样定理(无频率混叠失真)。把从 $x_a(t)$ 到 $y(t)$ 的整个系统等效成一个模拟滤波器。

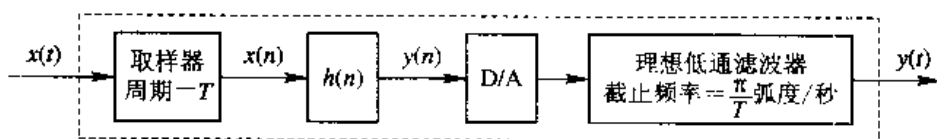


图 1.9 模拟信号数字处理系统框图

(a) 如果数字滤波器 $h(n)$ 的截止频率为 $\omega_c = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$, $\frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$, 求整个等效系统的截止频率 Ω_c 。

(b) 对于 $\frac{1}{T} = 20 \text{ kHz}$, 重复(a)。

解 (a) 对采样数字滤波器, $\omega = \Omega T$, 所以

$$\omega_c = \Omega_c T = \frac{\pi}{8}$$

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{\pi}{8T}$$

最后一级理想低通滤波器的截止频率为 $\frac{\pi}{T} \text{ rad/s}$, 因此整个系统截止频率由 $\Omega_c = \frac{\pi}{8T} \text{ rad/s}$ 确定。

$$f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{1}{16T} = \frac{10\,000}{16} = 625 \text{ Hz}$$

(b) 当 $1/T = 20 \text{ kHz}$ 时, 与(a)同样道理可得

$$f_c = \frac{1}{16T} = \frac{20\,000}{16} = 1250 \text{ Hz}$$

例 1.13 实际的数字信号处理系统中, 一般将一个序列变换成模拟信号的过程是:

① 用数—模变换器将序列 $x(n)$ 变换成一个时间连续的阶梯信号 $x_g(t)$, ② 低通滤波。如图 1.10 所示。设 $x(n) = x_a(nT)$, 且 T 满足采样定理要求。试求无失真恢复 $x_a(t)$ 所需的低通滤波器的频率响应函数 $H_d(j\Omega)$ 。

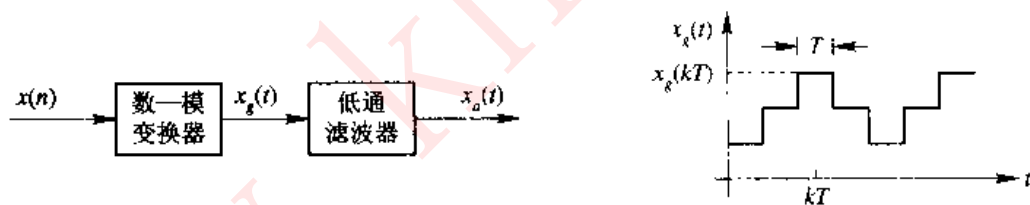


图 1.10 例 1.13 图

解 由图 1.10 可知

$$x_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) [u(t - nT) - u(t - nT - T)]$$

因此

$$\begin{aligned} X_g(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_g(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot [u(t - nT) - u(t - nT - T)] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega} \right]_{nT}^{(n+1)T} \\ &= \frac{1 - e^{-j\Omega T}}{j\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega nT} = \frac{1 - e^{-j\Omega T}}{j\Omega} X(e^{j\Omega T}) \end{aligned}$$

其中

$$X(e^{j\Omega T}) = \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega nT}$$

由(1.28(a))和(1.28(b))式可以得到

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T}$$

故

$$X_g(j\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega T}}{j\Omega T} X_a(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-j\Omega T/2} \cdot X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T}$$

由于恢复低通滤波器输出为 $x_a(t)$, 所以

$$X_a(j\Omega) = H_a(j\Omega) \cdot X_g(j\Omega)$$

其中 $H_a(j\Omega) = \text{FT}[h_a(t)]$, 所以

$$H_a(j\Omega) = \frac{X_a(j\Omega)}{X_g(j\Omega)} = \begin{cases} \frac{(\Omega T/2)e^{j\Omega T/2}}{\sin(\Omega T/2)}, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在实际工程中, 由于以上所求 $H_a(j\Omega)$ 在模拟域不易实现, 所以, 在 D/A 变换前先对 $x(n)$ 进行预校正数字滤波, 最后的模拟低通滤波器用一般低通滤波特性就可以了, 如图 1.11 所示。

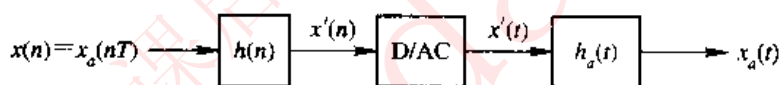


图 1.11 加入预校正数字滤波器的恢复系统框图

图中的预校正滤波器频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)] = \frac{(\omega/2)e^{j\omega/2}}{\sin(\omega/2)}, \quad |\omega| < \omega_c$$

ω_c 为 $X(e^{j\omega})$ 的最高频率, 即

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_c < |\omega| \leq \pi$$

在数字域容易实现这种滤波器。在高质量语音处理中, 这种预校正数字滤波非常重要。

例 1.14 时域离散线性非移变系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \quad a, b \text{ 为常数}$$

(1) 要求系统稳定, 确定 a 和 b 的取值域;

(2) 要求系统因果稳定, 重复(1)。

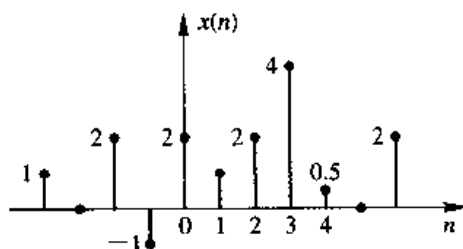
解 (1) $H(z)$ 的极点为 $z_1=a, z_2=b$ 。系统稳定的条件是 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆, 即单位圆上不能有极点。所以, 只要满足 $|a| \neq 1, |b| \neq 1$ 即可使系统稳定。即 a 和 b 的取值域为除单位圆以外的整个 z 平面。但 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆时, 系统不一定为因果系统。

(2) 系统因果稳定的条件是 $H(z)$ 的所有极点全在单位圆内, 所以 a 和 b 的取值域为

$$0 \leq |a| < 1, \quad 0 \leq |b| < 1$$

1.3 教材第一章习题解答

1. 用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 及其加权和表示题 1 图所示的序列。



题 1 图

解

$$x(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n+2) - \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 0.5\delta(n-4) + 2\delta(n-6)$$

2. 给定信号:

$$x(n) = \begin{cases} 2n+5, & -4 \leq n \leq -1 \\ 6, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

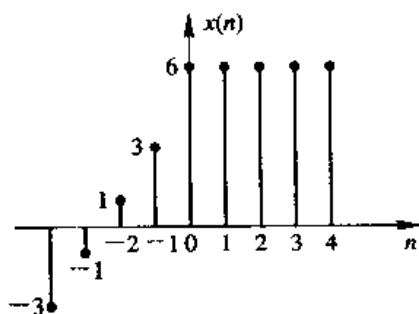
- (1) 画出 $x(n)$ 序列的波形, 标上各序列值;
- (2) 试用延迟的单位脉冲序列及其加权和表示 $x(n)$ 序列;
- (3) 令 $x_1(n) = 2x(n-2)$, 试画出 $x_1(n)$ 波形;
- (4) 令 $x_2(n) = 2x(n+2)$, 试画出 $x_2(n)$ 波形;
- (5) 令 $x_3(n) = x(2-n)$, 试画出 $x_3(n)$ 波形。

解

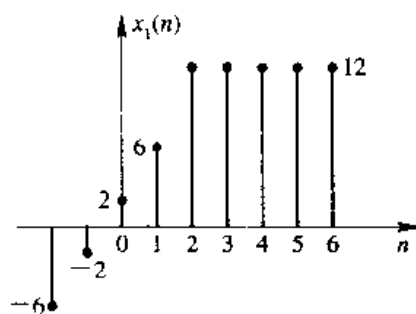
(1) $x(n)$ 的波形如题 2 解图(一)所示。

$$x(n) = -3\delta(n+4) - \delta(n+3) + \delta(n+2) + 3\delta(n+1) - 6\delta(n) + 6\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 6\delta(n-3) + 6\delta(n-4)$$

(3) $x_1(n)$ 的波形是 $x(n)$ 的波形右移 2 位, 再乘以 2, 画出图形如题 2 解图(二)所示。



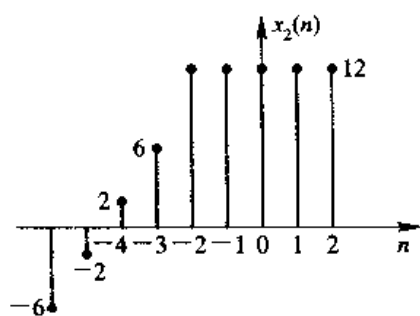
题 2 解图(一)



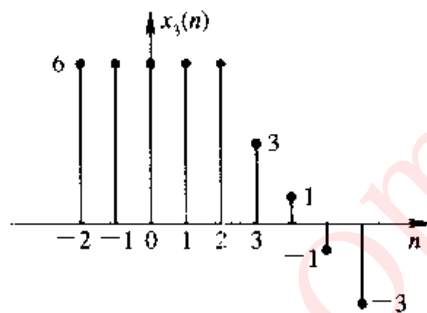
题 2 解图(二)

(4) $x_2(n)$ 的波形是 $x(n)$ 的波形左移 2 位, 再乘以 2, 画出图形如题 2 解图(三)所示。

(5) 画 $x_3(n)$ 时, 先画 $x(-n)$ 的波形(即将 $x(n)$ 的波形以纵轴为中心翻转 180°), 然后再右移 2 位, $x_3(n)$ 波形如题 2 解图(四)所示。



题 2 解图(三)



题 2 解图(四)

3. 判断下面的序列是否是周期的, 若是周期的, 确定其周期。

(1) $x(n] = A\cos\left(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8}\right)$, A 是常数;

(2) $x(n] = e^{j\left(\frac{1}{8}n - \pi\right)}$ 。

解

(1) $\omega = \frac{3}{7}\pi$, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{14}{3}$, 这是有理数, 因此是周期序列, 周期是 $T = 14$;

(2) $\omega = \frac{1}{8}$, $\frac{2\pi}{\omega} = 16\pi$, 这是无理数, 因此是非周期序列。

4. 对题 1 图给出的 $x(n)$, 要求:

(1) 画出 $x(-n)$ 的波形;

(2) 计算 $x_e(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(-n))$, 并画出 $x_e(n)$ 的波形;

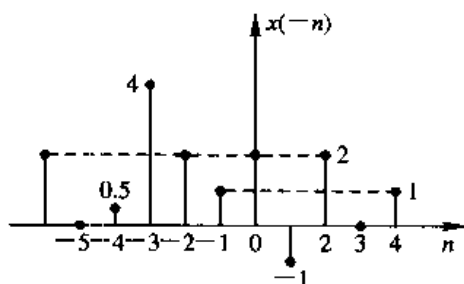
(3) 计算 $x_o(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(-n))$, 并画出 $x_o(n)$ 的波形;

(4) 令 $x_1(n) = x_e(n) + x_o(n)$, 将 $x_1(n)$ 与 $x(n)$ 进行比较, 你能得到什么结论?

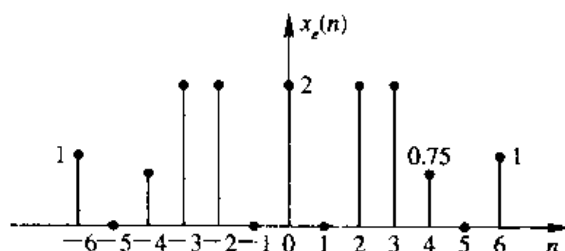
解

(1) $x(-n)$ 的波形如题 4 解图(一)所示;

(2) 将 $x(n)$ 与 $x(-n)$ 的波形对应相加, 再除以 2, 得到 $x_e(n)$, 毫无疑问这是一个偶对称序列。波形如题 4 解图(二)所示;



题 4 解图(一)



题 4 解图(二)

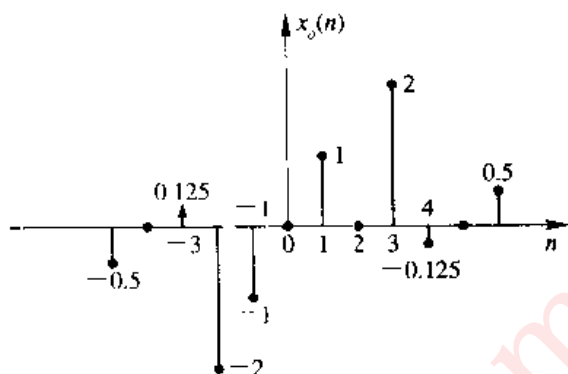
(3) 画出 $x_o(n)$ 的波形如题 4 解图(三)

所示;

(4) 很容易证明:

$$x(n) = x_1(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

等式说明实序列可以分解成偶对称序列和奇对称序列, 偶对称序列可以用题中(2)的公式计算, 奇对称序列可以用题中(3)的公式计算。



题 4 解图(三)

5. 设系统分别用下面的差分方程描述, $x(n]$ 与 $y(n]$ 分别表示系统输入和输出, 判断系统是否是线性时不变的?

(1) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$

(2) $y(n) = 2x(n) + 3$

(3) $y(n) = x(n-n_0)$, n_0 为整常数

(4) $y(n) = x(-n)$

(5) $y(n) = x^2(n)$

(6) $y(n) = x(n^2)$

(7) $y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$

(8) $y(n) = x(n)\sin(\omega n)$

解

(1) 令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n) = x(n-n_0) + 2x(n-n_0-1) + 3x(n-n_0-2)$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) + 2x(n-n_0-1) + 3x(n-n_0-2) = y'(n)$$

故该系统是时不变系统。

$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)]$$

$$= ax_1(n) + bx_2(n) + 2(ax_1(n-1) + bx_2(n-1)) + 3(ax_1(n-2) + bx_2(n-2))$$

$$T[ax_1(n)] = ax_1(n) + 2ax_1(n-1) + 3ax_1(n-2)$$

$$T[bx_2(n)] = bx_2(n) + 2bx_2(n-1) + 3bx_2(n-2)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)], \text{ 故该系统是线性系统。}$$

(2) 令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n) = 2x(n-n_0) + 3$, 因为

$$y(n-n_0) = 2x(n-n_0) + 3 = y'(n)$$

故该系统是时不变的。又因为

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) + 3$$

$$T[ax_1(n)] = 2ax_1(n) + 3, T[bx_2(n)] = 2bx_2(n) + 3$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] \neq aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

故该系统是非线性系统。

(3) 这是一个延时器, 延时器是一个线性时不变系统, 下面予以证明。

令输入为 $x(n-n_1)$, 输出为 $y'(n)=x(n-n_1-n_0)$, 因为

$$y(n-n_1)=x(n-n_1-n_0)=y'(n)$$

故延时器是一个时不变系统。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故延时器是线性系统。

$$(4) \quad y(n)=x(-n)$$

令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n)=x(-n+n_0)$, 因为

$$y(n-n_0)=x(-n+n_0)=y'(n)$$

因此系统是时不变系统。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(-n)+bx_2(-n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故系统是线性系统。

$$(5) \quad y(n)=x^2(n)$$

令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n)=x^2(n-n_0)$, 因为

$$y(n-n_0)=x^2(n-n_0)=y'(n)$$

故系统是时不变系统。又因为

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= (ax_1(n)+bx_2(n))^2 \\ &\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \\ &= ax_1^2(n)+bx_2^2(n) \end{aligned}$$

因此系统是非线性系统。

$$(6) \quad y(n)=x(n^2)$$

令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n)=x((n-n_0)^2)$, 因为

$$y(n-n_0)=x((n-n_0)^2)=y'(n)$$

故系统是时不变系统。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n^2)+bx_2(n^2)\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故系统是线性系统。

$$(7) \quad y(n)=\sum_{m=0}^n x(m)$$

令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n)=\sum_{m=0}^n x(m-n_0)$, 因为

$$y(n-n_0)=\sum_{m=0}^{n-n_0} x(m)\neq y'(n)$$

故系统是时变系统。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{m=0}^n (ax_1(m)+bx_2(m))=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

故系统是线性系统。

$$(8) \quad y(n)=x(n)\sin(\omega n)$$

令: 输入为 $x(n-n_0)$, 输出为 $y'(n)=x(n-n_0)\sin(\omega n)$, 因为

$$y(n-n_0)=x(n-n_0)\sin(\omega(n-n_0))\neq y'(n)$$

故系统不是时不变系统。又因为

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= ax_1(n)\sin(\omega n) + bx_2(n)\sin(\omega n) \\ &= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

故系统是线性系统。

6. 给定下述系统的差分方程, 试判定系统是否是因果、稳定系统, 并说明理由。

$$(1) y(n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

$$(2) y(n] = x(n) + x(n+1)$$

$$(3) y(n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_1} x(k)$$

$$(4) y(n] = x(n+n_0)$$

$$(5) y(n] = e^{x(n)}$$

解

(1) 只要 $N \geq 1$, 该系统就是因果系统, 因为输出只与 n 时刻的和 n 时刻以前的输入有关。如果 $|x(n)| \leq M$, 则 $|y(n)| \leq M$, 因此系统是稳定系统。

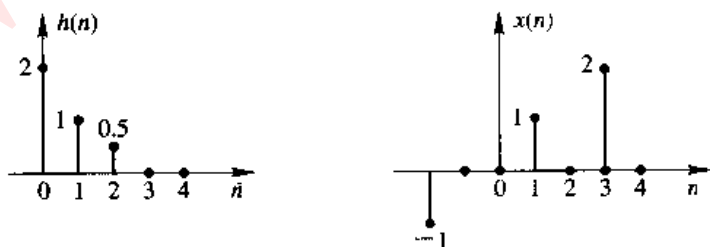
(2) 该系统是非因果系统, 因为 n 时刻的输出还和 n 时刻以后 ($n+1$ 时间) 的输入有关。如果 $|x(n)| \leq M$, 则 $|y(n)| \leq |x(n)| + |x(n+1)| \leq 2M$, 因此系统是稳定系统。

(3) 如果 $|x(n)| \leq M$, $|y(n)| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_1} |x(k)| \leq (2n_1+1)M$, 因此系统是稳定的。系统是非因果的, 因为输出还和 $x(n)$ 的未来值有关。

(4) 系统是非因果系统, 因为 n 时刻输出和 n 时刻以后的输入有关。如果 $|x(n)| \leq M$, $|y(n)| \leq M$, 因此系统是稳定的。

(5) 系统是因果系统, 因为系统的输出不取决于 $x(n)$ 的未来值。如果 $|x(n)| \leq M$, 则 $|y(n)| = |e^{x(n)}| \leq e^{|x(n)|} \leq e^M$, 因此系统是稳定的。

7. 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 如题 7 图所示, 要求画出输出 $y(n)$ 的波形。



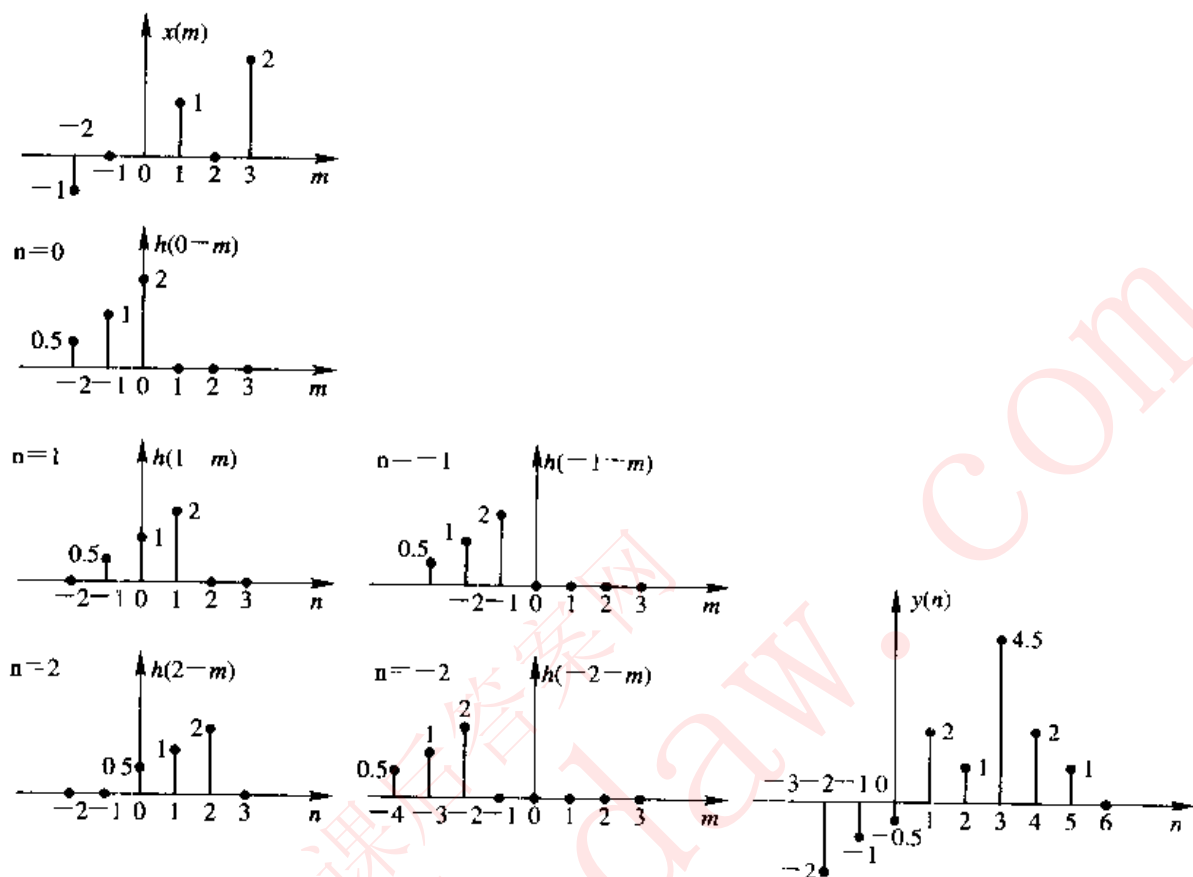
题 7 图

解

解法(1) 采用图解法。

$$y(n] = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{n_2} x(m)h(n-m)$$

图解法的过程如题 7 解图所示。



题 7 解图

解法(2) 采用解析法。按照题 7 图写出 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的表达式:

$$x(n) = -\delta(n+2) + \delta(n-1) + 2\delta(n-3)$$

$$h(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

因为

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) * A\delta(n-k) = Ax(n-k)$$

所以

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * \left[2\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) \right] \\ &= 2x(n) + x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) \end{aligned}$$

将 $x(n)$ 的表示式代入上式, 得到

$$\begin{aligned} y(n) &= -2\delta(n+2) - \delta(n+1) - 0.5\delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2) \\ &\quad + 4.5\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5) \end{aligned}$$

8. 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入 $x(n]$ 分别有以下三种情况, 分别求出输出 $y(n)$ 。

(1) $h(n) = R_4(n)$, $x(n) = R_5(n)$

(2) $h(n) = 2R_4(n)$, $x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$

(3) $h(n) = 0.5^n u(n)$, $x(n) = R_5(n)$

解

$$(1) \quad y(n] = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_5(n-m)$$

先确定求和域, 由 $R_4(m)$ 和 $R_5(n-m)$ 确定 $y(n)$ 对于 m 的非零区间如下:

$$0 \leq m \leq 3, \quad n-4 \leq m \leq n$$

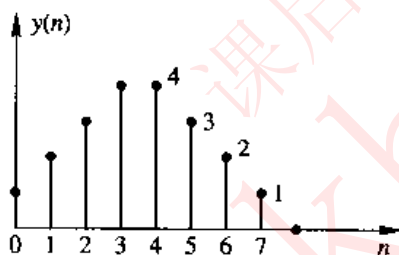
根据非零区间, 将 n 分成四种情况求解:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad n < 0, & \quad y(n) = 0 \\ \textcircled{2} \quad 0 \leq n \leq 3, & \quad y(n) = \sum_{m=0}^n 1 = n+1 \\ \textcircled{3} \quad 4 \leq n \leq 7, & \quad y(n) = \sum_{m=n-4}^3 1 = 8-n \\ \textcircled{4} \quad 7 < n, & \quad y(n) = 0 \end{aligned}$$

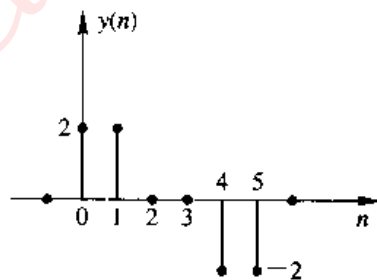
最后结果为

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, n > 7 \\ n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

$y(n)$ 的波形如题 8 解图(一)所示。



题 8 解图(一)



题 8 解图(二)

$$\begin{aligned} (2) \quad y(n) &= 2R_4(n) * [\delta(n) - \delta(n-2)] = 2R_4(n) - 2R_4(n-2) \\ &= 2[\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-4) - \delta(n-5)] \end{aligned}$$

$y(n)$ 的波形如题 8 解图(二)所示。

$$\begin{aligned} (3) \quad y(n] &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_5(m)0.5^n u(n-m) = 0.5^n \sum_{m=-\infty}^n R_5(m)0.5^{-m} u(n-m) \end{aligned}$$

$y(n)$ 对于 m 的非零区间为 $0 \leq m \leq 4, m \leq n$,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad n < 0, & \quad y(n) = 0 \\ \textcircled{2} \quad 0 \leq n \leq 4, & \quad y(n) = 0.5^n \sum_{m=0}^n 0.5^{-m} = \frac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5} = 2-0.5^n \\ & \quad = -(1-0.5^{n+1})0.5^n = 2-0.5^n \\ \textcircled{3} \quad 5 \leq n, & \quad y(n) = 0.5^n \sum_{m=0}^4 0.5^{-m} = \frac{1-0.5^{-4}}{1-0.5} 0.5^n = 31 \times 0.5^n \end{aligned}$$

最后写成统一表达式:

$$y(n) = (2-0.5^n)R_5(n) + 31 \times 0.5^n u(n-5)$$

9. 证明线性卷积服从交换律、结合律和分配律, 即证明下面等式成立:

$$(1) x(n) * h(n) = h(n) * x(n);$$

$$(2) x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n);$$

$$(3) x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)。$$

证明 (1) 因为

$$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

令 $m' = n - m$, 则

$$x(n) * h(n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x(n-m')h(m') = h(n) * x(n)$$

(2) 利用上面已证明的结果, 得到

$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] &= x(n) * [h_2(n) * h_1(n)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)[h_2(n-m) * h_1(n-m)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k)h_1(n-m-k) \end{aligned}$$

交换求和号的次序, 得到

$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h_1(n-m-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k)[x(n-k) * h_1(n-k)] \\ &= h_2(n) * [x(n) * h_1(n)] \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)[h_1(n-m) + h_2(n-m)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h_2(n-m) \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

10. 设系统的单位脉冲响应 $h(n) = \frac{3}{8}0.5^n u(n)$, 系统的输入 $x(n)$ 是一些观测数据, 设 $x(n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, 试用递推法求系统的输出 $y(n)$ 。递推时设系统初始状态为零状态。

解

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \frac{3}{8} \sum_{m=-\infty}^n x_m 0.5^{n-m} u(n-m) \\ &= \frac{3}{8} \sum_{m=0}^n x_m 0.5^{n-m}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

$$n = 0, \quad y(n) = \frac{3}{8}x_0$$

$$n = 1, \quad y(n) = \frac{3}{8} \sum_{m=0}^1 x_m 0.5^{1-m} = \frac{3}{8}[0.5x_0 + x_1]$$

$$n = 2, \quad y(n) = \frac{3}{8} \sum_{m=0}^2 x_m 0.5^{2-m} = \frac{3}{8} [0.5^2 x_0 + 0.5 x_1 + x_2]$$

.....

最后得到

$$y(n) = \frac{3}{8} \sum_{m=0}^n 0.5^m x_{n-m}$$

11. 设系统由下面差分方程描述:

$$y(n] = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果的, 利用递推法求系统的单位脉冲响应。

解 令: $x(n] = \delta(n)$

$$h(n] = \frac{1}{2}h(n-1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

$$n = 0, \quad h(0] = \frac{1}{2}h(-1) + \delta(0) + \frac{1}{2}\delta(-1) = 1$$

$$n = 1, \quad h(1] = \frac{1}{2}h(0] + \delta(1) + \frac{1}{2}\delta(0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$n = 2, \quad h(2] = \frac{1}{2}h(1] = \frac{1}{2}$$

$$n = 3, \quad h(3] = \frac{1}{2}h(2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

归纳起来, 结果为

$$h(n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \delta(n)$$

12. 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$, 式中 $f = 20 \text{ Hz}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

(1) 求出 $x_a(t)$ 的周期;

(2) 用采样间隔 $T = 0.02 \text{ s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样, 写出采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的表达式;

(3) 画出对应 $\hat{x}_a(t)$ 的时域离散信号(序列) $x(n]$ 的波形, 并求出 $x(n]$ 的周期。

解

(1) $x_a(t)$ 的周期是

$$T_c = \frac{1}{f} = 0.05 \text{ s}$$

$$(2) \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi fnT + \varphi) \delta(t - nT)$$

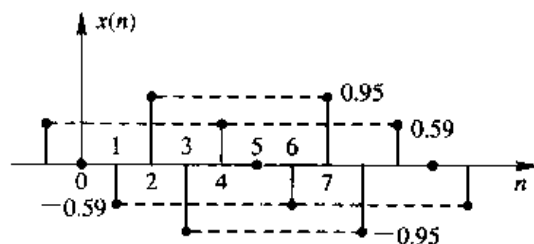
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(40\pi nT + \varphi) \delta(t - nT)$$

(3) $x(n]$ 的数字频率为

$$\omega = 0.8\pi, \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{5}{2}$$

周期 $N = 5$ 。

$x(n] = \cos(0.8\pi n + \pi/2)$, 画出其波形如题



题 12 解图

12 解图所示。

第二章

教材第二章习题解答

教材第二章讲述时域离散信号和系统的频域分析。基本内容包括序列的傅里叶变换和Z变换、时域离散线性时不变系统的频率响应函数和系统函数,以及系统因果性和稳定性的z域描述。这些内容及其学习要点在本书第一章中已经归纳总结。所以,本章仅给出教材第二章的习题解答。

1. 设 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的傅里叶变换,试求下面序列的傅里叶变换:

- | | |
|---|-------------------|
| (1) $x(n-n_0)$ | (2) $x^*(n)$ |
| (3) $x(-n)$ | (4) $x(n) * y(n)$ |
| (5) $x(n) \cdot y(n)$ | (6) $nx(n)$ |
| (7) $x(2n)$ | (8) $x^2(n)$ |
| (9) $\begin{cases} x(n/2), & n=\text{偶数} \\ 0, & n=\text{奇数} \end{cases}$ | |

解 (1) $\text{FT}[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n}$

令 $n' = n - n_0$, $n = n' + n_0$, 则

$$\text{FT}[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n')e^{-j\omega(n'+n_0)} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

(2) $\text{FT}[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} \right]^* = X^*(e^{-j\omega})$

(3) $\text{FT}[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n}$

令 $n' = -n$, 则

$$\text{FT}[x(-n)] = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')e^{j\omega n'} = X(e^{-j\omega})$$

(4) $\text{FT}[x(n) * y(n)] = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

证明 $x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$

$$\text{FT}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) \right] e^{-j\omega n}$$

令 $k = n - m$, 则

$$\begin{aligned} \text{FT}[x(n) * y(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k) \right] e^{-j\omega k} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \\ &= X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \text{FT}[x(n)y(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) e^{j\omega' n} d\omega' \right] e^{-j\omega n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega-\omega')n} d\omega' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega'}) X(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'
 \end{aligned}$$

或者
$$\text{FT}[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$$

(6) 因为 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$, 对该式两边对 ω 求导, 得到

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n} = -j \text{FT}[nx(n)]$$

因此
$$\text{FT}[nx(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$(7) \quad \text{FT}[x(2n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n}$$

令 $n' = 2n$

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[x(2n)] &= \sum_{\substack{n' \text{ 取偶数}}} x(n') e^{-j\omega n' / 2} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] e^{-j\frac{1}{2}\omega n} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{1}{2}\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n} x(n) e^{-j\frac{1}{2}\omega n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [X(e^{j\frac{1}{2}\omega}) + X(e^{j(\frac{1}{2}\omega - \pi)})]
 \end{aligned}$$

或者

$$\text{FT}[x(2n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\frac{1}{2}\omega}) + X(e^{j(\frac{1}{2}\omega - \pi)})]$$

$$(8) \quad \text{FT}[x^2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) e^{-j\omega n}$$

利用(5)题结果, 令 $x(n) = y(n)$, 则

$$\text{FT}[x^2(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'}) X(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$$

$$(9) \quad \text{FT}\left[x\left(\frac{n}{2}\right)\right] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ 取偶数}}}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\omega n}$$

令 $n' = n/2$, $-\infty \leq n' \leq \infty$. 则

$$\text{FT}\left[x\left(\frac{n}{2}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j2\omega n'} = X(e^{j2\omega})$$

2. 已知 $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$, 求 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换 $x(n)$ 。

解
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n}$$

3. 线性时不变系统的频率响应(传输函数) $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$, 如果单位脉冲响应 $h(n)$ 为实数序列, 试证明输入 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的稳态响应为

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta(\omega_0))$$

解 假设输入信号 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, 系统单位脉冲响应为 $h(n)$, 系统输出为

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega_0(n-m)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m} = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}$$

上式说明, 当输入信号为复指数序列时, 输出序列仍是复指数序列, 且频率相同, 但幅度和相位决定于网络传输函数, 利用该性质解此题。

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{1}{2} A [e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi}]$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2} A [e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0})] \\ &= \frac{1}{2} A [e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} |H(e^{j\omega_0})| e^{j\theta(\omega_0)} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} |H(e^{-j\omega_0})| e^{j\theta(-\omega_0)}] \end{aligned}$$

上式中 $|H(e^{j\omega})|$ 是 ω 的偶函数, 相位函数是 ω 的奇函数,

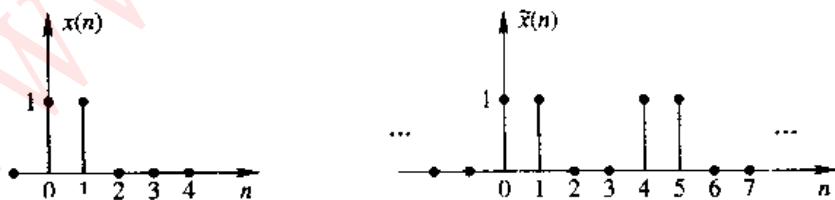
$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|, \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2} A |H(e^{j\omega_0})| [e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} e^{j\theta(\omega_0)} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\theta(\omega_0)}] \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta(\omega_0)) \end{aligned}$$

4. 设 $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 将 $x(n)$ 以 4 为周期进行周期延拓, 形成周期序列 $\tilde{x}(n)$,

画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形, 求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅里叶变换。

解 画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形如题 4 解图所示。



题 4 解图

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}k} (e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}) = 2 \cos\left|\frac{\pi}{4}k\right| \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}k}, \quad \tilde{X}(k) \text{ 以 4 为周期} \end{aligned}$$

或者

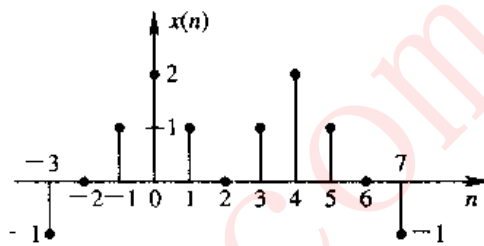
$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^1 e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k}} = \frac{e^{-j\frac{1}{2}\pi k} (e^{j\frac{1}{2}\pi k} - e^{-j\frac{1}{2}\pi k})}{e^{-j\frac{1}{4}\pi k} (e^{j\frac{1}{4}\pi k} - e^{-j\frac{1}{4}\pi k})} = e^{-j\frac{1}{4}\pi k} \frac{\sin \frac{1}{2}\pi k}{\sin \frac{1}{4}\pi k}$$

$\tilde{X}(k)$ 以 4 为周期

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{FT}[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{4}k) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k) \\ &= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) e^{-j\frac{\pi}{4}k} \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k) \end{aligned}$$

5. 设题 5 图所示的序列 $x(n]$ 的 FT 用 $X(e^{j\omega})$ 表示, 不直接求出 $X(e^{j\omega})$, 完成下列运算:

- (1) $X(e^{j0})$; (2) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$;
- (3) $X(e^{j\pi})$;
- (4) 确定并画出傅里叶变换为 $\text{Re}(X(e^{j\omega}))$



题 5 图

的时间序列 $x_e(n)$;

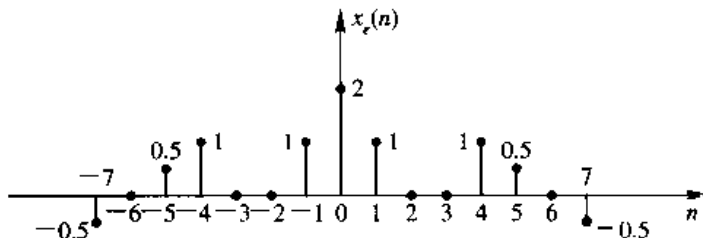
- (5) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$;
- (6) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$.

解

- (1) $X(e^{j0}) = \sum_{n=-3}^7 x(n) = 6$
- (2) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = x(0) \cdot 2\pi = 4\pi$
- (3) $X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\pi n} = \sum_{n=-3}^7 (-1)^n x(n) = 2$
- (4) 因为傅里叶变换的实部对应序列的共轭对称部分, 即

$$\begin{aligned} \text{Re}[X(e^{j\omega})] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n) e^{-j\omega n} \\ x_e(n) &= \frac{1}{2} (x(n) + x(-n)) \end{aligned}$$

按照上式画出 $x_e(n)$ 的波形如题 5 解图所示;



题 5 解图

- (5) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-3}^7 x(n)^2 = 28\pi$

(6) 因为

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \text{FT}[-jnx(n)]$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-3}^7 |nx(n)|^2 = 316\pi$$

6. 试求如下序列的傅里叶变换:

(1) $x(n) = \delta(n-3)$

(2) $x_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$

(3) $x_3(n) = a^n u(n), 0 < a < 1$

(4) $x_4(n) = u(n+3) - u(n-4)$

解

(1) $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-3)e^{-j\omega n} = e^{-j3\omega}$

(2) $X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$
 $= 1 + \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = 1 + \cos\omega$

(3) $X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

(4) $X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(n+3) - u(n-4)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^{\infty} e^{-j\omega n}$
 $= \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=-3}^3 e^{j\omega n} - \sum_{n=-3}^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=-3}^3 e^{j\omega n}$
 $= \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{1 - e^{j3\omega}}{1 - e^{j\omega}} e^{j3\omega}$
 $= \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} - \frac{1 - e^{j3\omega}}{1 - e^{j\omega}} = \frac{e^{-j3\omega} - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}} e^{j3\omega}$
 $= \frac{e^{-j\frac{7}{2}\omega} (e^{j\frac{7}{2}\omega} - e^{-j\frac{7}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} e^{j3\omega} = \frac{\sin(\frac{7}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$

或者 $x_4(n) = u(n+3) - u(n-4) = R_7(n+3)$

$$X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_7(n+3)e^{-j\omega n}$$

$$\text{FT}[R_7(n)] = \sum_{n=0}^6 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_7(n+3)e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}} e^{j3\omega}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{7}{2}\omega} (e^{j\frac{7}{2}\omega} - e^{-j\frac{7}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} e^{j3\omega} = \frac{e^{-j\frac{3}{2}\omega} (e^{j\frac{7}{2}\omega} - e^{-j\frac{7}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} = \frac{\sin(\frac{7}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$$

7. 设: (1) $x(n)$ 是实、偶函数; (2) $x(n)$ 是实、奇函数。分别分析推导以上两种假设下, 其 $x(n)$ 的傅里叶变换的性质。

解 令

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

(1) $x(n)$ 是实、偶函数,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

两边取共轭, 得到

$$X^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(-\omega)n} = X(e^{-j\omega})$$

因此

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

上式说明 $x(n)$ 是实序列, $X(e^{j\omega})$ 具有共轭对称性质。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[\cos\omega n - j\sin\omega n]$$

由于 $x(n)$ 是偶函数, $x(n)\sin\omega n$ 是奇函数, 那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n = 0$$

因此

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n$$

该式说明 $X(e^{j\omega})$ 是实函数, 且是 ω 的偶函数。

总结以上 $x(n)$ 是实、偶函数时, 对应的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是实、偶函数。

(2) $x(n)$ 是实、奇函数。

上面已推出, 由于 $x(n)$ 是实序列, $X(e^{j\omega})$ 具有共轭对称性质, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[\cos\omega n - j\sin\omega n]$$

由于 $x(n)$ 是奇函数, 上式中 $x(n)\cos\omega n$ 是奇函数, 那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n = 0$$

因此

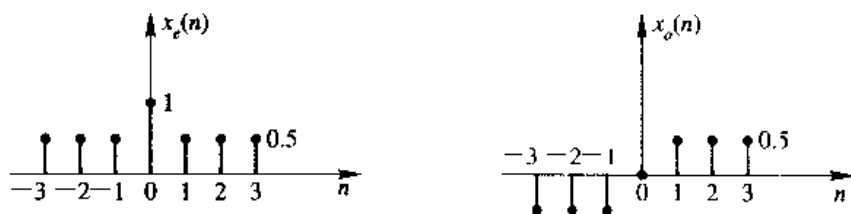
$$X(e^{j\omega}) = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n$$

这说明 $X(e^{j\omega})$ 是纯虚数, 且是 ω 的奇函数。

8. 设 $x(n] = R_4(n)$, 试求 $x(n)$ 的共轭对称序列 $x_r(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$, 并分别用图表示。

解
$$x_r(n) = \frac{1}{2}(R_4(n) + R_4(-n)), \quad x_o(n) = \frac{1}{2}(R_4(n) - R_4(-n))$$

$x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 的波形如题 8 解图所示。



题 8 解图

9. 设 $x(n] = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 分别求出其偶函数 $x_e(n)$ 和奇函数 $x_o(n)$ 的傅里叶变换。

解

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

因为 $x_e(n)$ 的傅里叶变换对应 $X(e^{j\omega})$ 的实部, $x_o(n)$ 的傅里叶变换对应 $X(e^{j\omega})$ 的虚部乘以 j , 因此

$$\begin{aligned} \text{FT}[x_e(n)] &= \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right] = \text{Re}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1 - ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}\right] \\ &= \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \\ \text{FT}[x_o(n)] &= j \text{Im}[X(e^{j\omega})] = j \text{Im}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right] = j \text{Im}\left[\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1 - ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}\right] \\ &= \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \end{aligned}$$

10. 若序列 $h(n)$ 是因果序列, 其傅里叶变换的实部为: $H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$, 求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解 $H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega = 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \text{FT}[h_e(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e(n)e^{-j\omega n}$

$$h_e(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ h_e(n), & n = 0 \\ 2h_e(n), & n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} = 2e^{-j\omega/2} \cos \frac{\omega}{2}$$

11. 若序列 $h(n)$ 是实因果序列, $h(0) = 1$, 其傅里叶变换的虚部为

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin \omega$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin \omega = -\frac{1}{2j}(e^{j\omega} - e^{-j\omega})$$

$$\text{FT}[h_o(n)] = jH_1(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_o(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_o(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = -1 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ h(n), & n = 0 \\ 2h_o(n), & n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} = 2e^{-j\omega/2} \cos \frac{\omega}{2}$$

12. 设系统的单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 输入序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$, 完成下面各题:

- (1) 求出系统输出序列 $y(n)$;
- (2) 分别求出 $x(n)$ 、 $h(n)$ 和 $y(n)$ 的傅里叶变换。

解

$$(1) \quad y(n) = h(n) * x(n) = a^n u(n) * [\delta(n) + \delta(n-2)] \\ = a^n u(n) + 2a^{n-2} u(n-2)$$

$$(2) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + 2\delta(n-2)]e^{-j\omega n} = 1 + 2e^{-j2\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j2\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

13. 已知 $x_a(t) = 2 \cos(2\pi f_c t)$, 式中 $f_c = 100 \text{ Hz}$, 以采样频率 $f_s = 400 \text{ Hz}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样, 得到采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$, 试完成下面各题:

- (1) 写出 $x_a(t)$ 的傅里叶变换表示式 $X_a(j\Omega)$;
- (2) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x(n)$ 的表达式;
- (3) 分别求出 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换和 $x(n)$ 的傅里叶变换。

解

$$(1) \quad X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cos(\Omega_c t)e^{-j\Omega t} dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\Omega_c t} + e^{-j\Omega_c t})e^{-j\Omega t} dt$$

上式中指数函数的傅里叶变换不存在, 引入奇异函数 δ 函数, 它的傅里叶变换可以表示成:

$$X_a(j\Omega) = 2\pi[\delta(\Omega - \Omega_c) + \delta(\Omega + \Omega_c)]$$

$$(2) \quad \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos(\Omega_c nT)\delta(t - nT) \\ x(n) = 2 \cos(\Omega_c nT), \quad -\infty < n < \infty$$

$$\Omega_0 = 2\pi f_0 = 200\pi \text{ rad}, \quad T = \frac{1}{f_0} = 2.5 \text{ ms}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - k\Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0 + k\Omega_0)] \end{aligned}$$

式中

$$\Omega_0 = 2\pi f_0 = 800\pi \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos(\Omega_0 n T) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos(\omega_0 n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) + \delta(\omega + \omega_0 - 2k\pi)] \end{aligned}$$

式中

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 0.5\pi \text{ rad}$$

上式推导过程中, 指数序列的傅里叶变换仍然不存在, 只有引入奇异函数 δ 函数, 才能写出它的傅里叶变换表示式。

14. 求以下序列的 Z 变换及收敛域:

- (1) $2^{-n}u(n)$ (2) $-2^{-n}u(-n-1)$
 (3) $2^{-n}u(-n)$ (4) $\delta(n)$
 (5) $\delta(n-1)$ (6) $2^{-n}[u(n) - u(n-10)]$

解

$$\begin{aligned} (1) \quad ZT[2^{-n}u(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n}u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad ZT[-2^{-n}u(-n-1)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -2^{-n}u(-n-1)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} -2^{-n}z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -2^n z^n \\ &= \frac{-2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad ZT[2^{-n}u(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n}u(-n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z}, \quad |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \quad ZT[\delta(n)] = 1, \quad 0 \leq |z| \leq \infty$$

$$(5) \quad ZT[\delta(n-1)] = z^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \infty$$

$$\begin{aligned} (6) \quad ZT[2^{-n}(u(n) - u(n-10))] &= \sum_{n=0}^9 2^{-n}z^{-n} \\ &= \frac{1 - 2^{-10}z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad 0 < |z| \leq \infty \end{aligned}$$

15. 求以下序列的 Z 变换及其收敛域, 并在 z 平面上画出极、零点分布图:

$$(1) \quad x(n) = R_N(n), \quad N = 4$$

(2) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \varphi)u(n)$, 式中: $r = 0.9$, $\omega_0 = 0.5\pi \text{ rad}$, $\varphi = 0.25\pi \text{ rad}$

$$(3) x(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N \\ 2N - n, & N + 1 \leq n \leq 2N, \text{ 式中 } N = 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

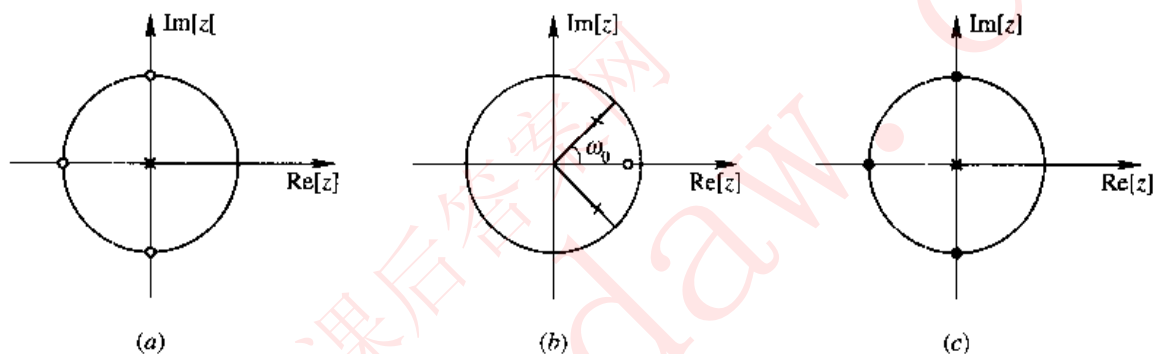
解

$$(1) X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_4(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^3 z^{-n} = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^4 - 1}{z^3(z - 1)}, \quad 0 < |z| \leq \infty$$

$$z^4 - 1 = 0, \text{ 零点为: } z_k = e^{j\frac{2\pi}{4}k}, k = 0, 1, 2, 3;$$

$$z^3(z - 1) = 0, \text{ 极点为: } z_{1,2} = 0, 1$$

零、极点图和收敛域如题 15 解图(a) 所示, 图中 $z = 1$ 处的零、极点相互对消。



题 15 解图

$$(2) x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \varphi)u(n) = \frac{1}{2}Ar^n [e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi}]u(n)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2}A \left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{2}A \left[\frac{e^{j\varphi}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{e^{-j\varphi}}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] \\ &= A \frac{\cos\varphi - r \cos(\omega_0 - \varphi)z^{-1}}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}, \quad |z| > r \end{aligned}$$

$$\text{零点: } z_1 = r \frac{\cos(\omega_0 - \varphi)}{\cos\varphi}, \quad \text{极点: } z_2 = re^{j\omega_0}, z_3 = re^{-j\omega_0}$$

零、极点分布图如题 15 解图(b) 所示。

(3) 令 $y(n) = R_4(n)$, 则

$$x(n+1) = y(n) * y(n)$$

$$zX(z) = [Y(z)]^2, \quad X(z) = z^{-1}[Y(z)]^2$$

因为

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^4 - 1}{z^3(z - 1)}$$

那么

$$X(z) = z^{-1} \left[\frac{z^4 - 1}{z^3(z - 1)} \right]^2 = \frac{1}{z^7} \cdot \left[\frac{z^4 - 1}{z - 1} \right]^2$$

极点为: $z_1 = 0, z_2 = 1$, 零点为: $z_k = e^{j\frac{2\pi}{4}k}, k = 0, 1, 2, 3$

在 $z = 1$ 处的极、零点相互对消, 收敛域为: $0 < |z| \leq \infty$, 极、零点分布图如题 15 解图(c) 所示。

16. 已知

$$X(z) = \frac{3}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$$

求出对应 $X(z)$ 的各种可能的序列表达式。

解 $X(z)$ 有两个极点: $z_1 = 0.5, z_2 = 2$, 因为收敛域总是以极点为界, 因此收敛域有以下三种情况:

$$|z| < 0.5, \quad 0.5 < |z| < 2, \quad 2 < |z|$$

三种收敛域对应三种不同的原序列。

(1) 当收敛域 $|z| < 0.5$ 时,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

$$\text{令 } F(z) = X(z) z^{n-1} = \frac{5 - 7z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})} z^{n-1} = \frac{5z - 7}{(z - 0.5)(z - 2)} z^n$$

$n \geq 0$, 因为 c 内无极点, $x(n) = 0$;

$n \leq -1$, c 内有极点 0, 但 $z = 0$ 是一个 n 阶极点, 改为求圆外极点留数, 圆外极点有

$z_1 = 0.5, z_2 = 2$, 那么

$$\begin{aligned} x(n) &= -\text{Res}[F(z), 0.5] - \text{Res}[F(z), 2] \\ &= -\frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} \Big|_{z=0.5} - \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} \Big|_{z=2} \\ &= -\left[3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot 2^n\right] u(-n - 1) \end{aligned}$$

(2) 当收敛域 $0.5 < |z| < 2$ 时,

$$F(z) = \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)}$$

$n \geq 0$, c 内有极点 0.5;

$$x(n) = \text{Res}[F(z), 0.5] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n < 0$, c 内有极点 0.5, 0, 但 0 是一个 n 阶极点, 改成求 c 外极点留数, c 外极点只有一个, 即 2,

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), 2] = -2 \cdot 2^n u(-n - 1)$$

最后得到

$$x(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2 \cdot 2^n u(-n - 1)$$

(3) 当收敛域 $2 < |z|$ 时,

$$F(z) = \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)}$$

$n \geq 0$, c 内有极点 0.5, 2;

$$x(n) = \text{Res}[F(z), 0.5] + \text{Res}[F(z), 2] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot 2^n$$

$n < 0$, 由收敛域判断, 这是一个因果序列, 因此 $x(n) = 0$ 。

或者这样分析, c 内有极点 $0.5, 2, 0$, 但 0 是一个 n 阶极点, 改求 c 外极点留数, c 外无极点, 所以 $x(n) = 0$ 。

最后得到

$$x(n) = \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \cdot 2^n \right] u(n)$$

17. 已知 $x(n] = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 分别求: (1) $x(n)$ 的 Z 变换; (2) $nx(n)$ 的 Z 变换; (3) $a^{-n}u(-n)$ 的 Z 变换。

解

$$(1) \quad X(z) = ZT[a^n u(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a$$

$$(2) \quad ZT[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z) = \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > a$$

$$(3) \quad ZT[a^{-n}u(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n} u(-n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1 - az}, \quad |z| < a^{-1}$$

18. 已知 $X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}}$, 分别求: (1) 收敛域 $0.5 < |z| < 2$ 对应的原序列 $x(n)$; (2) 收敛域 $|z| > 2$ 对应的原序列 $x(n)$ 。

解

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

$$F(z) = X(z) z^{n-1} = \frac{-3z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}} z^{n-1} = \frac{-3 \cdot z^n}{2(z - 0.5)(z - 2)}$$

(1) 当收敛域 $0.5 < |z| < 2$ 时,

$n \geq 0$, c 内有极点 0.5 ,

$$x(n) = \text{Res}[F(z), 0.5] = 0.5^n = 2^{-n}$$

$n < 0$, c 内有极点 $0.5, 0$, 但 0 是一个 n 阶极点, 改求 c 外极点留数, c 外极点只有 2 ,

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), 2] = 2^n$$

最后得到

$$x(n) = 2^{-n}u(n) + 2^n u(-n-1) = 2^{-n}$$

(2) 当收敛域 $|z| > 2$ 时,

$n \geq 0$, c 内有极点 $0.5, 2$,

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}[F(z), 0.5] + \text{Res}[F(z), 2] \\ &= 0.5^n + \frac{-3z^n}{2(z - 0.5)(z - 2)} (z - 2) \Big|_{z=2} \\ &= 0.5^n - 2^n \end{aligned}$$

$n < 0$, c 内有极点 $0.5, 2, 0$, 但极点 0 是一个 n 阶极点, 改成求 c 外极点留数, 可是 c 外没有极点, 因此 $x(n) = 0$ 。

最后得到

$$x(n) = (0.5^n - 2^n)u(n)$$

19. 分别用长除法, 部分分式法求下面 $X(z)$ 的反变换:

$$(1) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, |z| < \frac{1}{2}$$

解

(1) 部分分式法

$$X(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{3}z}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z - \frac{1}{3}}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z - \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{6}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{5}{6}}{z + \frac{1}{2}}$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x(n) = \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] u(n)$$

长除法

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{12}z^{-3} - \dots \\ 1 - \frac{1}{4}z^{-2} \overline{) 1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\ \underline{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \\ -\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \\ \underline{-\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-3}} \\ \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{12}z^{-3} \\ \underline{\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{16}z^{-4}} \\ -\frac{1}{12}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4} \\ \underline{-\frac{1}{12}z^{-3} - \frac{1}{48}z^{-5}} \\ \dots \end{array}$$

$$x(n) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \dots \right)$$

(2) 部分分式法

$$\begin{aligned}\frac{X(z)}{z} &= \frac{z-2}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z-2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{5}{2}}{z + \frac{1}{2}} \\ X(z) &= \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \\ x(n) &= \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(-n-1)\end{aligned}$$

长除法

$$\begin{array}{r} 8z - 4z^2 + 32z^3 - 16z^4 + 128z^5 + \cdots \\ - \frac{1}{4}z^{-2} + 1 \overline{) - 2z^{-1} + 1} \\ \underline{- 2z^{-1} + 8z} \\ 1 - 8z \\ \underline{1 - 4z^2} \\ - 8z + 4z^2 \\ \underline{- 8z + 32z^5} \\ 4z^2 - 32z^4 \\ \underline{4z^2 - 16z^4} \\ 32z^3 + 16z^4 \\ \cdots \end{array}$$

$x(n) \quad n > 0$	$x(-1)$	$x(-2)$	$x(-3)$	$x(-4)$	$x(-5)$	\cdots
0	8	-4	32	-16	128	\cdots

20. 设确定性实序列 $x(n]$ 的自相关函数用下式表示:

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$$

试用 $x(n]$ 的 Z 变换 $X(z)$ 和 $x(n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 分别表示自相关函数的 Z 变换 $R_{xx}(z)$ 和傅里叶变换 $R_{xx}(e^{j\omega})$ 。

解 $r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$

$$R_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m)z^{-m}$$

令 $m' = n+m$, 则

$$\begin{aligned}R_{xx}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x(m')z^{-m'-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x(m')z^{-m'} = X(z^{-1})X(z)\end{aligned}$$

另解:

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) = x(m) * x(-m)$$

$$R_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1})$$

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = R_{xx}(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega})$$

因为 $x(n)$ 是实序列, $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$, 因此 $R_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$ 。

21. 用 Z 变换法解下列差分方程:

$$(1) y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n), y(n) = 0, n \leq -1$$

$$(2) y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n), y(-1) = 1, y(n) = 0, \text{当 } n < -1 \text{ 时}$$

$$(3) y(n) - 0.8y(n-1) - 0.15y(n-2) = \delta(n)$$

$$y(-1) = 0.2, y(-2) = 0.5, y(n) = 0, \text{当 } n < -2 \text{ 时}$$

解

$$(1) Y(z) - 0.9Y(z)z^{-1} = 0.05 \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$F(z) = Y(z)z^{n-1} = \frac{0.05}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}z^{n-1} = \frac{0.05}{(z-0.9)(z-1)}z^{n-1}$$

$$n \geq 0,$$

$$y(n) = \text{Res}[F(z), 0.9] + \text{Res}[F(z), 1]$$

$$= \frac{0.05}{-0.1}0.9^{n-1} + \frac{0.05}{0.1} = -0.5 \cdot 0.9^{n-1} + 0.5$$

$$n < 0, y(n) = 0$$

最后得到:

$$y(n) = (-0.5 \cdot 0.9^{n-1} + 0.5)u(n)$$

$$(2) Y(z) - 0.9z^{-1}[Y(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} y(k)z^{-k-1}] = \frac{0.05}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) - 0.9z^{-1}[Y(z) + y(-1)z] = \frac{0.05}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) - 0.9 = \frac{0.05}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{0.95 - 0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$F(z) = Y(z)z^{n-1} = \frac{0.95 - 0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})(1-z^{-1})}z^{n-1} = \frac{0.95z - 0.9}{(z-0.9)(z-1)}z^n$$

$$n \geq 0,$$

$$y(n) = \text{Res}[F(z), 0.9] + \text{Res}[F(z), 1] = (0.45 \cdot 0.9^n + 0.5)u(n)$$

最后得到:

$$y(n) = (0.45 \cdot 0.9^n + 0.5)u(n) + \delta(n+1)$$

$$(3) Y(z) - 0.8z^{-1}[Y(z) + y(-1)z] - 0.15z^{-2}[Y(z) + y(-1)z + y(-2)z^2] = 1$$

$$Y(z) = \frac{1.91 + 0.3z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} - 0.15z^{-2}}$$

$$F(z) = Y(z)z^{n-1} = \frac{1.91 + 0.3z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} - 0.15z^{-2}}z^{n-1} = \frac{1.91z + 0.3}{(z - 0.3)(z - 0.5)}z^n$$

$$n \geq 0,$$

$$y(n) = \text{Res}[F(z), 0.3] + \text{Res}[F(z), 0.5] = \frac{0.873}{-0.2} \cdot 0.3^n + \frac{1.275}{0.2} \cdot 0.5^n$$

$$y(n) = -4.365 \cdot 0.3^n + 6.375 \cdot 0.5^n$$

最后得到:

$$y(n) = (-4.365 \cdot 0.3^n + 6.375 \cdot 0.5^n)u(n) + 0.2\delta(n+1) + 0.5\delta(n+2)$$

22. 设线性时不变系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \quad a \text{ 为实数}$$

(1) 在 z 平面上用几何法证明该系统是全通网络, 即 $|H(e^{j\omega})| = \text{常数}$;

(2) 参数 a 如何取值, 才能使系统因果稳定? 画出极、零点分布及收敛域。

解 (1) $H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{z - a^{-1}}{z - a}$, 极点: a , 零点: a^{-1}

设 $a = 0.6$, 极、零点分布图如题 22 解图(a) 所示。我们知道 $|H(e^{j\omega})|$ 等于极点矢量的长度除以零点矢量的长度, 按照题 22 解图(a) 得到

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{z - a^{-1}}{z - a} \right|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{e^{j\omega} - a^{-1}}{e^{j\omega} - a} \right| = \frac{AB}{AC}$$

因为角 ω 公用, $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{a}$, 且 $\triangle AOB \sim \triangle AOC$, 故 $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{a}$ 。

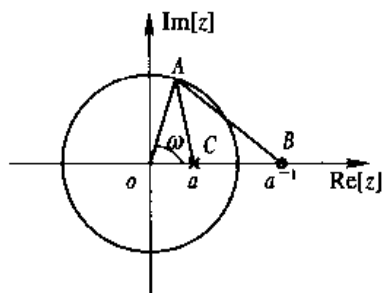
又因为 $|H(e^{j\omega})| = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{a}$, 故 $H(z)$ 是一个全通网络。

或者按照余弦定理证明,

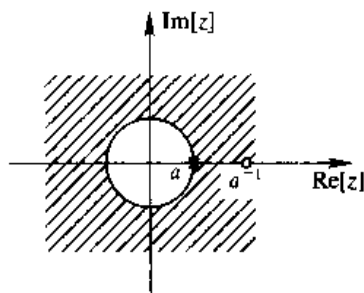
$$AC = \sqrt{a^2 - 2a \cos \omega + 1}, \quad AB = \sqrt{a^{-2} - 2a^{-1} \cos \omega + 1}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{AB}{AC} = \frac{a^{-1} \sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}} = \frac{1}{a}$$

(2) 只有选择 $|a| < 1$ 才能使系统因果稳定。设: $a = 0.6$, 极、零点分布图及收敛域如题 22 解图(b) 所示。



(a)



(b)

题 22 解图

23. 设系统由下面差分方程描述:

$$y(n] = y[n - 1] + y[n - 2] + x[n - 1]$$

(1) 求系统的系统函数 $H(z)$, 并画出极、零点分布图;

(2) 限定系统是因果的, 写出 $H(z)$ 的收敛域, 并求出其单位脉冲响应 $h(n)$;

(3) 限定系统是稳定的, 写出 $H(z)$ 的收敛域, 并求出其单位脉冲响应 $h(n)$ 。

解 (1) $y[n] = y[n - 1] + y[n - 2] + x[n - 1]$

将上式进行 Z 变换, 得到

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + Y(z)z^{-2} + X(z)z^{-1}$$

因此,

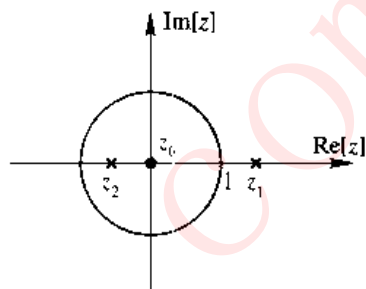
$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

零点: $z_0 = 0$

令 $z^2 - z - 1 = 0$, 求出极点:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

极、零点分布图如题 23 解图所示。



题 23 解图

(2) 由于限定系统是因果的, 收敛域需包含 ∞ 点在内的收敛域, 即 $|z| > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。为求系统的单位脉冲响应可以用两种方法求。一种是令输入等于单位脉冲序列, 通过解差分方程, 其零状态输入解便是系统的单位脉冲响应; 另一种方法是求 $H(z)$ 的逆 Z 变换。我们采用第二种方法。

$$h(n) = \text{IZT}[H(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} H(z)z^n \cdot dz$$

式中

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{令 } F(z) = H(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$n \geq 0$,

$$h(n) = \text{Res}[F(z), z_1] + \text{Res}[F(z), z_2]$$

$$= \frac{z^n}{(z - z_1)(z - z_2)}(z - z_2) \Big|_{z=z_1} + \frac{z^n}{(z - z_1)(z - z_2)}(z - z_1) \Big|_{z=z_2}$$

$$= \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^n}{z_2 - z_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

因为 $h(n)$ 是因果序列, $n < 0$, $h(n) = 0$ 。

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n)$$

(3) 由于限定系统是稳定的, 收敛域需选包含单位圆在内的收敛域, 即 $|z_2| < |z_1| < |z_1|$,

$$F(z) = H(z)z^{n-} = \frac{z^n}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$n \geq 0$, c 内只有极点 z_2 , 只需求 z_2 点的留数,

$$h(n) = \text{Res}[F(z), z_2] = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^n$$

$n < 0$, c 内只有两个极点, z_2 和 $z = 0$, 因为 $z = 0$ 是一个 n 阶极点, 改成求圆外极点留数, 圆外极点只有一个, 即 z_1 , 那么,

$$h(n) = -\text{Res}[F(z), z_1] = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^n$$

最后得到

$$y(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^n u(n) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^n u(-n-1)$$

24. 已知线性因果网络用下面的差分方程描述:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.9x(n-1)$$

- (1) 求网络的系统函数 $H(z)$ 及其单位脉冲响应 $h(n)$;
- (2) 写出网络传输函数 $H(e^{j\omega})$ 的表达式, 并定性画出其幅频特性曲线;
- (3) 设输入 $x(n] = e^{j\omega_0 n}$, 求输出 $y(n)$ 。

解

$$(1) \quad y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.9x(n-1)$$

$$Y(z) = 0.9Y(z)z^{-1} + X(z) + 0.9X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z)z^{n-1} dz$$

$$\text{令 } F(z) = H(z)z^{n-1} = \frac{z + 0.9}{z - 0.9} z^{n-1}$$

$n \geq 1$, c 内有极点 0.9,

$$h(n) = \text{Res}[F(z), 0.9] = \frac{z + 0.9}{z - 0.9} z^{n-1} (z - 0.9) \Big|_{z=0.9} = 2 \cdot 0.9^n$$

$n = 0$, c 内有极点 0.9, 0,

$$h(n) = \text{Res}[F(z), 0.9] + \text{Res}[F(z), 0]$$

$$\text{Res}[F(z), 0.9] = \frac{z + 0.9}{(z - 0.9)z} (z - 0.9) \Big|_{z=0.9} = 2$$

$$\text{Res}[F(z), 0] = \frac{z + 0.9}{(z - 0.9)z} z \Big|_{z=0} = -1$$

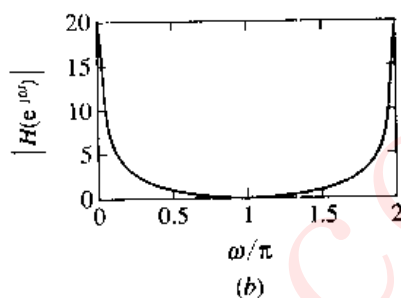
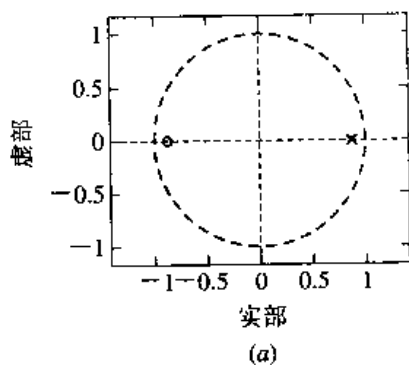
$$h(0) = 1$$

最后得到

$$h(n) = 2 \cdot 0.9^n u(n-1) + \delta(n)$$

$$(2) \quad H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)] = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 + 0.9e^{-j\omega}}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

极点 $z_1 = 0.9$, 零点 $z_2 = -0.9$, 极、零点图如题 24 解图(a) 所示。按照极、零点图定性画出的幅度特性如题 24 解图(b) 所示。



题 24 解图

(a) 零、极点分布; (b) 幅频特性

$$(3) \quad x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

$$y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) = e^{j\omega_0 n} \frac{1 + 0.9e^{-j\omega_0}}{1 - 0.9e^{-j\omega_0}}$$

25. 已知网络的输入和单位脉冲响应分别为 $x(n) = a^n u(n)$, $h(n) = b^n u(n)$, $0 < |a| < 1$, $0 < |b| < 1$, (1) 用卷积法求网络输出 $y(n)$; (2) 用 ZT 法求网络输出 $y(n)$ 。

解 (1) 用卷积法求 $y(n)$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b^m u(m) a^{n-m} u(n-m)$$

$$n \geq 0,$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^n a^{n-m} b^m = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} b^m = a^n \frac{1 - a^{-(n+1)} b^{n+1}}{1 - a^{-1} b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

$$n < 0,$$

$$y(n) = 0$$

最后得到

$$y(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} u(n)$$

(2) 用 ZT 法求 $y(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz$$

$$\text{令} \quad F(z) = Y(z) z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} = \frac{z^{n+1}}{(z - a)(z - b)}$$

$n \geq 0$, C 内有极点 a, b ,

$$y(n) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), b^-] = \frac{a^{n+1}}{a-b} + \frac{b^{n+1}}{b-a} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

因为系统是因果系统, $n < 0$, $y(n) = 0$, 最后得到

$$y(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} u(n)$$

26. 线性因果系统用下面差分方程描述:

$$y(n) - 2ry(n-1)\cos\theta + r^2y(n-2) = x(n)$$

式中 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, $0 < r < 1$, $\theta = \text{常数}$, 试求系统的响应 $y(n)$ 。

解 将题中给出的差分方程进行 Z 变换。

$$Y(z) - 2rY(z)z^{-1}\cos\theta + r^2Y(z)z^{-2} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2z^{-2}} = \frac{z^3}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}$$

式中 $z_1 = re^{j\theta}$, $z_2 = re^{-j\theta}$ 。

因为是因果系统, 收敛域为: $|z| > \max(r, |a|)$, 且 $n < 0$, $y(n) = 0$,

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(z)z^{n-1} dz, \quad c \text{ 包含三个极点, 即 } a, z_1, z_2。$$

$$F(z) = Y(z)z^{n-1} = \frac{z^3}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}z^{n-1} = \frac{z^{n+2}}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$y(n) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), z_1] + \text{Res}[F(z), z_2]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z^{n+2}}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}(z-a) \Big|_{z=a} \\ &+ \frac{z^{n+2}}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1) \Big|_{z=z_1} \\ &+ \frac{z^{n+2}}{(z-a)(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_2) \Big|_{z=z_2} \\ &= \frac{a^{n+2}}{(a-z_1)(a-z_2)} + \frac{z_1^{n+2}}{(z_1-a)(z_1-z_2)} + \frac{z_2^{n+2}}{(z_2-a)(z_2-z_1)} \\ &= \frac{(re^{-j\theta}-a)(re^{j\theta})^{n+2} - (re^{j\theta}-a)(re^{-j\theta})^{n+2} + j2r\sin\theta \cdot a^{n+2}}{j2r\sin\theta \cdot (re^{j\theta}-a)(re^{-j\theta}-a)} \end{aligned}$$

27. 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个不同的稳定的实因果序列, 求证:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})d\omega \right]$$

式中, $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 分别表示 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的傅里叶变换。

$$\text{解} \quad \text{FT}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

对上式进行 IFT, 得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega = x_1(n) * x_2(n)$$

令 $n = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})d\omega = [x_1(n) * x_2(n)]_{n=0} \quad (1)$$

由于 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是实稳定因果序列,

$$[x_1(n) * x_2(n)]|_{n=0} = \sum_{m=0}^n x_1(m)x_2(n-m)|_{n=0} = x_1(0)x_2(0) \quad (2)$$

$$x_1(0)x_2(0) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega}) d\omega \right] \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式, 得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}) d\omega = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega}) d\omega \right]$$

28. 若序列 $h(n)$ 是因果序列, 其傅里叶变换的实部如下式:

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}, \quad 0 < a < 1$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = \frac{1 - 0.5a(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 + a^2 - a(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}$$

$$H_R(z) = \frac{1 - 0.5a(z + z^{-1})}{1 + a^2 - a(z + z^{-1})} = \frac{1 - 0.5a(z + z^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - az)}$$

求上式 IZT, 得到序列 $h(n)$ 的共轭对称序列 $h_c(n)$ 。

$$h_c(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H_R(z) z^{n-1} dz$$

$$F(z) = H_R(z) z^{n-1} = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^{n-1}$$

因为 $h(n)$ 是因果序列, $h_c(n)$ 必定是双边序列, 收敛域取: $a < |z| < a^{-1}$ 。

$n \geq 1$ 时, c 内有极点 a ,

$$h_c(n) = \text{Res}[F(z), a] = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a^{-1})(z-a)} z^{n-1} (z-a) \Big|_{z=a} = \frac{1}{2} a^n$$

$n = 0$ 时, c 内有极点 $a, 0$,

$$F(z) = H_R(z) z^{n-1} = \frac{-0.5az^2 + z - 0.5a}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^{-1}$$

所以

$$h_c(n) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), 0] = 1$$

又因为

$$h_c(n) = h_c(-n)$$

所以

$$h_c(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0.5a^n, & n > 0 \\ 0.5a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h_c(n), & n = 0 \\ 2h_c(n), & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a^n, & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

29. 若序列 $h(n)$ 是实因果序列, 其傅里叶变换的虚部为

$$H_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}, \quad 0 < a < 1$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解
$$H_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = \frac{-a \frac{1}{2j} [e^{j\omega} - e^{-j\omega}]}{1 + a^2 - a(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}$$

令 $z = e^{j\omega}$

$$H_I(z) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{-a(z - z^{-1})}{1 + a^2 - a(z + z^{-1})} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{-a(z - z^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - az)}$$

$jH_I(e^{j\omega})$ 对应 $h(n)$ 的共轭反对称序列 $h_o(n)$, 因此 $jH_I(z)$ 的反变换就是 $h_o(n)$ 。

$$h_o(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C jH_I(z) z^{n-1} dz$$

因为 $h(n)$ 是因果序列, $h_o(n)$ 是双边序列, 收敛域取 $a < |z| < a^{-1}$,

$$F(z) = jH_I(z) z^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 - 1}{(z - a)(z - a^{-1})} z^{n-1}$$

$n \geq 1$ 时, c 内有极点 a ,

$$h_I(n) = \text{Res}[F(z), a] = \frac{z^2 - 1}{2(z - a)(z - a^{-1})} z^{n-1} (z - a) \Big|_{z=a} = \frac{1}{2} a^n$$

$n = 0$ 时, c 内有极点 $a, 0$,

$$F(z) = jH_I(z) z^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 - 1}{(z - a)(z - a^{-1})} z^{-1}$$

$$h_I(z) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), 0] = 0$$

因为

$$h_I(n) = -h(-n)$$

所以

$$h_I(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 0.5a^n, & n > 0 \\ -0.5a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = h_I(n)u_+(n) + h(0)\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a^n, & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

第三章

离散傅里叶变换(DFT)

本章主要学习数字信号处理中非常有用的一种变换——离散傅里叶变换(Digital Fourier Transform, 简称DFT)的定义、物理意义及其应用举例。

DFT之所以重要,是因为它使信号在频域离散化,从而使用计算机在频域进行信号处理成为可能,特别是由于DFT有多种快速算法,可使信号处理速度大大提高。所谓的快速卷积,就是利用DFT的循环卷积定理以及循环卷积等于线性卷积的条件,将时域序列卷积运算转换成频域序列相乘运算,而且时域与频域之间的变换均采用快速算法,从而使卷积运算速度大大提高。另外,DFT本身可用于随机信号的功率谱估计以及信号的谱分析等方面,从而使这些处理过程可采用数字计算实现。

3.1 学习要点及例题

3.1.1 DFT的定义、DFT与Z变换(ZT)、傅里叶变换(FT)的关系及DFT的物理意义

1. DFT的定义

设序列 $x(n)$ 为有限长序列,长度为 M ,则定义 $x(n)$ 的 $N(N \geq M)$ 点离散傅里叶变换为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

$X(k)$ 的 N 点离散傅里叶逆变换为

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

其中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, N 称为DFT变换区间长度。

由定义可见,DFT使有限长时域离散序列与有限长频域离散序列建立对应关系。

2. DFT与ZT、FT的关系

设

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)], \quad X(z) = \text{ZT}[x(n)], \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)]_{N \text{ 点}}$$

则

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3)$$

$$X(k) = X(z)|_{z = e^{j\frac{2\pi k}{N}}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

即序列 $x(n)$ 的 N 点DFT的物理意义是对 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样,采样间隔为 $2\pi/N$ 。即对序列频谱的离散化。

根据上述基本内容,我们可以看出,对同一序列 $x(n)$:

(1) DFT 变换区间长度 N 不同,变换结果 $X(k)$ 不同。当 N 确定后, $X(k)$ 与 $X(n)$ 是一一对应的。

(2) 当 N 足够大时, $|X(k)|$ 的包络可逼近 $|X(e^{j\omega})|$ 曲线。这一概念在用 DFT 进行谱分析时很重要。

(3) $|X(k)|$ 表示 $\omega_k = (2\pi/N)k$ 频点的幅度谱线。如果 $x(n)$ 是一模拟信号的采样,采样间隔为 T , $\omega = \Omega T = 2\pi f T$, 则 k 与相应的模拟频率 f_k 的关系为

$$\omega_k = \left| \frac{2\pi}{N} \right| k = 2\pi f_k T$$

即

$$f_k = \frac{k}{NT} \quad (3.5)$$

即对于模拟频率域而言, N 点 DFT 意味着频域采样间隔为 $\frac{1}{NT}$ Hz。所以用 DFT 进行谱分析时,称 $F=1/NT$ 为频率分辨率。而 NT 表示时域采样的区间长度(有时称为观察时间或记录时间,记为 $T_p=NT$),显然为了提高频率分辨率(使 F 变小),就必须使记录时间 T_p 足够大。

3.1.2 DFT 的隐含周期性

DFT 的隐含周期性可以从三种不同的角度得出:

(1) 如前所述, $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 的采样,由于 $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的周期函数,即 $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 的主值区 $[0, 2\pi]$ 上 N 点等间隔采样。显然,当自变量 k 超出 DFT 变换区间时,必然得到 $[0, 2\pi]$ 以外区间上 $X(e^{j\omega})$ 的采样,且以 N 为周期重复出现,得到 $\tilde{X}(k) = X((k))_N$ 。

(2) 由 W_N^{kn} 的周期性 $W_N^{(k+mN)n} = W_N^{kn}$, 可以证明 $X(k)$ 的隐含周期性。

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

即 $X(k)$ 隐含有周期性,周期为 N 。

(3) 由 $X(k)$ 与 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的 DFS 系数 $\tilde{X}(k)$ 的关系也可以得出 DFT 的隐含周期性。

设 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}_N(n) = x((n))_N$, 则 $\tilde{x}_N(n)$ 的 DFS 系数为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

显然,当 $k=0, 1, \dots, N-1$ 时,

$$\tilde{X}(k) = X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot R_N(k) \quad (3.6)$$

由于 $\tilde{X}(k)$ 是以 N 为周期的,所以有

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3.7)$$

由此得出结论,有限 N 长序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 也可以定义为 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的离散傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即(3.6)式。显然当 k 的取值域不加限制时, $X(k)$ 的取值将是以 N 为周期的,这就是 $X(k)$ 的隐含周期性。

另外, $\tilde{X}(k)$ 表示 $\tilde{x}_N(n)$ 的频谱特性, 所以取主值序列 $x(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n)$ 和 $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$ 作为一对变换是合理的。这里又得出 $X(k)$ 的一种物理解释: 实质上, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 表示周期序列 $x((n))_N$ 的频谱特性。这一概念在某些问题的证明推导中很有用。例如, 用 DFT 对周期信号进行谱分析以及频域采样定理的证明中要用到这一概念。

例 3.1 设 $x(n)$ 为存在傅里叶变换的任意序列, 其 Z 变换为 $X(z)$, $X(k)$ 是对 $X(z)$ 在单位圆上的 N 点等间隔采样, 即

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求 $X(k)$ 的 N 点离散傅里叶逆变换(记为 $x_N(n)$)与 $x(n)$ 的关系式。

解 由题意知

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

即 $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。由于 $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的, 所以采样序列

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X((k))_N$$

即 $\tilde{X}(k)$ 以 N 为周期。所以它必然与一周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 相对应, $\tilde{X}(k)$ 为 $\tilde{x}_N(n)$ 的 DFS 系数。

根据(3.6)和(3.7)式有

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \tilde{x}_N(n)R_N(n)$$

故只要求出 $\tilde{x}_N(n)$ 与 $x(n)$ 之间的关系式, 则 $x_N(n)$ 与 $x(n)$ 之间的关系式就得到了。由 DFS 展开公式有

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

为了导出 $\tilde{x}_N(n)$ 与 $x(n)$ 之间的关系, 应将上式中的 $\tilde{X}(k)$ 用 $x(n)$ 表示:

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

因为

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其它 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

即 $\tilde{x}_N(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓序列, 由此可得出

$$\begin{aligned} x_N(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \tilde{x}_N(n)R_N(n) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)R_N(n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 为 $x(n)$ 的周期延拓序列(以 N 为延拓周期)的主值序列。

这一证明方法及结论在频域采样定理证明中要用到。

3.1.3 DFT 的主要性质

DFT 的定义给出了一个有限长时域序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 的数学运算定义公式, 并给出了 DFT 的物理概念, 这对于理解与应用 DFT 是必不可少的。但利用 DFT 的一些基本性质解决(或解释)一些问题将更方便、更明了。例如, 实序列 DFT 的共轭对称性就可使 DFT 的运算量减半。

学习 DFT 的性质时, 应与傅里叶变换的性质对照学习, 要搞清楚二者的主要区别。我们知道, 傅里叶变换将整个时域 $(-\infty < n < +\infty)$ 作为变换区间, 所以在其性质中, 对称性以原点为对称点, 序列的移位范围无任何限制(因为无论移位多大, 仍不会移出傅里叶变换区间)。

然而, DFT 是对有限长序列定义的一种变换, 也就是说, DFT 变换区间为 $0 \leq n \leq N-1$ 。这一点与傅里叶变换截然不同, 由于 $n < 0$ 及 $n \geq N$ 区间在 DFT 变换区间以外, 所以讨论对称性时, 不能再以原点作为对称点, 而是以 $n=N/2$ 点作为对称点。为了区别于无限长共轭对称序列, 我们用 $x_{ep}(n)$ 和 $x_{op}(n)$ 分别表示有限长(或圆周)共轭对称序列和共轭反对称序列。其定义为

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.9)$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.10)$$

如果 $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$, 则

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)] \quad (3.11)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)] \quad (3.12)$$

其中, $x(n)$ 为长度为 N 的序列, $x_{ep}(n)$ 和 $x_{op}(n)$ 分别称为 $x(n)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量。

对应于傅里叶变换中的时移性质和线性卷积定理, DFT 有循环移位性质和循环卷积定理。对一些简单的性质, 以表格形式列出(表 3.1), 后面主要对 DFT 的共轭对称性进行归纳, 以便读者记忆与运用。详细内容请参阅教材第三章。

表 3.1 DFT 的基本性质

序号	序 列	离散傅里叶变换	备 注
1	$x(n)$	$X(k)$	
2	$y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$	$Y(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$	$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$ $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$
3	$x((n+m))_N \cdot R_N(n)$	$W_N^{-m} X(k)$	时域循环移位性质
4	$W_N^{nm} x(n)$	$X((k+m))_N R_N(k)$	频域循环移位性质
5	$x_1(n) * x_2(n)$ $= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$	$X_1(k) \cdot X_2(k)$	$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$ $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$
6	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$	
7	$x^*(N-n)$	$X^*(k)$	

注: 表中所有序列长度, DFT 变换区间长度均为 N 。

对一般的 N 长序列 $x(n)$, 按如下两种对偶的时域和频域表示形式给出 DFT 的共轭对称性的基本内容。

设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

(1) 如果

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n), \quad x_r(n) = \text{Re}[x(n)], \quad x_i(n) = \text{Im}[x(n)]$$

且 $X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

则 $X_{ep}(k) = \text{DFT}[x_r(n)] \quad (3.13(a))$

$$X_{op}(k) = \text{DFT}[jx_i(n)] \quad (3.13(b))$$

其中, $X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$, 为 $X(k)$ 的共轭对称分量;

$X_{op}(k) = \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(N-k)]$, 为 $X(k)$ 的共轭反对称分量。

(2) 如果

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

且 $X(k) = \text{Re}[X(k)] + j \text{Im}[X(k)]$

则 $\text{Re}[X(k)] = \text{DFT}[x_{ep}(n)] \quad (3.13(c))$

$$j \text{Im}[X(k)] = \text{DFT}[x_{op}(n)] \quad (3.13(d))$$

以上四个公式(3.13(a), (b), (c), (d))给出 DFT 的共轭对称性的基本内容, 对于一些具有特殊性质的信号, 均可由上面四个公式得出其 DFT 的对称性, 根据这些对称性, 可提高信号处理的速度。

(3) 实信号 DFT 的共轭对称性, 只要掌握了前述基本对称性内容(很有规律, 容易记忆), 则实信号(虚部为零的复信号的特例)DFT 的对称性很容易得出。

① 如果 $x(n)$ 为实序列, $x(n)$ 只有实部 $x_r(n)$, 所以根据式(3.13(a))可以知道, $X(k)$ 只有共轭对称分量, 即

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (3.13(e))$$

② 如果 $x(n)$ 实偶对称, 即

$$x(n) = x(N-n)$$

则 $X(k)$ 必然满足式(3.13(a))与式(3.13(c)), 故 $X(k)$ 实偶对称, 用数学式表示为

$$X(k) = X(N-k) \quad (3.13(f))$$

③ 如果 $x(n)$ 实奇对称, 即

$$x(n) = -x(N-n)$$

则其 $X(k)$ 必然满足式(3.13(a))与式(3.13(d)), $X(k)$ 虚奇对称, 表示为

$$X(k) = X^*(N-k) = -X(N-k) \quad (3.13(g))$$

由以上结论可知, 只要 $x(n)$ 是实序列, 则其离散傅里叶变换 $X(k)$ 必然共轭对称。所以只要计算出 $X(k)$ 的前一半 $N/2$ 个值, 后一半的 $X(k)$ 值可由对称性求得。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$X(N-k) = X^*(k)$$

这样可节省一半运算量。同时, 在做题时, 也可根据此性质判断所求实序列(特别是实偶、

实奇对称序列) $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 是否有错。

3.1.4 频域采样

时域采样是大家所熟悉的,模拟信号经时域采样所得时域离散序列的频谱是原模拟信号频谱的周期延拓函数,延拓周期为 $2\pi/T$ (T 为采样间隔,在数字频率域,延拓周期为 2π)。

随着学习的不断深入,我们发现在很多方面时域与频域具有对偶关系(当然,有些方面还未得到证明)。例如,时域卷积频谱相乘,频域卷积时域相乘。下面证明频域采样的特性与时域采样对偶,即频域采样,时域周期延拓,这一特性正好与“时域采样,频谱周期延拓”相对偶。

设 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$, $X(z) = \text{ZT}[x(n)]$, 现对 $X(e^{j\omega})$ 进行等间隔采样得 $\tilde{X}(k)$, 采样间隔为 $(2\pi/N)$ rad。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k \text{ 为整数}$$

由于 $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期,所以 $\tilde{X}(k)$ 以 N 为周期,可将 $\tilde{X}(k)$ 看作一个周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 的DFS系数,由(3.8)式得

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN)$$

即频域以 $2\pi/N$ 为间隔采样,对应于时域序列周期延拓,延拓周期为 N 。由此结论可得出频域采样定理为:

如果序列 $x(n)$ 长度为 M ,

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

即 $x(k)$ 是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。则只有当 $N \geq M$ 时,才能由 $X(k)$ 恢复出 $X(e^{j\omega})$ 和 $x(n)$,且

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN)R_1(n)$$

否则产生时域混叠失真,无法由 $X(k)$ 得到 $x(n)$ 。

例 3.2 已知

$$x(n) = R_6(n), \quad X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$$

对 $X(e^{j\omega})$ 采样得

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{6}k}, \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

求

$$x_6(n) = \text{IDFT}[X(k)], \quad n = 0, 1, \dots, 5$$

解 直接由频域采样概念得

$$x_6(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - 6l) \cdot R_6(n) = R_6(n) + R_2(n)$$

但是,如果直接计算,则比较麻烦。由于

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^5 e^{-j\omega n} = e^{-j\omega/2} \frac{\sin(4\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

可见直接采样得 $X(k)$, $\text{IDFT}[X(k)]$ 很难计算。

例 3.3 研究差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 定义的一阶线性 IIR 系统, 其中系数 $0 < a < 1$ 。如果 $x(n]$ 局限于周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$, 即对于任意整数 k 值, $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+kN)$ 。假设系统输出已达到稳态。试求相应的 FIR 系统的单位脉冲响应 $h_N(n)$ 。该系统对于周期输入的响应 $\tilde{y}(n)$ 与原差分方程定义的 IIR 系统产生的稳态输出相同。

解法 1 对于周期性输入 $\tilde{x}(n)$, 稳态输出必然为周期序列 $\tilde{y}(n)$, 由差分方程

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

可得系统函数

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$h(n) = \text{IZT}[H(z)] = a^n u(n)$$

对于周期输入 $\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$, 响应 $\tilde{h}(n)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{h}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n - kN) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{n-kN} u(n - kN) \\ &= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-kN} u(n - kN) \end{aligned}$$

只要取 FIR 系统的 $h_N(n)$ 为 $\tilde{h}(n)$ 的主值序列:

$$h_N(n) = \tilde{h}(n) \cdot R_N(n) = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-kN} u(n - kN) \cdot R_N(n)$$

当 $0 \leq n \leq N-1$ 时,

$$u(n - kN) = \begin{cases} 1, & n - kN \geq 0 \rightarrow k \leq 0 \\ 0, & 0 < k \end{cases}$$

$$h_N(n) = a^n \sum_{k=-\infty}^0 a^{-kN} R_N(n) = a^n \sum_{k=0}^{\infty} a^{kN} R_N(n) = \frac{a^n}{1 - a^N} R_N(n)$$

解法 2 已知

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad h(n) = a^n u(n)$$

根据频域采样概念

$$\tilde{H}(k) = H(z) \Big|_{z=e^{\frac{j2\pi}{N}k}} = \frac{1}{1 - aW_N^k}$$

$$\tilde{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) W_N^{-kn} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n - lN)$$

取

$$H(k) = \tilde{H}(k) R_N(k)$$

$$h_N(n) = \text{IDFT}[H(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-kn} = \tilde{h}(n) R_N(n)$$

与解法 1 同样道理, $h_N(n)$ 就是满足要求的 FIR 系统单位脉冲响应, 代入 $H(k)$ 计算

$$\begin{aligned} h_N(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - aW_N^k} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (aW_N^k)^l \right] W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{l(n-kN)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} = \begin{cases} 1, & l = n + rN \\ 0, & \text{其它 } l \end{cases}$$

故

$$h_N(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a^{n+rN} = \frac{a^n}{1-a^N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

例 3.4 令 $X(k)$ 表示 $x(n)$ 的 N 点 DFT,

(a) 证明如果 $x(n)$ 满足关系式

$$x(n) = -x(N-1-n)$$

则

$$X(0) = 0$$

(b) 证明当 N 为偶数时, 如果

$$x(n) = x(N-1-n)$$

则

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = 0$$

证 (a) 直接按 DFT 定义即可得证。因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

所以

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (1)$$

令 $n = N-1-m$, 则

$$X(0) = \sum_{m=N-1}^0 x(N-1-m) \quad (2)$$

①+②得

$$2X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + x(N-1-n)] = 0$$

所以,

$$X(0) = 0$$

(b) 因为 $x(n) = x(N-1-n)$, 所以

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n) W_N^{kn}$$

令 $m = N-1-n$, 上式可写成

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=N-1}^0 x(m) W_N^{k(N-1-m)} = W_N^{k(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-km} \\ &= W_N^{k(N-1)} X((-k))_N R_N(k) \end{aligned}$$

当 $k = \frac{N}{2}$ 时 (N 为偶数)

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = W_N^{\frac{N}{2}(N-1)} X\left[-\frac{N}{2}\right]_N = W_N^{\frac{N}{2}(N-1)} X\left[\frac{N}{2}\right]$$

因为

$$W_N^{\frac{N}{2}(N-1)} = e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)\frac{N}{2}} = -1$$

所以

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = -X\left[\frac{N}{2}\right]$$

因此证得

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = 0$$

例 3.5 若 $x(n)$ 为一个 N 点序列, $X(k)$ 为其 N 点离散傅里叶变换。试证明 DFT 的帕斯瓦尔关系式:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

证 由 DFT 的定义式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) x^*(n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

例 3.6 有限时宽序列的 N 点离散傅里叶变换相当于其 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。我们希望求出 $X(z)$ 在半径为 r 的圆上的 N 点等间隔采样, 即

$$\hat{X}(k) = X(z) \Big|_{z = re^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

试给出一种用 DFT 计算得到 $\hat{X}(k)$ 的方法。

解 因为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) r^{-n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) r^{-n} W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \text{DFT}[x(n)r^{-n}] \end{aligned}$$

由此可见, 先对 $x(n)$ 乘以指数序列 r^{-n} , 然后再进行 N 点 DFT 即可得到题中所要求的复频域采样 $\hat{X}(k)$ 。

例 3.7 长度为 N 的一个有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 另一个长度为 $2N$ 的序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

试用 $X(k)$ 表示 $y(n)$ 的 $2N$ 点离散傅里叶变换 $Y(k)$ 。

解 该题可以直接按 DFT 定义求解。

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} y(n)W_{2N}^{kn} = \sum_{n=\text{偶数}}^{2N-1} x\left[\frac{n}{2}\right]W_{2N}^{kn} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)W_{2N}^{k(2l)} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)W_N^{kl}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \\
 &= X(k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \\
 &= X((k))_N R_{2N}(k)
 \end{aligned}$$

上面最后一步采用的是 $X(k)$ 以 N 为周期的概念。

3.1.5 DFT 的应用

DFT 的应用极为广泛,凡是利用快速信号处理的领域都可能用到 DFT,实际上都是采用 DFT 的快速算法(FFT)计算 DFT 和 IDFT。信号经过一线性非移变系统进行处理,实质上就是计算输入信号 $x(n)$ 与系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的线性卷积。所谓的快速卷积就是根据 DFT 的循环卷积定理,在满足循环卷积等于线性卷积的条件下,通过 DFT 将 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的卷积变成频域 $H(k)$ 与 $X(k)$ 的相乘,再经过 IDFT 即得到 $y(n)=h(n)*x(n)$ 。其中 DFT 和 IDFT 均采用快速算法,从而使卷积运算速度大大提高。

DFT 的循环卷积定理如下:

$$\text{DFT}[h(n) \textcircled{N} x(n)] = \text{DFT}[h(n)] \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

其中 $h(n) \textcircled{N} x(n)$ 表示 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 N 点循环卷积。应特别注意,上式中所有 DFT 变换区间长度相同。

循环卷积与线性卷积的关系及二者相等的条件:

$$\text{设 } y_l(n) = h(n) * x(n)$$

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \cdot R_L(n)$$

则^[1]

$$y_c(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n-rL) \cdot R_L(n)$$

如果 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 N 和 M ,则 $y_l(n)$ 长度为 $N+M-1$ 。所以, $y_c(n)$ 等于 $y_l(n)$ 的条件是 $L \geq N+M-1$ 。用 DFT 计算线性卷积的方框图如图 3.1 所示。

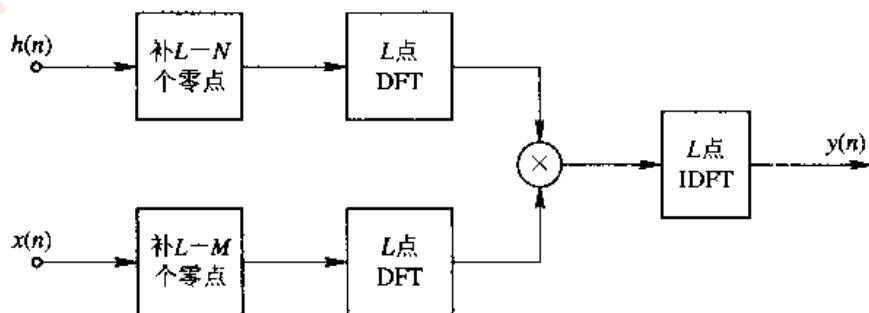


图 3.1 用 DFT 计算线性卷积框图 ($L \geq N+M-1$)

对 $M=\infty$ 的信号 $x(n)$, 可采用重叠相加法和重叠保留法计算 $y(n)=h(n)*x(n)^{-1}$ 。

另外, DFT 在谱估计及信号谱分析中也起着重要的作用。这些内容教材中都有详细的叙述, 下面通过几个例题, 说明用 DFT 解决某些问题的思路。

例 3.8 用 DFT 对模拟信号进行谱分析, 设模拟信号 $x_a(t)$ 的最高频率为 200 Hz, 以奈奎斯特频率采样得到时域离散序列 $x(n)=x_a(nT)$, 要求频率分辨率为 10 Hz。假设模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 如图 3.2 所示, 试画出 $X(e^{j\omega})=\text{FT}[x(n)]$ 和 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$ 的谱线图, 并标出每个 k 值对应的数字频率 ω_k 和模拟频率 f_k 的取值。

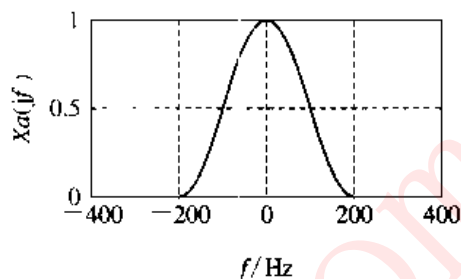


图 3.2 模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱图

解 因为最高频率 $f_{\max}=200$ Hz, 频率分辨率 $F=10$ Hz, 所以采样频率 f_s 为

$$f_s = 2f_{\max} = 400 \text{ 次/s}, \quad T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{400} \text{ s}$$

观察时间

$$T_p = \frac{1}{F} = 0.1 \text{ s}$$

采样点数

$$N = T_p f_s = 0.1 \times 400 = 40$$

所以, 对 $x_a(t)$ 进行采样得

$$x(n) = x_a(nT), \quad n = 0, 1, \dots, 39$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k\right]$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X\left|e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right|, \quad k = 0, 1, \dots, 39$$

$X_a(jf)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 及 $X(k)$ 分别如图 3.3(a)、图 3.3(b)、图 3.3(c) 所示。当 $f_s=2f_{\max}$ 时, $f=f_{\max}$ 对应 $\omega=2\pi fT=\frac{2\pi f_{\max}}{2f_{\max}}=\pi$, 由 $\omega=\pi=\frac{2\pi}{N}k$ 可求得 $k=\frac{N}{2}$; 当 $f>2f_{\max}$ 时, f_{\max} 对应的数字频率 $\omega=2\pi f_{\max}T<\pi$ 。 $X_a(jf)$ 与 $X(k)$ 的对应关系(由图 3.3(a) 和图 3.3(c) 可看出)为

$$TX(k) = X_a(jkF), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} \text{ Hz}$$

该例题主要说明了模拟信号 $x_a(t)$ 的时域采样序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 与 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(jf)$ 之间的对应关系。只有搞清该关系, 才能由 $X(k)$ 看出 $X_a(jf)$ 的频谱特征。否则, 即使计算出 $X(k)$, 也搞不清 $X(k)$ 的第 k 条谱线对应于 $X_a(jf)$ 的什么频率点的采样, 这样就达不到谱分析的目的。实际中, $X(k)$ 求出后, 也可以将横坐标换算成模拟频率, 换算公式为 $f_k=kF=k/(NT)$ 。直接作出 $X_a(kF)=X_a(f_k)=TX(k)$ 谱线图。

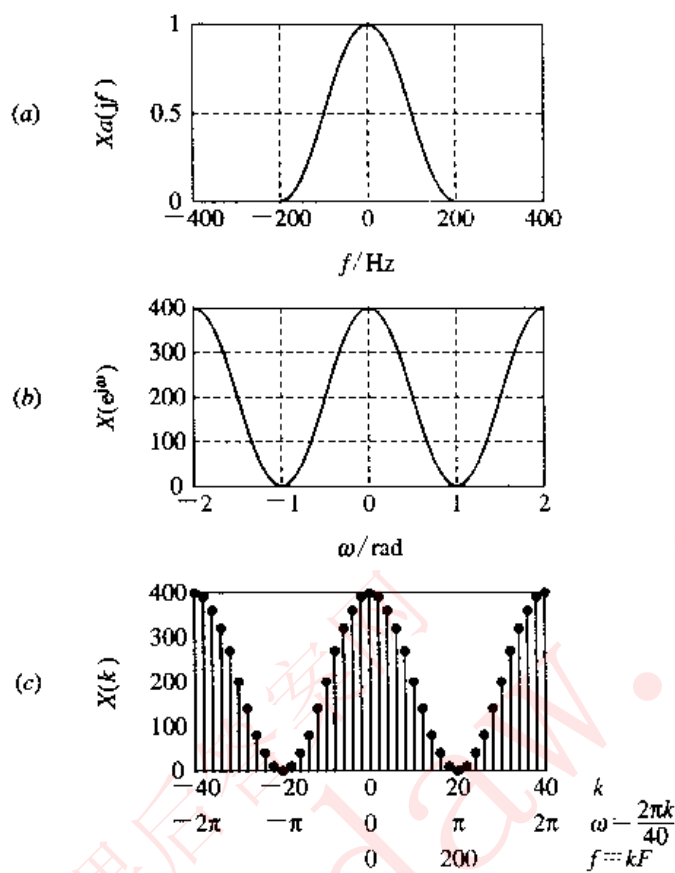


图 3.3 $X_a(jf)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 的对应关系

例 3.9 设 $f(t)$ 为时域周期带限实连续信号, 周期为 P , 即对于任意整数 l 有 $f(t) = f(t + lP)$ 。在 $f(t)$ 的复数傅里叶级数表示式中, 只有对应于 $-2\pi M/P$ 到 $2\pi M/P$ 之间各频率的项才是非零的, 即

$$f(t) = \sum_{r=-M}^M a_r e^{j(2\pi r t / P)}$$

且 a_r 为实数。

序列 $x_1(n)$ 是 $f(t)$ 的采样, 采样周期为 T_1 ,

$$x_1(n) = f(nT_1), \quad T_1 = \frac{P}{2M}$$

取 $x_1(n)$ 的一个周期, 并令其起点为 $n=0$, 设 $X_1(k)$ 表示 $x_1(n)$ 的 $2M$ 点 DFT, 即

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{2M-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{2M}}$$

我们由 $x_1(n)$ 求序列 $x_2(n)$, $x_2(n)$ 表示以原来两倍的速率对 $f(t)$ 的采样, 即

$$x_2(n) = f(nT_2), \quad T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{P}{4M}$$

令 $X_2(k)$ 为周期序列 $x_2(n)$ 中起点为 $n=0$ 的一个周期的 DFT。如何才能从 $X_1(k)$ 求得 $X_2(k)$? 证明你的回答。

解

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{2M-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{2M}}$$

由于 $x_1(n) = f(nT) = f\left[\frac{nP}{2M}\right] = \sum_{r=-M}^M a_r e^{j\frac{2\pi rn}{2M}}$

将 $x_1(n)$ 代入 $X_1(k)$ 的表达式, 可得

$$X_1(k) = \sum_{r=-M}^M a_r \sum_{n=0}^{2M-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{2M}} e^{j\frac{2\pi rn}{2M}} = \sum_{r=-M}^M a_r \sum_{n=0}^{2M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{2M}(k-r)}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{2M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{2M}(k-r)} = \begin{cases} 2M, & k = r + l \cdot 2M, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & k \neq r + l \cdot 2M \end{cases}$$

且 $-M \leq r \leq M$, 所以

$$X_1(k) = \begin{cases} 2Ma_k, & k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ 2Ma_{k-2M}, & k = 2M-1, 2M-2, \dots, M+1 \\ 2M(a_M + a_{-M}), & k = M \end{cases}$$

下面求 $X_2(k)$, 按题意有

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{4M-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{4M}}$$

$$x_2(n) = f(nT_2) = f\left[\frac{nP}{4M}\right] = \sum_{r=-M}^M a_r e^{j(2\pi r n P / 4M)} \Big|_{P=\frac{4M}{M}} = \sum_{r=-M}^M a_r e^{-j\frac{2\pi rn}{4M}}$$

因此

$$X_2(k) = \sum_{r=-M}^M a_r \sum_{n=0}^{4M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{4M}(k-r)}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{4M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{4M}(k-r)} = \begin{cases} 4M, & ((k))_{4M} = ((r))_{4M} \\ 0, & ((k))_{4M} \neq ((r))_{4M} \end{cases}$$

所以

$$X_2(k) = \begin{cases} 4Ma_k, & k = 0, 1, \dots, M \\ 4Ma_{k-4M}, & k = 4M-1, 4M-2, \dots, 3M \\ 0, & k = M+1, M+2, \dots, 3M-1 \end{cases}$$

故

$$X_2(k) = \begin{cases} 2X_1(k), & k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ X_1(M), & k = M, k = 3M \\ 0, & M+1 \leq k \leq 3M-1 \\ 2X_1(k-2M), & k = 3M+1, 3M+2, \dots, 4M-1 \end{cases}$$

$X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 的包络示意图如图 3.4 所示。

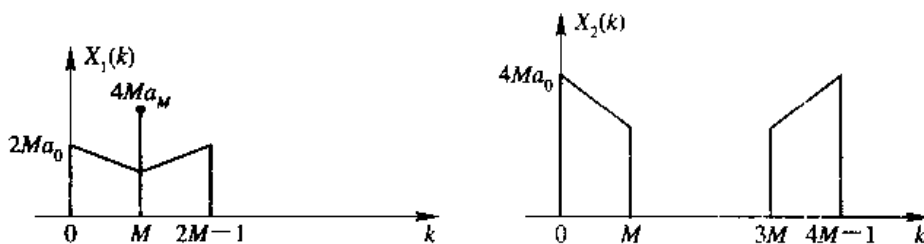


图 3.4 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 示意图

例 3.10 设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示一个因果稳定 IIR 系统的输入和输出, $x(n)$ 与 $y(n)$ 满足如下差分方程:

$$y(n) = \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) + x(n) \quad (3.14)$$

要求利用 N 点 DFT 确定系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上的 N 点等间隔采样。

(a) 假定 $p < N$, 试指出如何利用一个 N 点 DFT 和一些简单的算术运算从差分方程式 (3.14) 的系数计算出要求的 $H(e^{j\omega})$ 的采样。

(b) 能否将该结果推广到由下列差分方程表征的系统?

$$y(n) = \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^p b_k x(n-k) \quad (3.15)$$

解

(a) 由 (3.14) 式可求出系统函数

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{l=1}^p a_l z^{-l}} \quad (3.16)$$

根据题意, 下面构造一个对差分方程式 (3.14) 系数的 N 点 DFT, 并用变换结果表示频响采样 $H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 。为此, 定义一个序列的 N 点 DFT 为

$$A(k) = \sum_{l=0}^{N-1} -a_l W_N^{kl}, \quad a_l = -1$$

因为 $p < N$, 即当 $l > p$ 时, $a_l = 0$ 。所以, $A(k)$ 是一个长度为 $p+1$ 的序列 $a(l)$ 的 N 点 DFT,

$$a(l) = \begin{cases} -a_l, & 0 < l \leq p \\ 1, & l = 0 \\ 0, & l < 0, p < l \end{cases}$$

所以

$$A(k) = 1 - \sum_{l=1}^p a_l W_N^{kl} = 1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$$

由 (3.16) 式有

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{1}{1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}} = \frac{1}{A(k)}$$

这样, 只要以差分方程的 $p+1$ 个系数作为 $a(n)$ 的前面 $p+1$ 个序列值, 后面补 $N-(p+1)$ 个零, 构成 $a(n)$; 再对 $a(n)$ 进行 N 点 DFT 得到 $A(k)$, 取 $A(k)$ 的倒数即为对 $H(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点采样 $H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 。

(b) 由 (3.15) 式可得到

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^q b_n z^{-n}}{1 - \sum_{n=1}^p a_n z^{-n}}$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{\sum_{n=0}^q b_n e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}{1 - \sum_{n=1}^p a_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

假设 $q < N$, $p < N$, 仿照(a)中方法, 定义两个序列 $a(n)$ 和 $b(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$A(k) = \text{DFT}[a(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)W_N^{kn}$$

$$a(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -a_n, & 0 < n \leq p \\ 0, & n < 0, p < n \end{cases}$$

$$A(k) = 1 - \sum_{n=1}^p a_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$B(k) = \text{DFT}[b(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} b(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{q-1} b(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$b(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq q \\ 0, & n < 0, q < n \end{cases}$$

所以
$$B(k) = \sum_{n=0}^{q-1} b_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

比较 $H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 的分子、分母与 $B(k)$ 、 $A(k)$, 可以用 $B(k)$ 和 $A(k)$ 表示 $H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 如下式

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{B(k)}{A(k)}$$

例 3.11 已知 $x(n)$ 长度为 N , $X(z) = \text{ZT}[x(n)]$, 要求计算 $X(z)$ 在单位圆上的 M 个等间隔采样。假定 $M < N$, 试求出一种计算 M 个采样值的方法, 它只需要计算一次 M 点 DFT。

解 这是一个典型的频域采样理论应用问题。根据频域采样, 时域周期延拓, 以及 DFT 的唯一性概念, 容易解答该题。

由频域采样理论知道, 如果

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{M}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

即 $X(k)$ 是 $X(z)$ 在单位圆上的 M 点等间隔采样。则

$$x_M(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n - rM) \cdot R_M(n)$$

当然 $X(k) = \text{DFT}[x_M(n)]$, $k = 0, 1, \dots, M-1$

即首先将 $x(n)$ 以 M 为周期进行周期延拓, 取主值区序列 $x_M(n)$, 最后进行 M 点 DFT 则可得到 $X(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, $k = 0, 1, \dots, M-1$ 。

应当注意, $M < N$, 所以周期延拓 $x(n)$ 时, 有重叠区, $x_M(n)$ 在重叠区上的值等于重叠在 n 点处的所有序列值相加。

显然, 由于频域采样点数 $M < N$, 不满足频域采样定理, 所以, 不能由 $X(k)$ 恢复 $x(n)$, 即丢失了 $x(n)$ 的频谱信息。

3.2 教材第三章习题解答

1. 计算以下序列的 N 点 DFT, 在变换区间 $0 \leq n \leq N-1$ 内, 序列定义为

(1) $x(n) = 1$

$$(2) x(n) = \delta(n)$$

$$(3) x(n) = \delta(n - n_0), 0 < n_0 < N$$

$$(4) x(n) = R_m(n), 0 < m < N$$

$$(5) x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, 0 < m < N$$

$$(6) x(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}mn\right], 0 < m < N$$

$$(7) x(n) = e^{j\omega_0 n} \cdot R_N(n)$$

$$(8) x(n) = \sin(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$$

$$(9) x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$$

$$(10) x(n) = n \cdot R_N(n)$$

解

$$(1) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \\ = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$(2) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(3) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) W_N^{kn} = W_N^{kn_0} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) = W_N^{kn_0}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(4) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{m-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{km}}{1 - W_N^k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-1)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{N}mk}{\sin \frac{\pi}{N}k}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(5) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-k)}} \\ = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$(6) \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}mn\right] \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)n} \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}} + \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)}} \right] \\ = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = m, k = N-m \\ 0, & k \neq m, k \neq N-m \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad X_7(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})n} = \frac{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} \\
 &= e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin\left[\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{1}{2}\right]}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

或

$$X_7(k) = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(8) 解法 ① 直接计算:

$$\begin{aligned}
 x_8(n) &= \sin(\omega_0 n) \cdot R_N(n) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}] R_N(n) \\
 X_8(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_8(n) W_N^{kn} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})n} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})n} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} - \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} \right]
 \end{aligned}$$

解法 ② 由 DFT 的共轭对称性求解。

因为

$$\begin{aligned}
 x_7(n) &= e^{j\omega_0 n} R_N(n) = [\cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)] R_N(n) \\
 x_8(n) &= \sin(\omega_0 n) R_N(n) = \text{Im}[x_7(n)]
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{DFT}[j x_8(n)] = \text{DFT}[j \text{Im}[x_7(n)]] = X_{7_0}(k)$$

即

$$\begin{aligned}
 X_8(k) &= -j X_{7_0}(k) = -j \frac{1}{2} [X_7(k) - X_7^*(N-k)] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} - \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}(N-k))}} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} - \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} \right]
 \end{aligned}$$

结果与解法 ① 所得结果相同。此题验证了共轭对称性。

(9) 解法 ① 直接计算:

$$\begin{aligned}
 x_9(n) &= \cos(\omega_0 n) R_N(n) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] \\
 X_9(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_9(n) W_N^{kn} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N})}} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} \right]
 \end{aligned}$$

解法② 由 DFT 共轭对称性可得同样的结果。

因为

$$x_g(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n) = \operatorname{Re}[x_7(n)]$$

所以

$$\begin{aligned} X_g(k) &= \text{DFT}[x_g(n)] = X_{7c}(k) \\ &= \frac{1}{2}[X_7(k) + X_7^*(N-k)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)}} \right] \end{aligned}$$

(10) 解法①

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} nW_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

上式直接计算较难, 可根据循环移位性质来求解 $X(k)$ 。

因为

$$x(n) = nR_N(n)$$

所以

$$x(n) = x((n-1))_N \cdot R_N(n) + N\delta(n) = R_N(n)$$

等式两边进行 DFT 得到

$$X(k) = X(k)W_N^k + N = N\delta(k)$$

故

$$X(k) = \frac{N[\delta(k) - 1]}{1 - W_N^k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

当 $k=0$ 时, 可直接计算得出 $X(0)$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot W_N^0 = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$$

这样, $X(k)$ 可写成如下形式:

$$X(k) = \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2}, & k=0 \\ \frac{-N}{1-W_N^k}, & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

解法②

$k=0$ 时,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$$

$k \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} X(k) &= 0 + W_N^k + 2W_N^{2k} + 3W_N^{3k} + \dots + (N-1)W_N^{(N-1)k} \\ W_N^k X(k) &= 0 + W_N^{2k} + 2W_N^{3k} + 3W_N^{4k} + \dots + (N-2)W_N^{(N-1)k} + (N-1) \\ X(k) - W_N^k X(k) &= \sum_{n=1}^{N-1} W_N^{kn} = (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} - 1 = (N-1) = -N \end{aligned}$$

所以, $X(k) = \frac{-N}{1-W_N^k}, k \neq 0$, 即

$$X(k) = \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2}, & k=0 \\ \frac{-N}{1-W_N^k}, & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

2. 已知下列 $X(k)$, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 。

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}e^{j\theta}, & k=m \\ \frac{N}{2}e^{-j\theta}, & k=N-m \\ 0, & \text{其它 } k \end{cases}$$

$$(2) X(k) = \begin{cases} -j\frac{N}{2}e^{j\theta}, & k=m \\ j\frac{N}{2}e^{-j\theta}, & k=N-m \\ 0, & \text{其它 } k \end{cases}$$

其中, m 为正整数, $0 < m < \frac{N}{2}$, N 为变换区间长度。

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \frac{N}{2}e^{-j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} \right] \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right), \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x(n) &= \frac{1}{N} \left[-\frac{N}{2}je^{j\theta}W_N^{mn} + j\frac{N}{2}e^{-j\theta}W_N^{(N-m)n} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} - e^{-j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} \right] \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right), \end{aligned}$$

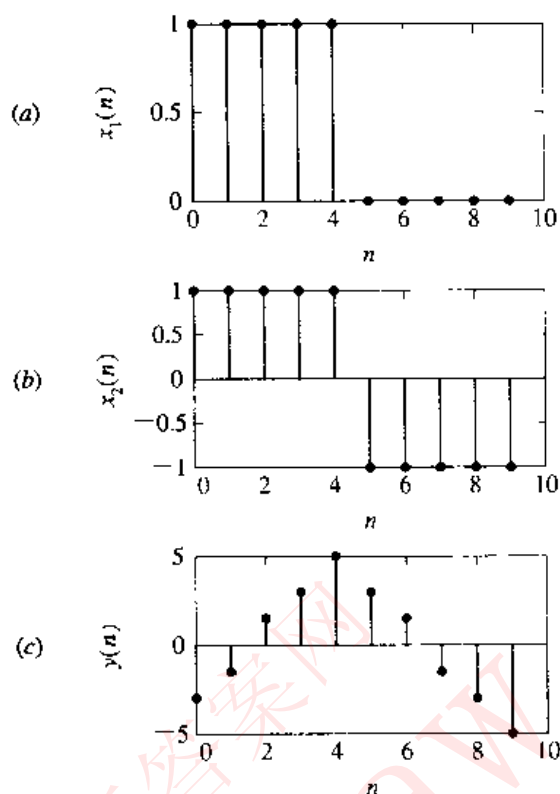
$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

3. 长度为 $N=10$ 的两个有限长序列

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases} \\ x_2(n) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases} \end{aligned}$$

作图表示 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$, 循环卷积区间长度 $L=10$ 。

解 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$ 分别如题 3 解图(a)、(b)、(c) 所示。



题 3 解图

(a) $x_1(n)$; (b) $x_2(n)$; (c) $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$

4. 证明 DFT 的对称定理, 即假设

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

证明 $\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$

证明 因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \text{DFT}[X(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} X(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mn} \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m+k)} \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m+k)} = \begin{cases} N, & m = N-k \\ 0, & m \neq N-k, 0 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

所以

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k), k = 0, 1, \dots, N-1$$

5. 如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 证明 DFT 的初值定理

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

证明 由 IDFT 定义式

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

可知

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

6. 设 $x(n)$ 长度为 N , 且

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令 $h(n) = x((n))_N R_{rN}(n)$, r 为正整数

$$H(k) = \text{DFT}[h(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

求 $H(k)$ 与 $X(k)$ 的关系式。

解
$$H(k) = \text{DFT}[h(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} h(n) W_{rN}^{kn} = \sum_{n=0}^{rN-1} x((n))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}kn}$$

令 $n = n' + lN$, $l = 0, 1, \dots, r-1$, $n' = 0, 1, \dots, N-1$. 则

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n' + lN))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}(n' + lN)k} \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} x(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}n'k} \right] e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} = X\left(\frac{k}{r}\right) \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} \end{aligned}$$

因为
$$\sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} = \begin{cases} r, & \frac{k}{r} = \text{整数} \\ 0, & \frac{k}{r} \neq \text{整数} \end{cases}$$

所以
$$H(k) = \begin{cases} rX\left(\frac{k}{r}\right), & \frac{k}{r} = \text{整数} \\ 0, & \frac{k}{r} \neq \text{整数} \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

7. 证明若 $x(n)$ 实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也实偶对称; 若 $x(n)$ 实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚奇对称。(注: $X(k) = \text{DFT}[X(n)]$).

证明 由 DFT 的共轭对称性可知:

如果 $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$

且 $X(k) = \text{Re}[X(k)] + j \text{Im}[X(k)]$

则 $\text{Re}[X(k)] = \text{DFT}[x_{ep}(n)]$

$$j \text{Im}[X(k)] = \text{DFT}[x_{op}(n)]$$

所以, 当 $x(n) = x(N-n)$ 时, 等价于上式中 $x_{op}(n) = 0$, $x(n)$ 中只有 $x_{ep}(n)$ 成分, 所以 $X(k)$ 只有实部, 即 $X(k)$ 为实函数。

同样由前述学习要点可知, 实序列的 DFT 必然为共轭对称函数, 即

$$X(k) = X^*(N-k) = X(N-k)$$

所以 $X(k)$ 实偶对称。

同样道理, 当 $x(n) = -x(N-n)$ 时, 等价于 $x(n)$ 只有 $x_{op}(n)$ 成分(即 $x_{ep}(n) = 0$), 故 $X(k)$ 只有纯虚部, 且由于 $x(n)$ 为实序列, 即 $X(k)$ 共轭对称,

$$X(k) = X^*(N-k) = -X(N-k), \quad \text{纯虚奇函数}$$

8. 设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$; $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, 如果 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$, 证明

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = W_N^{ln} x(n)$$

证明

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k+l))_N W_N^{-kn} \\ &= W_N^{ln} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k+l))_N W_N^{-(k-l)n} \end{aligned}$$

令 $m = k - l$,

$$\begin{aligned} y(n) &= W_N^{ln} \frac{1}{N} \sum_{m=l}^{N-1+l} X((m))_N W_N^{-mn} \\ &= W_N^{ln} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn} = W_N^{ln} x(n) \end{aligned}$$

9. 已知 $x(n)$ 长度为 N , $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$,

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

求 $Y(k)$ 与 $X(k)$ 的关系式。

解

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{k}{r}n} = X\left(\frac{k}{r}\right),$$

$$\frac{k}{r} = \text{整数时}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

10. 证明离散相关定理。

若

$$X(k) = X_1^*(k) X_2(k)$$

则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N R_N(n)$$

证明 根据 DFT 的唯一性, 只要证明

$$\text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N \cdot R_N(n)\right] = X_1^*(k) X_2(k)$$

即可。

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N \right) W_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) \sum_{n=0}^{N-1} x_2((l+n))_N W_N^{kn} \\ &= \left(\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) W_N^{kl} \right)^* \sum_{n=0}^{N-1} x_2((l+n))_N W_N^{k(l+n)} \end{aligned}$$

令 $m = l + n$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} x_2((l-n))_N W_N^{k(l-n)} &= \sum_{m=l}^{N-1} x_2((m))_N W_N^{km} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2((m))_N W_N^{km} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) W_N^{km} = X_2(k)\end{aligned}$$

所以 $X(k) = X_1^*(k)X_2(k)$, $0 \leq k \leq N-1$

当然也可以直接计算 $X(k) = X_1^*(k)X_2(k)$ 的 IDFT,

$$\begin{aligned}x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \text{IDFT}[X_1^*(k)X_2(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^*(k)X_2(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)W_N^{kl} \right)^* X_2(k)W_N^{-kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k)W_N^{-k(l-n)}, \quad 0 \leq n \leq N-1\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k)W_N^{-k(l+n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k)W_N^{-k(l-n)} = x_2((l+n))_N$$

所以

$$x(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l)x_2((l+n))_N R_N(n)$$

11. 证明离散帕塞瓦尔定理。若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \right)^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2\end{aligned}$$

12. 已知 $f(n) = x(n) + jy(n)$, $x(n)$ 与 $y(n)$ 均为 N 长实序列。设

$$F(k) = \text{DFT}[f(n)], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}, \quad 0 \leq k \leq N-1, a, b \text{ 为实数}$$

$$(2) F(k) = 1 + jN, N \text{ 为整数}$$

试求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 以及 $x(n)$ 和 $y(n)$ 。

解 由 DFT 的共轭对称性知道,

$$x(n) \longleftrightarrow X(k) = F_{ep}(k)$$

$$jy(n) \longleftrightarrow jY(k) = F_{op}(k)$$

方法 1

$$(1) \quad F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$X(k) = F_{ep}(k) = \frac{1}{2} [F(k) + F^*(N-k)] = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$$

$$Y(k) = -jF_{op}(k) = \frac{1}{2j} [F(k) - F^*(N-k)] = \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} a^m W_N^{km} \right) W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} a^m \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

所以

$$x(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

同样道理,

$$y(n) = b^n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$(2) \quad F(k) = 1 + jN$$

$$X(k) = \frac{1}{2} [F(k) + F^*(N-k)] = \frac{1}{2} [1 + jN + 1 - jN] = 1$$

$$Y(k) = \frac{1}{2j} [F(k) - F^*(N-k)] = N$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \delta(n)$$

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N W_N^{-kn} = \delta(n)$$

方法 2

令 $A(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$, $B(k) = j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$, 只要证明 $A(k)$ 为共轭对称的, $B(k)$ 为共轭反对称, 则

$$A(k) = F_{ep}(k) = X(k), \quad B(k) = F_{op}(k) = jY(k)$$

因为

$$A^*(N-k) = \left[\frac{1-a^N}{1-aW_N^{(N-k)}} \right]^* = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = A(k), \text{ 共轭对称}$$

$$B^*(N-k) = \left[j \frac{1-b^N}{1-bW_N^{(N-k)}} \right]^* = -j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} = -B(k), \text{ 共轭反对称}$$

所以

$$X(k) = F_{ep}(k) = A(k) = \frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k}$$

$$Y(k) = \frac{1}{j} F_{op}(k) = \frac{1}{j} B(k) = \frac{1 - b^N}{1 - bW_N^k}$$

由方法 1 知

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = a^n R_N(n)$$

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = b^n R_N(n)$$

13. 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 对 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上等间隔采样 N 点, 采样值为

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 。

解 我们知道, $X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 是以 2π 为周期的周期函数, 所以

$$X((k))_N = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{X}(k)$$

以 N 为周期, 将 $\tilde{X}(k)$ 看作一周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 系数, 则

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{kn}$$

代入

$$\tilde{X}(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{km} \right) W_N^{-kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m = n + lN \\ 0, & \text{其它 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN)$$

由题意知

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

所以根据有关 $X(k)$ 与 $x_N(n)$ 的周期延拓序列的 DFS 系数的关系有

$$\begin{aligned} x_N(n) &= \text{IDFT}[X(k)] = \tilde{x}(n) R_N(n) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN) R_N(n) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{n+lN} u(n + lN) R_N(n) \end{aligned}$$

由于 $0 \leq n \leq N-1$, 所以

$$u(n + lN) = \begin{cases} 1, & n + lN \geq 0 \rightarrow l \geq 0 \\ 0, & l < 0 \end{cases}$$

因此

$$x_N(n) = a^n \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} \cdot R_N(n) = \frac{a^n}{1-a^N} R_N(n)$$

14. 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n) = 0, \quad n < 0, 8 \leq n$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0, 20 \leq n$$

对每个序列作 20 点 DFT, 即

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

如果 $F(k) = X(k) \cdot Y(k), \quad k = 0, 1, \dots, 19$

$$f(n) = \text{IDFT}[F(k)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

试问在哪些点上 $f(n) = x(n) * y(n)$? 为什么?

解 如前所述, 记 $f_l(n) = x(n) * y(n)$, 而 $f(n) = \text{IDFT}[F(k)] = x(n) \circledast y(n)$. $f_l(n)$ 长度为 27, $f(n)$ 长度为 20. 前面已推出二者的关系为

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_l(n + 20m) \cdot R_{20}(n)$$

只有在如上周期延拓序列中无混叠的点上, 才满足 $f(n) = f_l(n)$, 所以

$$f(n) = f_l(n) = x(n) * y(n), \quad 7 \leq n \leq 19$$

15. 用微处理器对实数序列作谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 50$ Hz, 信号最高频率为 1 kHz, 试确定以下各参数:

- (1) 最小记录时间 $T_{p \min}$;
- (2) 最大取样间隔 T_{\max} ;
- (3) 最少采样点数 N_{\min} ;
- (4) 在频带宽度不变的情况下, 将频率分辨率提高一倍的 N 值。

解 (1) 已知 $F = 50$ Hz

$$T_{p \min} = \frac{1}{F} = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ s}$$

$$(2) \quad T_{\max} = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{1}{2 \times 10^3} = 0.5 \text{ ms}$$

$$(3) \quad N_{\min} = \frac{T_p}{T} = \frac{0.02 \text{ s}}{0.5 \times 10^{-3}} = 40$$

(4) 频带宽度不变就意味着采样间隔 T 不变, 应该使记录时间扩大一倍为 0.04 s 实现频率分辨率提高 1 倍 (F 变为原来的 1/2)。

$$N_{\min} = \frac{0.04 \text{ s}}{0.5 \text{ ms}} = 80$$

16. 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1$ kHz, 调制信号频率 $f_m = 100$ Hz, 用 FFT 对其进行谱分析, 试问:

- (1) 最小记录时间 $T_{p \min} = ?$
- (2) 最低采样频率 $f_{\min} = ?$

(3) 最少采样点数 $N_{\min} = ?$

解 由已知条件得知, 已调 AM 信号的最高频率 $f_{\max} = 1.1 \text{ kHz}$, 频率分辨率 $F \leq 100 \text{ Hz}$ (对本题所给单频 AM 调制信号应满足 $100/F = \text{整数}$)。所以,

$$(1) \quad T_{p \min} = \frac{1}{F} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

$$(2) \quad f_{s \min} = 2f_{\max} = 2.2 \text{ kHz}$$

$$(3) \quad N_{\min} = \frac{T_p}{T_{\max}} = T_p \cdot f_{\min} = 10 \times 10^{-3} \times 2.2 \times 10^3 = 22$$

(注意, 对窄带已调信号可以采用亚奈奎斯特采样速率采样, 压缩码率。而在本题的解答中, 我们仅按采样定理来求解。)

17. 在下列说法中选择正确的结论。线性调频 Z 变换可以用来计算一个有限长序列 $h(n)$ 在 z 平面实轴上诸点 $\{z_k\}$ 的 Z 变换 $H(z_k)$, 使

(1) $z_k = a^k, k = 0, 1, \dots, N-1, a$ 为实数, $|a| \neq 1$;

(2) $z_k = ak, k = 0, 1, \dots, N-1, a$ 为实数, $a \neq 1$;

(3) (1) 和 (2) 都不行, 即线性调频 Z 变换不能计算 $H(z)$ 在 z 平面实轴上的取样值。

解 在 chirp-Z 变换中, 在 z 平面上分析的 N 点为

$$z_k = AW^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中

$$A = A_0 e^{j\varphi_0}, \quad W = W_c e^{-j\omega_c}$$

所以

$$z_k = A_0 e^{j\varphi_0} W_c^{-k} e^{jk\varphi_c}$$

当 $A_0 = 1, \varphi_0 = 0, \omega_c = 0, W_c = a^{-1}$ 时,

$$z_k = a^k$$

故说法(1)正确。

18. 我们希望利用 $h(n)$ 长度为 $N = 50$ 的 FIR 滤波器对很长的数据序列进行滤波处理, 要求采用重叠保留法, 通过 DFT (即 FFT) 来实现。所谓重叠保留法, 就是对输入序列进行分段 (本题设每段长度为 $M = 100$ 个采样点), 但相邻两段必须重叠 V 个点, 然后计算各段与 $h(n)$ 的 L 点 (本题取 $L = 128$) 循环卷积, 得到输出序列 $y_m(n)$, m 表示第 m 段计算输出。最后, 从 $y_m(n)$ 中取出 B 个点, 使每段取出的 B 个采样连接得到滤波器输出 $y(n)$ 。

(1) 求 V ;

(2) 求 B ;

(3) 确定取出的 B 个采样应为 $y_m(n)$ 中的哪些采样点。

解 为了便于叙述, 规定循环卷积的输出序列 $y_m(n)$ 的序列标号为 $0, 1, 2, \dots, 127$ 。

先以 $h(n)$ 与各段输入的线性卷积 $y_{lm}(n)$ 考虑, $y_{lm}(n)$ 中, 第 0 点到第 48 点 (共 49 个点) 不正确, 不能作为滤波输出, 第 49 点到第 99 点 (共 51 个点) 为正确的滤波输出序列 $y(n)$ 的一段, 即 $B = 51$ 。所以, 为了去除前面 49 个不正确点, 取出 51 个正确的点连接得到不间断又无多余点的 $y(n)$, 必须重叠 $100 - 51 = 49$ 个点, 即 $V = 49$ 。

下面说明, 对 128 点的循环卷积 $y_m(n)$, 上述结果也是正确的。我们知道

$$y_m(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_{lm}(n + 128r) \cdot R_{128}(n)$$

因为 $y_{lm}(n)$ 长度为

$$N + M - 1 = 50 + 100 - 1 = 149$$

所以从 $n=21$ 到 127 区域, $y_m(n)=y_{lm}(n)$, 当然, 第 49 点到第 99 点二者亦相等, 所以, 所取出的 51 点为从第 49 到 99 点的 $y_m(n)$ 。

综上所述, 总结所得结论

$$V = 49, \quad B = 51$$

选取 $y_m(n)$ 中第 49~99 点作为滤波输出。

读者可以通过作图来理解重叠保留法原理和本题的解答。

第四章

快速傅里叶变换(FFT)

本章叙述了 DFT 的基 2 FFT 算法和分裂基快速算法,并介绍了离散哈特莱变换(DHT)及其快速算法(FHT)。这一章全是数学问题,与第三章相比较,基本没有引入新的物理概念。

所谓的快速算法,都是根据原始变换定义算法的运算规律及其中的某些算子的特殊性质(如 W_N^k 的周期性和对称性等),找出减少乘法和加法运算次数的有效途径,实现原始变换的各种高效算法。一种好的快速算法可使变换速度提高几个数量级,例如,当 $N=2^{10}$ 时, DIT-FFT 算法可使 N 点 DFT 的乘法运算量减少到原来的 $1/204.8$ 。

由于快速算法很多,而且还在不断研究和发展。较成熟的算法都有现成的程序。所以,通过教材中介绍的四种快速算法,主要学习研究快速算法的基本思想和减少运算量的途径,熟悉各种快速算法的特点、运算效率和适用情况。为今后研究新的快速算法和合理选用快速算法打好基础。

这里不重复叙述各种算法的具体内容,只指出本章应掌握和了解的知识要点。

4.1 学习要点

4.1.1 直接计算 N 点 DFT 的运算量

对于

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

复数乘法次数:

$$M_c = N^2$$

复数加法次数:

$$A_c = N(N-1)$$

当 $N \gg 1$ 时,复数乘法和加法次数都近似为 N^2 次,随着 N 增大非线性增大。

4.1.2 减少运算量的基本途径

DFT 定义式中只有两种运算: $x(n)$ 与 W_N^{kn} 的乘积相加。所以, W_N^k 的特性对乘法运算量必有影响。

(1) 根据 W_N^k 的对称性、周期性和特殊值减少乘法运算次数。

① 对称性: $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$, $W_N^{\frac{N}{2}k} = (-1)^k$ 。

$$(W_N^{N-k})^* = W_N^k$$

② 周期性: $W_N^{k+LN} = W_N^k$ 。

③ W_N^k 的特殊值(无关紧要旋转因子):

$W_N^0 = 1$; $W_N^{\pm \frac{N}{4}} = \pm j$; $W_N^{\frac{N}{2}} = -1$ 。对这些因子不用进行乘法运算。

(2) 将较大数 N 点 DFT 分解为若干个小点数 DFT 的组合, 减少运算量。这正是 FFT 能大量节省运算量的关键, 应该牢记。

例如, DIT-FFT 中, 经第一次奇偶抽取, 将一个 N 点 DFT 分解为 2 个 $N/2$ 点 DFT 和一级 $N/2$ 个蝶形运算, 从而使复数乘法运算次数由 N^2 次减少为

$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 \times 2 + \frac{N}{2} = \frac{1}{2}(N^2 - N) \approx \frac{N^2}{2}$$

即一次分解使复数乘法次数减少近一半。对 $N=2^M$ 点 DFT, 经 M 次分解后, 得到 DIT-FFT 算法, 复数乘法次数降为 $\frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$, 所以 N 越大, 运算效率越高, 当 $N=2^{10}$ 时, 运算效率为

$$\eta = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \cdot M} = 204.8$$

4.1.3 四种快速算法的基本思想及特点

根据上述减少运算量的途径, 巧妙地在时域或频域进行不同的抽取分解与组合, 得出不同的快速算法。下面简要归纳教材中介绍的四种快速算法的基本思想和特点^[1](以下以 $N=2^M$ 点 DFT 叙述)。

1. 基 2 DIT-FFT 算法

(1) 算法思想: 时域 M 级奇偶抽取, 并利用 $W_N^{\frac{N}{2}k} = -W_N^k$, 将 N 点 DFT 变成 M 级蝶形运算。

(2) 运算量:

$$\text{复数乘法次数: } M_c = \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$$

$$\text{复数加法次数: } A_c = N \cdot M = N \log_2 N$$

(3) 特点: 运算流程图结构规则, 可原位计算, 程序简短, 应用广泛。

2. 基 2 DIF-FFT 算法

(1) 算法思想: 频域对 $X(k)$ 进行 M 级奇偶抽取, 并利用 $W_N^{\frac{N}{2}k} = (-1)^k$, 将 N 点 DFT 变成 M 级 DIF-FFT 蝶形运算。

(2) 运算量及特点与基 2 DIT-FFT 相同。

3. 分裂基快速算法

(1) 算法思想^[1]: 基 2 FFT 算法简单, 基 4 FFT 算法效率较高。分裂基是将基 2 分解和基 4 分解糅合在一起形成的高效新算法。具体是对每次的频域奇偶抽取的偶数输出使用基 2 算法(按二进制抽取), 而奇数输出使用基 4 算法(按四进制抽取)。

(2) 运算量:

复数乘法次数:

$$M_c = \frac{1}{3}N \log_2 N - \frac{2}{9}N + (-1)^m \frac{2}{9}$$

复数加法次数:

$$A_c = N \log_2 N$$

(3) 特点:

① 在 $N=2^M$ 的快速算法中, 分裂基算法的乘法次数最少, 接近理论最小值^[2]。比基 2 FFT 减少 33%, 比基 4 减少 11%^[1]。

② 运算流程图结构规则, 可同址计算, 程序简短, 便于 DSP 实现。

4. 离散哈特莱变换(DHT)及其快速算法(FHT)

(1) DHT 定义:

设实序列 $x(n)$ 长度为 M , 则其 $N(N \geq M)$ 点 DHT 定义为

$$X_H(k) = \text{DHT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{cas}\left[\frac{2\pi}{N}kn\right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \text{IDHT}[X(k)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H(k) \text{cas}\left[\frac{2\pi}{N}kn\right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中

$$\text{cas}\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$$

(2) 快速 DHT(FDHT):

DHT 的快速算法的基本思想与 DFT 快速算法类似, 有基 2 DIT-FHT 和 DIF-FHT, 当然也可以用基 4 和分裂基快速算法。只是由于 DHT 的核函数为 $\text{cas}(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha$, 与 DFT 的 W_N^n 不同, 所以, 导出的计算公式和运算流程图结构有所不同^[1]。

(3) 基 2 DIT-FHT 的运算量($N=2^M$):

实数乘法次数:

$$M_R = NM - 3N + 4$$

实数加法次数:

$$A_R = \frac{3}{2}MN - \frac{3}{2}N + 2$$

乘法运算次数和加法运算次数均为基 2 DIT-FFT 的一半。

(4) DHT 的特点:

① DHT 为实数变换、运算效率高, 硬件实现简单, 适用于实信号处理。

② 正变换与逆变换运算相同(除逆变换中多一因子 $1/N$ 外), 所以, 正、逆变换可以共用硬件变换电路或变换子程序。

③ DHT 与 DFT 之间的转换关系简单。所以对实信号, 可先进行 DHT 得 $X_H(k)$, 再将 $X_H(k)$ 转换成 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$,

$$X(k) = \frac{1}{2}[X_H(k) + X_H(N-k)] - \frac{j}{2}[X_H(k) - X_H(N-k)]$$

转换运算仅需 $2N$ 次实数加法(未考虑实数因子 $1/2$)。这样, 可以节省一半运算量。

以上所述基本概念与结论的推导证明过程,请参阅教材第四章。利用基本概念、性质和公式解题的思想和方法见本章习题解答。

4.2 教材第四章习题解答

1. 如果通用计算机的速度为平均每次复数乘需要 $5\ \mu\text{s}$, 每次复数加需要 $1\ \mu\text{s}$, 用来计算 $N=1024$ 点 DFT, 问直接计算需要多少时间? 用基 2 DIT-FFT 计算需要多少时间? 按这样计算, 用 FFT 进行快速卷积对信号进行处理时, 估算可实现实时处理的信号最高频率。

解 当 $N=1024=2^{10}$ 时, 直接计算 DFT 的复数乘法运算次数为

$$N^2 = 1024^2 \text{ 次}$$

复数加法计算次数为

$$N(N-1) = 1024 \times 1023 = 1\,047\,552 \text{ 次}$$

直接计算所用计算时间 T_D 为

$$T_D = 5 \times 10^{-6} \times 1024^2 + 1\,047\,552 \times 10^{-6} = 6.290\,432 \text{ s}$$

用 FFT 计算 1024 点 DFT 所需计算时间为

$$\begin{aligned} T_F &= 5 \times 10^{-6} \times \frac{N}{2} \log_2 N + N \log_2 N \times 10^{-6} \\ &= 5 \times 10^{-6} \times \frac{1024}{2} \times 10 + 1024 \times 10 \times 10^{-6} \\ &= 35.84 \text{ ms} \end{aligned}$$

快速卷积时, 要计算一次 N 点 FFT (考虑到 $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$ 已计算好存入内存), 一次 N 点 IFFT 和 N 次频域复数乘法。所以, 计算 1024 点快速卷积的计算时间约为

$$\begin{aligned} T_c &= 2T_F + 1024 \text{ 次复数乘计算时间} \\ &= 71\,680\ \mu\text{s} + 5 \times 1024\ \mu\text{s} \\ &= 76\,800\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

所以, 每秒钟处理的采样点数 (即采样速率) $f_s < \frac{1024}{76\,800 \times 10^{-6}} = 132.8$ 次/秒。由采样定理知, 可实时处理的信号最高频率为

$$f_{\max} < \frac{f_s}{2} = \frac{132.8}{2} = 66.4 \text{ Hz}$$

应当说明, 实际实现时, f_{\max} 还要小一些。这是由于实际采样频率高于奈奎斯特速率, 而且在采用重叠相加法时, 重叠部分要计算两次。重叠部分长度与 $h(n)$ 长度有关, 而且还有存取数据指令周期等。

2. 如果将通用计算机换成专用单片机 TMS320 系列, 则计算复数乘仅需要 $400\ \text{ns}$ 左右, 计算复数加需 $100\ \text{ns}$ 。重复 1 题。

解 与第 1 题同理。

直接计算 1024 点 DFT 所需计算时间 T_D 为

$$\begin{aligned} T_D &= 400 \times 10^{-9} \times 1024^2 + 100 \times 10^{-9} \times 1\,047\,552 \\ &= 0.4194 + 0.1048 = 0.5242 \text{ s} \end{aligned}$$

用 FFT 计算 1024 点 DFT 所需计算时间 T_F 为

$$\begin{aligned} T_F &= 400 \times 10^{-9} \times \frac{N}{2} \log_2 N + 100 \times 10^{-9} \times N \log_2 N \\ &= 4 \times 10^{-7} \times \frac{1024}{2} \times 10 + 10^{-7} \times 1024 \times 10 \\ &= 2.048 \times 10^{-3} + 1.024 \times 10^{-3} = 3.072 \text{ ms} \end{aligned}$$

快速卷积计算时间 T_c 约为

$$\begin{aligned} T_c &= 2T_F + 1024 \text{ 次复数乘计算时间} \\ &= 2 \times 3.072 \times 10^{-3} + 400 \times 10^{-9} \times 1024 = 6.5536 \text{ ms} \end{aligned}$$

可实时处理的信号最高频率 f_{\max} 为

$$\begin{aligned} f_{\max} &\leq \frac{1}{2} f_s \\ f_s &= \frac{1024}{T_c} = 156.25 \text{ kHz} \end{aligned}$$

所以

$$f_{\max} \leq \frac{156.25}{2} = 78.125 \text{ kHz}$$

由此可见, 用 DSP 专用单片机可大大提高信号处理速度。所以, DSP 在数字信号处理领域得到广泛应用。机器周期小于 1 ns 的 DSP 产品已上市, 其处理速度更高。

3. 已知 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 分别是两个 N 点实序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 N 点 DFT, 若要求 $x(n)$ 和 $y(n)$, 为提高运算效率, 试设计用一次 N 点 IFFT 来完成。

解 因为 $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为实序列, 所以, $X(k)$ 和 $Y(k)$ 为共轭对称序列, $jY(k)$ 为共轭反对称序列。可令 $X(k)$ 和 $jY(k)$ 分别作为复序列 $F(k)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量, 即

$$F(k) = X(k) + jY(k) = F_{ep}(k) + F_{op}(k)$$

计算一次 N 点 IFFT 得到

$$f(n) = \text{IFFT}[F(k)] = \text{Re}[f(n)] - j \text{Im}[f(n)]$$

由 DFT 的共轭对称性可知,

$$\begin{aligned} \text{Re}[f(n)] &= \text{IDFT}[F_{ep}(k)] = \text{IDFT}[X(k)] = x(n) \\ j \text{Im}[f(n)] &= \text{IDFT}[F_{op}(k)] = \text{IDFT}[jY(k)] = jy(n) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2} [f(n) + f^*(n)] \\ y(n) &= \frac{1}{2j} [f(n) - f^*(n)] \end{aligned}$$

4. 设 $x(n)$ 是长度为 $2N$ 的有限长实序列, $X(k)$ 为 $x(n)$ 的 $2N$ 点 DFT。

(1) 试设计用一次 N 点 FFT 完成计算 $X(k)$ 的高效算法。

(2) 若已知 $X(k)$, 试设计用一次 N 点 IFFT 实现求 $x(n)$ 的 $2N$ 点 IDFT 运算。

解 本题的解题思路就是 DIT-FFT 思想。

(1) 在时域分别抽取偶数点和奇数点 $x(n)$ 得到两个 N 点实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(2n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_2(n) &= x(2n+1), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

根据 DIT-FFT 的思想, 只要求得 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点 DFT, 再经过简单的一级蝶形运算就可得到 $x(n)$ 的 $2N$ 点 DFT。因为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 均为实序列, 所以根据 DFT 的共轭对称性, 可用一次 N 点 FFT 求得 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 。具体方法如下:

$$\text{令 } y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = Y_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

$$jX_2(k) = \text{DFT}[jx_2(n)] = Y_{op}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

$2N$ 点 DFT $[X(n)] = X(k)$ 可由 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 得到

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k), & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases}$$

这样, 通过一次 N 点 IFFT 计算就完成了计算 $2N$ 点 DFT。当然还要进行运算量相对很少的, 由 $Y(k)$ 求 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 和 $X(k)$ 的运算。

(2) 与(1)相同, 设

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则应满足关系式

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k), & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases}$$

由上式可解出

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X(k+N)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X(k+N)]W_{2N}^{-k}$$

由以上分析可得出运算过程如下:

① 由 $X(k)$ 计算出 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X(k+N)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X(k+N)]W_{2N}^{-k}$$

② 由 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 构成 N 点频域序列 $Y(k)$

$$Y(k) = X_1(k) + jX_2(k) = Y_{ep}(k) - Y_{op}(k)$$

其中 $Y_{ep}(k) = X_1(k)$, $Y_{op}(k) = jX_2(k)$, 进行 N 点 IFFT 得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IFFT}[Y(k)] = \text{Re}[y(n)] + j \text{Im}[y(n)], \\ n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

由 DFT 的共轭对称性知

$$\operatorname{Re}[y(n)] = \frac{1}{2}[y(n) + y^*(n)] = \operatorname{DFT}[Y_{ep}(k)] = x_1(n)$$

$$j \operatorname{Im}[y(n)] = \frac{1}{2}[y(n) - y^*(n)] = \operatorname{DFT}[Y_{op}(k)] = jx_2(n)$$

③ 由 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 合成 $x(n)$

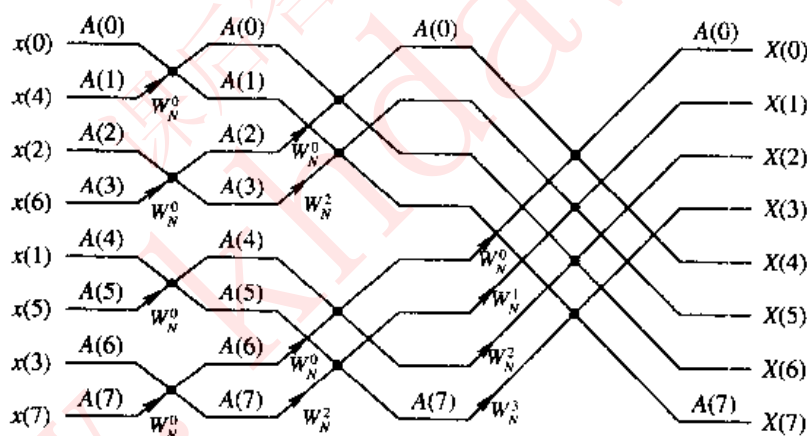
$$x(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{2}\right), & n = \text{偶数} \\ x_2\left(\frac{n-1}{2}\right), & n = \text{奇数} \end{cases} \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

在编程序实现时, 只要将存放 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的两个数组的元素分别依次放入存放 $x(n)$ 的数组的偶数和奇数数组元素中即可。

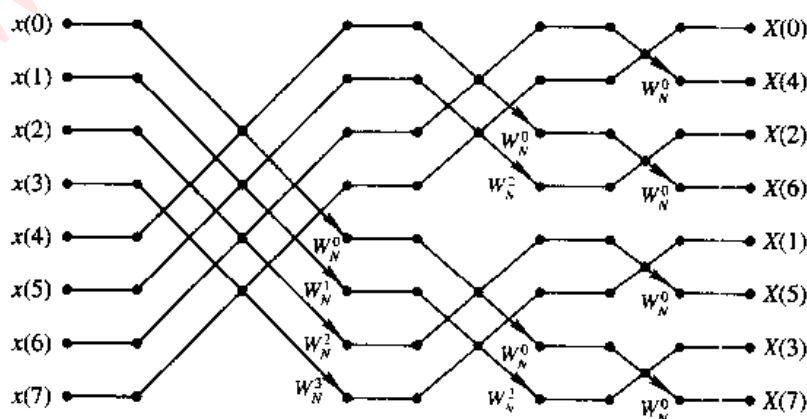
5. 试画出 8 点基 2 DIF-FFT 算法的变形运算流图, 要求输入输出均为顺序。

解 下面先讨论 DIF-FFT 运算流图与 DIT-FFT 运算流图的关系, 然后很容易从现有的 DIT-FFT 的变形流图得到本题所要求的 DIF-FFT 运算流图。

8 点 DIT-FFT 和 DIF-FFT 的标准运算流图分别如题 5 解图(一)和题 5 解图(二)所示。

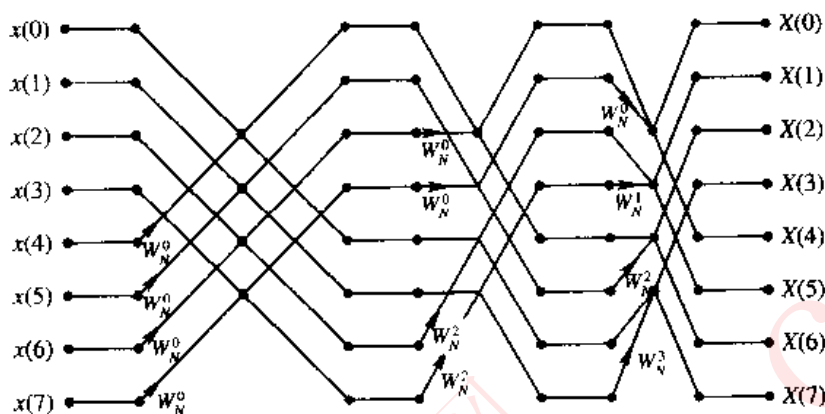


题 5 解图(一) 8 点 DIT-FFT 标准运算流图

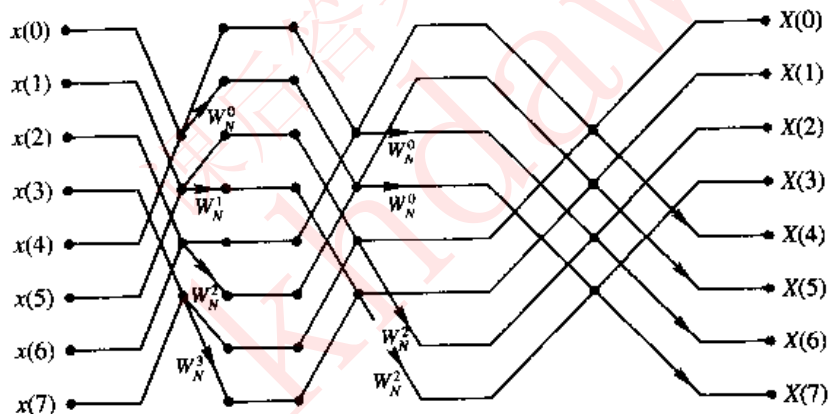


题 5 解图(二) 8 点 DIF-FFT 标准运算流图

观察题 5 解图(一)和题 5 解图(二)可以发现,二者互为转置关系(流图转置的定义是将其中所有的支路改变方向,并将其输入和输出端对调)。教材中已给出 DIT-FFT 的变形流图(输入顺序,输出顺序)如题 5 解图(三)所示,将其转置得到输入输出均为顺序的 DIF-FFT 运算流图如题 5 解图(四)所示。



题 5 解图(三) DIT-FFT 的一种变形运算流图(输入、输出均顺序)



题 5 解图(四) DIF-FFT 的一种变形运算流图(输入、输出均顺序)

6. 按照下面的 IDFT 算法

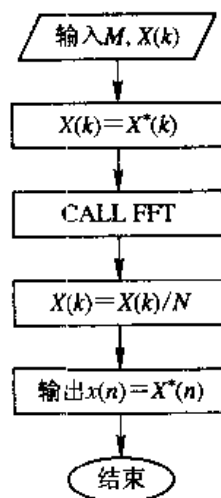
$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} [\text{DFT}[X^*(k)]]^*$$

编写 IFFT 程序,其中的 FFT 部分不用写出清单,可调用 FFT 子程序。

解 通过调用 FFT 子程序实现题中所给 IFFT 算法的程序框图如题 6 解图所示。数组 $X[N]$ 用于存放输入 $X(k)$ 、中间结果及最终结果 $x(n)$ 。

用 MATLAB 语言编写的 IFFT 程序清单如下:

```
%题 4.6 计算 IFFT 的程序
%Xk: 被变换数据 X(k)
%XN: IFFT[X(k)]结果 x(n)
%N: x(n)、X(k)长度
Xk=[X(0) X(1) ... X(N-1)];
```



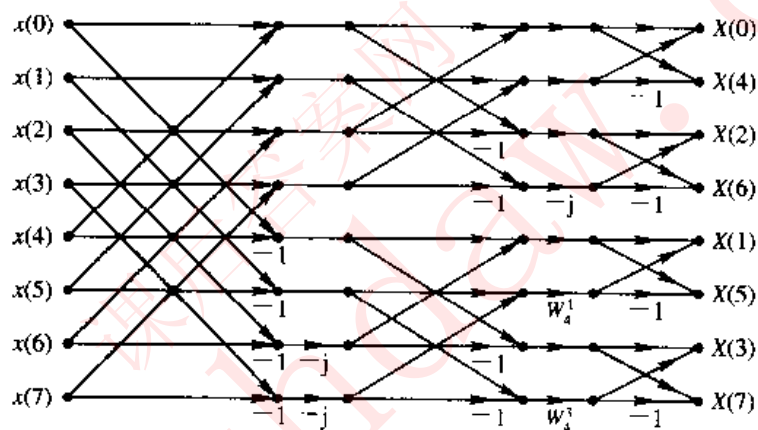
题 6 解图


```
n=size(Xk);
N=n(2);           %取得 X(k)的长度
Xk=conj(Xk);       %取复共轭
XN=fft(Xk);        %计算 FFT[X(k)]
XN=conj(XN)/N;
stem(real(XN));     %绘制 x(n)序列波形图
```

说明：数据向量 X_k 也可以通过键盘、数据文件或函数计算等多种方法建立，本程序使用最简单的方法，在程序中直接赋值 X_k 向量。

7. 画出 8 点分裂基 L 形运算流图，并计算其复数乘法次数，与基 2 算法比较。

解 根据教材图 4.4.4 和图 4.4.5 可画出 8 点分裂基 L 形运算流图如题 7 解图所示。由题 7 解图可见，8 点分裂基 FFT 只有 2 次复数乘。而 8 点基 2 DIT-FFT 需要 5 次复数乘，是分裂基的 2.5 倍。



题 7 解图 8 点分裂基 L 形运算流图

第五章

数字滤波网络

本课程教学内容的前四章均是后面学习数字滤波器的理论基础。研究数字滤波器一般包括以下两个内容：

(1) 由滤波器网络结构分析其运算功能或频率响应特性，即

滤波器实现结构 $\xrightarrow{\text{分析}} H(z)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 、差分方程、 $h(n)$ 。

(2) 由滤波器技术指标设计出系统函数 $H(z)$ ，再由 $H(z)$ 画出实现网络结构(运算结构或硬件实现结构)，简单表示如下：

技术指标 $\xrightarrow{\text{设计}} H(z) \longrightarrow$ 实现结构

由此可见，只有掌握了数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 与其网络结构之间的对应关系，才能进行滤波器研究工作。

另外，对同一系统函数 $H(z)$ ，存在几种不同的实现网络结构，而且用不同的网络结构实现的滤波器性能也不同(如性能价格比，运算误差，稳定性，有限字长敏感度等)。

由上述可见，掌握数字滤波器的网络结构对学习数字滤波器的分析与设计是很重要的。下面对数字滤波网络结构的主要内容进行归纳，并通过一些例题和全部习题解答复习巩固本章的知识。

5.1 学习要点

本章主要介绍数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 与其网络结构流图之间的相互转换方法，二者之间的转换关系用 Masson 公式描述。由于信号流图的基本概念及 Masson 公式已在信号与线性系统分析课程中讲过，所以下面归纳 IIR 系统和 FIR 系统的各种网络结构及其特点。

5.1.1 IIR 系统的基本网络结构

实质上， $H(z)$ 的不同表示形式对应着不同的网络结构，但各种网络结构中所用的二阶基本单元都是用直接 II 型结构。所以先介绍 IIR 系统的直接 II 型结构流图。

1. 直接型结构

如果将系统函数 $H(z)$ 化为标准形式(5.1)式，

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (5.1)$$

则可根据 Masson 公式直接画出 $H(z)$ 的直接

I 型网络结构流图如图 5.1 所示(取 $N=4$, $M=3$)。二阶直接 I 型网络结构流图最有用,它是级联型和并联型网络结构的基本网络单元。

优点:可直接由标准形式(5.1)式或差分

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

画出网络结构流图,简单直观。

缺点^[1]:对于高阶系统:

(1) 调整零、极点困难。这是因为系统的任何一个零点都是 $H(z)$ 的分子多项式的 $M+1$ 个系数 $\{b_k, k=0, 1, \dots, M\}$ 的函数,极点亦如此。如果要调整任何一个零点位置,就要改变若干个系数的值,这必然会引起其它 $M-1$ 个零点的变化。

(2) 对系数(a_k 或 b_k)量化效应敏感度高^[1]。

(3) 乘法运算量化误差在系统输出端的噪声功率最大^[1]。

2. 级联型结构

将(5.1)式描述的系统函数 $H(z)$ 分解成多个二阶子系统函数的乘积形式

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_m(z) \quad (5.2)$$

当 N 为偶数时,每个子系统均为(5.3)式描述的二阶系统,当 N 为奇数时,其中有一个一阶系统函数。

$$H_i(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.3)$$

其中 $m = \max\left\{\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+1}{2} \right\rceil\right\}$, 符号 $\lceil \cdot \rceil$ 表示取整, N 和 M 与(5.1)式中相同。这时可画出 $H(z)$ 的级联型方框图如图 5.2 所示。

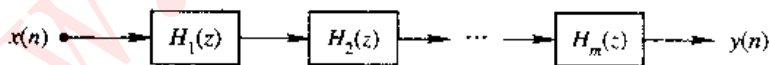


图 5.2 $H(z)$ 的级联型方框图

图中每一级子系统均为二阶直接型结构,根据 $H(z)$ 的具体表达式确定 $H_i(z)$ 的系数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_1$ 和 α_2 后,可画出 $H_i(z)$ 的网络结构流图如图 5.3 所示。

当 $H(z)$ 的分子和分母多项式系数 b_k 和 a_k 为实数时,只要求出 $H(z)$ 的零点 $z_i (i=1, 2, \dots, M)$ 和极点 $p_i (i=1, 2, \dots, N)$, 就可以将 $H(z)$ 的分子和分母进行因式分解,写成(5.4)式:

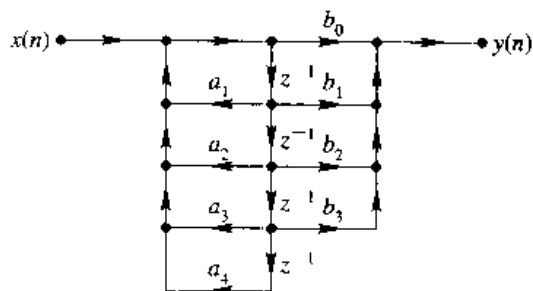


图 5.1 IIR 系统的直接 I 型网络结构流图($N=4, M=3$)

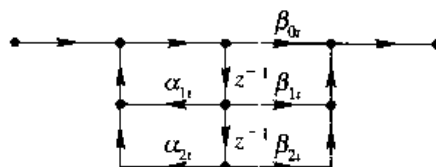


图 5.3 级联型结构中 $H_i(z)$ 的直接 I 型网络结构流图

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (5.4)$$

假设 $M=N$ ，只要将一对共轭零点因子和一对共轭极点因子相乘，构成一个二阶子系统 $H_i(z)$ ，则其系数亦为实数。所以， $H(z)$ 给定后，其级联型结构不是唯一的，可以灵活地组合分子和分母的二阶因子构成 m 个 $H_i(z)$ ，且级联次序也可以灵活安排，这是级联型结构的优点之一。

优点：

(1) 系统结构组成灵活。

(2) 调整零、极点容易，因为每一级二阶子系统 $H_i(z)$ 独立地确定一对共轭零点和一对共轭极点。

(3) 对系数量化效应敏感度低^[1]。

缺点：

(1) 存在计算误差积累。

(2) 乘法运算量化误差在输出端的噪声功率大于并联型结构(但小于直接Ⅱ型结构)^[1]。

3. 并联型结构

如果(5.1)式中 $M < N$ ，且 $H(z)$ 只有单阶极点 $p_i (i=1, 2, \dots, N)$ ，则可将 $H(z)$ 部分分式展开为(5.5)式：

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{1 - p_i z^{-1}} \quad (5.5)$$

将(5.5)式中的复共轭对极点对应的两项合并为一个二阶项：

$$H_i(z) = \frac{r_{0i} - r_{1i} z^{-1}}{1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2}} \quad (5.6)$$

$H(z)$ 就可以写成(5.7)式：

$$H(z) = \sum_{i=1}^m H_i(z) \quad (5.7)$$

由(5.7)式画出 $H(z)$ 的并联结构方框图如图 5.4 所示，图中每个并联子系统 $H_i(z)$ 采用二阶直接Ⅱ型网络结构流程图，如图 5.5 所示。

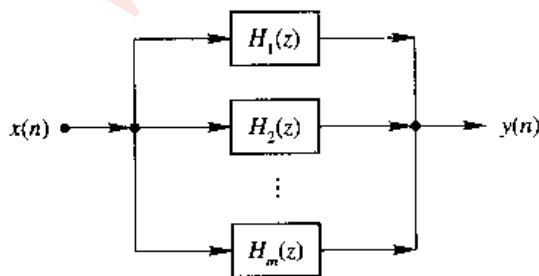


图 5.4 并联结构方框图

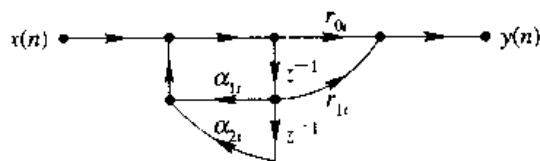


图 5.5 并联子系统 $H_i(z)$ 网络流程图

当 $M \geq N$ 时，并联子系统中可能有一常数 r_{0i} ，或 z^{-1} 的多项式。

优点：运算速度快，调整极点方便，系数量化误差敏感度低，乘法运算量化误差在输出端的噪声功率最小^[1]。

缺点：调整零点不方便，当 $H(z)$ 有多阶极点时，部分分式展开较麻烦。

5.1.2 FIR 系统网络结构

FIR 系统的网络结构有三种类型：直接型、级联型和频率采样型结构。当 FIR 系统具有线性相位特性时，还可以画出其线性相位结构。实质上，线性相位结构是直接型结构的一种简化形式。下面分别给出 FIR 系统函数 $H(z)$ 的四种表达式及其相应的四种网络结构形式。

1. 直接型结构

设 $h(n)$ 长度为 N ，则 FIR 系统的系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (5.8)$$

由 Masson 公式画出 $H(z)$ 的直接型结构流图如图 5.6 所示。

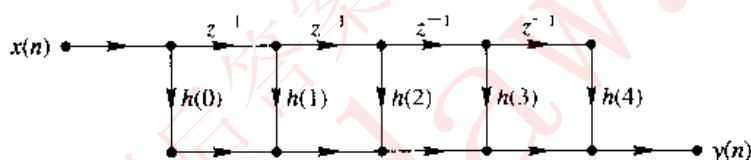


图 5.6 FIR 系统的直接型结构流图($N=5$)

由于直接型结构也可以根据 FIR 系统的输出输入卷积关系式 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$ 画出来，所以又取名“卷积结构”。由该结构的形状取名为“横截结构”。

2. 级联结构

将 $H(z)$ 分解成二阶因子的乘积

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (5.9)$$

$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ 表示对 $\frac{N}{2}$ 取整。根据(5.9)式画出级联结构如图 5.7 所示。

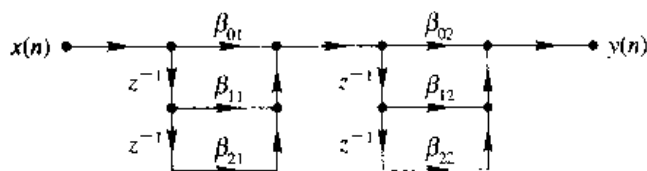


图 5.7 FIR 系统的级联结构($N=5$)

3. 线性相位 FIR 系统网络结构

第七章将证明线性相位 FIR 系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 应满足(5.10)式。

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad (5.10)$$

这时, (5.8)式可以写成如下形式:

当 N 为奇数时,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] + h\left[\frac{N-1}{2}\right] z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (5.11)$$

当 N 为偶数时,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] \quad (5.12)$$

(5.11)式和(5.12)式对应的线性相位 FIR 系统结构分别如图 5.8 和图 5.9 所示。

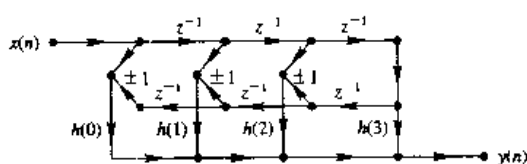


图 5.8 线性相位 FIR 系统结构($N=7$)

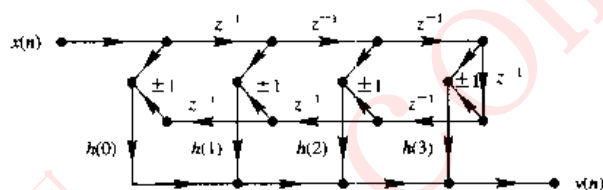


图 5.9 线性相位 FIR 系统结构($N=8$)

图中的正负号由 $h(n)$ 确定, 当 $h(n) = h(N-1-n)$ 时, 取“+”号, 当 $h(n) = -h(N-1-n)$ 时, 取“-”号。

4. 频率采样结构

FIR 系统的频率采样结构是根据其系统函数 $H(z)$ 的 z 域内插表达式所画出的一种网络结构。如果 $h(n)$ 长度为 N , 而且

$$H(z) = \text{ZT}[h(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$H(k) = H(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{DFT}[h(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则根据频域采样理论有 $H(z)$ 的 z 域内插公式

$$H(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.13)$$

为了叙述问题方便, 记 $H_c(z) = 1 - z^{-N}$, $H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$, 这时, (5.13)式可写成

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \quad (5.14)$$

由(5.14)式可见, $H(z)$ 的网络结构为 FIR 子系统 $H_c(z)$ 和 IIR 子系统 $\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$ 级联而成, 而 $\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$ 为 N 个一阶 IIR 子网络 $H_k(z)$ 并联而成。频率采样结构如图 5.10 所示。

图 5.10 中, FIR 子系统 $H_c(z)$ 为一梳状滤波器, 其 N 个零点为 $z_k = W_N^{-k}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$); IIR 子系统中第 k 个并联网路 $H_k(z) = H(k) / (1 - W_N^{-k} z^{-1})$ 的极点为 $p_k = W_N^{-k}$, 所以 $p_k = z_k$ 在单位圆上 W_N^{-k} 处, 相互对消。因此, 当 $\omega = (2\pi/N)k$ 时, $H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H(k)$ 。这正是这种结构的特点, 因而可以用采样值 $H(k)$ 直接控制 FIR 滤波器频响特性。另外, 当 N 给定时, 除 $H(k)$ 由滤波特性确定外, 频率采样结构中的 $H_c(z)$ 和 N 个并联一阶网络完全

与频响特性无关,便于集成化为可编程滤波器,只要存放 $H(k)$ 的 N 个取值的存储单元用户可编程改变即可。

频率采样结构存在两个问题,影响其工程应用,所以要对其加以修正。但只要掌握了图 5.10 所示的基本形式,修正型结构就容易得到。

(1) 稳定性问题。如前所述, FIR 系统的频率采样结构是靠位于单位圆上的 $H_c(z)$ 的 N 个零点,抵消 N 个并联网路

$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$ 的 N 个位于单位圆上的极点,

以保证系统的稳定。但由于系数量化误差使零极点不能抵消时,就会不稳定。因此,系统稳定裕度为零,实际上不能用。实际中将梳状滤波器 $H_c(z)$ 的零点和 $H_k(z)$ 的极点设置在半径 r 小于 1 又接近 1 的圆周上,所得修正的频率采样结构系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.15)$$

其中, r 称为修正半径,其值与系统字长有关。

(2) 复数乘法运算问题。(5.15) 式中, W_N^{-k} 及 $H(k)$ 都是复数,所以,图 5.10 或由 (5.15) 式画的修正的频率采样结构图中存在大量的复数运算。复数运算比实数运算复杂,特别是用硬件实现复杂。对常用的实序列 $h(n)$,可以完全解决该问题。

当 $h(n)$ 为实序列时,根据 DFT 的共轭对称性可知 $H(k) = H^*(N-k)$, 而且 $W_N^{-k} = (W_N^{-(N-k)})^*$ 。这时,将互为复共轭的 $H_k(z)$ 和 $H_{N-k}(z)$ 合并得到

$$\begin{aligned} H_k(z) + H_{N-k}(z) &= \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - r W_N^{-(N-k)} z^{-1}} \\ &= \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r W_N^k z^{-1}} \\ &= \frac{a_{0k} - a_{1k} z^{-1}}{1 - 2rz^{-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}k\right] + r^2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中, $a_{0k} = 2 \operatorname{Re}[H(k)]$, $a_{1k} = -2 \operatorname{Re}[r H(k) W_N^k]$

由 (5.16) 式画出的二阶 IIR 并联子系统网络中全为实数乘法器。应当注意, $H_c(z)$ 及 $H_{N/2}(z)$ 无复数乘法器,不能按 (5.16) 式合并。所以, N 为偶数与 N 为奇数时,合并后的 $H(z)$ 表达式及其结构图有些不同。

当 N 为偶数时,按 (5.16) 式有

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - r z^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + r z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1}}{1 - 2rz^{-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}k\right] + r^2 z^{-2}} \right] \quad (5.17)$$

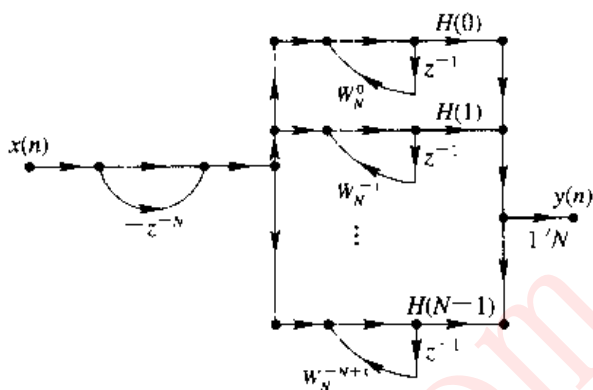


图 5.10 FIR 系统的频率采样结构

当 $N=6$ 时, 由(5.17)式画出的频率采样修正结构如图 5.11 所示。

图中 $c_1 = 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)$, $c_2 = 2r \cos\left(\frac{4\pi}{N}\right)$ 。

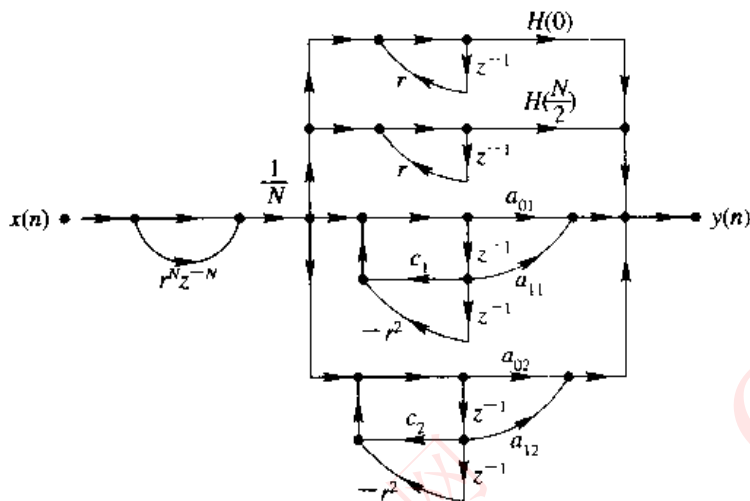


图 5.11 FIR 系统频率采样结构(修正半径 r , $N=6$)

当 N 为奇数时, $H(0)$, W_N^0 均为实数, 所以

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} - \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{a_{0k} + a_{1k}}{1 - 2rz^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - r^2 z^{-2}} \right] \quad (5.18)$$

(5.18)式对应的网络结构如图 5.12 所示($N=5$)。图中 $c_1 = 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)$, $c_2 = 2r \cos\left(\frac{4\pi}{N}\right)$ 。

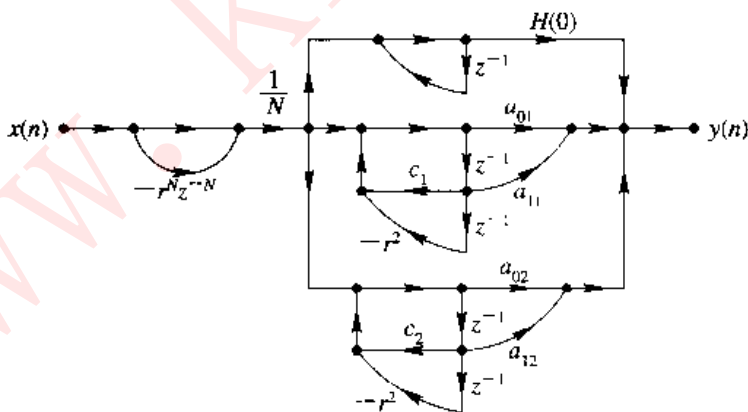


图 5.12 FIR 系统频率采样结构(修正半径 r , $N=5$)

5. FIR 系统四种网络结构的比较

FIR 系统的直接型结构简单直观, 乘法运算较少, 但调整零点较难; 级联型结构每级独立控制一对共轭零点, 所以适用于需要控制传输零点的场合, 其缺点是乘法器比直接型多; 线性相位 FIR 系统结构的乘法运算比直接型少, 当 N 为偶数时, 乘法运算减少一半, 当 N 为奇数时, 由原来的 N 个乘法器减少为 $\frac{N+1}{2}$ 个; 频率采样结构可以直接由采样值 $H(k)$ 控制滤波器频响特性, 当滤波器通带很窄时, $H(k)$ 的非零值很少, 大部分零值采样

$H(k)$ 对应的并联二阶网络可省去,从而使结构大大简化。所以,频率采样结构适用于窄带滤波器。当然,对集成化的结构而言,适合任何滤波特性。

5.2 例 题

例 5.1 耦合型振荡器是用来产生正弦序列的一种数字网络,其单位脉冲响应为复数序列 $e^{j\omega_0 n}u(n)$,所以,可取其实部 $\cos(\omega_0 n)u(n)$ 或虚部 $\sin(\omega_0 n)u(n)$ 作为正弦序列输出。

耦合振荡器的具体实现方法是实部和虚部分开输出。试画出这种振荡器的网络结构,其中只能用实数乘法器。

解 方法 1 已知耦合振荡器的单位脉冲响应为

$$h(n) = e^{j\omega_0 n}u(n)$$

则其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n}z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

即

$$Y(z)[1 - e^{j\omega_0}z^{-1}] = X(z)$$

因此差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + e^{j\omega_0}y(n-1) \\ &= x(n) + (\cos\omega_0)y(n-1) + j(\sin\omega_0)y(n-1) \end{aligned}$$

令

$$y(n) = y_r(n) + jy_i(n), \quad y_r(n) = \operatorname{Re}[y(n)], \quad y_i(n) = \operatorname{Im}[y(n)]$$

则

$$y_r(n) + jy_i(n) = x(n) + (\cos\omega_0 - j\sin\omega_0)[y_r(n-1) + jy_i(n-1)]$$

故

$$y_r(n) = x(n) + (\cos\omega_0)y_r(n-1) - (\sin\omega_0)y_i(n-1)$$

$$y_i(n) = (\sin\omega_0)y_r(n-1) + (\cos\omega_0)y_i(n-1)$$

系统的实现网络结构图如图 5.13 所示。

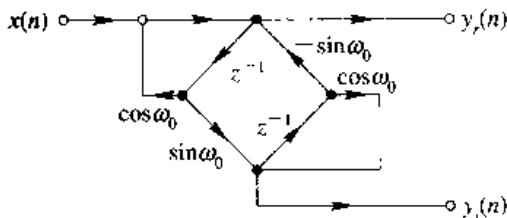


图 5.13 耦合振荡器实现网络 I

方法 2 已知

$$h(n) = e^{j\omega_0 n}u(n) = \cos(\omega_0 n)u(n) + j\sin(\omega_0 n)u(n)$$

即

$$h_R(n) = \operatorname{Re}[h(n)] = \cos(\omega_0 n)u(n)$$

$$h_I(n) = \operatorname{Im}[h(n)] = \sin(\omega_0 n)u(n)$$

分别求出输入端到实部输出端和虚部输出端的系统函数 $H_R(z)$ 和 $H_I(z)$ 为

$$\begin{aligned}
 H_R(z) &= \text{ZT}[h_R(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\omega_0 n) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{j\omega_0 n} z^{-1} + e^{-j\omega_0 n} z^{-1}] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right], \quad |z| > 1 \\
 &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_I(z) &= \text{ZT}[h_I(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\omega_0 n) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) z^{-n} \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right], \quad |z| > 1 \\
 &= \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}
 \end{aligned}$$

该耦合振荡器的实现网络结构如图 5.14 所示。



图 5.14 耦合振荡器的网络结构 II

请读者考虑, 为了使 $y_r(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$, $x(n) = ?$

例 5.2 研究一个 FIR 滤波器, 其频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) e^{-j\omega n_0}$$

式中 n_0 不一定为整数。设该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度 $N=15$, $n_0=15/2$, 且

$$H_k = H_g\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 1/2, & k=1 \\ 0, & k=2, 3, \dots, 13 \\ -1/2, & k=14 \end{cases}$$

(1) 画出该系统的频率采样结构。

(2) 求出系统的单位脉冲响应 $h(n)$, 并画出直接型结构, 要求用最少的乘法器。

解 (1) 已知

$$H(k) = H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H_g e^{j\frac{2\pi}{N}kn_0}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

代入 $N=15$, $n_0=15/2$ 及 H_k 的值得到

$$H(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -1/2, & k = 1, 14 \\ 0, & k = 2, 3, \dots, 13 \end{cases}$$

由频域采样的 z 域内插公式有

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{15} (1 - z^{-15}) \sum_{k=0}^{14} \frac{H(k)}{1 - W_{15}^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{15} (1 - z^{-15}) \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - W_{15}^{-1} z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - W_{15}^{-14} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{15} (1 - z^{-15}) \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - e^{j\frac{2\pi}{15}} z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{15}} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{15} (1 - z^{-15}) \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - \cos(2\pi \cdot 15) \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1} 2 \cos\left|\frac{2\pi}{15}\right| + z^{-2}} \right] \end{aligned}$$

系统频率采样结构如图 5.15 所示。

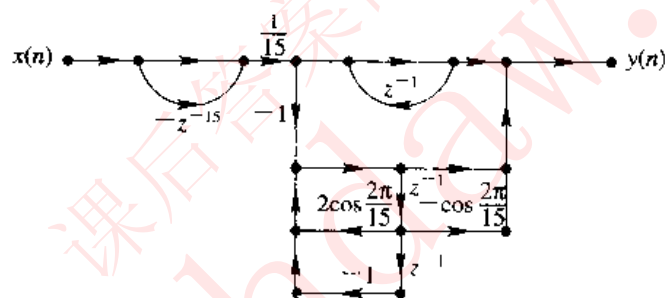


图 5.15 系统频率采样结构

$$\begin{aligned} (2) h(n) &= \text{IDFT}[H(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{15} \left[1 - \frac{1}{2} W_{15}^{-n} - \frac{1}{2} W_{15}^{-14n} \right] \\ &= \frac{1}{15} \left[1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{15}n} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{15}n} \right] \\ &= \frac{1}{15} \left[1 - \cos\left|\frac{2\pi}{15}n\right| \right] \quad n = 0, 1, \dots, 14 \end{aligned}$$

因为 $h(n) = h(N-n)$, 所以其直接型结构的高效形式(乘法运算最少)如图 5.16 所示。
 $h(0)=0$, 未画出。

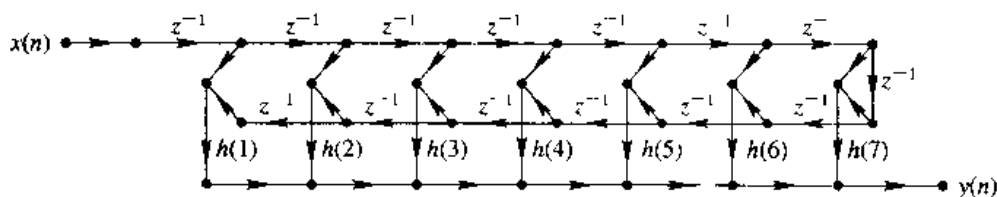


图 5.16 直接型结构的高效形式

本章的习题基本上包含了教材中的基本内容, 所以不再多举例。下面通过习题解答来复习、巩固有关系统网络结构的基本知识。

5.3 教材第五章习题解答

1. 设系统用下面差分方程描述:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

试分别画出系统的直接型、级联型和并联型结构。差分方程中 $x(n]$ 和 $y(n]$ 分别表示系统的输入和输出信号。

解
$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

将上式进行 Z 变换, 得到

$$Y(z) - \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

(1) 按照系统函数 $H(z)$, 根据 Masson 公式, 画出直接型结构如题 1 解图(一)所示。

(2) 将 $H(z)$ 的分母进行因式分解

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

按照上式可以有两种级联型结构:

$$(a) H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

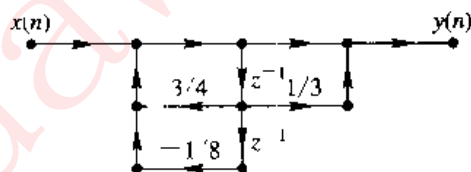
画出级联型结构如题 1 解图(二)(a)所示。

$$(b) H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1}$$

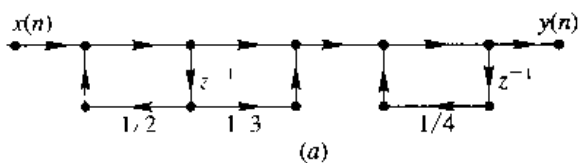
画出级联型结构如题 1 解图(二)(b)所示。

(3) 将 $H(z)$ 进行部分分式展开

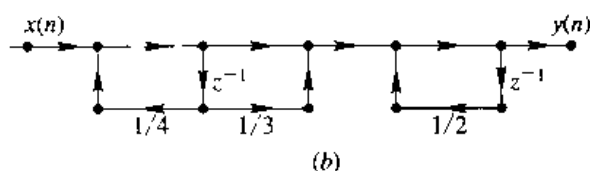
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$



题 1 解图(一)



(a)



(b)

题 1 解图(二)

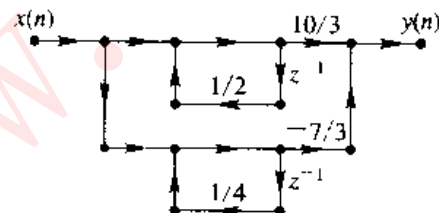
$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1}{4}}$$

$$A = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \left(z - \frac{1}{2}\right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$B = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \left(z - \frac{1}{4}\right) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{10}{3}}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{7}{3}}{z - \frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$



题 1 解图(三)

根据上式画出并联型结构如题 1 解图(三)所示。

2. 设数字滤波器的差分方程为

$$\begin{aligned} y(n] &= (a + b)y[n - 1] - aby[n - 2] \\ &\quad + x[n - 2] + (a + b)x[n - 1] + ab \end{aligned}$$

式中 $|a| < 1$, $|b| < 1$, 试画出系统的直接型和级联型结构, $x[n]$ 和 $y[n]$ 分别表示系统的输入和输出信号。

解 将差分方程进行 Z 变换, 得到

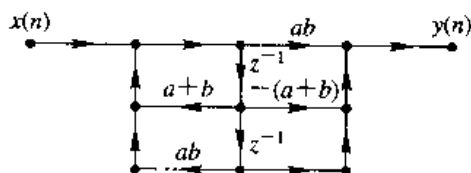
$$\begin{aligned} Y(z) &= (a + b)Y(z)z^{-1} - abY(z)z^{-2} \\ &\quad + X(z)z^{-2} + (a + b)X(z)z^{-1} + ab \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{ab - (a + b)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a + b)z^{-1} - abz^{-2}} \end{aligned}$$

(1) 按照 Masson 公式画出直接型结构如题 2 解图(一)所示。

(2) 将 $H(z)$ 的分子和分母进行因式分解:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(a - z^{-1})(b - z^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} \\ &= H_1(z)H_2(z) \end{aligned}$$

按照上式可以有两种级联型结构:



题 2 解图(一)

$$(a) \quad H_1(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}},$$

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}$$

画出级联型结构如题 2 解图(二)(a)所示。

$$(b) \quad H_1(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - bz^{-1}},$$

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - az^{-1}}$$

画出级联型结构如题 2 解图(二)(b)所示。

3. 设系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{4(1+z^{-1})(1-1.414z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}-0.81z^{-2})}$$

试画出各种可能的级联型结构。

解 由于系统函数的分子和分母各有两个因式, 可以有两种级联型结构。

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

$$(1) \quad H_1(z) = \frac{4(1+z^{-1})}{1-0.5z^{-1}},$$

$$H_2(z) = \frac{1-1.414z^{-1}+z^{-2}}{1+0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

画出级联型结构如题 3 解图(a)所示。

$$(2) \quad H_1(z) = \frac{1-1.414z^{-1}+z^{-2}}{1-0.5z^{-1}},$$

$$H_2(z) = \frac{4(1+z^{-1})}{1+0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

画出级联型结构如题 3 解图(b)所示。

4. 题 4 图中画出了四个系统, 试用各子系统的单位脉冲响应分别表示各总系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。并求其总系统函数 $H(z)$ 。

解

$$(a) \quad h(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n),$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

$$(b) \quad h(n) = h_1(n) + h_2(n) + h_3(n),$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$$

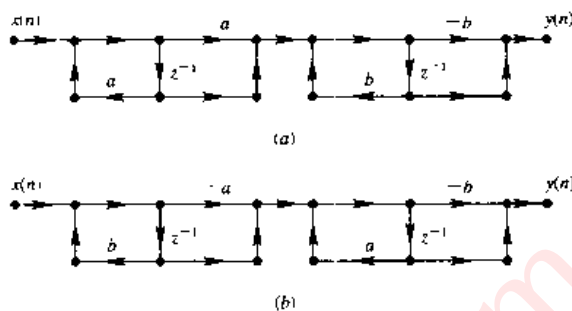
$$(c) \quad h(n) = h_1(n) * h_2(n) + h_3(n),$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) + H_3(z)$$

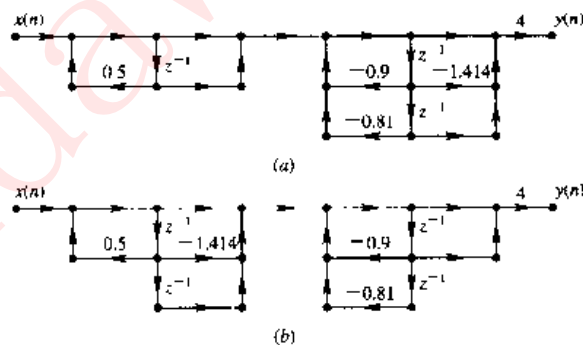
$$(d) \quad h(n) = h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n) * h_4(n)] + h_5(n)$$

$$= h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n) * h_4(n) + h_5(n)$$

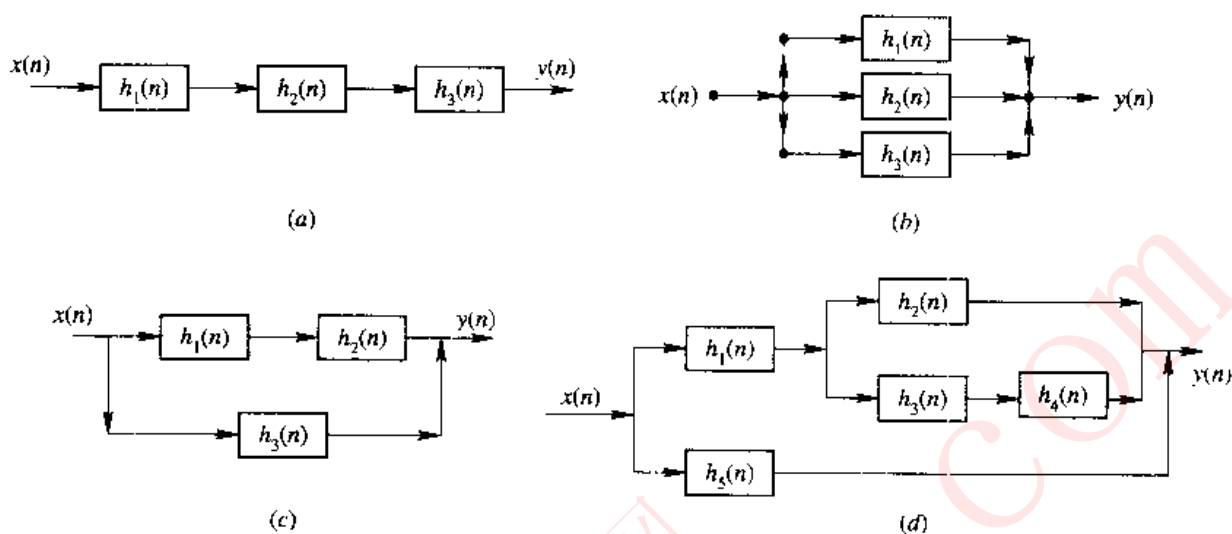
$$H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z)H_4(z) + H_5(z)$$



题 2 解图(二)

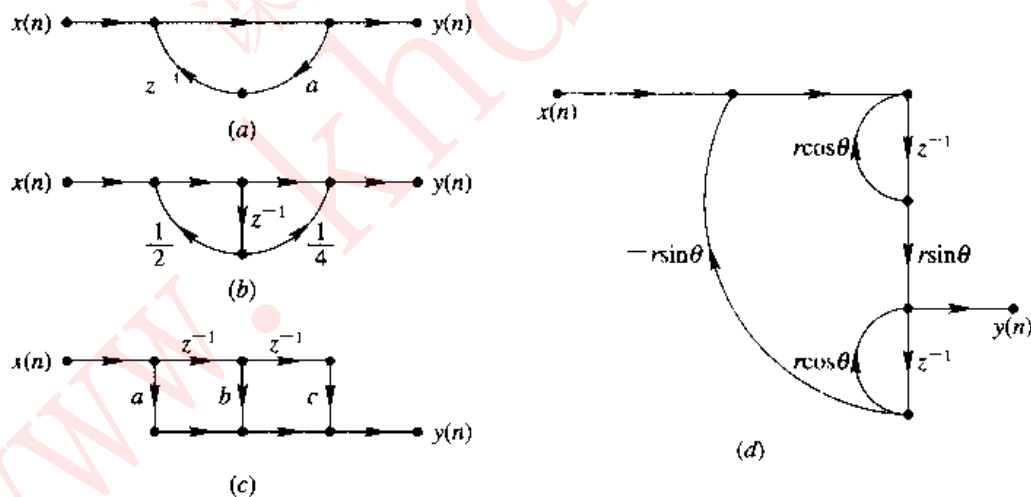


题 3 解图



题 4 图

5. 写出题 5 图中各流图的系统函数及差分方程。



题 5 图

解

$$(a) H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$Y(z) = aY(z)z^{-1} + X(z), y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

$$(b) H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

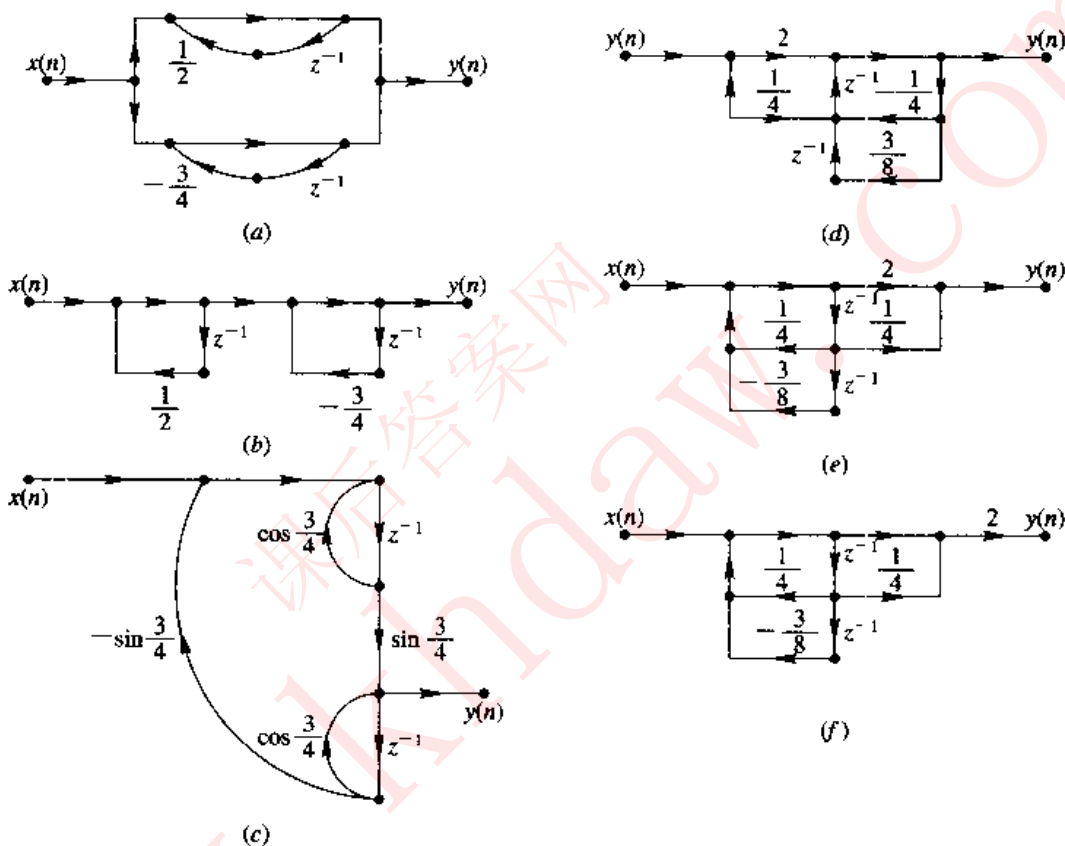
$$Y(z) = \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + X(z) + \frac{1}{4}X(z)z^{-1}, y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$$

(c) $H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$, $y(n) = ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2)$

(d)
$$H(z) = \frac{r \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - r \cos \theta \cdot z^{-1} - r \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 \sin^2 \theta \cdot z^{-2} + r^2 \cos^2 \theta \cdot z^{-2}}$$
$$= \frac{r \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - 2r \cos \theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$y(n) = 2r \cos \theta \cdot y(n-1) - r^2 y(n-2) + r \sin \theta \cdot x(n-1)$

6. 写出题 6 图中流图的系统函数。



题 6 图

解

(a)
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

或者

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + 1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

(b)
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

或者

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$(c) \quad H(z) = \frac{\sin \frac{3}{4} \cdot z^{-1}}{1 - \cos \frac{3}{4} \cdot z^{-1} - \cos \frac{3}{4} \cdot z^{-1} + \sin^2 \frac{3}{4} \cdot z^{-2} + \cos^2 \frac{3}{4} \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{3}{4} \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cos \frac{3}{4} \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

$$(d) \quad H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$(e) \quad H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$(f) \quad H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1} \cdot 2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{2 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

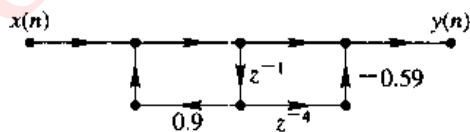
7. 已知滤波器的单位脉冲响应为 $h(n) = 0.9^n R_5(n)$, 求出该滤波器的系统函数, 并画出其直接型结构。

解

$$h(n) = 0.9^n R_5(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.9^n R_5(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^4 0.9^n z^{-n}$$

$$= \frac{1 - 0.9^5 z^{-5}}{1 - 0.9z^{-1}} = \frac{1 - 0.59049z^{-5}}{1 - 0.9z^{-1}}$$



题 7 解图

画出其直接型结构如题 7 解图所示。

8. 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为: $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$, 试用频率采样结构实现该滤波器。设采样点数 $N=5$, 要求画出频率采样网络结构图, 写出滤波器的参数计算公式。

解 已知频率采样结构的公式为

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

式中, $N=5$,

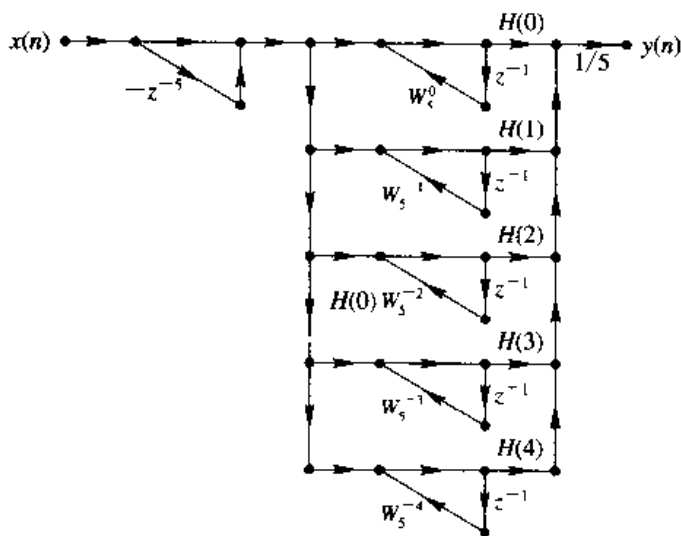
$$H(k) = \text{DFT}[h(n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^4 [\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)] W_N^{kn}$$

$$= 1 - e^{-j\frac{2}{5}\pi k} + e^{-j\frac{8}{5}\pi k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

它的频率采样结构如题 8 解图所示。



题 8 解图

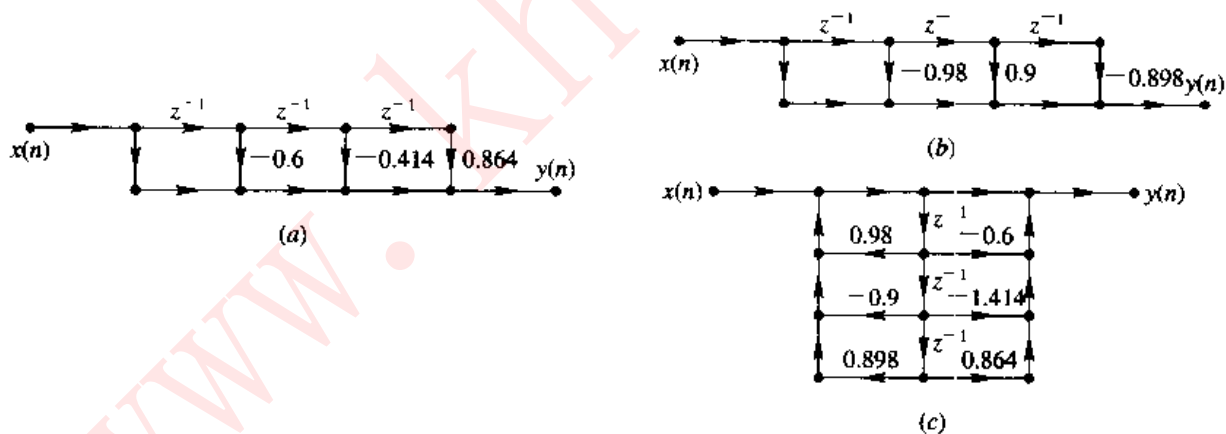
9. 令 $H_1(z) = 1 - 0.6z^{-1} - 1.414z^{-2} + 0.864z^{-3}$

$H_2(z) = 1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}$

$H_3(z) = H_1(z)/H_2(z)$

分别画出它们的直接型结构。

解 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 直接型结构分别如题 9 解图(a)、(b)、(c)所示。



题 9 解图

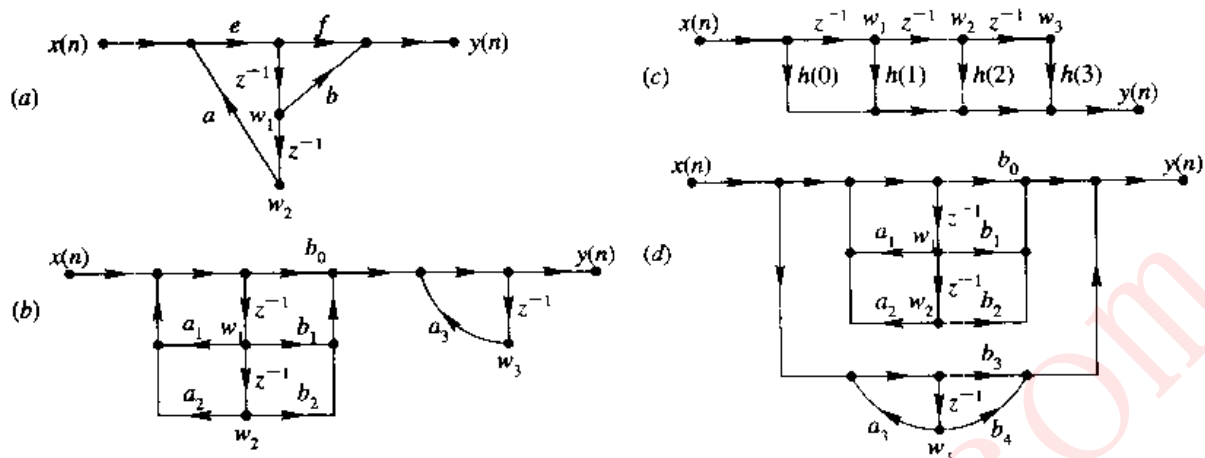
10. 分别写出题 10 图中流图的状态方程和输出方程, 状态变量用 w_i , $i=1, 2, 3$ 表示, 并标在图中。

解

(a)

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ae \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [b \quad aef] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + efx(n)$$



题 10 图

(b)

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 b_0 + b_1 & a_2 b_0 + b_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} a_1 b_0 + b_1 & a_2 b_0 + b_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n)$$

(c)

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} h(1) & h(2) & h(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + h(0)x(n)$$

(d)

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} a_1 b_0 + b_1 & a_2 b_0 + b_2 & a_3 b_3 + b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + (b_0 + b_3)x(n)$$

11. 按照图中标出的状态变量 w_1 和 w_2 , 写出状态方程和输出方程及系统函数。

解

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [0.5 \quad 1.05] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

$$H(z) = C[zI - A]^{-1}B + d$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.5 \quad 1.05], \quad d = 1$$

$$[zI - A]^{-1} = \frac{1}{z^2 - 0.1z + 0.1} \begin{bmatrix} z & 0.1 & 0.1 \\ 1 & z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^2 - 0.1z + 0.1} [0.5 \quad 1.05] \begin{bmatrix} z - 0.1 & -0.1 \\ 1 & z \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + 0.1z^{-2}} \end{aligned}$$

也可以按照 Masson 公式直接写出系统函数如下式:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-2} + 2z^{-1} + 0.5z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1} + 0.1z^{-2} - 0.2z^{-1}} = \frac{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

12. 设网络差分方程为

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2)$$

(1) 画出直接型网络结构, 并写出状态方程和输出方程;

(2) 利用已求出的系数矩阵求其系统函数。

解

$$(1) \quad y(n) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2)$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{8}Y(z)z^{-2}$$

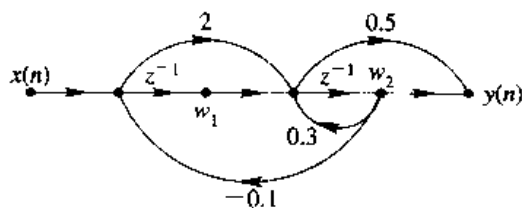
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

画出它的直接型结构如题 12 解图所示。

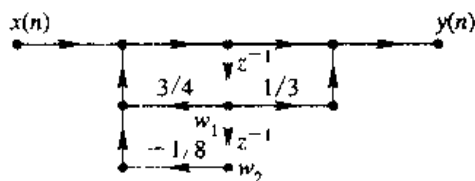
$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \quad -\frac{1}{8} \right] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

$$= \left[\frac{13}{12} \quad -\frac{1}{8} \right] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$



题 11 图



题 12 解图

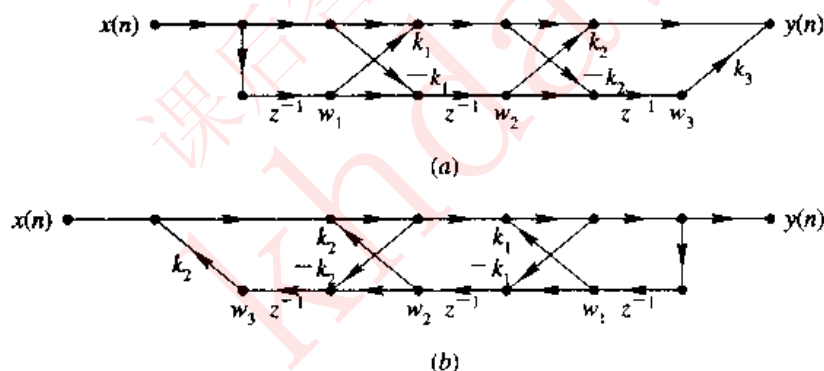
$$(2) \quad H(z) = C[zI - A]^{-1}B + d$$

$$[zI - A] = \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -1 & z \end{bmatrix}, \quad [zI - A]^{-1} = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \begin{bmatrix} z & -\frac{1}{8} \\ 1 & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -\frac{1}{8} \\ 1 & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{\frac{13}{12}z - \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} + 1 = \frac{z^2 + \frac{1}{3}z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \end{aligned}$$

该结果和上面利用差分方程求出的系统函数是一样的。

13. 已知网络结构如题 13 图所示, 分别写出其状态方程和输出方程。



题 13 图

解

$$(a) \quad \begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -k_1k_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 1-k_1^2 & -k_1k_2 & -k_1k_3 \\ 0 & 1-k_2^2 & -k_2k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

14. 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [1, 0] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

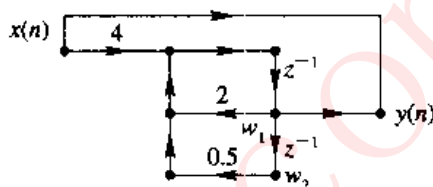
试根据状态方程和输出方程画出其网络结构图, 并求出其系统函数。

解 按照各参数矩阵的意义, 画出它的网络

结构图如题 14 解图所示。

按照 Masson 公式直接写出它的系统函数:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + \frac{4z^{-1}}{1 - 2z^{-1} - 0.5z^{-2}} \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 - 2z^{-1} - 0.5z^{-2}} \end{aligned}$$



题 14 解图

15. 已知因果系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 & -1.53 & 0.648 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的前四点。

解

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ d, & n = 0 \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}, & n > 0 \end{cases}$$

$$n < 0, h(n) = 0$$

$$n = 0, h(n) = d = 1$$

$$n > 0, h(n) = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}$$

$$n = 1, h(1) = \mathbf{CB} = [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.5$$

$$n = 2, h(2) = \mathbf{CAB} = [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1.7 & -1.53 & 0.648 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1.7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.72$$

$$n = 3, h(3) = CA^2B = CAAB$$

$$= [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1.7 & -1.53 & 0.648 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1.36 \\ 1.7 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.053$$

$$n = 4, h(4) = CA^3B = CAA^2B$$

$$= [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 1.7 & -1.53 & 0.648 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.36 \\ 1.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [2.5 \quad -2.53 \quad -0.152] \begin{bmatrix} 0.359 \\ 1.36 \\ 1.7 \end{bmatrix} = -2.8017$$

第六章

IIR 数字滤波器设计

目前, 滤波器设计软件种类众多, 功能齐全, 且使用非常方便。只要滤波器设计的概念清楚, 以正确的指标参数调用相应的滤波器设计程序或工具箱函数, 便可得到正确的设计结果。因此, 熟悉滤波器的基本概念及滤波器的基本设计方法显得尤为重要。本章内容主要围绕以下学习重点来安排。

(1) 建立数字滤波器设计的正确概念, 掌握滤波器的设计方法。

(2) 拓宽教材内容, 推导证明教材中一些重要结论和重要公式, 提高读者证明演绎能力。

(3) 结合例题和习题的求解过程介绍采用 MATLAB 信号处理工具箱函数设计数字滤波器的现代方法, 使读者了解现在工程实际中设计滤波器是非常简单易行的, 绝不像手算做习题那样困难。

(4) 采样数字滤波系统的概念及其指标参数换算关系。

6.1 学习要点及例题

6.1.1 IIR 数字滤波器设计的基本概念及基本设计方法

1. 滤波器设计指标描述

滤波器的指标常常在频域给出。数字滤波器的频响特性函数 $H(e^{j\omega})$ 一般为复函数, 所以通常表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

其中, $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数; $\theta(\omega)$ 称为相频特性函数。对 IIR 数字滤波器, 通常用幅频响应函数 $|H(e^{j\omega})|$ 来描述设计指标, 而对线性相位特性的滤波器, 一般用 FIR 数字滤波器设计实现。

应当注意, $H(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的, 这是数字滤波器与模拟滤波器的最大区别。所以, 在后面的叙述中, 只给出 $[-\pi, \pi]$ 区间上的设计指标描述。

IIR 低通滤波器指标描述参数如图 6.1 所示。图中, ω_p 为通带边界频率; α_p 为通带最大波纹(dB), $\alpha_p = -20 \lg \left| \frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} \right| = 20 \lg \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$; ω_s 为阻带边界频率; α_s 为阻带最小衰减(dB), $\alpha_s = -20 \lg \delta_2$ 。其中, δ_1 和 δ_2 分别称为通带波纹和阻带波动。一般要求:

当 $0 \leq |\omega| \leq \omega_p$ 时, $-20 \lg |H(e^{j\omega})| \leq \alpha_p$;

当 $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ 时, $\alpha_s \leq -20 \lg |H(e^{j\omega})|$ 。

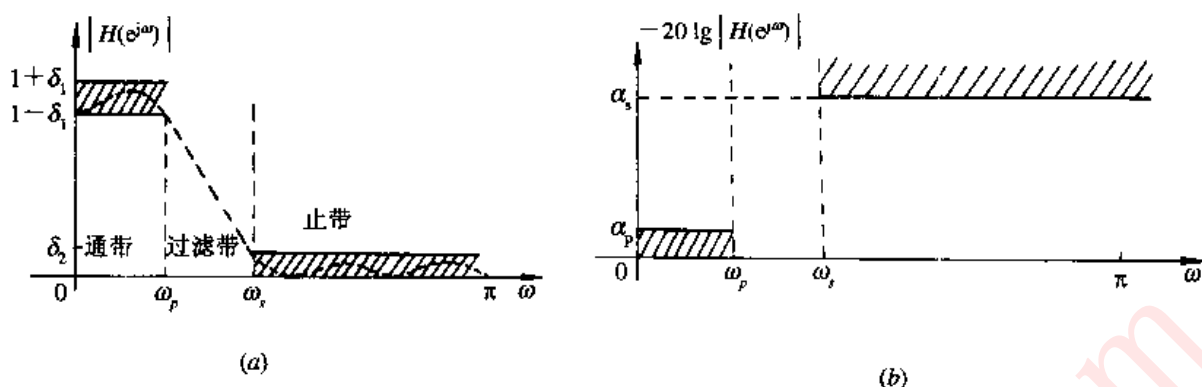


图 6.1 IIR 滤波器指标描述示意图

(a) $|H(e^{j\omega})|$ 特性; (b) $-20 \lg |H(e^{j\omega})|$ 指标 (dB)

当 $\alpha_p = 3$ dB 时, 记 ω_p 为 ω_c , 称 ω_c 为 3 dB 截止频率。 ω_c 是滤波器设计的重要参数之一。

设计滤波器时, 应根据指标参数及对滤波特性的要求, 选择合适的滤波器类型和设计方法, 进行设计。IIR 数字滤波器的设计既可以从模拟滤波器的设计入手来进行, 也可以直接由指标参数, 直接调用滤波器设计子程序或函数来进行。

2. 采样数字滤波器的概念及其指标参数换算

由于数字信号处理的诸多优点, 在信号处理工程实际中, 常常希望采用数字滤波器实现对模拟信号的滤波处理。所谓采样数字滤波器, 就是实现这种处理的系统, 其组成如图 6.2 所示。

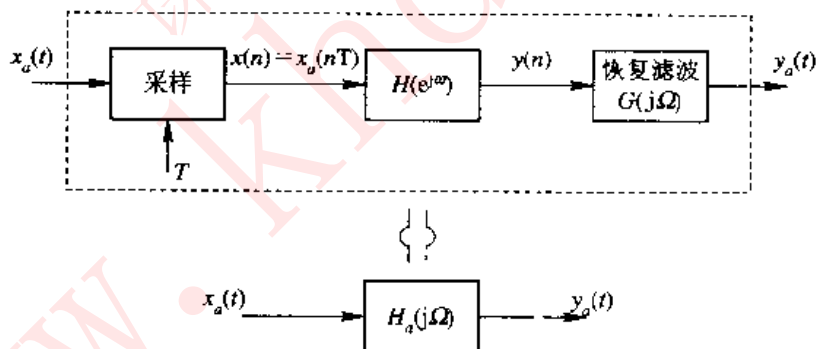


图 6.2 采样数字滤波器组成

图中, 设采样频率 $f_s \geq 2f_c$ ($T = 1/f_s$ 为采样间隔), f_c 为模拟信号 $x_a(t)$ 的最高频率。 $G(j\Omega)$ 为理想低通滤波器, 截止频率为折叠频率 π/T (当 $G(j\Omega)$ 不是理想低通时, 以下结论要进行修正)。

采样数字滤波系统的设计指标一般由采样数字滤波系统的等效模拟滤波器 $H_a(j\Omega)$ 的指标给出。所以设计这种滤波系统中的数字滤波器的关键是由 $H_a(j\Omega)$ 指标确定其中的数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的指标。可以证明^[2], $H(e^{j\omega})$ 与 $H_a(j\Omega)$ 具有如下关系:

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = H(e^{j\Omega T}), & 0 \leq |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \frac{\pi}{T} < |\Omega| \end{cases} \quad (6.1)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) \Big|_{\Omega=\omega/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right) \quad (6.2)$$

且
$$h(n) = \text{FT}[H(e^{j\omega})] = T \cdot h_a(nT) \quad (6.3)$$

其中
$$h_a(t) = \text{IFT}[H_a(j\Omega)]$$

$H_a(j\Omega)$ 与 $H(e^{j\omega})$ 之间仅是 $\omega = \Omega T$ 的频率尺度变换关系。

通过关系式(6.2)可由 $H_a(j\Omega)$ 指标确定数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 指标(如 ω_p , ω_s , α_p , α_s 等), 利用频率转换关系 $\omega = \Omega T$, 容易求出 $H(e^{j\omega})$ 的各边界频率。选用适当的设计方法得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

由(6.3)式知, 也可以采用脉冲响应不变法将等效模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成采样数字系统中数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。但必须注意: ① 对 $h_a(t)$ 的采样频率必须满足采样定理; ② 对高通和带阻滤波处理, 这种方法不能用, 需要用双线性变换法, 这时设计稍复杂一些, 后面的例 6.8 将详细说明设计过程。

3. IIR 数字滤波器设计方法

滤波器设计就是根据滤波器指标要求, 确定一种可实现的滤波器硬件结构或滤波算法结构, 来实现指标要求的滤波功能。IIR 滤波器与 FIR 滤波器的设计方法大不相同。对 IIR 数字滤波器, 设计的结果是滤波器系统函数 $H(z)$, 而 FIR 数字滤波器的设计结果是其单位脉冲响应 $h(n)$ 。这是因为 IIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 为无限长, 无法由 $h(n)$ 确定网络结构。而 N 阶 IIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 的系数有限, 所以可以由 $H(z)$ 的表达式确定滤波器的网络结构或算法结构(如差分方程)。对 FIR 滤波器, 其单位脉冲响应 $h(n)$ 就是直接型网络结构的乘法因子, 所以只要确定了 $h(n)$, FIR 滤波器就设计好了。

关于滤波器的设计原理与具体的设计方法, 教材及其他数字信号处理书中都有详细叙述, 所以本章不作重复。下面仅对 IIR 数字滤波器的几种设计方法及设计步骤作简要归纳, 并指出学习要点, 并通过例题及习题解答说明各种设计方法的具体设计过程及相关设计公式, 以便读者能有条理地解答滤波器设计题目以及设计实际应用滤波器。

为了使初学者对 IIR 数字滤波器设计方法有一个整体概念, 先抛开繁杂的设计过程和设计公式, 用图 6.3 归纳 IIR 数字滤波器的一般设计方法。

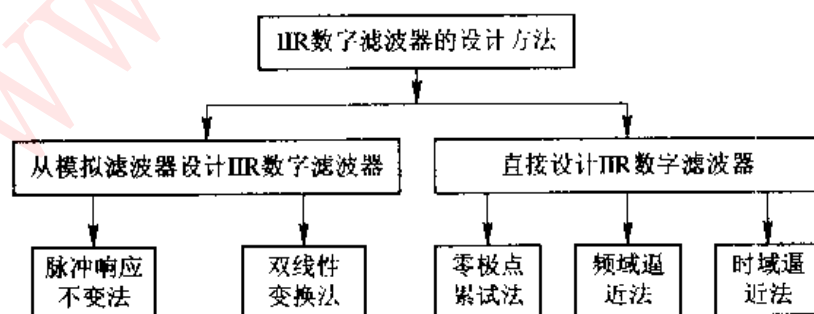


图 6.3 IIR 数字滤波器设计方法一览表

下面对图 6.3 中给出的五种设计方法及其学习要点进行简要归纳。对频域直接逼近法和时域波形逼近法都必须借助计算机设计(即 CAD 设计), 且已有商业设计程序。所以只对其设计思想及逼近准则作小结。

6.1.2 模拟滤波器设计

为了叙述方便,用 AF 表示模拟滤波器,用 DF 表示数字滤波器。可以看到,从 AF 设计 DF 时,首先要设计一个“相应的 AF”,所以下面以流程图形式给出 AF 的设计步骤,如图 6.4 所示。

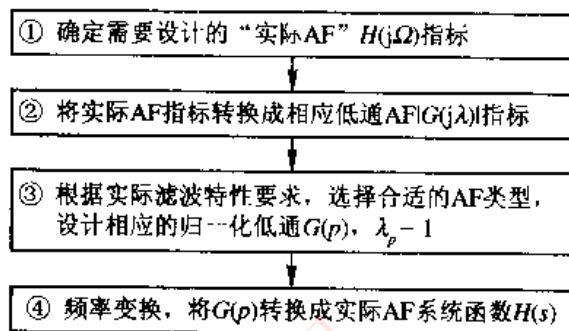


图 6.4 AF 设计流程图

由于 AF 设计手册中给出了各种典型 AF 归一化低通原型的设计公式和图表及系统函数 $G(p)$, 因此 AF 设计起来很方便。所以,对需要设计的实际 AF(低通、高通、带通和带阻 AF), 首先将其指标参数转换成相应的归一化低通指标参数, 转化为设计归一化低通 AF。最后又将设计好的归一化低通 $G(p)$ 转换成实际滤波器 $H(s)$ 。为此, 下面归纳四种实际 AF 系统函数 $H(s)$ 与其相应的归一化低通 AF 系统函数 $G(p)$ 相互转换关系, 如图 6.5 所示。图中总结出了图 6.4 中第二步所涉及的所有转换关系和转换公式。

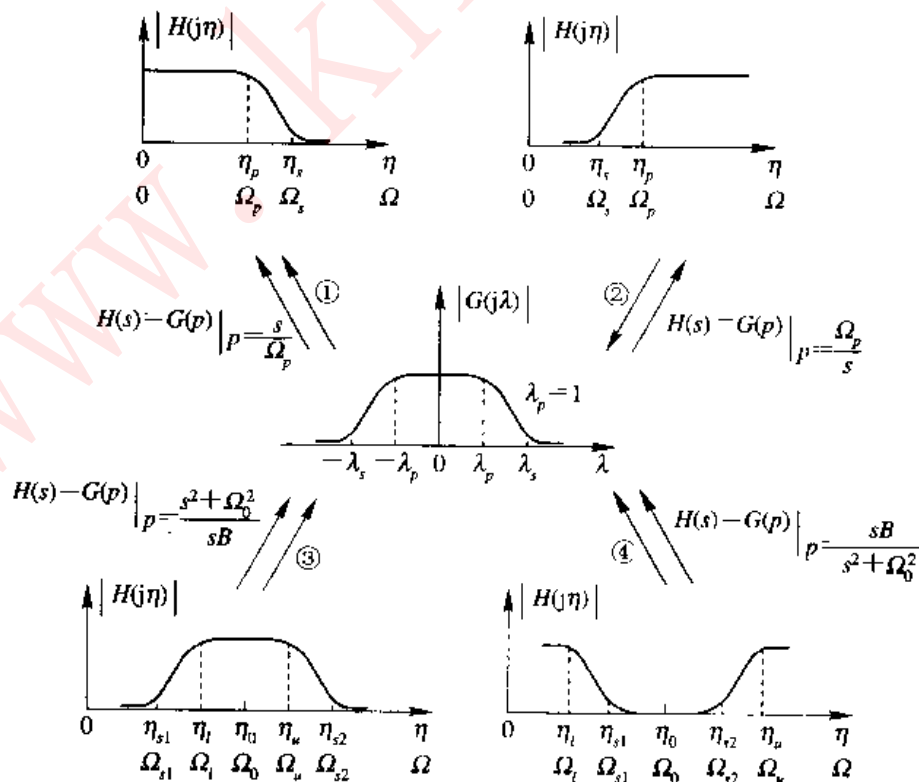


图 6.5 实际 AF 与其相应的归一化低通 AF 指标转换关系

图 6.5 中的系统函数及变量符号的含义如下:

$G(p)$ ——归一化低通 AF 系统函数;

$p=j\lambda$ ——归一化拉氏复变量;

$G(j\lambda)$ ——归一化低通 AF 频响函数;

λ ——归一化频率;

$H(s)$ ——需要设计的“实际 AF”系统函数;

$s=j\Omega$ ——拉氏复变量;

Ω ——模拟角频率(rad/s);

$H(j\eta)$ ——实际 AF 的归一化频响函数(对 Ω_p 归一化);

η ——归一化频率。对不同的实际滤波特性, η 与 Ω 关系式不同。

由图 6.5 很容易看出各种实际 AF 指标参数的符号和含义, 以及向箭头方向转换的有关公式。由于四种实际 $H(j\Omega)$ 向 $G(j\lambda)$ 转换的公式较多, 所以图中用①、②、③和④表示, 它们分别代表以下四组转换公式:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \eta = \frac{\Omega}{\Omega_p}, \eta_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = 1, \eta_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \\ \lambda = \eta = \frac{\Omega}{\Omega_p}, \lambda_p = \eta_p = 1, \lambda_s = \eta_s \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \eta = \frac{\Omega}{\Omega_p}, \eta_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = 1, \eta_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \\ \lambda = \frac{1}{\eta}, \lambda_p = 1, \lambda_s = \frac{1}{\eta_s} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \text{带宽 } B = \Omega_u - \Omega_l, \text{ 通带中心频率 } \Omega_0^2 = \Omega_l \cdot \Omega_u \\ \eta_s = \frac{\Omega_{s1}}{B}, \eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B} \\ \eta_l = \frac{\Omega_l}{B}, \eta_u = \frac{\Omega_u}{B} \\ \eta_c^2 = \eta_l \cdot \eta_u, \lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}, \lambda_p = \frac{\eta_p^2 - \eta_0^2}{\eta_p} = 1 \\ \lambda_{s2} = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}}, -\lambda_{s1} = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}} \\ \text{取 } \lambda_s = \min[\lambda_{s2}, |-\lambda_{s1}|] \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \text{阻带带宽 } B = \Omega_u - \Omega_l, \text{ 阻带中心频率 } \Omega_c^2 = \Omega_u \cdot \Omega_l \\ \eta = \frac{\Omega}{B}, \eta_u = \frac{\Omega_u}{B}, \eta_l = \frac{\Omega_l}{B}, \eta_s = \frac{\Omega_{s1}}{B}, \eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B}, \eta_c^2 = \eta_u \cdot \eta_l \\ \lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_0^2}, \lambda_p = \frac{\eta_p}{\eta_p^2 - \eta_0^2} = 1, -\lambda_{s1} = \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}, \lambda_{s2} = \frac{\eta_{s2}}{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2} \\ \text{取 } \lambda_s = \min[|-\lambda_{s1}|, \lambda_{s2}] \end{cases}$$

归一化低通 $G(j\lambda)$ 的通带最大衰减和阻带最小衰减仍为 α_p 和 α_s 。下面解决图 6.4 中第

3 个方框:“根据实际滤波特性要求,选择合适的 AF 类型,设计相应的归一化低通 $G(p)$, $\lambda_p=1$ ”。

1. 选择 AF 类型基于几种典型 AF 的特点(对相同的阶数 N)

(1) 巴特沃斯(Butterworth)AF: 幅频特性单调下降,但选择性最差。

(2) 切比雪夫 I (Chebyshev I) AF: 幅频响应在通带内等波纹,阻带单调下降,选择性比切比雪夫 I 好。

(3) 切比雪夫 II (Chebyshev II) AF: 幅频响应在通带内单调下降,阻带等波纹。

(4) 贝塞尔(Bessel)AF: 通带内有较好的线性相位特性。

(5) 椭圆(ellip)AF: 选择性最好。但通带和阻带均为等波纹。

根据以上各种类型 AF 特点,选择适合设计要求的类型。例如,要求阶数最低,则选择 ellip AF。各种 AF 的相频特性在 AF 设计手册中可找到。

2. 设计归一化低通 $G(p)$

下面仅以 Butterworth AF 为例,介绍阶数 N 计算,去归一化等设计公式和利用上述设计流程图 6.4 及转换关系图 6.5 设计带通 AF 的过程。

归一化低通 AF 设计步骤及有关公式(以巴特沃斯型 AF 为例)可归纳如下:

(1) 根据指标参数计算阶数 N :

$$\lambda_{se} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} \quad (6.4)$$

$$k_{sf} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} \quad (6.5)$$

$$N = -\frac{\lg k_{sf}}{\lg \lambda_p} \quad (6.6)$$

(2) 求归一化低通原型 AF 系统函数 $G(p')$ 的极点,写出 $G(p')$,或查表 6.1 得到 $G(p')$ 的各种表示形式。我们知道,巴特沃斯 AF 的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

式中, Ω_c 为 3 dB 截止频率。所谓归一化低通原型,就是 $\Omega_c=1$,即关于 Ω_c 归一化的低通,这时其极点 p_k 只与 N 有关:

$$p_k' = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$G(p') = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p' - p_k')}$$

式中, p' 是对 Ω_c 归一化的归一化拉氏复变量。由表 6.1 可查出极点 p_k , 分母多项式系数 $b_0 \sim b_{N-1}$, 以及分母因式 $B(p') = B_1(p')B_2(p')\dots$, 可写出 $G(p')$ 如下:

$$G(p') = \frac{1}{p'^N + b_{N-1}p'^{N-1} + \dots + b_1p' + b_0}$$

或

$$G(p') = \frac{1}{B(p')}$$

表 6.1 巴特沃斯归一化低通原型滤波器参数

极点位置 阶数 N	$P_{0, N-1}$	$P_{1, N-2}$	$P_{2, N-3}$	$P_{3, N-4}$	P_4				
1	-1.0000								
2	-0.7071±j0.7071								
3	-0.5000±j0.8660	-1.0000							
4	-0.3827±j0.9239	-0.9239±j0.3827							
5	-0.3090±j0.9511	-0.8090±j0.5875	-1.0000						
6	-0.2588±j0.9659	-0.7071±j0.7071	-0.9659±j0.2588						
7	-0.2225±j0.9749	-0.6235±j0.7818	-0.9010±j0.4339	-1.0000					
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	-0.8315±j0.5556	-0.9808±j0.1951					
9	-0.1736±j0.9848	-0.5000±j0.8660	-0.7660±j0.6428	-0.9397±j0.3420	-1.0000				
分母多项式	$B(p)=p^N+b_{N-1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
系数阶数 N	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588
分母因式	$B(p)=B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$								
阶数 N	$B(p)$								
1	$(p+1)$								
2	$(p^2+1.4142p+1)$								
3	$(p^2+p+1)(p+1)$								
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$								
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$								
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$								
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$								
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$								
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$								

下面以较复杂的带通 AF 设计为例,说明按图 6.4 和图 6.5 设计 AF 的具体设计过程。

例 6.1 设计一个带通 AF,要求其幅频特性为单调下降(无波纹),通带带宽 $B=2\pi \times 200$ rad/s,中心频率 $\Omega_0=2\pi \times 100$ rad/s,通带内最大衰减 $\alpha_p=2$ dB, $\Omega_{s1}=2\pi \times 800$ rad/s, $\Omega_{s2}=2\pi \times 1240$ rad/s,阻带最小衰减 $\alpha_s=15$ dB。

解 按图 6.4 中的流程设计。

① 确定带通 AF 的指标参数:

$$\Omega_0 = 2\pi \times 100 \text{ rad/s}$$

$$B = 2\pi \times 200 \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 2 \text{ dB}$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \times 800 \text{ rad/s}, \quad \Omega_{s2} = 2\pi \times 1240 \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

② 将实际 AF 指标转换成相应归一化低通 $G(j\lambda)$ 指标,由图 6.5 公式③可得

$$\eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B} = \frac{2\pi \times 800}{2\pi \times 200} = 4$$

$$\eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B} = \frac{2\pi \times 1240}{2\pi \times 200} = 6.2$$

$$\eta_0^2 = \eta_1 \eta_u = \frac{\Omega_0}{B} \frac{\Omega_c}{B} = \frac{\Omega_0^2}{B^2} = \left(\frac{2\pi \times 1000}{2\pi \times 200} \right)^2 = 25, \quad \eta_0 = 5$$

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_{s2} = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = \frac{6.2^2 - 5^2}{6.2} = 2.1667$$

$$-\lambda_{s1} = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}} = \frac{16 - 25}{4} = -2.25$$

所以取 $\lambda_s = \min[|-\lambda_{s1}|, \lambda_{s2}] = 2.1667$ 。

③ 由 $G(j\lambda)$ 指标参数设计相应归一化低通 $G(p)$:

根据题意要求,应选用巴特沃斯型 AF。

由式(6.4)、(6.5)和(6.6)可得

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \lambda_s = 2.1667$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.2} - 1}{10^{1.5} - 1}} = 0.1382$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 2.558, \quad \text{取 } N = 3$$

3 dB 截止频率: $\lambda_c = \lambda_p (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{1/(2N)} = (10^{0.2} - 1)^{-1/6} = 1.0935 \approx 1.1$

查表 6.1 得到 3 阶归一化低通原型 $G(p')$:

$$G(p') = \frac{1}{p'^3 + 2p'^2 + 2p' + 1}$$

由于 $G(p')$ 是关于 3 dB 截止频率归一化的,即 $\lambda_c=1$,而图 6.5 中的 $G(j\lambda)$ 是关于 Ω_p 归一化的,即 $\lambda_p=1$ 。所以应对 $G(p')$ 去归一化,得到 $G(p)$,以使用图 6.5 中的频率变换公式将 $G(p)$ 转换成实际带通 $H(s)$,这一点必须注意。

$$G(p) = G(p')|_{p'=p/\lambda_c} = \frac{\lambda_c^3}{p^3 + 2\lambda_c p^2 + 2\lambda_c^2 p + \lambda_c^3}$$

④ 按图 6.5 中 $G(p) \rightarrow$ 带通 $H(s)$ 的变换公式, 将 $G(p)$ 转换成实际 $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= G(p) \Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_1\Omega_2}{sB}=\frac{s^2+\Omega_0^2}{sB}} \\ &= \frac{\lambda^2 B^5 s^4}{(s^2 + \Omega_0^2)^3 + 2\lambda(s^2 + \Omega_1^2)sB + 2\lambda^2(s^2 + \Omega_1^2)s^2 B^2 + s^3 B^3 \lambda^3} \\ &= 2.6412 \times 10^9 [s^6 + 2.7646 \times 10^5 s^5 + 5.0058 \times 10^3 s^4 + 4.8241 \times 10^3 s^3 \\ &\quad + 1.9762 \times 10^{10} s^2 + 4.3088 \times 10^4 s + 3.1529 \times 10^{-6}]^{-1} \end{aligned}$$

仿照该例题, 利用前面给出的设计流程图及频率变换关系图及相应公式, 不难设计其它三种实际 AF。在习题解答中可以看到设计过程。

6.1.3 从 AF 设计 DF

由于 AF 设计理论很成熟, 而且有多种具有优良特性的典型 AF 可供选用, 所以常常从 AF 来设计 DF。其设计流程图如图 6.6 所示。

图 6.6 中的第三步(设计相应 AF)前面已介绍过。所以只要掌握了将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 的方法与公式, 以及相应的数字频率 ω 与模拟频率 Ω 之间的关系式, 就可以进行图 6.6 中的第二步和第四步, 从而完成从 AF 设计 DF。下面归纳用脉冲响应不变法和双线性变换法将 AF 的系统函数 $H_a(s)$ 转换成 DF 的系统函数 $H(z)$ 的方法、公式及 ω 与 Ω 的关系式。

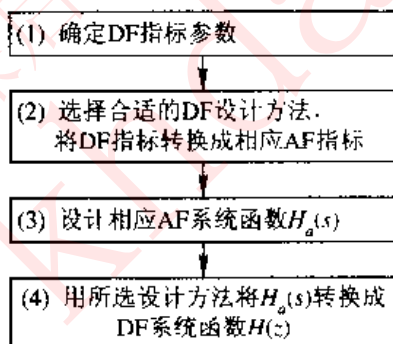


图 6.6 从 AF 设计 DF 流程图

1. 脉冲响应不变法

只讨论 $H_a(s)$ 只有单阶极点的情况, 对有多阶极点的一般情况在例 6.7 详细讨论。

设 $H_a(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, $Q(s)$ 和 $P(s)$ 分别为 s 的 M 次和 N 次多项式, 且 $N > M$ 。 $H_a(s)$ 只有单阶极点 s_k , $k=1, 2, \dots, N$ 。这时, 用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 的方法如下^[1]:

(1) 将 $H_a(s)$ 部分分式展开:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (6.7)$$

(2) 直接将 s 平面极点 s_k 映射成 z 平面极点 $e^{s_k T}$, 写出 $H(z)$ 如下:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (6.8)$$

且满足 $h(n) = h_a(nT)$, T 为采样间隔。因此取名为脉冲响应不变法。 $H_a(j\Omega)$ 与 $H(e^{j\omega})$ 的关系为^[1]

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\left[\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right]\right)$$

或

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\left[\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right]\right), \quad \omega = \Omega T$$

上式表示的 $H(e^{j\omega})$ 增益随 T 变化, 这是不希望的, 所以常用“实用公式”设计。实用设计公式为

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{j\omega_k} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\left[\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right]\right)$$

上式表明, $H(e^{j\omega})$ 为 $H_a(j\Omega)$ 的周期延拓函数, $\omega = \Omega T$ 为线性关系, 将 DF 指标转换成相应的 AF 指标时要用到该关系。当 $H_a(j\Omega)$ 为带限特性, 且 T 足够小时, 在 $[-\pi, \pi]$ 上, $H(e^{j\omega})$ 与 $H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right)$ 相同, 这就是脉冲响应不变法的优点。但 $H_a(j\Omega)$ 一般都不具有带限性, 所以周期延拓存在频率混叠失真, 这是该方法的严重缺点, 使其不能用于设计高通、带阻滤波器。

请注意, 所谓 DF“相应的 AF”, 就是用所选用的设计方法(如脉冲响应不变法), 将该 AF 的系统函数 $H_a(s)$ 转成 DF 系统函数 $H(z)$ 后, $H(z)$ 的频响特性指标刚好满足 DF 设计指标要求, 所以, 相应 AF 的指标参数及系统函数 $H_a(s)$ 均与设计方法有关。

2. 双线性变换法

双线性变换法彻底消除了频率混叠失真。其设计思想是算法逼近^[2](脉冲响应不变法是波形逼近, $h(n) = h_a(nT)$), 用差分近似微分, 用相邻两个采样的平均值近似微分方程中的瞬时值 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$, 将 AF 的微分方程变成差分方程, 经 Z 变换得到 $H(z)$ 。按这种思想导出的双线性映射公式为

$$H(z) = H_a(s) \quad s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6.9)$$

T 为采样间隔。 ω 与 Ω 的关系为^[1]

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \quad (6.10)$$

上式表明双线性变换法存在非线性频率失真, 这是该方法的缺点。但正是由于这种非线性失真, 将 s 平面的虚轴 $(-\infty, \infty)$ 压缩为 z 平面单位圆一周 $[-\pi, \pi]$, 才消除了频率混叠失真。而且这种非线性对设计片段常数特性^[1] DF 基本无影响。但将 DF 指标转换成相应的 AF 指标时, 必须进行预畸变校正^[1], 见下面的设计举例。

例 6.2 设计低通 DF, 要求幅频特性单调下降。3 dB 截止频率 $\omega_p = \omega_c = \frac{\pi}{3}$ rad, 阻带截止频率 $\omega_s = \frac{4\pi}{5}$ rad, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 15$ dB, 采样频率 $f_s = 30$ kHz, 分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计。

解

(1) 用脉冲响应不变法: 按图 6.6 流程设计。

① 确定 DF 指标参数:

$$\omega_p = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\omega_s = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

② 将 DF 指标参数转换成相应的 AF 指标参数。因为在脉冲响应不变法中, $\omega = \Omega T$, 所以,

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{\pi}{3} \times 30 \times 10^3 = 10\,000\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{4\pi}{5} \times 30 \times 10^3 = 24\,000\pi \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

③ 求相应的 AF 系统函数 $H_a(s)$ 。

a. 计算阶数 N , 根据要求, 应选择巴特沃斯 AF。由 (6.4)~(6.6) 式有

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^{1.5} - 1}} = 0.1803$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{24\,000\pi}{10\,000\pi} = 2.4$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.1803}{\lg 2.4} = 1.9569$$

取 $N=2$ 。

b. 查表 6.1 得到 2 阶巴特沃斯归一化低通原型:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

c. 频率变换, 由图 6.5 中 LP→LP 变换公式求出相应的 AF 系统函数 $H_a(s)$

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{\Omega_p^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_p s + \Omega_p^2} = \frac{10^8 \pi^2}{s^2 + 10^4 \pi \sqrt{2} s + 10^8 \pi^2}$$

④ 将 $H_a(s)$ 转换成 $H_1(z)$:

$$H_1(z) = \frac{0.4265z^{-1}}{1 - 0.7040z^{-1} + 0.2274z^{-2}}$$

以上结果是调用 MATLAB impinvar 函数直接求出的, 这样就不用求极点 s_1 和 s_2 以及部分分式展开。请读者按 (6.7) 和 (6.8) 式计算, 验证以上结果。

(2) 用双线性变换法设计:

① 确定 DF 指标参数: 与 (1) 的 ① 相同。

② 将 DF 指标参数转换成相应 AF 指标参数。因为在双线性变换法中, ω 与 Ω 为非线性关系, $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$ 。所以, 这里要预畸变校正^[1] (学习重点)。只有非线性预畸变校正由 DF 边界频率求得相应 AF 边界频率, 才能在经过双线性变换, 将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 过程中非线性畸变后, 保持 DF 原来边界频率不变。

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = 6 \times 10^4 \tan \frac{\pi}{6} = 3.4641 \times 10^4 \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = 6 \times 10^4 \tan \frac{2\pi}{5} = 18.466 \times 10^4 \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

③ 设计相应的 $H_a(s)$ 。

a. 计算阶数 N : 由(6.4)~(6.6)式, 有

$$k_{rp} = 0.1803 \quad (\text{与(1)的③相同})$$

$$\lambda_p = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{18.4661}{3.4661} = 5.3276$$

$$N = -\frac{\lg k_{rf}}{\lg \lambda_c} = -\frac{\lg 0.1803}{\lg 5.3276} = 1.0240$$

工程上为了简化系统, 可取 $N=1$ (工程上允许时, 可如此处理)。

b. 查表得归一化低通原型 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{s+1}$$

c. 经频率变换, 得

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s-\Omega_p}{s+\Omega_p}} = \frac{\Omega_p}{s+\Omega_p} = \frac{3.4641 \times 10^4}{s+3.4641 \times 10^4}$$

④ 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成 $H_2(z)$, 由(6.9)式, 有

$$H_2(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{3.4641 \times 10^4}{6 \times 10^4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3.4641 \times 10^4} = \frac{0.366(1+z^{-1})}{1-0.26795z^{-1}}$$

(3) 设计性能比较。

用脉冲响应不变法设计的 $H_1(z)$ 和用双线性变换法设计的 $H_2(z)$ 的幅频衰减(dB)曲线分别如图 6.7(a)和(b)所示。由图可见, 在通带内, 二者均能满足要求, 但 $|H_1(e^{j\omega})|$ 在 $\omega=\pi$ 附近存在频率混叠失真, 从而使 $\omega_c=0.8\pi$ 处衰减不到 -12 dB, 不满足指标要求。 $|H_2(e^{j\omega})|$ 无频率混叠失真, 满足要求。但 $|H_2(e^{j\omega})|$ 存在非线性频率失真, 且频率越高, 失真越明显。

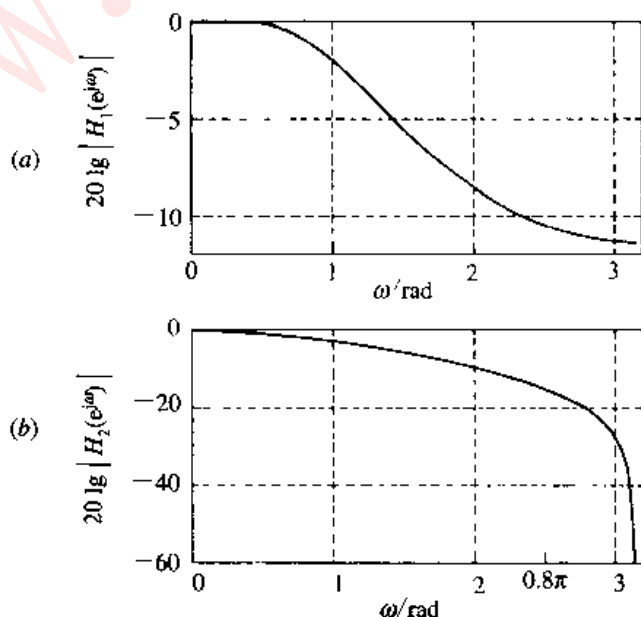


图 6.7 两种设计方法所得 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 幅频衰减特性比较

其它类型的 DF 设计过程见习题解答。

6.1.4 IIR - DF 的直接设计法

所谓直接设计法,就是直接在数字域设计 IIR - DF 的方法。相对而言,因为从 AF 设计 DF 是先设计相应的 AF,然后再通过 $s-z$ 平面映射,将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$,所以这属于间接设计法。该设计法只能设计与几种典型 AF 相对应的幅频特性的 DF。而需要设计任意幅频特性的 DF 时,只能用直接设计法。直接设计法一般都要借助于计算机进行设计,即计算机辅助设计(CAD)。现在已有多种 DF 优化设计程序。优化准则不同,所设计的滤波器特点亦不同。所以在这里主要建立优化设计的概念,了解各种优化准则的特点,并根据设计要求,选择合适的优化程序设计 DF。

例如,设希望逼近的频响特性为 $H_d(e^{j\omega})$,所设计的实际滤波器频响函数为 $H(e^{j\omega})$ 。二者的频响误差为

$$E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$$

均方误差定义为

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

使均方误差 ϵ^2 最小的优化设计准则称之为“最小均方误差准则”,这里的“最小”指 $|E(e^{j\omega})|$ 在整个频带 $[-\pi, \pi]$ 上的积分(总和)最小,而既非通带波纹最小,又非阻带波动最小。所以,用这种优化程序设计的滤波器的阻带最小衰减和通带波纹可能不满足要求。特别是以理想特性作为 $H_d(e^{j\omega})$ 时,为了使 ϵ^2 最小,优化过程尽可能逼近 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断特性(即使过渡带最窄),而使通带出现较大过冲、阻带最小衰减过小,不能满足工程要求。

建立如上概念后,调用频域最小均方误差准则优化设计程序时,正确构造 $H_d(e^{j\omega})$ 。设置合适的过渡带特性,可使通带和阻带逼近精度大大提高,即以过渡带换取通带平坦和阻带最小衰减加大。这一原则在各种设计法中都成立。或者根据需要,选用其它优化设计方法。IIR - DF 的优化技术设计法有^[4]频域最小均方误差法,最小 P 误差法、最小平方逆设计法和线性规划法等。线性规划法可实现等波纹逼近,即最大误差最小化逼近。

6.2 例 题

例 6.1、6.2 见上节内容。

例 6.3 采样数字系统的组成框图如图 6.8 所示。理想情况下, A/D 变换器将模拟信号采样,得到序列 $x(n) = x_a(nT)$,而 D/A 变换器是将序列 $y(n)$ 变成模拟带限波形

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

整个系统的作用可等效为一个线性时不变模拟滤波器。

(1) 如果 $h(n)$ 表示一截止频率为 $\pi/8$ 的低通数字滤波器,采样频率 $f_s = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$ 。试求等效模拟滤波器的截止频率。

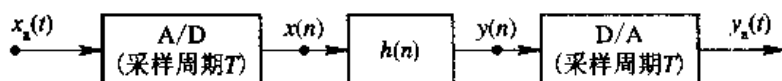


图 6.8 采样数字系统组成框图

(2) 如果 $f_s = 20 \text{ kHz}$, 重复(1)。

解 对采样数字系统, 数字频率 ω 与模拟频率 f 满足线性关系 $\omega = 2\pi f T$ 。已知数字滤波器截止频率 $\omega_c = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$, 所以,

$$\omega_c = \frac{\pi}{8} = 2\pi f_c T$$

f_c 为等效模拟滤波器截止频率。

$$(1) \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi T} = \frac{\pi/8}{2\pi} f_s = \frac{1}{16} \times 10\,000 = 625 \text{ Hz}$$

$$(2) \quad f_c = \frac{1}{16} \times 20\,000 = 1250 \text{ Hz}$$

由以上结果可见, 对相同的数字滤波特性 $H(e^{j\omega})$, 当采样数字系统中的采样频率不同时, 等效的模拟滤波器频响函数 $H_a(j\Omega)$ 的边界频率是不同的, 反之亦然。

例 6.4 如果用 $h_a(t)$ 、 $s_a(t)$ 和 $H_a(s)$ 分别表示一个时域连续线性时不变系统的单位冲响应、单位阶跃响应和系统函数, 用 $h(n)$ 、 $s(n)$ 和 $H(z)$ 分别表示一个时域离散线性非移变系统的单位脉冲响应、单位阶跃响应和系统函数, 那么,

① 若 $h(n) = h_a(nT)$, 则 $s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_a(kT)$ 是否成立?

② 若 $s(n) = s_a(nT)$, 则 $h(n) = h_a(nT)$ 是否成立?

解 ① $u(n) = u(n) * \delta(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)$

根据线性非移变系统的可加性可以得出系统单位阶跃响应 $s(n)$ 为

$$s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$$

如果 $h(n) = h_a(nT)$, 则

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_a(kT)$$

② $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

与①同理, 可得

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

如果 $s(n) = s_a(nT)$, 则

$$h(n) = s_a(nT) - s_a((n-1)T) \neq h_a(nT)$$

(注: $h_a(t) = \frac{ds_a(t)}{dt}$, $h_a(nT) = \frac{ds_a(t)}{dt} \Big|_{t=nT}$)

例 6.5 用脉冲响应不变法设计的数字滤波器在时域模仿了模拟滤波器的 $h_a(t)$ 的特性。实际工作中有时需要数字滤波器模仿模拟滤波器的单位阶跃响应波形。例 6.2 已证明脉冲响应不变法与单位阶跃不变法并不等价。试推导出单位阶跃不变法的设计公式, 并讨

论该设计法是否保持模拟滤波器的稳定性。

解 设 $s(n)$ 表示数字滤波器的单位阶跃响应, $s_a(t)$ 表示模拟滤波器的单位阶跃响应。所谓的“阶跃响应不变法”就是要求:

$$s(n) = s_a(nT)$$

上式两边进行 Z 变换,

$$S(z) = ZT[s(n)] = s_a(z) = ZT[s_a(nT)]$$

根据以上关系式, 导出由模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 求得满足阶跃响应不变法要求的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 的公式, 即为本例题的解答。

由于 $ZT[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$, 所以

$$S(z) = H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} = s_a(z)$$

$$H(z) = (1-z^{-1})s_a(z)$$

显然, 问题归结为如何由 $H_a(s)$ 求得 $s_a(z)$ 。我们知道,

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

所以

$$\mathcal{L}[s_a(t)] = H_a(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$s_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_a(s)}{s}\right]$$

$$s_a(nT) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_a(s)}{s}\right]_{t=nT}$$

$$s_a(z) = ZT\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{h_a(s)}{s}\right]_{t=nT}\right]$$

由此可得出数字滤波器的单位阶跃不变法设计公式:

$$H(z) = (1-z^{-1}) \cdot ZT\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H_a(s)}{s}\right]_{t=nT}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot s_a(z)$$

显然, 如果令 $s_a(s) = H_a(s)/s$, 求 $s_a(z)$ 的公式实质上就是用脉冲响应不变法将一模拟滤波器 $s_a(s)$ 直接转换成数字滤波器 $s_a(z) = s_a(z)$, 而不必变换到模拟时域, 再离散化, 最后进行 Z 变换。

下面讨论该设计法的因果稳定性。如果 $H_a(s)$ 因果稳定, 则根据脉冲响应不变法的极点映射关系 $z_k = e^{s_k T}$, 由于 $s_a(s)$ 中的因子 $1/s$ 引入极点 $s_c = 0$ 。这一极点转换到 z 平面上, 形成 $s_a(z)$ 的极点 $p_0 = e^{s_c T} = 1$, $H_a(s)$ 的极点均映射在 z 平面单位圆内。但 $H(z) = \frac{z-1}{z} s_a(z)$ 正好有一零点 $z_0 = 1$ 。所以, 单位圆上的零、极点对消。从而, 因果稳定的 $H_a(s)$; 用单位阶跃不变法转换成 $H(z)$ 必然因果稳定。

例 6.6 已知模拟滤波器二阶基本节的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

教材中已求得用脉冲响应不变法时数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT} \cos(bT) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$$

如果用 $s_a(t)$ 表示模拟滤波器的单位阶跃响应, 用 $s(n)$ 表示数字滤波器的单位阶跃响应, 取 $s(n) = s_a(nT)$ 来求数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的设计方法称为单位阶跃不变法。试用单位阶跃不变法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$, 验证阶跃响应不变法与脉冲响应不变法不等价。

解

解法 1 由例 6.2 ②中所得结果可写出

$$h(n) = s(n) - s(n-1) = s_a(nT) - s_a[(n-1)T]$$

因为 $s_a(t) = \int_{-\infty}^t h_a(\tau) d\tau$, 所以

$$h(n) = \int_{-\infty}^{nT} h_a(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{(n-1)T} h_a(\tau) d\tau = \int_{(n-1)T}^{nT} h_a(\tau) d\tau$$

$h_a(t)$ 可由 $H_a(s)$ 求出。

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1/2}{s+a-jb} + \frac{1/2}{s+a+jb}$$

于是根据拉氏变换公式有

$$h_a(t) = \left[\frac{1}{2} e^{-(a-jb)t} + \frac{1}{2} e^{-(a+jb)t} \right] u(t)$$

$$h(n) = \int_{(n-1)T}^{nT} \left[\frac{1}{2} e^{-(a-jb)\tau} + \frac{1}{2} e^{-(a+jb)\tau} \right] u(\tau) d\tau$$

只有当 $\tau \geq 0$, 即 $n \geq 1$ 时, $h(n) \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} h(n) &= \left. \frac{1}{-2(a+jb)} e^{-(a-jb)\tau} \right|_{(n-1)T}^{nT} + \left. \frac{1}{-2(a-jb)} e^{-(a+jb)\tau} \right|_{(n-1)T}^{nT} \\ &= \frac{-1}{2(a+jb)} [e^{-(a-jb)nT} - e^{-(a-jb)(n-1)T}] u(n-1) \\ &\quad + \frac{-1}{2(a-jb)} [e^{-(a+jb)nT} - e^{-(a+jb)(n-1)T}] u(n-1) \end{aligned}$$

$$H(z) = ZT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(a+jb)} [e^{-(a-jb)nT} z^{-n} - e^{-(a-jb)(n-1)T} z^{-(n-1)} z^{-1}] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(a-jb)} [e^{-(a+jb)nT} z^{-n} - e^{-(a+jb)(n-1)T} z^{-(n-1)} z^{-1}] \right\}$$

$$= \frac{-1}{2(a+jb)} \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-(a-jb)T} z^{-1}} + \frac{-1}{2(a-jb)} \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-(a+jb)T} z^{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a+jb} + \frac{1}{a-jb} \right]$$

$$= \frac{1}{2(a^2+b^2)} \left[\frac{(-a+jb)(1-z^{-1})}{1-e^{-aT} e^{-jbT} z^{-1}} + \frac{(-a-jb)(1-z^{-1})}{1-e^{-aT} e^{jbT} z^{-1}} \right] + \frac{2a}{2(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{2(a^2+b^2)} \frac{Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1-2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$$

式中

$$\begin{aligned} B &= -2ae^{-aT} \cos(bT) - 2be^{-aT} \sin(bT) + 2a \\ C &= -2ae^{-aT} \cos(bT) - 2be^{-aT} \sin(bT) + 2ae^{-2aT} \end{aligned}$$

解法 2 因为

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

所以

$$s_a(s) = \frac{1}{s} H_a(s) = \mathcal{L}[s_a(t)]$$

其中, $s_a(t)$ 为模拟滤波器单位阶跃响应。

仿照脉冲响应不变法的设计方法, 先将 $s_a(s)$ 部分分式展开, 得

$$\begin{aligned} s_a(s) &= \frac{1}{s} H_a(s) = \frac{s+a}{(s-a)^2 + b^2} \frac{1}{s} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \frac{1}{s} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} \frac{1}{s + a + jb} - \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} \frac{1}{s + a - jb} \end{aligned}$$

套用脉冲响应不变法极点映射关系公式:

$$\begin{aligned} s(z) &= s_a(z) = \mathcal{ZT}[s_a(nT)] \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} \frac{1}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}} - \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} \frac{1}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} \end{aligned}$$

又因为 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$, 所以

$$\begin{aligned} h(n) &= s(n) - s(n-1) \\ H(z) &= s(z)(1 - z^{-1}) \end{aligned}$$

将上面所求得的 $s(z)$ 代入上式, 得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left[2a + \frac{(-a + jb)(1 - z^{-1})}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}} + \frac{(-a - jb)(1 - z^{-1})}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \frac{Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} B &= -2ae^{-aT} \cos(bT) - 2be^{-aT} \sin(bT) + 2a \\ C &= -2ae^{-aT} \cos(bT) - 2be^{-aT} \sin(bT) + 2ae^{-2aT} \end{aligned}$$

以上所得 $H(z)$ 与脉冲响应不变法设计结果不同, 所以阶跃响应不变法与脉冲响应不变法不等价。

例 6.7 设 $H_a(s)$ 在 $s=s_0$ 处有一个 m 阶极点, 则 $H_a(s)$ 可表示成

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(s-s_0)^k} + G_a(s)$$

式中 $G_a(s)$ 只有一阶极点, 而且在 s_0 处无极点。

(1) 试推导出由 $H_a(s)$ 计算常系数 A_k 的公式。

(2) 试求出用 s_0 和 $g_a(t)$ 表示的冲激响应 $h_a(t)$ 的表达式。

(3) 如果定义 $h(n) = h_a(nT)$ 为数字滤波器的单位脉冲响应。试利用(2)的结果写出系统函数 $H(z)$ 的表示式。

(4) 归纳直接从 $H_a(s)$ 得到 $H(z)$ 的脉冲响应不变法设计方法及公式。

解 (1) 已知

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(s-s_0)^k} + G_a(s)$$

则

$$(s-s_0)^m H_a(s) = \sum_{k=1}^m A_k (s-s_0)^{m-k} + (s-s_0)^m G_a(s)$$

令

$$(s-s_0)^m H_a(s) = f(s)$$

因为 $f(s)$ 在 $s=s_0$ 处无极点, 所以可以在 s_0 周围展开为台劳级数:

$$\begin{aligned} f(s) &= f(s_0) + \frac{f'(s_0)}{1!}(s-s_0) + \frac{f''(s_0)}{2!}(s-s_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(s_0)}{r!}(s-s_0)^r + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(s_0)}{r!}(s-s_0)^r \end{aligned}$$

式中

$$f^{(r)}(s_0) = \left. \frac{d^r f(s)}{ds^r} \right|_{s=s_0}$$

比较 $f(s)$ 的表达式和 $f(s)$ 的台劳级数展开式中 $(s-s_0)$ 同次项, 可得出如下关系:

$$A_m = f(s_0)$$

$$A_{m-1} = f'(s_0)$$

$$\cdots$$

$$A_{m-r} = \frac{1}{r!} f^{(r)}(s_0)$$

令 $A_{m-r} = A_k$, 则

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} f^{(m-k)}(s_0) = \frac{1}{(m-k)!} \left. \frac{d^{m-k} [(s-s_0)^m H_a(s)]}{ds^{m-k}} \right|_{s=s_0}$$

(2) 因为 $\frac{A_k}{(s-s_0)^k}$ 是 $\frac{A_k e^{s_0 t} t^{k-1} u(t)}{(k-1)!}$ 的拉氏变换, 所以

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(k-1)!} e^{s_0 t} t^{k-1} u(t) + g_a(t)$$

其中

$$g_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_a(s)]$$

$$(3) \quad h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(k-1)!} e^{s_0 nT} (nT)^{k-1} u(n) + g_a(nT) u(n)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(k-1)!} e^{s_0 nT} (nT)^{k-1} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} g_a(nT) z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{A_k T^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} (e^{s_0 T} z^{-1})^n + G(z) \\ &= \sum_{k=1}^m A_k \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{1}{1 - e^{s_0 T} z^{-1}} \right) + G(z) \end{aligned}$$

上面求 $H(z)$ 的最后一步计算用到 Z 变换的 z 域微分性质。

(4) 如果 $H_a(s)$ 只有一阶极点, 则按教材中的设计方法及公式将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$, 即

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

式中, s_k 为 $H_a(s)$ 的第 k 个一阶极点。

如果 $H_a(s)$ 有 m 阶极点 s_0 , 则要按照(3)中所推出的公式, 计算 $H(z)$ 中对应于 m 阶极点的项, $H_a(s)$ 中只有一阶极点的 $G_a(s)$ 部分按照上式处理即可。具体方法如下:

假设 $H_a(s)$ 中有一个 m 阶极点 s_0 , 有 N 个一阶极点 $s_k, k=1, 2, \dots, N$, 则用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 的步骤如下:

$$\textcircled{1} \quad H_a(s) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(s - s_0)^k} + G_a(s) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(s - s_0)^k} + \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{s - s_k}$$

其中, $G_a(s)$ 只有一阶极点, 其部分分式展开式系数 B_k 用待定系数法求得, 或用留数法求得。 A_k 用下式计算:

$$A_k = \frac{1}{(m - k)!} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} [(s - s_0)^m H_a(s)]_{s=s_0}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\textcircled{2} \quad H(z) = \sum_{k=1}^m A_k \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{1}{1 - e^{s_0 T} z^{-1}} \right] + \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

如果 $H_a(s)$ 有多个多阶极点, 每个多阶极点的处理方法与上式相同。

例 6.8 采样数字滤波器组成如图 6.2 所示, 分别用双线性变换法和脉冲响应不变法设计其中的数字滤波器。总体等效模拟滤波器指标参数如下:

① 输入模拟信号 $x_a(t)$ 的最高频率 $f_c = 100$ Hz;

② 选用巴特沃斯滤波器, 3 dB 截止频率 $f_p = 100$ Hz, 阻带截止频率 $f_s = 150$ Hz, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 20$ dB。

解 为了满足采样定理, 减少脉冲响应不变法引入的频率混叠失真, 并降低对恢复滤波器的要求, 取采样频率 $F_s = 400$ Hz。

(1) 用双线性变换法。

a) 由(6.2)式确定数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 指标参数。因为采用双线性变换法设计, 数字频率 ω 与相应的模拟频率 Ω 之间为非线性关系 $\left[\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \right]$ 。但采样数字滤波器要求其中的数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 与总等效模拟滤波器 $H_a(j\Omega)$ 之间的频率映射关系为线性关系 $\omega = \Omega T$ 。所以, 不能直接按等效模拟滤波器技术指标设计相应模拟滤波器 $H_a(s)$, 再将其用双线性变换法映射成数字滤波器 $H(z)$ 。因此, 我们必须先按(6.2)式将等效模拟滤波器指标参数转换成采样数字滤波系统中数字滤波器指标参数, 再用双线性变换法的一般设计步骤设计该数字滤波器。

$$\text{通带边界频率: } \omega_p = 2\pi f_p T = \frac{2\pi \times 100}{400} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{通带最大衰减: } \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\text{阻带截止频率: } \omega_s = 2\pi f_s T = \frac{2\pi \times 150}{400} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

阻带最小衰减: $\alpha_s = 20$ dB

以下为双线性变换法设计数字滤波器的一般过程。

b) 预畸变校正, 确定相应的模拟滤波器指标参数:

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = 800 \tan \frac{\pi}{4} = 800 \text{ rad/s}, \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = 800 \tan \frac{3\pi}{8} = 1931.37 \text{ rad/s}, \alpha_s = 20 \text{ dB}$$

c) 设计相应的模拟滤波器, 确定其系统函数 $H_a(s)$ 。

① 求 $H_a(s)$ 阶数 N :

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^2 - 1}} = 0.1003$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1931.37}{800} = 2.414$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.1003}{\lg 2.414} = 2.609$$

取 $N=3$ 。

在实际工作中, 调用 IIR 滤波器阶数计算程序函数, 很容易得出满足要求的最小阶数 N 值。如前述, buttord 函数用于计算 Butterworth 滤波器阶数。本例中, 求阶数的 MATLAB 程序如下:

Wp=800; Rp=3;

Ws=1931.37; Rs=20;

[N, Wc]=buttord(Wp, Ws, Rp, Rs, 's');

运行结果: N=3, Wc=897.9654

② 求相应的模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。查表得到 3 阶 Butterworth 归一化低通原型系统函数:

$$H_a'(p) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}$$

去归一化(即低通原型到低通的频率变换)得

$$H_a(s) = H_a'(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{5.12 \times 10^8}{s^3 + 1.6 \times 10^3 s^2 + 1.28 \times 10^3 s + 5.12 \times 10^8}$$

d) 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 映射成数字滤波器系统函数 $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{0.1667 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.1667z^{-3}}{1 - 1.3278 \times 10^{-15}z^{-1} + 0.3333z^{-2} - 3.362 \times 10^{-16}z^{-3}} \end{aligned}$$

实际工程设计时, 可直接调用 MATLAB 函数来完成 c) 和 d) 两步。程序如下:

[N, Wc]=buttord(Wp, Ws, Rp, Rs, 's'); % 计算阶数 N

[Z, P, K]=butter(N); % 求 butterworth 归一化原型, 零极点增益形式

[b, a]=zp2tf(Z, P, K); % 转换成系统函数形式

[bt, at]=lp2lp(b, a, wp); % 频率变换(去归一化), Ω_p 为要求的 3 dB 截止频率

[bb, ab]=bilinear(bt, at, Fs); % 双线性变换得 $H(z)$, F_s 为采样频率

运行结果如下:

$$bb=[0.1667, 0.5, 0.5, 0.1667]$$

$$ab=[1, -1.3278 \times 10^{-15}, 0.3333, 3.362 \times 10^{-16}]$$

由此可写出

$$H(z) = \frac{0.1667 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.1667z^{-3}}{1 - 1.3278 \times 10^{-15}z^{-1} + 0.3333z^{-2} + 3.362 \times 10^{-16}z^{-3}}$$

(2) 用脉冲响应不变法。

由于总的等效模拟滤波器为低通滤波器, 所以根据(6.3)式, 可直接用脉冲不变法将等效模拟滤波器转换成数字滤波器即满足要求。所以首先按所给的等效模拟滤波指标参数设计其系统函数 $H_a(s)$, 然后转换成 $H(z)$ 即可。

a) 设计等效模拟滤波器 $H_a(s)$ 。

① 计算阶数 N

$$k_{sp} = 0.1003$$

$$\lambda_{sp} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{150}{100} = 1.5$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.1003}{\lg 1.5} = 5.67$$

取 $N=6$ 。

② 查表得到 6 阶 Butterworth 归一化低通原型 $H_n(p)$, 并以 3 dB 截止频率 $\Omega_p = 2\pi \times 100$ 去归一化得模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$:

$$H_n(p) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

$$H_a(s) = 6.1529 \times 10^{15} [s^6 + 2.4276s^5 + 2.9457s^4 + 2.2676 \times 10^3 s^3 + 1.1633 \times 10^{12} s^2 + 3.7836 \times 10^3 s + 6.1529 \times 10^{15}]^{-1}$$

b) 调用 MATLAB 函数 impvar, 将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$:

$$H(z) = [9.6634 \times 10^{-16} + 0.042z^{-1} + 0.3317z^{-2} + 0.2985z^{-3} + 0.0463z^{-4} + 7.4472 \times 10^{-16}z^{-5}] [1 - 0.7666z^{-1} - 0.7674z^{-2} - 0.3857z^{-3} + 0.1310z^{-4} - 0.0260z^{-5} + 0.0023z^{-6}]$$

6.3 教材第六章习题解答

1. 设计一个巴特沃斯低通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 6$ kHz, 通带最大衰减 $\alpha_p = 3$ dB, 阻带截止频率 $f_s = 12$ kHz, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 25$ dB。求出滤波器归一化系统函数 $H_n(p)$ 以及实际的 $H_a(s)$ 。

解 (1) 求阶数 N 。

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^{2.5} - 1}} \approx 0.0562$$

$$\lambda_p = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{2\pi \times 12 \times 10^3}{2\pi \times 6 \times 10^3} = 2$$

将 k_p 和 λ_p 值代入 N 的计算公式得

$$N = -\frac{\lg 0.0562}{\lg 2} = 4.15$$

所以取 $N=5$ (实际应用中, 根据具体要求, 也可能取 $N=4$, 指标稍微差一点, 但阶数低一阶, 使系统实现电路得到简化)。

(2) 求归一化系统函数 $H_a(p)$ 。由阶数 $N=5$ 直接查表 6.1 (教材第 157 页表 6.2.1) 得到 5 阶巴特沃斯归一化低通滤波器系统函数 $H_a(p)$ 为

$$H_a(p) = \frac{1}{p^5 + 3.2361p^4 - 5.2361p^3 + 5.2361p^2 + 3.2361p + 1}$$

或

$$H_a(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.618p + 1)(p^2 + 1.618p + 1)(p + 1)}$$

当然, 也可以按 (6.12) 式计算出极点:

$$p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

按 (6.11) 式写出 $H_a(p)$ 表达式

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)}$$

代入 p_k 值并进行分母展开得到与查表相同的结果。

(3) 去归一化 (即 LP-LP 频率变换), 由归一化系统函数 $H_a(p)$ 得到实际滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。

由于本题中 $\alpha_p = 3$ dB, 即 $\Omega_c = \Omega_p = 2\pi \times 6 \times 10^3$ rad/s, 因此

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{\Omega_c^5}{s^5 + 3.2361\Omega_c s^4 + 5.2361\Omega_c^2 s^3 + 5.2361\Omega_c^3 s^2 + 3.2361\Omega_c^4 s + \Omega_c^5} \end{aligned}$$

对分母因式形式, 则有

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{\Omega_c^5}{(s^2 + 0.6180\Omega_c s - \Omega_c^2)(s^2 + 1.6180\Omega_c s - \Omega_c^2)(s + \Omega_c)} \end{aligned}$$

如上结果中, Ω_c 的值未代入相乘, 这样使读者能清楚地看到去归一化后, 3 dB 截止频率对归一化系统函数的改变作用。

2. 设计一个切比雪夫低通滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 3$ kHz, 通带最大衰减 $\alpha_p = 0.2$ dB, 阻带截止频率 $f_s = 12$ kHz, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 50$ dB。求出归一化传输函数 $H_a(p)$ 和实际的 $H_a(s)$ 。

解 (1) 确定滤波器技术指标:

$$\alpha_p = 0.2 \text{ dB}, \quad \Omega_p = 2\pi f_p = 6\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_s = 50 \text{ dB}, \quad \Omega_s = 2\pi f_s = 24\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 4$$

(2) 求阶数 N 和 ϵ :

$$N = \frac{\text{Arch}(k^{-1})}{\text{Arch}(\lambda_s)}$$

$$k^{-1} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} \approx 1456.65$$

$$N = \frac{\text{Arch}(1456.65)}{\text{Arch}(4)} = 3.8659$$

为了满足指标要求, 取 $N=4$ 。

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} = 0.2171$$

(3) 求归一化系统函数 $H_a(p)$:

$$H_a(p) = \frac{1}{\epsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{k=1}^N (p - p_k)} = \frac{1}{1.7368 \prod_{k=1}^4 (p - p_k)}$$

其中, 极点 p_k 由(6.2.38)式求出如下:

$$p_k = -\text{ch}(\xi) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) + j \text{ch}(\xi) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$\xi = \frac{1}{N} \text{Arsh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \frac{1}{4} \text{Arsh}\left(\frac{1}{0.2171}\right) \approx 0.5580$$

$$p_1 = -\text{ch}(0.5580) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + j \text{ch}(0.5580) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.4438 + j1.0715$$

$$p_2 = -\text{ch}(0.5580) \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + j \text{ch}(0.5580) \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -1.0715 + j0.4438$$

$$p_3 = -\text{ch}(0.5580) \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + j \text{ch}(0.5580) \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1.0715 - j0.4438$$

$$p_4 = -\text{ch}(0.5580) \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) + j \text{ch}(0.5580) \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -0.4438 - j1.0715$$

(4) 将 $H_a(p)$ 去归一化, 求得实际滤波器系统函数 $H_a(s)$:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} \\ &= \frac{\Omega_p^4}{1.7368 \prod_{k=1}^4 (s - \Omega_p p_k)} = \frac{\Omega_p^4}{1.7368 \prod_{k=1}^4 (s - s_k)} \end{aligned}$$

其中 $s_k = \Omega_p p_k = 6\pi \times 10^3 p_k$, $k=1, 2, 3, 4$ 。因为 $p_4 = p_1^*$, $p_3 = p_2^*$, 所以, $s_4 = s_1^*$, $s_3 = s_2^*$ 。将两对共轭极点对应的因子相乘, 得到分母为二阶因子的形式, 其系数全为实数。

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{7.2687 \times 10^{16}}{(s^2 - 2\text{Re}[s_1]s + |s_1|^2)(s^2 - 2\text{Re}[s_2]s + |s_2|^2)} \\ &= \frac{7.2687 \times 10^{16}}{(s^2 + 1.6731 \times 10^4 s + 4.7791 \times 10^8)(s^2 + 4.0394 \times 10^4 s + 4.7790 \times 10^8)} \end{aligned}$$

也可得到分母多项式形式, 请读者自己计算。

3. 设计一个巴特沃斯高通滤波器, 要求其通带截止频率 $f_p = 20$ kHz, 阻带截止频率 $f_s = 10$ kHz, f_p 处最大衰减为 3 dB, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 15$ dB。求出该高通滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 。

解 (1) 确定高通滤波器技术指标要求:

$$f_p = 20 \text{ kHz}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$f_s = 10 \text{ kHz}, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

归一化频率(因为 $\alpha_p = 3$ dB, 所以 $f_c = f_p$):

$$\eta_p = \frac{f_p}{f_c} = \frac{20 \times 10^3}{20 \times 10^3} = 1$$

$$\eta_s = \frac{f_s}{f_c} = \frac{10 \times 10^3}{20 \times 10^3} = 0.5$$

(2) 相应低通滤波器技术指标要求:

$$\lambda_p = \frac{1}{\eta_p} = 1, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\eta_s} = 2, \quad \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

(3) 设计相应的归一化低通 $G(p)$ 。题目要求采用巴特沃斯类型, 故

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.18$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 2$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.18}{\lg 2} = 2.47$$

所以, 取 $N=3$, 查表 6.1 得到 3 阶巴特沃斯归一化低通 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(4) 频率变换, 将 $G(p)$ 变换成实际高通滤波器系统函数 $H(s)$:

$$H(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3}$$

式中

$$\Omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \times 20 \times 10^3 = 4\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$$

将该题的滤波器技术指标及解答与例 6.2.3 相比较, 可以看出, 滤波器的阶数 N 取决于 α_p 、 α_s 及 f_s/f_p , 而不是取决于过渡带的绝对宽度。因此, 例 6.2.3 中过渡带宽度为 100 Hz, 本题过渡带宽度为 10 000 Hz, 而阶数 N 相同。此结论也可从求 N 公式(6.2.16)得到解释。

4. 已知模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 为:

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$(2) \quad H_a(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

式中, a 、 b 为常数, 设 $H_a(s)$ 因果稳定, 试用脉冲响应不变法将其转换成数字滤波器 $H(z)$ 。

解 该题所给 $H_a(s)$ 正是模拟滤波器二阶基本节的两种典型形式。所以, 求解该题具有代表性, 解该题的过程, 就是导出这两种典型形式的 $H_a(s)$ 的脉冲响应不变法转换公式。设采样周期为 T 。

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

$H_a(s)$ 的极点为:

$$s_1 = -a + jb, \quad s_2 = -a - jb$$

将 $H_a(s)$ 部分分式展开(用待定系数法):

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} \\ &= \frac{A_1(s-s_2) + A_2(s-s_1)}{(s+a)^2 + b^2} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s - A_1s_2 - A_2s_1}{(s+a)^2 + b^2} \end{aligned}$$

比较分子各项系数可知, A_1, A_2 应满足方程:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 1 & \text{①} \\ -A_1s_2 - A_2s_1 = a & \text{②} \end{cases}$$

解之得, $A_1 = 1/2, A_2 = 1/2$, 所以

$$H_a(s) = \frac{1/2}{s - (-a + jb)} + \frac{1/2}{s - (-a - jb)}$$

套用(6.8)式, 得到

$$H(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{1/2}{1 - e^{(-a+jb)T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{(-a-jb)T} z^{-1}}$$

按照题目要求, 上面的 $H(z)$ 表达式就可作为该题的答案。但在工程实际中, 一般用无复数乘法器的二阶基本节结构实现。由于两个极点共轭对称, 所以将 $H(z)$ 的两项通分并化简整理, 可得

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}e^{-aT} \cos(bT)}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$$

这样, 如果遇到将

$$H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

用脉冲响应不变法转换成数字滤波器时, 直接套用上面的公式即可, 且对应结构图中无复数乘法器, 便于工程实际中实现。

$$(2) \quad H_a(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

$H_a(s)$ 的极点为:

$$s_1 = -a + jb, \quad s_2 = -a - jb$$

将 $H_a(s)$ 部分分式展开:

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{2}j}{s - (-a - jb)} + \frac{-\frac{1}{2}j}{s - (-a + jb)}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}j}{1 - e^{(-a-jb)T}z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2}j}{1 - e^{(-a+jb)T}z^{-1}}$$

通分并化简整理得

$$H(z) = \frac{z^{-1}e^{-aT} \sin(bT)}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2}}$$

5. 已知模拟滤波器传输函数为:

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$(2) \quad H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

试采用脉冲响应不变法和双线性变换法将其转换成数字滤波器, 设 $T=2$ s。

解 1. 用脉冲响应不变法。

$$(1) \quad H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

方法 1 直接按脉冲响应不变法设计公式, $H_a(s)$ 的极点为:

$$s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H_a(s) = \frac{-j\sqrt{3}/3}{s - (-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})} + \frac{j\sqrt{3}/3}{s - (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$H(z) = \frac{-j\sqrt{3}/3}{1 - e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})T}z^{-1}} + \frac{j\sqrt{3}/3}{1 - e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})T}z^{-1}}$$

代入 $T=2$ s,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-j\sqrt{3}/3}{1 - e^{(-1+j\sqrt{3})}z^{-1}} + \frac{j\sqrt{3}/3}{1 - e^{(-1-j\sqrt{3})}z^{-1}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{z^{-1}e^{-1} \sin \sqrt{3}}{1 - 2z^{-1}e^{-1} \cos \sqrt{3} + e^{-2}z^{-2}} \end{aligned}$$

方法 2 直接套用 4 题(2)所得公式。为了套用公式, 先对 $H_a(s)$ 的分母配方, 将 $H_a(s)$ 化成 4 题中的标准形式:

$$H_a(s) = \frac{b}{(s + a)^2 + b^2} \cdot c, \quad c \text{ 为一常数}$$

由于

$$s^2 + s + 1 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

所以

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{\sqrt{3}/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

对比可知, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 套用公式得

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{z^{-1}e^{-aT} \sin(bT)}{1 - 2z^{-1}e^{-aT} \cos(bT) - z^{-2}e^{-2aT}} \Big|_{T=2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{z^{-1}e^{-1} \sin \sqrt{3}}{1 - 2z^{-1}e^{-1} \cos \sqrt{3} + z^{-2}e^{-2}} \\
 (2) \quad H_a(s) &= \frac{1}{2s^2 - 3s + 1} = \frac{1}{s - 1/2} + \frac{-1}{s + 1} \\
 H(z) &= \frac{1}{1 - e^{-1/2}z^{-1}} + \frac{-1}{1 - e^{-1}z^{-1}} \Big|_{T=2} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}} + \frac{-1}{1 - e^{-2}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

或通分合并两项得

$$H(z) = \frac{(e^{-1} - e^{-2})z^{-1}}{1 - (e^{-1} + e^{-2})z^{-1} + e^{-3}z^{-2}}$$

1. 用双线性变换法。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}, T=2 \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - 1} \\
 &= \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + (1-z^{-1})(1+z^{-1}) + (1-z^{-1})^2} \\
 &= \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{3+z^{-2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}, T=2 \\
 &= \frac{1}{2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 3\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - 1} \\
 &= \frac{(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-1})^2 - 3(1-z^{-2}) + (1+z^{-1})^2} \\
 &= \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{6-2z^{-1}}
 \end{aligned}$$

6. 设 $h_a(t)$ 表示一模拟滤波器的单位冲激响应。

$$h_a(t) = \begin{cases} e^{-0.9t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

用脉冲响应不变法, 将此模拟滤波器转换成数字滤波器(用 $h(n)$ 表示单位取样响应, 即 $h(n) = h_a(nT)$)。确定系统函数 $H(z)$, 并将 T 作为参数, 证明: 对 T 为任何值时, 数字滤波器是稳定的, 并说明数字滤波器近似为低通滤波器还是高通滤波器。

解 模拟滤波器系统函数为:

$$H_a(s) = \int_0^{\infty} e^{-0.9t} e^{-st} dt = \frac{1}{s + 0.9}$$

$H_a(s)$ 的极点 $s_1 = -0.9$, 数字滤波器系统函数应为

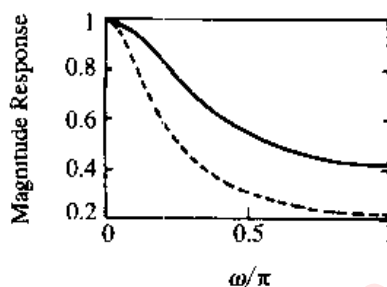
$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{s_1 T} z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-0.9T} z^{-1}}$$

$H(z)$ 的极点为:

$$z_1 = e^{-0.9T}, \quad |z_1| = e^{-0.9T}$$

所以, $T > 0$ 时, $|z_1| < 1$, $H(z)$ 满足稳定条件。对 $T=1$ 和 $T=0.5$, 画出 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如题 6 解图实线和虚线所示。

由图可见, 该数字滤波器近似为低通滤波器。且 T 越小, 滤波器频率混叠越小, 滤波特性越好(即选择性越好)。反之, T 越大, 极点 $z_1 = e^{-0.9T} = e^{-0.9T}$ 离单位圆越远, $\omega = \pi$ 附近衰减越小, 而且频率混叠越严重, 使数字滤波器频响特性不能模拟原模拟滤波器的频响特性。



题 6 解图

7. 假设某模拟滤波器 $H_a(s)$ 是一个低通滤波器, 又知 $H(z) = H_a(s) \big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$, 数字滤波器 $H(z)$ 的通带中心位于下面哪种情况? 并说明原因。

- (1) $\omega=0$ (低通)。
- (2) $\omega=\pi$ (高通)。
- (3) 除 0 或 π 以外的某一频率(带通)。

解

方法 1 按题意可写出

$$H(z) = H_a(s) \big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$$

故

$$s = j\Omega = \frac{z+1}{z-1} \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}+1}{e^{j\omega}-1} = j \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = j \cot \frac{\omega}{2}$$

即

$$|\Omega| = \left| \cot \frac{\omega}{2} \right|$$

原模拟低通滤波器以 $\Omega=0$ 为通带中心, 由上式可知, $\Omega=0$ 时, 对应于 $\omega=\pi$, 故答案为(2)。

方法 2 找出对应于 $\Omega=0$ 的数字频率 ω 的对应值即可。

令 $z=1$, 对应于 $e^{j\omega}=1$, 应有 $\omega=0$, 则 $H(1) = H_a(s) \big|_{s=\frac{1+1}{1-1}} = H_a(\infty)$ 对应的不是模拟低通滤波器;

令 $z=-1$, 对应 $e^{j\omega}=-1$, 应有 $\omega=\pi$, 则 $H(-1) = H_a(0)$, 即 $\Omega=0$ 对应 $\omega=\pi$, 将模拟低通中心频率 $\Omega=0$ 映射到 $\omega=\pi$ 处, 所以答案为(2)。

方法 3 直接根据双线性变换法设计公式及模拟域低通到高通频率变换公式求解。

双线性变换设计公式为

$$H(z) = H_a(s) \big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

当 $T=2$ 时, $H(z) = H_a\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, 这时, 如果 $H_a(s)$ 为低通, 则 $H(z)$ 亦为低通。

如果将 $H_a(s)$ 变换为高通滤波器:

$$H_{ah}(s) = H_a\left(\frac{1}{s}\right)$$

则可将 $H_{ah}(s)$ 用双线性变换法变成数字高通:

$$H_h(z) = H_{ah}(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = H_a \left(\frac{1}{s} \right) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = H_a \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$$

这正是题中所给变换关系, 所以数字滤波器 $H_a \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$ 通带中心位于 $\omega = \pi$, 故答案(2)正确。

8. 图示是由 RC 组成的模拟滤波器, 写出其系统函数 $H_a(s)$, 并选用一种合适的转换方法, 将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$, 最后画出网络结构图。

解 模拟 RC 滤波网络的频率响应函数

为:

$$H_a(j\Omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\Omega C}} = \frac{j\Omega}{j\Omega + \frac{1}{RC}}$$

显然, $H_a(j\Omega)$ 具有高通特性, 用脉冲响应不变

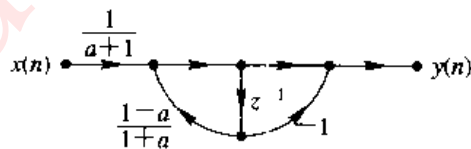
法必然会产生严重的频率混叠失真。所以应选

用双线性变换法, 将 $H_a(j\Omega)$ 中的 $j\Omega$ 用 s 代替, 可得到 RC 滤波网络的系统函数

$$H_a(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

用双线性变换法设计公式可得:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{RC}} \\ &= \frac{1}{a+1} \frac{1-z^{-1}}{1 + \frac{a-1}{a+1} z^{-1}}, \quad a = \frac{T}{2RC} \end{aligned}$$



题 8 解图

$H(z)$ 的结构图如题 8 解图所示。

由图可见, 在模拟域由一个 R 和一个 C 组成的 RC 滤波网络, 用双线性变换法转换成数字滤波器后, 用两个乘法器、两个加法器和一个单位延迟器实现其数字滤波功能。也可用软件实现该数字滤波功能。由滤波器差分方程编写程序较容易。为此, 由 $H(z)$ 求出差分方程。

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{a+1} \frac{1-z^{-1}}{1 + \frac{a-1}{a+1} z^{-1}} X(z)$$

$$Y(z) \left[1 + \frac{a-1}{a+1} z^{-1} \right] = \frac{1}{a+1} [1 - z^{-1}] X(z)$$

$$y(n) + \frac{a-1}{a+1} y(n-1) = \frac{1}{a+1} [x(n) - x(n-1)]$$

$$y(n) = \frac{1}{a+1} [x(n) - x(n-1) - (a-1)y(n-1)]$$

编程序实现差分方程中的计算, 即可实现对输入信号序列 $x(n)$ 的高通滤波。

9. 设计低通数字滤波器, 要求通带内频率低于 0.2π rad 时, 容许幅度误差在 1 dB 之内; 频率在 0.3π 到 π 之间的阻带衰减大于 10 dB。试采用巴特沃斯型模拟滤波器进行设

计, 用脉冲响应不变法进行转换, 采样间隔 $T=1 \text{ ms}$ 。

解 本题要求用巴特沃斯型模拟滤波器设计, 所以, 由巴特沃斯滤波器的单调下降特性, 数字滤波器指标描述如下:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 10 \text{ dB}$$

采用脉冲响应不变法转换, 所以, 相应模拟低通巴特沃斯滤波器指标为:

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = 0.2\pi \times 1000 = 200\pi \text{ (rad/s)}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.3\pi \times 1000 = 300\pi \text{ (rad/s)}, \quad \alpha_s = 10 \text{ dB}$$

(1) 求滤波器阶数 N 及归一化系统函数 $H_a(p)$:

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.1} - 1}{10^1 - 1}} = 0.1696$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{300\pi}{200\pi} = 1.5$$

$$N = -\frac{\lg 0.1696}{\lg 1.5} = 4.376$$

取 $N=5$ 。查表 6.1 的模拟滤波器系统函数的归一化低通原型为:

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)}$$

$$p_0 = -0.3090 + j0.9511 = p_4^*$$

$$p_1 = -0.8090 + j0.5818 = p_3^*$$

$$p_2 = -1$$

将 $H_a(p)$ 部分分式展开:

$$H_a(p) = \sum_{k=0}^4 \frac{A_k}{p - p_k}$$

其中, 系数为:

$$A_0 = -0.1382 + j0.4253, \quad A_1 = -0.8091 - j1.1135$$

$$A_2 = 1.8947, \quad A_3 = -0.8091 + j1.1135$$

$$A_4 = -0.1382 - j0.4253$$

(2) 去归一化求得相应的模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。

我们希望阻带指标刚好, 让通带指标留有富裕量, 所以按 (6.2.18) 式求 3 dB 截止频率 Ω_c 。

$$\Omega_c = \Omega_s (10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 300\pi (10 - 1)^{-\frac{1}{10}} = 756.566 \text{ (rad/s)}$$

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \sum_{k=0}^4 \frac{\Omega_c A_k}{s - \Omega_c p_k} = \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{s - s_k}$$

其中 $B_k = \Omega_c A_k$, $s_k = \Omega_c p_k$ 。

(3) 用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$;

$$H(z) = \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad T = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$= \sum_{k=0}^4 \frac{B_k}{1 - e^{j\omega_k \cdot 10^{-3}} z^{-1}}$$

我们知道, 脉冲响应不变法的主要缺点是存在频率混叠失真, 设计的滤波器阻带指标变差。另外, 由该题的设计过程可见。当 N 较大时, 部分分式展开求解系数 A_k 或 B_k 相当困难, 所以实际工作中用得很少, 主要采用双线性变换法设计, 见第 10 题。

10. 要求同题 9, 试采用双线性变换法设计数字低通滤波器。

解 已知条件如下:

数字滤波器指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 10 \text{ dB}$$

采用双线性变换法, 所以要进行预畸变校正, 确定相应的模拟滤波器指标(为了计算方便, 取 $T=1 \text{ s}$):

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = 2 \tan 0.1\pi = 0.6498394 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = 2 \tan 0.15\pi = 1.0190509 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_s = 10 \text{ dB}$$

(1) 求相应模拟滤波器阶数 N :

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_p}$$

其中, k_{sp} 与题 9 相同(因为 α_p 、 α_s 相同), 即

$$k_{sp} = 0.1696$$

$$\lambda_p = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1.0190509}{0.6498394} = 1.5682$$

$$N = -\frac{\lg 0.1696}{\lg 1.5682} = 3.9435, \text{ 取 } N = 4$$

(2) 查表 6.1 得

$$H_a(p) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

(3) 去归一化, 求出 $H_a(s)$:

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 0.6498394 (10^{0.1} - 1)^{-\frac{1}{8}} = 0.7743 \text{ (rad/s)}$$

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^4}{s^4 + 2.6131\Omega_c s^3 + 3.4142\Omega_c^2 s^2 + 2.6131\Omega_c^3 s + \Omega_c^4}$$

$$= \frac{0.3595}{s^4 + 2.0234s^3 + 2.0470s^2 + 1.2131s + 0.3595}$$

(4) 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}, T=1 \text{ ms}=10^{-3}, \\ &= T^4 \Omega_c^4 (1+z^{-1})^4 [16(1-z^{-1})^4 + 2.6131 \Omega_c (1+z^{-1})(1-z^{-1})^3 \\ &\quad \cdot 8T + 3.4142 \Omega_c^2 \times 2^2 \cdot T^2 (1+z^{-1})^2 (1-z^{-1})^4 + 2.6131 \Omega_c^3 \times 2 \\ &\quad \cdot T^3 (1+z^{-1})^3 (1-z^{-1}) - T^4 (1+z^{-1})^4 \Omega_c^{-1}]^{-1} \\ H(z) &= (0.8329 \times 10^{-2} + 0.3331 \times 10^{-1} z^{-1} - 0.4997 \times 10^{-1} z^{-2} + 0.3331 z^{-3} \\ &\quad + 0.8329 z^{-4}) (1 - 2.0872 z^{-1} + 1.8948 z^{-2} - 0.8119 z^{-3} + 0.1375 z^{-4})^{-1} \end{aligned}$$

11. 设计一个数字高通滤波器, 要求通带截止频率 $\omega_p = 0.8\pi \text{ rad}$, 通带衰减不大于 3 dB, 阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi \text{ rad}$, 阻带衰减不小于 18 dB。希望采用巴特沃斯型滤波器。

解

(1) 确定数字高通滤波器技术指标:

$$\omega_p = 0.8\pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.5\pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 18 \text{ dB}$$

(2) 确定相应模拟高通滤波器技术指标。由于设计的是高通数字滤波器, 所以应选用双线性变换法, 所以进行预畸变校正求模拟高通边界频率(假定采样间隔 $T=2 \text{ s}$):

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = \tan 0.4\pi = 3.0777 \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = \tan 0.25\pi = 1 \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 18 \text{ dB}$$

(3) 将高通滤波器指标转换成模拟低通指标。高通归一化边界频率为(本题 $\Omega_p = \Omega_s$):

$$\eta_p = \frac{\Omega_p}{\Omega} = 1$$

$$\eta_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c} = \frac{1}{3.0777} = 0.3249$$

低通指标为:

$$\lambda_p = \frac{1}{\eta_p} = 1, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\eta_s} = 3.0777, \quad \alpha_s = 18 \text{ dB}$$

(4) 设计归一化低通 $G(p)$:

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^{1.8} - 1}} = 0.1266$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 3.0779$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 1.84, \quad \text{取 } N = 2$$

查表 6.1 得归一化低通 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(5) 频率变换, 求模拟高通 $H_a(s)$:

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{s^2}{s^2 + 4.3515s + 9.4679}$$

(6) 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{14.8194 + 16.9358z^{-1} + 14.8194z^{-2}}$$

12. 设计一个数字带通滤波器, 通带范围为 0.25π rad 到 0.45π rad, 通带内最大衰减为 3 dB, 0.15π rad 以下和 0.55π rad 以上为阻带, 阻带内最小衰减为 15 dB, 采用巴特沃斯模拟低通滤波器。

解

(1) 确定数字带通滤波器技术指标:

$$\omega_u = 0.45\pi \text{ rad}, \quad \omega_l = 0.25\pi \text{ rad}$$

$$\omega_{s2} = 0.55\pi \text{ rad}, \quad \omega_{s1} = 0.15\pi \text{ rad}$$

通带内最大衰减 $\alpha_p = 3$ dB, 阻带内最小衰减 $\alpha_s = 15$ dB。

(2) 确定相应模拟滤波器技术指标。为计算简单, 设 $T = 2$ s。

$$\Omega_u = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_u}{2} = \tan 0.225\pi = 0.8541 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_l = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_l}{2} = \tan 0.125\pi = 0.4142 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{s2} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{s2}}{2} = \tan 0.275\pi = 1.1708 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{s1} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_{s1}}{2} = \tan 0.075\pi = 0.2401 \text{ rad/s}$$

通带中心频率

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u \Omega_l} = 0.5948 \text{ rad/s}$$

带宽

$$B = \Omega_u - \Omega_l = 0.4399 \text{ rad/s}$$

将以上边界频率对 B 归一化, 得到相应归一化带通边界频率:

$$\eta_u = \frac{\Omega_u}{B} = 1.9416, \quad \eta_l = \frac{\Omega_l}{B} = 0.9416$$

$$\eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B} = 2.6615, \quad \eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B} = 0.5458$$

$$\eta_0 = \sqrt{\eta_u \eta_l} = 1.3521$$

(3) 由归一化带通指标确定相应模拟归一化低通技术指标。

归一化阻带截止频率为:

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 1.9746$$

归一化通带截止频率为:

$$\lambda_p = 1$$

$$\alpha_p = 3 \text{ dB}, \quad \alpha_s = 18 \text{ dB}$$

(4) 设计模拟归一化低通 $G(p)$:

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.3} - 1}{10^{1.8} - 1}} = 0.1266$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 1.9746$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = -\frac{\lg 0.1266}{\lg 1.9746} = 3.04$$

取 $N=3$, 因为 3.04 很接近 3, 所以取 $N=3$ 基本满足要求, 且系统简单。当然, 在工程实际中, 最后要进行指标检验, 如果达不到要求, 应取 $N=4$ 。

查表 6.1 得到归一化低通系统函数 $G(p)$:

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(5) 频率变换, 将 $G(p)$ 转换成模拟带通 $H_a(s)$:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= G(p) \Big|_{p=\frac{s^2-\Omega_0^2}{sB}} \\ &= \frac{B^3 s^3}{(s^2 + \Omega_0^2)^3 + 2(s^2 + \Omega_0^2)^2 sB + 2(s^2 + \Omega_0^2)s^2 B^2 + s^3 B^3} \\ &= \frac{0.085s^3}{s^6 + 0.8798s^5 + 1.4484s^4 + 0.7076s^3 + 0.5124s^2 + 0.1101s + 0.0443} \end{aligned}$$

(6) 用双线性变换公式将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= [0.0181 + 1.7764 \times 10^{-15}z^{-1} - 0.0543z^{-2} - 4.4409z^{-3} + 0.0543z^{-4} \\ &\quad - 2.7756 \times 10^{-15}z^{-5} - 0.0181z^{-6}] [1 - 2.272z^{-1} + 3.5151z^{-2} \\ &\quad - 3.2685z^{-3} + 2.3129z^{-4} - 0.9628z^{-5} + 0.278z^{-6}]^{-1} \end{aligned}$$

第七章

FIR 数字滤波器设计

FIR 数字滤波器最大的优点是容易设计成线性相位特性。在数字信号传输与处理及图像信号处理中,要求系统具有线性相位特性。但由于 FIR 滤波器为全零点系统,所以对同一幅频特性要求,用 FIR 滤波器实现要比用 IIR 滤波器实现阶数高较多。所以,一般在要求线性相位时,选用 FIR 滤波器。下面先总结线性相位 FIR 数字滤波器的特点(条件),这些特点就是设计线性相位 FIR 滤波器的约束条件。

7.1 学习要点

7.1.1 线性相位 FIR 数字滤波器特点归纳

1. 线性相位概念

设 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$ 为 FIR 滤波器的频响特性函数。 $H(e^{j\omega})$ 可表示为

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$H_g(\omega)$ 称为幅度函数,为 ω 的实函数。应注意 $H_g(\omega)$ 与幅频特性函数 $|H(e^{j\omega})|$ 的区别, $|H(e^{j\omega})|$ 为 ω 的正实函数,而 $H_g(\omega)$ 可取负值。

$\theta(\omega)$ 称为相位特性函数,当 $\theta(\omega) = -\omega\tau$ 时,称为第一类(A类)线性相位特性;当 $\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau$ 时,称为第二类(B类)线性相位特性。

2. 具有线性相位的 FIR 滤波器的特点($h(n)$ 长度为 N)^[1]

1) 时域特点

$$A \text{ 类 } \begin{cases} h(n) = h(N-1-n), h(n) \text{ 关于 } n = \frac{N-1}{2} \text{ 偶对称} \\ \theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$B \text{ 类 } \begin{cases} h(n) = -h(N-1-n), h(n) \text{ 关于 } n = \frac{N-1}{2} \text{ 奇对称} \\ \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (7.2)$$

群延时: $-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau = \frac{N-1}{2}$ 为常数,所以将 A 类和 B 类线性相位特性统称为恒定群延时特性。

2) 频域特点

A类 $\begin{cases} N \text{ 为奇数(情况 1): } H_g(\omega) \text{ 关于 } \omega=0, \pi, 2\pi \text{ 三点偶对称。} \\ N \text{ 为偶数(情况 2): } H_g(\omega) \text{ 关于 } \omega=\pi \text{ 奇对称}(H_g(\pi)=0)。 \end{cases}$

B类 $\begin{cases} N \text{ 为奇数(情况 3): } H_g(\omega) \text{ 关于 } \omega=0, \pi, 2\pi \text{ 三点奇对称。} \\ N \text{ 为偶数(情况 4): } H_g(\omega) \text{ 关于 } \omega=0, 2\pi \text{ 奇对称, 关于 } \omega=\pi \text{ 偶对称。} \end{cases}$

3. 要点

掌握以上特点, 就可以得出如下结论, 这些结论对 FIR 滤波器很重要。

(1) 情况 1: 可以实现所有滤波特性(低通、高通、带通、带阻和点阻等)。

(2) 情况 2: $H_g(\pi)=0$, 不能实现高通、带阻和点阻滤波器。

(3) 情况 3: 只能实现带通滤波器(因为 $H_g(0)=H_g(\pi)=H_g(2\pi)=0$)。

(4) 情况 4: 不能实现低通、带阻和点阻滤波器。

7.1.2 FIR 数字滤波器设计方法

FIR 滤波器设计方法 $\begin{cases} 1. \text{ 窗函数法} \\ 2. \text{ 频率采样法} \\ 3. \text{ 切比雪夫逼近法} \end{cases}$

1. 窗函数法的设计步骤与要点

设 $H_d(e^{j\omega}) = \text{FT}[h_d(n)]$ 为希望逼近的频响特性函数, $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$ 为用窗函数法设计的实际滤波器的频响函数。通常取 $H(e^{j\omega})$ 相应的理想频响特性作为 $H_d(e^{j\omega})$ 。例如, 要设计低通滤波器($H(e^{j\omega})$ 为低通), 所以取理想低通作为 $H_d(e^{j\omega})$ 。窗函数法设计过程如图 7.1 所示。

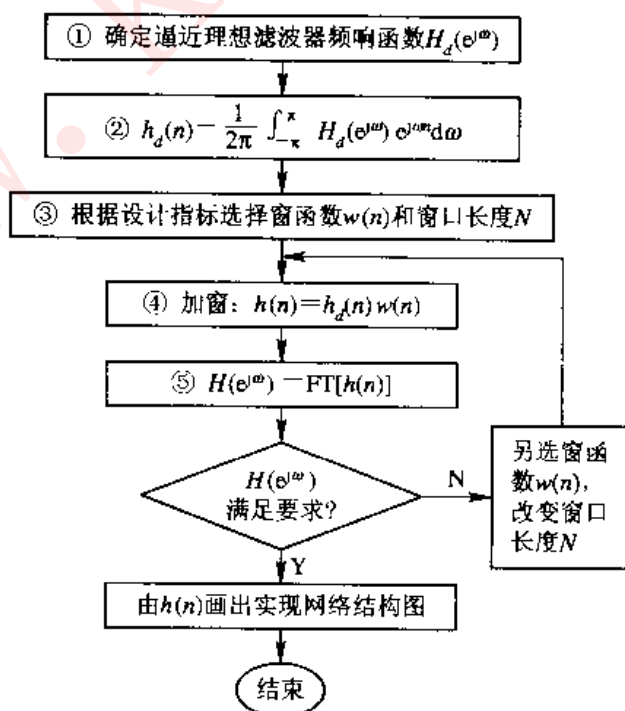


图 7.1 窗函数法设计流程图

知识要点如下:

(1) 希望逼近的理想滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ 的表示式。因为 FIR 数字滤波器一般要求设计成线性相位特性, 所以 $H_d(e^{j\omega})$ 必须满足上述线性相位 FIR 滤波器的频域特点。所以, 逼近理想低通、带通、高通和带阻滤波器频响函数的表达式如下(只给出主值区 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式):

$$H_{dLP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (7.3)$$

$$H_{dBp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_{cl} \leq |\omega| \leq \omega_{ch} \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_{cl}, \omega_{ch} < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (7.4)$$

$$H_{dHP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad (7.5)$$

$$H_{dBs}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_{cl}, \omega_{ch} \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & \omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch} \end{cases} \quad (7.6)$$

其中, ω_c 为理想滤波器截止频率, ω_{cl} 和 ω_{ch} 分别为理想带通滤波器的通带下截止频率和上截止频率。 $\alpha = (N-1)/2$ (N 为 $h(n)$ 长度), 这样才能确保线性相位的时域条件 $h(n) = h(N-1-n)$, 且 $h(n)$ 为实序列。对情况 2、3、4 构造 $H_d(e^{j\omega})$ 时, 亦要满足前述相应的频域特点。请读者总结 $H_d(e^{j\omega})$ 表达式。

(2) 熟悉各种常用窗函数的技术指标和加窗后对滤波特性的影响, 这样才能根据设计指标正确选择窗函数类型及其长度 N 。表 7.1 列出了六种典型窗函数的基本技术指标参数。这六种窗函数均满足 A 类线性相位条件: $w(n) = w(N-1-n)$ 。

表 7.1 六种窗函数的基本参数

窗函数	旁瓣峰值幅度/dB	过渡带宽	阻带最小衰减/dB
矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
三角形窗	-25	$8\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	-74
凯塞窗($\alpha=7.865$)	-57	$10\pi/N$	-80

我们知道^[1], 加窗后所得 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

频响函数

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)] = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

由于 $W(e^{j\omega}) = \text{FT}[w(n)] \neq \delta(\omega)$, 所以 $H(e^{j\omega}) \neq H_d(e^{j\omega})$, 二者的误差大小与窗函数 $w(n)$ 的类型和长度有关。由表 7.1 可清楚地看出用各种窗函数设计的 FIR 滤波器的性能指标(表中第 3、4 列)。总而言之, 阻带最小衰减由窗函数类型决定, 过渡带宽度由 $w(n)$ 长度 N 确定, 而且, 对同样的 N 值, 不同类型的窗函数对应的过渡带宽度可能不同。一般阻带最小衰减较大的窗函数, 对应的过渡带较宽。所以, 设计过程中根据阻带最小衰减 α_s 选择窗函数类型, 再根据过渡带宽度指标选择窗函数长度 N 值。

窗函数的时域和频谱表达式不必去记, MATLAB 工具箱函数 `boxcar`, `triang`, `hanning`, `hamming`, `blackman` 和 `kaizer` 依次产生表 7.1 中的六种窗函数序列 $w(n)$, `fft(w(n), M)` 就可计算出频谱函数 $W(e^{j\omega})$ 的 M 点采样。所以, 只要概念清楚, 调用 MATLAB 工具箱函数很容易实现正确的设计。

(3) 检验设计结果: 窗函数法的设计结果是单位脉冲响应 $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。而检验一般在频域进行。所以要计算 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}(h(n)) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ 检验 3 dB 截止频率 ω_c 和阻带最小衰减 $\alpha_{s, \min}$, 其计算量相当大, 必须用计算机进行。所以这部分只要求读者概念清楚, 实际计算在上机实验时进行证实。

(4) 熟悉窗函数设计法的特点: 设计过程简单、方便实用。但边界频率不易精确控制。所以设计完以后, 必须检验结果。

2. 用频率采样法设计 FIR 数字滤波器的设计步骤与要点

1) 频率采样设计法的概念与理论依据

我们知道, 设计 FIR 数字滤波器就是寻求一种满足设计要求的滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 或系统函数 $H(z)$ 。只要能得到上述结果的任何方法都可以作为滤波器的设计方法。

根据频域采样理论, 如果 $h(n)$ 长度为 M , $H(z) = \text{ZT}[h(n)]$, 在单位圆上等间隔对 $H(z)$ 采样 N 点得到

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.7)$$

只要 $N \geq M$, 则有

$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.8)$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.9)$$

由此可见, 只要知道 FIR 数字滤波器 ($h(n)$ 长度为 N), 频响函数在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样 $H(k)$, 就可确定滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 或系统函数 $H(z)$, 这就是频率采样设计法的理论依据。

频率采样法就是根据以上频域采样理论, 由滤波特性指标构造希望逼近的滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$, 对其在 $[0, 2\pi]$ 上采样得到

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

然后, 由 (7.8) 式求得单位脉冲响应 $h(n)$, 或由 (7.9) 式求得系统函数 $H(z)$ 。这样, $h(n)$ 或 $H(z)$ 就是 FIR 数字滤波器的设计结果。

2) 用频率采样法设计 FIR 滤波器的设计步骤与要点

根据上述 FIR 滤波器的频率采样设计概念, 可总结出其设计步骤如图 7.2 所示。

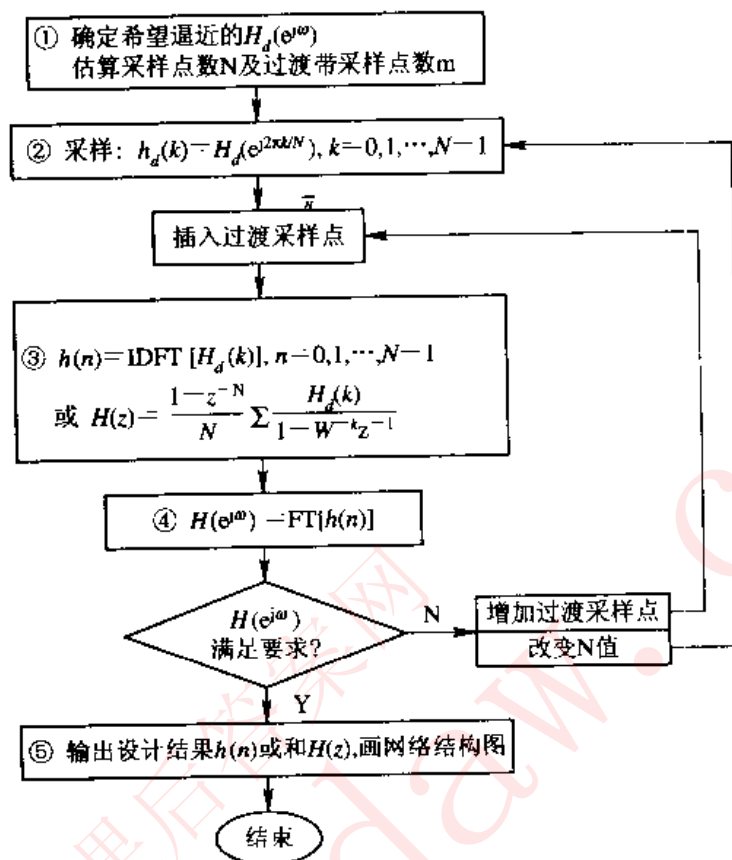


图 7.2 频率采样法设计流程图

知识要点如下:

(1) 原则上讲, 频率采样法适合设计任意频响特性的 FIR 滤波器, 但最常用的还是具有片段常数频响特性的滤波器。这时, 一般以实际设计的频响函数 $H(e^{j\omega})$ 相应的理想频响特性作为希望逼近的 $H_d(e^{j\omega})$, 这样可使设计简化。

(2) 设计线性相位 FIR 滤波器对 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $H_d(k)$ 的约束条件^[1]。由前面给出的线性相位 FIR 滤波器的频域特点可知, $H_d(e^{j\omega})$ 应满足:

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (7.11)$$

$$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \quad (7.12)$$

N 为奇数时,

$$H_d(\omega) = H_d(2\pi - \omega) \quad (7.13)$$

N 为偶数时,

$$H_d(\omega) = -H_d(2\pi - \omega) \quad (7.14)$$

如果 $H_d(k) = H_k e^{j\theta_k}$, H_k 为幅度采样, θ_k 表示相位采样, 即 $H_k = H_d\left[\frac{2\pi}{N}k\right]$,

$\theta_k = \theta\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$, 代入(7.12)、(7.13)和(7.14)式可得到设计线性相位 FIR 滤波器时, θ_k 的表达式及对 H_k 的约束条件:

$$\theta_k = -\frac{N-1}{N}\pi k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.15)$$

N 为奇数时,

$$H_k = H_{N-k} \quad (7.16)$$

N 为偶数时,

$$H_k = -H_{N-k} \quad (7.17)$$

由上述可见,设计线性相位 FIR 滤波器时,相位采样 θ_k 为一确知函数式(7.15),当 N 为奇数时,幅度采样 H_k 关于 $k=N/2$ 点偶对称,当 N 为偶数时, H_k 关于 $k=N/2$ 点奇对称。应当注意,设计高通和带阻滤波器时, N 只能取奇数。

(3) 逼近误差及其改进措施, N 值的估计。由设计过程及设计结果可以分析引入误差的因素,得出改进的措施。教材中根据 $H(e^{j\omega})$ 的频域内插公式和内插函数分析了误差的起因及改进措施。下面从时域进行分析,得出与教材中相同的结论。

① 逼近误差分析:由频域采样理论^[2]可知

$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_d(n-mN) \cdot R_N(n)$$

即所设计的 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 是希望逼近的滤波器单位脉冲响应 $h_d(n)$ 的周期延拓序列的主值序列。如果 $H_d(e^{j\omega})$ 为理想频响特性(如理想低通等),则由于频域有间断点,使 $h_d(n)$ 为衰减较慢的无限长序列。这时其周期延拓时,有较严重的时域混叠,所以, $h(n)$ 与 $h_d(n)$ 相差较大,故 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$ 与 $H_d(e^{j\omega}) = \text{FT}[h_d(n)]$ 相差较大,即逼近误差较大。而且,由于 $h(n)$ 为有限 N 长序列,所以 $H(e^{j\omega})$ 为连续无间断点函数,故在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点附近逼近误差最大,并形成倾斜过渡带和振荡,使阻带最小衰减不到 20 dB。在平滑区域逼近误差将较小。

② 改进措施:在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点附近区间加入若干个过渡带采样点,这样就相当于使 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点变平滑后再采样。即使 $h_d(n)$ 变得衰减很快,从而周期延拓时混叠失真减小,即 $h(n)$ 与 $h_d(n)$ 误差减小,必然使频域 $H(e^{j\omega})$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 误差减小。

显然,当 N 固定时,过渡采样点数越多,滤波器过渡带就越宽。这时必须通过加大采样点数 N ,才能使过渡带变窄。但 N 太大会使滤波器成本和计算量增加。好在最多加三个过渡采样点就足够了。理论与实践证明,过渡采样值和过渡采样数目都会影响阻带最小衰减。所以过渡采样值一般采用 CAD 优化确定,而过渡采样点数根据设计指标中的阻带最小衰减选取。实践表明:过渡采样点数 $m=1$, 阻带最小衰减 $\alpha_s=44\sim 54$ dB; $m=2$, $\alpha_s=65\sim 75$ dB; $m=3$, $\alpha_s=85\sim 95$ dB。

③ 频域采样点数(即 $h(n)$ 长度) N 估算:一般由过渡带宽度 $\Delta\omega$ 估算 N 值。 $\Delta\omega \approx (m+1)\frac{2\pi}{N}$, m 为过渡采样点数目。请读者利用 $H(e^{j\omega})$ 的频域内插公式^[2]画出 $H(e^{j\omega})$ 的幅度曲线,来解释这一点。所以, N 的估算公式为

$$N = \frac{2\pi}{\Delta\omega}(m+1) \quad (7.18)$$

显然, $\Delta\omega$ 越小,或 m 越大都使 N 值越大。

3) 频率采样法的特点及设计结果检验

由上述频率采样法的设计过程及知识要点可知, 这种设计方法的特点是: 可以在频域直接设计任意频响特性的 FIR 数字滤波器, 概念清楚、直观。但边界频率不易控制, 特别是加入过渡采样点后, 进行优化计算过渡采样值时, 优化值在优化程序运行结束后才能确定, 这就更增加了边界频率的不确定性。所以, 设计时, 要对 $H(e^{j\omega})$ 进行检验, 可通过加大采样点数 N 来改善边界频率精度, 但这会增加滤波器的成本和计算量。

对于窄带滤波器, 即使 N 很大, 通带内非零采样 $H_d(k)$ 也较少, 这样, 其 $H(z)$ 的内插公式(7.9)中有效项较少, 从而使实现频率采样结构并联支路较少, 使滤波器成本降低, 运算量减少。因此, 该设计法适合设计窄带滤波器。

3. FIR 滤波器的等波纹逼近设计法

等波纹逼近设计法使用切比雪夫(Chebyshev)最佳一致逼近理论, 可设计出实际滤波器频响 $H(e^{j\omega})$ 与期望的频响 $H_d(e^{j\omega})$ 之间的最大误差最小化的最佳拟合滤波器。这种方法设计的滤波器呈现等波纹频响特性, 所以称之为等波纹逼近设计法。由于误差均匀分布于整个频带, 对固定的阶数 N , 可以得到最优良的滤波特性: 通带最平坦, 阻带最小衰减达到最大。因此, 等波纹逼近法在 FIR 滤波器设计中得到广泛应用, 特别是有现成的设计程序, 从而使设计非常简单易行。所以, 在建立上述概念的基础上, 正确调用设计程序, 设置合适的参数即可得到等波纹逼近 FIR 滤波器系数 $h(n)$ 。

下面介绍等波纹逼近设计法的 MATLAB 工具箱函数 `remez` 的功能和调用格式, 并举例设计滤波器。

MATLAB 信号处理工具箱函数 `remez`:

功能: 线性相位 FIR - DF 最佳一致逼近设计。

格式:

`b=remez(N, f, m)`

`b=remez(N, f, m, w)`

`b=remez(N, f, m, 'ftype')`

`b=remez(N, f, m, w, 'ftype')`

说明:

`b=remez(N, f, m)` 可得到 N 阶 A 类线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n) = b(n+1)$, 且满足 $h(n) = h(N-1-n)$ 。其幅频特性与由 f 和 m 指定的幅频响应特性达到最佳一致匹配。注意, 这里的 N 为 $H(z)$ 的阶数, $h(n)$ 长度为 $N+1$ 。

- f 为对 π 归一化边界频点矢量, 且 $f \in [0, 1]$, 不能出现相同频率; 且第一个必须为 0, 最后一个必须为 1。 f 中为 1 的频率表示 $\omega = \pi$, 即 f 为对 π 归一化的频率点向量。

- m 为与 f 相对应的期望滤波器幅频响应, 而且只将连接点 $(f(k), m(k))$ 与 $(f(k+1), m(k+1))$ 的线段作为希望逼近的频响 (k 为奇数), 区间 $(f(k+1), f(k+2))$ 为“无关”区, 即非指定区。

- 矢量 f 和 m 的长度必须相同;

- `plot(f, m)` 可绘出期望的幅频特性。

$b = \text{remez}(N, f, m, w)$ 利用权矢量 w 对各指定频段进行加权拟合。每个指定频段只用一个加权值, 所以 w 的长度只为 f 的一半。要求逼近精度越高的频段对应的加权值越大^[1]。

$b = \text{remez}(N, f, m, 'ftype')$ 可设计 B 类线性相位 FIR - DF。参考 MATLAB help。

7.2 例 题

例 7.1 设计第一类线性相位 FIR 高通数字滤波器, 3 dB 截止频率 $\omega_c = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$ rad, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 50$ dB, 过渡带宽度 $\Delta\omega = \pi/16$ 。用窗函数法设计。

解 根据设计要求, N 必须取奇数(情况 1 可以设计任何滤波特性)。按照设计流程图 7.1 进行。

(1) 确定逼近理想高通频响函数 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0, & 0 \leq \omega < \omega_c \end{cases}$$

(2) 求 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega + \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi(n-\alpha)} [\sin(\pi(n-\alpha)) - \sin(\omega_c(n-\alpha))] \end{aligned}$$

其中 $\alpha = (N-1)/2$ 。

(3) 选择窗函数类型, 估算窗函数长度 N : 根据阻带最小衰减 $\alpha_s = 50$ dB, 查表 7.1, 选择哈明窗。表 7.1 中给出用哈明窗设计的滤波器过渡带宽度为 $8\pi/N$, 本题目要求过渡带宽度 $\Delta\omega = \pi/16$, 所以应满足 $\pi/16 = 8\pi/N$, $N = 128$ 。但 N 必须取奇数, 故取 $N = 129$ 。

(4) 加窗计算 $h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$; 哈明窗表达式为^[2]

$$w_{\text{Ham}}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

代入 $N = 129$, $\alpha = \frac{N-1}{2} = 64$, $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$, 得到

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{\pi(n-64)} \left[\sin(\pi(n-64)) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}(n-64)\right) \right] \\ &\quad \cdot \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{128}\right) \right] R_{129}(n) \end{aligned}$$

(5) 检验设计结果:

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$$

调用 MATLAB 函数 `fft`。计算 $h(n)$ 的 1024 点 DFT, 绘出 $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 7.3 所示。由图可见, 满足设计要求。

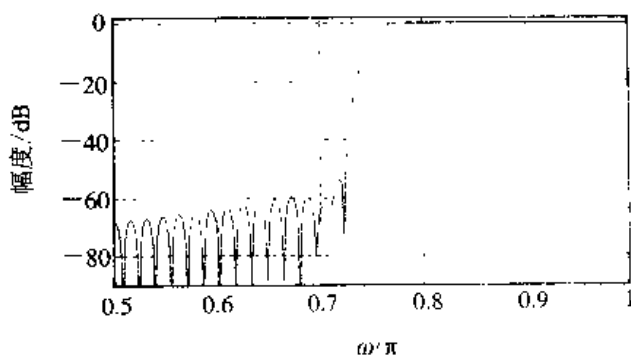


图 7.3 幅频衰减特性曲线

低通、带通和带阻滤波器的窗函数法设计过程除了 $H_d(e^{j\omega})$ 、 $h_d(n)$ 不同外, 与例 7.1 类似, 习题解答中都有详细设计过程。

例 7.2 用频率采样法设计 A 类线性相位 FIR 低通滤波器。要求通带截止频率为 $\omega_c = \frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{32}$ rad, 过渡带宽度 $\Delta\omega \leq \frac{\pi}{32}$, 阻带最小衰减 $\alpha = 40$ dB。

解 按照图 7.2 所示设计流程进行设计:

(1) 确定 $H_d(e^{j\omega})$, 估计采样点数 N : 由设计要求知道, $\Delta\omega = \frac{\pi}{32}$, $\alpha \geq 40$ dB, 所以, 过渡采样数 $m=1$; 由(7.18)式有

$$N = \frac{2\pi}{\Delta\omega}(m+1) = \frac{4\pi}{\pi/32} = 128$$

对 A 类 N 为偶数(当然也可以取 N 为奇数), $H_d(\omega) = H_d(\pi - \omega)$, 所以

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} = e^{-j\frac{27}{2}\omega}, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{16} \\ 0, & \frac{\pi}{16} < \omega < \frac{31\pi}{16} \\ -e^{-j\frac{127}{2}\omega}, & \frac{31\pi}{16} \leq \omega \leq 2\pi \end{cases}$$

(2) 采样(要加入一个过渡采样点):

$$H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \begin{cases} e^{-j\frac{2\pi}{N}k \frac{N-1}{2}} = e^{-j\frac{27}{2}\pi k}, & k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0.3904e^{-j\frac{27}{2}\pi k}, & k = 5, \text{ (过渡采样点)} \\ 0, & k = 6 \sim 122 \\ -0.3904e^{-j\frac{27}{2}\pi k}, & k = 123, \text{ (过渡采样点)} \\ -e^{-j\frac{127}{2}\pi k}, & k = 124, 125, 126, 127 \end{cases}$$

其中的过渡采样值 0.3904 是程序优化迭代的结果, 迭代控制参数为 $\alpha \geq 40$ dB。

(3) 用内插公式求 $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1-W_N^{kz^{-1}}}$$

(也可以求出 $h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)]$, 留给读者计算)。

(4) 检验 $|H(e^{j\omega})|$ 指标:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1 - W_{128}^{-k} e^{-j\omega}} \right|$$

$h(n)$ 和 $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 7.4 所示, 基本满足指标要求。由于 $h(n) = h(N-1-n)$, 所以必然有 A 类线性相位。

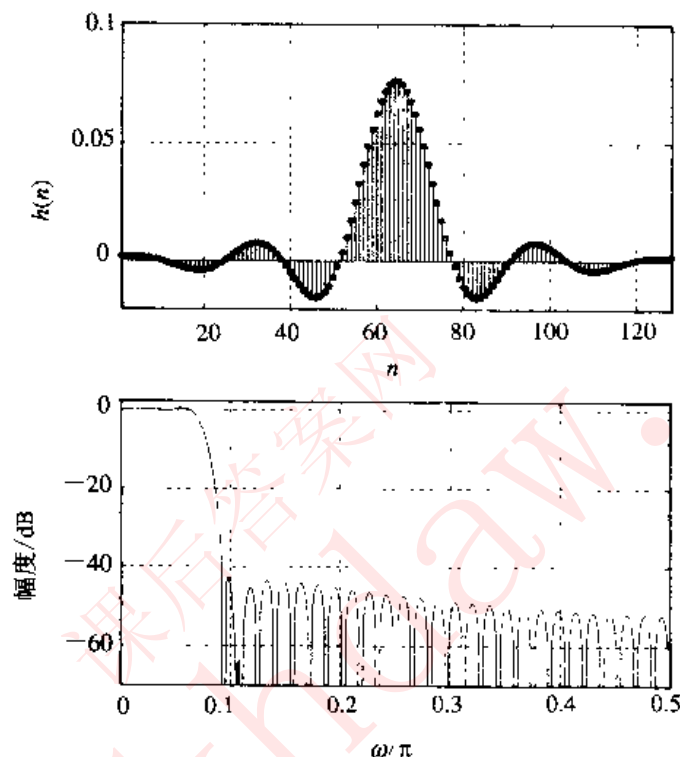


图 7.4 $h(n)$ 及其幅度特性曲线(dB)

(5) 由 $H(z)$ 画出频率采样结构(略)。若求出 $h(n)$, 也可画出直接型结构, 成本较高(128 个乘法器)。

例 7.3 用 `remez` 函数设计一带通 FIR 滤波器。希望的幅频特性如下式:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq 0.3\pi \text{ rad}, 0.75\pi \leq |\omega| \leq \pi \\ 1, & 0.35\pi \leq |\omega| \leq 0.7\pi \text{ rad} \end{cases}$$

打印出单位脉冲响应 $h(n)$, 并绘出幅频曲线, 再选择不同的加权矢量 N 重复设计, 观察加权矢量的作用。

解 根据 $|H_d(e^{j\omega})|$ 确定归一化边界频点矢量 f 和幅度矢量 m :

$$f = [0, 0.3, 0.35, 0.7, 0.75, 1]$$

$$m = [0, 0.1, 1, 0, 0]$$

① 不用权矢量, $N=21$; ② $W=[1, 10, 1]$, $N=21$; ③ $W=[4, 1, 4]$, $N=21$; ④ 对 $W=[1, 10, 1]$, $N=33$ 。程序为例 7.3 程序, 运行程序, 绘出幅频特性曲线依次如图 7.5 (a)、图 7.5(b)、图 7.5(c)和图 7.5(d)所示。由图(a)和(b)明显看出加权值越大的频段逼近误差越小(精度越高); 由图(b)和(d)可以看出, 滤波器阶数 N 越大, 全频段整体逼近误差越小; 由图(c)可见, 加权函数设计不合理, 会使等波纹逼近失效。

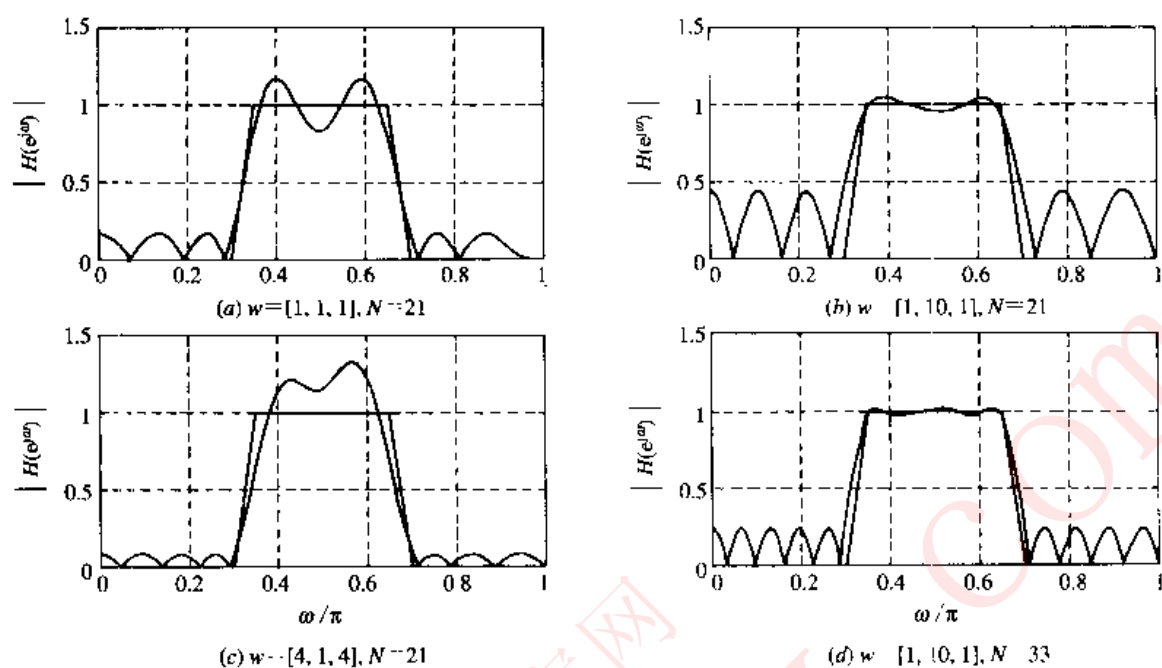


图 7.5 例 7.3 程序运行结果

例 7.3 程序:

```
%examps7.3
clear; close all
f=[0 0.3 0.35 0.65 0.7 1];
m=[0 0 1 1 0 0];
subplot(3, 2, 1)
w=[1, 1, 1]; N=21;
myremez(N, f, m, w);
title('(a)w=[1, 1, 1], N=21'); ylabel('Magnitude')
w=[1, 10, 1]; subplot(3, 2, 2)
myremez(N, f, m, w);
title('(b)w=[1, 10, 1], N=21'); ylabel('Magnitude')
w=[4, 1, 4];
subplot(3, 2, 3)
myremez(N, f, m, w);
title('(c)w=[4, 1, 4], N=21'); ylabel('Magnitude')
w=[1, 10, 1]; N=33
subplot(3, 2, 4)
myremez(N, f, m, w)
title('(d)w=[1, 10, 1], N=33'); ylabel('Magnitude')
```

remez 算法和绘图函数“myremez.m”:

```
%remez and plot function
function b=myremez(N, f, m, w)
plot(f, m); hold on
```

```
b=remez(N, f, m, w);
[h, w]=freqz(b, 1, 512); grid
plot(w/pi, abs(h))
hold off
```

对给定的逼近精度要求, 所需阶数 N 的最小值是滤波器设计者关心的问题。MATLAB 工具箱函数 `remezord` 就是解决该问题的。下面简单介绍其功能、调用格式及调用参数。

功能: 最佳一致逼近 FIR 滤波器阶数 N 估计。

格式:

```
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, dev)
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, dev, Fs)
```

说明:

`[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, dev)` 可以求出近似的阶数 N 、归一化频带边界 fo 、频带内幅值及加权矢量 w , 使用 `remez` 函数设计的 FIR 滤波器满足由 f 、 m 和 dev 指定的指标要求。其中 f 和 m 与 `remez` 函数中类同, 只是这里 f 省去了 0 和 1 两点, 且 f 可用实际频率。 $\text{length}(f)=2*\text{length}(m)-2$ 。 dev 指定各频段允许幅度偏差, 如果设计指标中给定衰减 dB 数, 应将其换算成幅度偏差作为 dev 。

`[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, dev, Fs)` 可指定采样频率 F_s , 缺省默认值为 $F_s=2\text{ Hz}$ 。

应当注意, 有时 `remezord` 可能对 N 值估计不足, 造成指标下降, 所以要检验设计结果, 如果指标不够, 要微调 N 值。

例 7.4 用最小阶数 N 实现 FIR 低通滤波器。通带边界频率 $f_p=400\text{ Hz}$, 通带最大波纹 $\alpha_p=3\text{ dB}$, 阻带边界频率 $f_s=500\text{ Hz}$, 阻带最小衰减 $\alpha_s=40\text{ dB}$ 。采样频率 $F_s=2\text{ kHz}$ 。

解 MATLAB 程序如 Examp7.4: 其中 dev 要由 α_p 和 α_s 计算得出。因为通带内最大幅度为 $1+\delta_1$, 最小值为 $1-\delta_1$, 所以, 通带最大波纹 α_p 应为

$$\alpha_p = 20 \lg \left| \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1} \right| \text{ dB}$$

$$10^{\alpha_p/20} = \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$$

解得通带允许偏差为

$$\delta_1 = \frac{10^{\alpha_p/20} - 1}{10^{\alpha_p/20} + 1}$$

阻带内:

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{1}{\delta_2} \text{ dB} = -20 \lg \delta_2$$

所以阻带允许偏差为

$$\delta_2 = 10^{-\alpha_s/20}$$

故 $dev=[\delta_1, \delta_2]$ 。程序清单如下:

例 7.4 程序:

```
%Examps 7.4
Rp=3; Rs=40; Fs=2000;
f=[400, 500]; m=[1, 0];
dev=[(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1), 10^(-(Rs/20))];
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, dev, Fs); N
b=remez(N, fo, mo, w);
subplot(3, 2, 1); n=0:N;
stem(n, b, 'l'); axis([0, 23, -0.1, 0.5]); line([0, 23], [0, 0])
xlabel('n'); ylabel('h(n)')
[hf, f]=freqz(b, 1, 1024, Fs);
subplot(3, 2, 3); plot(f, 20*log10(abs(hf)));
axis([0, 1000, -70, 3]); grid; line([0, 500], [-3, -3]);
xlabel('f/Hz'); ylabel('Magnitude(dB)')
N=N+1;
b=remez(N, fo, mo, w);
subplot(3, 2, 2); n=0:N;
stem(n, b, 'l'); axis([0, 24, -0.1, 0.5]); line([0, 24], [0, 0])
xlabel('n'); ylabel('h(n)')
[hf, f]=freqz(b, 1, 1024, Fs);
subplot(3, 2, 4); plot(f, 20*log10(abs(hf)));
axis([0, 1000, -70, 3]); grid; line([0, 500], [-3, -3]);
xlabel('f/Hz'); ylabel('Magnitude(dB)')
```

自动估计阶数 N 的程序运行结果如图 7.6 所示。估算 $N=22$ ，通带指标稍有富裕，但阻带最小衰减略小于指标要求。 N 值增加 1，幅度衰减特性如图 7.7 所示，阻带指标刚好。

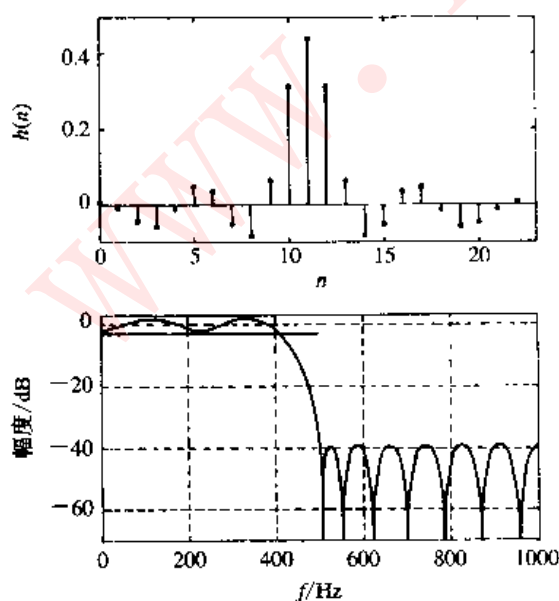


图 7.6 remez 函数自动设计结果($N=22$)

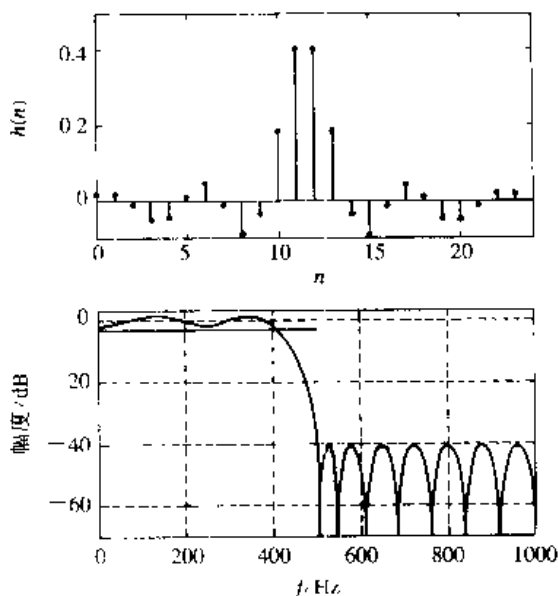


图 7.7 $N+1$ 后的设计结果($N=23$)

例 7.5 试证明在窗函数设计法中, 当 $h(n)$ 长度 N 值固定时, 矩形窗设计结果满足频域最小均方误差最佳逼近。

解 仿照窗函数设计法的过程, 设 $H_d(e^{j\omega})$ 表示期望逼近的理想滤波器频率响应, 其单位脉冲响应为 $h_d(n)$ 。用 $w(n)$ 表示窗函数, 长度为 N 。用 $h(n)$ 表示用窗函数法设计的实际 FIR 滤波器单位脉冲响应(即 $h(n) = h_d(n)w(n)$), 其频率响应函数为 $H(e^{j\omega})$ 。

定义 $H(e^{j\omega})$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 的均方误差为

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

本例题就是要求证明: 当 $w(n) = R_N(n)$ 时, ϵ^2 最小。由于证明的条件与窗函数 $w(n)$ 的类型(形状)有关, 所以, 将 ϵ^2 转换到时域表示有利于证明。为此, 按以下步骤进行:

(1) 令误差函数

$$E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$$

由于 $E(e^{j\omega})$ 为周期函数, 所以可展开为幂级数

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n)e^{-j\omega n}$$

用 $h_d(n)$ 和 $h(n)$ 表示 $E(e^{j\omega})$ 的幂级数系数 $e(n)$ 。

(2) 用系数 $e(n)$ 表示均方误差 ϵ^2 。

(3) 证明只有当 $w(n) = R_N(n)$, $h(n) = h_d(n) \cdot R_N(n)$ 时, ϵ^2 最小。

下面依次按三步证明:

(1) 因为

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

所以

$$E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h_d(n) - h(n)]e^{-j\omega n}$$

由于 $h(n)$ 长度为 N , 即当 $n < 0$ 或 $n \geq N$ 时, $h(n) = 0$, 所以

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} h_d(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=N}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{N-1} [h_d(n) - h(n)]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n)e^{-j\omega n}$$

故

$$e(n) = \begin{cases} h_d(n), & n < 0, n \geq N \\ h_d(n) - h(n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

(2) 因为 $E(e^{j\omega}) = \text{FT}[e(n)]$, 所以由帕塞瓦尔定理有

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e(n)|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} |h_d(n)|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |h_d(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - h(n)|^2$$

(3) 由(2)的结果知, ϵ^2 的前面两项和式与 $w(n)$ 无关, 而第三项求和式为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - h(n)| &= \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - w(n)h_d(n)| \quad w(n) = R_{1/2}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - h_d(n)| = 0 \end{aligned}$$

由此证明, 矩形窗设计确实满足频域最小均方误差准则。前面已提到, 当 $H_d(e^{j\omega})$ 为理想频响特性(理想低通、带通等)时, 矩形窗设计的 FIR 滤波器阻带最小衰减只有 21 dB, 不满足一般工程要求。所以, 调用最小均方误差最佳逼近设计程序设计 FIR 滤波器时, 使 $H_d(e^{j\omega})$ 具有平滑的滚降特性, 可使阻带衰减加大, 通带内波纹减小。

7.3 教材第七章习题解答

1. 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为:

(1) $N=6$

$$h(0)=h(5)=1.5$$

$$h(1)=h(4)=2$$

$$h(2)=h(3)=3$$

(2) $N=7$

$$h(0)=-h(6)=3$$

$$h(1)=-h(5)=-2$$

$$h(2)=-h(4)=1$$

$$h(3)=0$$

试画出它们的线性相位型结构图, 并分别说明它们的幅度特性、相位特性各有什么特点。

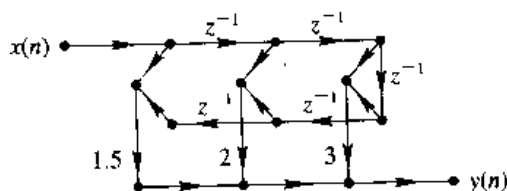
解 (1) 线性相位型结构如题 1 解图(一)所示。由所给 $h(n)$ 的取值可知, $h(n)$ 满足 $h(n)=h(N-1-n)$, 所以 FIR 滤波器具有 A 类线性相位特性:

$$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} = -2.5\omega$$

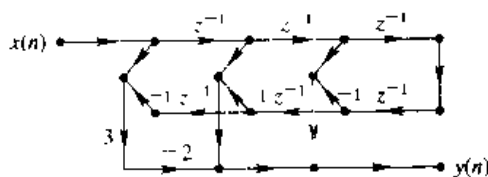
由于 $N=6$ 为偶数(情况 2), 所以幅度特性关于 $\omega=\pi$ 点奇对称。

(2) 线性相位型结构如题 1 解图(二)所示。由题中 $h(n)$ 值可知, $h(n)$ 满足 $h(n)=-h(N-1-n)$, 所以 FIR 滤波器具有 B 类线性相位特性:

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega \frac{N-1}{2} = -\frac{\pi}{2} - 3\omega$$



题 1 解图(一)



题 1 解图(二)

由于 $N=7$ 为奇数(情况 3), 所以, 幅度特性关于 $\omega=0, 2\pi$ 两点奇对称。

2. 已知 FIR 滤波器的 16 个频率采样值为:

$$H(0)=12, \quad H(3) \sim H(13)=0$$

$$H(1)=-3-j\sqrt{3}, \quad H(14)=1-j$$

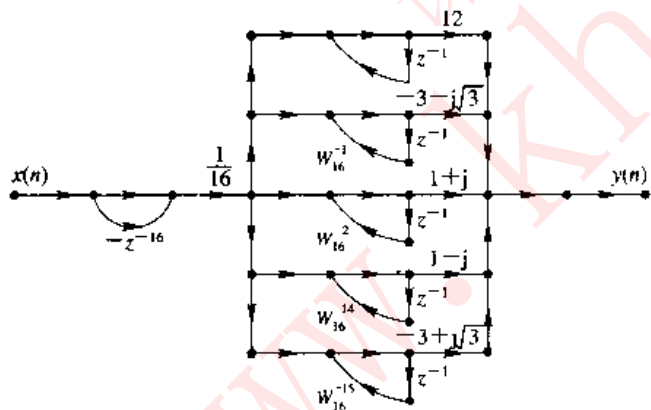
$$H(2)=1+j, \quad H(15)=-3-j\sqrt{3}$$

试画出其频率采样结构, 选择 $r=1$, 可以用复数乘法器

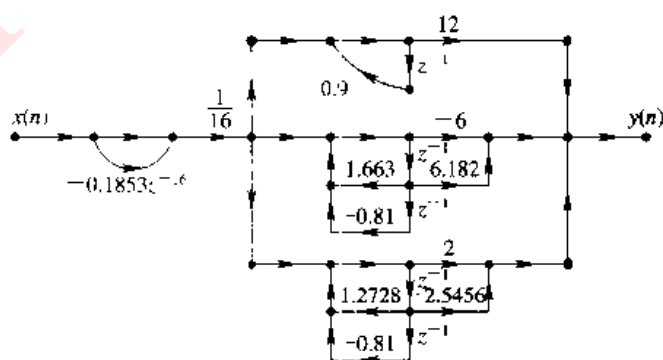
解 由题中所给频率采样 $H(k)$ 画出频率采样结构如题 2 解图(一)所示。取修正半径 $r=0.9$, 并将题 2 解图(一)中互为复共轭的并联支路合并, 可得到($N=16$):

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{N}(1-r^N z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{16}(1-0.1853z^{-16}) \left[\frac{H(0)}{1-0.9z^{-1}} + \frac{H(1)}{1-0.9W_{16}^{-1} z^{-1}} + \frac{H(15)}{1-0.9W_{16}^{-15} z^{-1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{H(2)}{1-0.9W_{16}^{-2} z^{-1}} + \frac{H(14)}{1-0.9W_{16}^{-14} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{16}(1-0.1853z^{-16}) \left[\frac{12}{1-0.9z^{-1}} + \frac{-6-j6.182z^{-1}}{1-1.663z^{-1}+0.81z^{-2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2.5456}{1-1.2728z^{-1}+0.81z^{-2}} \right] \end{aligned}$$

按上式画出无复数乘法器的修正结构如题 2 解图(二)所示。



题 2 解图(一) 频率采样结构



题 2 解图(二) 无复数乘法器的频率采样结构($r=0.9$)

3. 设 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{10}(1 + 0.9z^{-1} - 2.1z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4})$$

求出该滤波器的单位取样响应 $h(n)$, 判断是否具有线性相位, 求出其幅度特性和相位特性, 并画出其直接型结构和线性相位型结构。

解 对 FIR 数字滤波器, 其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \frac{1}{10}(1 + 0.9z^{-1} - 2.1z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4})$$

所以, 其单位脉冲响应为

$$h(n) = \frac{1}{10} \{1, 0.9, 2.1, 0.9, 1\}$$

由 $h(n)$ 的取值可知 $h(n)$ 满足

$$h(n) = h(N-1-n), \quad N=5$$

所以, 该 FIR 滤波器具有第一类线性相位特性。设其频率响应函数为 $H(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{10} [1 + 0.9e^{-j\omega} + 2.1e^{-j2\omega} + 0.9e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega}] \\ &= \frac{1}{10} (e^{j2\omega} + 0.9e^{j\omega} + 2.1 + 0.9e^{-j\omega} - e^{-j2\omega})e^{-j2\omega} \\ &= \frac{1}{10} (2.1 + 1.8\cos\omega + 2\cos2\omega)e^{-j2\omega} \end{aligned}$$

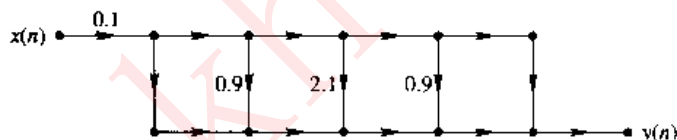
幅度特性函数为

$$H_g(\omega) = \frac{2.1 + 1.8\cos\omega + 2\cos2\omega}{10}$$

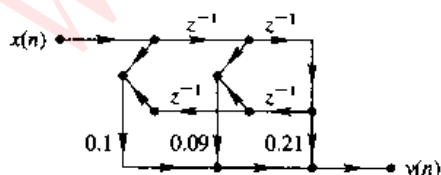
相位特性函数为

$$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} = -2\omega$$

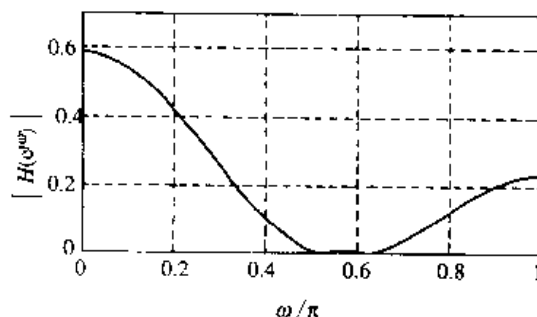
由 $h(n)$ 画出直接型结构和线性相位型结构分别如题 3 解图(一)和题 3 解图(二)所示。幅频曲线如题 3 解图(三)所示。



题 3 解图(一) 直接型结构



题 3 解图(二) 线性相位型结构



题 3 解图(三) 幅频特性曲线

4. 用矩形窗设计线性相位低通滤波器, 逼近滤波器传输函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- (1) 求出相应于理想低通的单位脉冲响应 $h_d(n)$;
- (2) 求出矩形窗设计法的 $h(n)$ 表达式, 确定 α 与 N 之间的关系;
- (3) N 取奇数或偶数对滤波特性有什么影响?

解 (1)

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

(2) 为了满足线性相位条件, 要求 $\alpha = \frac{N-1}{2}$, N 为矩形窗函数长度。加矩形窗函数得到 $h(n)$:

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n) \cdot R_N(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \cdot R_N(n) \\ &= \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & 0 \leq n \leq N-1, \alpha = \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases} \end{aligned}$$

(3) N 取奇数时, 幅度特性函数 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称, 可实现各类幅频特性; N 取偶数时, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称, 即 $H_g(\pi)=0$, 所以不能实现高通、带阻和点阻滤波特性。

5. 用矩形窗设计一线性相位高通滤波器, 逼近滤波器传输函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 求出该理想高通的单位取样响应 $h_d(n)$;
- (2) 写出用矩形窗设计法的 $h(n)$ 的表达式, 确定 α 与 N 的关系;
- (3) N 的取值有什么限制? 为什么?

解 (1) 直接用 $\text{IFT}[H_d(e^{j\omega})]$ 计算:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j(n-\alpha)} \left[e^{-j\omega_c(n-\alpha)} - e^{-j\pi(n-\alpha)} + e^{j\pi(n-\alpha)} - e^{j\omega_c(n-\alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi(n-\alpha)} \{ \sin[\pi(n-\alpha)] - \sin[\omega_c(n-\alpha)] \} \\ &= \delta(n-\alpha) - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned}$$

$h_d(n)$ 表达式中第 2 项 $\left[\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \right]$ 正好是截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器的单位脉冲响应。而 $\delta(n-\alpha)$ 对应于一个线性相位全通滤波器:

$$H_{\text{all}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$$

即高通滤波器可由全通滤波器减去低通滤波器实现。

(2) 用 N 表示 $h(n)$ 长度, 则

$$h(n) = h_d(n)R_N(n) = \left\{ \delta(n - \alpha) - \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)} \right\} R_N(n)$$

为了满足线性相位条件:

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

要求 α 满足 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。

(3) N 必须取奇数。因为 N 为偶数时(情况 2), $H(e^{j\omega}) = 0$, 不能实现高通。

6. 理想带通特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + B \\ 0, & |\omega| \leq \omega_c, \omega_c + B < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

其幅度特性 $|H_d(\omega)|$ 如图所示。

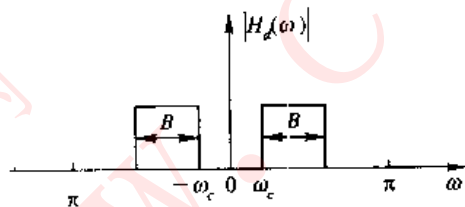
(1) 求出该理想带通的单位脉冲响应

$h_d(n)$;

(2) 写出用升余弦窗设计的滤波器

$h(n)$, 确定 N 与 α 之间关系;

(3) N 的取值是否有限制? 为什么?



题 6 图

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-(\omega_c+B)}^{-\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\omega_c+B} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{\sin[(\omega_c+B)(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned}$$

上式第一项和第二项分别为截止频率 $\omega_c + B$ 和 ω_c 的理想低通滤波器的单位脉冲响应。所以, 上面 $h_d(n)$ 的表达式说明, 带通滤波器可由两个低通滤波器相减实现。

(2)

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n) \cdot w(n) \\ &= \begin{cases} \left\{ \frac{\sin[(\omega_c+B)(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \right\} \left[0.54 - 0.46 \cos\left\{ \frac{2\pi n}{N-1} \right\} \right], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

为了满足线性相位条件, α 与 N 应满足:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

实质上, 即使不要求线性相位, α 也应满足该关系, 只有这样, 才能截取 $h_d(n)$ 的主要能量, 引起的误差最小。

(3) 对 N 取值无限制。因为 N 取奇数和偶数时, 均可实现带通滤波器。

7. 试完成下面两题:

(1) 设低通滤波器的单位脉冲响应与传输函数分别用 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$, 如果另一个滤波器的单位脉冲响应为 $h_1(n)$, 它与 $h(n)$ 的关系是 $h_1(n) = (-1)^n h(n)$, 试证明滤波器 $h_1(n)$ 是一个高通滤波器。

(2) 设低通滤波器的单位脉冲响应与传输函数分别用 $h(n)$ 和 $H(e^{j\omega})$, 截止频率为 ω_c 。如果另一个滤波器的单位脉冲响应为 $h_2(n)$, 它与 $h(n)$ 的关系是 $h_2(n) = 2h(n)\cos\omega_c n$, 且 $\omega_c < \omega_0 < (\pi - \omega_c)$, 试证明滤波器 $h_2(n)$ 是一个带通滤波器。

解 (1) 由题意可知

$$h_1(n) = (-1)^n h(n) = \cos(\pi n) h(n) = \frac{1}{2} [e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}] h(n)$$

对 $h_1(n)$ 进行傅里叶变换得到

$$\begin{aligned} H_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) [e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega - \pi)n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega + \pi)n} \right] \\ &= \frac{1}{2} [H(e^{j(\omega - \pi)}) + H(e^{j(\omega + \pi)})] \end{aligned}$$

上式说明 $H_1(e^{j\omega})$ 就是 $H(e^{j\omega})$ 平移 $\pm\pi$ 的结果。由于 $H(e^{j\omega})$ 为低通滤波器, 通带位于 $\omega=0$ 附近邻域, 因而 $H_1(e^{j\omega})$ 的通带位于 $\omega=\pm\pi$ 附近, 即 $h_1(n)$ 是一个高通滤波器。

这一证明结论又为我们提供了一种设计高通滤波器的方法(设高通滤波器通带为 $[\pi - \omega_c, \pi]$):

① 设计一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器 $h_{LP}(n)$ 。

② 对 $h_{LP}(n)$ 乘以 $\cos(\pi n)$ 即可得到高通滤波器 $h_{HP}(n) = h_{LP}(n)\cos(\pi n) = (-1)^n h_{LP}(n)$ 。

(2) 与(1)同样道理, 代入 $h_2(n) = 2h(n)\cos(\omega_c n)$ 可得

$$H_2(e^{j\omega}) = [H(e^{j(\omega - \omega_c)}) + H(e^{j(\omega + \omega_c)})]$$

因为低通滤波器 $H(e^{j\omega})$ 通带中心位于 $\omega = 2k\pi$, 且 $H_2(e^{j\omega})$ 为 $H(e^{j\omega})$ 左右平移 ω_c , 所以 $H_2(e^{j\omega})$ 的通带中心位于 $\omega = (2k\pi \pm \omega_c)$ 处, $h_2(n)$ 具有带通特性。这一结论又为我们提供了一种设计带通滤波器的方法。

8. 图中, $h_1(n)$ 是偶对称序列, $N=8$, $h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 圆周移位(移 $N/2=4$)后的序列, 设

$$H_1(k) = \text{DFT}[h_1(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_2(k) = \text{DFT}[h_2(n)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(1) $|H_1(k)| = |H_2(k)|$, 是否成立? 为什么?

(2) 用 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 分别构成的低通滤波器是否具有线性相位? 延时多少?

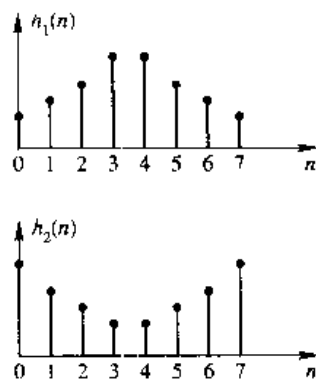
解 (1) 由题 8 图可以看出 $h_2(n)$ 与 $h_1(n)$ 的循环移位关系。

$$h_2(n) = h_1((n+4))_8 R_8(n)$$

由 DFT 的循环移位性质可得

$$H_2(k) = W_8^{-k4} H_1(k) = e^{j\pi k} H_1(k) = (-1)^k H_1(k)$$

$$|H_2(k)| = |W_8^{-k4} H_1(k)| = |H_1(k)|$$



题 8 图

(2) 由题 8 图可知, $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 均满足线性相位条件:

$$h_1(n) = h_1(N-1-n)$$

$$h_2(n) = h_2(N-1-n)$$

所以, 用 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 构成的低通滤波器具有线性相位. 直接计算 $\text{FT}[h_1(n)]$ 和 $\text{FT}[h_2(n)]$ 也可以得到同样的结论.

$$\text{设 } H_1(e^{j\omega}) = \text{FT}[h_1(n)] = H_{1p}(\omega)e^{j\theta_1(\omega)}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \text{FT}[h_2(n)] = H_{2p}(\omega)e^{j\theta_2(\omega)}$$

由教材中式(7.1.9)可知

$$\theta_1(\omega) = \theta_2(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega = -\frac{7}{2}\omega$$

所以, 群延时为

$$\tau_2 = \tau_1 = -\frac{d\theta_1(\omega)}{d\omega} = \frac{7}{2}$$

9. 利用矩形窗、升余弦窗、改进升余弦窗和布莱克曼窗设计线性相位 FIR 低通滤波器。要求通带截止频率 $\omega_c = \pi/4 \text{ rad}$, $N=21$, 求出分别对应的单位脉冲响应, 绘出它们的幅频特性并进行比较。

解 ① 希望逼近的理想低通滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < \omega \end{cases}$$

其中 $\alpha = (N-1)/2 = 10$ 。

② 由 $H_d(e^{j\omega})$ 求得 $h_d(n)$:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-\alpha)\right]}{\pi(n-\alpha)}$$

③ 加窗得到 FIR 滤波器单位脉冲响应 $h(n)$:

• 矩形窗

$$w_R(n) = R_N(n)$$

$$h_R(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-\alpha)\right]}{\pi(n-\alpha)} \cdot R_N(n)$$

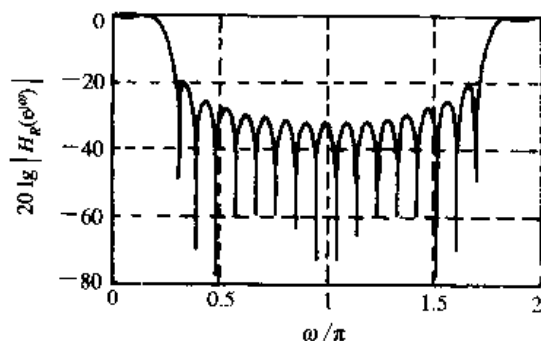
幅频特性曲线如题 9 解图(一)所示。

• 升余弦窗:

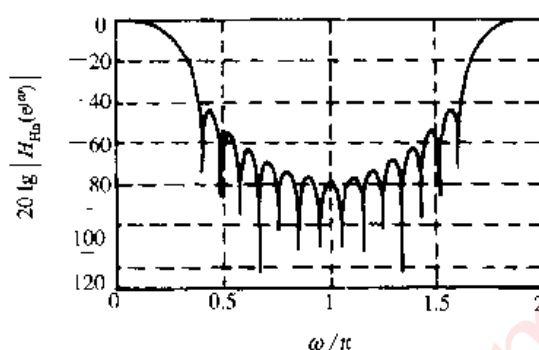
$$w_{Hn}(n) = 0.5 \left[1 + \cos\left[\frac{2\pi n}{N-1}\right] \right] \cdot R_N(n), \quad N=21$$

$$h_{Hn}(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-\alpha)\right]}{\pi(n-\alpha)} \left[1 + \cos\left[\frac{2\pi n}{20}\right] \right] \cdot R_{21}(n)$$

幅频特性曲线如题 9 解图(二)所示。



题 9 解图(一)



题 9 解图(二)

• 改进升余弦窗:

$$w_{Hm}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] \cdot R_N(n)$$

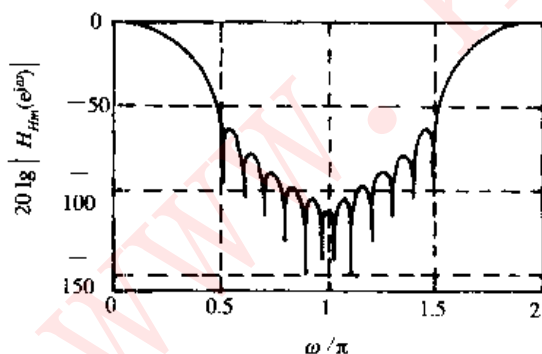
$$h_{Hm}(n) = h_d(n) \cdot w_{Hm}(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)} \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right) \right] \cdot R_{21}(n)$$

幅频特性如题 9 解图(三)所示。

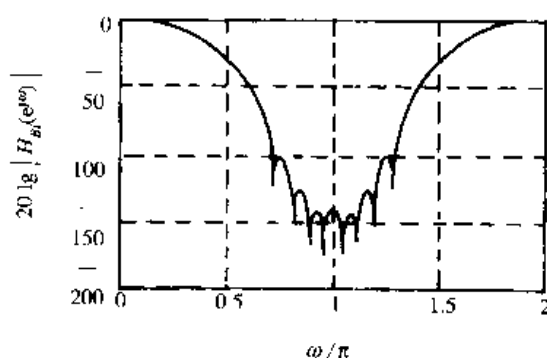
• 布莱克曼窗:

$$h_{Bl}(n) = h_d(n) \cdot w_{Bl}(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)} \left[0.42 - 0.5 \cos\left|\frac{2\pi n}{20}\right| + 0.08 \cos\left|\frac{4\pi n}{20}\right| \right] \cdot R_{21}(n)$$

幅频特性曲线如题 9 解图(四)所示。



题 9 解图(三)



题 9 解图(四)

由幅频特性曲线可以看出,设计结果与窗函数设计理论相符合。矩形窗对应的过渡带最窄,但阻带最小衰减只有 21 dB,布莱克曼窗对应的阻带衰减最大(大于 100 dB),但过渡带最宽。

MATLAB 信号处理工具箱提供了基于窗函数法的 FIR 滤波器的设计函数 fir1 和 fir2,它们使本题的设计非常简单。下面简要介绍 fir1 和 fir2 的功能、格式及使用说明。再调用 fir1 实现本题的设计。

(1) fir1:

功能: 基于窗函数的 FIR 滤波器设计——标准频率响应形状。

格式: $b = \text{fir1}(N, wc, 'ftype', window)$

说明: 标准频率响应指所设计的滤波器的预期特性为理想频率响应, 包括低通、带通、高通或带阻特性。

$ftype$ 和 $window$ 可以缺省。 $b = \text{fir1}(N, wc)$ 可得到截止频率为 wc ($0 \leq wc \leq 1$, 1 表示数字频率 π) 且满足线性相位条件的 N 阶 ($h(n)$ 长度为 $N+1$) FIR 低通滤波器, $window$ 默认选用 hamming 窗。其单位脉冲响应 $h(n)$ 为

$$h(n) = b(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

当 $wc = [wc1, wc2]$ 时, 得到的是通带为 $wc1 \leq w \leq wc2$ 带通滤波器。

$b = \text{fir1}(N, wc, 'ftype')$ 可设计高通和带阻滤波器。

- 当 $ftype = \text{high}$ 时, 设计高通 FIR 滤波器;

- 当 $ftype = \text{stop}$ 时, 设计带阻 FIR 滤波器。

- 应当注意, 在设计高通和带阻滤波器时, 阶数 N 只能取偶数 ($h(n)$ 长度 $N+1$ 为奇数)。不过, 当用户将 N 设置为奇数时, fir1 会自动对 N 加 1。

$window$ 默认为 hamming 窗。可用的其他窗函数有 Boxcar, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser 和 Chebwin 窗。这些窗函数的使用很简单 (可用 help 命令查到), 例如 $b = \text{fir1}(N, wc, \text{bartlett}(N+1))$ 使用 Bartlett 窗设计。

(2) fir2:

功能: 基于窗函数的 FIR 滤波器设计——任意频率响应形状。

格式: $b = \text{fir2}(N, f, m, window)$

说明: fir2 函数用于设计具有任意频率响应形状的加窗线性相位 FIR 数字滤波器, 其幅频特性由频率点向量 f 和幅度值向量 m 给出, $0 \leq f \leq 1$, 要求 f 为单增向量, 而且从 0 开始, 以 1 结束, 1 表示数字频率 $w = \pi$ 。 m 与 f 等长度, $m(k)$ 表示频点 $f(k)$ 的幅频响应值。 $\text{Plot}(f, m)$ 命令可画出期望逼近的幅频响应曲线。 N 和 $window$ 与 fir1 中的相同。

调用 MATLAB 函数 fir1 求解本题的程序为程序 p709.m。题 9 解图(一)、题 9 解图(二)、题 9 解图(三)、题 9 解图(四)就是运行该程序绘出的。

%程序 p709.m

```
clear; close all;
```

```
N=21; wc=1/4; n=0:20;
```

```
%boxcar window
```

```
fprintf('矩形窗设计结果:')
```

```
hn=fir1(N-1, wc, boxcar(N))
```

```
fh=fft(hn, 1024);
```

```
fh=20*log10(abs(fh));
```

```
wk=0:1023; wk=2*wk/1024;
```

```
subplot(2, 2, 1)
```

```
plot(wk, fh); grid;
```

```
title('boxcar window'); xlabel('w/pi')
```



```
%hanning window
wind=hanning(N);
fprintf('Hanning 窗设计结果:')
hn=hn.*wind'
fh=fft(hn,1024);
fh=20*log10(abs(fh));
subplot(2,2,2)
plot(wk,fh);grid;
title('hanning window');xlabel('w/pi')
axis([0 2 -130 0]);
%hamming window
wind=hamming(N);
fprintf('Hamming 窗设计结果:')
hn=hn.*wind'
fh=fft(hn,1024);
fh=20*log10(abs(fh));
subplot(2,2,3)
plot(wk,fh);grid;
title('hamming window');xlabel('w/pi')
axis([0 2 -160 0]);
%blackman window
wind=blackman(N);
fprintf('Blackman 窗设计结果:')
hn=hn.*wind'
fh=fft(hn,1024);
fh=20*log10(abs(fh));
subplot(2,2,4)
plot(wk,fh);grid;
title('blackman window');xlabel('w/pi')
```

程序运行结果如下:

矩形窗设计结果:

```
hn =
    0.0312    0.0245   -0.0000   -0.0315   -0.0519   -0.0441    0.0000
    0.0734    0.1558    0.2203    0.2447    0.2203    0.1558    0.0734
    0.0000   -0.0441   -0.0519   -0.0315   -0.0000    0.0245    0.0312
```

Hanning 窗设计结果:

```
hn =
    0.0006    0.0019   -0.0000   -0.0092   -0.0223   -0.0252    0.0000
    0.0608    0.1434    0.2158    0.2447    0.2158    0.1434    0.0608
    0.0000   -0.0252   -0.0223   -0.0092   -0.0000    0.0019    0.0006
```

Hamming 窗设计结果:

hn ==

```
0.0001    0.0002   -0.0000   -0.0025   -0.0089   -0.0136   0.0000
0.0492    0.1308    0.2110    0.2447    0.2110    0.1308   0.0492
0.0000   -0.0136   -0.0089   -0.0025   -0.0000    0.0002   0.0001
```

Blackman 窗设计结果:

hn =

```
-0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0003   -0.0018   -0.0046    0.0000
0.0339    0.1111    0.2026    0.2447    0.2026    0.1111    0.0339
0.0000   -0.0046   -0.0018   -0.0003   -0.0000    0.0000   -0.0000
```

10. 将技术要求改为设计线性相位高通滤波器, 重复题 9。

解 方法 1 将题 9 解答中的逼近理想低通滤波器($H_d(e^{j\omega})$, $h_d(n)$)改为如下理想高通滤波器即可。

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j10\omega}, & 3\pi/4 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < 3\pi/4 \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

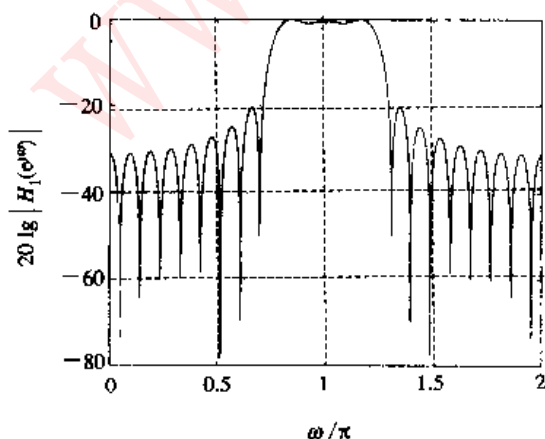
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-3\pi/4}^{-\pi} e^{-j10\omega} e^{j\omega n} d\omega + \int_{3\pi/4}^{\pi} e^{-j10\omega} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{\sin[\pi(n-10)]}{\pi(n-10)} - \frac{\sin\left[\frac{3\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}$$

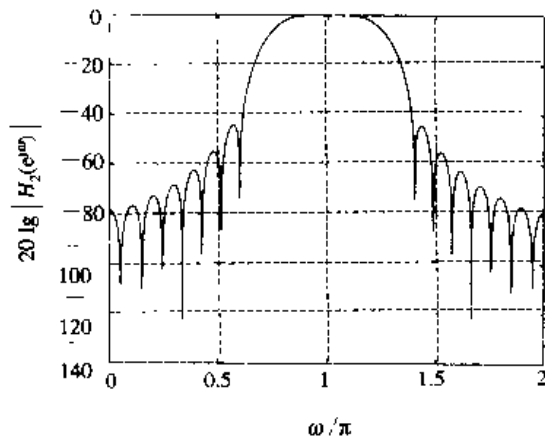
$$= \delta(n-10) - \frac{\sin\left[\frac{3\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}$$

上式中 $\delta(n-10)$ 对应于全通滤波器。上式说明, 高通滤波器的单位脉冲响应等于全通滤波器的单位脉冲响应减去低通滤波器的单位脉冲响应。

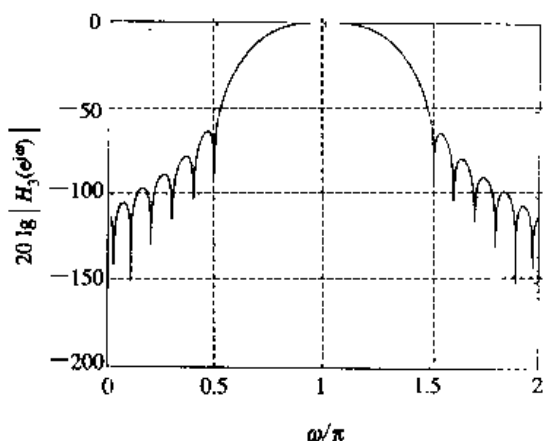
对矩形窗、升余弦窗、改进升余弦窗和布莱克曼窗所设计的高通 FIR 滤波器幅频特性分别如题 10 解图(一)、题 10 解图(二)、题 10 解图(三)和题 10 解图(四)所示。计算与绘图程序与题 9 解中类同, 只要将其中的 $h(n)$ 用本题的高通 $h(n)$ 替换即可。



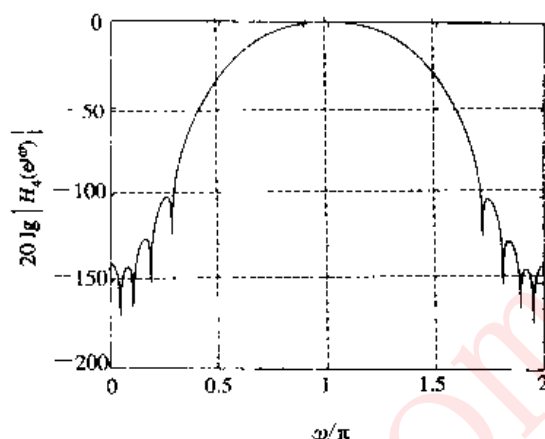
题 10 解图(一)



题 10 解图(二)



题 10 解图(三)



题 10 解图(四)

方法 2 根据第 7 题(1)的证明结论设计。

① 先设计通带截止频率为 $\pi/4$ 的低通滤波器。对四种窗函数所得 FIR 低通滤波器单位脉冲响应为题 9 解中的 $h_R(n)$, $h_{HN}(n)$, $h_{HM}(n)$ 和 $h_{BL}(n)$ 。

② 对低通滤波器单位脉冲响应乘以 $\cos(\pi n)$ 可得到高通滤波器单位脉冲响应:

• 矩形窗:

$$h_1(n) = h_R(n) \cos(\pi n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)} \cos(\pi n) R_{21}(n)$$

• 升余弦窗:

$$\begin{aligned} h_2(n) &= h_{HN}(n) \cos(\pi n) \\ &= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{2\pi(n-10)} \left[1 - \cos\left|\frac{2\pi n}{20}\right|\right] \cos(\pi n) R_{21}(n) \end{aligned}$$

• 改进升余弦窗:

$$\begin{aligned} h_3(n) &= h_{HM}(n) \cos(\pi n) \\ &= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)} \left[0.54 - 0.46 \cos\left|\frac{2\pi n}{20}\right|\right] \cos(\pi n) R_{21}(n) \end{aligned}$$

• 布莱克曼窗:

$$h_4(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)} \left[0.42 - 0.5 \cos\left|\frac{2\pi n}{20}\right| + 0.08 \cos\left|\frac{4\pi n}{20}\right|\right] \cos(\pi n) R_{21}(n)$$

计算并绘制幅频特性曲线 $20 \lg |H_1(e^{jw})|$ 、 $20 \lg |H_2(e^{jw})|$ 、 $20 \lg |H_3(e^{jw})|$ 和 $20 \lg |H_4(e^{jw})|$ 分别与题 10 解图(一)、(二)、(三)和(四)相同。上述 $H_1(e^{jw}) = \text{FT}[h_1(n)]$, $H_2(e^{jw}) = \text{FT}[h_2(n)]$, $H_3(e^{jw}) = \text{FT}[h_3(n)]$, $H_4(e^{jw}) = \text{FT}[h_4(n)]$ 。

11. 利用窗函数(哈明窗)法设计一数字微分器,逼近图所示的理想特性,并绘出其幅频特性。

解 由于连续信号存在微分,而时域离散信号和数字信号的微分不存在,因而本题要求设计的数字微分器是指用数字滤波器近似实现模拟微分器,即用数字差分滤波器近似模

拟微分器。下面先推导理想差分器的频率响应函数。

设模拟微分器的输入和输出分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$, 即:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}$$

令 $x(t) = e^{j\Omega t}$, 则

$$y(t) = jk\Omega e^{j\Omega t} = jk\Omega x(t)$$

对上式两边采样(时域离散化), 得到

$$y(nT) = jk\Omega x(nT)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \text{FT}[y(nT)] = jk\Omega X(e^{j\omega})$$

其中 $\omega = \Omega T$ 。将 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 分别作为数字微分器的输入和输出序列, 并用 $H_d(e^{j\omega})$ 表示数字理想微分器的频率响应函数, 则

$$Y(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = j \frac{k}{T} \omega X(e^{j\omega})$$

即

$$H_d(e^{j\omega}) = j \frac{k}{T} \omega$$

根据题 11 图所给出的理想特性可知

$$|H_d(e^{j\omega})| = |\omega| = \left| j \frac{k}{T} \omega \right|$$

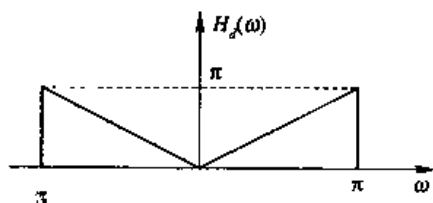
所以应取 $k=T$, 所以

$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega$$

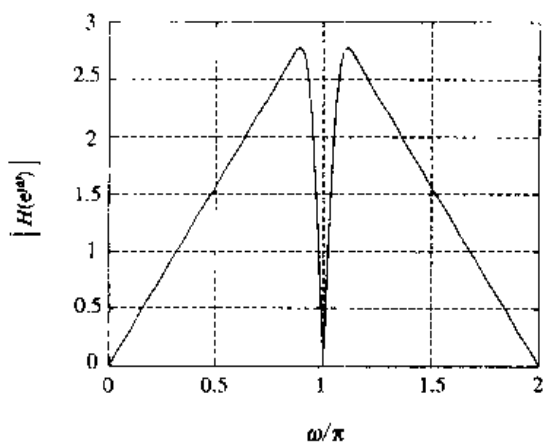
取群延时 $\tau = (N-1)/2$, 则逼近频率响应函数应为

$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\omega\tau} = \omega e^{-j(\omega\tau - \pi/2)}$$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{e^{j\omega(n-\tau)}}{[j(n-\tau)]^2} [j(n-\tau)\omega - 1] \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(n-\tau)^2} \{ 2(n-\tau)\pi \cos[\pi(n-\tau)] - 2 \sin[\pi(n-\tau)] \} \end{aligned}$$



题 11 图



题 11 解图

设 FIR 滤波器 $h(n)$ 长度为 N , 一般取 $\tau = (N-1)/2$ 。加哈明窗后得到

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n)w_{\text{Ham}}(n) \\ &= \frac{1}{2\pi \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2} \left\{ 2 \left(n - \frac{N-1}{2}\right) \pi \cos \left[\pi \left(n - \frac{N-1}{2}\right) \right] - 2 \sin \left[\pi \left(n - \frac{N-1}{2}\right) \right] \right\} \\ &\quad \cdot \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] \cdot R_N(n) \end{aligned}$$

当取 $N=31$ 时, $h(n)$ 的幅频特性曲线如题 11 解图所示。

12. 利用频率采样法设计一线性相位 FIR 低通滤波器, 给定 $N=21$, 通带截止频率 $\omega_c = 0.15\pi$ rad。求出 $h(n)$, 为了改善其频率响应应采取什么措施?

解 根据图 7.2 所给步骤设计。

① 确定希望逼近的理想低通滤波器频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq |\omega| \leq 0.15\pi \\ 0, & 0.15\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

其中 $\alpha = (N-1)/2 = 10$ 。

② 采样:

$$H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k} = e^{-j\frac{20}{21}\pi k}, & k = 0, 1, 20 \\ 0, & 2 \leq k \leq 19 \end{cases}$$

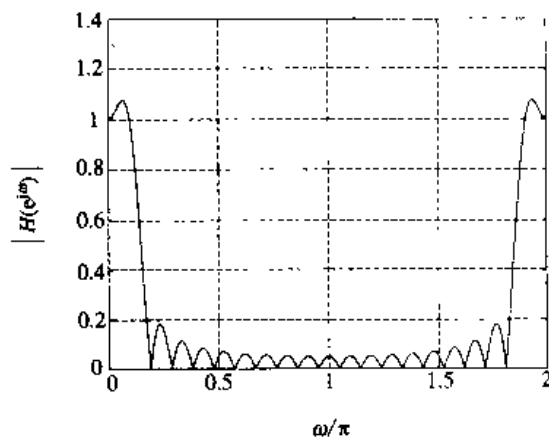
③ 求 $h(n)$:

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{IDFT}[H_d(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{21} \left[1 + e^{-j\frac{20}{21}\pi} W_{21}^{-n} + e^{j\frac{20}{21}\pi} W_{21}^{-20n} \right] R_{21}(n) \\ &= \frac{1}{21} \left[1 + e^{j\frac{2\pi}{21}(n-10)} + e^{-j\frac{400\pi}{21}} e^{j\frac{4\pi}{21}n} \right] R_{21}(n) \end{aligned}$$

因为 $e^{-j\frac{400}{21}\pi} = e^{j\frac{20}{21}\pi}$, $e^{j\frac{40}{21}\pi} = e^{j(\frac{42\pi}{21} - \frac{2\pi}{21})} = e^{-j\frac{2\pi}{21}}$, 所以

$$h(n) = \frac{1}{21} \left[1 + e^{j\frac{2\pi}{21}(n-10)} + e^{-j\frac{2\pi}{21}(n-10)} \right] = \frac{1}{21} \left[1 + 2 \cos \left[\frac{2\pi}{21}(n-10) \right] \right] R_{21}(n)$$

幅频响应曲线如题 12 解图所示。



题 12 解图

为了改善阻带衰减和通带波纹, 应加过渡带采样点, 为了使边界频率更精确, 过渡带更窄, 应加大采样点数 N 。

13. 利用频率采样法设计线性相位 FIR 低通滤波器, 设 $N=16$, 给定希望逼近滤波器的幅度采样值为

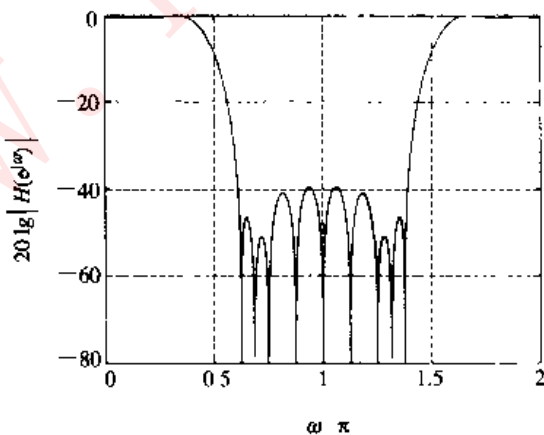
$$H_{dg}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.389, & k = 4 \\ 0, & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

解 由希望逼近的滤波器幅度采样 $H_{dg}(k)$ 可构造出 $H_d(e^{j\omega})$ 的采样 $H_d(k)$:

$$H_d(k) = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k} = e^{-j\frac{15}{16}\pi k}, & k = 0, 1, 2, 3, 13, 14, 15 \\ 0.389, & k = 4, 12 \\ 0, & k = 5, 6, 7, 8, 9, 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{IDFT}[H_d(k)] = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{15} H_d(k) W_{16}^{-kn} R_s(n) \\ &= \frac{1}{16} \left[1 + e^{-j\frac{15}{16}\pi} e^{j\frac{\pi}{8}n} + e^{-j\frac{15}{16}2\pi} e^{j\frac{\pi}{8}2n} + e^{-j\frac{15}{16}3\pi} e^{j\frac{\pi}{8}3n} + 0.389e^{-j\frac{15}{16}4\pi} e^{j\frac{\pi}{8}4n} \right. \\ &\quad \left. + e^{-j\frac{15}{16}15\pi} e^{j\frac{\pi}{8}15n} + e^{-j\frac{15}{16}14\pi} e^{j\frac{\pi}{8}14n} + e^{j\frac{15}{16}13\pi} e^{j\frac{\pi}{8}13n} + 0.389e^{-j\frac{15}{16}12\pi} e^{j\frac{\pi}{8}12n} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 1 + 2 \cos \left[\frac{\pi}{8} \left(n - \frac{15}{2} \right) \right] + 2 \cos \left[\frac{\pi}{4} \left(n - \frac{15}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \left[\frac{3\pi}{8} \left(n - \frac{15}{2} \right) \right] + 0.778 \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(n - \frac{15}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$h(n)$ 的幅频特性如题 13 解图所示。阻带最小衰减接近 -40 dB。请读者取 $H_{dg}(4) = 0.3904$ 做实验, 验证阻带最小衰减可达到 -40 dB。



题 13 解图

14. 重复题 13, 但改为用矩形窗函数设计。将设计结果与题 13 进行比较。

解 取理想低通滤波器截止频率 ω_c 为

$$\omega_c = \frac{2\pi}{16} \times 4 = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$$

理想低通滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

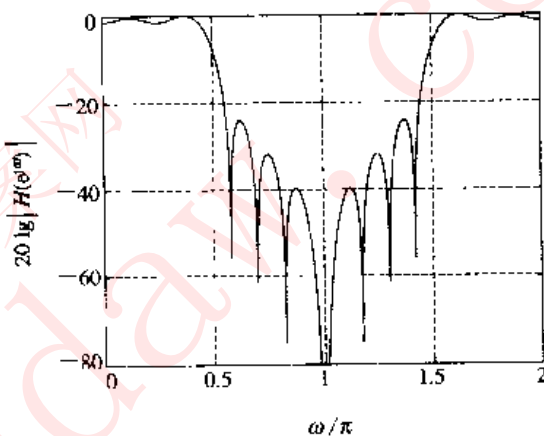
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{N-1}{2} = \frac{15}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j\omega \frac{15}{2}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n - \frac{15}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{15}{2}\right)}$$

$$h(n) = h_d(n) R_{16}(n) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n - \frac{15}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{15}{2}\right)} R_{16}(n)$$

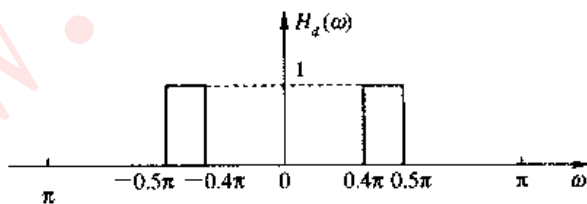
幅频特性如题 14 解图所示。

比较题 14 解图与题 13 解图可知, $H_d(e^{j\omega})$ 为理想低通特性时, 用矩形窗函数设计的 FIR 滤波器过渡带较窄, 但阻带最小衰减只有二十几分贝。而取一个过渡采样点(0.389)时, 所设计的 FIR 滤波器的过渡带较宽, 阻带最小衰减可达近 40 dB。请读者按题 13 所给的 $H_{ds}(k)$ 构造期望滤波特性函数 $H_d(e^{j\omega})$, 再用窗函数法设计, 比较设计结果。



题 14 解图

15. 利用频率采样法设计线性相位 FIR 带通滤波器, 设 $N=33$, 理想幅度特性 $H_d(\omega)$ 如图所示。



题 15 图

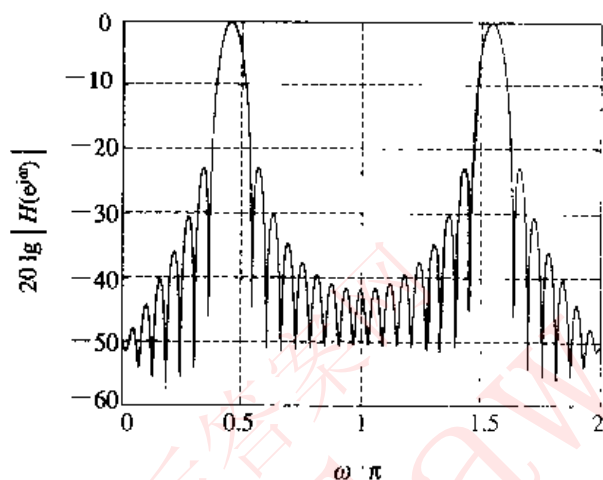
解 由题 15 图可得到理想幅度采样值为

$$H_{ds}(k) = H_d\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 7, 8, 25, 26 \\ 0, & k = 0 \sim 6, k = 9 \sim 24, k = 27 \sim 32 \end{cases}$$

$$H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k} = e^{-j\frac{32}{33}\pi k}, & k = 7, 8, 25, 26 \\ 0, & \text{其它 } k \text{ 值} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \text{IDFT}[H_d(k)] \\
 &= \frac{1}{33} \left[e^{-j\frac{32}{33}\pi} e^{j\frac{2\pi}{33}n} + e^{-j\frac{32}{33}\pi} e^{j\frac{2\pi}{33}n} + e^{-j\frac{32}{33}\pi} e^{j\frac{2\pi}{33}n} + e^{-j\frac{32}{33}\pi} e^{j\frac{2\pi}{33}n} \right] R_{33}(n) \\
 &= \frac{2}{33} \left\{ \cos\left[\frac{14\pi}{33}(n-16)\right] + \cos\left[\frac{16\pi}{33}(n-16)\right] \right\} R_{33}(n)
 \end{aligned}$$

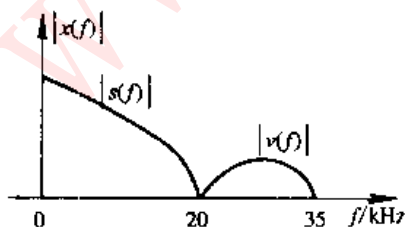
幅频特性曲线如题 15 解图所示。由于未加过渡采样点, 因而阻带最小衰减只有 22 dB 左右。



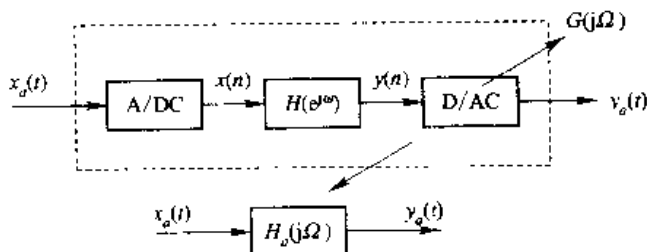
题 15 解图

16. 设信号 $x(t) = s(t) + v(t)$, 其中 $v(t)$ 是干扰, $s(t)$ 与 $v(t)$ 的频谱不混叠, 其幅度谱如题 16 图所示。要求设计一数字滤波器, 将干扰滤除, 指标是允许 $|s(f)|$ 在 $0 \leq f \leq 15$ kHz 频率范围中幅度失真为 $\pm 2\%$ ($\delta_1 = 0.02$); $f > 20$ kHz, 衰减大于 40 dB ($\delta_2 = 0.01$); 希望分别用 FIR 和 IIR 两种滤波器进行滤除干扰, 最后进行比较。

解 该题要求用采样数字系统对模拟信号 $x(t)$ 进行滤波处理。采样数字系统的组成框图及其等效模拟滤波器 $H_a(j\Omega)$ 如题 16 解图(一)所示。为了设计简单, 假设图中 A/DC 为无限精度采样器, D/AC 为一理想低通滤波器 $G(j\Omega)$ 。对实际中的 D/AC, 可加适当的预畸变校正滤波器实现本题的设计效果。



题 16 图



题 16 解图(一)

由题意可知, 等效模拟滤波器的设计指标为

通带: $0 \leq f \leq 15$ kHz, 幅度失真为 $\pm 2\%$, ($\delta_1 = 0.02$)

阻带: $20 \text{ kHz} < f$, 衰减大于 40 dB, ($\delta_2 = 0.01$)

取采样频率 $F_s = 1/T = 80$ kHz, 可得到要求设计的数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的指标如下:

$$\text{通带截止频率: } \omega_c = 2\pi f_c T = \frac{2\pi \times 15 \times 10^3}{80 \times 10^3} = \frac{3}{8}\pi \text{ rad}$$

$$\text{通带波纹: } \delta_1 = 0.02$$

$$\text{阻带截止频率: } \omega_s = 2\pi f_s T = \frac{2\pi \times 20 \times 10^3}{80 \times 10^3} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{阻带最小衰减: } \alpha_s = 40 \text{ dB, (阻带波纹 } \delta_2 = 0.01)$$

本题是一个实际应用型习题, 下面调用 MATLAB 信号处理工具箱函数来设计 FIR 和 IIR 数字滤波器, 使读者了解采用现代辅助工具设计滤波器的优点。(也可用传统的窗函数法、频率采样法、双线性变换法设计, 请读者自己做, 并将设计结果与下面的设计结果比较。)

为了便于比较, FIR 滤波器采用等波纹最佳一致逼近法(调用 `remez` 函数)设计; IIR 滤波器选用椭圆滤波器(调用 `ellip` 函数)设计。这是因为这样设计的 FIR 和 IIR 滤波器通带和阻带均为等波纹特性。

为了使读者能看懂程序, 下面先介绍 MATLAB 工具箱函数 `remez`, `remezord`, `ellip` 和 `ellipord`。

• 椭圆滤波器设计函数:

`ellip`: 椭圆滤波器设计函数。

调用格式:

$$\textcircled{1} [B, A] = \text{ellip}(N, Rp, Rs, wc, 'ftype')$$

$$\textcircled{2} [B, A] = \text{ellip}(N, Rp, Rs, wc, 'ftype', 's')$$

说明:

格式①中, Rp 和 Rs 分别为通带波纹和阻带波纹(dB); wc 为通带截止频率, $wc \in [0, 1]$, $wc = 1$ 表示 π rad。对带通和带阻滤波器, $wc = [w1, w2]$ 为二元向量。 N 为滤波器阶数。参数 N 和 wc 可用 `ellipord` 函数求得。`'ftype'` 用于指定滤波器类型。当设计低通和带通滤波器时, 要省去 `'ftype'`, `ftype = high` 时, 设计出截止频率为 wc 的高通滤波器, 当 `ftype = stop` 时, 设计出带阻滤波器, 且阻带为 $w1 \leq w \leq w2$ 。

格式②用于设计模拟椭圆滤波器。请用 `help` 命令查看。

格式①和②中的调用参数 N 和 wc 可用 `ellipord` 函数得到。

调用 `ellip` 函数后, 返回的向量 B 和 A 分别为 IIR 滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数。对设计数字椭圆滤波器的格式①, 可写出 $H(z)$ 如下:

$$H(z) = \frac{B(1) + B(2)z^{-1} + B(3)z^{-2} + \dots + B(N+1)z^{-N}}{A(1) + A(2)z^{-1} + A(3)z^{-2} + \dots + A(N+1)z^{-N}}$$

• `ellipord`: 椭圆滤波器阶数计算函数。

调用格式:

$$\textcircled{1} [N, wc] = \text{ellipord}(wp, ws, Rp, Rs)$$

$$\textcircled{2} [N, wc] = \text{ellipord}(wp, ws, Rp, Rs, 's')$$

说明:

格式①用于计算满足由调用参数指定的性能指标的椭圆数字滤波器的最小阶数 N 和通带截止频率 wc , 其返回参数 N 和 wc 作为 `ellip` 函数的调用参数。调用参数 wp 和 ws 分

别为通带边界频率和阻带边界频率, R_p 和 R_s 分别为通带最大衰减和阻带最小衰减。且 $w_p \in [0, 1]$, $w_s \in [0, 1]$ 。对带通和带阻滤波器, w_p 和 w_s 均为二元向量。

格式②用于计算模拟椭圆滤波器的阶数 N 和截止频率 w_c 。详细说明用 help 命令查看。

• 调用函数 remezord 和 remez 求解本题 FIR 滤波器的程序为程序 p716a.m。

%程序 p716a.m

clear; close all

fc=15000; fs=20000; Fs=80000;

f=[fc, fs];

m=[1, 0];

dev=[0.02, 0.01];

[N, f0, m0, w]=remezord(f, m, dev, Fs);

N=N-1 %remezord 所求 N 不满足要求, 要修正为 N+1

hn=remez(N, f0, m0, w)

hw=fft(hn, 512);

w=0:511; w=2 * w/512;

subplot(3, 2, 1);

plot(w, 20 * log10(abs(hw))); grid;

axis([0, max(w)/2, -90, 5]);

xlabel('w/pi'); ylabel('Magnitude(dB)')

程序 p716a.m 运行结果:

FIR 滤波器幅频特性曲线如题 16 解图

(二)所示。 $h(n)$ 长度 N 和 $h(n)$ 数据如下:

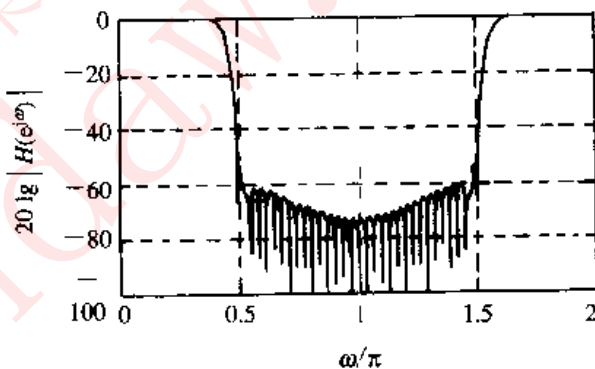
N =

29

hn =

0.0037	-0.0084	-0.0128	-0.0004	0.0164	0.0077	-0.0215
-0.0228	0.0211	0.0466	-0.0094	-0.0854	-0.0326	0.1867
0.4007	0.4007	0.1867	-0.0326	-0.0854	-0.0094	0.0466
0.0211	-0.0228	-0.0215	0.0077	0.0164	-0.0004	-0.0128
-0.0084	0.0037					

题 16 解图(二)



调用函数 ellipord 和 ellip 求解本题 IIR 滤波器的程序为程序 p716b.m, 其中 ellipord 调用参数为:

$$\omega_p = \frac{3}{8}, R_p = 20 \lg \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right) = 20 \lg \left(\frac{1.02}{0.98} \right) \text{ dB}$$

$$\omega_s = \frac{1}{2}, R_s = 40 \text{ dB}$$

%程序 p716b.m

clear; close all

Wp=3/8; dev1=0.02;

Ws=0.5;

Rp=20 * log10((1+dev1)/(1-dev1)); %求通带最大衰减

```
Rs=40;
[N, wc]=ellipord(Wp, Ws, Rp, Rs)
[b, ε]=ellip(N, Rp, Rs, wc)
[hw, w]=freqz(b, a);
subplot(3, 2, 1);
plot(w/pi, 20 * log10(abs(hw))); grid
axis([0, 1, -80, 5]); xlabel('ω/π'); ylabel('幅度/dB')
subplot(3, 2, 3); plot(w/pi, angle(hw));
grid; axis([0, 1, -5, 5])
xlabel('ω/π'); ylabel('相位/rad')
```

程序 716b.m 运行结果:

幅频特性和相频特性曲线如题 16 解图(三)所示, 滤波器参数如下:

$$N = 5$$

$$wc = 0.3750$$

$$b = 0.0476 \quad 0.0618 \quad 0.1042 \quad 0.1042 \quad 0.0618 \quad 0.0476$$

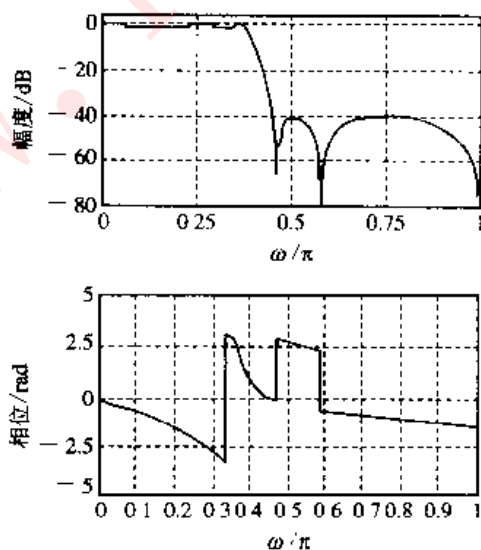
$$a = 1.0000 \quad -1.9885 \quad 2.6833 \quad -2.0231 \quad 0.9772 \quad 0.2219$$

由系数向量 b 和 a 写出系统函数:

$$H(z) = \frac{0.0476 + 0.0618z^{-1} + 0.1042z^{-2} + 0.1042z^{-3} + 0.0618z^{-4} + 0.0476z^{-5}}{1 - 1.9885z^{-1} + 2.6833z^{-2} - 2.0231z^{-3} + 0.9772z^{-4} - 0.2219z^{-5}}$$

比较 FIR 和 IIR 滤波器设计结果可得出以下结论:

- (1) 对相同的设计指标, FIR 滤波器阶数(29 阶)比 IIR 滤波器阶数(5 阶)高得多;
- (2) FIR 滤波器具有严格线性相位特性, 而 IIR 滤波器在通带内为近似线性相位特性。
- (3) 对不要求严格线性相位特性的应用场合, 用 IIR 滤波器可使阶数大大降低。



题 16 解图(三)

第八章

其它类型的数字滤波器

本章讨论了六种滤波器的系统函数及其频率响应函数的特点。这六种滤波器专列一章来学习,是因为它们虽然属于一般的 IIR 或 FIR 滤波器,但它们各自的频响特性,或实现结构,或应用情况各有独特之处,在信号处理中具有非常重要的特殊作用,特别是它们的设计思想和设计方法与普通 IIR 或 FIR 滤波器有所不同。

例如,普通 IIR 或 FIR 滤波器设计时,主要根据通带最大衰减、阻带最小衰减以及过渡带宽度等技术指标,来选择滤波器类型,计算滤波器阶数,求得系统函数 $H(z)$ 或单位脉冲响应 $h(n)$ 。

但梳状滤波器和简单整常系数滤波器的设计思想和设计方法则大不相同。梳状滤波器设计时,只需要根据对零点频率的要求求出滤波器阶数即可,这是因为其系统函数 $H(z)=1-z^{-N}$ (或 $H(z)=(1-z^{-N})/(1-az^{-1})$) 中只有一个待求参数 N ; 而简单整常系数滤波器的设计思想主要考虑滤波器系数为整数,实现简单、处理速度快,将其频率响应特性放在次要位置。当然,这两种滤波器只能用在一些特殊场合。

下面指出本章的学习要点,并结合设计实例归纳几种滤波器的设计思想与设计方法。

8.1 学习要点及设计举例

本章要求学生掌握的基本知识要点如下所述。

8.1.1 全通网络的系统函数及其频率响应函数的特点

学习时,不但要掌握教材中所给出的定义和结论,更重要的是学习其中证明命题的方法。具体内容归纳如下。

1. 全通滤波器定义

幅频响应函数 $|H(e^{j\omega})|=1$ (或常数) 的滤波器称为全通滤波器,其系统函数记为 $H_{ap}(z)$ 。

2. $H_{ap}(z)$ 的一般形式及特点

$$H_{ap}(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{k-N}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad a_k \text{ 为实常数} \quad (8.1a)$$

或

$$H_{ap}(z) = \prod_{i=1}^L \frac{z^{-2} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}}{a_{2i}z^{-2} + a_{1i}z^{-1} + 1} \quad (8.1b)$$

或

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - z_k}{1 - z_k^* z^{-1}} \quad (8.1c)$$

以上三式是全通滤波器系统函数的三种不同的表达形式,其中(8.1c)式中 z_k 成复共轭对出现时,才能保证其 $H(z)$ 展开成(8.1a)形式时,分子分母多项式系数为实数。 $H(z)$ 虽然有三种不同的表示形式,但对其约束条件是相同的,这就是构成全通滤波器的基本条件:

(1) $H_{ap}(z)$ 的极点以实数或复共轭对出现,而且,零点与极点互为共轭倒易关系
 { 如果 $H_{ap}(z)$ 有极点 p_k ,则必然有零点 $z_k = \frac{1}{p_k^*}$ }, 以确保 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = \text{常数}$;

(2) $H_{ap}(z)$ 的极点位于单位圆内;

(3) $H_{ap}(z)$ 在原点无极点和零点;

(4) 全通滤波器为 IIR 类型的滤波器。

相对于以上 z 域特点,也可在时域描述全通滤波器的特点:

(1) $h_{ap}(n)$ 为实序列;

(2) $h_{ap}(n)$ 为因果序列;

(3) 当 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{ap}^2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{ap}(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1$$

(4) $h^2(0) < 1$ (由(3)可见)。

3. 全通滤波器幅频响应函数的证明方法

全通滤波器幅频响应函数

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

的证明方法值得学习,参阅教材和习题解答中的相关内容。

全通滤波器对输入信号的幅度谱无影响,只对其相位特性产生影响,所以称全通滤波器为纯相位滤波器。全通滤波器主要应用于校正滤波器相位特性,或对相位失真信号进行相位均衡。

下面举例说明(8.1c)式的推导过程。在学习过程中,学生往往提出这样的问题:当零点、极点给定后,想不到(8.1c)形式的 $H(z)$ 。一般根据零点 z_k^{-1} 和极点 z_k^* ,可直接写出 $H(z)$ 为如下形式:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z - z_k^{-1}}{z - z_k^*} = \prod_{k=1}^N \frac{1 - z_k^{-1} z^{-1}}{1 - z_k^* z^{-1}} \quad (8.2)$$

实际上可以证明,如果只要求全通滤波器幅频响应为一常数时,上式也可作为全通滤波器的系统函数。但下面会证明,(8.2)式给出的 $H(z)$ 的 $|H(e^{j\omega})|$ 等于一个与 $|z_k|$ 有关的常数。这样,就給其应用带来不便。通常要求 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$,以便于 $H_{ap}(z)$ 与其它系统级联时,不会改变其增益。特别是总增益不会随 $H_{ap}(z)$ 的零点和极点不同而不同。

例 8.1 已知 N 阶全通滤波器的零、极点互为共轭倒易关系。

(1) 试推导(8.1c)式;

(2) 假设 $H_{ap}(z)$ 的极点成共轭对出现,推导出(8.1b)式中的系数 a_{ki} 与极点(或零点)的

关系, 并指出(8.1a)式的求法。

解 (1) 设系统极点为 z_k , 则必有零点 z_k^{-1} 与之对应, $k=1, 2, \dots, N$ 。可直接写出系统函数

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{1 - z_k^{-1} z^{-1}}{1 - z_k^* z^{-1}}$$

只要推导出

$$|H(e^{j\omega})| = c |H_{ap}(e^{j\omega})| = c, \quad c \text{ 为实常数}$$

则 $H_{ap}(e^{j\omega})$ 对应的系统函数即为全通滤波器系统函数 $H_{ap}(z)$, 且必然可写成(8.1c)式的形式。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \prod_{k=1}^N \frac{1 - z_k^{-1} e^{-j\omega}}{1 - z_k^* e^{-j\omega}} = \prod_{k=1}^N \frac{z_k^{-1} (z_k - e^{-j\omega})}{1 - z_k^* e^{-j\omega}} \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{z_k} \prod_{k=1}^N \frac{(e^{-j\omega} - z_k)}{(e^{j\omega} - z_k^*) e^{-j\omega}} \\ |H(e^{j\omega})| &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{|z_k|} \prod_{k=1}^N \frac{|e^{-j\omega} - z_k|}{|e^{j\omega} - z_k^*|} = \prod_{k=1}^N \frac{1}{|z_k|} = c \end{aligned}$$

c 值完全由 $|z_k|$ 之积决定, 而

$$\left| \prod_{k=1}^N \frac{e^{-j\omega} - z_k}{1 - z_k^* e^{-j\omega}} \right| = 1 = |H_{ap}(e^{j\omega})|$$

即

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N \frac{e^{-j\omega} - z_k}{1 - z_k^* e^{-j\omega}}$$

取 $z = e^{j\omega}$, 则可得 $H_{ap}(e^{j\omega})$ 对应的系统函数为

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - z_k}{1 - z_k^* z^{-1}}$$

上式正是(8.1c)式。

(2) 将 $H_{ap}(z)$ 中的复共轭对极点和零点对应的因子乘开, 则得到(8.1b)式:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^L \frac{z^{-2} + a_{1k} z^{-1} + a_{2k}}{a_{2k} z^{-2} + a_{1k} z^{-1} + 1}$$

当 $N = \text{偶数}$ 时, $L = N/2$ 。其中

$$\frac{z^{-2} + a_{1k} z^{-1} + a_{2k}}{a_{2k} z^{-2} + a_{1k} z^{-1} + 1} = \frac{(z^{-1} - z_k)(z^{-1} - z_k^*)}{(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z_k z^{-1})}$$

经过计算可得到关系式:

$$a_{1k} = -2 \operatorname{Re}[z_k]$$

$$a_{2k} = |z_k|^2$$

将(8.1b)式乘开可得(8.1a)式, 但其中系统 a_k 与各极点的关系式较复杂, 但对确定的 N 和极点 z_k , 直接可计算出 $H(z)$ 的(8.1a)形式。

8.1.2 梳状滤波器的系统函数及频率响应特性

学习时应掌握梳状滤波器系统函数的两种不同形式及其频率响应特性的差别。了解梳状滤波器的主要用途。教材中未讲述实际梳状滤波器的设计方法, 是因为其设计很简单。

梳状滤波器系统函数的形式为

$$H_1(z) = 1 - z^{-N}$$

或

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - az^{-N}}$$

所以,所谓设计梳状滤波器,就是确定其中唯一的未知参数 N 的值。但对初学者来说,各种概念未牢固建立,设计时往往无从下手。关于梳状滤波器的具体内容,归纳为如下三点。

1. 梳状滤波器的设计方法

实际上,给定要滤除的等间隔频点(一般为模拟频率点 f_k)和采样频率 f_s 后,设计梳状滤波器的关键是确定要滤除的数字频率点 ω_k ,即 $H(e^{j\omega})$ 的零点频率

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad \omega_k = 2\pi f_k T = \frac{2\pi f_k}{f_s}, \quad k = 0, 1, \dots$$

一般情况下, $f_k = kf_s$, 所以,梳状滤波器系统函数 $H_1(z)$ 或 $H_2(z)$ 中唯一的未知参数 N 可由下式确定:

$$\frac{2\pi}{N}k = \omega_k = \frac{2\pi kf_s}{f_s}$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{f_s}{f_1}$$

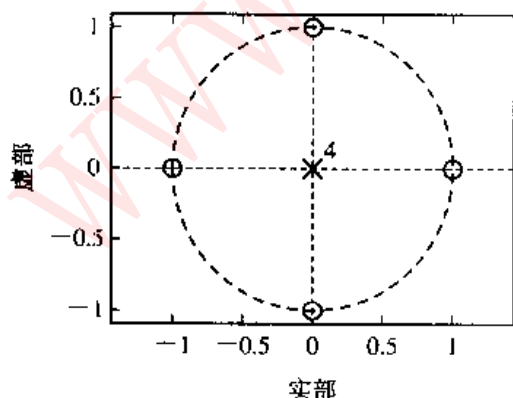
这时,就可根据具体应用要求,选取梳状滤波器的一种类型,直接写出系统函数 $H(z)$ 。

2. $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的幅频响应特点

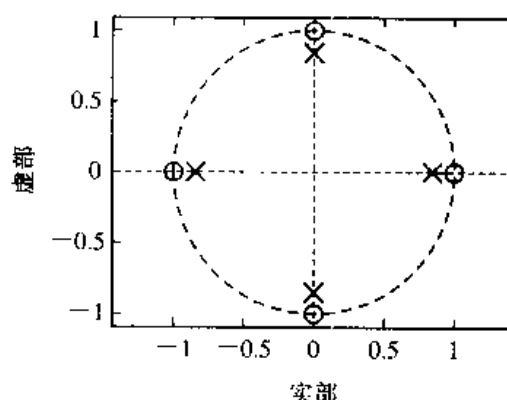
相对 $H_1(z)$ 而言, $H_2(z)$ 引入了 N 个极点:

$$p_k = a^{\frac{1}{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}k} = a^{\frac{1}{N}} z_k$$

$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 为 $H_1(z)$ 的零点, $k=0, 1, \dots, N-1$ 。当 $N=4$ 时, $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的零点和极点分别如图 8.1(a) 和 (b) 所示, 根据该图画出 $|H_1(e^{j\omega})|$ 和 $|H_2(e^{j\omega})|$ 如图 8.2(a) 和 (b) 所示。用 MATLAB 的 freqz 函数很容易画出该曲线。



(a) $H_1(z)$ 的零、极点图



(b) $H_2(z)$ 的零、极点图 ($a=0.6$)

图 8.1 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 的零点和极点分布图

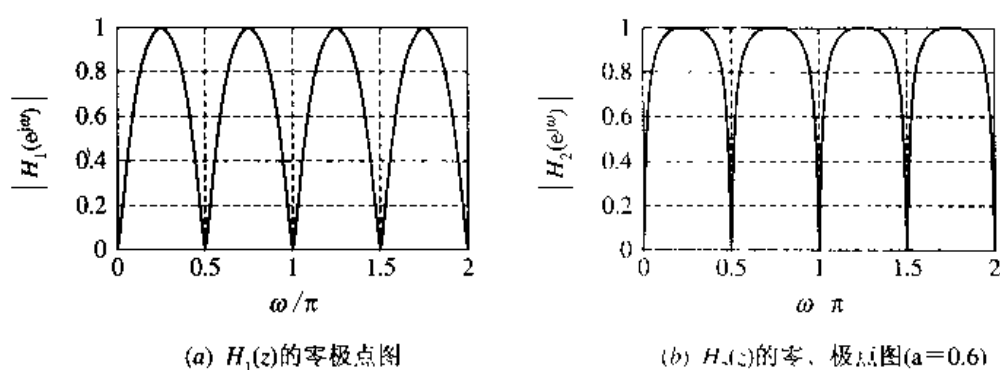


图 8.2 $H_1(e^{jw})$ 与 $H_2(e^{jw})$ 曲线

对不同的 a 值, $|H_2(e^{jw})|$ 曲线如图 8.3 所示。

综上所述, $|H_1(e^{jw})|$ 过渡带较宽, 通带不平坦。而 $|H_2(e^{jw})|$ 过渡带较窄, 通带较平坦, 且 a 越接近 1, 该特点越明显。以上不仅说明了梳状滤波器两种类型 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的特点, 也验证了在阶数相同的条件下, IIR 滤波器可得到更好的幅频特性。

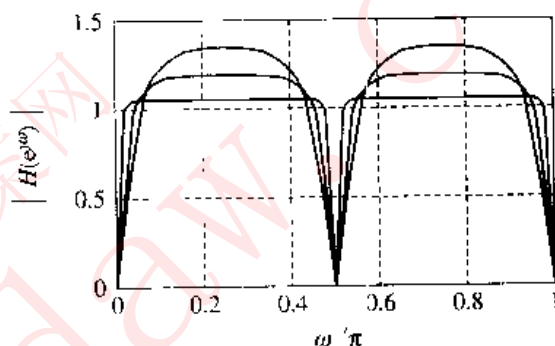


图 8.3 $H_2(e^{jw})$ 曲线 ($a=0.5, 0.7, 0.95$)

3. 两种类型梳状滤波器的适用场合

梳状滤波器的应用一般分为两种情况: 一种是用于消除某一频率及其谐波干扰, 希望其它频谱成分尽量无衰减通过。例如, 50 Hz 电源及其谐波干扰消除(见习题)。这时应采用 $H_2(z)$ 类型。另一种情况是分离频谱等间隔交错的两种信号。如彩色电视接收机中的亮色分离、色解码, 以及图像信号压缩编码中, 采用亚奈奎斯特采样的恢复滤波器等, 其中的梳状滤波器应采用 $H_1(z)$ 类型, 以便对零点附近的一个频带有较大衰减, 以达到分离频带信号的目的。下面以改进彩电图像清晰度的亮色分离滤波器为例, 说明梳状滤波器的设计方法及其实际应用。

例 8.2 彩色全电视信号频谱如图 8.4 所示, 其中, 黑色实心谱表示色度(C)信号谱, 其余谱表示亮度(Y)信号谱。在电视接收机中, 要将二者分离, 以便产生驱动彩色显像管的三基色(R、G、B)信号。在老式模拟彩色电视接收机中, 采用陷波器和带通滤波器实现 Y-C 分离, 如图 8.5 所示。陷波器滤除色度信号副载波 f_c 附近的色度信号和亮度信号的高频成分, 得到损失高频成分的亮度信号; 通常滤波器中心频率为 f_c , 带宽为色度信号带宽(一般为 $2 \times (1.3 \sim 2)$ MHz)^[9, 10], 带通滤波器输出作为 C 信号, 显然, 其中包含亮度信号高频成分。彩色电视图像信号的清晰度(景物细节)完全依靠 Y 信号的高频成分描述。所以老式彩电的 Y-C 分离质量较差(存在 Y、C 互相串扰), 且大大降低了图像的清晰度。在数字电视接收机中, 可采用梳状滤波器进行 Y-C 分离, 使电视图像清晰度提高, 并大大降低亮色串扰。Y-C 分离滤波器的频响要求如图 8.6 所示。

Y-C 分离滤波器的构成如图 8.7 所示。

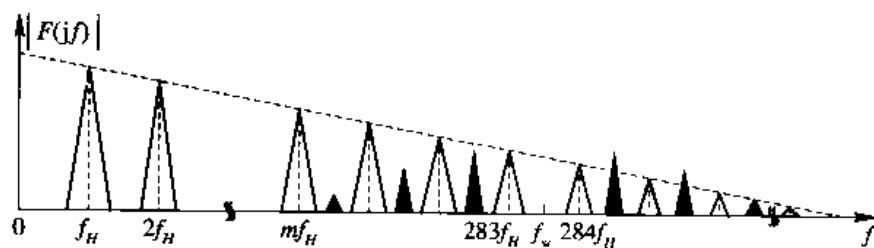


图 8.4 彩色全电视信号频谱示意图

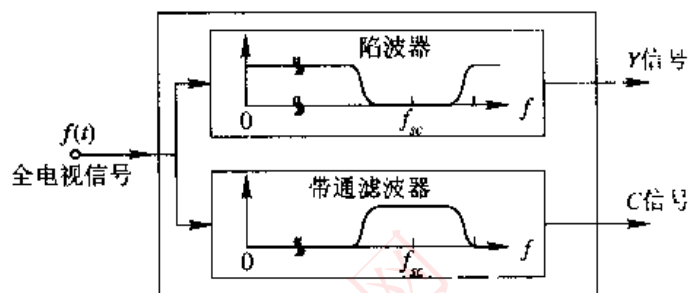


图 8.5 模拟电视 Y-C 分离滤波特性示意图

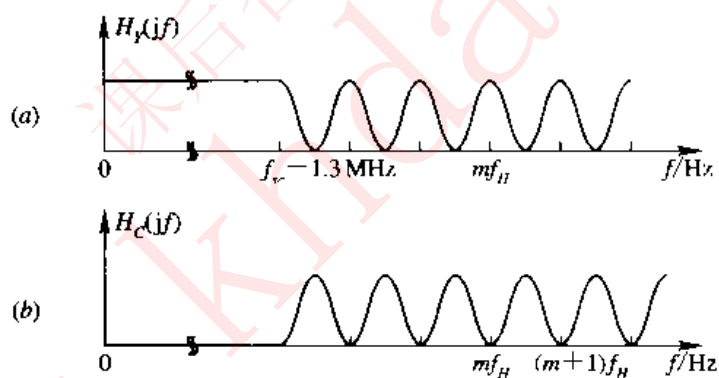


图 8.6 Y-C 分离滤波器频响特性要求

(a) Y 通道频响特性; (b) C 通道频响特性

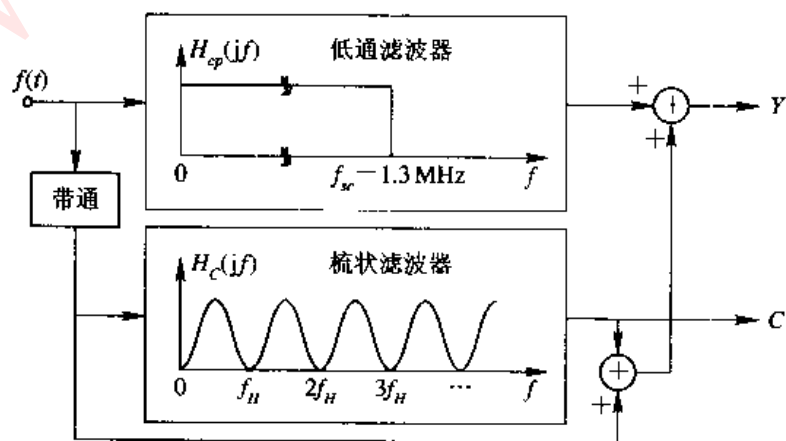


图 8.7 Y-C 分离滤波器组成框图

设采样频率 $f_s = 864f_H = 13.5 \text{ MHz}$ [10], 试设计 Y-C 分离滤波器中的梳状滤波器。

解 根据题意, 梳状滤波器用于分离两种频谱交错的频带信号, 所以选用梳状滤波器类型为

$$H(z) = 1 - z^{-N}$$

零点频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = 2\pi f_k T$, 因为要求滤除的模拟频率点 $f_k = kf_H$, $T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{864f_H}$, 所以

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \frac{2\pi kf_H}{864f_H}$$

$$N = 864$$

故梳状滤波器的系统函数为

$$H(z) = 1 - z^{-864}$$

图 8.7 中的数字低通滤波器和带通滤波器设计方法请参考滤波器设计例题和习题解答(教材第七章)。彩色视频全电视信号经过采样后, 输入 Y-C 分离数字滤波器, 可实现较高质量的 Y-C 分离。

8.1.3 最小相位系统的定义及基本性质

由于最小相位系统的定义和性质教材中已进行了较详细的叙述, 这里不再重复。读者在学习掌握最小相位系统的基本概念及性质的同时, 要结合一些性质的证明、例题及习题解答过程, 学习分析问题和证明问题的方法和技巧。下面举一个例子, 说明对 FIR 滤波器, 最小相位系统及线性相位系统的特点, 并讨论两种系统的单位脉冲响应的关系。

例 8.3 已知一个最小相位 FIR 滤波器, $h_{\min}(n)$ 长度为 $N=5$, 两个二阶零点分别为 $z_1 = re^{j\theta}$ 和 $z_2 = re^{-j\theta}$, $r=0.5$, $\theta=2\pi/3$ 。

(1) 写出最小相位系统函数 $H_{\min}(z)$, 求出单位脉冲响应 $h_{\min}(n)$, 画出 $h_{\min}(n)$ 、 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 和 $\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$ 曲线。

(2) 对 $H_{\min}(z)$ 乘一个合适的全通系统函数 $H_{ap}(z)$, 使该滤波器变成具有线性相位特性的滤波器 $H(z)$, 求出 $H(z)$ 及 $h(n)$, 并画出 $h(n)$ 、 $|H(e^{j\omega})|$ 及 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 曲线。

(3) 对 $H_{\min}(z)$ 乘一个合适的全通系统函数 $H_{ap}(z)$, 使其成为最大相位系统 $H_{\max}(z)$, 求出 $H_{\max}(z)$ 表达式及其单位脉冲响应 $h_{\max}(n)$ 与 $h_{\min}(n)$ 的关系。

(4) 比较 $H_{\min}(z)$ 、 $H(z)$ 和 $H_{\max}(z)$ 的相位滞后量和 $h_{\min}(n)$ 、 $h(n)$ 和 $h_{\max}(n)$ 的特点, 归纳三种系统的频域和时域特点。

解 (1)

$$H_{\min}(z) = (1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})^2$$

为了求得 $h_{\min}(n)$, 将 $H_{\min}(z)$ 展开:

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= 1 - 2r(e^{j\theta} + e^{-j\theta})z^{-1} + r^2(4 + e^{j2\theta} + e^{-j2\theta})z^{-2} - 2r^3(e^{j\theta} + e^{-j\theta})z^{-3} + r^4z^{-4} \\ &= 1 - 4r \cos \theta z^{-1} + r^2(4 + 2 \cos(2\theta))z^{-2} + 4r^3 \cos \theta z^{-3} + r^4z^{-4} \\ &= 1 + z^{-1} + 0.75z^{-2} + 0.25z^{-3} + 0.0625z^{-4} \end{aligned}$$

$$h_{\min}(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 0.75\delta(n-2) + 0.25\delta(n-3) + 0.0625\delta(n-4)$$

$h_{\min}(n)$ 、 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 和 $\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$ 分别如图 8.8(a)、(b) 和 (c) 所示。

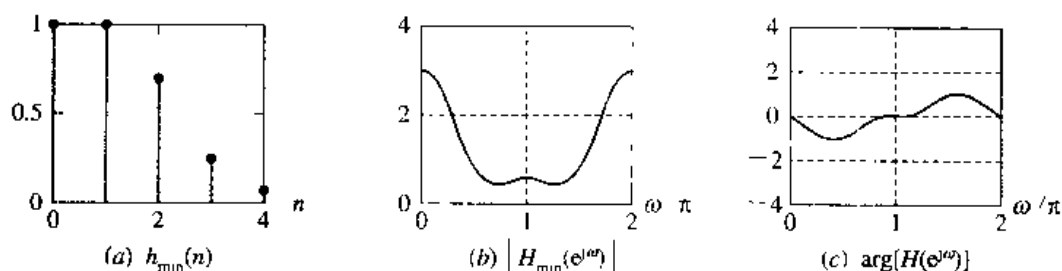


图 8.8 最小相位 FIR 滤波器的时域、频域特性

(2) 因为线性相位 FIR 滤波器的 $h(n)$ 关于 $n = \frac{N-1}{2}$ 点实偶对称, 反映在零点分布上, 要求零点共轭反演对称。所以, 所乘的全通系统函数 $H_{ap}(z)$ 应当将原 $H_{min}(z)$ 的两个零点反射到其共轭反演对称位置, 即将 z_k 变成 $(z_k^*)^{-1}$, 所以

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{j\theta}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{-j\theta}z^{-1}}$$

这一全通系统函数消去 $H_{min}(z)$ 中的零点 $re^{j\theta}$ 和 $re^{-j\theta}$, 而引入其共轭反演对称零点 $r^{-1}e^{j\theta}$ 和 $r^{-1}e^{-j\theta}$:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{min}(z)H_{ap}(z) \\ &= (1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})(z^{-1} - re^{j\theta})(z^{-1} - re^{-j\theta}) \\ &= r^2(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{-j\theta}z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{IZT}[H(z)] \\ &= 0.25(\delta(n) + 2.5\delta(n-1) + 5.25\delta(n-2) + 2.5\delta(n-3) + \delta(n-4)) \end{aligned}$$

$h(n)$ 、 $|H(e^{jw})|$ 和 $\arg[H(e^{jw})]$ 曲线图如图 8.9(a)、(b) 和 (c) 所示。

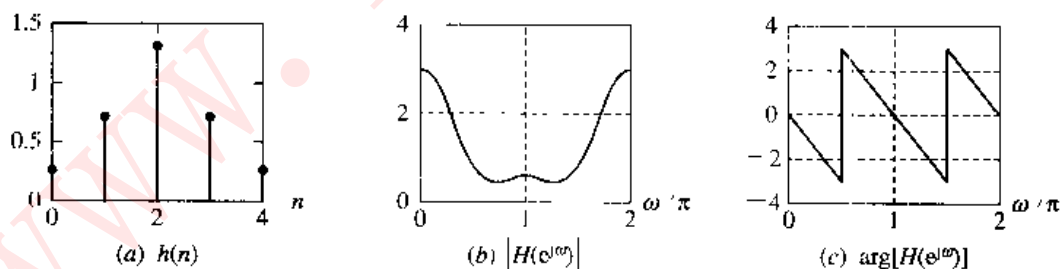


图 8.9 线性相位 FIR 滤波器特性

(3) 要将 $H_{min}(z)$ 的所有零点反射到单位圆外的共轭反演位置, 所乘全通系统函数应为

$$\begin{aligned} H_{ap}(z) &= \frac{(z^{-1} - re^{j\theta})(z^{-1} - re^{-j\theta})}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} \\ H_{max}(z) &= H_{min}(z)H_{ap}(z) = (z^{-1} - re^{j\theta})(z^{-1} - re^{-j\theta}) \\ &= r^4(1 - r^{-1}e^{j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{-j\theta}z^{-1}) \end{aligned}$$

观察 $H_{max}(z)$ 与 $H_{min}(z)$ 的表达式, 可以得到二者的关系式:

$$H_{\max}(z) = (z^{-1} - re^{j\theta})(z^{-1} - re^{-j\theta})^2 = z^{-4}(1 - re^{j\theta}z)(1 - re^{-j\theta}z)^2 \\ = z^{-4}H_{\min}(z^{-1})$$

可以证明, 对于 $h(n)$ 长度为 N , 且 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的 FIR 滤波器集中, 最大相位系统 $H_{\max}(z)$ 与最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 满足关系式:

$$H_{\max}(z) = z^{-(N-1)}H_{\min}(z^{-1}), \quad h_{\max}(n) = h_{\min}(N-1-n)$$

其证明留作练习题。对本题, 最大相位系统单位脉冲响应为

$$h_{\max}(n) = h_{\min}(4-n) \\ = 0.0625\delta(n) + 0.25\delta(n-1) + 0.75\delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$$

$h_{\max}(n)$ 、 $|H_{\max}(e^{j\omega})|$ 和 $\arg[H_{\max}(e^{j\omega})]$ 分别如图 8.10(a)、(b) 和 (c) 所示。

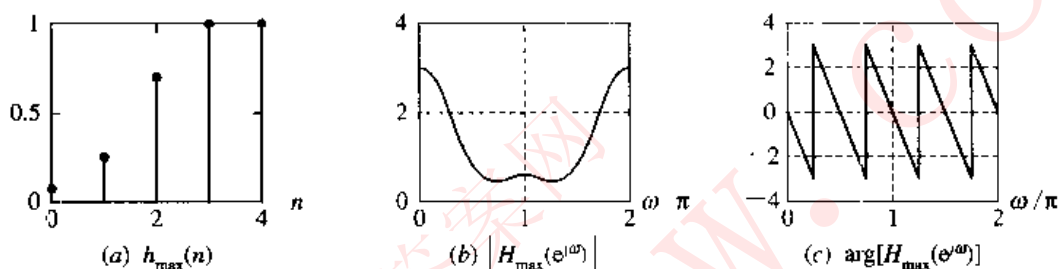


图 8.10 最大相位 FIR 滤波器特性

(4) 由于 $H(z)$ 和 $H_{\max}(z)$ 是由 $H_{\min}(z)$ 与两个全通系统函数相乘所得, 所以

$$|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| = |H_{\max}(e^{j\omega})|$$

由 $\arg[H_{\min}(e^{j\omega})]$ 、 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 和 $\arg[H_{\max}(e^{j\omega})]$ 曲线可见, 最小相位 FIR 滤波器相位滞后最小, $h_{\min}(n)$ 延时最小, 但不是线性相位; 最大相位系统相位滞后最大(相位曲线斜率大, 即群延时大), $h_{\max}(n)$ 延时最大, 它是 $h_{\min}(n)$ 在时间轴上的倒置序列; 线性相位 FIR 滤波器的相位滞后和 $h(n)$ 的延时均介于前述二者之间, 且 $h(n) = h(N-1-n)$, 即 $h(n)$ 关于 $n = (N-1)/2$ 偶对称, 相当于延时为 $(N-1)/2$ 。

下面给出用 MATLAB 语言信号处理工具箱函数求解该题的程序清单, 以帮助读者熟悉这些函数的功能与用法, 以便于今后学习与工作。

在本题中, 已知 $H(z)$ 的零点, 要计算逆 Z 变换得到 $h(n)$, 计算并图示 $H(z)$ 的幅频特性函数 $|H(e^{j\omega})|$ 和相频特性函数 $\arg[H(e^{j\omega})]$, MATLAB 信号处理工具箱函数 poly、freqz 和绘图函数 plot、stem 就可实现上述计算与绘图要求。

计算并绘制图 8.8、图 8.9 和图 8.10 的程序清单如下:

```
hmin=[1 1 0.75 0.25 0.0625];
Hmin=fft(hmin, 256);
hm=abs(Hmin); phy=angle(Hmin);
n=0:length(hmin)-1;
w=0:255; w=2 * w/256;
subplot(3,3,1); stem(n, hmin, ' '); title('(a) hmin(n)')
subplot(3,3,4); plot(w, hm); grid; title('(b)')
subplot(3,3,7); plot(w, phy); grid; axis([0, 2, -4, 4]); title('(c)')
```

```
%linea phase
h=[1 2.5 5.25 2.5 1]*0.25;
H=fft(h,256)
hm=abs(H); phy=angle(H);
subplot(3,3,2); stem(n,h,'. '); title('(a) hlinea(n)')
subplot(3,3,5); plot(w,hm); grid; title('(b)')
subplot(3,3,8); plot(w,phy); grid; axis([0,2,-4,4]); title('(c)')

%max phase
h=[0.0625 0.25 0.75 1 1]
H=fft(h,256)
hm=abs(H); phy=angle(H);
subplot(3,3,3); stem(n,h,'. '); title('(a) hmax(n)')
subplot(3,3,6); plot(w,hm); grid; title('(b)')
subplot(3,3,9); plot(w,phy); grid; axis([0,2,-4,4]); title('(c)')
```

8.1.4 格型滤波网络的求法

从教材所述,由直接型结构(即 FIR 系统 $H(z)$ 的 z^{-1} 的多项式,或全极点 IIR 系统 $H(z)$ 的分母多项式系数)求格型结构的参数(k_1, k_2, \dots)是比较麻烦的。当然,实际工作中一般不用手算递推求解,而是用现代信号处理程序求解。下面介绍实现直接型结构与格型结构之间转换的 MATLAB 函数。

对 N 阶 FIR 滤波器,其系统函数的一般形式为

$$H(z) = A(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)z^{-i} \quad (8.3)$$

$H(z)$ 的直接型结构如图 8.11 所示,其格型结构如图 8.12 所示。

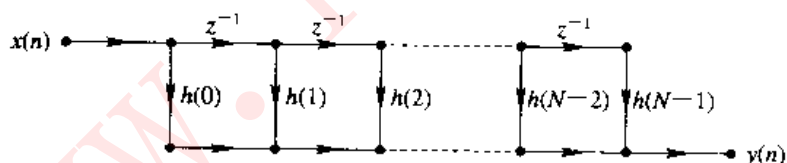


图 8.11 FIR 滤波器直接型结构流图($H(z)$ 为(8.3)式)

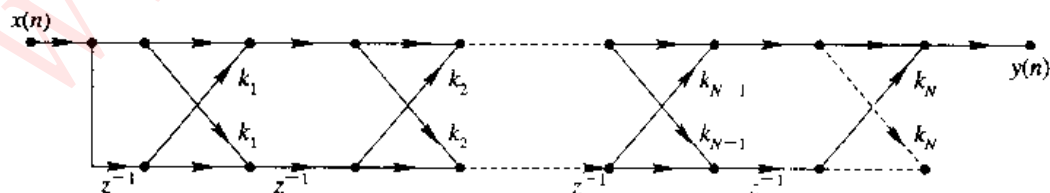


图 8.12 图 8.11 相应的格型网络结构

对全极点 N 阶 IIR 滤波器,其系统函数的一般形式为

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (8.4)$$

其直接型结构和格型结构流图分别如图 8.13 和图 8.14 所示。

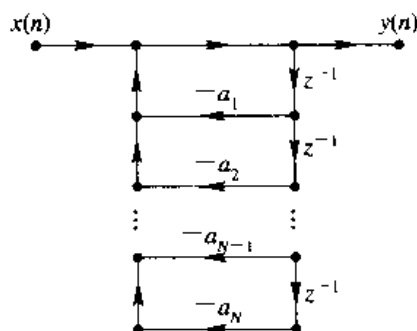


图 8.13 N 阶全极点 IIR 滤波器的直接型结构流图($H(z)$ 为(8.4)式)

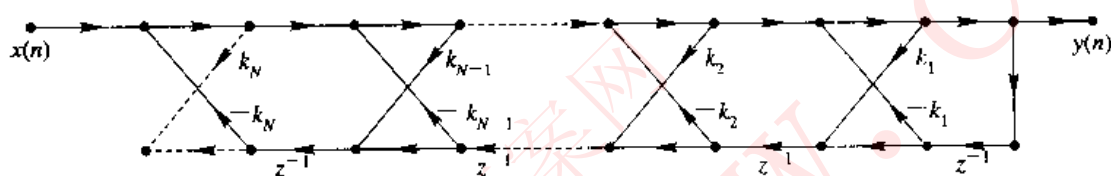


图 8.14 图 8.13 相应的格型网络结构

在 MATLAB 的线性系统变换函数中, poly2rc 用于从多项式系数 $\{a_i, i=0, 1, \dots, N\}$ 求格型网络结构参数(反射系数) $\{k_i, i=1, 2, \dots, N\}$; rc2poly 用于从反射系数求多项式系数。用 a 表示多项式系数行矢量, 用 k 表示相应格型网络结构的反射系数行矢量, 即

$$a = [1, a_1, a_2, \dots, a_N]$$

$$k = [k_1, k_2, \dots, k_N]$$

则 a 与 k 的转换计算的 MATLAB 语句为:

$$k = \text{poly2rc}(a) \quad \% a \text{ 为实数矢量}$$

$$a = \text{rc2poly}(k) \quad \% k \text{ 为实数矢量}$$

其中, a 必须为实数矢量, 且 $a(1) \neq 0$ 。

例 8.4 已知滤波器系统函数为

$$H(z) = 1 - 1.7z^{-1} + 1.53z^{-2} - 0.648z^{-3}$$

计算 $H(z)$ 的格型网络结构反射系数, 并画出格型网络结构。

解 计算反射系数的程序 Example 8.4 及其运行结果如下, 格型网络结构如图 8.15 所示。

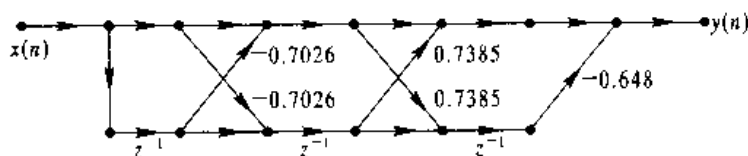


图 8.15 例 8.4 中所求格型结构

```
%Example 8.4
a=[1 -1.7 1.53 -0.648];
k=poly2kc(a)
k=
-0.7026 +0.7385 -0.648
```

例 8.5 已知 IIR 滤波器系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}}$$

计算滤波器格型结构的反射系数,并画出格型网络结构信号流图。

解 如教材中所述,系数相同的全零点(FIR)格型网络结构与全极点(IIR)格型网络结构的系统函数互为倒数关系。所以,可用求全零点格型网络反射系数的方法求全极点格型网络结构的参数。本题中

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}} = \frac{1}{A(z)}$$

$A(z)$ 多项式的系数行矢量为

$$a = [1 \quad -0.98 \quad 0.9 \quad -0.898]$$

用行矢量 k 表示格型网络结构的参数,计算 k 的程序为 Example 8.5,运行结果在程序之后。

```
%Example 8.5
a=[1 -0.98 0.9 -0.898];
k=poly2rc(a)
k=
-0.8045 0.1031 -0.8980
```

$H(z)$ 的格型网络结构信号流图如图 8.16 所示。

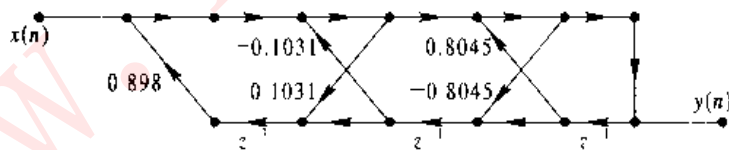


图 8.16 全极点三阶格型网络结构

函数 poly2rc 另一个重要的用途是判断 $A(z)$ 的根是否位于单位圆内,只要 $|k_i| < 1$,则 $A(z)$ 的根位于单位圆内, IIR 系统稳定。

如果 $H(z)$ 是以极点形式给出,即

$$H(z) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}$$

首先调用变换零极点增益形式为分子、分母多项式形式的函数 zp2tf, 求出 $H(z)$ 的分母多项式系数矢量 a , 再调用 poly2rc 函数即可得到 $H(z)$ 的格型结构参数矢量 k 。zp2tf 的调用格式为

$$[b, a] = \text{zp2tf}(z, p, k)$$

其中, 矢量 z 由 $H(z)$ 的零点组成, 矢量 p 由极点组成, 对全极点系统 $z=0$, k 为空矢量, $b=1$ 。更详细的说明参阅 MATLAB Help。

8.1.5 简单整系数数字滤波器的设计思想和设计方法

简单整系数数字滤波器的设计思想就是主要考虑滤波器的实时性和实现简单。而对幅频特性要求较低。教材上所介绍的两种简单整系数滤波器设计方法, 在概念上和设计方法上也有较大差异。

1. 建立在多项式拟合基础上的简单整系数滤波器

要理解这种滤波器设计思想, 主要应理解: 在信号与干扰所在的频带相距很远时, 可用滤波特性较差的低通滤波器分离两种信号。用多项式拟合 $x(n)$ 的滤波因子(或称之为模板) $h(n)$ 正好具有低通滤波特性, 其主要优点是滤波器系数 ($h(n)$) 为整数, 易实现, 计算量少, 处理速度快。最大的缺点是阻带衰减特性较差。所以建立在多项式拟合基础上的简单整系数滤波器用于要求高速实时处理, 但对滤波特性要求不高的实际信号处理系统。这种滤波器的设计公式及设计方法比较简单, 教材中已有详细叙述, 且例题和习题解答对几种常用的滤波器的设计过程作了较详细的介绍, 在此不再重复。

2. 建立在极—零点对消基础上的简单整系数滤波器设计思想及设计方法

该方法是基于系统的幅频响应特性 $|H(e^{j\omega})|$ 与系统函数 $H(z)$ 的零、极点的关系。如果在单位圆上均匀分布 N 个零点, 则具有梳状滤波特性。第 k 个零点 ($z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$) 对应的频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 。在第 k 个零点处设置一个极点 $p_k = z_k$ 来对消零点 z_k , 则可得到系统函数:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - p_k z^{-1}}$$

则 $|H(e^{j\omega})|$ 具有以 ω_k 为通带中心的带通滤波特性。这就是极—零点对消设计法的基本思想。

关键问题: 为了使滤波器只有整实系数, 对消复数零点时, 要同时取一对复共轭极点 $p_k = z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 和 $p_k^* = z_k^*$, 对消一对复共轭零点, 得到:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{(1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - 2 \cos \frac{2\pi}{N}k |z^{-1} + z^{-2}}$$

要求 $\cos \left\{ \frac{2\pi}{N}k \right\}$ 的值为 1, 0, -1, 即要求 $\frac{2\pi}{N}k$ 只能取 $\pi/3$ 、 $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ 。所以极—零点对消法设计的带通滤波器的通带中心频率必受到如上限制, 不能任意精确选取。而且滤波器通带不平坦, 阻带衰减特性很差。其优点是只有整数系数, 结构简单、处理速度快。只适用于要求实时处理, 但对滤波特性要求低的场合。学习本节时, 主要建立这些正确的概念。具体设计过程见教材和后面的习题解答。

8.1.6 采样率转换滤波器

这部分内容教材上写得较详细, 本书不再重复。

8.2 教材第八章习题解答

1. 最小相位系统的一个重要性质是最小能量延迟特性。(8.1.13)式描述了该特性。该性质的证明思想如下:

令 $h_{\min}(n)$ 是系统函数为 $H_{\min}(z)$ 的最小相位系统的单位脉冲响应, 且令 z_k 为 $H_{\min}(z)$ 的一个零点, 因此可以将 $H_{\min}(z)$ 表示为

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}), \quad |z_k| < 1$$

式中 $Q(z)$ 也是最小相位的。现在研究另一个因果稳定系统 $H(z)$, 其幅频特性满足

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

且 $H(z)$ 有一个零点为 $(z_k^*)^{-1}$ 。并令 $h(n) = \text{IZT}[H(z)]$ 。

(1) 试用 $Q(z)$ 表示 $H(z)$ 。

(2) 试用 $q(n) = \text{IZT}[Q(z)]$ 表示 $h(n)$ 和 $h_{\min}(n)$ 。

(3) 比较两个序列的能量分布, 证明

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 - \sum_{n=0}^m |h(n)|^2 = (1 - |z_k|^2) |q(n)|^2$$

(4) 利用(3)的结果, 证明(8.1.13)式:

$$\sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \geq \sum_{n=0}^m |h(n)|^2, \quad \text{对所有整数 } m$$

解

(1) 为了使 $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$, 又满足 $H(z)$ 有一个零点 $(z_k^*)^{-1}$, 则

$$H(z) = H_{\min}(z) \frac{(z^{-1} - z_k^*)}{1 - z_k z^{-1}}$$

因为 $H(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1})$, 所以

$$H(z) = Q(z)(z^{-1} - z_k^*)$$

式中

$$Q(z) = \text{ZT}[q(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) z^{-n}$$

(2) 由(1)的结果可得

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = Q(z)(z^{-1} - z_k^*) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [q(n) z^{-n-1} - z_k^* q(n) z^{-n}] \\ &= -z_k^* q(0) - \sum_{n=1}^{\infty} [q(n-1) - z_k^* q(n)] z^{-n} \end{aligned}$$

因为 $Q(z)$ 为最小相位的, 所以 $q(n)$ 为因果稳定的, $q(-1) = 0$, 因此

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [q(n-1) - z_k^* q(n)] z^{-n}$$

比较 $H(z)$ 中 z^{-n} 的系数可知

$$h(n) = q(n-1) - z_k^* q(n)$$

同样道理

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{\min}(n) z^{-n} = Q(z)(1 - z_k z^{-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [q(n) z^{-n} - z_k q(n) z^{-(n+1)}] \\ &= q(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [q(n) - z_k q(n-1)] z^{-n} \end{aligned}$$

因为 $q(-1)=0$, 所以上式写成

$$H_{\min}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [q(n) - z_k q(n-1)] z^{-n}$$

故

$$h_{\min}(n) = q(n) - z_k q(n-1)$$

(3) 利用(2)的结果, 可以写出

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 &= \sum_{n=0}^m |q(n) - z_k q(n-1)|^2 \\ &= \sum_{n=0}^m (q(n) - z_k q(n-1))(q^*(n) - z_k^* q^*(n-1)) \\ &= \sum_{n=0}^m [|q(n)|^2 - |z_k|^2 |q(n-1)|^2 \\ &\quad - q(n) z_k^* q^*(n-1) - q^*(n) z_k q(n-1)] \\ \sum_{n=0}^m |h(n)|^2 &= \sum_{n=0}^m [|q(n-1)|^2 + |z_k|^2 |q(n)|^2 \\ &\quad - q(n-1) z_k q^*(n) - q^*(n-1) z_k^* q(n)] \end{aligned}$$

注意到 $Q(z)$ 为最小相位系统, 必然为因果稳定系统, $q(-1)=0$, 而且

$$\sum_{n=0}^m |q(n)|^2 = \sum_{n=0}^m |q(n-1)|^2 + |q(m)|^2$$

所以

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 - \sum_{n=0}^m |h(n)|^2 \\ &= \sum_{n=0}^m (1 - |z_k|^2) |q(n)|^2 - \sum_{n=0}^m (1 - |z_k|^2) |q(n-1)|^2 \\ &= (1 - |z_k|^2) \left[\sum_{n=0}^m |q(n-1)|^2 + |q(m)|^2 - \sum_{n=0}^m |q(n-1)|^2 \right] \\ &= (1 - |z_k|^2) |q(m)|^2 \end{aligned}$$

(4) 由(3)中所得结果, 以及 $|z_k| < 1$ 可知

$$\epsilon = (1 - |z_k|^2) |q(m)|^2 \geq 0$$

其中, 当 $q(m)=0$ 时, 等号成立, 即

$$\sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 - \sum_{n=0}^m |h(n)|^2 \geq 0$$

故

$$\sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \geq \sum_{n=0}^m |h(n)|^2, \quad \text{对所有 } m$$

由于 $|H_{\min}(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$, 根据 Parseval 定理,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_{\min}(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2, \quad m \rightarrow \infty \text{ 时}$$

这就是说, $h_{\min}(n)$ 与 $h(n)$ 具有相同的总能量, 所以

$$\sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \geq \sum_{n=0}^m |h(n)|^2$$

说明 $h_{\min}(n)$ 的能量集中在 n 较小的时段, 即所谓能量延迟最小。

2. 试推导公式(8.2.9)和(8.2.10)。

解 重写(8.2.3a)式如下:

$$B_m(z) = \frac{E_m(z)}{E_0(z)} = 1 + \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i}, \quad m = 1 \sim M$$

则

$$B_{m-1}(z) = \frac{E_{m-1}(z)}{E_0(z)} = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-1}^{(i)} z^{-i} \quad (1)$$

重写(8.2.3a)式

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-m} B_{m-1}(z^{-1})$$

将上面 $B_m(z)$ 及 $B_{m-1}(z)$ 表示式代入(8.2.8a), 得到

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i} &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-1}^{(i)} z^{-i} + k_m z^{-m} \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-1}^{(i)} z^{+i} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-1}^{(i)} z^{-i} + k_m z^{-m} + \sum_{i=1}^{m-1} k_m b_{m-1}^{(i)} z^{-(m-i)} \end{aligned}$$

令 $m-i=k$, 则

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i} &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-1}^{(i)} z^{-i} + \sum_{k=m-1}^1 k_m b_{m-1}^{(m-k)} z^{-k} + k_m z^{-m} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} (b_{m-1}^{(i)} + k_m b_{m-1}^{(m-i)}) z^{-i} + k_m z^{-m} \end{aligned}$$

比较两边 z^{-i} 的系数, 即可得出如下关系式:

$$\begin{aligned} b_m^{(m)} &= k_m \\ b_m^{(i)} &= b_{m-1}^{(i)} + k_m b_{m-1}^{(m-i)} \end{aligned}$$

此正是(8.2.9)式。

下面推导(8.2.10)式。重新写出(8.2.8b)式:

$$B_{m-1}(z) = \frac{B_m(z) - k_m z^{-m} B_m(z^{-1})}{1 - k_m^2}$$

将(8.2.3a)及①式代入(8.2.8b)式, 得到

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-i}^{(i)} z^{-i} &= \frac{1 + \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i} - k_m z^{-m} | 1 - \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i} |}{1 - k_m^2} \\
 &= \frac{1}{1 - k_m^2} \left[1 + \sum_{i=1}^m b_m^{(i)} z^{-i} - k_m z^{-m} - \sum_{i=1}^m k_m b_m^{(i)} z^{-m-i} \right] \\
 &= \frac{1}{1 - k_m^2} \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_m^{(i)} z^{-i} - b_m^{(m)} z^{-m} - k_m z^{-m} - \sum_{k=m-1}^1 k_m b_m^{(m-k)} z^{-k} - k_m b_m^{(m)} z^0 \right]
 \end{aligned}$$

比较左右两边 $z^{-i} (i=1 \sim m)$ 的系数, 因为左边无 z^{-m} 项, 所以右边该项应为零, 即

$$b_m^{(m)} z^{-m} - k_m z^{-m} = (b_m^{(m)} - k_m) z^{-m}$$

中系数

$$b_m^{(m)} - k_m = 0$$

即

$$k_m = b_m^{(m)} \quad (2)$$

$$k_m b_m^{(m)} z^{-i} = k_m \cdot k_m = k_m^2$$

所以,

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{m-i}^{(i)} z^{-i} &= \frac{1}{1 - k_m^2} \left[1 - k_m^2 + \sum_{i=1}^{m-1} (b_m^{(i)} - k_m b_m^{(m-i)}) z^{-i} \right] \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{b_m^{(i)} - k_m b_m^{(m-i)}}{1 - k_m^2} z^{-i}
 \end{aligned}$$

比较上式两边 z^{-i} 的系数, 容易得到

$$b_m^{(i)} = \frac{b_m^{(i)} - k_m b_m^{(m-i)}}{1 - k_m^2} \quad (3)$$

②、③式联立即是(8.2.10)式:

$$k_m = b_m^{(m)}$$

$$b_m^{(i)} = \frac{b_m^{(i)} - k_m b_m^{(m-i)}}{1 - k_m^2}$$

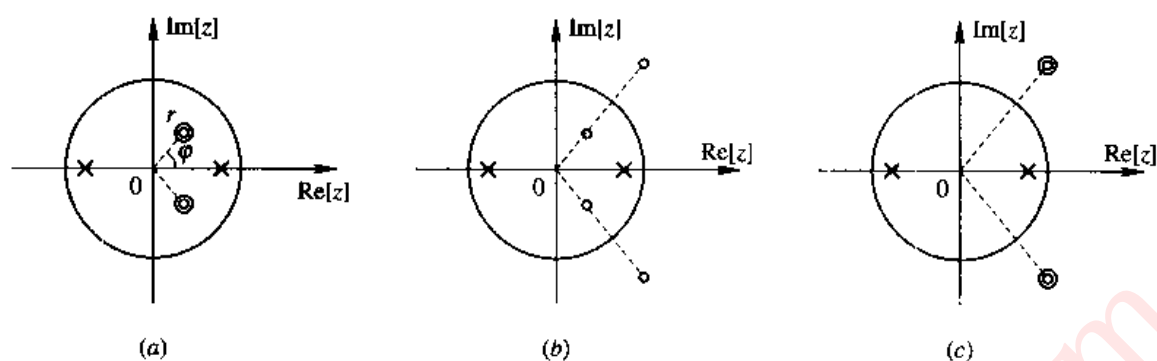
3. 给定三个因果稳定系统 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 的零点、极点分布分别如题 3 图示。三个系统的极点相同, $p_1 = -0.9$, $p_2 = 0.9$ 。由图可见, $H_1(z)$ 为最小相位系统, $H_2(z)$ 为混合相位系统, $H_3(z)$ 为最大相位系统。设图中 $r = 0.5$, $\varphi = \pi/3$ 。试分别写出系统函数 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 的表达式, 并绘制其幅频特性、相频特性曲线、单位脉冲响应 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 和 $h_3(n)$ 的波形图以及相应的积累能量曲线。由此验证最小相位系统的性质。

解 最小相位系统 $H_1(z)$ 表达式为

$$H_1(z) = \frac{(1 - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1})^2 (1 - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1})^2}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

为了保证三种系统的幅频特性相同, 写 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 表达式时, 要设置一常数因子,

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= c_2 \frac{(1 - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1})(1 - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1})(1 - 2e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1})(1 - 2e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1})}{1 - 0.81z^{-2}} \\
 &= 4c_2 \frac{(1 - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1})(1 - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1})(0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})(0.5e^{j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})}{1 - 0.81z^{-2}}
 \end{aligned}$$



题 3 图

(a) 系统 1 的极、零点图; (b) 系统 2 的极、零点图; (c) 系统 3 的极、零点图

为了保证 $|H_2(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$, 取 $z=1$ (即 $\omega=0$) 时解出 $c_2 = \frac{1}{4}$, 所以,

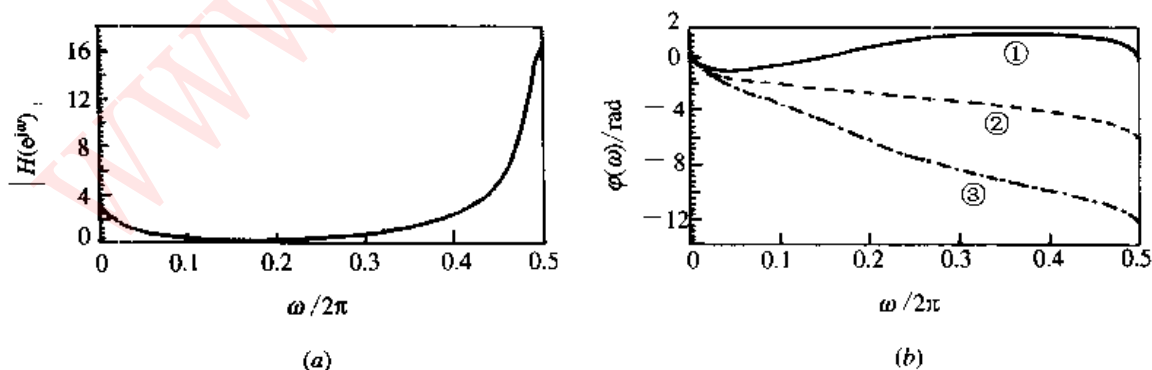
$$H_2(z) = \frac{(1 - 0.5e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 - 0.5e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})(0.5e^{j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})}{1 - 0.81z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} H_3(z) &= c_3 \frac{(1 - 2e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})^2(1 - 2e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})^2}{1 - 0.81z^{-2}} \\ &= 4c_3 \frac{(0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})^2(0.5e^{j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})^2}{1 - 0.81z^{-2}} \end{aligned}$$

由 $|H_3(e^{j0})| = |H_1(e^{j0})|$ 解出 $c_3 = \frac{1}{4}$, 所以,

$$H_3(z) = \frac{(0.5e^{-j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})^2(0.5e^{j\frac{\pi}{3}} - z^{-1})^2}{1 - 0.81z^{-2}}$$

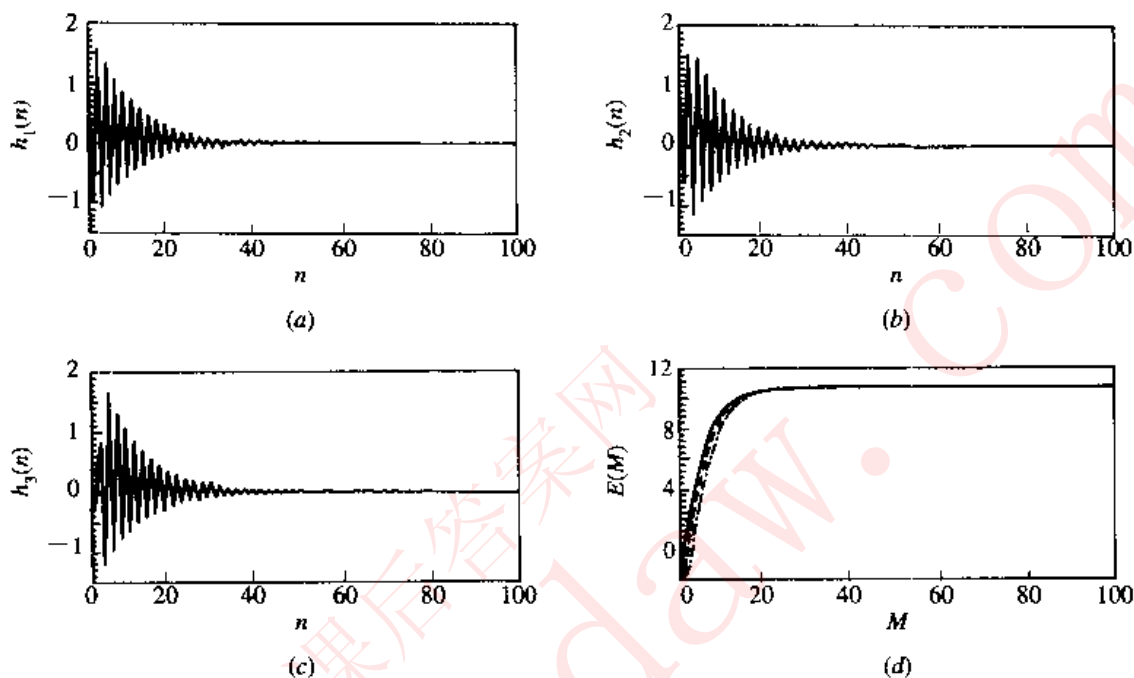
调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 freqz, 绘制出 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 的幅频特性如题 3 解图(一)(a)所示, 其相频特性曲线如题 3 解图(一)(b)①、②和③所示。



题 3 解图(一)

由图可见, $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 的幅频响应相同, 而 $H_1(z)$ 相位延迟最小, $H_2(z)$ 次之, 最大相位系统 $H_3(z)$ 的相位延迟最大。

题 3 解图(二)(a)、(b)、(c)分别给出了这三个系统的单位脉冲响应 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 和 $h_3(n)$ 。由图可见, 最小相位系统单位脉冲响应 $h_1(n)$ 延时最小。题 3 解图(二)(d)给出了三个系统的积累能量曲线, 实线表示 $\sum_{n=0}^m |h_1(n)|^2$, 即 $h_1(n)$ 能量延迟最小。虚线和点画线分别表示 $h_2(n)$ 和 $h_3(n)$ 的积累能量曲线。



题 3 解图(二)

4. 试设计一个梳状滤波器, 用于滤除心电图采集信号中的 50 Hz 电源及其谐波干扰。心电图信号采样频率为 200 Hz。

解 梳状滤波器系统函数的一般形式为

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - az^{-N}}$$

其零点为 $z_k = e^{j\frac{2\pi k}{N}}$, $k=0, 1, \dots, N-1$

极点为 $p_k = (a)^{\frac{1}{N}} e^{j\frac{2\pi k}{N}}$, $k=0, 1, \dots, N-1$

由此可见, 梳状滤波器系统函数 $H(z)$ 只有两个未知参数 N 和 a 。所以设计梳状滤波器, 就是根据要滤除的频点确定 N 值。

由题意知道, 要滤除的频点为

$$f_m = 50m \text{ Hz}, \quad m = 1, 2, \dots$$

相应的数字频点为

$$\omega_m = 2\pi f_m T = 100\pi m \frac{1}{200} = \frac{\pi}{2} m$$

根据梳状滤波器原理, ω_m 应为 $H(z)$ 的零点频率, 所以

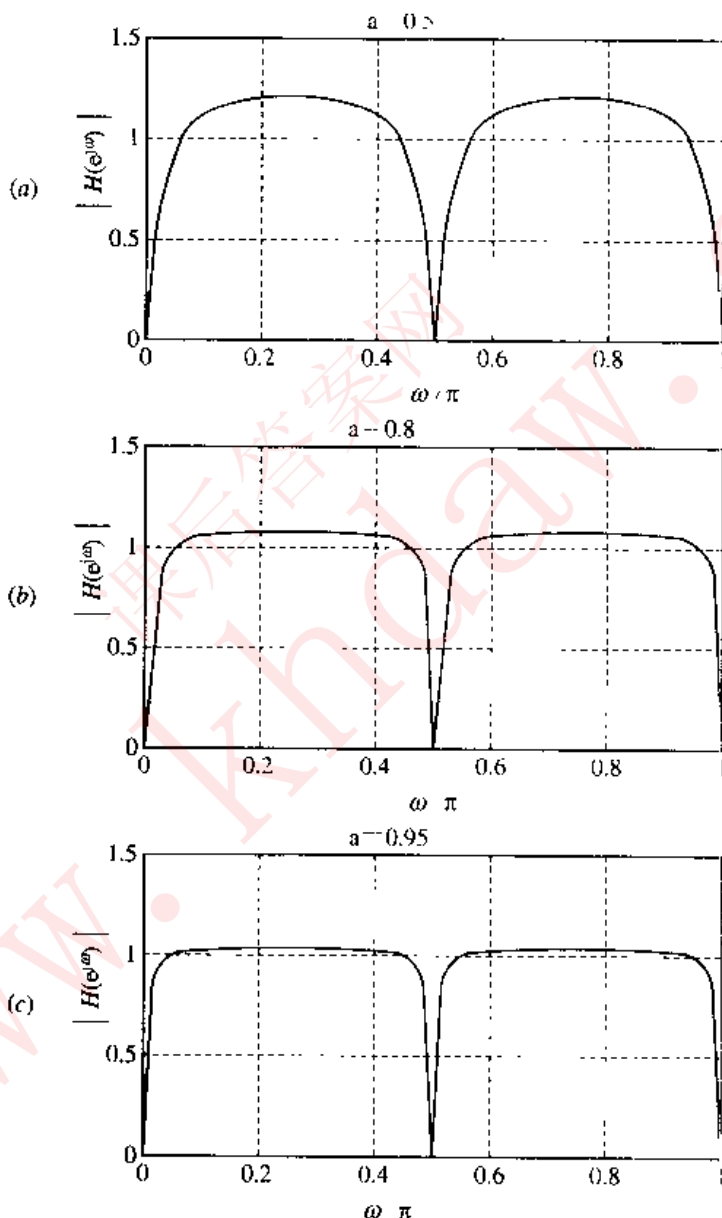
$$\omega_m = \frac{\pi}{2} m = \frac{2\pi}{N} m$$

$$N = 4$$

所设计梳状滤波器系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

其中 a 的值决定极点的模值 $|p_k| = (a)^{\frac{1}{2}}$, a 值越接近 1, 极点 p_k 越靠近单位圆, 梳状滤波器通带越平坦, 过渡带越窄。但是, a 的最大值还与系数量化字长有关。题 4 解图(a)、(b)、(c)分别给出 $a=0.5$ 、 $a=0.8$ 和 $a=0.95$ 时的幅频特性。



题 4 解图

5. 用多项式拟合法设计一简单整系数低通数字滤波器, 希望 $M=4$, $p=3$, 即九点三次拟合。试推导该滤波器的滤波因子(即单位脉冲响应 $h(n)$), 计算并给出其频响特性。

解 当 $M=4$, $p=3$ 时, 根据(8.3.4)式, 并考虑当 $k-r$ 为奇数时, $s_{k-r}=0$, 有

$$a_0 s_0 + a_2 s_2 = F_1 \quad \textcircled{1}$$

$$a_1 s_1 + a_3 s_3 = F_1 \quad \textcircled{2}$$

$$a_1 s_2 + a_2 s_4 = F_2 \quad (3)$$

$$a_1 s_4 + a_2 s_6 = F_3 \quad (4)$$

①、③式只有待求因子 a_0 和系数 a_2 ，所以选取①、③式构成联立方程，可解出 a_0 为

$$a_0 = \frac{s_4 F_1 - F_2 s_2}{s_0 s_4 - s_2^2}$$

其中 $s_0 = \sum_{i=-4}^4 i^0 = 9, \quad s_2 = \sum_{i=-4}^4 i^2 = 60, \quad s_4 = \sum_{i=-4}^4 i^4 = 708,$

$$F_0 = \sum_{i=-4}^4 x(i), \quad F_2 = \sum_{i=-4}^4 x(i) i^2$$

将 s_0, s_2, s_4, F_0 和 F_2 代入 a_0 表达式中，得出

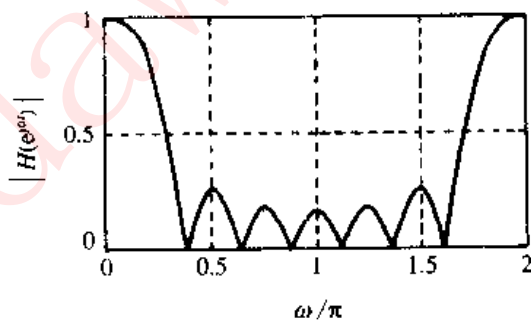
$$a_0 = [-252x(-4) + 168x(-3) - 468x(-2) + 648x(-1) + 708x(0) + 648x(1) - 468x(2) + 168x(3) - 252x(4)] / 2772$$

$$h(n) = \{-63, 41, 117, 162, 177, 162, 117, 41, -63\} \frac{1}{693}$$

可见，当 M, p 较大时， $h(n)$ 值也较大，但均为整数，较易用硬件实现。

运行如下 MATLAB 程序，绘制出 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如题 5 解图所示。

```
%program for problem5
h=[-63 41 117 162 177 162 117 41 -63];
h=h./693;
H=fft(h,2048);
k=0:2047;
f=2*k/2048;
plot(n,abs(H))
xlabel('w/π');
ylabel('magnituele Response')
```



题 5 解图

6. 给定 $\alpha_p = 3$ dB, $\alpha_s = 35$ dB, $f_p = 50$ Hz, 采样频率 $F_s = 1000$ Hz, 试用极、零点对消法设计一简单整系数低通数字滤波器，求系统函数，并画出幅频特性。

解 由于要求设计低通滤波器，所以

$$H(z) = \left| \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right|^k$$

幅频响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^k$$

由上式可见，只要确定两个参数 N 和 k ，即完成设计工作。

通带边界频率为： $f_p = 50$ Hz, $\alpha_p = 3$ dB, 相应的数字滤波器 3 dB 通带边界频率为

$$\omega_p = 2\pi f_p T = 2\pi \times 50 \frac{1}{1000} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}, \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

阻带中对应 $\alpha_s = 40$ dB 的频点 ω_s 应根据图 8.3.2(b) 确定。 $|H(e^{j\omega})|$ 的第一个零点为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ ，相邻零点间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ ，而且第一个旁瓣最大，其峰值点频率约为 $\frac{3\pi}{N}$ ，因此， $\omega_s = \frac{3\pi}{N}$

比较合理，即

$$\omega_1 = \frac{3\pi}{N}, \quad \alpha_1 = 40 \text{ dB}$$

下面根据以上分析所得已知参数列方程, 求解得出 N 和 k 。

(1) 确定 k 值。因为函数

$$\left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

的旁瓣峰值(即第一个最大的旁瓣最大值)相对主瓣 $H(e^j0)$ 衰减 13 dB, 所以,

$$|H(e^{j\omega_1})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^{-k}$$

的旁瓣峰值衰减应为 $13k$ dB。根据本题要求, 应满足

$$\alpha_1 = 40 \text{ dB} = 20 \lg \left| \frac{H(e^{j0})}{H(e^{j\omega_1})} \right| = 13k$$

解之得, $k=3.077$ 。为了兼顾性能指标与系统复杂性, 取 $k=3$ 。这时 $\alpha_1=39$ dB, 基本满足要求(但如果取 $k=4$, 则 $\alpha_1=42$ dB, 超出 2 dB, 系统多一级 N 阶 FIR 滤波器, 较复杂)。

(2) 确定 N 值。 $|H(e^{j\omega})|$ 的主瓣宽度为 $\frac{4\pi}{N}$, 对固定频率 ω_p , $|H(e^{j\omega_p})|$ 相对 $|H(e^{j0})|$ 的衰减与取决于 N 值。本题应满足

$$\begin{aligned} \alpha_p = 3 \text{ dB} &= 20 \lg \left| \frac{H(e^{j0})}{H(e^{j\omega_p})} \right| = 20 \lg \left[\frac{N^k}{\left| \frac{\sin(\omega_p N/2)}{\sin(\omega_p/2)} \right|^k} \right] \\ &= 20 \lg \left| \frac{N \sin(\omega_p/2)}{\sin(\omega_p N/2)} \right|^{-k} \end{aligned}$$

如上方程不易求解, 可进行近似线性化, 以便求解。

当 ω_p 很小时, $\sin \frac{\omega_p}{2} \approx \frac{\omega_p}{2}$, 并令 $\frac{N\omega_p}{2} = x$, 则

$$\alpha_p = 20k \lg \left| \frac{x}{\sin x} \right| = -20k \lg \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

因为 $\omega_p = \frac{\pi}{10}$ 处 $\frac{\sin x}{x}$ 为正值, 所以

$$\alpha_p = -20k \lg \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

即

$$\frac{\sin x}{x} = 10^{-\alpha_p / 20k}$$

将 $\frac{\sin x}{x}$ 展开成台劳级数:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

仅取前面两项近似

$$1 - \frac{x^2}{3!} \approx 10^{-\alpha_p / 20k}$$

代入 $\alpha_p = 3 \text{ dB}$, $k=3$, 解出

$$x = \sqrt{6(1 - 10^{-3.60})} = 0.8078 = \frac{\omega_p N}{2}$$

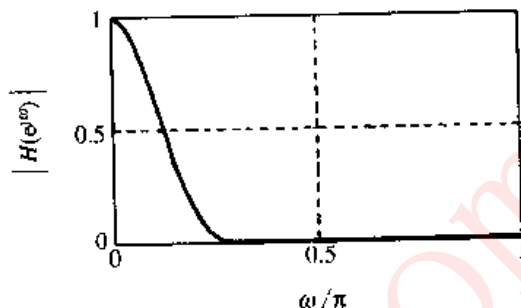
$$N = \frac{2x}{\omega_p} = \frac{2 \times 0.8078}{0.1\pi} = 5.14$$

取 $N=6$, 所设计滤波器系统函数为

$$H(z) = \left(\frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}} \right)^3$$

因为 $H(e^{j0}) = 216$, 所以使 $H(e^{j\omega})$ 归一化的系统函数

$$H(z) = \frac{\left(\frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}} \right)^3}{216}$$



题 6 解图

其幅频特性曲线如题 6 解图所示。

应当注意, 为了调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 freqz, 要将 $H(z)$ 写成有理分式, 求出分母、分子多项式系数矢量 a 、 b 。

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-6})^3}{(1 - z^{-1})^3} = \frac{1 - 3z^{-6} + 3z^{-12} - z^{-18}}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}}$$

7. 全通系统函数为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < 1$$

试证明 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时, $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$ 。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad H(e^{j\omega}) &= H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{-j\omega} \\ |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \right| \end{aligned}$$

令 $D(\omega) = 1 - ae^{-j\omega}$, 则 $D^*(\omega) = 1 - a^* e^{j\omega}$, 因此

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{D^*(\omega)}{D(\omega)} \right| = 1$$

对 N 阶全通网络

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}}$$

同理可证明

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \prod_{k=1}^N \frac{D_k^*(\omega)}{D_k(\omega)}$$

所以

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = \prod_{k=1}^N \left| \frac{D_k^*(\omega)}{D_k(\omega)} \right| = 1$$

其中

$$D_k(\omega) = 1 - a_k e^{-j\omega}$$

第九章

自 测 题

在这一章中准备了四份自测题供读者自我测试和练习用。四份自测题具有不同的题型,但都着重于基本概念和基本分析方法的测试。时间控制在 2.5~3 小时,每题的分数仅供参考,最后仅提供了参考答案。希望读者一定要在学习了本书配套教材《数字信号处理(第二版)》(丁玉美等编著)或者相应的教材或著作的基础上,再进行自我测试,测试前或者测试中不要急于看参考答案。最后提醒读者自我测试题并不能包括数字信号处理这门课的全部内容,也不能包括所有考试题型,这里提供的仅是四份参考测试题,即使自测成绩很好或者较好,也不要认为已经完全掌握了这门课的全部内容。

9.1 自 测 题 (一)

1. 判断下列各题的结论是否正确,你认为正确就在括弧中画“√”,否则画“×”。

- (1) 如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, 7$
 $y(n) = x((n+5))_8 R_8(n)$
 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, 7$

则

$$|Y(k)| = |X(k)|, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, 7 \quad ()$$

(2) 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器时,加大窗函数的长度可以同时加大阻带衰减和减少过渡带的宽度。 ()

(3) 如果系统函数用下式表示:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}$$

可以通过选择适当的收敛域使该系统因果稳定。 ()

- (4) 令 $x(n) = a^n$, $0 < |a| < 1$, $-\infty \leq n \leq \infty$

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)]$$

则 $X(z)$ 的收敛域为

$$a < |z| < a^{-1} \quad ()$$

- (5) 令 $x(n) = a^n$, $0 < |a| < 1$, $-\infty \leq n \leq \infty$

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x(n) \quad ()$$

(6) 假设一个稳定的 IIR 滤波器的系统函数和单位脉冲响应分别用 $H(z)$ 和 $h(n)$ 表示, 令

$$H(k) = H(z)|_{z=e^{j\omega_k}}, \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

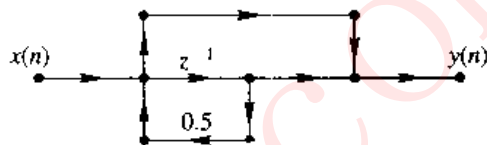
$$h_N(n) = \text{IDFT}[H(k)], \quad n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

则 $h(n) = h_N(n)$ ()

(该题 24 分, 每小题 4 分)

2. 完成下列各题:

(1) 已知 $H(z) = \frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$, 设 $H(z)$ 是一个因果系统, 求出它的单位脉冲响应 $h(n)$ 。



题 2 图

(2) 设 $x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases}$, 求出 $x(n)$ 的 Z

变换 $X(z)$ 、收敛域以及零、极点。

(3) 假设因果系统的结构如图所示, 求出该系统的系统函数和单位脉冲响应。

(4) 画出下面系统函数的直接型和级联型结构图。

$$H(z) = \frac{4z^4 - 2.83z^2 + z}{(z^2 + 1.4z + 1)(z - 0.7)}$$

(该题 25 分, (1) 4 分, (2) 7 分, (3) 7 分, (4) 7 分)

3. 对 $x(t)$ 进行理想采样, 采样间隔 $T=0.25$ s, 得到 $\hat{x}(t)$, 再让 $\hat{x}(t)$ 通过理想低通滤波器 $G(j\Omega)$, $G(j\Omega)$ 用下式表示:

$$G(j\Omega) = \begin{cases} 0.25, & |\Omega| \leq 4\pi \\ 0, & 4\pi < |\Omega| \end{cases}$$

设

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$$

要求:

(1) 写出 $\hat{x}(t)$ 的表达式。

(2) 求出理想低通滤波器的输出信号 $y(t)$ 。

(该题 14 分, (1) 6 分, (2) 8 分)

4. 假设线性非时变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入信号 $x(n)$ 分别用下式表示:

$$h(n) = R_8(n), \quad x(n) = 0.5^n R_8(n)$$

(1) 计算并图示该系统的输出信号 $y(n)$ 。

(2) 如果对 $x(n)$ 和 $h(n)$ 分别进行 16 点 DFT, 得到 $X(k)$ 和 $H(k)$, 令

$$Y_1(k) = H(k)X(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$$

$$y_1(n) = \text{IDFT}[Y(k)], \quad n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$$

画出 $y_1(n)$ 的波形。

(3) 画出用快速卷积法计算该系统输出 $y(n)$ 的计算框图(FFT 计算作为一个框), 并注明 FFT 的最小计算区间 N 等于多少。

(该题 22 分, (1) 7 分, (2) 7 分, (3) 8 分)

5. 二阶归一化低通巴特沃斯模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

采样间隔 $T=2$ s, 为简单令 3 dB 截止频率 $\Omega_c=1$ rad/s, 用双线性变换法将该模拟滤波器转换成数字滤波器 $H(z)$, 要求:

- (1) 求出 $H(z)$;
 - (2) 计算数字滤波器的 3 dB 截止频率;
 - (3) 画出数字滤波器的直接型结构流图。
- (该题 15 分, (1) 5 分, (2) 5 分, (3) 5 分)

9.2 自 测 题 (二)

1. 假设 $x(n]=\delta(n)+\delta(n-1)$, 完成下列各题。

- (1) 求出 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 并画出它的幅频特性曲线。
 - (2) 求出 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$, 变换区间的长度 $N=4$, 并画出 $|X(k)| \sim k$ 曲线。
 - (3) 将 $x(n)$ 以 4 为周期进行延拓, 得到周期序列 $\tilde{x}(n)$, 求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$, 并画出 $|\tilde{X}(k)| \sim k$ 曲线。
 - (4) 求出(3)中 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶变换表示式 $X(e^{j\omega})$, 并画出 $|X(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线。
- (该题 24 分, 每小题 6 分)

2. 假设 $f(n)=x(n)+jy(n)$, $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为有限长实序列, 已知 $f(n)$ 的 DFT 如下式:

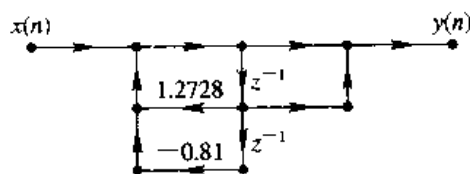
$$F(k) = 1 + e^{j\frac{\pi}{2}k} + j(2 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

- (1) 由 $F(k)$ 分别求出 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 。
- (2) 分别求出 $x(n)$ 和 $y(n)$ 。

(该题 16 分, 每小题 8 分)

3. 数字滤波器的结构如图所示。

- (1) 写出它的差分方程和系统函数。
- (2) 判断该滤波器是否因果稳定。



题 3 图

(3) 按照零、极点分布定性画出其幅频特性曲线, 并近似求出幅频特性峰值点频率(计算时保留 4 位小数)。

(该题 18 分, 每小题 6 分)

4. 设 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

- (1) 试画出直接型结构(要求用的乘法器个数最少)。
- (2) 试画出频率采样型结构, 采样点数为 $N=5$ 。为了简单, 结构中可以使用复数乘法器。要求写出每个乘法器系数的计算公式。

(3) 该滤波器是否具有线性相位特性, 为什么?

(该题 21 分, 每小题 7 分)

5. 已知归一化二阶巴特沃斯低通滤波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

要求用双线性变换法设计一个二阶巴特沃斯数字低通滤波器, 该滤波器的 3 dB 截止频率 $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ (rad), 为了简单, 设采样间隔 $T = 2$ s。

- (1) 求出该数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。
- (2) 画出该数字低通滤波器的直接型结构图。
- (3) 设

$$H(k) = H(z)|_{z=\exp(j\frac{2\pi}{15}k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$$

$$h_{15}(n) = \text{IDFT}[H(k)], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$$

$$h(n) = \text{IZT}[H(z)]$$

试写出 $h_{15}(n)$ 与 $h(n)$ 之间的关系式。

(该题 21 分, 每小题 7 分)

9.3 自 测 题 (三)

1. 设 $X(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z)(1-0.8z^{-1})}$, 试求与 $X(z)$ 对应的因果序列 $x(n)$ 。

(该题 7 分)

2. 如果因果线性时不变系统用下面差分方程描述:

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k) + \sum_{k=-1}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^k y(n-k)$$

试画出该系统的直接型结构图。

(该题 7 分)

3. 如果 FIR 网络用下面差分方程描述:

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} x(n-k)$$

(1) 画出直接型结构图, 要求使用的乘法器最少。

(2) 判断该滤波器是否具有线性相位特性, 如果具有线性相位特性, 写出相位特性公式。

(该题 11 分, (1) 6 分, (2) 5 分)

4. 已知因果序列 $x(n] = \{1, 2, 3, 2, 1, 0, -3, -2\}$,

设 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$

$$X(e^{j\omega_k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k}, \quad \omega_k = \frac{2\pi}{5}k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$y(n) = \text{IDFT}[X(e^{j\omega_k})], \quad n, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

试写出 $y(n)$ 与 $x(n)$ 之间的关系式, 并画出 $y(n)$ 的波形图。

(该题 12 分)

5. 已知 $x(n]$ 是实序列, 其 8 点 DFT 的前 5 点值为: $\{0.25, 0.125-j0.3, 0, 0.125-j0.06, 0.5\}$

(1) 写出 $x(n]$ 8 点 DFT 的后 3 点值。

(2) 如果 $x_1(n)=x((n+2))_8R_8(n)$, 求出 $x_1(n]$ 的 8 点 DFT 值。

(该题 14 分, 每小题 7 分)

6. 设 $H(e^{j\omega})$ 是因果线性时不变系统的传输函数, 它的单位脉冲响应是实序列, 已知 $H(e^{j\omega})$ 的实部为

$$H_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^5 0.5^n \cos \omega n$$

求系统的单位脉冲响应 $h(n]$ 。

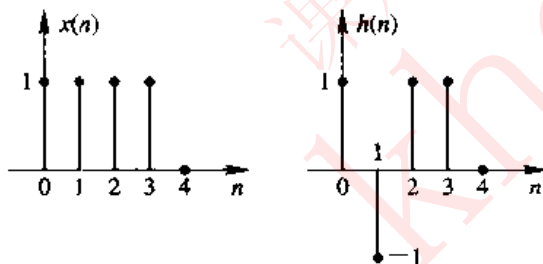
(该题 8 分)

7. 假设网络系统函数为 $H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$, 如将 $H(z)$ 中的 z 用 z^* 代替, 形成新的网络系统函数, $H_1(z)=H(z^*)$ 。试画出 $|H_1(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线, 并求出它的峰值点频率。

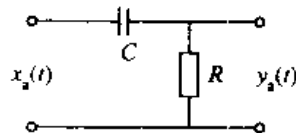
(该题 10 分)

8. 设网络的单位脉冲响应 $h(n]$ 以及输入信号 $x(n]$ 的波形如图所示, 试用圆卷积作图法, 画出该网络的输出 $y(n]$ 波形(要求画出作图过程)。

(该题 10 分)



题 8 图



题 9 图

9. 已知 RC 模拟滤波网络如图所示。

(1) 试利用双线性变换法将该模拟滤波器转换成数字滤波器, 要求求出该数字滤波器的系统函数, 并画出它的结构图。最后分析该数字滤波器的频率特性相对原模拟滤波器的频率特性是否有失真, 为什么?

(2) 能否用脉冲响应不变法将该模拟滤波器转换成数字滤波器, 为什么?

(该题 21 分, (1) 15 分, (2) 6 分)

9.4 自 测 题 (四)

1. 设 $X(z)=\frac{0.19}{(1-0.9z)(1-0.9z^{-1})}$, 试求与 $X(z)$ 对应的所有可能的序列 $x(n]$ 。

(该题 12 分)

2. 假设 $x(n]=R_8(n)$, $h(n]=R_4(n)$

(1) 令 $y(n)=x(n) * h(n)$, 求 $y(n]$ 。要求写出 $y(n]$ 的表达式, 并画出 $y(n]$ 的波形。

(2) 令 $y_c(n) = x(n) \otimes h(n)$, 圆卷积的长度 $L=8$, 求 $y(n)$ 。要求写出 $y_c(n)$ 的表达式, 并画出 $y_c(n)$ 的波形。

(该题 8 分, 每小题 4 分)

3. 设数字网络的输入是以 N 为周期的周期序列 $\tilde{x}(n)$, 该网络的单位脉冲响应是长度为 M 的 $h(n)$, 试用 FFT 计算该网络的输出。要求画出计算框图(FFT 作为一个框图), 并注明 FFT 的计算区间长度。

(该题 10 分)

$$4. \text{ 已知 } x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 3 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

(1) 求出该信号的傅里叶变换。

(2) 利用 $x(n)$ 求出该信号的 DFT, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 变换区间长度为 8。(提示: 注意 $x(n)$ 的区间不符合 DFT 要求的区间)

(该题 8 分, 每小题 4 分)

5. 已知 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$x(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}(1-j), & k = m \\ \frac{N}{2}(1+j), & k = N-m \\ 0, & \text{其它 } k \end{cases}$$

式中, m, N 是正的整常数, $0 < m < N/2$ 。

(1) 求出 $x(n)$ 。

(2) 用 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别表示 $x(n)$ 的共轭对称序列和共轭反对称序列, 分别求 $\text{DFT}[x_e(n)]$ 和 $\text{DFT}[x_o(n)]$ 。

(3) 求 $X(k)$ 的共轭对称序列 $X_e(k)$ 和共轭反对称序列 $X_o(k)$ 。

(该题 16 分, (1) 4 分, (2) 6 分, (3) 4 分)

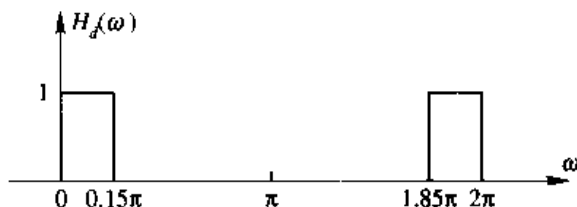
6. 用窗口法设计第一类线性相位高通滤波器, 用理想高通滤波器作为逼近滤波器, 截止频率为 ω_c , 选用矩形窗 $w(n) = R_N(n)$, 长度 $N=31$ 。

(1) 求出理想高通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 。

(2) 求出所设计的滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

(该题 8 分, 每小题 4 分)

7. 用频率采样法设计第一类线性相位低通滤波器, 采样点数 $N=15$, 要求逼近的滤波器的幅度特性曲线如图所示。



题 7 图

(1) 写出频率采样值 $H_d(k) = H_d e^{j\omega_k}$ 的表达式。

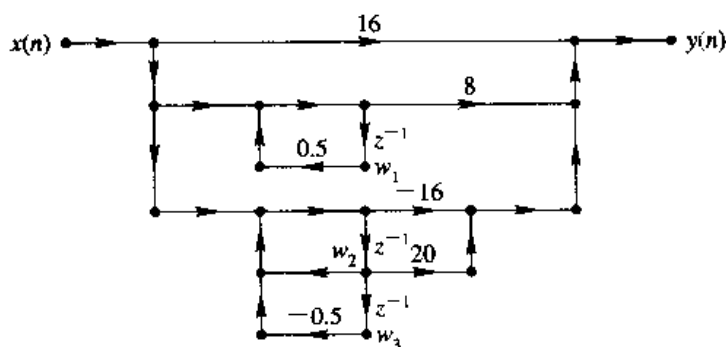
(2) 画出频率采样结构图。

(3) 求出它的单位脉冲响应 $h(n)$, 并画出直接型结构图。

(该题 16 分, (1) 4 分, (2) 4 分, (3) 8 分)

8. 写出如图所示的网络结构图的状态方程和输出方程, 图中 w_1, w_2, w_3 是状态变量。

(该题 8 分)



题 8 图

9. 设

$$x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

式中 $x_1(t) = \cos(8\pi t)$, $x_2(t) = \cos(16\pi t)$, $x_3(t) = \cos(20\pi t)$ 。

(1) 如用 FFT 对 $x_a(t)$ 进行频谱分析, 问采样频率 f_s 和采样点数 N 应如何选择, 才能精确地求出 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 的中心频率, 为什么?

(2) 按照你选择的 f_s 、 N 对 $x_a(t)$ 进行采样, 得到 $x(n)$, 进行 FFT, 得到 $X(k)$ 。画出 $|X(k)| \sim k$ 曲线, 并标出 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 各自的峰值对应的 k 分别是多少?

(该题 15 分, (1) 7 分, (2) 8 分)

9.5 自测题(一)参考答案

1. (1) \checkmark , (2) \times , (3) \times , (4) \checkmark , (5) \times , (6) \times 。

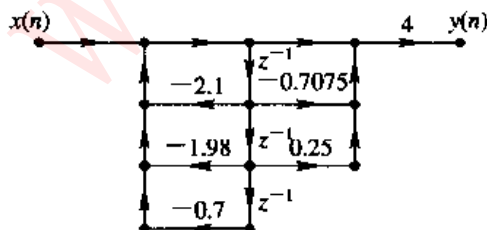
2. (1) $h(n) = [(0.5)^n - 2^n]u(n)$ 。

(2) $X(z) = \frac{1-a}{(1-az^{-1})(1-z)}$, 收敛域是: $a < |z| < 1$ 。

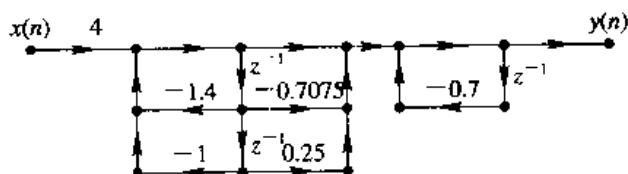
极点为 $z_1 = 1$, $z_2 = a$, 零点为 $z = 0$ 。

(3) $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, $h(n) = 3 \cdot 0.5^n u(n-1) + \delta(n)$ 。

(4) 直接型结构如题 2(4)解图(一)所示, 级联型结构如题 2(4)解图(二)所示。



题 2(4)解图(一)



题 2(4)解图(二)

3. (1) $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(2\pi nT) + \cos(5\pi nT)] \delta(t - nT)$

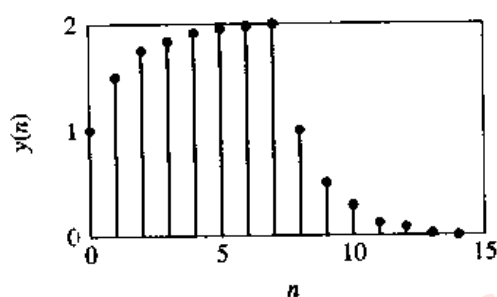
(2) $y(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$

4. (1)

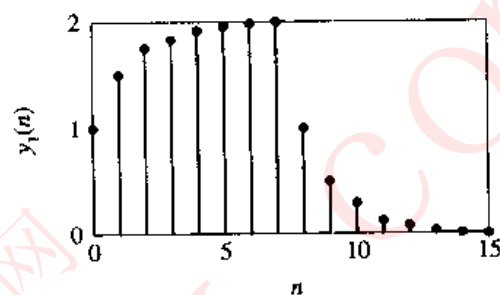
$$y(n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2 - 0.5^n, & 0 \leq n \leq 7 \\ 2^8 \cdot 0.5^n - 2^{-7}, & 8 \leq n \leq 14 \\ 0, & 15 \leq n \end{cases}$$

输出信号的波形如题 4(1)解图所示。

(2) $y_1(n)$ 的波形如题 4(2)解图所示。

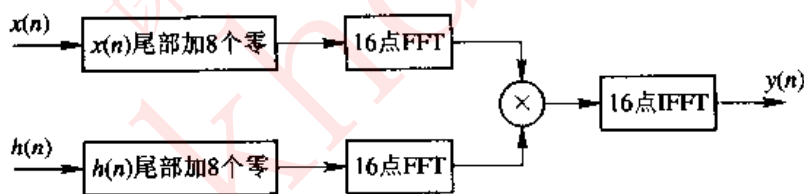


题 4(1)解图



题 4(2)解图

(3) 用快速卷积法计算系统输出 $y(n)$ 的计算框图如题 4(3)解图所示。图中 FFT 和 IFFT 的最小变换区间为 16。



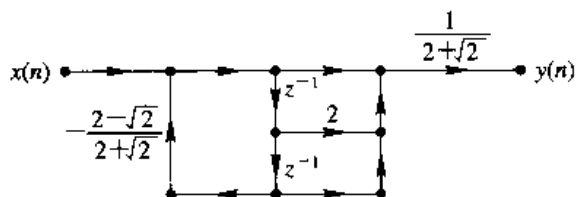
题 4(3)解图

5. (1)

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})z^{-2}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}z^{-2}} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

(2) 数字滤波器的 3 dB 截止频率 $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad。

(3) 数字滤波器直接型结构图如题 5(3)解图所示。

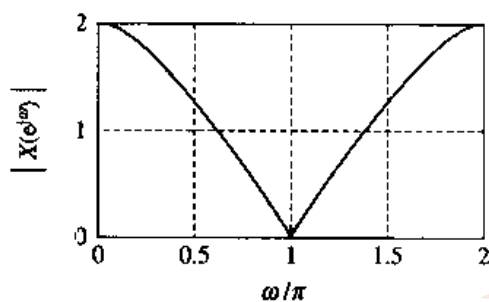


题 5(3)解图

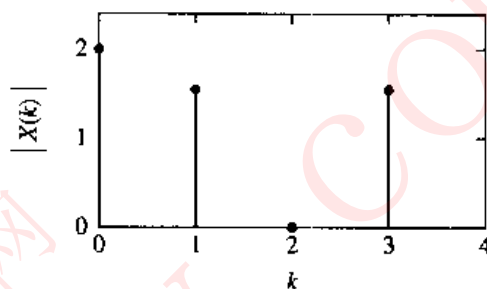
9.6 自测题(二)参考答案

1. (1) $X(e^{j\omega}) = 2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$, 幅频特性如题 1(1)解图所示。

(2) $X(k) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}k} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$, $|X(k)| \sim k$ 曲线如题 1(2)解图所示。



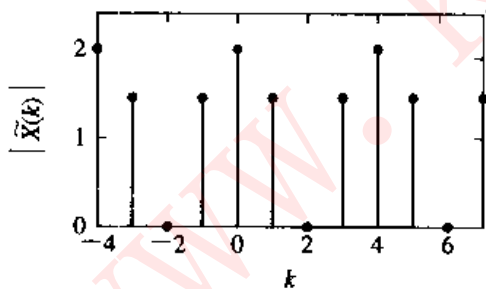
题 1(1)解图



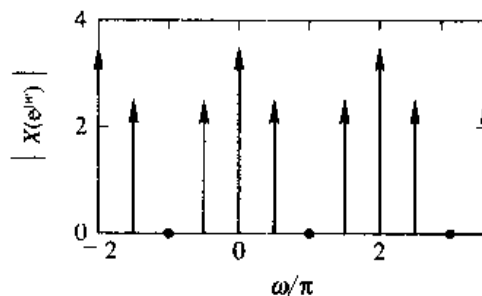
题 1(2)解图

(3) $\tilde{X}(k) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} = 2 \cos\frac{\pi}{4}k \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}k}$, $-\infty < k < \infty$, $|\tilde{X}(k)| \sim k$ 曲线如题 1(3)解图所示。

(4) $X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\frac{\pi}{4}k \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}k} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right)$, $|X(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线如题 1(4)解图所示。



题 1(3)解图



题 1(4)解图

2. (1)

$$X(k) = F_c(k) = \frac{1}{2}(F(k) + F^*(N-k)) = 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$jY(k) = j(2 + e^{-j\pi k}) \quad Y(k) = (2 + e^{-j\pi k}), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$(2) x(n) = \delta(n) + \delta(n-1), \quad y(n) = 2\delta(n) - \delta(n-2)$$

$$3. (1) y(n) = 1.2728y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1.2728z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

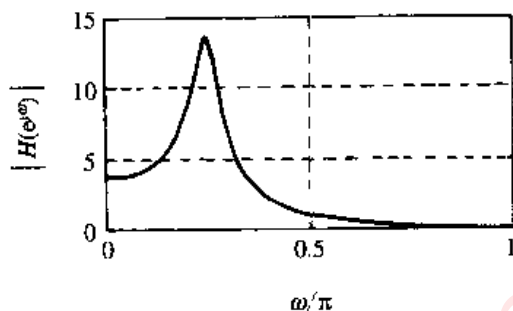
(2) $H(z)$ 的极点为

$$z_1 = 0.6364 + j0.6364 = 0.9e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 0.6364 - j0.6364 = 0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

收敛域 $|z| > 0.9$, 滤波器因果稳定。

(3) 滤波器的幅频特性如题 3(3)解图所示。

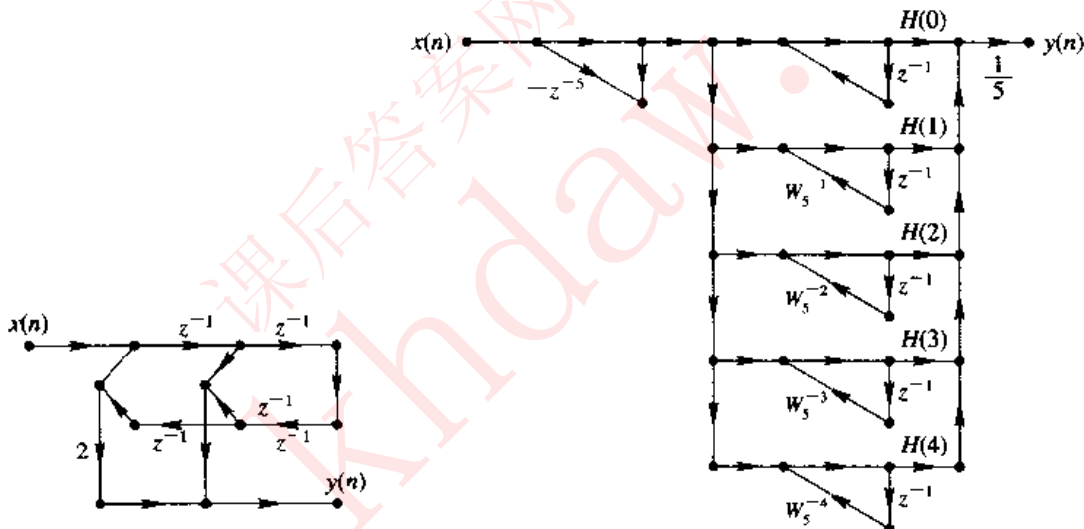


题 3(3)解图

幅频特性峰值点频率近似为: $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$ 。

4. (1) 滤波器的直接型结构如题 4(1)解图所示。

(2) 滤波器的频率采样型结构如图题 4(2)解图所示。



题 4(1)解图

题 4(2)解图

滤波器乘法器系数的计算公式为

$$H(k) = \sum_{n=0}^4 h(n)e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = 2 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - e^{j\frac{6\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{8\pi}{5}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

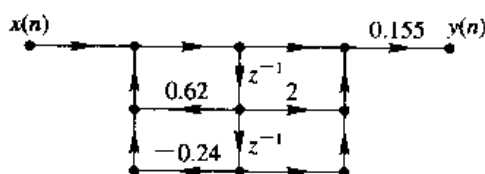
5. (1) 将 $H_a(s)$ 取归一化, 得到:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} \quad \Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left|\frac{\omega_c}{2}\right| = \tan\left|\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(4 + \sqrt{6}) - 4z^{-1} - (4 - \sqrt{6})z^{-2}} = \frac{0.155 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0.62z^{-1} - 0.24z^{-2}}$$

(2) 滤波器直接型结构图如题 5(2)解图所示。

$$(3) \quad h_{15}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n + 15k)R_{15}(n)$$

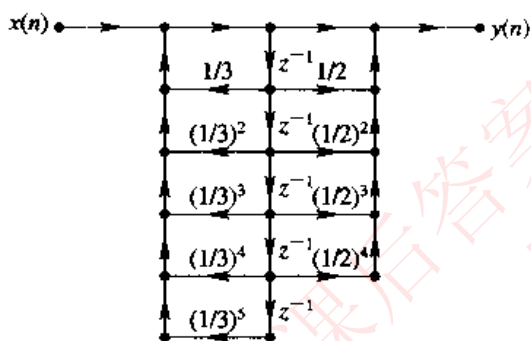


题 5(2)解图

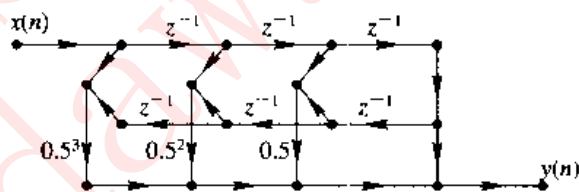
9.7 自测题(三)参考答案

1. $x[n] = (0.8^n - 0.8^{-n})u[n]$

2. 系统的直接型结构图如题 2 解图所示。



题 2 解图



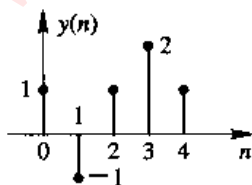
题 3(1)解图

3. (1) 所要求的直接型结构图如题 3(1)解图所示。

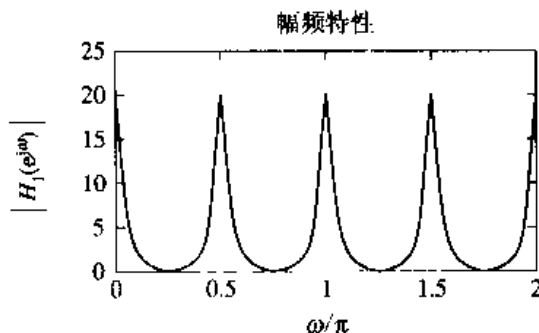
(2) 该滤波器具有线性相位特性, 相位特性公式为

$$\theta(\omega) = -3\omega$$

4. $y[n] = \sum_{M=-\infty}^{\infty} x[n + 5M]R_5[n]$, $y[n]$ 的波形如题 4 解图所示。



题 4 解图



题 7 解图

5. (1) $x[n]$ 8 点 DFT 的后 3 点值为: $0.125 + j0.06$, 0 , $0.125 + j0.3$ 。

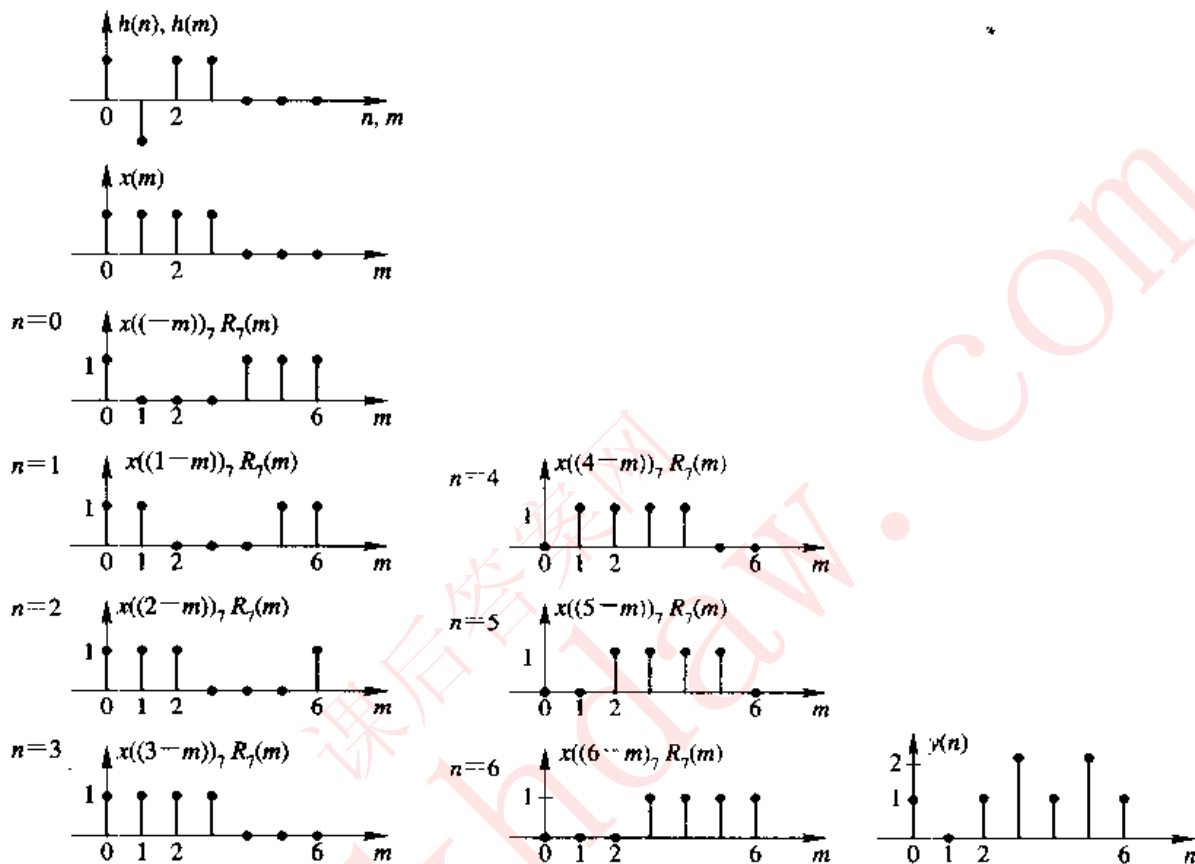
(2) $X_1[k] = X[k]W_8^{-2k}$, 它的 8 点 DFT 值为

0.25 , $0.3 + j0.125$, 0 , $-0.06 - j0.125$, 0.5 , $0.06 + j0.125$, 0 , $0.3 - j0.125$

6. $h(n) = 0.5^n R_6(n)$

7. $|H_1(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线如题 7 解图所示。峰值点频率为: $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 。

8. 按照要求画出 $y(n]$ 的波形如题 8 解图所示。



题 8 解图

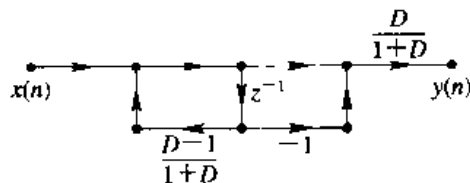
9. (1) $H_a(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau}, \tau = RC$

$$H(z) = \frac{D(1-z^{-1})}{(1+D) + (1-D)z^{-1}}$$

$D = \frac{2}{T}\tau$, T 是采样间隔, 可以取 $T = 1$ s, 结构图如题 9(1)解图所示。

该数字滤波器相对原模拟滤波器, 无论幅度特性还是相位特性均有失真, 因为双线性变换关系是一种非线性映射关系, 模拟频率和数字频率之间的关系服从正切函数关系公式为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left[\frac{\omega}{2}\right]$$



题 9(1)解图

因此双线性变换法适合具有片断常数特性的滤波器的设计, 本题模拟滤波器是一个具有缓慢变化特性的高通滤波器, 因此无论幅度特性还是相位特性均有失真。

(2) 该题不能用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换成数字滤波器, 因为这是一模拟高通滤波器, 如果采用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换成数字滤波器, 会产生严重的频率混叠现象。

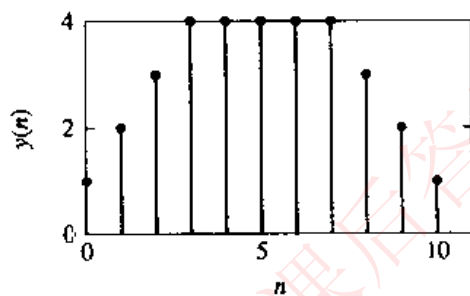
9.8 自测题(四)参考答案

1. 收敛域 $|z| > 0.9$, $x(n) = (0.9^n - 0.9^{-n})u(n)$ 。
 收敛域 $|z| < 0.9$, $x(n) = (0.9^{-n} - 0.9^n)u(-n-1)$ 。
 收敛域 $0.9 < |z| < 0.9^{-1}$, $x(n) = 0.9^n$ 。

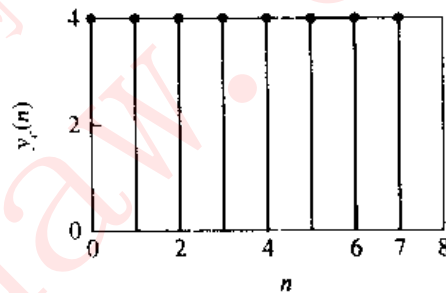
2. (1)

$$y(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 4, & 4 \leq n \leq 7 \\ 11-n, & 8 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$y(n)$ 的波形如题 2(1)解图所示。



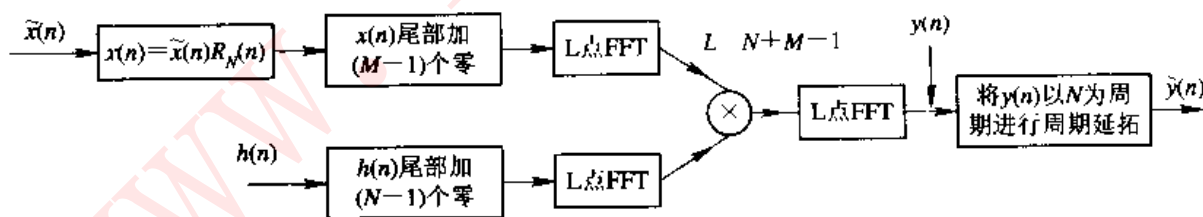
题 2(1)解图



题 2(2)解图

(2) $y_c(n) = 4$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$; $y_c(n)$ 的波形如题 2(2)解图所示。

3. 网络输出仍为以 N 为周期的周期序列, 用 $\tilde{y}(n)$ 表示, 计算框图如题 3 解图所示。



题 3 解图

4. (1) $X(e^{j\omega}) = e^{j3\omega} \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin\left\{\frac{7}{2}\omega\right\}}{\sin\left\{\frac{1}{2}\omega\right\}}$; (2) $X(k) = \frac{e^{-j\frac{5}{4}\pi k} - e^{-j\frac{1}{4}\pi k}}{1 - e^{-j\frac{1}{4}\pi k}}$

5. (1) $x(n) = \left[\cos\left\{\frac{2\pi}{N}mn\right\} + \sin\left\{\frac{2\pi}{N}mn\right\} \right] R_N(n)$

(2) $\text{DFT}[x_c(n)] = X_R(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k=m, k=N-m \\ 0, & \text{其它 } k \end{cases}$

$$\text{DFT}[x_e(n)] = jX_I(k) = \begin{cases} -j\frac{N}{2}, & k=m \\ j\frac{N}{2}, & k=N-m \\ 0, & \text{其它 } k \end{cases}$$

(3) 因为 $x(n)$ 是实序列, $X_e(k) = X(k)$, $X_e(k) = 0$.

$$6. (1) h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{2\pi-\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega m} d\omega = \frac{-1}{\pi n} \sin(\omega_c(n-m)), \alpha = \frac{N-1}{2}$$

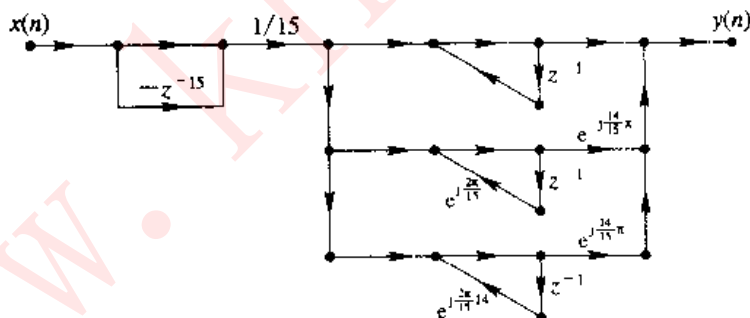
$$(2) h(n) = h_d(n)R_N(n)$$

$$7. (1) H_k = \begin{cases} 1, & k=0, 1, 14 \\ 0, & k=2 \sim 13 \end{cases}$$

$$\theta_k = \begin{cases} -\frac{N-1}{N}\pi k = -\frac{14}{15}\pi k, & 0 \leq k \leq 7 \\ \frac{N-1}{N}\pi(N-k) = \frac{14}{15}\pi(15-k), & 8 \leq k \leq 14 \end{cases}$$

$$H_d(k) = \begin{cases} e^{-j\frac{14}{15}\pi k}, & k=0, 1 \\ 0, & 2 \leq k \leq 13 \\ e^{j\frac{14}{15}\pi(15-k)}, & k=14 \end{cases}$$

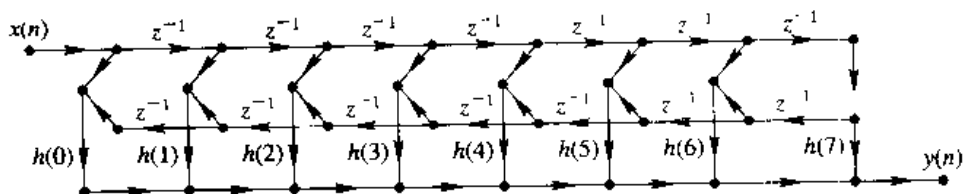
(2) 频率采样结构如题 7(2)解图所示。



题 7(2) 解图

$$\begin{aligned} (3) h(n) &= \text{IDFT}[H_d(k)] = \frac{1}{15} (1 + e^{j\frac{2\pi}{15}(n-1)} + e^{-j\frac{2\pi}{15}(n-1)}) \\ &= \frac{1}{15} [1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{15}(n-1))] \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, 14 \end{aligned}$$

直接型结构图如图题 7(3)解图所示。



题 7(3)解图

8.

$$\begin{bmatrix} w_1(n+1) \\ w_2(n+1) \\ w_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [4 \ 4 \ 8] \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \end{bmatrix} + 8x(n)$$

9. (1) 为了精确地求出题中三个信号的频率, 采样频率和截取信号长度分别满足采样定理和三个周期信号的周期的整数倍长度。另外要满足 FFT 要求变换长度为 2 的整数次幂。

(a) $f_s = 32 \text{ Hz}$, $N = 16$

这样, $x_1(t)$ 一周期取 8 点, 共取 2 个周期; $x_2(t)$ 一个周期取 4 点, 共取 4 个周期; $x_3(t)$ 一周期取 3.2 点, 共取 5 个周期。

或者 N 取 16 的整数倍也可, 但最少为 16。

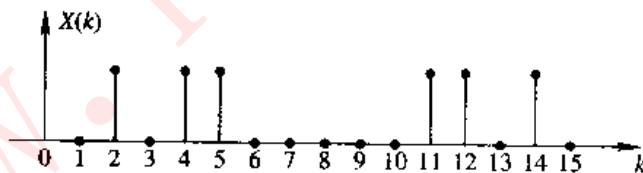
(b) $f_s = 64 \text{ Hz}$, $N = 32$

这样, $x_1(t)$ 一周期取 16 点, 共取 2 个周期; $x_2(t)$ 一个周期取 8 点, 共取 4 个周期; $x_3(t)$ 一周期取 6.4 点, 共取 5 个周期。

或者 N 取 32 的整数倍也可, 但最少为 32。

以此类推, 采样频率可以取 32 Hz 的整数倍, 但最小为 32 Hz。为了使计算点数最少, 该题选用 $f_s = 32 \text{ Hz}$, $N = 16$ 。

(2) $|X(k)| \sim k$ 曲线如题 9(2) 解图所示。图中, 峰值坐标 $k=2, 14$ 对应 $x_1(t)$; $k=4, 12$ 对应 $x_2(t)$; $k=5, 11$ 对应 $x_3(t)$ 。



题 9(2) 解图