Universidad de La Habana

Facultad de Matemática y Computación

Asignatura: Diseño y Análisis de Algoritmos

Conectando la UH

Integrantes

Jabel Resendiz Aguirre
Noel Pérez Calvo
Arianne Camila Palancar Ochando

Carrera: Ciencia de la Computación

11 de diciembre de 2025

Índice

1. Fase 1: Formalización del Problema

1.1. Descripción Formal del Problema

El objetivo es diseñar una red de fibra óptica que conecte todos los edificios principales de la Universidad de La Habana mediante enlaces posibles provistos por ETECSA. Cada enlace tiene un costo de instalación y cada edificio posee un límite máximo de puertos disponibles. Se requiere encontrar una configuración de conexiones que:

- conecte todos los edificios,
- respete los límites de puertos por edificio,
- minimice el costo total de instalación.

El problema se formaliza como una variante acotada del *árbol generador mínimo.*

1.2. Estructuras de Datos de Entrada

Se define la entrada mediante las siguientes estructuras:

- Un conjunto de edificios:
$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$
- Un conjunto de posibles enlaces de fibra óptica:
$$E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}.$$
- Un costo de instalación para cada enlace:
$$c : E \to \mathbb{R}_{>0}.$$
- Un límite de puertos (grado máximo permitido) en cada edificio:
$$d : V \to \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

1.3. Formalización Matemática

Sea $G = (V, E)$ el grafo de infraestructura disponible. La solución buscada es un subconjunto de aristas:
$$T \subseteq E$$
que define un subgrafo $G_T = (V, T)$.

1.4. Restricciones del Problema

El subgrafo G_T debe satisfacer:

1. **Conectividad:**
$$G_T \text{ es conexo.}$$
2. **Estructura de árbol:**
$$|T| = |V| - 1.$$
3. **Límite de puertos por edificio:**
$$\deg_{G_T}(v) \leq d(v), \qquad \forall v \in V.$$

1.5. Función Objetivo

Minimizar el costo total de instalación:

$$\min_{T \subseteq E} \sum_{e \in T} c(e)$$

sujeto a las restricciones anteriores.

2. Fase 2: Análisis de Complejidad Computacional

En esta fase se determina la dificultad computacional del problema formalizado en la Fase 1. Demostraremos que la versión de decisión del problema es NP-completa, y por lo tanto, la versión de optimización es NP-dura.

2.1. Versión de Decisión del Problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, costos $c(e)$, límites de grado $d(v)$ y un valor K, definimos la siguiente pregunta:

$$\text{¿Existe un subconjunto } T \subseteq E \text{ tal que } \begin{cases} G_T = (V, T) \text{ es un árbol,} \\ \deg_{G_T}(v) \leq d(v) \quad \forall v \in V, \\ \sum_{e \in T} c(e) \leq K? \end{cases}$$

2.2. Pertenencia a NP

Dado un conjunto de aristas T, quiere verificarse que se puede comprobar en tiempo polinomial, lo cual se cumplirá si se cumplen las siguientes condiciones:

- G_T es conexo (mediante un recorrido BFS/DFS),
- $|T| = |V| - 1$, es decir el subgrafo G_T forma un árbol,
- $\deg_{G_T}(v) \leq d(v)$ para todo $v \in V$,
- $\sum_{e \in T} c(e) \leq K$.

Por lo tanto, el problema pertenece a NP.

2.3. Demostración de NP-completitud

Para demostrar que dicho problema es NP-completo, se presenta una reducción en tiempo polinomial desde el problema Hamiltonian Path en grafos no dirigidos, el cual es NP-completo.

2.3.1. Problema de Partida: Hamiltonian Path

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, el problema Hamiltonian Path pregunta si existe un camino que visite todos los vértices exactamente una vez.

2.3.2. Construcción de la Reducción

A partir de una instancia de Hamiltonian Path, construimos una instancia del problema de la siguiente manera:

- Se toma el mismo grafo $G = (V, E)$.
- Para cada arista $e \in E$, se asigna un costo $c(e) = 1$.
- Se fija un límite de grado uniforme:

$$d(v) = 2 \quad \forall v \in V.$$

- Se establece el umbral de costo:

$$K = |V| - 1.$$

La construcción es claramente polinomial.

2.3.3. Correctitud de la Reducción

($\Rightarrow$) Si G posee un camino hamiltoniano, dicho camino contiene $|V|-1$ aristas, es conexo, acíclico y cada vértice tiene grado a lo sumo 2. Por lo tanto, constituye un conjunto T válido para el problema con costo total $|V| - 1 \leq K$.

($\Leftarrow$) Si existe un conjunto T que satisface las restricciones del problema, entonces T es un árbol con $|V| - 1$ aristas y $\deg_{G_T}(v) \leq 2$ para todo v. La única estructura de árbol donde todos los grados son a lo sumo 2 es un camino. Por lo tanto, T es un camino hamiltoniano del grafo original.

2.3.4. Conclusión

La existencia de un T válido para DC-MST-Decision es equivalente a la existencia de un camino hamiltoniano en G. Dado que la reducción es polinomial y Hamiltonian Path es NP-completo, se concluye:

DC-MST-Decision es NP-completo.

2.4. Consecuencia

Dado que la versión de decisión es NP-completa, la versión de optimización (*Degree-Constrained Minimum Spanning Tree*) es NP-dura:

DC-MST es NP-dura.

Esto implica que no se conoce un algoritmo polinomial que resuelva el problema de forma óptima para instancias generales, salvo que P = NP.

3. Fase 3: Diseño de Soluciones Algorítmicas

4. Fase 4: Implementación y Análisis Experimental