

λ計算入門

Kimiyuki Onaka

November 22, 2015

自己紹介

- ▶ 名前: 大中公幸
- ▶ 所属: 神戸大学 工学部 情報知能工学科 学部2年
- ▶ 得意分野: プログラミング, 計算機科学, 論理学
- ▶ twitter: @ki6o4

目標

- ▶ 計算に興味を持ってもらう
- ▶ 簡単な計算ができるようになってもらう
 - ▶ $1 + 1 = ??$
 - ▶ $2 \times 3 = ??$

構成

1. λ 記法の紹介
2. λ 式の定義
3. β 簡約の定義
4. 自然数の定義
5. 加算と乗算の定義
6. 減算の定義

連絡

- ▶ このslideは

<http://github.com/kmyk/slide/lambda/a.pdf>
に置いてあります

- ▶ 定義の省略とか記号の濫用とかそこそこあります

Subsection 2

λ記法

λ記法

通常の記法

$$f(x) = x^2$$

mapsto

$$f : x \mapsto x^2$$

λ記法

$$f = \lambda x. x^2$$

λ記法 利点

- ▶ 名前を付けなくてよい
- ▶ 単独で使える、操作がしやすい
- ▶ e.g. $\lambda x.x^2$

λ記法 例1

1. ▶ $f(x) := x^2$
 ▶ $f(4) = 16$
2. ▶ $f := \lambda x. x^2$
 ▶ $f(4) = 16$
3. ▶ $(\lambda x. x^2)(4) = 16$

λ記法 例2

1.
 - ▶ $f(x) := x^2$
 - ▶ $g[h] := h(h(3))$
 - ▶ $g[f] = (3^2)^2 = 81$
2.
 - ▶ $f := \lambda x. x^2$
 - ▶ $g := \lambda h. h(h(3))$
 - ▶ $g(f) = (3^2)^2 = 81$
3.
 - ▶ $(\lambda h. h(h(3)))(\lambda x. x^2) = 81$

Subsection 3

λ式

λ式 定義

λ式とは以下のように定義される

- ▶ 変数記号 x_0, x_1, x_2, \dots はλ式である
- ▶ M, N がλ式するとき (MN) はλ式である
- ▶ x が変数で M がλ式するとき
 $(\lambda x.M)$ はλ式である
- ▶ 以上によって定義されるもののみがλ式である

λ式 例

- ▶ $(\lambda x_0.((x_1 x_0) x_0))$
- ▶ $(\lambda x_1.(x_1 (x_1 x_0)))$
- ▶ $((x_3 x_4)(\lambda x_{103}.x_4))$
- ▶ $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.x_9)))$
- ▶ $(\lambda x_1.(\lambda x_1.(\lambda x_1.x_1)))$

λ式 省略記法

- ▶ 変数は適当に使う
- ▶ 分かる範囲で括弧は省略
- ▶ fgh は $(fg)h$ を表す
- ▶ $\lambda xyz.w$ は $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.w))$ を表す

λ式 省略記法 例

- ▶ $\lambda x. pxx$
- ▶ $\lambda h. h(h3)$
- ▶ $fg(\lambda x. y)$
- ▶ $\lambda xyz. w$
- ▶ $\lambda x. (\lambda x. (\lambda x. x))$

Subsection 4

β 簡約

β 簡約 定義

β 変換とは、

以下で定義される二項関係 $\rightarrow_{\beta} \subseteq \Lambda \times \Lambda$

- ▶ $(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]$
- ▶ $M \rightarrow_{\beta} N$ ならば $\lambda x.M \rightarrow_{\beta} \lambda x.N$ 、
 $MP \rightarrow_{\beta} NP$ 、 $PM \rightarrow_{\beta} PN$

β 簡約 定義

$M[x := N]$ は以下のように定義される

- ▶ $M \equiv x$ ならば N
- ▶ $M \equiv y (y \neq x)$ ならば y
- ▶ $M \equiv PQ$ ならば $(P[x := N])(Q[x := N])$
- ▶ $M \equiv \lambda x. P$ ならば $\lambda x. P$
- ▶ $M \equiv \lambda y. P (y \neq x)$ ならば $\lambda y. P[x := N]$

つまり、

M 中の自由な x を N で置き換えている

β 簡約 例1

1. $(\lambda x.(\lambda y(\lambda z.xy)))vw$
2. $\xrightarrow{\beta} (\lambda y(\lambda z.vy))w$
3. $\xrightarrow{\beta} (\lambda z.vw)$

β 簡約 例2

1. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$
2. $\xrightarrow[\beta]{} (\lambda y.y)(\lambda y.y)$
3. $\xrightarrow[\beta]{} (\lambda y.y)$

β 簡約 例3

1. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
2. $\xrightarrow[\beta]{} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
3. $\xrightarrow[\beta]{} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
4.

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM

2. $\equiv (\lambda x f.f(xxf))XM$

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda x f.f(xxf))XM$
3. $\xrightarrow[\beta]{} (\lambda f.f(XXf))M$

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda x f.f(xxf))XM$
3. $\xrightarrow{\beta} (\lambda f.f(XXf))M$
4. $\xrightarrow{\beta} M(XXM)$

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda x f.f(xxf))XM$
3. $\xrightarrow{\beta} (\lambda f.f(XXf))M$
4. $\xrightarrow{\beta} M(XXM)$
5. $\equiv M(YM)$

β 簡約 例4

Turingの不動点演算子 Θ

- ▶ $X := \lambda x f.f(xxf)$
- ▶ $Y := XX$

1. YM
2. $\xrightarrow[\beta]{} M(YM)$
3. $\xrightarrow[\beta]{} M(M(YM))$
4. $\xrightarrow[\beta]{} M(M(M(YM)))$
5. \dots

Subsection 5

自然数

自然数 定義

Church数

自然数 n に対し、Church数 $[n]$ を以下のよう
に定義する

$$\triangleright [n] := \lambda f x. \overbrace{f(f(f(\dots(f x) \dots)))}^n$$

自然数 例

- ▶ $[0] := \lambda fx. x$
- ▶ $[1] := \lambda fx. fx$
- ▶ $[2] := \lambda fx. f(fx)$
- ▶ $[3] := \lambda fx. f(f(fx))$
- ▶ ...

Subsection 6

演算 加算と乗算

演算 加算

このような準備の下で、足し算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} [m + n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

演算 加算

このような準備の下で、足し算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} [m + n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\blacktriangleright + := \lambda mnfx.mf(nfx)$$

はこれを満たす

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$

2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx)) [2] [3]$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f([3] fx)$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$
5. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f(f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$
5. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx. (\lambda fx. f(fx)) f(f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$
5. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. [2] f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx. (\lambda fx. f(fx)) f(f(f(fx)))$
7. $\xrightarrow[\beta]{} \lambda fx. (\lambda x. f(fx)) (f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$
5. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. [2] f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx. (\lambda fx. f(fx)) f(f(f(fx)))$
7. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. (\lambda x. f(fx)) (f(f(fx)))$
8. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. f(f(f(f(fx))))$

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+ [2] [3]$
2. $\equiv (\lambda mnfx. mf(nfx)) [2] [3]$
3. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. [2] f([3] fx)$
4. $\equiv \lambda fx. [2] f((\lambda fx. f(f(fx))) fx)$
5. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. [2] f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx. (\lambda fx. f(fx)) f(f(f(fx)))$
7. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. (\lambda x. f(fx)) (f(f(fx)))$
8. $\xrightarrow{\beta} \lambda fx. f(f(f(f(fx))))$
9. $\equiv [5]$

演算 乗算

掛け算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} [m \times n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

演算 乗算

掛け算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} [m \times n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\blacktriangleright \times := \lambda mnfx.m(nf)x$$

はこれを満たす

Subsection 7

演算 減算

演算 後者関数

後者関数とは

$$\blacktriangleright P[n] \xrightarrow[\beta]{\Rightarrow} [n+1]$$

を満たすような λ 式 P のこと

演算 後者関数

後者関数とは

$$\blacktriangleright P[n] \xrightarrow[\beta]{\rightarrow} [n+1]$$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\blacktriangleright \text{succ} := \lambda nfx. f(nfx)$$

はこれを満たす

構造 対

対とは、ある λ 式 x 、 y があって

$$\triangleright x(PMN) \xrightarrow[\beta]{\rightarrow} M$$

$$\triangleright y(PMN) \xrightarrow[\beta]{\rightarrow} N$$

を満たすような λ 式 P のこと

構造 対

対とは、ある λ 式 x 、 y があって

$$\triangleright x(PMN) \xrightarrow[\beta]{} M$$

$$\triangleright y(PMN) \xrightarrow[\beta]{} N$$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\triangleright \pi_1 := \lambda xy.x$$

$$\triangleright \pi_2 := \lambda xy.y$$

$$\triangleright \text{pair} := \lambda xyp.pxy$$

はこれを満たす

演算 前者関数

このような準備の下で、前者関数とは

- ▶ $P[0] \xrightarrow[\beta]{\quad} [0]$
- ▶ $P[n+1] \xrightarrow[\beta]{\quad} [n]$

を満たすような λ 式 P のこと

演算 前者関数

このような準備の下で、前者関数とは

- ▶ $P[0] \xrightarrow[\beta]{} [0]$
- ▶ $P[n+1] \xrightarrow[\beta]{} [n]$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\text{pred} := \lambda n. \pi_2(n \ (\lambda p. \text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\ (\text{pair}[0][0]))$$

はこれを満たす

演算 前者関数 例

$$\begin{aligned} & \text{pred}[2] \\ \xrightarrow{\beta} & \pi_2([2](\lambda p.\text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p)))(\pi_1 p)) \\ & \quad (\text{pair}[0][0])) \\ \xrightarrow{\beta} & \pi_2((\lambda p.\text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p)))(\pi_1 p)) \\ & \quad ((\lambda p.\text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p)))(\pi_1 p)) \\ & \quad (\text{pair}[0][0]))) \\ \xrightarrow{\beta} & \pi_2((\lambda p.\text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p)))(\pi_1 p)) \\ & \quad ((\text{pair}(\text{succ}(\pi_1(\text{pair}[0][0]))) \\ & \quad (\pi_1(\text{pair}[0][0]))))) \\ \xrightarrow{\beta} & \pi_2((\lambda p.\text{pair}(\text{succ}(\pi_1 p)))(\pi_1 p)) \\ & \quad ((\text{pair}[1][0]))) \\ \xrightarrow{\beta} & \pi_2(\text{pair}[2][1]) \\ \xrightarrow{\beta} & [1] \end{aligned}$$

演算 限定減算 定義

引き算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\rightarrow} [m - n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

演算 限定減算 定義

引き算とは

$$\blacktriangleright P[m][n] \xrightarrow[\beta]{\dot{-}} [m \dot{-} n]$$

を満たすような λ 式 P のこと

$$\blacktriangleright \dot{-} := \lambda mn. npred m$$

はこれを満たす

演算 限定減算 例

$$1. \quad \dot{-} [5] [3]$$

演算 限定減算 例

$$1. \dot{-} [5] [3]$$

$$2. \xrightarrow[\beta]{} [3] \text{pred} [5]$$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} [5] [3]$

2. $\xrightarrow[\beta]{} [3] \text{pred} [5]$

3. $\xrightarrow[\beta]{} \text{pred}(\text{pred}(\text{pred} [5]))$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} [5] [3]$
2. $\xrightarrow[\beta]{} [3] \text{pred} [5]$
3. $\xrightarrow[\beta]{} \text{pred}(\text{pred}(\text{pred} [5]))$
4. ...

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} [5] [3]$
2. $\xrightarrow[\beta]{\rightarrow} [3] \text{pred} [5]$
3. $\xrightarrow[\beta]{\rightarrow} \text{pred}(\text{pred}(\text{pred} [5]))$
4. ...
5. ...

演算 限定減算 例

$$1. \dot{-}[5][3]$$

$$2. \xrightarrow[\beta]{} [3]\text{pred}[5]$$

$$3. \xrightarrow[\beta]{} \text{pred}(\text{pred}(\text{pred}[5]))$$

$$4. \dots$$

$$5. \dots$$

$$6. \dots$$

演算 限定減算 例

$$1. \dot{-}[5][3]$$

$$2. \xrightarrow[\beta]{} [3]\text{pred}[5]$$

$$3. \xrightarrow[\beta]{} \text{pred}(\text{pred}(\text{pred}[5]))$$

$$4. \dots$$

$$5. \dots$$

$$6. \dots$$

$$7. \xrightarrow[\beta]{} [2]$$

参考文献

- ▶ 高橋正子, 計算論, 近代科学社(1991)
 - ▶ 計算可能性の話
 - ▶ λ 計算の体系と他の計算体系が等価であることとか
 - ▶ 逆極限法を用いて、無限に計算し続けた結果の極限の話をする
- ▶ 横内寛文, プログラム意味論, 共立出版(1994)
 - ▶ λ 式の意味論の話
 - ▶ こちらも逆極限法
 - ▶ cartesian閉圏による形式体系も載ってる
- ▶ 中島玲二, 数理情報学入門, 朝倉書店(1982)
 - ▶ 絶版
 - ▶ 意味論
 - ▶ 実際に用いられているプログラミング言語を見据えた感じ
 - ▶ 逆極限法とかも載ってる