λ計算入門

Kimiyuki Onaka

November 22, 2015

自己紹介

- 名前: 大中公幸
- 所属: 神戸大学 工学部 情報知能工学科 学部2年
- 得意分野: プログラミング, 計算機科学, 論理学
- twitter: @ki6o4

目標

- 計算に興味を持ってもらう
- 簡単な計算ができるようになってもらう
  - $1+1 = ??$
  - $2\times 3 = ??$

構成

1. λ記法の紹介
2. λ式の定義
3. β簡約の定義
4. 自然数の定義
5. 加算と乗算の定義
6. 減算の定義
7. combinator理論の紹介

連絡

- このslideは

http://github.com/kmyk/slide/lambda/a.pdf
に置いてあります

- 定義の省略とか記号の濫用とかそこそこあります

Subsection 2

λ記法

λ記法

通常の記法

$f(x) = x^2$

mapsto

$f : x \mapsto x^2$

λ記法

$f = \lambda x.x^2$

λ記法 利点

- 名前を付けなくてよい
- 単独で使える、操作がしやすい
- e.g. $\lambda x.x^2$

λ記法 例1

1.
   - $f(x) := x^2$
   - $f(4) = 16$
2.
   - $f := \lambda x.x^2$
   - $f(4) = 16$
3.
   - $(\lambda x.x^2)(4) = 16$

λ記法 例2

1.
   - $f(x) := x^2$
   - $g[h] := h(h(3))$
   - $g[f] = (3^2)^2 = 81$
2.
   - $f := \lambda x.x^2$
   - $g := \lambda h.h(h(3))$
   - $g(f) = (3^2)^2 = 81$
3.
   - $(\lambda h.h(h(3)))(\lambda x.x^2) = 81$

Subsection 3

λ式

λ式 定義

λ式とは以下のように定義される

- 変数記号$x_0, x_1, x_2, \ldots$はλ式である
- M, Nがλ式のとき (MN)はλ式である
- xが変数でMがλ式のとき $(\lambda x.M)$はλ式である
- 以上によって定義されるもののみがλ式である

λ式 例

- $(\lambda x_0.((x_1 x_0) x_0))$
- $(\lambda x_1.(x_1 (x_1 x_0)))$
- $((x_3 x_4)(\lambda x_{103}.x_4))$
- $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.x_9)))$
- $(\lambda x_1.(\lambda x_1.(\lambda x_1.x_1)))$

λ式 省略記法

- 変数は適当に使う
- 分かる範囲で括弧は省略
- fghは$(fg)h$を表す
- $\lambda xyz.w$は$\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.w))$を表す

λ式 省略記法 例

- $\lambda x.pxx$
- $\lambda h.h(h3)$
- $fg(\lambda x.y)$
- $\lambda xyz.w$
- $\lambda x.(\lambda x.(\lambda x.x))$

Subsection 4

β簡約

β簡約 定義

β変換とは、
以下で定義される二項関係$\underset{\beta}{\rightarrow} \subseteq \Lambda \times \Lambda$

- $(\lambda x.M)N \underset{\beta}{\rightarrow} M[x := N]$
- $M \underset{\beta}{\rightarrow} N$ならば$\lambda x.M \underset{\beta}{\rightarrow} \lambda x.N$、
  $MP \underset{\beta}{\rightarrow} NP$、 $PM \underset{\beta}{\rightarrow} PN$

β簡約 定義

$M[x := N]$は以下のように定義される

- $M \equiv x$ならばN
- $M \equiv y(y \neq x)$ならばy
- $M \equiv PQ$ならば
  $(P[x := N])(Q[x := N])$
- $M \equiv \lambda x.P$ならば$\lambda x.P$
- $M \equiv \lambda y.P(y \neq x)$ならば$\lambda y.P[x := N]$

つまり、

M中の自由なxをNで置き換えている

β簡約 例1

1. $(\lambda x.(\lambda y(\lambda z.xy)))vw$
2. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda y(\lambda z.vy))w$
3. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda z.vw)$

β簡約 例2

1. $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$
2. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda y.y)(\lambda y.y)$
3. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda y.y)$

β簡約 例3

1. $(\lambda x.x(\lambda x.x))y$
2. $\underset{\beta}{\rightarrow} y(\lambda x.x)$

β簡約 例4

1. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
2. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
3. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
4. $\ldots$

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda xf.f(xxf))XM$

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda xf.f(xxf))XM$
3. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda f.f(XXf))M$

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda xf.f(xxf))XM$
3. $\underset{\beta}{\rightarrow} (\lambda f.f(XXf))M$
4. $\underset{\beta}{\rightarrow} M(XXM)$

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM
2. $\equiv (\lambda xf.f(xxf))XM$
3. $\underset{\beta}{\to} (\lambda f.f(XXf))M$
4. $\underset{\beta}{\to} M(XXM)$
5. $\equiv M(YM)$

β簡約 例5

Turingの不動点演算子Θ

- $X := \lambda xf.f(xxf)$
- $Y := XX$

1. YM
2. $\underset{\beta}{\to} M(YM)$
3. $\underset{\beta}{\to} M(M(YM))$
4. $\underset{\beta}{\to} M(M(M(YM)))$
5. $\ldots$

Subsection 5

自然数

自然数 定義

Church数

自然数nに対し、Church数$\ulcorner n \urcorner$を以下のように定義する

- $\ulcorner n \urcorner := \lambda fx.\overbrace{f(f(f(\ldots(f}^{n}\,x)\ldots)))$

自然数 例

- $\lceil 0 \rceil := \lambda fx.x$
- $\lceil 1 \rceil := \lambda fx.fx$
- $\lceil 2 \rceil := \lambda fx.f(fx)$
- $\lceil 3 \rceil := \lambda fx.f(f(fx))$
- $\ldots$

Subsection 6

演算 加算と乗算

演算 加算

このような準備の下で、足し算とは

- $P\ulcorner m\urcorner\ulcorner n\urcorner \twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner m+n\urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

演算 加算

このような準備の下で、足し算とは

- $P\ulcorner m\urcorner\ulcorner n\urcorner \xrightarrow[\beta]{} \ulcorner m+n\urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

- $+ \ := \lambda mnfx.mf(nfx)$

はこれを満たす

演算 加算 計算 $2 + 3$

1. $+\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
2. $\equiv(\lambda mnfx.mf(nfx))\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx)) \ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(\ulcorner 3 \urcorner fx)$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx))\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\lceil 2\rceil f(\lceil 3\rceil fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\lceil 2\rceil f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx)) \ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(\ulcorner 3 \urcorner fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$
5. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx))\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(\ulcorner 3 \urcorner fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$
5. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx.(\lambda fx.f(fx))f(f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx))\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\lceil 2\rceil f(\lceil 3\rceil fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\lceil 2\rceil f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$
5. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\lceil 2\rceil f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx.(\lambda fx.f(fx))f(f(f(fx)))$
7. $\underset{\beta}{\rightarrow} \lambda fx.(\lambda x.f(fx))(f(f(fx)))$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx))\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(\ulcorner 3 \urcorner fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$
5. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda fx.\ulcorner 2 \urcorner f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx.(\lambda fx.f(fx))f(f(f(fx)))$
7. $\underset{\beta}{\rightarrow} \lambda fx.(\lambda x.f(fx))(f(f(fx)))$
8. $\underset{\beta}{\rightarrow} \lambda fx.f(f(f(f(fx))))$

演算 加算 計算 $2+3$

1. $+\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
2. $\equiv (\lambda mnfx.mf(nfx))\lceil 2\rceil\lceil 3\rceil$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda fx.\lceil 2\rceil f(\lceil 3\rceil fx)$
4. $\equiv \lambda fx.\lceil 2\rceil f((\lambda fx.f(f(fx)))fx)$
5. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lambda fx.\lceil 2\rceil f(f(f(fx)))$
6. $\equiv \lambda fx.(\lambda fx.f(fx))f(f(f(fx)))$
7. $\rightarrow_{\beta} \lambda fx.(\lambda x.f(fx))(f(f(fx)))$
8. $\rightarrow_{\beta} \lambda fx.f(f(f(f(fx))))$
9. $\equiv \lceil 5\rceil$

演算 乗算

掛け算とは

- $P\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner m \times n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

演算 乗算

掛け算とは

- $P\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner m \times n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

- $\times \quad := \lambda mnfx.m(nf)x$

はこれを満たす

Subsection 7

演算 減算

演算 後者関数

後者関数とは

- $P\ulcorner n \urcorner \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner n+1 \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

演算 後者関数

後者関数とは

- $P\lceil n \rceil \xrightarrow[\beta]{} \lceil n+1 \rceil$

を満たすようなλ式Pのこと

- $\mathrm{succ} := \lambda nfx.f(nfx)$

はこれを満たす

構造 対

対とは、あるλ式x、yがあって

- $x(PMN) \twoheadrightarrow_{\beta} M$
- $y(PMN) \twoheadrightarrow_{\beta} N$

を満たすようなλ式Pのこと

構造 対

対とは、あるλ式x、yがあって

- $x(PMN) \twoheadrightarrow_{\beta} M$
- $y(PMN) \twoheadrightarrow_{\beta} N$

を満たすようなλ式Pのこと

- $\pi_1 := \lambda xy.x$
- $\pi_2 := \lambda xy.y$
- $\mathrm{pair} := \lambda xyp.pxy$

はこれを満たす

演算 前者関数

このような準備の下で、前者関数とは

- $P\ulcorner 0 \urcorner \twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner 0 \urcorner$
- $P\ulcorner n+1 \urcorner \twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

演算 前者関数

このような準備の下で、前者関数とは

- $P\ulcorner 0 \urcorner \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner 0 \urcorner$
- $P\ulcorner n+1 \urcorner \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

$$\begin{aligned}\mathrm{pred} \;:=\; \lambda n.\pi_2(n\; & (\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\ & (\mathrm{pair}\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner))\end{aligned}$$

はこれを満たす

演算 前者関数 例

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{pred}\ulcorner 2 \urcorner \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \pi_2(\ulcorner 2 \urcorner(\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\
& \quad (\mathrm{pair}\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner)) \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \pi_2((\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\
& \quad ((\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\
& \quad (\mathrm{pair}\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner)))) \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \pi_2((\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\
& \quad ((\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1(\mathrm{pair}\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner))) \\
& \qquad (\pi_1(\mathrm{pair}\ulcorner 0 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner))))) \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \pi_2((\lambda p.\mathrm{pair}(\mathrm{succ}(\pi_1 p))(\pi_1 p)) \\
& \quad ((\mathrm{pair}\ulcorner 1 \urcorner \ulcorner 0 \urcorner))) \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \pi_2(\mathrm{pair}\ulcorner 2 \urcorner \ulcorner 1 \urcorner) \\
\twoheadrightarrow_\beta\ & \ulcorner 1 \urcorner
\end{aligned}
$$

演算 限定減算 定義

引き算とは

- $P\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner \twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner m \dot{-} n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

演算 限定減算 定義

引き算とは

- $P\ulcorner m \urcorner \ulcorner n \urcorner \twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner m \dot{-} n \urcorner$

を満たすようなλ式Pのこと

- $\dot{-} := \lambda mn.n \mathrm{pred}\, m$

はこれを満たす

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} \lceil 5 \rceil \lceil 3 \rceil$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-}\ulcorner 5 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ulcorner 3 \urcorner \mathrm{pred} \ulcorner 5 \urcorner$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-}\ulcorner 5 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner 3 \urcorner \mathrm{pred} \ulcorner 5 \urcorner$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \mathrm{pred}(\mathrm{pred}(\mathrm{pred} \ulcorner 5 \urcorner))$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} \ulcorner 5 \urcorner \ulcorner 3 \urcorner$
2. $\twoheadrightarrow_{\beta} \ulcorner 3 \urcorner \mathrm{pred} \ulcorner 5 \urcorner$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \mathrm{pred}(\mathrm{pred}(\mathrm{pred} \ulcorner 5 \urcorner))$
4. $\ldots$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-}\lceil 5 \rceil \lceil 3 \rceil$
2. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lceil 3 \rceil \mathrm{pred} \lceil 5 \rceil$
3. $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathrm{pred}(\mathrm{pred}(\mathrm{pred} \lceil 5 \rceil))$
4. $\ldots$
5. $\ldots$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-}\lceil 5 \rceil \lceil 3 \rceil$
2. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lceil 3 \rceil \mathrm{pred} \lceil 5 \rceil$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \mathrm{pred}(\mathrm{pred}(\mathrm{pred} \lceil 5 \rceil))$
4. $\ldots$
5. $\ldots$
6. $\ldots$

演算 限定減算 例

1. $\dot{-} \lceil 5 \rceil \lceil 3 \rceil$
2. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lceil 3 \rceil \mathrm{pred} \lceil 5 \rceil$
3. $\twoheadrightarrow_{\beta} \mathrm{pred}(\mathrm{pred}(\mathrm{pred} \lceil 5 \rceil))$
4. $\ldots$
5. $\ldots$
6. $\ldots$
7. $\twoheadrightarrow_{\beta} \lceil 2 \rceil$

SKI combinators

- $S := \lambda fgx.fx(gx)$
- $K := \lambda xy.x$

SKI combinators 例

- $I := \lambda x.x$
- $I \equiv SKK$

SKI combinators 例 加算

例えば、加算$+$をS, Kのみで表現すると以下のようになる

$$
\begin{aligned}
(S(S(KS)\ \ &(S(KK)(SI(K(S(K(S(S(KS)K))) \\
&Y(S(S(KS)K)(KI)))))))(KI))
\end{aligned}
$$

ただし$I \equiv SKK$

SKI combinators 変換

以下のような変換Tで、*lambda*式をS, Kのみの形に変換できる

- $T[x] \rightarrow x$
- $T[MN] \rightarrow (T[M])(T[N])$
- $T[\lambda x.x] \rightarrow SKK$
- $T[\lambda x.y] \rightarrow Ky$
- $T[\lambda x.\lambda y.M(x)] \rightarrow T[\lambda x.T[\lambda y.M(x)]]$
- $T[\lambda x.M(x)N(x)] \rightarrow$ $S(T[\lambda x.M(x)])(T[\lambda x.N(x)])$

参考文献

- 高橋正子, 計算論, 近代科学社(1991)
  - 計算可能性の話
  - λ計算の体系と他の計算体系が等価であることとか
  - 逆極限法を用いて、無限に計算し続けた結果の極限の話をする
- 横内寛文, プログラム意味論, 共立出版(1994)
  - λ式の意味論の話
  - こちらも逆極限法
  - cartesian閉圏による形式体系も載ってる
- 中島玲二, 数理情報学入門, 朝倉書店(1982)
  - 絶版
  - 意味論
  - 実際に用いられているプログラミング言語を見据えた感じ
  - 逆極限法とかも載ってる