

Полиномиальная интерполяция

Student: Maria Balakaeva, maria.balakaeva@mail.ru

Lecturer: Andrey Alekseevich Kornev, cp54@yandex.ru

Пусть задана дискретная функция $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Требуется построить алгебраический полином $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

. Такой полином называется интерполяционным. Его коэффициенты могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_0, a_1, \dots, a_{n-1} :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1} \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, т.к. ее определителем является определитель Ван дер Монда (отличен от нуля в случае $x_i \neq x_j, i \neq j$). Однако, построение полинома $P_{n-1}(x)$ через явное вычисление его коэффициентов приводит к катастрофической потере точности уже при $n \approx 20/50$. Поэтому обычно для расчетов используют запись интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

$$P_{n-1}(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Phi_i(x), \quad \Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

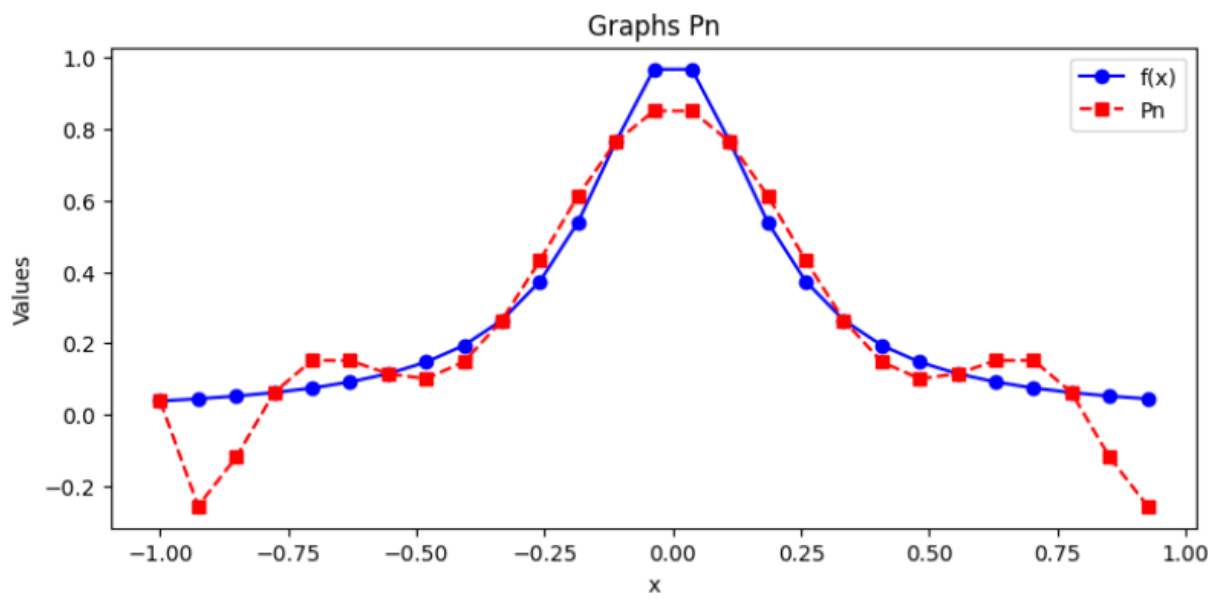
Problem 1

Реализовать построение интерполяционного полинома в канонической форме $P_{n-1}(x)$ и в форме Лагранжа $L_n(x)$.

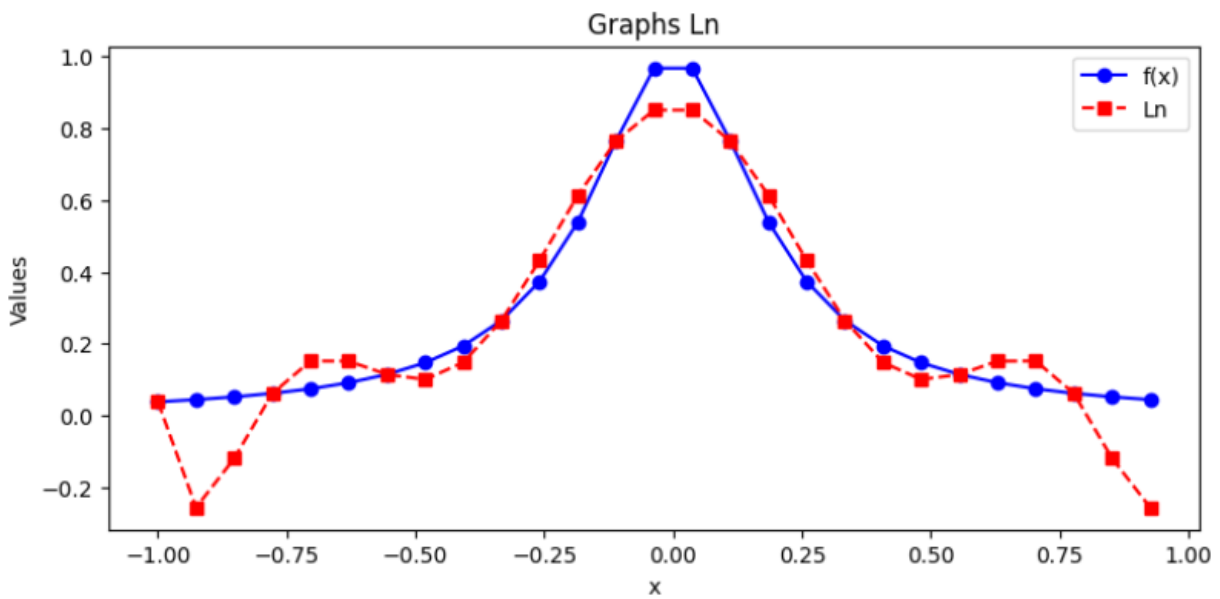
Problem 2

Численно продемонстрировать:

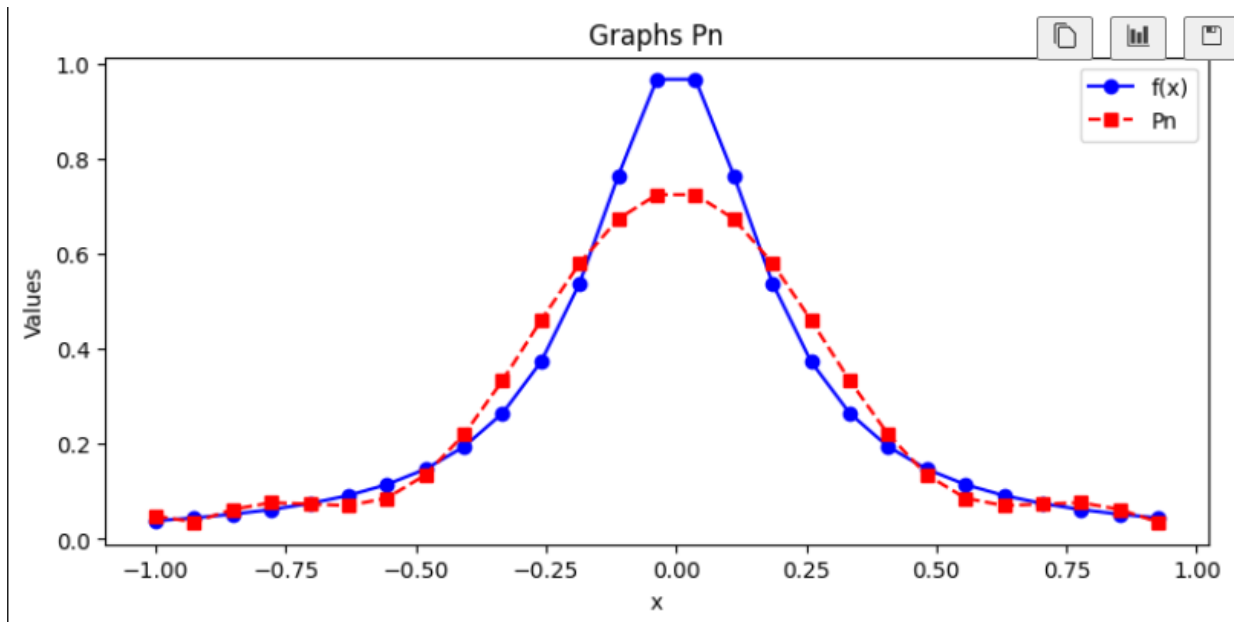
- (i) правильность работы программы;
- (ii) плохую вычислительную устойчивость при больших n методов построения как $P_{n-1}(x)$, так и $L_n(x)$;
- (iii) отсутствие сходимости для бесконечно дифференцируемой функции Рунге по равноотстоящим узлам и экспоненциальную сходимость по узлам Чебышева;
- (iv) отсутствие сходимости интерполяционного полинома для недифференцируемой функции $|x|$.



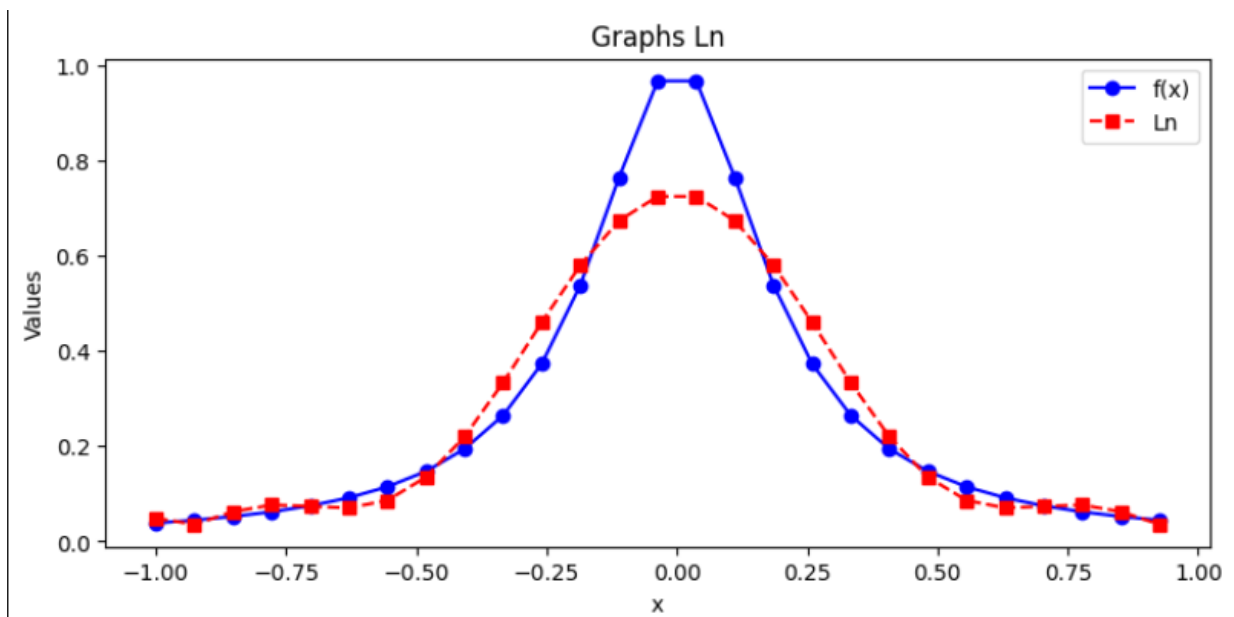
Runge's function, $N=10$



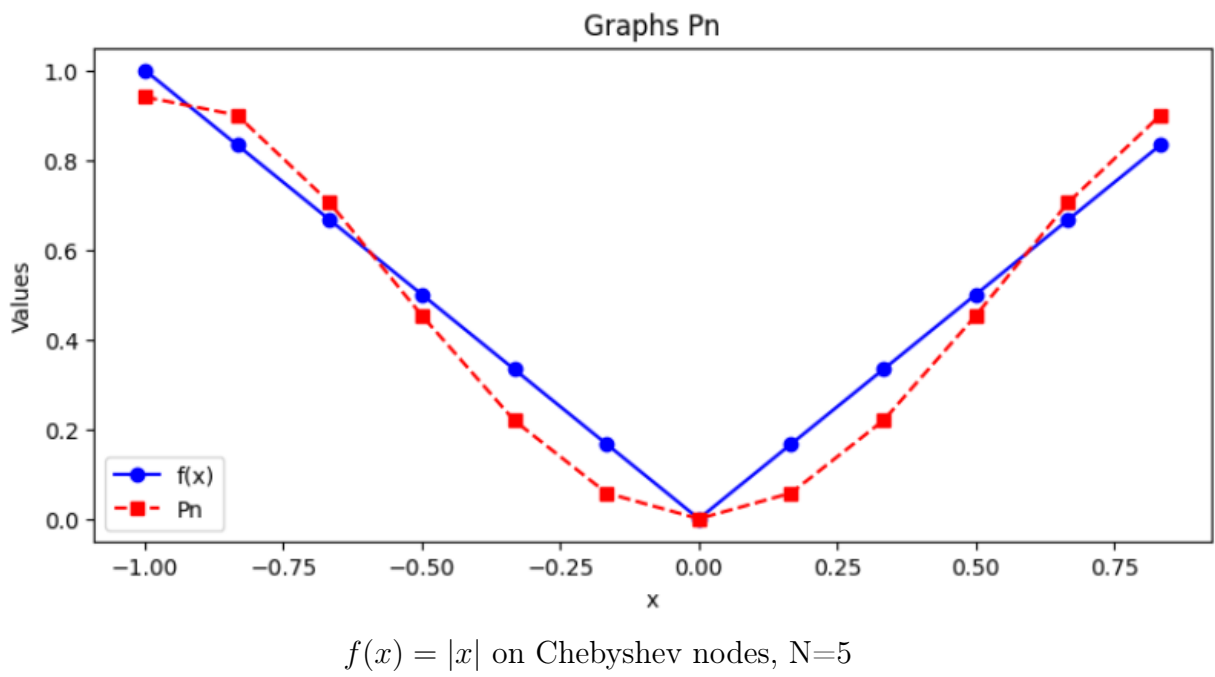
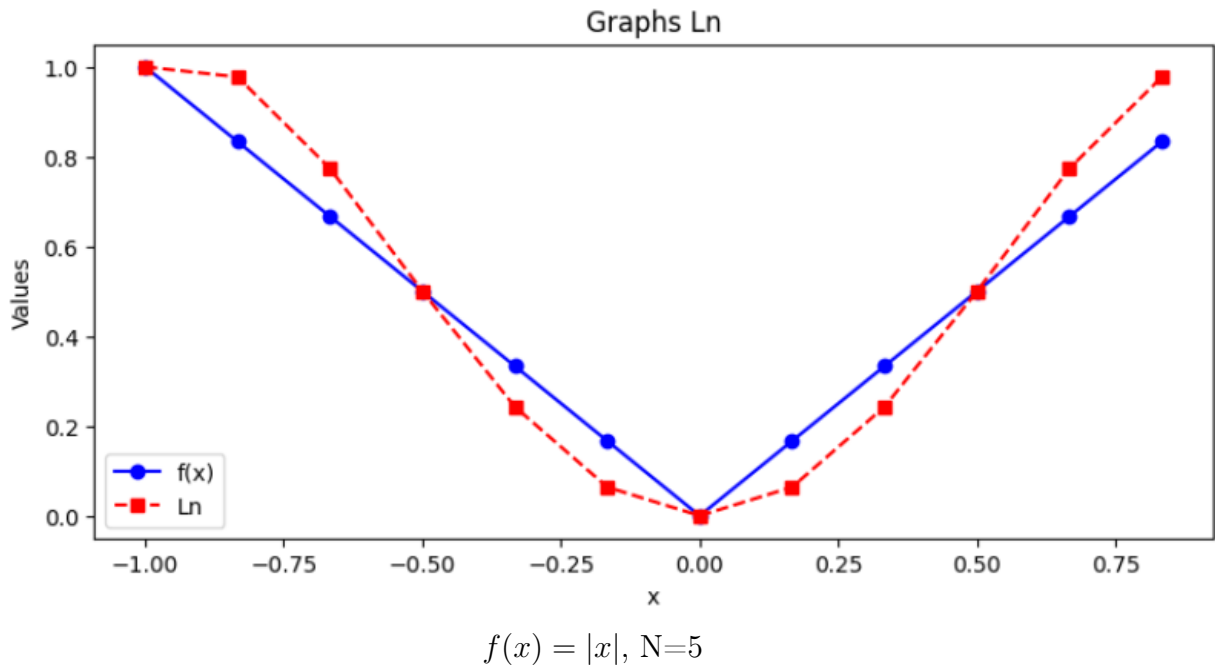
Runge's function, $N=10$



Runge's function on Chebyshev nodes, $N=10$



Runge's function on Chebyshev nodes, $N=10$



For more information: [GitHub](#).