$$A\,y = f\,,$$

где $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T$ — искомый вектор неизвестных, $f = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T$ — заданный вектор правых частей, A — квадратная $(N+1) \times (N+1)$ матрица:

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix}.$$

Основная идея метода состоит в представлении решения в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\,, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0\,, \tag{2}$$

для которого значения α_i, β_i и y_N необходимо вычислять по коэффициентам исходной системы и компонентам вектора правой части.

Перепишем первое уравнение (1) в виде (2):

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1\,, \quad \alpha_1 = b_0/c_0\,, \;\; \beta_1 = f_0/c_0\,.$$

Затем к полученному соотношению добавим уравнение из (1) при $i = 1$:

$$\begin{gathered} y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1\,, \\ -a_1 y_0 + c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Из этой системы исключим переменную y_0:

$$(c_1 - a_1\alpha_1) y_1 - b_1 y_2 = f_1 + a_1 \beta_1\,,$$

и перепишем полученное соотношение в виде (2):

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2\,, \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1}\,, \;\; \beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1}\,.$$

Следующий шаг подобен предыдущему: возьмем последнее соотношение и добавим к нему уравнение из (1) при $i = 2$:

$$\begin{gathered} y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2\,, \\ -a_2 y_1 + c_2 y_2 - b_2 y_3 = f_2\,. \end{gathered}$$

Отличие этой пары уравнений от (3) состоит только в сдвиге индексов на единицу, поэтому результат шага можно написать сразу:

$$y_2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3\,, \quad \alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2\alpha_2}\,, \;\; \beta_3 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{c_2 - a_2\alpha_2}\,.$$

Таким образом, каждый раз добавляя к последнему полученному соотношению вида (2) следующее уравнение из системы (1), найдем формулы для вычисления α_i, β_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,, \;\; \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}\,.$$

Этот процесс закончится, когда мы придем к последнему уравнению системы (1), содержащему только два значения неизвестных:

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \,,$$
$$-a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N \,.$$

Исключение из этой системы y_{N-1} приводит к формуле для y_N:

$$y_N = \frac{f_N + a_N \beta_N}{c_N - a_N \alpha_N} \, (= \beta_{N+1}) \,.$$

Вывод формул закончен. Опишем алгоритм в целом.

Для решения системы (1) сначала рекуррентно вычисляются прогоночные коэффициенты α_i, β_i:

$$\alpha_1 = b_0/c_0 \,, \quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i} \,,$$
$$\beta_1 = f_0/c_0 \,, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i} \,,$$

где i последовательно принимает значения $1, 2, \ldots, N-1$.

Затем вычисляется y_N:

$$y_N = \frac{f_N + a_N \beta_N}{c_N - a_N \alpha_N} \,.$$

И, наконец, рекуррентно определяются остальные компоненты вектора неизвестных:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \,, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 0 \,.$$

Полученные соотношения называют формулами *правой* прогонки. Формулы *левой* прогонки можно получить, проводя исключение неизвестных в обратном порядке. Рекомендуется это проделать в качестве самостоятельного упражнения.