Приближение функции рядом Фурье

Мария Балакаева, 409, maria.balakaeva@mail.ru

1: Входные данные

(1) Краевые условия
$$u(0) = u(1) = 0,$$

(2) Сетка
$$x_0 = -\frac{h}{2}, \quad x_N = 1, \quad h = \frac{1}{N - 0.5}$$

2: Задача

(a) Для функции $u(x) \in C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющей указанным краевым условиям, выписать тригонометрический ряд Фурье и сформулировать теорему сходимости

(b) На заданной сетке выписать дискретный тригонометричекий ряд Фурье. Найти дискретное скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. Нормировать базисные функции.

(c) Для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок сходимости её дискретного ряда Фурье.

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_k cos(\pi k x) + b_k sin(\pi k x)) \tag{1}$$

Сформулируем теорему сходиомости:

Утверждение 1

Если интегрируемая функция f имеет ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x_0, то ряд (1) сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Дискретизируем нашу задачу, зададим конечное количество узлов:

$$u_k := u(x_k),\ x_k := \frac{-h}{2} + kh,$$

Решая задачу на поиск собственных значений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \\ y_0 = -y_1, \\ y_N = 0, \end{cases}$$

Получим вид базисных функций ϕ_k^m:

$$\phi_k^{(n)} := c_n \sin\left(\frac{\pi n(2k-1)}{2N-1}\right) = \sin\left(\pi n(-\frac{h}{2}+kh)\right),\ \phi_k^{(n)} = \begin{pmatrix} \phi_1^n \\ ... \\ \phi_{N-1}^n) \end{pmatrix}$$

Убедимся, что указанная система функций ортогональна относительно скалярного произведения $(\phi_k^{(n)}, \phi_k^{(m)}) = \sum_{k=1}^{N-1} \phi_k^{(n)}\phi_k^{(m)}h$:

$$(\phi_k^{(n)}, \phi_k^{(m)}) = \sum_{k=1}^{N-1} \phi_k^{(n)}\phi_k^{(m)}h = \sum_{k=1}^{N-1} \sin\left(\pi n(\frac{-h}{2}+kh)\right)\sin\left(\pi m(\frac{-h}{2}+kh)\right)h$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}[\cos(\pi h(k-\frac{1}{2})(n-m)) - \cos(\pi h(k-\frac{1}{2})(n+m))]h.$$

Заметим, что при $\alpha \neq 0$ справедливо:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos\left(\alpha m - \frac{\alpha}{2}\right) = Re\sum_{m=1}^{N-1} e^{i(\alpha m - \frac{\alpha}{2})} = Re\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}(e^{i\alpha(N-1)}-1)}{e^{i\alpha-1}} = \frac{\sin((N-1)\alpha)}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Отсюда при $m \neq n$ и $\alpha = \pi h(n \pm m)$:

$$(\phi_k^{(n)}, \phi_k^{(m)}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}[\cos\left((\pi h(k-\frac{1}{2})(n-m))\right) - \cos\left((\pi h(k-\frac{1}{2})(n+m))\right)]h$$
$$= h\left[\frac{\sin((N-0.5-0.5)\pi h(n-m))}{4\sin(\pi h(n-m)/2)} - \frac{\sin((N-0.5-0.5)\pi h(n+m))}{4\sin(\pi h(n+m)/2)}\right]$$
$$= h\left[\frac{\sin(\pi(n-m)-0.5\pi h(n-m))}{4\sin(\pi h(n-m)/2)} - \frac{\sin(\pi(n+m)-0.5\pi h(n+m))}{4\sin(\pi h(n+m)/2)}\right]$$
$$= h\left[\frac{(-1)^{n-m}\sin(\pi h(n-m)/2)}{4\sin(\pi h(n-m)/2)} - \frac{(-1)^{k+j}\sin(\pi h(n+m)/2)}{4\sin(\pi h(n+m)/2)}\right]$$
$$= \frac{h}{4}[(-1)^{n-m} - (-1)^{n+m}] = 0.$$

В ином случае,

$$
\begin{aligned}
(\phi^n, \phi^n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}[\cos(\pi h(k-\frac{1}{2})(n-n)) - \cos(\pi h(k-\frac{1}{2})(n+n))]h \\
&= h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin 2(N-1)\pi h n}{4\sin(\pi h n)}\right] = h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin(2-\frac{2}{2N-1})\pi n}{4\sin(\pi h n)}\right] \\
&= h\left[\frac{N-1}{2} - \frac{\sin(\pi h n)}{4\sin(\pi h n)}\right] = h\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{2N-1}\frac{2N-1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Теперь, пользуясь ортогональностью, можно выписать формулу n-го коэффициента:

$$
\begin{aligned}
&u(x) := (u(x_1)...u(x_{N-1})),\ x := (x_1, ..., x_{N-1}) \\
&u(x) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^N \sin \pi n x \\
&(u(x), \phi^m) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^N (\phi^n, \phi^m) \\
&(u(x), \phi^m) = c_m^N (\phi^m, \phi^m).
\end{aligned}
$$

Откуда, наконец, следует искомая формула:

$$
c_n^N = \frac{(u(x), \phi^n)}{(\phi^n, \phi^n)} = 2(u(x), \phi^n). \tag{2}
$$