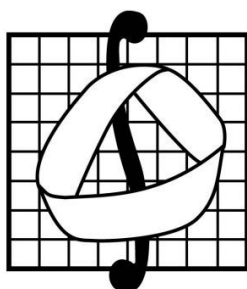


Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет



Проверка порядка сходимости для задачи Фурье

Отчёт

Студента 4 курса 409 группы
Шемякина Сергея Владимировича

Семинарист

Доктор физико-математических наук
Корнев Андрей Алексеевич

г. Москва
2025

Содержание

1	Теория	3
2	Экспериментальные результаты	4
2.1	Тест 1: Константная функция $f(x) = 1$	4
2.2	Тест 2: Негладкая функция $f(x) = x - 1$	4
2.3	Тест 3: Кубическая функция $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$	4
3	Общие выводы	5

1 Теория

Задача:

$$-u''(x) + pu(x) = f(x) \quad (1.1)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad h = \frac{1}{N-1}, \quad x_0 = -\frac{h}{2}, \quad x_N = 1 + \frac{h}{2} \quad (1.2)$$

Разностная схема и её сходимость:

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + pu_k = f_k, & k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} u_0 = u_1, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} u_N = u_{N-1}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Теорема Филиппова:

Пусть выполнены следующие условия:

1. (1.1) и (1.3) линейны
2. Решение дифференциальной задачи (1.1) с краевыми условиями (1.2) \exists !
3. Разностная схема (1.3)-(1.5) аппроксимирует задачу (1.1)-(1.2) с порядком p
4. Разностная схема (1.3)-(1.5) устойчива в норме $\|\cdot\|_{2,h} : \|A^{-1}\|_{2,h} \leq \text{const}$

Тогда решение разностной схемы u_h сходится к решению u дифференциальной задачи с порядком не ниже p .

Определение:

Разностная схема (1.3)-(1.5) аппроксимирует дифференциальную задачу (1.1)-(1.2) с порядком p , если $\exists \text{const} C, p, p_0 : \|L_u[u]_h - f_h\|_{F_h} \leq Ch^p$, где u -решение задачи (1.1)-(1.2) и $\|l_h[u] - \phi_h\|_{\Phi_h} \leq Ch^p$, и необходимо, чтобы

$$\|[f]_h - f_h\|_{F_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \|[\phi]_h - \phi_h\|_{\Phi_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

$$\begin{aligned} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} &= \left\| -\frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} + pu(x_k) - f(x_k) \right\|_{F_h} = \\ &= \left\| -\frac{1}{h^2} \left(u(x_k) + hu'(x_k) + \frac{h^2}{2}u''(x_k) + \frac{h^3}{6}u'''(x_k) + o(h^4) \right) + \frac{2}{h^2}u(x_k) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h^2} \left(u(x_k) - hu'(x_k) + \frac{h^2}{2}u''(x_k) - \frac{h^3}{6}u'''(x_k) + o(h^4) \right) + pu(x_k) - f(x_k) \right\|_{F_h} \\ &= \left\| -u''(x_k) + pu(x_k) - f(x_k) + o(h^2) \right\|_{F_h} \leq Ch^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|u(x_1) - u(x_0)\|_{\Phi_h} + \|u(x_N) - u(x_{N-1})\|_{\Phi_h} = \\ &= \|u(\frac{h}{2}) - u(-\frac{h}{2})\|_{\Phi_h} + \|u(1 + \frac{h}{2}) - u(1 - \frac{h}{2})\|_{\Phi_h} = \\ &= \|u(0) + \frac{h}{2}u'(0) + \frac{h^2}{8}u''(0) + \frac{h^3}{48}u'''(0) + o(h^4) - \left(u(0) - \frac{h}{2}u'(0) + \frac{h^2}{8}u''(0) - \frac{h^3}{48}u'''(0) + o(h^4) \right)\|_{\Phi_h} + \\ &\quad + \|u(1) + \frac{h}{2}u'(1) + \frac{h^2}{8}u''(1) + \frac{h^3}{48}u'''(1) + o(h^4) - \left(u(1) - \frac{h}{2}u'(1) + \frac{h^2}{8}u''(1) - \frac{h^3}{48}u'''(1) + o(h^4) \right)\|_{\Phi_h} = \\ &= \|hu'(0) + \frac{h^3}{24}u'''(0) + o(h^4)\|_{\Phi_h} + \|hu'(1) + \frac{h^3}{24}u'''(1) + o(h^4)\|_{\Phi_h} = \\ &= \left\| \frac{h^3}{24}u'''(0) + o(h^4) \right\|_{\Phi_h} + \left\| \frac{h^3}{24}u'''(1) + o(h^4) \right\|_{\Phi_h} \leq Ch^3 \\ &\implies \text{Разностная схема (1.3)-(1.5) аппроксимирует задачу (1.1)-(1.2) с порядком} \\ &p = 2. \end{aligned}$$

Устойчивость:

Пусть $L_h u_h = f_h, L_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$. Хотим $\|u_h - \tilde{u}_h\|_h \leq C_1 \|f_h - \tilde{f}_h\|_h$.

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_h = \|L_h^{-1} f_h - L_h^{-1} \tilde{f}_h\|_h = \|L_h^{-1} (f_h - \tilde{f}_h)\|_h \leq \|L_h^{-1}\|_h \|f_h - \tilde{f}_h\|_h \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \|f_h - \tilde{f}_h\|_h.$$

Реализация:

Порядок сходимости = 2, значит, схема должна быть точна для полиномов до 2-ой степени.

2 Экспериментальные результаты

2.1 Тест 1: Константная функция $f(x) = 1$

Таблица 1: Результаты для $f(x) = 1 + 0 \cdot x$

Число узлов N	Порядок сходимости	Особенности
20	nan	Точное решение достигается сразу, ошибка машинного нуля
40	nan	
80	nan	
160	nan	
320	nan	

Вывод: Для константной функции схема даёт точное решение уже при $N = 20$, что соответствует теоретическим ожиданиям.

2.2 Тест 2: Негладкая функция $f(x) = |x| - 1$

Таблица 2: Результаты для $f(x) = |x| - 1$

Число узлов N	Порядок сходимости
20	3.13993
40	2.4907
80	2.91927
160	2.24999
320	2.67257

Анализ:

- Наблюдается колебание порядка сходимости около 2

2.3 Тест 3: Кубическая функция $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$

Выводы:

Таблица 3: Результаты для $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$

Число узлов N	Порядок сходимости
20	1.98555
40	1.94435
80	3.29337
160	2.70762
320	2.67158

- Для гладкой кубической функции схема демонстрирует порядок сходимости ≈ 2

3 Общие выводы

- Для константных функций достигается машинная точность
- Для негладких функций порядок сходимости около 2