

ПРОГРАММА КУРСА

1. Матричные нормы. Подчиненные матричные нормы.
2. Максимальная строчная и максимальная столбцовая нормы. Их подчиненность.
3. Спектральная норма и ее свойства. Спектральный радиус и его свойства.
4. Обратимость матрицы, близкой к обратимой (теорема Банаха).
5. Оценка относительной погрешности решения линейной системы через относительные погрешности в матрице системы и в правой части. Число обусловленности.
6. Оценка относительной погрешности решения линейной системы через невязку. Свойства числа обусловленности.
7. Метод Гаусса. Оценка числа арифметических операций.
8. Представление метода Гаусса в виде последовательности элементарных преобразований. LU -разложение.
9. Алгоритм построения LU -разложения. Оценка числа арифметических операций.
10. Критерий осуществимости метода Гаусса.
11. Метод Гаусса для ленточных матриц. Оценка числа арифметических операций.
12. Алгоритм построения LU -разложения для трехдиагональных матриц. Оценка числа арифметических операций. Организация хранения матриц в памяти ЭВМ.
13. Метод прогонки для трехдиагональных матриц. Оценка числа арифметических операций. Организация хранения матриц в памяти ЭВМ.
14. Задача обращения матрицы. Обращение матрицы с помощью LU -разложения. Оценка числа арифметических операций.
15. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Критерий осуществимости. Способы программной реализации.
16. Метод Жордана (Гаусса-Жордана) решения систем линейных уравнений. Оценка числа арифметических операций.
17. Положительно определенные матрицы. Осуществимость LU -разложения для положительно определенных матриц.
18. Теорема о разложении Холецкого для самосопряженной матрицы.
19. Метод Холецкого (квадратного корня) решения систем линейных уравнений. Организация процесса вычислений и хранения матриц в памяти ЭВМ. Оценка числа арифметических операций.
20. Метод ортогонализации решения систем линейных уравнений. Оценка числа арифметических операций.
21. Матрица элементарного вращения и ее свойства (геометрический смысл, затраты на вычисление произведений на вектор и матрицу).

22. Метод вращений решения систем линейных уравнений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
23. Теорема о построении QR -разложения методом вращений. Единственность разложения. Способы хранения матриц Q и R в памяти ЭВМ. Оценка числа арифметических операций, необходимых для построения QR - разложения.
24. Матрица отражения и ее свойства (геометрический смысл, затраты на вычисление произведений на вектор и матрицу).
25. Метод отражений решения систем линейных уравнений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
26. Теорема о построении QR -разложения методом отражений. Единственность разложения. Способы хранения матриц Q и R в памяти ЭВМ. Оценка числа арифметических операций, необходимых для построения QR -разложения.
27. Приведение матрицы к почти треугольному виду унитарным подобием методом вращений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
28. Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду унитарным подобием методом вращений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
29. Приведение матрицы к почти треугольному виду унитарным подобием методом отражений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
30. Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду унитарным подобием методом отражений. Осуществимость. Оценка числа арифметических операций.
31. Локализация собственных значений. Теорема о кругах Гершгорина.
32. Оценка погрешности нахождения собственных значений через погрешность в матрице системы для диагоналируемых матриц.
33. Степенной метод поиска максимального собственного значения. Достаточные условия сходимости. Оценка числа арифметических операций на один шаг алгоритма.
34. Общий вид методов нахождения собственных значений, минимизирующих сумму квадратов внедиагональных элементов матрицы. Теорема о сходимости таких методов (достаточное условие окончания итераций).
35. Преобразование элементарного вращения, используемое в методе вращений Якоби. Вид формул, обеспечивающий меньшее накопление вычислительной погрешности.
36. Стратегии выбора очередного обнуляемого элемента в методе Якоби. Оценка скорости сходимости в случае обнуления максимального по модулю внедиагонального элемента. Оценка числа арифметических операций на один шаг алгоритма для каждой из стратегий.
37. Вычисление k -го по величине собственного значения методом бисекции. Оценка количества итераций. Способы вычисления числа перемен знака в последовательности главных миноров. Организация процесса вычислений для предотвращения переполнения или потери точности.

38. Вычисление всех собственных значений матрицы на заданном интервале методом бисекции. Оценка количества итераций. Способы вычисления числа перемен знака в последовательности главных миноров. Организация процесса вычислений для предотвращения переполнения или потери точности.
39. Теорема о LR -разложении. LR -алгоритм поиска собственных значений, его осуществимость. Достаточные условия сходимости (без доказательства).
40. Алгоритм построения LR -разложения. Сохранение почти треугольного вида матрицы в LR -алгоритме нахождения собственных значений.
41. Алгоритм построения LR -разложения для почти треугольной матрицы. Расчетные формулы LR -алгоритма нахождения собственных значений для почти треугольной матрицы. Оценка числа арифметических операций на один шаг алгоритма.
42. Ускорение сходимости LR -алгоритма с помощью исчерпывания матрицы и сдвигов (без доказательства). Пример выбора сдвига и исчерпывания матрицы.
43. Теорема о разложении Холецкого, используемом в методе Холецкого поиска собственных значений симметричной матрицы. Метод Холецкого поиска собственных значений симметричной матрицы, его осуществимость. Достаточные условия сходимости (без доказательства).
44. Алгоритм построения разложения Холецкого, используемом в методе Холецкого поиска собственных значений симметричной матрицы. Сохранение трехдиагонального вида матрицы в методе Холецкого поиска собственных значений симметричной матрицы.
45. Алгоритм построения разложения Холецкого, используемом в методе Холецкого поиска собственных значений симметричной матрицы, для трехдиагональной матрицы. Расчетные формулы метода Холецкого поиска собственных значений для трехдиагональной матрицы. Оценка числа арифметических операций на один шаг алгоритма.
46. Ускорение сходимости метода Холецкого поиска собственных значений с помощью исчерпывания матрицы и сдвигов (без доказательства). Пример выбора сдвига и исчерпывания матрицы.
47. QR -алгоритм поиска собственных значений, его осуществимость. Достаточные условия сходимости (без доказательства).
48. Сохранение почти треугольного вида матрицы в QR -алгоритме нахождения собственных значений.
49. Алгоритм построения QR -разложения для почти треугольной матрицы. Расчетные формулы QR -алгоритма нахождения собственных значений для почти треугольной матрицы. Оценка числа арифметических операций на один шаг алгоритма.
50. Ускорение сходимости QR -алгоритма с помощью исчерпывания матрицы и сдвигов (без доказательства). Пример выбора сдвига и исчерпывания матрицы.