Lineare Abbildungen + Kern/Bild...

Christina Puhl

12. Juni 2006

Gliederung

Definitionen

- Bild, Kern

Definition

- Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, so nennen wir
  - $\mathrm{Im} F := F(V)$ das Bild von F,
  - $\ker F = F^{-1}(0)$, den Kern von F.

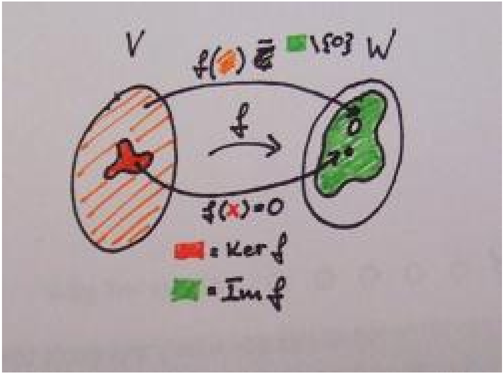


Abbildung: $\ker F$, $\mathrm{Im} F$.

Aufgabe

- Sei $a_3 = a_1 + a_2$ und F eine lineare Abbildung mit $F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$ und $F(a_3) = b_3$. Was muss dann für b_1, b_2, b_3 gelten?
- Es muss gelten: $f(b_3) = f(b_1) + f(b_2)$
- Gibt es $\mathbb{R}-$lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^3$ jeweils auf die angegebenen Vekotren $b_i \in \mathbb{R}^2$ abbilden und wie sieht diese aus?
- $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ und $b_1 = (0, 0)$, $b_2 = (1, 1)$, $b_3 = (0, 1)$.
- Nein, da $a_1 = a_2 + a_3$ müsste auch $b_1 = b_2 + b_3$ gelten.

Aufgabe

- Sei $a_3 = a_1 + a_2$ und F eine lineare Abbildung mit $F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$ und $F(a_3) = b_3$. Was muss dann für b_1, b_2, b_3 gelten?
- Es muss gelten: $f(b_3) = f(b_1) + f(b_2)$
- Gibt es $\mathbb{R}-$lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^3$ jeweils auf die angegebenen Vekotren $b_i \in \mathbb{R}^2$ abbilden und wie sieht diese aus?
- $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ und $b_1 = (0, 0)$, $b_2 = (1, 1)$, $b_3 = (0, 1)$.
- Nein, da $a_1 = a_2 + a_3$ müsste auch $b_1 = b_2 + b_3$ gelten.

Aufgabe

- Sei $a_3 = a_1 + a_2$ und F eine lineare Abbildung mit $F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$ und $F(a_3) = b_3$. Was muss dann für b_1, b_2, b_3 gelten?
- Es muss gelten: $f(b_3) = f(b_1) + f(b_2)$
- Gibt es $\mathbb{R}-$lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^3$ jeweils auf die angegebenen Vekotren $b_i \in \mathbb{R}^2$ abbilden und wie sieht diese aus?
- $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ und $b_1 = (0, 0)$, $b_2 = (1, 1)$, $b_3 = (0, 1)$.
- Nein, da $a_1 = a_2 + a_3$ müsste auch $b_1 = b_2 + b_3$ gelten.

Aufgabe

- Sei $a_3 = a_1 + a_2$ und F eine lineare Abbildung mit $F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$ und $F(a_3) = b_3$. Was muss dann für b_1, b_2, b_3 gelten?
- Es muss gelten: $f(b_3) = f(b_1) + f(b_2)$
- Gibt es $\mathbb{R}-$lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^3$ jeweils auf die angegebenen Vekotren $b_i \in \mathbb{R}^2$ abbilden und wie sieht diese aus?
- $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ und $b_1 = (0, 0)$, $b_2 = (1, 1)$, $b_3 = (0, 1)$.
- Nein, da $a_1 = a_2 + a_3$ müsste auch $b_1 = b_2 + b_3$ gelten.

Aufgabe

- $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0)$ und $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (0, 1)$ und $b_3 = (2, 4)$.
- Ja, denn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_2 + x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$ bildet a_i auf $b_i$ab.
- Weiter Darstellungsmöglichkeiten:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$$

oder

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe

- $a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (1,0,0)$, $a_3 = (0,1,0)$ und $b_1 = (1,0)$, $b_2 = (0,1)$ und $b_3 = (2,4)$.
- Ja, denn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto (2x_2 + x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$ bildet a_i auf $b_i$ab.
- Weiter Darstellungsmöglichkeiten:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_2 - x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$$

oder

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe

- $a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (1,0,0)$, $a_3 = (0,1,0)$ und $b_1 = (1,0)$, $b_2 = (0,1)$ und $b_3 = (2,4)$.
- Ja, denn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_2 + x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$ bildet a_i auf $b_i$ab.
- Weiter Darstellungsmöglichkeiten:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - x_1, x_1 + 4x_2 - x_3)$$

oder

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe

- Wie kommt man von $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x_1 + x_2 - 3x_3, x_2)$ auf eine Matrizendarstellung?
- 1. Schritt: Schreibe eine leere Matrix mit 3–Spalten und 2-Zeilen. Dabei repäsentiert die 1. Spalte die x_1- Werte, die 2. Spalte die x_2- Werte ... des Urbildraums.

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

- 2. Schritt: Jede Zeile repräsentiert eine Koordinate im Zielraum. Schreibe für jede Zeile die Koeffizienten der x_i auf, die den jeweiligen Wert bilden.

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

Aufgabe

- Wie kommt man von $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x_1 + x_2 - 3x_3, x_2)$ auf eine Matrizendarstellung?
- 1. Schritt: Schreibe eine leere Matrix mit 3−Spalten und 2-Zeilen. Dabei repäsentiert die 1. Spalte die x_1- Werte, die 2. Spalte die x_2- Werte ... des Urbildraums.

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$
$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

- 2. Schritt: Jede Zeile repräsentiert eine Koordinate im Zielraum. Schreibe für jede Zeile die Koeffizienten der x_i auf, die den jeweiligen Wert bilden.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

Aufgabe

- Wie kommt man von $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x_1 + x_2 - 3x_3, x_2)$ auf eine Matrizendarstellung?
- 1. Schritt: Schreibe eine leere Matrix mit $3-$Spalten und 2-Zeilen. Dabei repäsentiert die 1. Spalte die x_1- Werte, die 2. Spalte die x_2- Werte ... des Urbildraums.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

- 2. Schritt: Jede Zeile repräsentiert eine Koordinate im Zielraum. Schreibe für jede Zeile die Koeffizienten der x_i auf, die den jeweiligen Wert bilden.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

Aufgabe

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $F(x) := Ax$. Dann stellen die Spalten von A ein Erzeugendensystem vom $\mathrm{Im}F$ dar.
- Betrachte

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D.h. Jedes $y \in \mathrm{Im}F$ hat die Form $y = \binom{x_1+3x_2}{2x_2+4x_3}$.
- Das kann man umschreiben zu

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Also läßt sich y als Linearkombination von $\binom{1}{0}, \binom{3}{4}$ und $\binom{0}{4}$

Aufgabe

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $F(x) := Ax$. Dann stellen die Spalten von A ein Erzeugendensystem vom $\mathrm{Im}F$ dar.
- Betrachte

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D.h. Jedes $y \in \mathrm{Im}F$ hat die Form $y = \binom{x_1+3x_2}{2x_2+4x_3}$.
- Das kann man umschreiben zu

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Also läßt sich y als Linearkombination von $\binom{1}{0}$, $\binom{3}{4}$ und $\binom{0}{4}$

Aufgabe

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $F(x) := Ax$. Dann stellen die Spalten von A ein Erzeugendensystem vom ImF dar.
- Betrachte

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D.h. Jedes $y \in \mathrm{Im}F$ hat die Form $y = \binom{x_1+3x_2}{2x_2+4x_3}$.
- Das kann man umschreiben zu

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Also läßt sich y als Linearkombination von $\binom{1}{0}$, $\binom{3}{4}$ und $\binom{0}{4}$

Aufgabe

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $F(x) := Ax$. Dann stellen die Spalten von A ein Erzeugendensystem vom $\mathrm{Im}F$ dar.
- Betrachte

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D.h. Jedes $y \in \mathrm{Im}F$ hat die Form $y = \binom{x_1+3x_2}{2x_2+4x_3}$.
- Das kann man umschreiben zu

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Also läßt sich y als Linearkombination von $\binom{1}{0}$, $\binom{3}{4}$ und $\binom{0}{4}$

Aufgabe

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $F(x) := Ax$. Dann stellen die Spalten von A ein Erzeugendensystem vom $\mathrm{Im} F$ dar.
- Betrachte

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D.h. Jedes $y \in \mathrm{Im} F$ hat die Form $y = \binom{x_1 + 3x_2}{2x_2 + 4x_3}$.
- Das kann man umschreiben zu

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Also läßt sich y als Linearkombination von $\binom{1}{0}, \binom{3}{4}$ und $\binom{0}{4}$

Aufgabe

Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension hat $\mathrm{Im} F$? Welche Dimension hat $\ker F$?
Bestimme eine Basis von $\mathrm{Im} F$ und $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Basis von ImF:
- $F : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dann bilden die Spalten ein Erzeugendensystem von ImF.
- D.h. wir suchen eine maximale Anzahl linear unabhängier Vektoren, z.B. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Lösung

- Bestimme die Basis von ImF:
- $F : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- Dann bilden die Spalten ein Erzeugendensystem von ImF.
- D.h. wir suchen eine maximale Anzahl linear unabhängier Vektoren, z.B. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Lösung

- Bestimme die Basis von ImF:
- $F : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- Dann bilden die Spalten ein Erzeugendensystem von ImF.
- D.h. wir suchen eine maximale Anzahl linear unabhängier Vektoren, z.B. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Lösung

- Bestimme die Basis von ImF:
- $F : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dann bilden die Spalten ein Erzeugendensystem von ImF.
- D.h. wir suchen eine maximale Anzahl linear unabhängier Vektoren, z.B. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: $(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$

- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: ($A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$

- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt
$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$
- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: ($A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt
$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$
- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: $(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt
$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$
- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: ($A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$

- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Lösung

- Bestimme die Baiss von $\ker F$: ($A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
- Löse das Gleichungssystem: $Ax = 0$.
- Setzte $x_4 = a \Rightarrow x_3 = -a$
- Setzte $x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b - a$.
- D.h. $x \in \ker F$, dann gilt
$$x = \begin{pmatrix} -b-a \\ b \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}.$$
- Damit ist $\{c_1, c_2\}$ eine Basis von $\ker F$.

Aufgabe

Aufgabe

Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann gilt

$$\ker F = \{0\} \Leftrightarrow F \text{ ist injektiv.}$$

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Anname es existiert $v_1, v_2 \in V$ mit $F(v_1) = F(v_2)$, aber $v_1 \neq v_2$.
- Dann gilt $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2) = 0$.
- Aber $v_1 - v_2 \neq 0$.
- Widerspruch zu $\ker F = \{0\}$.
- $\Leftarrow$:Anname es existiert ein $v \in V$ mit $F(v) = 0$ und $v \neq 0$.
- Dann gilt $F(v) = F(0)$, aber $v \neq 0$. Widerspruch zu F ist injektiv.

Definition

- Eine Sequenz linearer Abbildung ist eine Folge von linearen Abbildungen F_i mit $F_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}$, wobei V_i $K-$Vektorräume sind.
- z.B. $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{15}$ und $F_3 : \mathbb{R}^{15} \to \{0\}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F_2} \mathbb{R}^{15} \xrightarrow{F_3} \{0\}.$$

- Diese Sequenz heißt exakt, wenn $\ker F_i = \mathrm{Im} F_{i-1}$ gilt.

Definition

- Eine Sequenz linearer Abbildung ist eine Folge von linearen Abbildungen F_i mit $F_i : V_i \to V_{i+1}$, wobei V_i $K-$Vektorräume sind.
- z.B. $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{15}$ und $F_3 : \mathbb{R}^{15} \to \{0\}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F_2} \mathbb{R}^{15} \xrightarrow{F_3} \{0\}.$$

- Diese Sequenz heißt exakt, wenn $\ker F_i = \mathrm{Im} F_{i-1}$ gilt.

Definition

- Eine Sequenz linearer Abbildung ist eine Folge von linearen Abbildungen F_i mit $F_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}$, wobei V_i $K-$Vektorräume sind.
- z.B. $F_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{15}$ und $F_3 : \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \{0\}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F_2} \mathbb{R}^{15} \xrightarrow{F_3} \{0\}.$$

- Diese Sequenz heißt exakt, wenn $\ker F_i = \mathrm{Im} F_{i-1}$ gilt.

Definition

- Eine Sequenz linearer Abbildung ist eine Folge von linearen Abbildungen F_i mit $F_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$, wobei V_i $K-$Vektorräume sind.
- z.B. $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{15}$ und $F_3 : \mathbb{R}^{15} \rightarrow \{0\}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F_2} \mathbb{R}^{15} \xrightarrow{F_3} \{0\}.$$

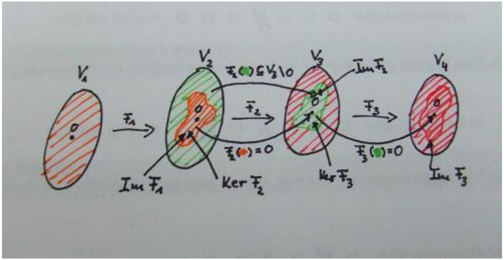
- Diese Sequenz heißt exakt, wenn $\ker F_i = \mathrm{Im} F_{i-1}$ gilt.
- 

Abbildung: exakte Sequenz

Aufgabe

Aufgabe

Betrachte die Sequenz der linearen Abbildungen

$$\{0\} \xrightarrow{F_1} V \xrightarrow{F_2} W \xrightarrow{F_3} \{0\}.$$

Zeige, dass die Sequenz genau dann exakt ist, wenn F_2 ein Isomorphismus ist.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- $\Rightarrow$: Sei F exakt, d.h. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$ und $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- 1. z.z. F_2 ist injektiv:
- $\mathrm{Im}(F_1) = \{0\} = \ker(F_2)$, d.h. es nur gilt $F_2(0) = 0$.
- Daraus folgt, dass F_2 injektiv ist
- d.h. F_2 ist injektiv.
- 2. z.z. F_2 ist surjektiv:
- Es gilt $\ker(F_3) = W$, da alle Element aus W auf $\{0\}$ abgebildet werden.
- Da $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$ folgt $\mathrm{Im}(F_2) = W$
- und somit ist F_2 auch surjektiv.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\operatorname{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \operatorname{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\operatorname{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\operatorname{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$": z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\mathrm{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \mathrm{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\mathrm{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\mathrm{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Lösung

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: z.z. F ist exakt.
- Sei F_2 isomorph, d.h. es ist injektiv und surjektiv.
- 1. z.z. $\text{Im}(F_1) = \ker(F_2)$.
- Da F_2 injektiv folgt $\ker(F_2) = \{0\}$
- Also $\ker(F_2) = \{0\} = \text{Im}(F_1)$, da $F_1 : \{0\} \to V$.
- 2. z.z. $\text{Im}(F_2) = \ker(F_3)$.
- Da F_2 surjektiv gilt $\text{Im}(F_2) = W$.
- Da $F_3 : W \to \{0\}$ gilt $\ker(F_3) = W$.

Aufgabe

Aufgabe

Betrachte die folgenden Sequenz:

$$\{0\} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k \to \{0\}.$$

Welchen wert muss $k \in \mathbb{N}$ annehmen, damit eine exakte Sequenz existiert?

Lösung

Beweis:
$k = 2$, da die Komposition von linearen Abbildungen wieder linear ist. Ausnutzen Aufgabe davor $\Rightarrow k = 2$.

Aufgabe

Aufgabe

Es sei V ein K- Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus (f ist linear) mit $f^2 = f$. Man zeige

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} f .$$

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \mathrm{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \mathrm{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \mathrm{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \mathrm{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \mathrm{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \mathrm{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \mathrm{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \mathrm{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Lösung

Beweis:

- 1. Zeige $V = \ker f + \operatorname{im} f$.
- d.h. für jedes $v \in V$ gilt $v = v_1 + v_2$, mit $v_1 \in \ker f$ und $v_2 \in \operatorname{im} f$.
- Betrachte $v = v + f(v) - f(v)$.
- z.z. $v - f(v) \in \ker f$.
- Dann gilt $f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = 0$, da $f(v) = f \circ f(v)$ gilt.
- 2. Zeige $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Sei $v \in \ker f \cap \operatorname{im} f$ beliebig.
- Da $v \in \operatorname{im} f$ gilt, es existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = v$.
- Dann erhalten wir $v = f(w) = (f \circ f)(w) = f(v) = 0$, da $v \in \ker f$.
- D.h. $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.