



**Politechnika Wrocławska**

## **Raport 2**

### **Komputerowa analiza szeregów czasowych**

Prowadzący kurs: mgr inż. Justyna Witulska

**Aleksander Rzyhak**

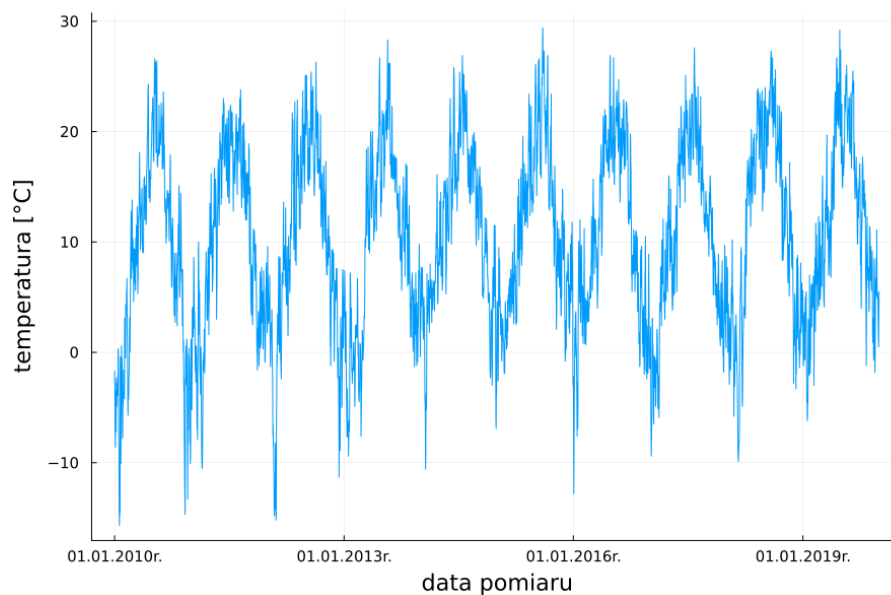
nr indeksu: 268766

6 lutego 2024

# 1 Wstęp i opis danych

Celem raportu była analiza wybranych danych na podstawie wiedzy zdobytej na laboratoriach i wykładzie z komputerowej analizy szeregów czasowych. Główną częścią sprawozdania była próba modelowania danych za pomocą rodziny modeli ARMA.

Dane zaczerpnięte zostały ze strony ECAD<sup>1</sup> (European Climate Assessment & Dataset). Użyto wartości dotyczących średniej dziennej temperatury we Wrocławiu i do analizy wzięto tylko dane z lat 2010-2019. Temperatura mierzona była na stacji położonej 120 m n.p.m. Wartości zapisane były jako wielokrotności 0,01 więc zamieniono je odpowiednio, aby zawierały rzeczywistą wartość temperatury w stopniach Celsjusza. Długość próby to ilość dni w badanym okresie, czyli 3652. Znalezione dane można zobaczyć na wykresie poniżej (Rys. 1).



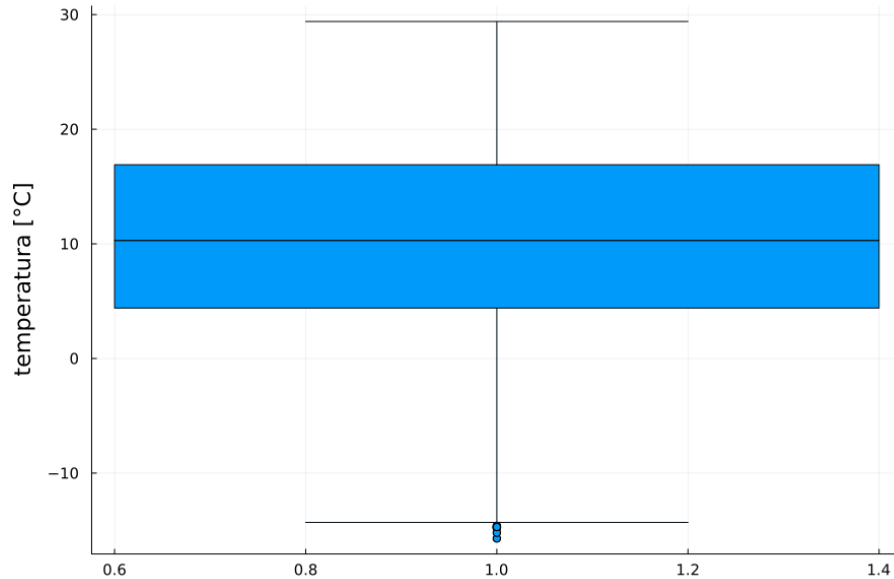
Rysunek 1: Wartość temperatury w zależności od daty pomiaru dla danych dotyczących Wrocławia

# 2 Przygotowanie danych do analizy

Użyte dane nie zawierały żadnych braków, więc nie wykonywano dodatkowych uzupełnień. Nie znajdują się w nich również wartości odstające co dokładnie można zobaczyć na wykresie 2. Zbiór danych zawierał dodatkową kolumnę zawierającą informacje na temat wiarygodności zapisanej wartości i w przypadku badanego okresu czasowego wszystkie dane miały najwyższą możliwą wiarygodność, co zgadza się z brakiem wartości odstających, które potencjalnie mogłyby być błędami pomiarów.

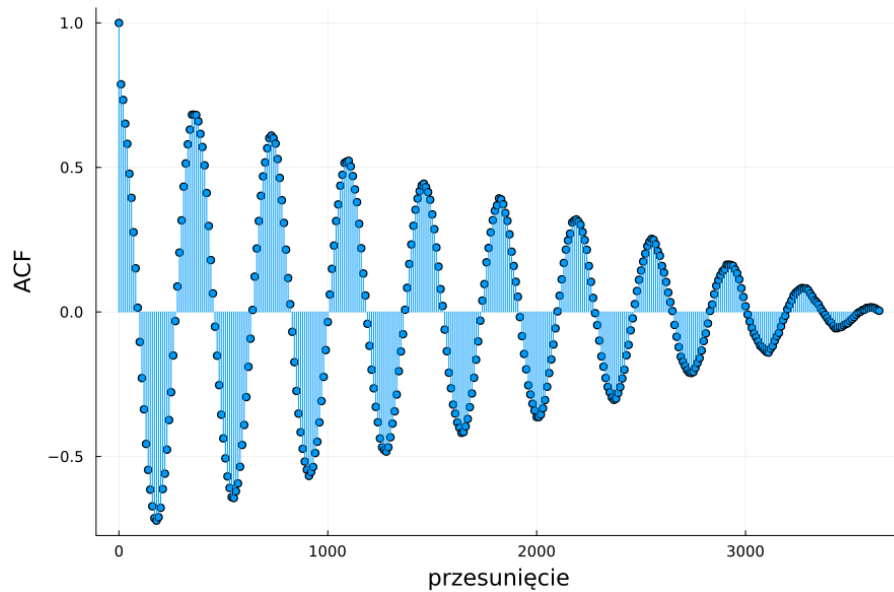
---

<sup>1</sup>Klein Tank, A.M.G. and Coauthors, 2002. Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the European Climate Assessment. Int. J. of Climatol., 22, 1441-1453. Dane i metadane dostępne na <https://www.ecad.eu/dailydata/predefinedseries.php>

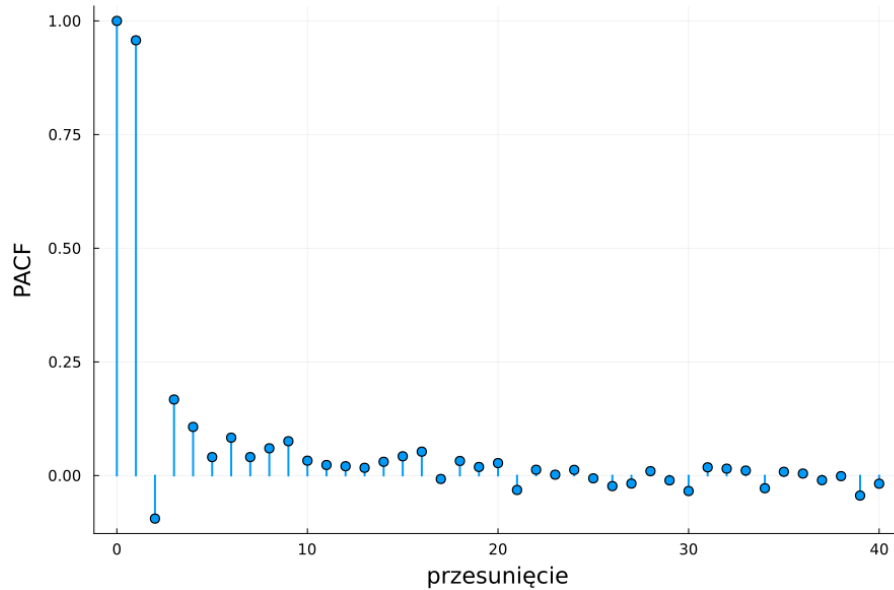


Rysunek 2: Wykres pudełkowy rozkładu wartości temperatury

Na wykresie 1 wyraźnie widać sezonowość danych (jest to zrozumiałą obserwacją z uwagi, że dane dotyczą temperatury, która zmienia się w zależności od pory roku), ale można też zauważyć rosnący trend liniowy. Wykonano dodatkowo wykres autokorelacji próbkowej (Rys. 3) dla co dziesiątej wartości przesunięcia. Ponownie można zauważyć na nim trend sezonowy. Wykonano również wykres częściowej autokorelacji próbkowej (Rys. 4) dla pierwszych 40 wartości przesunięcia.



Rysunek 3: Autokorelacja próbkowa danych dotyczących dziennej średniej temperatury we Wrocławiu



Rysunek 4: Częściowa autokorelacja próbkowa danych dotyczących dziennej średniej temperatury we Wrocławiu

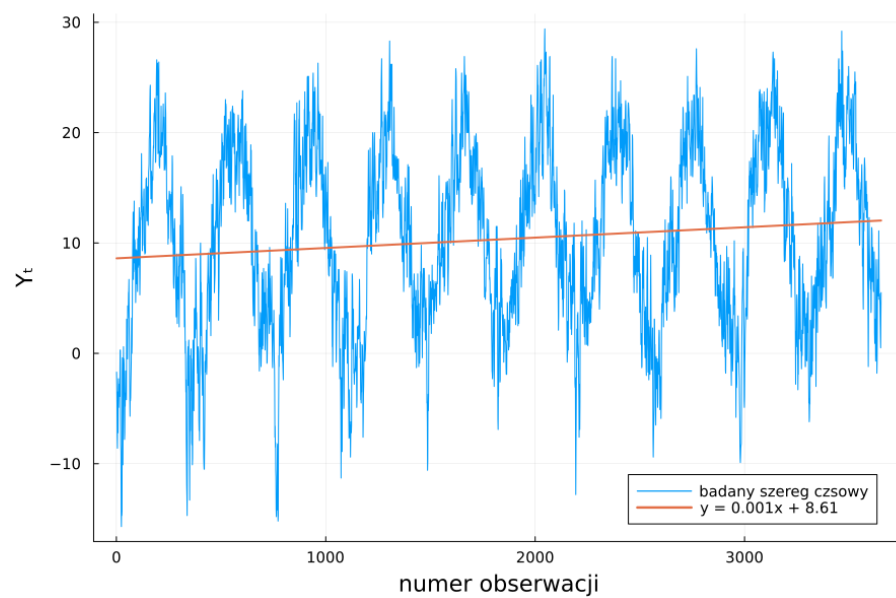
W celu zdekomponowania szeregu czasowego użyto dekompozycji Walda, czyli przyjęto założenie, że jest on postaci:

$$Y_t = s(t) + m(t) + X_t,$$

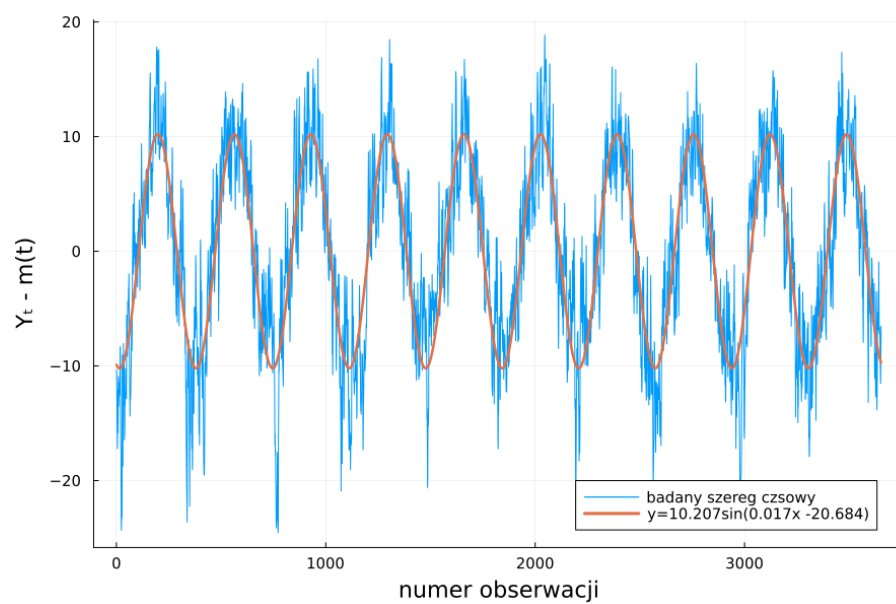
gdzie:

- $Y_t$  - szereg opisujący badane dane,
- $X_t$  - szereg czasowy stacjonarny w słabym sensie,
- $s(t)$  - deterministyczna funkcja okresowa,
- $m(t)$  - deterministyczna funkcja będąca trendem.

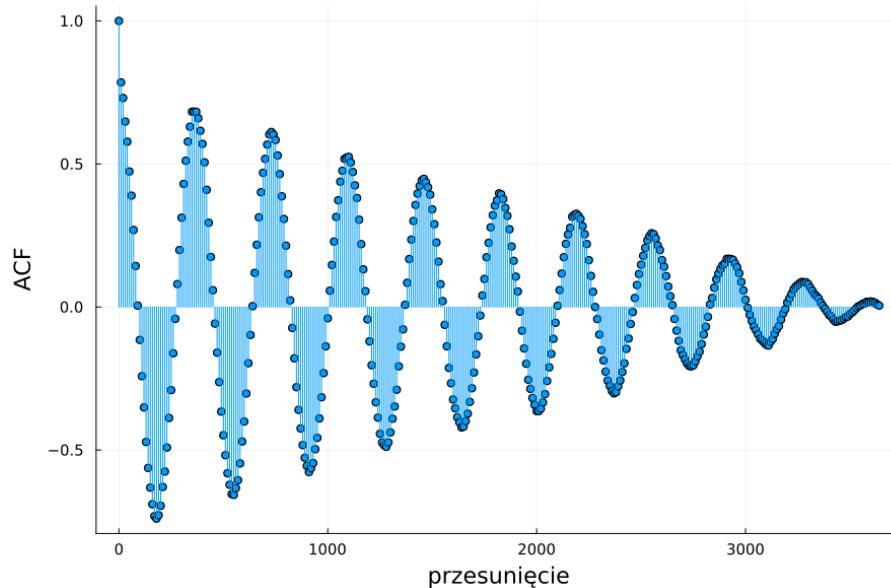
Rozważając wykres 1 poza sezonowością, stwierdzono trend liniowy, zatem funkcja  $m(t)$  jest funkcją liniową. Za pomocą metody najmniejszych kwadratów dopasowano funkcję liniową do danych. Na wykresie 5 widać jak ta funkcja przybliża trend szeregu. Aby usunąć trend odjęto od badanego szeregu czasowego wartości wyestymowanej funkcji  $m(t)$ . Wykonano to (wynik przekształcenia widać na Rys. 6) oraz dla tak zdekomponowanych danych wyliczono autokorelację próbkową (Rys. 7). Tak przekształcony szereg nie różni się (zarówno sam szereg, jak i jego autokorelacja próbkowa) wizualnie mocno od początkowego procesu, ponieważ trend nie jest szybko rosnący, ale takie przekształcenie najprawdopodobniej zmniejszy błędy dobranej funkcji trendu w późniejszej części szeregu.



Rysunek 5: Dopasowanie funkcji liniowej do trendu badanego szeregu



Rysunek 6: Dane z usuniętym trendem liniowym



Rysunek 7: Autokorelacja próbkowa danych z usuniętym trendem liniowym.

Następną częścią dekompozycji jest usunięcie trendu sezonowego, opisanego funkcją  $s(t)$ . Stwierdzono, że sezonowość opisana jest zależnością sinusoidalną. Ponownie funkcję  $s(t)$  dopasowano metodą najmniejszych kwadratów i otrzymano dopasowanie widoczne na powyższym wykresie (Rys. 6). Od wcześniej przekształconego procesu odjęto wyestymowaną wartość funkcji i otrzymano szereg, który widać na wykresie 8. Nie widać na nim już wyraźnego trendu, ani sezonowości i wygląda dość dobrze, aby dopasować do niego model ARMA. Wyliczono również funkcję autokorelacji próbkowej (Rys. 9) oraz funkcję częściowej autokorelacji próbkowej (Rys. 10). Wygląd tych funkcji (szczególnie autokorelacji) świadczy o tym, że dane zostały odpowiednio zdekomponowane i powinny nadawać się do dalszej analizy.

Wykonano dodatkowo test ADF (Augmented Dickey-Fuller test) w celu sprawdzenia stacjonarności szeregu. Badana hipotezą zerową to:

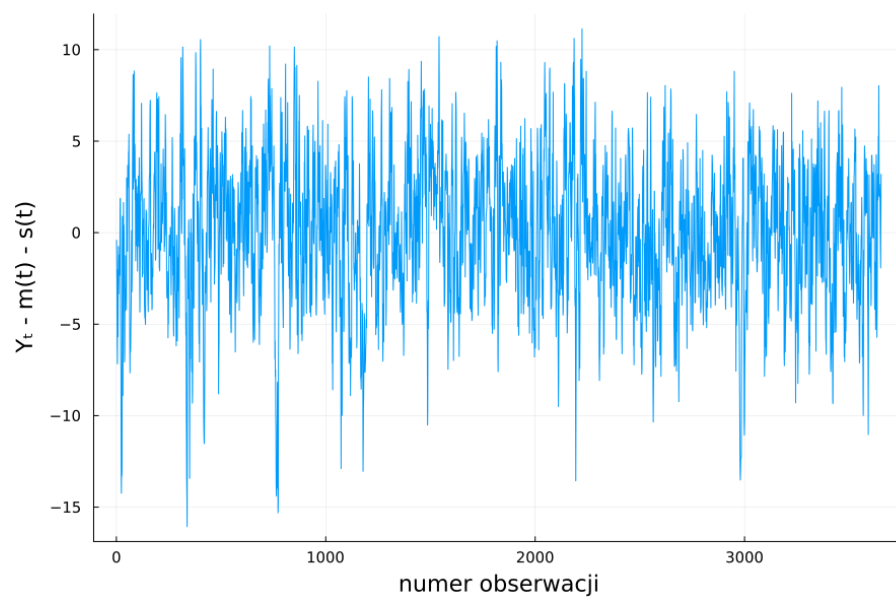
$$H_0 : \text{równanie charakterystyczne badanego procesu ma pierwiastek równy 1}$$

Przeciwko hipotezie alternatywnej:

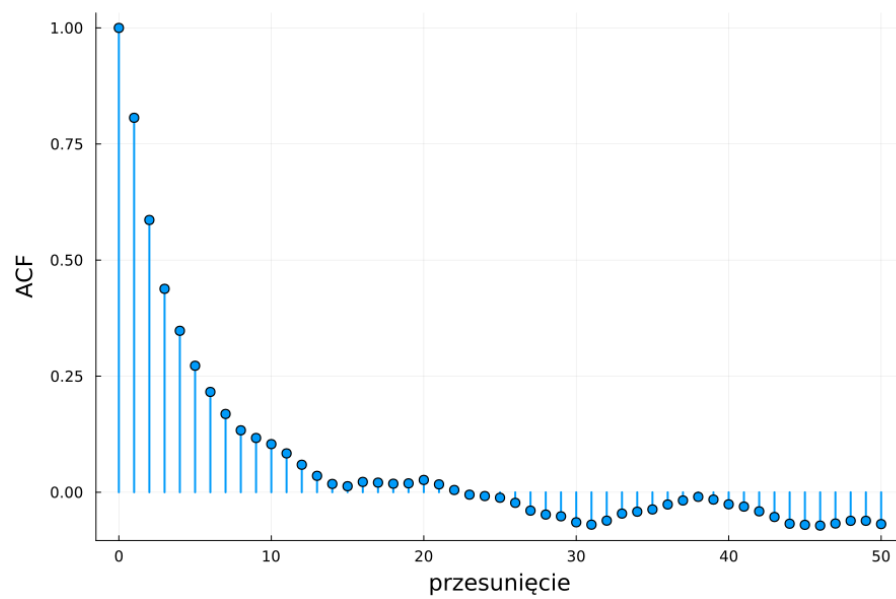
$$H_1 : \text{proces jest stacjonarny.}$$

Stabularyzowane, wartości badanej statystyki testowej, jak i jej postać znajdują się w oryginalnym artykule poświęconym testowi<sup>2</sup>. Za rząd przesunięcia w teście wzięto tą wartość parametru  $p$ , dla którego przy dopasowaniu modelu  $AR(p)$  minimalizowane było kryterium informacyjne Akaikego, przy dopasowaniu danych do modelu AR (znaleziona wartość to 3). Znaleziona wartość statystyki testowej to  $-18.005$ , a test odrzuca hipotezę zerową z p-wartością rzędu  $10^{-29}$ . Oznacza to, że rozpatrywany szereg czasowy jest stacjonarny.

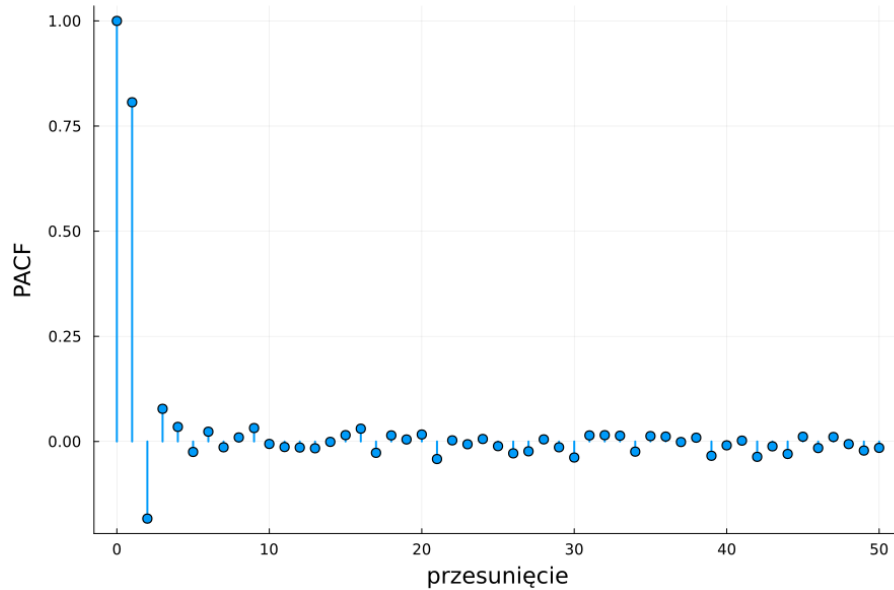
<sup>2</sup>Fuller, W. A. (1976). Introduction to Statistical Time Series. New York: John Wiley and Sons. ISBN 0-471-28715-6



Rysunek 8: Dane z usuniętym trendem liniowym i usuniętą sezonowością



Rysunek 9: Autokorelacja próbkowa danych z usuniętym trendem liniowym i usuniętą sezonowością



Rysunek 10: Częściowa autokorelacja próbkowa danych z usuniętym trendem liniowym i usuniętą sezonowością

### 3 Modelowanie danych przy pomocy ARMA

W celu dobrania odpowiedniego modelu ARMA dla danych zdekomponowanych w poprzedniej sekcji, użyto kryteriów informacyjnych, których wartości są mniejsze im lepiej dopasowany jest model. Wykorzystano następujące kryteria

- kryterium informacyjne Akaikiego:

$$AIC(p, q) = -2 \ln(L) + 2(p + q)$$

- kryterium informacyjne Bayesa:

$$BIC(p, q) = -2 \ln(L) + (p + q) \ln(n)$$

- kryterium informacyjne Hannana-Quinna:

$$HQIC(p, q) = -2 \ln(L) + 2(p + q) \ln(\ln(n))$$

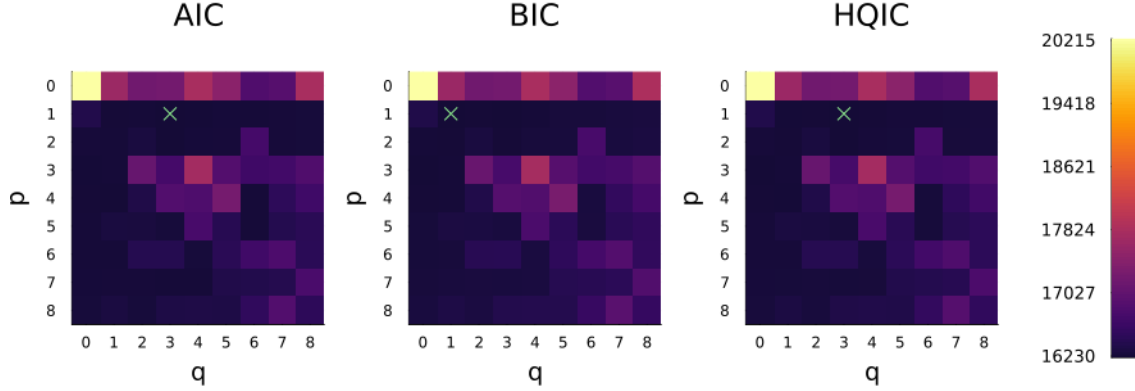
gdzie:

$L$  - zmaksymalizowana funkcja wiarygodności,  
 $p$  - rząd części autoregresyjnej modelu ARMA,  
 $q$  - rząd części średniej ruchomej modelu ARMA,  
 $n$  - ilość obserwacji.

Powyższe kryteria wyliczono dla wartości  $p$  i  $q$  od 0 do 8, a dopasowania modelu były wykonywane przy założeniu normalności residuów ( $Z_t$ ). Wyniki przedstawiono na wykresie poniżej (Rys. 11). Dodatkowo zaznaczono na nim zielonym krzyżykiem wartość dla którego kryterium jest minimalizowane. Kryterium Akaikiego (AIC) minimalizowane jest dla wartości  $p = 1$ ,  $q = 3$  i wynosi



około 16230; kryterium Bayesa (BIC) dla  $p = 1$ ,  $q = 1$  i wynosi około 16253; natomiast kryterium Hannana-Quinna (HQIC) dla  $p = 1$ ,  $q = 3$  i wynosi około 16239. Zarówno kryterium AIC i HQIC są najmniejsze dla tych samych wartości  $p$  i  $q$ , ale kryterium BIC sugeruje inny wynik. Mimo to kryterium Bayesa dla  $p = 1$  i  $q = 3$  wciąż ma podobnie niską wartość (około 16255). W związku z takimi wartościami badanych kryteriów zdecydowano się wybrać model ARMA(1, 3).



Rysunek 11: Mapa ciepła z wartościami kryteriów informacyjnych dla różnych kombinacji  $p$  i  $q$

Skoro dane będziemy modelować modelem ARMA(1, 3) to opisane są następującym równaniem:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \theta_3 Z_{t-3}$$

gdzie:

$X_t$  - przekształcone badane dane,

$Z_t$  - biały szum  $WN(0, \sigma^2)$ ; u nas dodatkowo o rozkładzie normalnym,

$\phi_1$  - współczynnik części autoregresywnej modelu ARMA,

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  - współczynniki części średniej ruchomej modelu ARMA.

W celu estymacji współczynników wykorzystana została metoda najmniejszych kwadratów, dla której funkcja błędu minimalizowana była algorytmem BFGS<sup>3</sup> (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm). Tak wyestymowane parametry (z dokładnością do trzech miejsc po przecinku) umieszczone w równaniu modelu ARMA(1, 3) wyglądają następująco:

$$X_t - 0,797X_{t-1} = Z_t - 0,172Z_{t-1} + 0,084Z_{t-2} + 0,9Z_{t-3}$$

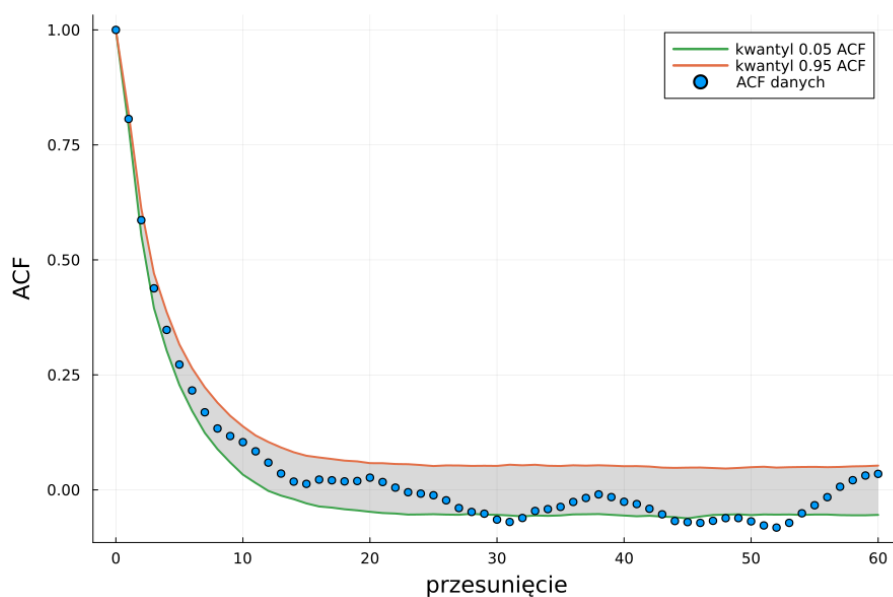
Natomiast błędy standardowe dla poszczególnych parametrów to:

- $\phi_1$ : 0,0239
- $\theta_1$ : 0,0292
- $\theta_2$ : 0,0292
- $\theta_3$ : 0,0244

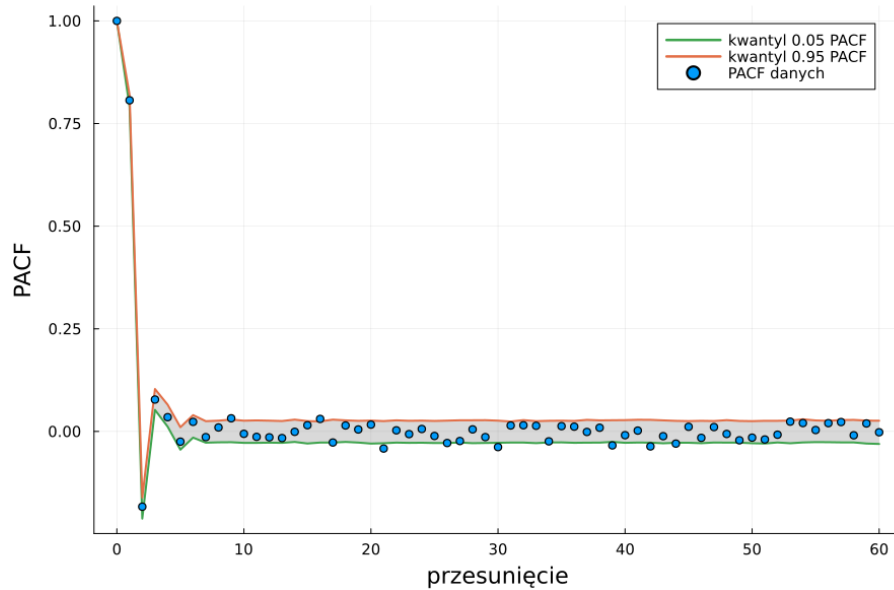
<sup>3</sup>Fletcher, Roger (1987), Practical Methods of Optimization (2nd ed.), New York: John Wiley & Sons, ISBN 978-0-471-91547-8

## 4 Ocena dopasowania modelu

W celu oceny jakości dopasowania modelu do badanych danych wykonano za pomocą symulacji Monte Carlo przedziały ufności dla funkcji autokorelacji próbkowej oraz funkcji częściowej autokorelacji próbkowej. Aby stworzyć przedziały ufności generowano w każdym z przypadków po 1000 realizacji szeregu opisanego dopasowanym modelem ARMA. Następnie liczone ACF lub PACF dla wartości przesunięcia od 0 do 60, a na końcu liczone kwantyle rzędu 0,05 i 0,95 dla każdej wartości przesunięcia. W ten sposób stworzone przedziały ufności dla autokorelacji próbkowej przedstawiono na wykresie 12 i dla częściowej autokorelacji próbkowej na wykresie 13. Na wykresach pokazano również wartości ACF i PACF dla badanych danych. Widać, że ilość obserwacji które wpadają do przedziału jest dosyć bliska oczekiwanej ilości (dla wybranych kwantyli 90% obserwacji statystycznie powinno wpadać do przedziału).

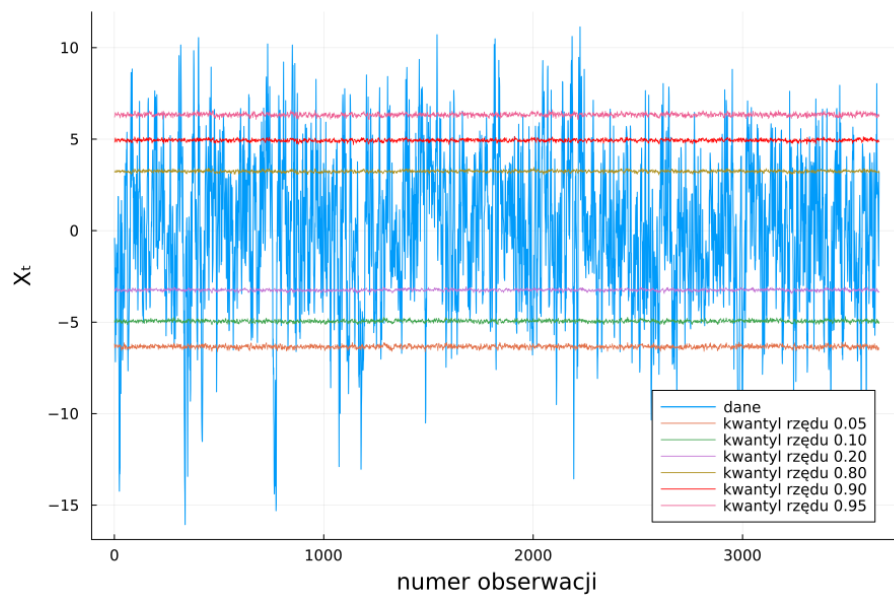


Rysunek 12: Przedziały ufności autokorelacji próbkowej dla dobranego modelu ARMA



Rysunek 13: Przedziały ufności częściowej autokorelacji próbkowej dla dobranego modelu ARMA

Do sprawdzenia czy dobrano dobry model stworzono również linie kwantylowe znalezionej procesu ARMA. Aby to zrobić generowano 10000 trajektorii dopasowanego szeregu i dla każdego punktu estymowano kwantyle rzędów: 0,05; 0,1; 0,2; 0,8; 0,9 i 0,95. Wynik przedstawiono na wykresie 14, wraz z badanymi danymi. Ponownie na rysunku widać, że szacunkowo odpowiednia proporcja obserwacji znajduje się w odpowiednich przedziałach określonych przez znalezione linie kwantylowe.

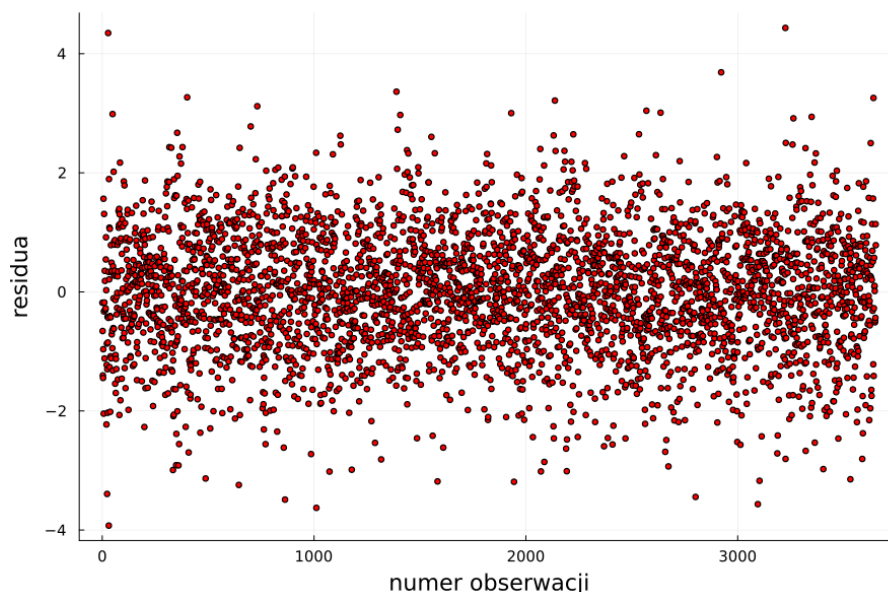


Rysunek 14: Porównanie danych z liniami kwantylowymi dobranego modelu ARMA

Z wszystkich powyższych wykresów wykonanych na bazie symulacji Monte Carlo wynika, że dane są najprawdopodobniej dobrze opisane znalezionym modelem ARMA.

## 5 Analiza szumu

Analiza szumu, to analiza residuów modelu, czyli realizacji zmiennej losowej  $Z_t$ . Badanie ich polega na sprawdzeniu założeń białego szumu, oraz w naszym przypadku normalności. Na poniższym wykresie (Rys. 15) widać wartość obserwacji residuów w zależności od numeru obserwacji, dla modelu ARMA(1,3) z współczynnikami wyestymowanymi w sekcji 3



Rysunek 15: Residua w zależności od numeru próby

### 5.1 Średnia

W przyjmowanym modelu zakładamy, że średnia residuów jest stała i równa zero, dla każdego  $t$ . Do badania średniej jakie zostało przeprowadzone wymagane jest założenie o normalności residuów, które zostało przyjęte już przy dopasowywaniu modelu. Wykorzystany zostanie t-test (który jest dokładny tylko w przypadku normalności zmiennych), dla którego będzie testowana hipoteza zerowa  $H_0 : \mu = \mu_0$ , przeciwko hipotezie alternatywnej  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , dla  $\mu$  będącą średnią badanych residuów. Statystyka testowa, gdy zachodzi hipoteza zerowa jest postaci:

$$\frac{\bar{\mathcal{E}} - \mu_0}{S_{\mathcal{E}}/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

gdzie:

$S_{\mathcal{E}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathcal{E}_i - \bar{\mathcal{E}})^2$  - nieobciążony estymator  $\sigma^2 = Var(\mathcal{E}_i)$ ,  
 $\mu_0 = 0$  - oczekiwana średnia zmiennych.

Test z p-wartością równą 0,9692 nie odrzucił hipotezy zerowej. Wyliczając średnią arytmetyczną z obserwacji otrzymujemy  $\mu \approx -0,0006$ , więc wynik testu jest zrozumiały.

W celu sprawdzenia założenia o stałej średniej ponownie wykonano t-test, ale z hipotezą zerową  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , przeciwko hipotezie alternatywnej:  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ , gdzie  $\mu_1$  to średnie pierwszej połowy danych (obserwacje od 1 do 1826), a  $\mu_2$  to średnia drugiej połowy danych (obserwacje od 1827 do 3652). W przypadku tego testu zakładana jest równa wariancja w grupach (sprawdzona w sekcji 5.2). Test nie odrzuca hipotezy zerowej z p-wartością równą 0,315. Oznacza to, że najprawdopodobniej założenie dotyczące średniej jest spełnione. Potwierdza to dodatkowo wykres residuów (Rys. 15), na którym widać, że obserwacje są dosyć równomiernie rozłożone wokół wartości 0.

## 5.2 Wariancja

W przyjętym modelu zakładamy, że wariancja residuów jest dla każdego  $t$ . Wyliczając wariancję z obserwacji otrzymano wartość  $\sigma^2 \approx 1,0003$ . Do sprawdzenia czy wariancja jest stała wykorzystany został test Levene'a<sup>4</sup>, którego hipotezą zerową jest:

$H_0$  : wariancja w badanych grupach jest równa między grupami,

przeciwko hipotezie alternatywnej:

$H_1$  : wariancja w badanych grupach nie jest równa między grupami.

Statystyka testowa ma w przybliżeniu rozkład F Snedocora i jest postaci:

$$W = \frac{N - k}{k - 1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^k N_i (Z_{i\cdot} - Z_{\cdot\cdot})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - Z_{i\cdot})^2}$$

gdzie:

$k$  - ilość grup,

$N_i$  - ilość obserwacji w i-tej grupie,

$N$  - całkowita ilość obserwacji,

$Y_{ij}$  - j-ta wartość obserwacji w i-tej grupie,

$\bar{Y}_i$  - średnia i-tej grupy,

$Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|$ ,

$Z_{i\cdot} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Z_{ij}$ ,

$Z_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} Z_{ij}$ .

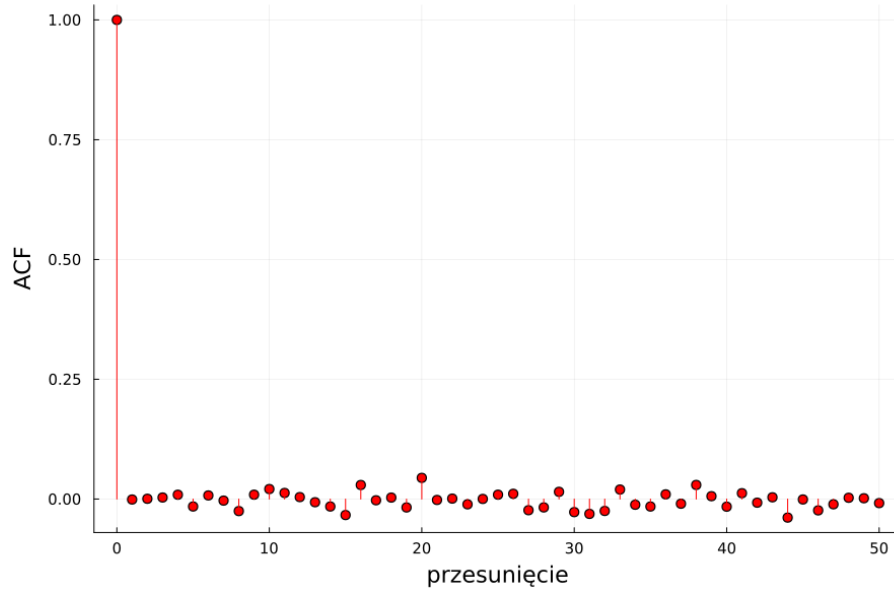
Taki test wykonano dzieląc obserwacje na dwie równe podgrupy tak jak w przypadku badania średniej. Hipoteza zerowa nie została odrzucona z p-wartością równą 0,867. Bazując na wyniku testu dla dwóch grup, można przypuszczać, że wariancja residuów rzeczywiście jest stała. Dodatkowo patrząc na wykres 15, nie widać, dużych różnic w rozrzucie obserwacji, co tylko potwierdza spełnienie założenia o stałej wariancji.

## 5.3 Niezależność

W ogólnym modelu ARMA zakładane jest nieskorelowanie residuów. W badanych przypadku zakładano również ich normalność, co w połączeniu z nieskorelowaniem oznacza (prawie zawsze) niezależność. Do sprawdzenia skorelowania zmiennych wykorzystana została funkcja autokorelacji próbkowej (ACF). Na wykresie 16 przedstawiono tą funkcję dla omawianych residuów. Widać na nim, że wartości ACF zachowują się dokładnie tak jak powinny w przypadku białego szumu

<sup>4</sup>Levene, Howard (1960). "Robust tests for equality of variances". In Ingram Olkin; Harold Hotelling; et al. (eds.). Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. Stanford University Press. pp. 278–292.

(to znaczy przyjmują wartość 1 dla przesunięcia równego 0 oraz zerują się dla wszystkich innych wartości przesunięcia).



Rysunek 16: Funkcja autokorelacji próbkowej residuów

Taki wygląd funkcji autokorelacji próbkowej mocno świadczy o nieskorelowaniu danych, jednak w celu dodatkowego potwierdzenia wyników, zdecydowano o wykonaniu testu Ljunga-Boxa<sup>5</sup>. Sprawdzana będzie hipoteza zerowa:

$$H_0 : \text{obserwacje są nieskorelowane,}$$

przeciwko hipotezie alternatywnej:

$$H_1 : \text{obserwacje są skorelowane.}$$

Statystyka testowa pod warunkiem zachodzenia hipotezy zerowej ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z  $h - p - q$  stopniami swobody i opisana jest wzorem:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k},$$

gdzie:

$n$  - długość próby,

$h$  - ilość testowanych lagów (wartości przesunięcia),

$p, q$  - wcześniej znalezione rzędy modelu ARMA (u nas  $p = 1, q = 3$ )  $\hat{\rho}_k^2$  - autokorelacje próbkowa dla lagu  $k$ .

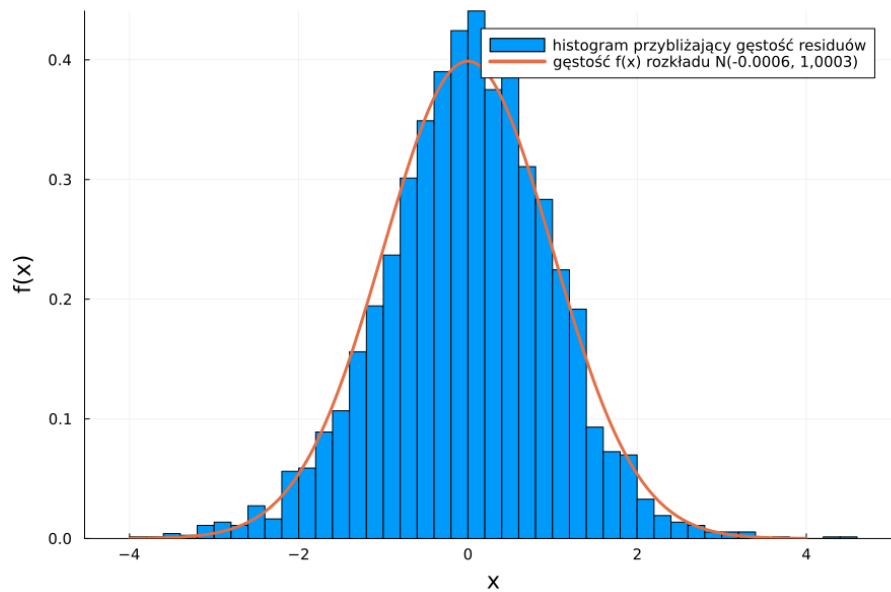
Wykonano test dla wartości  $h = 5$  i zgodnie z oczekiwaniami test nie odrzucił hipotezy zerowej (p-wartość na poziomie 0,2683). Oznacza to, że wnioski wyciągnięte z wykresu ACF (Rys. 16) są najprawdopodobniej poprawne i założenia dotyczące nieskorelowania (niezależności przy dodatkowym założeniu normalności) są spełnione.

<sup>5</sup>G. M. Ljung; G. E. P. Box (1978). "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". Biometrika. 65 (2): 297–303. doi:10.1093/biomet/65.2.297.

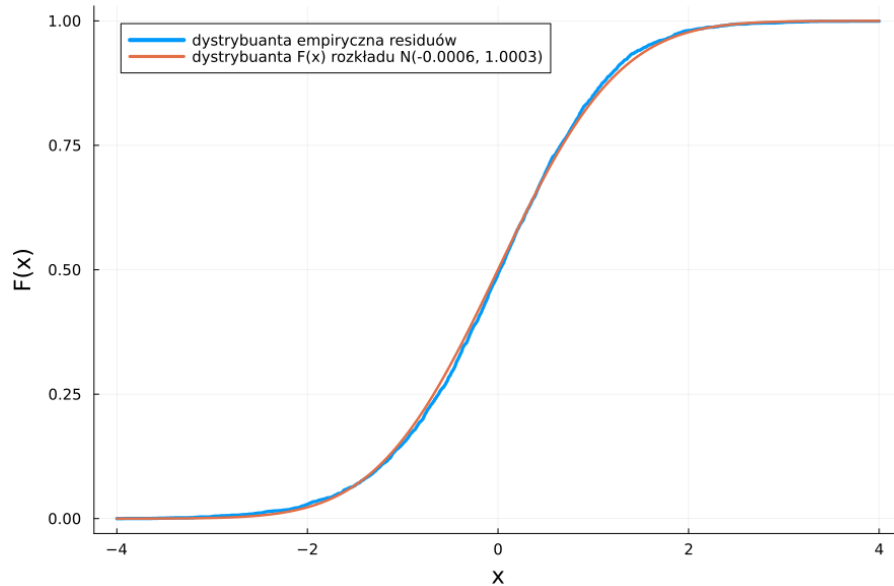
## 5.4 Normalność

Podczas dopasowywania modelu do danych przyjęte zostało założenie o normalności residuów. W ogólnym przypadku nie jest to wymagane, ale upraszcza to procedury dopasowywania modelu.

W celu sprawdzenia założenia o normalności początkowo narysowano histogram przedstawiający rozkład residuów. Porównanie z gęstością odpowiednio dopasowanego rozkładu normalnego (z parametrami średniej i wariancji wyestymowanymi w sekcjach 5.1 i 5.2) widać na wykresie 17. Widać na nim, że gęstość histogram dosyć dobrze przybliża gęstość rozkładu normalnego. Narysowano również dystrybuantę empiryczną residuów w porównaniu do dystrybuanty badanego rozkładu normalnego (Rys. 18). Z tego wykresu również można wyciągnąć wnioski o bliskości rozkładów.



Rysunek 17: Histogram przybliżający gęstość residuów



Rysunek 18: Dystribuanta empiryczna residuów

Wykonano również test normalności Shapiro-Wilka z poprawką na wielkość próby<sup>6</sup>. Badana będzie hipotezą zerową:

$$H_0 : \text{ dane pochodzą z rozkładu normalnego.}$$

przeciwko hipotezie alternatywnej:

$$H_1 : \text{ dane nie pochodzą z rozkładu normalnego}$$

Statystyka testowa wygląda następująco:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{E}_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (\mathcal{E}_i - \bar{\mathcal{E}})^2}$$

gdzie:

$\mathcal{E}_{(i)}$  - i-ta statystyka pozycyjna residuów,

$a_i$  - stabularyzowane wartości,

$W$  - statystyka której dokładny rozkład nie jest nazwany, ale jest stabularyzowany na podstawie metod Monte Carlo.

Test odrzuca hipotezę zerową z p-wartością rzędu  $10^{-7}$ . Oznacza to, że residua w rzeczywistości nie mają rozkładu normalnego, ale można przypuszczać, że prawdziwy rozkład residuów jest bliski przyjętemu rozkładowi normalnemu.

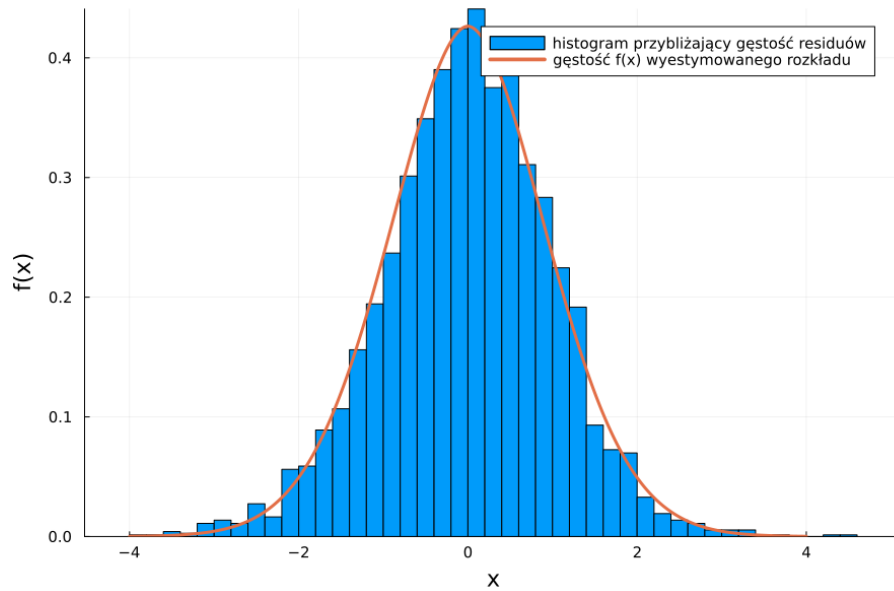
## 5.5 Rozkład

W poprzedniej sekcji stwierdzono, że residua są tylko zbliżone do rozkładu normalnego. Postanowiono spróbować dopasować dokładniejszy rozkład do omawianych obserwacji. Z uwagi na

<sup>6</sup>Rahman und Govindarajulu (1997). "A modification of the test of Shapiro and Wilk for normality"



bliskość do rozkładu normalnego spróbowano dopasować residua do uogólnionego rozkładu normalnego. Na bazie obserwacji residuów wyestymowano parametry tego rozkładu: parametr położenia  $\mu \approx 0$ , parametr skali  $\alpha \approx 1,32$  i parametr kształtu  $\beta \approx 1,85$ . Porównanie histogramu z gęstością znalezionej rozkładu przedstawiono na wykresie poniżej (Rys. 19). Widać na nim, że dobrany rozkład dobrze przybliża badane obserwacje (lepiej niż w przypadku dobierania rozkładu normalnego).



Rysunek 19: Histogram przybliżający gęstość residuów

Aby sprawdzić jakość dobrego rozkładu użyto testu Andersona-Darlinga, którego hipotezą zerową jest:

$$H_0 : \text{dane są z zadanego rozkładu,}$$

a hipotezą alternatywną:

$$H_1 : \text{dane nie są z zadanego rozkładu.}$$

Statystyka testowa (jej asymptotyczny rozkład jest stabularyzowany) jest postaci:

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x),$$

gdzie:

$n$  - długość próby,

$F(x)$  - dystrybucja zadanego rozkładu,

$F_n(x)$  - dystrybucja empiryczna danych.

Test nie odrzuca hipotezy zerowej (p-wartość na poziomie 0,2392). Fakt, że wartości parametrów zostały wyestymowane na podstawie obserwacji, zmniejsza moc testu, ale dalej jego wynik można interpretować jako poprawne dobranie rozkładu do danych.

### 5.5.1 Ponowne dobranie modelu

Po wyciągnięciu takich wniosków dotyczących rozkładu residuów postanowiono ponownie dobrać model ARMA do danych, ale tym razem przy założeniu uogólnionego rozkładu normalnego residuów. Wykonano taką samą procedurę jak w sekcji 3. Wszystkie kryteria informacyjne zminimalizowały się dla dokładnie tych samych wartości rzędów modelu, więc ponownie postanowiono dobrać model ARMA(1,3). Szereg dopasowany do danych (wartości parametrów z dokładnością do trzech miejsc po przecinku) wygląda następująco:

$$X_t - 0,801X_{t-1} = Z_t - 0,18Z_{t-1} + 0,075Z_{t-2} + 0,9Z_{t-3}$$

Z błędami standardowymi dla poszczególnych parametrów:

- $\phi_1$ : 0,0226
- $\theta_1$ : 0,0277
- $\theta_2$ : 0,0284
- $\theta_3$ : 0,0235

Nie różni się on bardzo mocno od oryginalnego szeregu, również błąd dopasowania w obu modelach jest bardzo podobny dla poszczególnych parametrów. Najprawdopodobniej powyższy model jest nieznacznie lepszy od uprzednio dobranego, ale nie na tyle, żeby ponownie wykonywać całą analizę dotyczącą jakości dobrania modelu.

## 6 Podsumowanie

Celem sprawozdania było dopasowanie modelu ARMA do znalezionych danych. W tym celu za pomocą dekompozycji Walda, aby usunąć trendy w danych i do tak oczyszczonych obserwacji dobrano odpowiedni model. Wykonano również weryfikację czy dobrany model jest dobrze dopasowany przy pomocy metod Monte Carlo oraz analizy residuów.

Dana dotyczyły średniej dziennej temperatury we Wrocławiu w latach 2010-2019. Początkowo do odpowiednio zdekomponowanych danych dobrano model ARMA przy założeniach o normalności residuów. Tak dobrany model okazał się dobrze opisywać badane obserwacje. Jedynym rzeczą niezgodną z założeniami był rozkład residuów (był bliski normalnemu, ale lepiej opisywał go rozkład uogólniony normalny). Dobrano więc ponownie model, ale przy założeniu residuów z rozkładu uogólnionego normalnego i tak dobrany model nie różnił się znacząco od wcześniejszego. Ostatecznie stwierdzono, że dobrany początkowo model do danych jest wystarczająco dobry.