

循環証明体系における準カット除去可能性について

早乙女 献自 (名古屋大学)

中澤巧爾 (名古屋大学)

こんな話です

- 循環証明体系[Brotherston 2006]においてカット除去定理は成立しないと考えられている
 - ・ 分離論理についてはカット除去不可能性が証明済み[Kimura+ 2018]
- 除去まではできなくとも、カットを特定の形に限定できるのではないかと予想(=準カット除去可能性)

本研究では局所的なカット除去手続きを提案

循環証明体系

シーケント計算+循環構造

数学的帰納法に対応

帰納的述語の例

$\frac{}{N0}$	$\frac{Nx}{Nsx}$	$\frac{Ox}{Esx}$	$\frac{Ex}{Osx}$
自然数 N		偶数 E	奇数 O

パス：推論規則を辿ったシーケントの列
budからは対応するシーケントへ遷移(赤の矢印)

トレース：パスの左にある帰納的述語を辿ったもの(下線のある述語)

$$\frac{\frac{\frac{}{x=0 \vdash Nx} \quad \frac{\frac{Ox \vdash Nx(bud) (\dagger)}{Oy \vdash Ny} \quad \frac{Oy \vdash Nsy}{Oy \vdash Nx} (Case)}{x=sy, Oy \vdash Nx} \quad \frac{\frac{Ex \vdash Nx (*)}{x=sy, Ex \vdash Nx} \quad \frac{Ex \vdash Nx(bud) (*)}{Oy \vdash Ny} \quad \frac{Oy \vdash Nsy}{Oy \vdash Nx} (Case)}{Ex \vee Ox \vdash Nx}$$

○規則(Case)は左辺の述語に関する場合分けに対応

○任意の無限長の**パス**について、規則(Case)による展開が無限に行われる**トレース**が存在するという条件を**Global Trace Condition(GTC)**という

○GTCを満たす証明図を循環証明体系における証明とする

準カット除去可能性

budに対する**カット**に制限しても証明能力が変わらないという性質

$$\frac{\frac{(bud) \quad A \vdash B, F \quad F, A \vdash B}{A \vdash B} (cut)}{A \vdash B, F}$$

カットの拡張

拡張ミックス規則 = カット + 構造規則 + 等号規則

拡張ミックス規則

$$\frac{\Gamma, \vdash \Delta, [F]_L \quad [F]_R, \Gamma, \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash \Delta}$$

等号規則(右辺の代入も同様)

$$\frac{t = s, \Gamma, A[s/x] \vdash \Delta}{t = s, \Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}$$

- 拡張ミックス規則において $[F]_L, [F]_R$ はカット論理式Fに任意回の構造規則と等号規則を適用した多重集合
- カット除去手続きでは拡張ミックス規則を持ち上げる

カット除去手続き

LKに対するカット除去手続きを循環証明体系に対するものに拡張

変形前

$$\frac{\frac{(bud) \quad t = s, A \vdash B, (F \wedge G)[s/t] \quad \vdots D_0 \quad t = s, A \vdash B, F[s/t] \quad \vdots D_1 \quad t = s, A \vdash B, G[s/t]}{t = s, A \vdash B, (F \wedge G)[s/t]} (R\wedge) \quad t = s, A \vdash B, F[s/t]}{t = s, A \vdash B}$$

変形後

$$\frac{\frac{(bud) \quad t = s, F \wedge G, A \vdash B \quad \vdots D_2 \quad t = s, F, G, A \vdash B}{t = s, F \wedge G, A \vdash B} (L\wedge) \quad \frac{\frac{(bud) \quad t = s, A \vdash B, (F \wedge G)[s/t] \quad \vdots D_0 \quad t = s, A \vdash B, F[s/t] \quad \vdots D_1 \quad t = s, A \vdash B, G[s/t]}{t = s, A \vdash B, (F \wedge G)[s/t]} (R\wedge) \quad t = s, A \vdash B, F[s/t]}{t = s, A \vdash B} (mix)$$

図はカット除去手続きの例として右辺のカット論理式に等号規則を1度だけ適用したもの

GTCを満たしたまま、**カット論理式**が簡単になった証明図に変形

手続きを繰り返し適用することでbudに対するカットに制限できるか確かめることが今後の課題

今後の課題：カットを一番上まで持ち上げられるかどうか

- ・ カット除去手続きで発生するごみがGTCに影響
- ・ 単純にWeakeningで除去すると、カットの上にある推論規則が減らない