書換え系の変換を用いたZ性の証明

本多 雄樹　　中澤 巧爾

Z 定理は書換え系の合流性を証明する手法の一つであり，Z 性を満たす写像が存在するならば書換え系が合流性を持つことを保証する．例えば，λ 計算の β 簡約については，λ 項中に存在する β 簡約基を一度に簡約する写像である complete development が Z 性を満たすので，Z 定理によって合流性が証明できる．しかし，書換え系に対し Z 性を持つ写像を構成することは，一般には容易ではない．本研究では，書換え系間の変換を用いて，既に Z 性を満たすことが分かっている写像から，新たに Z 性を満たす写像を構成する手法を提案する．さらに，この手法によって，明示的代入を含む λ 計算において Z 性を満たす写像を構成できることを示す．

1　はじめに

合流性は書換え系に関する重要な性質の一つであるが，一般に，とくに λ 計算などの高階書換え系の合流性を証明することは難しい．例えば，型のない λ 計算の β 簡約では，強正規化性やダイヤモンド性が成立しないため，合流性の証明には並行簡約や，complete development などのアイデアが必要となる．Z 定理 [1] は書換え系の合流性を証明する手法の一つであり，Z 性と呼ばれる性質を満たす写像が存在するならば書換え系が合流性を持つことを保証する．例えば，λ 計算の β 簡約については，λ 項中に存在する β 簡約基を一度に簡約する写像である complete development が Z 性を満たすので，Z 定理によって合流性が証明できる．しかし，書換え系に対し Z 性を持つ写像を構成することは，一般には容易ではない．

合流性を直接示すことが難しい場合，合流性に関して健全な書換え系の変換を用いる手法がある．この手法の例として，条件付き項書換え系（CTRS）における unraveling [3] が挙げられる．これは CTRS を近似的に通常の項書換え系（TRS）に変換する写像である．変換後の TRS の合流性が変換前の CTRS の合流性を含意するとき unraveling は合流性に関して健全であるという．つまり，合流性に関して健全な unraveling によって， CTRS の合流性を変換後の TRS の合流性に帰着することができる．

本研究では，書換え系の変換を用いて，既に Z 性を満たすことが分かっている写像から，新たに Z 性を満たす写像を構成する手法を提案する．より具体的には，一定の条件を満たす変換 $F : A \longrightarrow B$ と，B 上の Z 性を満たす写像から，A 上の Z 性を満たす写像を構築する．さらに，この手法を用いて明示的代入を含む λ 計算において Z 性を満たす写像を構築できることを示す．

2　合流性と Z 定理

本章では，合流性と Z 定理について説明する．

定義 2.1 (合流性)．$(A, \to)$ を抽象書換え系であるとする．つまり， A を集合，$\to$ を A 上の二項関係とする．また，$\twoheadrightarrow$ を $\to$ の反射推移閉包であるとする．任意の $x, y_1, y_2 \in A$ について，$y_1 \twoheadleftarrow x \twoheadrightarrow y_2$ ならば $y_1 \twoheadrightarrow z \twoheadleftarrow y_2$ を満たす $z \in A$ が存在するとき，$(A, \to)$ は合流性を持つと言う．

Z 定理は合流性を証明する手法の一つである．

.
Yuuki Honda, Koji Nakazawa, 名古屋大学大学院情報学研究科, Graduate school of Informatics, Nagoya University.

定義 2.2 (Z 性 [1]). A を集合， $\to$ を A 上の二項関係とする．また，$\twoheadrightarrow$ を $\to$ の反射推移閉包であるとする．写像 $f : A \to A$ が，任意の $a, b \in A$ について $a \to b$ ならば $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ を満たすとき， f は $\to$ についてZ性を満たすと言う．

また，書換え系 $(A, \to)$ に対して，Z 性をみたす写像が存在するとき，$(A, \to)$ は Z 性を満たすと言う．

条件が図 1 のように書けるため，この性質を Z 性と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b \arrow[dl, dashed, two heads] \\
f(a) \arrow[r, dashed, two heads] & f(b)
\end{tikzcd}$$

図 1 Z 性

定理 2.3 (Z 定理 [1]). 抽象書換え系がZ性を満たすならば，その抽象書換え系は合流性を持つ．

Z 性は合流性よりも真に強い性質であることがわかっている．つまり，合流性を持つ抽象書換え系に対して，Z 性を満たす写像が存在するとは限らない．これは図 2 の反例によって示される．図 2 の書換え系は合流性を持つが，Z 性を満たす写像は存在しない．

Z性を満たす写像の一つの例は λ 計算の β 簡約についての complete development である．

定義 2.4 (λ 計算). λ 項は次のように定義される．

$$M := x \mid \lambda x.M \mid MM.$$

λ 項に対する β 簡約は次の β 規則の compatible closure として定義される．

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N] \qquad (\beta),$$

ただし， $M[x := N]$ は α 変換によって新たな束縛を生じない代入とする．

ある項中の，一つの規則の左辺とマッチする部分項を簡約基と呼ぶ．complete development は全ての見えている簡約基を一度に簡約する写像である．

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] & \\
c_1 \arrow[d] & & b_1 \arrow[ll] \arrow[ul] \\
c_2 \arrow[d] & & b_2 \arrow[ll] \arrow[u] \\
\vdots & & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

図 2 合流性を持つが，Z 性を満たす写像が存在しない書換え系

定義 2.5 (β 簡約の complete development). β 簡約に対する complete development M^* は次のように定義される．

1. $x^* = x$
2. $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$
3. $((\lambda x.M_1)M_2)^* = M_1^*[x := M_2^*]$
4. $(M_1 M_2)^* = M_1^* M_2^*$ (その他のとき)

定理 2.6 ([1]). 写像 M^* は Z 性を満たす．

3 書換え系の変換による Z 性証明

まず準備として トライアングル性について説明する．

定義 3.1 (トライアングル性). A を集合， $\to$ を A 上の二項関係とする． 写像 $f : A \to A$ と A 上の二項関係 $\Rightarrow$ が以下の性質を満たすとき，f と $\Rightarrow$ はトライアングル性を満たすという．

任意の $a, b \in A$ について $a \Rightarrow b$ ならば $b \Rightarrow f(a)$.

また，今後のために $\Rightarrow_f$ という表記を以下のように定義する．

定義 3.2 ($\Rightarrow_f$). $(A, \to)$ を ARS，f を $\to$ について Z 性を満たす写像とする．このとき，$\Rightarrow_f$ を以下で定義する．

$a \Rightarrow_f b$ iff $a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$

Z 性と トライアングル性について以下の事実が成り立つ．

補題 3.3. $(A, \to)$ 上で $f : A \to A$ が Z 性を満たすとき，f と $\Rightarrow_f$ は トライアングル性を満たす．

Proof. 任意の $a \Rightarrow_f b$ について，$\Rightarrow_f$ の定義より，$a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$．$a \twoheadrightarrow b$ と f の Z 性より，$f(a) \twoheadrightarrow f(b)$．したがって，$b \Rightarrow_f f(a)$ が成り立ち，f と $\Rightarrow_f$ は トライアングル性を満たす． □

補題 3.4. $(A, \to)$ に対して $f : A \to A$ と $\Rightarrow$ が トライアングル性を満たすとき，以下が成り立つ．
任意の $a, b \in A$ について $a \Rightarrow b$ ならば $b \Rightarrow f(a) \Rightarrow f(b)$（1 ステップの Z 性）

Proof. f と $\Rightarrow$ は トライアングル性を満たすので，$a \Rightarrow b$ ならば $b \Rightarrow f(a)$．さらに トライアングル性より，$b \Rightarrow f(a)$ ならば $f(a) \Rightarrow f(b)$．以上より，$a \Rightarrow b$ ならば $b \Rightarrow f(a) \Rightarrow f(b)$ が成り立つ． □

以上の事実から以下の定理が証明できる．

定理 3.5. $(A, \to_A), (B, \to_B)$ を ARS，$g : B \to B$ を $\to_B$ について Z 性を満たす写像とする．$F : A \to B, G : B \to A$ が次を満たすとする．

1. 任意の $a, a' \in A$ について $a \to_A a'$ ならば $F(a) \Rightarrow_g F(a')$
2. 任意の $b, b' \in B$ について $b \Rightarrow_g b'$ ならば $G(b) \twoheadrightarrow_A G(b')$
3. 任意の $a \in A$ について $a \twoheadrightarrow_A G \circ F(a)$

このとき，$G \circ g \circ F$ は $(A, \to_A)$ について Z 性を満たす．

Proof. 任意の $a \to_A a'$ について，条件 1. より，$F(a) \Rightarrow_g F(a')$．補題 3.3 より，g と $\Rightarrow_g$ は トライアングル性を満たす．補題 3.4 より，$F(a) \Rightarrow_g F(a') \Rightarrow_g g \circ F(a) \Rightarrow_g g \circ F(a')$．条件 2. より，$G \circ F(a) \twoheadrightarrow_A G \circ F(a') \twoheadrightarrow_A G \circ g \circ F(a) \twoheadrightarrow_A G \circ g \circ F(a')$．条件 3. より，$a' \twoheadrightarrow_A G \circ F(a')$．以上より，任意の $a \to_A a'$ について，$a' \twoheadrightarrow_A G \circ g \circ F(a) \twoheadrightarrow_A G \circ g \circ F(a')$．したがって，$G \circ g \circ F$ は $(A, \to_A)$ について Z 性を満たす．

以上の証明を図に表すと図 3 のようになる． □

4 明示的代入計算 $\lambda\mathrm{x}$ の Z 性証明

定理 3.5 を用いて，明示的代入を含む λ 計算である λ_{x} について Z 性を満たす写像を構成する．

定義 4.1 (λ_{x})**.** λ_{x} の項は次のように定義される．

$$M := x \mid \lambda x.M \mid MM \mid M\langle x := M\rangle.$$

λ_{x} の簡約は次の規則の compatible closure として定義される．

$$(\lambda x.M)N \to M\langle x := M\rangle \qquad (\beta_{\mathrm{x}})$$
$$y\langle y := N\rangle \to N \qquad (\pi_{\mathrm{hit}})$$
$$x\langle y := N\rangle \to x \qquad (\pi_{\mathrm{gc}})$$
$$(\lambda x.P)\langle y := N\rangle \to \lambda x.P\langle y := N\rangle \qquad (\pi_{\mathrm{abs}})$$
$$(PQ)\langle y := N\rangle \to P\langle y := N\rangle Q\langle y := N\rangle \qquad (\pi_{\mathrm{app}})$$

定理 3.5 を用いることで，λ_{x} の Z 性を λ 計算の β 簡約の Z 性に帰着することができる．定理 3.5 で用いる写像として，F を明示的代入を通常の代入に変換する写像，G を恒等写像と定義する．

定義 4.2. 明示的代入を通常の代入に変換する写像 F は以下のように定義される．

1. $F(x) = x$
2. $F(\lambda x.M) = \lambda x.F(M)$
3. $F(M_1 M_2) = F(M_1)F(M_2)$
4. $F(M_1\langle y := M_2\rangle) = F(M_1)[x := F(M_2)]$

定理 4.3. $\to_{\mathrm{x}}$ を λ_{x} の簡約，$\to_\beta$ を定義 2.4 の λ 計算の β 簡約とする．g を定義 2.5 で与えた β 簡約に対する complete development とする．このとき，$g \circ F$ は $\to_{\mathrm{x}}$ について Z 性を満たす．

Proof. 定理 3.5 を適用する．A は定義 4.1 の λ_{x}，B は定義 2.4 の λ 計算とする．条件 1. について，$M \to_{\mathrm{x}} N$ が規則 (β_{x}) を行うとき，$F(M) \to_\beta F(N)$．$M \to_{\mathrm{x}} N$ がその他の規則を行うとき，$F(M) = F(N)$．したがって，条件 1. は成り立つ．
条件 2.，3. は簡単に証明できる． □

λ_{x} に対して Z 性を満たす写像は合成的 Z 定理を用いて既に与えられているが [2]，定理 4.3 の $g \circ F$ は

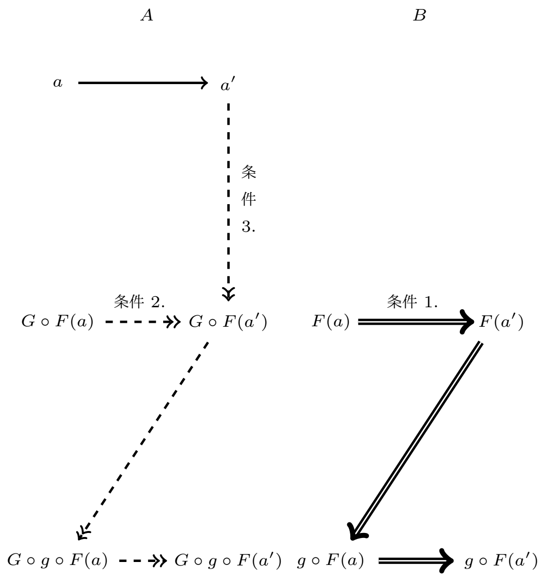

図 3　定理 3.5

この写像と同一のものである．

5　まとめと今後の課題

本研究では，定理 3.5 によって既に Z 性を満たすことが分かっている写像から，新たに Z 性を満たす写像を構成する手法を与えた．また，定理 3.5 を用いて明示的代入を含む λ 計算の Z 性を証明した．今後の課題としては，refinement や CTRS に対する定理 3.5 の応用が挙げられる．

ARS $(A, \to_A), (B, \to_B)$ について，$B \subseteq A$ かつ $\to_B \subseteq \to_A^*$ を満たすとき，$(A, \to_A)$ は $(B, \to_B)$ の refinement であると言う．例えば，定義 4.1 の λ_{x} は定義 2.4 の λ 計算の refinement になっている．λ_{x} と λ 計算の complete development は，定理 3.5 の条件を満たしているが，一般には refinement B と A 上の Z 性を満たす写像が定理 3.5 の条件を満たすとは限らない．例えば，図 4 の書換え系 A は B の refinement であり，B は Z 性を満たすが A は Z 性を満たさないため，定理 3.5 の条件を満たさない．今後，どのような refinement が定理 3.5 の条件を満たすかを考えていきたい．

参 考 文 献

[1] Dehornoy, P. and van Oostrom, V. Z, proving confluence by monotonic single-step upperbound functions. In *Logical Models of Reasoning and Computation (LMRC-08)*, 2008.

[2] Nakazawa, K. and Fujita, K. Compositional Z: Confluence proofs for permutative conversion. *Studia Logica*, 104:1205–1224, 2016.

[3] Marchiori, M. Unravelings and Ultra-properties. *Proceedings of the 5th International Conference on Algebraic and Logic Programming*, volume 1139 of Lecture Notes in Computer Science, pages 107–121, Springer, 1996.

$$
\begin{array}{cc}
A & B \\
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] & \\
c_1 \arrow[d] & & b_1 \arrow[ll] \arrow[ul] \\
c_2 \arrow[d] & & b_2 \arrow[ll] \arrow[u] \\
\vdots & & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] & \\
c_1 \arrow[d] & & b_1 \arrow[ul] \\
c_2 \arrow[d] & & b_2 \arrow[u] \\
\vdots & & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

図 4　定理 3.5 の条件を満たさない refinement