合流性とZ性について

群馬大学理工学府　赤坂 陸来 *
Riku Akasaka
Department of Computer Science,
Gunma University

群馬大学理工学府　藤田 憲悦 †
Ken-etsu Fujita
Department of Computer Science,
Gunma University

名古屋大学大学院情報科学研究科 中澤 巧爾
Koji Nakazawa
Nagoya University

1　はじめに

抽象書き換え系には合流性や停止性などの重要な性質が存在する．合流性を証明する手段として, Z 性とよばれる性質を利用したものが知られている．本論文は, 前半では Z 定理と合流性について, Dehornoy, P., and V. van Oostrom[1] にしたがって調査したものを述べる．後半では Z 性を拡張した合成的 Z 定理について, Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita[2] より例を用いて紹介する．

2　準備

本節では, 抽象書き換え系と例として用いる λ 計算について, 本論文で使用する記号を含め定義を述べる．

2.1　抽象書き換え系

抽象書き換え系は, 任意の集合 A と A 上の二項関係 $\to$ の対 $(A, \to)$ である．$a, b, c, \ldots$ を集合 A の要素とし, $(a, b) \in \to$ のとき, $a \to b$ と表し a から b への簡約という．$a \to b$ を満たすような b が存在しないとき a は正規形であるという．$\to$ の反射推移閉包を $\twoheadrightarrow$, 推移閉包を $\to^+$ と表す．

2.2　簡約列

抽象書き換え系 $(A, \to)$ が与えられたとき, $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$ のような有限もしくは無限列を $\to$ についての簡約列という．とくに, $a, b \in A$ について, a から始まる簡約列を a の簡約列, a から始まって b で終わる簡約列を a から b の簡約列という．また, $\sigma : a \twoheadrightarrow b$ と表記するとき σ は a から b の任意の簡約列を示す．

* 本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである．
† 本研究の一部は KAKENHI(C)20K03711 の援助を受けたものである．

2.3　λ 計算

2.3.1　λ 項

Λをλ 項の集合とし, 以下のように定義する.

定義 1 (λ項)

1. 変数 $x, y, z, \ldots$ はλ項である.
2. M が λ 項であり, x が変数のとき $(\lambda x.M)$ は λ 項である.
3. M, N がλ項のとき (MN) はλ項である.

$(\lambda x.M)$ という形を関数抽象, (MN) という形を関数適用という. また, 関数抽象 $(\lambda x.M)$ の M の中に変数 x 現れたとき，x は束縛されているという. 束縛されている変数のことを束縛変数と呼び，束縛されていない変数を自由変数と呼ぶ. λ項 M に含まれる自由変数の集合を $FV(M)$ と表す.

2.3.2　β 簡約 ($\to_\beta$)

$(\lambda x.M)N$ という形の λ 項を $M[x := N]$ に書き換えることを β 簡約と言い, M を β 簡約して M' を得るとき $M \to_\beta M'$ と表記する. β 簡約の反射推移閉包を $\twoheadrightarrow_\beta$, 推移閉包を $\to_\beta^+$ と表す. $(\lambda x.M)N$ という形の項を β 基 (β-*redex*) と言い，β 基を含まない λ 項 (それ以上 β 簡約できない λ 項) を β 正規形という.
また, $(\Lambda, \to_\beta)$ の同値関係を $=_\beta$ で表し以下のように定義する.

定義 2 ($\to_\beta$ の同値関係)

1. $M \twoheadrightarrow_\beta N$ ならば $M =_\beta N$
2. $M =_\beta N$ ならば $N =_\beta M$
3. $M =_\beta N$ かつ $N =_\beta L$ ならば $M =_\beta L$

3　抽象書き換え系に関する性質

3.1　合流性と $Church$-$Rosser$ の定理

定義 3 (合流性)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ について, 以下の性質を満たすとき $(A, \to)$ は合流性をもつという.

$$\forall a, a_1, a_2 \in A,\ a \twoheadrightarrow a_1 \text{かつ}\ a \twoheadrightarrow a_2 \implies \exists a_3 \in A,\ a_1 \twoheadrightarrow a_3 \text{かつ}\ a_2 \twoheadrightarrow a_3$$

合流性はラムダ計算において成立し, 関連した性質として Church-Rosser の定理が成立する.

定理 4 ($(\Lambda, \to_\beta)$ の合流性)

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow_\beta M_1 \text{かつ}\ M \twoheadrightarrow_\beta M_2 \implies \exists M_3 \in \Lambda,\ M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3 \text{かつ}\ M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$$

定理 5 ($Church$-$Rosser$ の定理)

$$\forall M, N \in \Lambda,\ M =_\beta N \implies \exists L \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow_\beta L \text{ かつ } N \twoheadrightarrow_\beta L$$

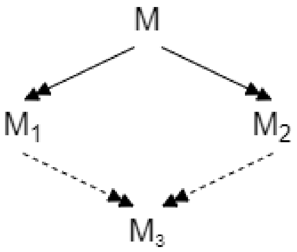


図 1: $(\Lambda, \to_\beta)$ の合流性

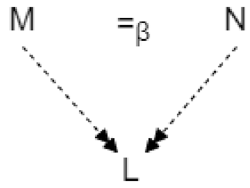


図 2: Church-Rosser の定理

$(\Lambda, \to_\beta)$ が定理 4 を満たすことを $(\Lambda, \to_\beta)$ は CR 性をもつという.

定理 6 合流性と *Church-Rosser* の定理について, 以下のことが言える.

$$(\Lambda, \to_\beta) \text{ が合流性をもつ} \iff (\Lambda, \to_\beta) \text{ が } CR \text{ 性をもつ}$$

証明
($\Longrightarrow$)
$=_\beta$ の定義に沿った帰納法により証明する.

1. $M =_\beta N$ が $M \twoheadrightarrow_\beta N$ から定義されるとき：
   $M \twoheadrightarrow_\beta N$, $N \twoheadrightarrow_\beta N$ より成立する.
2. $M =_\beta N$ が $N =_\beta M$ から定義されるとき：
   帰納法の定義から, ある L が存在し, $N \twoheadrightarrow_\beta L$, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ となる.
3. $M =_\beta N$ が $M =_\beta N', N' =_\beta N$ から定義されるとき：
   帰納法の定義から, ある M_1, M_2 が存在し, それぞれ $M \twoheadrightarrow_\beta M_1$かつ $N' \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $N' \twoheadrightarrow_\beta M_2$かつ $N \twoheadrightarrow_\beta M_2$ となる. さらに合流性より, ある M_3 が存在し, $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3$かつ $M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$ となる. つまり $M \twoheadrightarrow_\beta M_3$, $N \twoheadrightarrow_\beta M_3$となる M_3が存在する.

($\Longleftarrow$)
任意の M, M_1, M_2 に対して, $M \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta M_2$ を仮定する. $=_\beta$ の定義より $M_1 =_\beta M_2$ である. 定理 5 より, $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_3$, $M_2 \twoheadrightarrow_\beta M_3$となる M_3が存在する.

□

3.2 Triangle property

定義 7 (*Triange-property*)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 f について, 以下の性質を満たすとき関係 $\to$ は *Triangle-property* をもつという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \to b \implies b \to f(a)$$

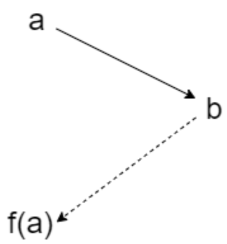


図 3: Triangle-property

例題 8 ($(\Lambda, \to_\beta)$ における *Triangle-property*)
$(\Lambda, \to_\beta)$ について, 並行簡約という二項関係と写像 $*$(*complete-development*) を定義する.

定義 *9* (並行簡約 $\Rrightarrow_\beta$)

1. $x \Rrightarrow_\beta x$
2. $M \Rrightarrow_\beta M'$ならば$\lambda x.M \Rrightarrow_\beta \lambda x.M'$
3. $M \Rrightarrow_\beta M'$かつ $N \Rrightarrow_\beta N'$ならば $(MN) \Rrightarrow_\beta (M'N')$
4. $M \Rrightarrow_\beta M'$かつ $N \Rrightarrow_\beta N'$ならば $(\lambda x.M)N \Rrightarrow_\beta M'[x := N']$

定義 *10* (写像 $*$ (*complete-development*))

1. $x^* = x$
2. $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$
3. $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$
4. $(LN)^* = L^*N^*$ (ただし L は関数抽象以外のλ項)

$\forall M \in \Lambda$ について, 並行簡約は M の中に存在する β基 を任意の数同時に簡約できる関係であり, 写像 $*$ は M の中の β基 をすべて簡約した λ 項を返すような写像である. また, $\Rrightarrow_\beta$ は $\to_\beta \subset \Rrightarrow_\beta \subset \twoheadrightarrow_\beta$ といった大小関係となる. 並行簡約と写像 $*$ を定義することで次の命題が成り立つことが分かる.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{について,} \ M \Rrightarrow_\beta N \implies N \Rrightarrow_\beta M^*$$

つまり, 並行簡約 $\Rrightarrow_\beta$ は *Triangle-property* を満たす.

3.3 Cofinality

定義 11 (戦略)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ において, 戦略 F とは次の性質を満たす A から A への写像である.

1. $a \equiv F(a)$ $\quad$ a が正規形である場合
2. $a \to^+ F(a)$ $\quad$ その他

a が正規形でないとき, a から $F(a)$ を求める際, $a \to F(a)$ のとき F は 1 ステップ戦略, $a \to^+ F(a)$ のとき F は多ステップ戦略と呼ぶ.

定義 12 ($\to_F$)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と戦略 F があり, $a \to^+ F(a)$ のとき, $a \to_F F(a)$ と書く.

定義 13 ($Cofinality$)
戦略 F が以下の性質を満たすとき戦略 F は $cofinal$ である.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について,} \ a \to b \implies \text{ある } n(\geq 1) \text{ が存在し,} \ b \twoheadrightarrow F^n(a)$$

定義 14 ($Hyper\text{-}Cofinality$)
任意の $a, b \in A$ と A 上の戦略 F について, 最終的には常に簡約 $\to_F$ を含む a の任意の簡約列をσ とする. 以下の性質を満たすとき, 戦略 F は $hyper\text{-}cofinal$ である.

$$a \twoheadrightarrow b \implies \sigma \text{上の } c \text{ が存在し,} b \twoheadrightarrow c$$

3.4 Z 性

定義 15 (Z 性)[*1*] 抽象書き換え系 $(A, \to)$ について, 次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき, 写像 f は Z 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$$

例題 16 ($(\Lambda, \to_\beta)$ における Z 性)
$(\Lambda, \to_\beta)$ について, *3.2* 節で導入した写像 $*$ は Z 性を満たす写像である. つまり, 次の命題が成り立つ.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{について，} M \to_\beta N \implies N \twoheadrightarrow_\beta M^* \twoheadrightarrow_\beta N^*$$

証明
M の構造に関する帰納法により $M \to_\beta N \implies N \twoheadrightarrow_\beta M^* \twoheadrightarrow_\beta N^*$ を証明する.

1. M が関数抽象 $(\lambda x.M_1)$ のとき :
$M = \lambda x.M_1 \to_\beta \lambda x.N_1 = N$ と仮定すると, 帰納法の仮定より, $N_1 \twoheadrightarrow_\beta M_1^* \twoheadrightarrow_\beta N_1^*$ となる. 従って, $\lambda x.N_1 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.M_1^*(= (\lambda x.M_1)^*) \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.N_1^*(= (\lambda x.N_1)^*)$ である.

2. M が関数適用 M_1M_2のとき :

2-1 $M_1M_2 = (\lambda x.M_0)M_2 \to_\beta M_0[x := M_2] = N$ の場合 :
$N = M_0[x := M_2] \twoheadrightarrow_\beta M_0^*[x := M_2^*](= ((\lambda x.M_0)M_2)^* = M^*) \twoheadrightarrow_\beta M_0[x := M_2]^* = N^*$ となる.

2-2 $M = M_1M_2 \to_\beta N_1N_2 = N$ の場合 :
$M_1 \to_\beta N_1(M_2 = N_2)$ もしくは $M_2 \to_\beta N_2(M_1 = N_1)$ となる. それぞれの場合において帰納法の仮定より, $N_i \twoheadrightarrow_\beta M_i^* \twoheadrightarrow_\beta N_i^*(i = 1, 2)$ である. M_1が関数抽象で $M_1^* = \lambda x.M_0'$ であれば, $M_0' \twoheadrightarrow_\beta N_0'$となる N_0'について $N_1^* = \lambda x.N_0'$となる. よって,

$$\begin{aligned} N_1N_2 &\twoheadrightarrow_\beta M_1^*M_2^* = M_0'[x := M_2^*] \\ &\to_\beta M_0'[x := M_2^*] \ (= (M_1M_2)^*) \\ &\twoheadrightarrow_\beta N_0'[x := N_2^*] \ (= (N_1N_2)^*) \end{aligned}$$

その他の場合, $N_1N_2 \twoheadrightarrow_\beta M_1^*M_2^* \twoheadrightarrow_\beta N_1^*N_2^*$となる. N_1が関数抽象で $N_1^* = \lambda x.N_0'$ のとき, $N_1^*N_2^* = (\lambda x.N_0')N_2^* \to N_1'[x := N_2^*] = (N_1N_2)^*$ である. それ以外は $N_1^*N_2^* = (N_1N_2)^*$となる.
□

4 相互関係

本節では, 3 節で挙げた 5 つの概念について, それらの相互関係を述べる.

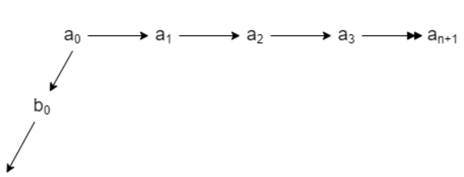
4.1 Z 性と合流性

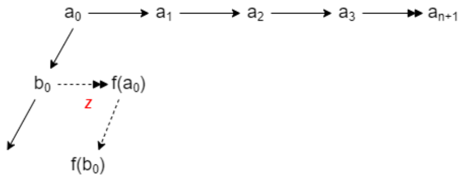
Z 性と合流性について次のことが成立する.

定理 17 (Z 定理)
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

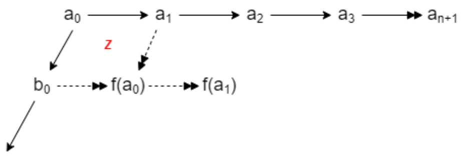
$$\text{写像 } f \text{ が } Z \text{ 性を満たす} \implies (A, \to) \text{ は合流性をもつ}$$

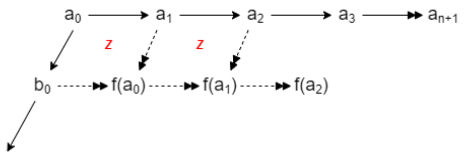
証明
$a \in A$ から分岐した任意の項について, Z 性を帰納的に用いることで下図のように示すことができる.



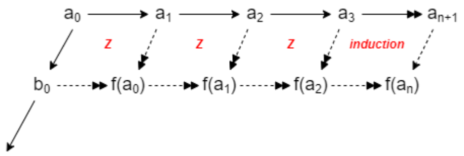


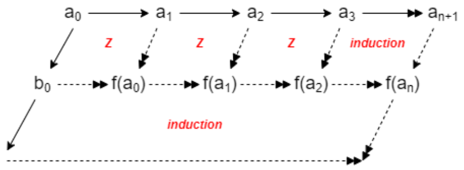
i　　ii





iii　　iv





v　　vi

□

4.2 Z 性と $Cofinality$

Z 性と $Cofinality$ について次のことが成立する.

定理 18
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が } Z \text{ 性を満たす} \implies \text{戦略 } f \text{ は } cofinal \text{ である}$$

証明
a の簡約列上の任意の項 b_n について, ある k が存在し, $b_n \twoheadrightarrow f^k(a)$ となればよい. Z 性より $a \to b_0 \to b_1$ のとき, $b_0 \twoheadrightarrow f^1(a)$, $b_1 \twoheadrightarrow f^1(b_0)$ である. $b_0 \twoheadrightarrow f^1(a)$ なので Z 性より, $f^1(b_0) \twoheadrightarrow f^2(a)$ となる. 同様に考えると, a の簡約列上の任意の項 b_n について $b_n \twoheadrightarrow f^k(a)$ となる.

□

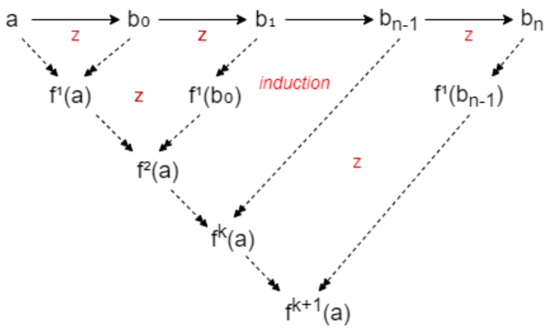


図 4: Z 性 $\implies$ $Cofinality$

4.3 「Z 性 $\Longleftarrow$ 合流性」,「Z 性 $\Longleftarrow$ $Cofinality$」の反例

以下のような項書き換えは, Z 性 $\Longleftarrow$ 合流性, Z 性 $\Longleftarrow$ $Cofinality$ の反例となる.

- $i \to i+1$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$
- $-(n+1) \to n+1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

証明
Z 性を満たす写像 $*$ が存在すると仮定する. $0^* = n$ $(n > 0)$ であり, 書き換え規則より, $-(n+1) \twoheadrightarrow 0$, $-(n+1) \to n+1$ となるので, それぞれ Z 性より, $-(n+1)^* \twoheadrightarrow 0^*$, $n+1 \twoheadrightarrow -(n+1)^*$ である. つまり, $n+1 \twoheadrightarrow 0^* = n$ となり, 書き換え規則に矛盾する.

□

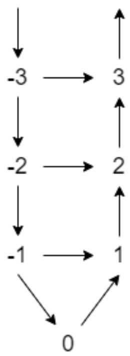


図 5: 「Z 性 $\Longleftarrow$ $Cofinality$」, 「Z 性 $\Longleftarrow$ 合流性」の反例

4.4 Z 性と $Hyper$-$Cofinality$

Z 性と $Hyper$-$Cofinality$ について次のことが成立する.

定理 19
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が } Z \text{ 性を満たす} \Longrightarrow \text{戦略 } f \text{ は } hyper\text{-}cofinal \text{ である}$$

証明
$a \to b$ となる任意の $a, b \in A$ と, 最終的には常に簡約 $\to_f$ を含むような a の簡約列 σ が与えられたときに, σ に合流する b の簡約列δ が存在することを示せばよい. σ は正規形で終わるか, a から c の簡約列σ_1 と, $c \to_f f(c)$ と, $f(c)$ の簡約列σ_2 に分けられる. $a \to b$, $a \twoheadrightarrow c$ なので, それぞれ Z 性より $b \twoheadrightarrow f(a)$, $f(a) \twoheadrightarrow f(c)$ である. つまり, $c \twoheadrightarrow d \twoheadrightarrow f(c)$ となる d が存在し, $\delta_1 : b \twoheadrightarrow d$ が考えられる. c が正規形の場合, $\delta := \delta_1$ とし, その他の場合, δ_1 と $c \twoheadrightarrow f(c)$ と σ_2 を合わせたものを δ とすることで δ は σ に合流する b の簡約列である.

□

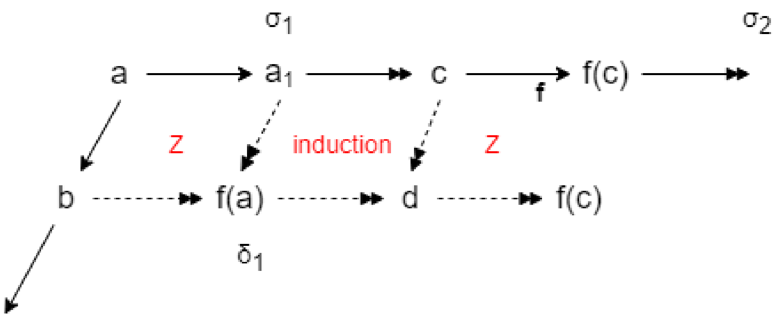


図 6: Z 性 $\Longrightarrow$ *Hyper-Cofinal*

4.5 Z 性と $Triangle$-$property$

Z 性と Triangle-property について次のことが成立する．

定理 20
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 f が与えられたとき，

写像 f が Z 性を満たす

$\Updownarrow$

ある関係 $\to_t$ が存在し，次の性質を満たす．

T1. $\to \subseteq \to_t \subseteq \twoheadrightarrow$

T2. $a \to_t b \implies b \to_t f(a)$

証明
$(\implies)$
$a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ のとき，$a \to_t b$ と定義する．$\to_t$ が T1, T2 を満たすことを示す．

(T1) $a \to b$ ならば Z 性より，$a \to b \twoheadrightarrow f(a)$ である．よって $\to \subseteq \to_t$ である．$a \to_t b$ ならば，明らかに $a \twoheadrightarrow b$ である．よって $\to_t \subseteq \twoheadrightarrow$ である．以上より，$\to \subseteq \to_t \subseteq \twoheadrightarrow$ の関係が得られる．

(T2) $a \to_t b$ と仮定すると $\to_t$ の定義から $a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ となり，Z 性より $f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である．$b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となるので $\to_t$ の定義から $b \to_t f(a)$ である．従って，$a \to_t b$ ならば $b \to_t f(a)$ となり T2 が成り立つ．

$(\impliedby)$
$a \to b$ を仮定すると，T1, T2 より $a \to_t b \to_t f(a)$ となる．$b \to_t f(a)$ なので T2 より，$b \to_t f(a) \to_t f(b)$ となる．T1 より，$b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である．従って，$a \to b$ ならば $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となり，Z 性が示された．

□

4.6 合流性と $Cofinality$

合流性と $Cofinality$ について次のことが成立する．

定理 21
抽象書き換え系 $(A, \to)$ と A 上の写像 F が与えられたとき，

戦略 F が $cofinal \implies (A, \to)$ は合流性をもつ．

証明
$a_1 \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow a_2$ となる任意の $a, a_1, a_2 \in A$ について．戦略 F は $cofinal$ なので，ある n, m が存在し，$a_1 \twoheadrightarrow F^n(a)$ かつ $a_2 \twoheadrightarrow F^m(a)$ となる．$k = max(n, m)$ とすると，$F^n(a) \twoheadrightarrow F^k(a) \twoheadleftarrow F^m(a)$ である．従って，$a_1 \twoheadrightarrow F^k(a) \twoheadleftarrow a_2$ となり合流性が成立する．

□

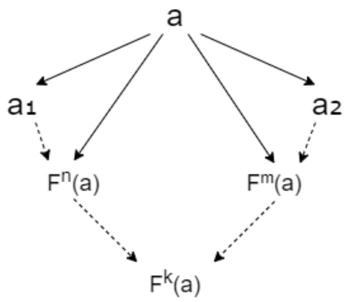


図 7: 合流性 $\implies$ Cofinality

5　合成的 Z 定理

5.1　弱 Z 性

定義 22 (弱 Z 性)　抽象書き換え系 $(A, \to)$ について，$\to_\times$ を A 上の関係とし，その反射推移閉包を $\twoheadrightarrow_\times$ とする．
次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，写像 f は弱 Z 性を満たすという．

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow_\times f(a) \twoheadrightarrow_\times f(b)$$

5.2　合成的 Z 定理

定理 23 (合成的 Z 定理)[2] 抽象書き換え系 $(A, \to)$ について，$\to = \to_1 \cup \to_2$ とする．
次の性質を満たす A 上の写像 f_1, f_2 が存在するとき，合成写像 $f_2 \circ f_1$ は Z 性を満たす．

1. $\to_1$ について，f_1 が Z 性を満たす．

2. $a \to_1 b$ となるとき $f_2(a) \twoheadrightarrow f_2(a)$ である．

3. 任意の $a \in Im(f_1)$ について，$a \twoheadrightarrow f_2(a)$ である．

4. $\to_2$ について，$f_2 \circ f_1$ が弱 Z 性を満たす．

図 8 が上の性質を図示したものであり，合成写像 $f_2 \circ f_1$ が Z 性を満たすことが確認できる．

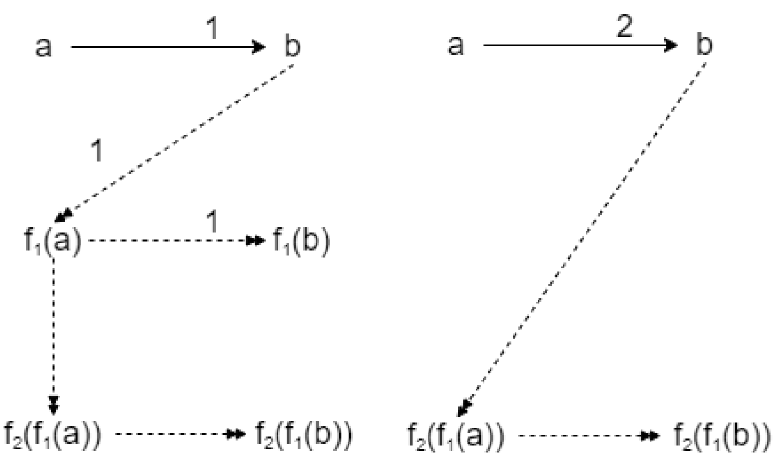


図 8: 合成的 Z 定理

例題 24 ($\lambda\mu$計算) [*2*]
以下のような項と簡約規則からなる $\lambda\mu$計算 の体系を定義する．

定義 ***25*** ($\lambda\mu$計算)
項： $M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM) \mid (\mu\alpha.M) \mid ([\alpha]M)$

簡約規則：

1. $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$

2. $(\mu\alpha.M)N \to_S M[[\alpha]w := [\alpha](wN)]$

3. $[\alpha](\mu\beta.M) \to_R M[\beta := \alpha]$

4. $\mu\alpha.[\alpha]M \to_{\mu\eta} M\ (\alpha \notin FV(M))$

この体系で Z 性をみたす写像を求めるとき，例題 *16* と同様に考えて，どれかの簡約規則を優先させる写像を考えたとしても Z 性を満たさない．そこで，$\to_1 = \to_{\mu\eta}$, $\to_2 = \to_\beta \cup \to_S \cup \to_R$ として，以下のような写像 $*^1, *^2$ を与える．すると，写像 $*^1, *^2$ が合成的 Z の性質を満たし，合成写像 $*^2 \circ *^1$ が Z 性を満たすことが分かり，上の体系の合流性が示せる．

定義 ***26*** (写像$*^1$)

1. $x^{*^1} = x$

2. $(\lambda x.M)^{*^1} = \lambda x.M^{*^1}$

3. $(MN)^{*^1} = (M^{*^1}N^{*^1})$

4. $(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*^1} = M^{*^1}\ (\alpha \notin FV(M))$

5. $(\mu\alpha.M)^{*^1} = \mu\alpha.M^{*^1}$

6. $([\alpha]M)^{*^1} = [\alpha]M^{*^1}$

定義 ***27*** (写像$*^2$)

1. $x^{*^2} = x$

2. $(\lambda x.M)^{*^2} = \lambda x.M^{*^2}$

3. $((\lambda x.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[x := N^{*^2}]$

4. $((\mu\alpha.M)N)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*^2})]$

5. $(MN)^{*^2} = (M^{*^2}N^{*^2})$

6. $(\mu\alpha.M)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}$

7. $([\alpha](\mu\beta.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[[\beta]w := [\alpha](wN^{*^2})]$

8. $([\alpha]M)^{*^2} = [\alpha]M^{*^2}$

6 まとめ

文献 [1] [5] に従って, 相互関係を図 9 のようにまとめることができる. また, Z 性を拡張した合成的 Z 定理では, 簡約規則が複数ある体系で Z 性を満たす写像が直接与えることが出来なくても, 簡約規則を分けて考えることで Z 性を満たす写像について考えることができる.

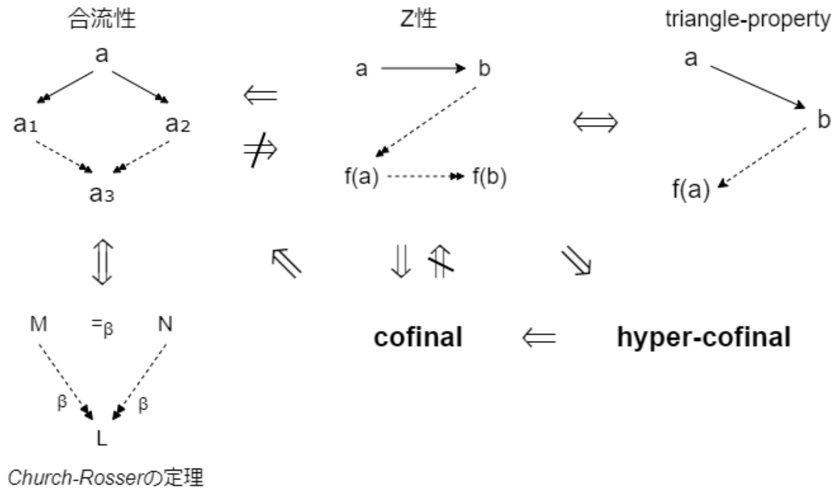


図 9: 5 つの概念の相互関係

参考文献

[1] Dehornoy, P., and V. van Oostrom, Z Draft: For Your Mind Only, July 27, 2008.

[2] Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita, Confluence Proofs of Lambda-Mu-Calculi by Z Theorem, Studia Logica 109:917-936, 2021.

[3] Komori, Y., N. Matsuda, and F. Yamakawa, A simplified proof of the Church-Rosser theorem, Studia Logica 102(1):175-183,2013.

[4] Nakazawa, K., and K. Fujita, Compositional Z: Confluence proofs for permutative conversion, Studia Logica 104:1205-1224, 2016.

[5] Terse, Term Rewriting System, Volume 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2003.