Z 定理のモジュール性

群馬大学理工学府　女屋 優貴 *
Yuki Onaya
Department of Computer Science,
Gunma University

群馬大学理工学府　藤田 憲悦
Ken-etsu Fujita
Department of Computer Science,
Gunma University

名古屋大学大学院情報学研究科　中澤 巧爾
Koji Nakazawa
Graduate School of Informatics,
Nagoya University

1　はじめに

計算規則に従い項を置換することを項の書き換えといい，書き換え系は項の集合と書き換え規則により与えられる．書き換え系は，代数学や論理学，計算機科学などの多くの分野で用いられており，複雑な計算体系が増えていくなかで重要な研究分野として認められている．書き換え系を考える際に重要な性質として合流性がある．合流性は，計算結果の一意性を保証する性質であり，様々な証明法が研究されている．合流性の証明法に Z 定理 [2] や合成的 Z 定理 [5]，Hindley-Rosen の補題 [1] などがある．

一般に，書き換え $\to_1$ と $\to_2$ のそれぞれで合流性が言えたとしても，$\to_1 \cup \to_2$ が合流性を持つとは限らない．しかし，「$\to_1$ と $\to_2$ が可換である」という条件が加わると，Hindley-Rosen の補題より $\to_1 \cup \to_2$ の合流性が言える．

本研究では，Z 定理のモジュール性について考察する．具体的には，書き換え $\to_1$ と $\to_2$ がそれぞれ Z 特性を満たす場合，さらにどのような条件が加われば $\to_1 \cup \to_2$ の Z 特性が言えるかを明らかにする．また，ラムダ計算という書き換え系を具体例として取り上げ，Z 定理のモジュール性を使った Z 定理証明を行う．

2　準備

本節では，抽象書き換え系とそれに関する重要な性質について述べる．

* 本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである．

2.1 抽象書換え系

定義 1. (抽象書き換え系)
抽象書き換え系とは集合 A と A 上の二項関係 $\to$ の対 $(A, \to)$ である．関係 $a \to b$ を a から b への書き換えという．また，$\to$ の反射推移閉包を $\twoheadrightarrow$ と書く．

抽象書換え系において，計算の答えに相当する概念である正規形を次のように定義する．

定義 2. (正規形)
$a \to b$ を満たす b がないとき a を正規形という．また，$a \twoheadrightarrow b$ を満たす正規形 b があるとき，a は正規形をもつという．

2.2 合流性

定義 3. (合流性)
集合 A 上の関係 $\to$ について，以下の性質を満たすとき $\to$ は合流性をもつという．

$$\forall a, a_1, a_2 \in A,\ a \twoheadrightarrow a_1 \text{ かつ } a \twoheadrightarrow a_2 \implies \exists a_3 \in A,\ a_1 \twoheadrightarrow a_3 \text{ かつ } a_2 \twoheadrightarrow a_3$$

合流性を図示したものを図 1 に示す．合流性は計算結果の一意性を保証する性質であり，次のことが言える．

定理 4.

$$\to \text{ が合流性を持つ} \implies \text{任意の } a \in A \text{ について，} a \text{ は正規形を高々 1 つしか持たない}$$

2.3 Z 定理

定義 5. (Z 特性 [2]) 集合 A 上の関係 $\to$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について写像 f は Z 特性を満たすという．

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$$

定理 6. (Z 定理 [2])

$$\text{集合 } A \text{ 上の関係 } \to \text{ について Z 特性を満たす写像 } f \text{ が存在する} \implies \to \text{ は合流性を持つ}$$

Z 特性を図示したものを図 2 に示す．また，Z 定理の逆は成り立たない [2]．

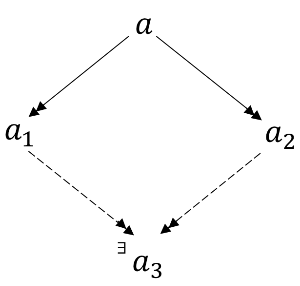

図 1: 合流性

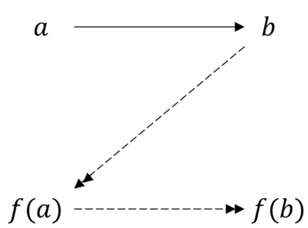

図 2: Z 特性

2.4 合成的 Z 定理

定義 7. (弱 Z 特性 [5])
集合 A 上の関係 $\to$ と $\to_\times$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について，写像 f は $\to_\times$ によって弱 Z 特性を満たすという．

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow_\times f(a) \twoheadrightarrow_\times f(b)$$

書き換え規則を複数持つ体系を考えるとき，Z 特性を満たす写像を与えることが難しくなる場合がある．そこで，複数存在する書き換え規則を 2 つに分けて Z 特性を満たす写像を与えようと考えたのが合成的 Z 定理である．

また，集合 A 上の 2 つの関係 $\to_1$, $\to_2$ について，それらを組み合わせた関係を $\to_1 \cup \to_2$ と書く．

定理 8. (合成的 Z 定理 [5])
集合 A 上の関係 $\to$ について，$\to = \to_1 \cup \to_2$ とする．A 上の写像 f_1, f_2 について，

1. $\to_1$ について，f_1 が Z 特性を満たす，
2. $a \to_1 b$ ならば $f_2(a) \twoheadrightarrow f_2(a)$ である，
3. 任意の $a \in Im(f_1)$ について，$a \twoheadrightarrow f_2(a)$ である，
4. $\to_2$ について，$f_2 \circ f_1$ が $\to$ によって弱 Z 特性を満たす，

ならば，$\to$ について合成写像 $f_2 \circ f_1$ は Z 特性を満たす．

合成的 Z 定理を図示したものを図 3 に示す．

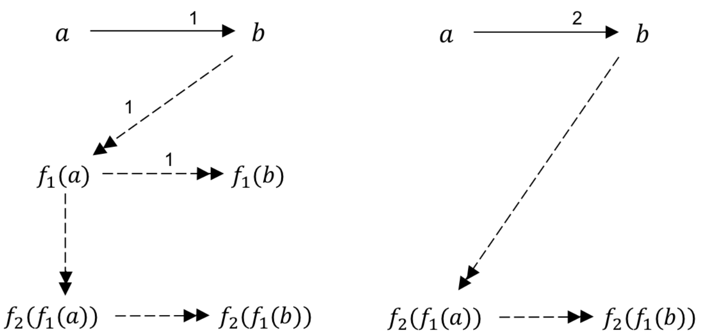

図 3: 合成的 Z 定理

2.5 Hindley-Rosen の補題

定義 9. (可換性)
集合 A 上の関係 $\to_1$ と $\to_2$ について，次の性質を満たすとき，$\to_1$ と $\to_2$ は可換性を持つという．

$$\forall a, a_1, a_2 \in A,\ a \twoheadrightarrow_1 a_1 \text{ かつ } a \twoheadrightarrow_2 a_2 \implies \exists a_3 \in A,\ a_1 \twoheadrightarrow_2 a_3 \text{ かつ } a_2 \twoheadrightarrow_1 a_3$$

一般に，書き換え $\to_1$ と $\to_2$ のそれぞれで合流性が言えたとしても，$\to_1 \cup \to_2$ が合流性を持つとは限らない．しかし，$\to_1$ と $\to_2$ の可換性が言えると，Hindley-Rosen の補題で知られる次の補題より，$\to_1 \cup \to_2$ の合流性が言える．

補題 10. (Hindley-Rosen の補題 [1])
集合 A 上の関係 $\to_1$ と $\to_2$ について,

1. $\to_1$ と $\to_2$ がそれぞれ合流性を持ち,
2. $\to_1$ と $\to_2$ が可換性を持つ,

ならば, $\to_1 \cup \to_2$ は合流性を持つ.

3 Z 特性のモジュール性

$\to_1$ と $\to_2$ のそれぞれの合流性に加え, $\to_1$ と $\to_2$ の可換性が言えると Hindley-Rosen の補題より $\to_1 \cup \to_2$ の合流性が言える．本研究では, Z 特性のモジュール性について考察し，書き換え $\to_1$ と $\to_2$ それぞれで Z 特性が言えたとき，さらにどのような条件が加われば $\to_1 \cup \to_2$ で Z 特性が言えるかを明らかにする.

3.1 共終性と単調性

まず，以下の 4 つの性質を定義する.

定義 11. (共終性)
集合 A 上の関係 $\to$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について写像 f は共終性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow f(a)$$

定義 12. (弱共終性)
集合 A 上の関係 $\to$ と $\to_\times$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について，写像 f は $\to_\times$ によって弱共終性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies b \twoheadrightarrow_\times f(a)$$

定義 13. (単調性)
集合 A 上の関係 $\to$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について写像 f は単調性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies f(a) \twoheadrightarrow f(b)$$

定義 14. (弱単調性)
集合 A 上の関係 $\to$ と $\to_\times$ に対し，次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき，$\to$ について，写像 f は $\to_\times$ によって弱単調性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について，} a \to b \implies f(a) \twoheadrightarrow_\times f(b)$$

3.2 Z 特性のモジュール性に関する命題

Z 特性のモジュール性に関して，次の命題が成り立つことが分かった.

命題 15. (Z 特性のモジュール性)
集合 A 上の関係 $\to_1$, $\to_2$, $\to_{1,2} = \to_1 \cup \to_2$ と A 上の写像 f_1, f_2 について,

1. $\to_1$ について f_1 が Z 特性を満たす,
2. $\to_2$ について f_2 が Z 特性を満たす,

3. $\to_1$ について f_2 が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を満たす，
   $(a \to_1 b \implies f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(b))$

4. $\to_2$ について f_1 が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を満たす，
   $(a \to_2 b \implies f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_1(b))$

5. $\to_j$ について $f_j \circ f_i$ が $\to_{1,2}$ によって弱共終性を満たす，
   $(a \to_j b \implies b \twoheadrightarrow_{1,2} f_j(f_i(b)))$

6. 任意の $a \in Im(f_i)$ について $a \twoheadrightarrow f_j(a)$ である，

ならば，$\to_{1,2}$ について $f_j \circ f_i$ が Z 特性を満たす．ただし，$(i,j) = (1,2)$ または $(2,1)$ である．

上記の命題を図示したものを図 4 に示す．

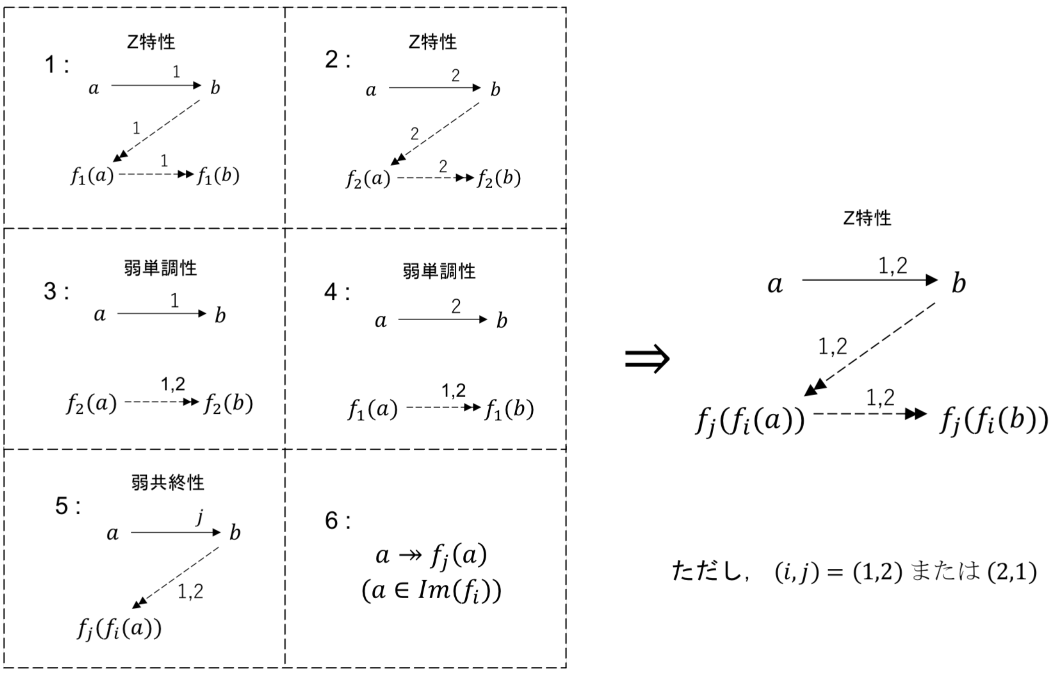

図 4: 命題 15(Z 特性のモジュール性)

3.3 Z 特性のモジュール性に関する命題の証明

まず，以下の命題を示す．

命題 16. $(a \to_2 b \implies f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(f_1(b))$ の十分条件)
集合 A 上の関係 $\to_1$, $\to_2$, $\to_{1,2} = \to_1 \cup \to_2$ と A 上の写像 f_1, f_2 について，

1. $\to_1$ について f_2 が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を満たす，
   $(a \to_1 b \implies f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(b))$

2. $\to_2$ について f_1 が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を満たす，
   $(a \to_2 b \implies f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_1(b))$

3. $\to_2$ について f_2 が単調性を満たす，
   $(a \to_2 b \implies f_2(a) \twoheadrightarrow_2 f_2(b))$

ならば，$\to_2$ について $f_2 \circ f_1$ が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を満たす．
$(a \to_2 b \implies f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(f_1(b)))$

証明 (命題 16)

まず，条件 2 より $a \to_2 b \implies f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_1(b)$ が成り立つ．ここで，$f_1(a) \to_1 a_1 \to_2 f_1(b)$ とする．このとき，条件 1 より $f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(a_1)$ が成り立つ．さらに，条件 3 より $f_2(a_1) \twoheadrightarrow_2 f_2(f_1(b))$ が成り立つ．よって，$f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(f_1(b))$ が言える．ここでは，$f_1(a) \twoheadrightarrow_{1,2} f_1(b)$ を $f_1(a) \to_1 a_1 \to_2 f_1(b)$ としたが，どのような $\to_1$ と $\to_2$ の順序で $f_1(a)$ から $f_1(b)$ に書き換えされたとしても $f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(f_1(b))$ は成り立つ．したがって，条件 1, 2, 3 より $a \to_2 b \implies f_2(f_1(a)) \twoheadrightarrow_{1,2} f_2(f_1(b))$ が成り立つ．

□

次に，命題 15 を証明する．

証明 (命題 15)

命題 15 の 6 つの条件から合成的 Z 定理の 4 つの条件が成り立つことを示す．$(i,j) = (1,2)$ の場合で証明する．

まず，命題 15 の条件 1, 3, 6 から合成的 Z 定理の条件 1, 2, 3 がそれぞれすぐに言える．さらに，命題 15 の条件 2 より $\to_2$ について f_2 が単調性を持つことが分かる．この性質と命題 15 の条件 3, 4 と命題 16 より，$\to_2$ について $f_2 \circ f_1$ が $\to_{1,2}$ によって弱単調性を持つことが分かる．よって，命題 15 の条件 5 と合わせ，合成的 Z 定理の条件 4 が言える．以上より，命題 15 の 6 つの条件から合成的 Z 定理の 4 つの条件が成り立ち，$\to_{1,2}$ について $f_2 \circ f_1$ が Z 特性を満たす．

また，$(i,j) = (2,1)$ の場合も同様に証明できる．

□

3.4 考察

Hindley-Rosen の補題の可換性に相当する部分が，Z 特性では，命題 15 の条件 3 から 6 であることが分かる．命題 15 の条件 3 と 4 を見ると，$\to$ と f の 1 と 2 がそれぞれ交差しており，可換性と似た性質になっている．

命題 15 と合成的 Z 定理は，書き換え規則を 2 つに分割して Z 特性を満たす写像を与えるという点で同じである．しかし，2 つの書き換えそれぞれで Z 特性を言い，さらに必要な条件を加えるという命題 15 の考え方の方が，書き換えを分割している様子が分かりやすい．また，$f_2 \circ f_1$ が Z 特性を満たすための条件と，$f_1 \circ f_2$ が Z 特性を満たすための条件の差分も明確である．

4 Z 特性のモジュール性を使った Z 定理証明

ラムダ計算の例を用いて，Z 特性のモジュール性を使った Z 定理証明を行なった．

4.1 ラムダ計算

ラムダ計算とは，関数を抽象化した λ 項という項を対象とする計算体系である．λ 項は BNF 記法で以下のように定義される．

定義 17. (λ 項)

$$M, N ::= x \mid (MN) \mid (\lambda x.M)$$

ここで x は変数を表し，M, N は λ 項を表すメタ変数である．(MN) を関数適用と呼び，$(\lambda x.M)$ を関数抽象と呼ぶ.

関数抽象 $(\lambda x.M)$ の M の中に変数 x が現れたとき，x は束縛されているという．束縛されている変数のことを束縛変数と呼び，束縛されていない変数を自由変数と呼ぶ．λ 項 M に含まれる自由変数の集合を $FV(M)$ と表す.

また，λ 項の括弧の一部は省略できる．まず，λ 項の最外側の括弧は省略できる．次に，関数適用は左結合であり，$(M_1M_2)M_3$ という λ 項は $M_1M_2M_3$ と書ける (ただし，M_1 は関数抽象でない)．最後に，関数抽象が連なる $\lambda x.(\lambda y.M)$ という λ 項は $\lambda xy.M$ と書ける.

λ 項 $\lambda x.M$ の束縛変数 x を新たな変数 y(ただし $y \notin FV(M)$) に置き換えた項 $\lambda y.N$ を，元の式と同一視し，これら 2 つは α 同値であるという．$\lambda x.M$ と $\lambda y.N$ が α 同値であることを $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.N$ と表す.

λ 項の書き換え規則は以下のように定義される.

定義 18. (β 簡約，η 簡約，$\beta\eta$ 簡約)

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N] \qquad (\beta)$$
$$\lambda x.Mx \to M \qquad (x \notin FV(M)) \qquad (\eta)$$

(β) によって導かれる二項関係を β 簡約といい，1 ステップ β 簡約を $\to_\beta$ と書く．(η) によって導かれる二項関係を η 簡約といい，1 ステップ η 簡約を $\to_\eta$ と書く．(β) と (η) によって導かれる二項関係を $\beta\eta$ 簡約といい，1 ステップ $\beta\eta$ 簡約を $\to_{\beta\eta}$ と書く．また，$\to_{\beta\eta}$ は $\to_\beta \cup \to_\eta$ と書ける.

$M[x := N]$ は M の中にあるすべての自由変数 x を N に置き換えた項を表している．λ 項の中の β 簡約可能な部分を β 可簡約項，η 簡約可能な部分を η 可簡約項，$\beta\eta$ 簡約可能な部分を $\beta\eta$ 可簡約項と呼ぶ.

4.2　η 簡約と β 簡約の Z 定理

見えている η 可簡約項全てを簡約する写像 $*\eta$ を次のように定義する.

定義 19. (写像 $*\eta$)

1. $x^{*\eta} = x$
2. $(\lambda x.Mx)^{*\eta} = M^{*\eta} \qquad (x \notin FV(M))$
3. $(\lambda x.M)^{*\eta} = \lambda x.M^{*\eta}$
4. $(MN)^{*\eta} = M^{*\eta}N^{*\eta}$

例えば，$\lambda x.(\lambda y.zy)x$ に $*\eta$ を適用すると $(\lambda x.(\lambda y.zy)x)^{*\eta} = z$ となる．η 簡約において，$*\eta$ は Z 特性を満たす．証明については文献 [2] を参考にした．また，見えている可簡約項を全て簡約する写像を complete development と呼ぶ.

β 簡約に関する complete development である $*\beta$ を次のように定義する.

定義 20. (写像 $*\beta$)

1. $x^{*\beta} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*\beta} = \lambda x.M^{*\beta}$
3. $((\lambda x.M)N)^{*\beta} = M^{*\beta}[x := N^{*\beta}]$
4. $(MN)^{*\beta} = M^{*\beta}N^{*\beta}$

例えば，$(\lambda x.x)((\lambda y.y)z)$ に $*\beta$ を適用すると $((\lambda x.x)((\lambda y.y)z))^{*\beta} = z$ となる．β 簡約において，$*\beta$ は Z 特性を満たす [2].

4.3　例 1：$\to_\eta \cup \to_\beta$ ($\beta\eta$ 簡約)

η 簡約と β 簡約のそれぞれで Z 定理が言えたとしても，$\beta\eta$ 簡約で Z 定理が言えるとは限らない．そこで，命題 15 を用いて $\beta\eta$ 簡約の Z 定理証明を行う．命題 15 による $\beta\eta$ 簡約の Z 定理証明は，合成写像 $*\beta \circ *\eta$ の Z 特性を言うか，合成写像 $*\eta \circ *\beta$ の Z 特性を言うかの 2 通りが考えられる．

命題 21. ($*\beta \circ *\eta$ の Z 特性)

1. $\to_\eta$ について $*\eta$ が Z 特性を満たす，
2. $\to_\beta$ について $*\beta$ が Z 特性を満たす，
3. $\to_\eta$ について $*\beta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱単調性を満たす，
   $(M \to_\eta N \implies M^{*\beta} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N^{*\beta})$
4. $\to_\beta$ について $*\eta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱単調性を満たす，
   $(M \to_\beta N \implies M^{*\eta} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N^{*\eta})$
5. $\to_\beta$ について $*\beta \circ *\eta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱共終性を満たす，
   $(M \to_\beta N \implies N \twoheadrightarrow_{\beta\eta} (M^{*\eta})^{*\beta})$
6. 任意の $M \in Im(*\eta)$ について $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} M^{*\beta}$ である，

ならば，$\to_{\beta\eta}$ について $*\beta \circ *\eta$ が Z 特性を満たす．

命題 22. ($*\eta \circ *\beta$ の Z 特性)

1. $\to_\eta$ について $*\eta$ が Z 特性を満たす，
2. $\to_\beta$ について $*\beta$ が Z 特性を満たす，
3. $\to_\eta$ について $*\beta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱単調性を満たす，
   $(M \to_\eta N \implies M^{*\beta} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N^{*\beta})$
4. $\to_\beta$ について $*\eta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱単調性を満たす，
   $(M \to_\beta N \implies M^{*\eta} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N^{*\eta})$
5. $\to_\eta$ について $*\eta \circ *\beta$ が $\to_{\beta\eta}$ によって弱共終性を満たす，
   $(M \to_\eta N \implies N \twoheadrightarrow_{\beta\eta} (M^{*\beta})^{*\eta})$
6. 任意の $M \in Im(*\beta)$ について $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} M^{*\eta}$ である，

ならば，$\to_{\beta\eta}$ について $*\eta \circ *\beta$ が Z 特性を満たす．

2 つの命題を図示したものを図 5 に示す．2 つの命題において 1 から 4 までは共通の条件であり，5 と 6 については $\to_\eta$ と $\to_\beta$，$*\eta$ と $*\beta$ をそれぞれ逆にしたものとなっている．命題 21 については文献 [5] より成り立ち，命題 22 についても証明可能である．証明については文献 [3] を参考にした．

よって，$\beta\eta$ 簡約は $*\beta \circ *\eta$ と $*\eta \circ *\beta$ の両方で Z 特性を満たす．

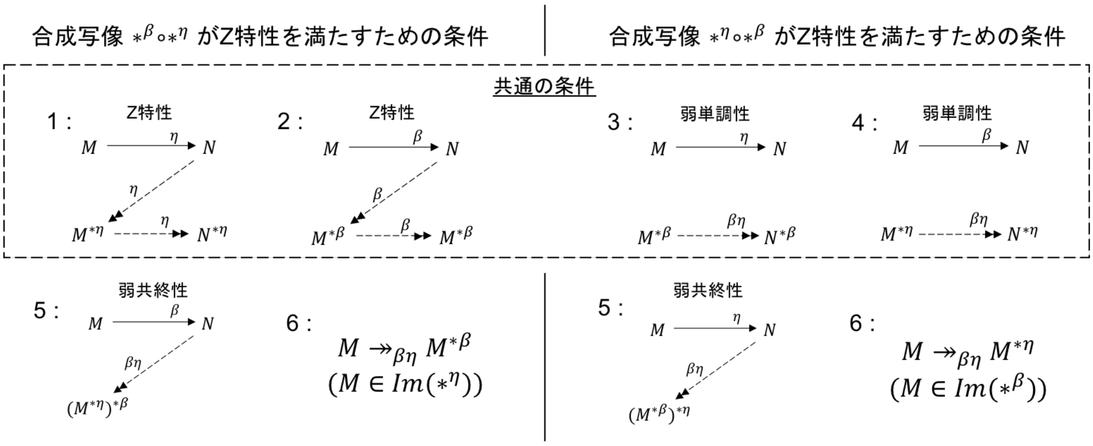

図 5: 命題 15 による 2 通りの Z 定理証明

4.4 写像について

4.4.1 合成写像 $*\beta\circ*\eta$ と $*\eta\circ*\beta$

前節で述べたように，$\beta\eta$ 簡約は $*\beta\circ*\eta$ と $*\eta\circ*\beta$ の両方で Z 特性を満たす．しかし，$*\beta\circ*\eta\not\equiv*\eta\circ*\beta$ である．例として，$M\equiv\lambda x.y((\lambda x.x)x)$ の場合を考える．

$(M^{*\eta})^{*\beta}$ を計算すると，

$$((\lambda x.y((\lambda x.x)x))^{*\eta})^{*\beta}=(\lambda x.y((\lambda x.x)x))^{*\beta}=\lambda x.yx$$

となる．$(M^{*\beta})^{*\eta}$ を計算すると，

$$((\lambda x.y((\lambda x.x)x))^{*\beta})^{*\eta}=(\lambda x.yx)^{*\eta}=y$$

となる．

よって，$(M^{*\eta})^{*\beta}\not\equiv(M^{*\beta})^{*\eta}$ となる．また，η 簡約によって新たな β 可簡約項が出現することはないため，$*\beta\circ*\eta$ は $\beta\eta$ 簡約に関する complete development である．しかし，β 簡約によって新たな η 可簡約項が出現することがあるため，$*\eta\circ*\beta$ は最初の時点では見えていない η 可簡約項を簡約する場合がある．$M\equiv\lambda x.y((\lambda x.x)x)$ はその例である．

4.4.2 Postponement 性

η 簡約によって新たな β 可簡約項が出現することはない，という性質に関連した性質として Postponement 性がある．

定理 23. (η 簡約の Postponement 性 [1])
$M\twoheadrightarrow_{\beta\eta}N$ ならば，ある L が存在して，

$$M\twoheadrightarrow_{\beta}L\twoheadrightarrow_{\eta}N.$$

また，「$M\twoheadrightarrow_{\beta\eta}N$ ならば，ある L が存在して，$M\twoheadrightarrow_{\eta}L\twoheadrightarrow_{\beta}N.$」は成り立たない．反例としては，$\lambda x.y((\lambda x.x)x)\twoheadrightarrow_{\beta\eta}y$ がある．$\lambda x.y((\lambda x.x)x)$ から y への簡約経路は，$\lambda x.y((\lambda x.x)x)\to_{\beta}\lambda x.yx\to_{\eta}y$ のみである．よって，最後に必ず η 簡約が必要となり，$M\twoheadrightarrow_{\eta}L\twoheadrightarrow_{\beta}N$ となる L は存在しない．

4.4.3 写像 $*1$ と $*2$

$\beta\eta$ 簡約では書き換えを 2 つに分けずに Z 定理を示すことができ，以下の 2 つの写像は Z 特性を満たす [4].

定義 24. (写像 $*1$)

1. $x^{*1} = x$
2. $((\lambda x.M)N)^{*1} = M^{*1}[x := N^{*1}]$
3. $(MN)^{*1} = M^{*1}N^{*1}$
4. $(\lambda x.Mx)^{*1} = M^{*1}$ $\quad$ ($x \notin FV(M)$ かつ Mx が β 可簡約項でない)
5. $(\lambda x.M)^{*1} = \lambda x.M^{*1}$

定義 25. (写像 $*2$)

1. $x^{*2} = x$
2. $((\lambda x.M)N)^{*2} = M^{*2}[x := N^{*2}]$
3. $(MN)^{*2} = M^{*2}N^{*2}$
4. $(\lambda x.Mx)^{*2} = M^{*2}$ $\quad$ ($x \notin FV(M)$)
5. $(\lambda x.M)^{*2} = \lambda x.M^{*2}$

定義の 4 が異なり，$\lambda x.Mx$ という項で $x \notin FV(M)$ かつ Mx が β 可簡約項の場合に途中の計算が異なるが，結果は同値または α 同値である．α 同値となる例を以下に示す．

$$(\lambda x.(\lambda y.y)x)^{*1} = \lambda x.x \equiv_\alpha \lambda y.y = (\lambda x.(\lambda y.y)x)^{*2}$$

$*1$ を適用する場合は $(\lambda y.y)x$ の部分を β 簡約しており，$*2$ を適用する場合は $\lambda x.(\lambda y.y)x$ を η 簡約している．

いずれも $\beta\eta$ 簡約に関する complete development であり $*1 \equiv *2 \equiv *\beta \circ *\eta$ である．また, $*\beta \circ *\eta \not\equiv *\eta \circ *\beta$ より $*1 \not\equiv *\eta \circ *\beta$，$*2 \not\equiv *\eta \circ *\beta$ である．

4.5 $\lambda\mu$ 計算と $\mu\eta$ 簡約

ラムダ計算を拡張した体系である $\lambda\mu$ 計算に，$\mu\eta$ 簡約を加えた体系について同様の検証を行う．この体系における項を $\lambda\mu$ 項といい，以下のように定義される．

定義 26. ($\lambda\mu$ 項)

$$M, N ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MN) \mid (\mu\alpha.M) \mid ([\alpha]M)$$

$\lambda\mu$ 項の簡約規則は以下のように定義される．

定義 27. (簡約規則)

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N] \qquad (\beta)$$
$$(\mu\alpha.M)N \to \mu\alpha.M[[\alpha]w := [\alpha](wN)] \qquad (\mathrm{Str})$$
$$[\alpha](\mu\beta.M) \to M[\beta := \alpha] \qquad (\mathrm{Ren})$$
$$\mu\alpha.[\alpha]M \to M \ (\alpha \notin FV(M)) \qquad (\mu\eta)$$

(β), (Str), (Ren), $(\mu\eta)$ によって導かれる最小の関係をそれぞれ $\to_\beta$, $\to_S$, $\to_R$, $\to_{\mu\eta}$ と書く．また，簡約の組み合わせ $\to_\beta \cup \to_S$ を $\to_{\beta S}$ と書き，その他の組み合わせについても同様に書く．

$\to_\beta$, $\to_S$, $\to_R$, $\to_{\mu\eta}$ で簡約可能な部分を，それぞれ β 可簡約項，S 可簡約項，R 可簡約項，$\mu\eta$ 可簡約項と呼ぶ．

4.6 例 2：$\to_\beta \cup \to_S$

$\to_\beta \cup \to_S$ の場合で命題 15 による Z 定理検証を行う．まず，$\to_\beta$ に関する complete development である $*\beta$ と，$\to_S$ に関する complete development である $*S$ を以下のように定義する．

定義 28. (写像 $*\beta$)

1. $x^{*\beta} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*\beta} = \lambda x.M^{*\beta}$
3. $((\lambda x.M)N)^{*\beta} = M^{*\beta}[x := N^{*\beta}]$
4. $(MN)^{*\beta} = M^{*\beta}N^{*\beta}$
5. $(\mu\alpha.M)^{*\beta} = \mu\alpha.M^{*\beta}$
6. $([\alpha]M)^{*\beta} = [\alpha]M^{*\beta}$

定義 29. (写像 $*S$)

1. $x^{*S} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*S} = \lambda x.M^{*S}$
3. $((\mu\alpha.M)N)^{*S} = \mu\alpha.M^{*S}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*S})]$
4. $(MN)^{*S} = M^{*S}N^{*S}$
5. $(\mu\alpha.M)^{*S} = \mu\alpha.M^{*S}$
6. $([\alpha]M)^{*S} = [\alpha]M^{*S}$

例 1 と同様に合成写像 $*S \circ *\beta$ と $*\beta \circ *S$ の両方で命題 15 による Z 定理検証を行い，いずれも Z 特性を満たすことが分かった．証明については文献 [3] を参考にした．

また，$*S \circ *\beta \not\equiv *\beta \circ *S$ である．例として，$M \equiv (\lambda x.xy)(\mu\alpha.[\alpha]x)$ の場合を考える．$(M^{*\beta})^{*S}$ と $(M^{*S})^{*\beta}$ を計算すると次のようになる．

$$(((\lambda x.xy)(\mu\alpha.[\alpha]x))^{*\beta})^{*S} = ((\mu\alpha.[\alpha]x)y)^{*S} = \mu\alpha.[\alpha](xy)$$

$$(((\lambda x.xy)(\mu\alpha.[\alpha]x))^{*S})^{*\beta} = ((\lambda x.xy)(\mu\alpha.[\alpha]x))^{*\beta} = (\mu\alpha.[\alpha]x)y$$

よって，$(M^{*\beta})^{*S} \not\equiv (M^{*S})^{*\beta}$ となる．

4.7　例 3：$\to_{\mu\eta} \cup \to_{\beta S}$

次に，$\to_{\mu\eta} \cup \to_{\beta S}$ の場合で命題 15 による Z 定理検証を行う．まず，$\to_{\mu\eta}$ に関する complete development である $*\mu\eta$ と $\to_{\beta S}$ に関する complete development である $*\beta S$ を以下のように定義する．

定義 30. (写像 $*\mu\eta$)

1. $x^{*\mu\eta} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*\mu\eta} = \lambda x.M^{*\mu\eta}$
3. $(MN)^{*\mu\eta} = (M^{*\mu\eta}N^{*\mu\eta})$
4. $(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*\mu\eta} = M^{*\mu\eta} \qquad (\alpha \notin FV(M))$
5. $(\mu\alpha.M)^{*\mu\eta} = \mu\alpha.M^{*\mu\eta}$
6. $([\alpha]M)^{*\mu\eta} = [\alpha]M^{*\mu\eta}$

定義 31. (写像 $*\beta S$)

1. $x^{*\beta S} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*\beta S} = \lambda x.M^{*\beta S}$
3. $((\lambda x.M)N)^{*\beta S} = M^{*\beta S}[x := N^{*\beta S}]$
4. $((\mu\alpha.M)N)^{*\beta S} = \mu\alpha.M^{*\beta S}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*\beta S})]$
5. $(MN)^{*\beta S} = M^{*\beta S}N^{*\beta S}$
6. $(\mu\alpha.M)^{*\beta S} = \mu\alpha.M^{*\beta S}$
7. $([\alpha]M)^{*\beta S} = [\alpha]M^{*\beta S}$

例 1, 2 と同様に合成写像 $*\beta S \circ *\mu\eta$ と $*\mu\eta \circ *\beta S$ の両方で命題 15 による Z 定理検証を行い，いずれも Z 特性を満たすことが分かった．証明については文献 [3] を参考にした．

また，$*\beta S \circ *\mu\eta \not\equiv *\mu\eta \circ *\beta S$ である．例として，$M \equiv (\mu\alpha.[\alpha](\lambda x.x))x$ の場合を考える．$(M^{*\mu\eta})^{*\beta S}$ と $(M^{*\beta S})^{*\mu\eta}$ を計算すると次のようになる．

$$(((\mu\alpha.[\alpha](\lambda x.x))x)^{*\mu\eta})^{*\beta S} = ((\lambda x.x)x)^{*\beta S} = x$$

$$(((\mu\alpha.[\alpha](\lambda x.x))x)^{*\beta S})^{*\mu\eta} = ((\mu\alpha.[\alpha](\lambda x.x))x)^{*\mu\eta} = (\lambda x.x)x$$

よって，$(M^{*\mu\eta})^{*\beta S} \not\equiv (M^{*\beta S})^{*\mu\eta}$ となる．

4.8　例 1, 2, 3 のまとめ

$\to_\eta \cup \to_\beta$ と $\to_\beta \cup \to_S$ と $\to_{\mu\eta} \cup \to_{\beta S}$ の 3 つ例で命題 15 による Z 定理検証を行った．その結果を表 1 に示す．f_1 は $\to_1$ に関する complete development，f_2 は $\to_2$ に関する complete development である．いずれも $f_2 \circ f_1 \not\equiv f_1 \circ f_2$ であるが，3 つの例全てで $f_2 \circ f_1$ と $f_1 \circ f_2$ の両方で Z 特性が言えた．

表 1: 命題 15 による Z 定理検証の結果

	例 1	例 2	例 3
$\to_1$	$\to_\eta$	$\to_\beta$	$\to_{\mu\eta}$
$\to_2$	$\to_\beta$	$\to_S$	$\to_{\beta S}$
$f_2 \circ f_1$ の Z 特性	◯[4][5]	◯	◯
$f_1 \circ f_2$ の Z 特性	◯	◯	◯
$f_2 \circ f_1 \equiv f_1 \circ f_2$	×	×	×

5　まとめと今後の課題

Z 特性のモジュール性について考察し，命題 15 を得た．また，ラムダ計算の例を用いて命題 15 による Z 定理検証を行い，表 1 のようになることが分かった．

今後の課題として，以下のような場合で命題 15 を使った Z 定理検証を行っていきたい．$\to_1=\to_{\mu\eta}$，$\to_2=\to_{\beta SR}$ とし，それぞれに関する complete development を f_1，f_2 としたとき，合成的 Z 定理より $f_2 \circ f_1$ の Z 特性が示されている [3]．しかし，$f_1 \circ f_2$ の Z 特性の成立は不明である．また，3 つ以上の書き換え規則を考える場合，その分割方法は複数考えられる．例えば，$\to_\beta$，$\to_S$，$\to_R$，$\to_{\mu\eta}$ の分割方法は $\to_{\mu\eta} \cup \to_{\beta SR}$ の他に，$\to_{\mu\eta S} \cup \to_{\beta R}$ が考えられる．

また，書き換え系の 1 つである項書き換え系の合流性について，「互いに素な項書き換え系 R_1，R_2 がそれぞれ合流性を持つ $\iff$ $R_1 \oplus R_2$ が合流性を持つ」が成り立つ [6]．ただし，記号 $\oplus$ は集合の直和を表す．Z 特性について，同様の性質が成り立つか検証していきたい．

カンタンに
言えない?

参考文献

[1] H.P. Barendregt, The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics, Amsterdam North Holland, 1984.

[2] Dehornoy, P., and V. van Oostrom, Z, Proving confluence by monotonic singlestep upperbound functions, in Logical Models of Reasoning and Computation (LMRC-08), 2008.

[3] Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita, Confluence Proofs of Lambda-Mu-Calculi by Z Theorem, Studia Logica 109: 917-936, 2021.

[4] Komori, Y., N. Matsuda, and F. Yamakawa, A simplified proof of the Church-Rosser theorem, Studia Logica 102(1): 175-183, 2014.

[5] Nakazawa, K., and K. Fujita, Compositional Z: Confluence Proofs for Permutative Conversion, Studia Logica 104: 1205-1224, 2016.

[6] Toyama, Y., On the Church-Rosser property for the direct sum of term rewriting systems, Journal of the ACM 34 (1): 128-143, 1987.

R_1, R_2 : disjoint, Z

$\Downarrow$

$R_1 \oplus R_2$ は R_1 vs R_2 の critical pair はない?