多相型と存在型に対する型検査問題の同値性

加藤 祐輝　　　　　中澤 巧爾

京都大学大学院情報学研究科

何をしたの？

P⇒Q：Pの問題は
Qの問題に帰着できる

- 存在型(∃)に対する型検査問題が
  多相型(∀)に対する型検査問題にTuring還元可能
  であることを証明した
- 以下の全ての問題がTuring同値であること証明した

体系	Type Checking (TCP) $\Gamma \vdash M{:}A$?		Typability (TP) ? $\vdash M$:?
DF-$\lambda^{\to\exists}$	TCP	⇔	TP
	⇕		⇕
DF-$\lambda^{\to\forall}$	TCP	⇔	TP
	⇕		⇓
DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$	TCP	⇔	TP

既存研究との関連

体系	Type Checking (TCP) $\Gamma \vdash M{:}A?$		Typability (TP) $? \vdash M{:}?$
$\mathrm{DF}\text{-}\lambda^{\to\exists}$	TCP	$\Leftrightarrow$ [4]	TP
	$\Downarrow\Uparrow$ [2]		$\Downarrow\Uparrow$ [2]
$\mathrm{DF}\text{-}\lambda^{\to\forall}$	2nd-order unification $\Leftrightarrow$ [1] TCP	$\Leftrightarrow$ [3]	TP
	$\Uparrow\Downarrow$ [2]		$\Downarrow$ [2]
$\mathrm{DF}\text{-}\lambda^{\neg\wedge\exists}$	TCP	$\Leftrightarrow$ [4]	TP

[1] Fujita and Schubert, IFIP TCS 2000

[2] Nakazawa, Tatsuta, Kameyama, and Nakano, CSL 2008

[3] Nakazawa and Tatsuta, CATS 2009

[4] Kato and Nakazawa, WFLP 2009

登場人物

DF-$\lambda^{\rightarrow\forall}$

DF-$\lambda^{\rightarrow\forall}$

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B}\ (\to \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}\ (\to \mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.M : \forall X.A}\ (\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall X.A}{\Gamma \vdash MB : A[X := B]}\ (\forall \mathrm{E})$$

- DF = Domain Free
  - プログラムは関数のドメイン型情報を含まない

$\lambda x{:}A.M$

DF-$\lambda^{\rightarrow\exists}$ / DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$

DF-$\lambda^{\rightarrow\exists}$

… (Ax), ($\rightarrow$I), ($\rightarrow$E) …

$$\frac{\Gamma \vdash N : A[X := B]}{\Gamma \vdash \langle B, N\rangle : \exists X.A}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash M : \exists X.A \quad \Gamma_2, x : A \vdash N : C}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash M[Xx.N] : C}\ (\exists E)$$

DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$

… (Ax), ($\exists$I), ($\exists$E) …

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \neg A}\ (\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \neg A \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : \bot}\ (\neg E)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash M : A \quad \Gamma_2 \vdash N : B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \langle M, N\rangle : A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash M\pi_i : A_i}\ (\wedge E)$$

証明 TCP(DF-$\lambda^{\to\exists}$) ⇒TCP(DF-$\lambda^{\to\forall}$)

体系	Type Checking (TCP) $\Gamma \vdash M{:}A$?	Typability (TP) $? \vdash M{:}?$
DF-$\lambda^{\to\exists}$	TCP	TP
	⇓	⇓
DF-$\lambda^{\to\forall}$	TCP	TP
DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$	TCP	TP

証明の概要

- ある計算可能な関数 f があって、
  $\Gamma \vdash M : A$ in DF-$\lambda^{\to\exists}$ iff $f(\Gamma) \vdash f(M) : f(A)$ in DF-$\lambda^{\to\forall}$
  であることが示されればよい

- CPS変換が使える (cf. [Nakazawa et al. CSL 2008])

$$\Gamma \vdash M : A \text{ in DF-}\lambda^{\to\exists}$$

iff

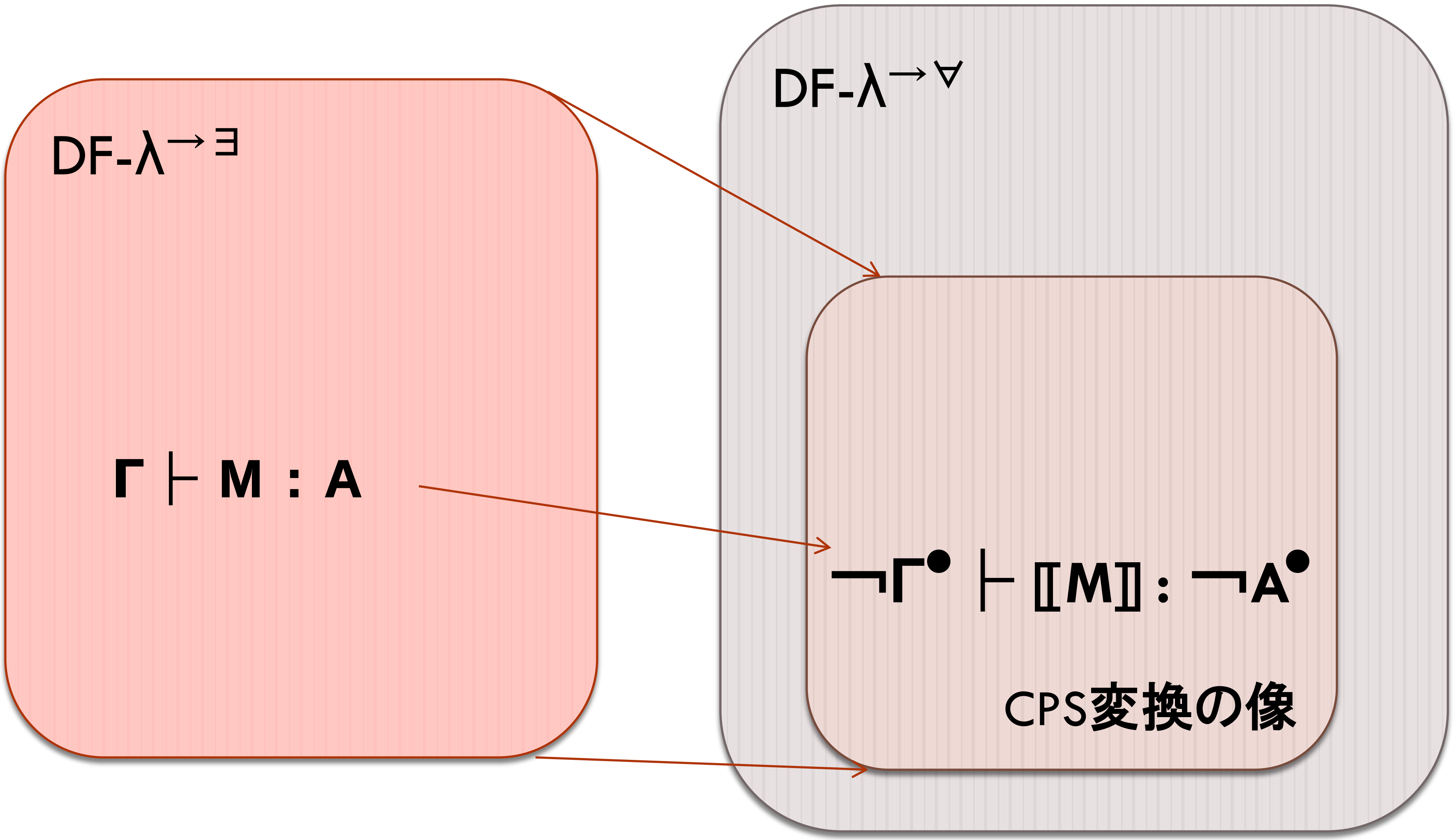
簡単に証明可能

$$\neg\Gamma^{\bullet} \vdash [\![M]\!] : \neg A^{\bullet} \text{ in CPS変換の像}$$

工夫が必要！

iff

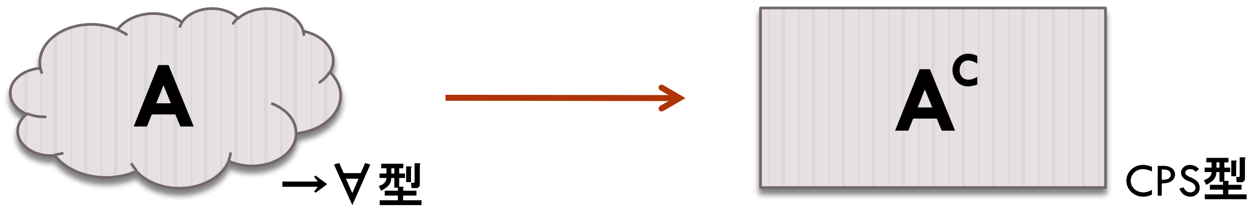
$$\neg\Gamma^{\bullet} \vdash [\![M]\!] : \neg A^{\bullet} \text{ in DF-}\lambda^{\to\forall}$$



- 型判断 $\neg\Gamma^{\bullet} \vdash [\![M]\!] : \neg A^{\bullet}$ のDF-$\lambda^{\to\forall}$における導出がCPS変換の像に収まるとは限らない

型の縮約

- 任意の→∀型を、CPS変換の像である型（CPS型）のパターンに当てはめる



- 縮約変換の性質
  - 任意の→∀型 A について、A^c はCPS型
  - CPS型については不変
  - 代入と次の意味で可換（ただし、Bは$(B')^\bullet$の形）

$$(A[X:=B])^c = A^c[X:=B]$$

補題

項MがCPS項であるとき、

$\Gamma \vdash M : A$ in DF-$\lambda^{\to\forall}$ ならば $\Gamma^c \vdash M : A^c$ in CPS像

定理の証明

定理

DF-$\lambda^{\to\exists}$におけるTCP / TPは、それぞれ
DF-$\lambda^{\to\forall}$におけるTCP / TP にTuring還元可能である

- $\Gamma^{\bullet} \vdash [\![M]\!] : \neg A^{\bullet}$ in DF-$\lambda^{\to\forall}$ とする

型の縮約によって

$$(\neg\Gamma^{\bullet})^{c} \vdash [\![M]\!] : (\neg A^{\bullet})^{c} \text{ in CPS像}$$

CPS型は縮約によって不変なので

$$\neg\Gamma^{\bullet} \vdash [\![M]\!] : \neg A^{\bullet} \text{ in CPS像}$$

CPS変換の逆変換を利用すれば

$$\Gamma \vdash M : A \text{ in DF-}\lambda^{\to\exists}$$

- Typability (TP) についても同様に証明できる

定義：CPS変換

$$
\begin{aligned}
[\![A]\!] &= \neg A^{\bullet} \\
X^{\bullet} &= X \\
(A \to B)^{\bullet} &= \neg(\neg A^{\bullet} \to \neg B^{\bullet}) \\
(\exists X.A)^{\bullet} &= \forall X.\neg\neg A^{\bullet}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![X]\!] &= \lambda k.xk \\
[\![\lambda x.M]\!] &= \lambda k.k(\lambda x.[\![M]\!]) \\
[\![MN]\!] &= \lambda k.[\![M]\!](\lambda m.m[\![N]\!]k) \\
[\![\langle A, M\rangle]\!] &= \lambda k.kA^{\bullet}[\![N]\!] \\
[\![M[Xx.N]]\!] &= \lambda k.[\![M]\!](\Lambda X.\lambda x.[\![N]\!]k)
\end{aligned}
$$

定義：型の縮約

$$
\begin{aligned}
(A \to B)^c &= \neg A^d \\
A^c &= \neg S \qquad (A \neq \to) \\
X^d &= X \\
\bot^d &= S \\
((A \to (B \to C)) \to D)^d &= \neg(A^c \to \neg B^d) \\
((A \to B) \to D)^d &= \neg(A^c \to \neg S) \qquad (B \neq \bot, \to) \\
(A \to D)^d &= S \qquad (\text{otherwise}) \\
(\forall X.(A \to B))^d &= \forall X.\neg A^c \\
(\forall X.A)^d &= \forall X.\neg\neg S \qquad (\text{otherwise})
\end{aligned}
$$

- ¬S は任意に固定された閉じたCPS型（例えば S=∀X.¬¬X）

証明 TCP(DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$) $\Rightarrow$ TCP(DF-$\lambda^{\rightarrow\forall}$)

体系	Type Checking (TCP) $\Gamma \vdash M{:}A$?	Typability (TP) $? \vdash M{:}?$
DF-$\lambda^{\rightarrow\exists}$	TCP	TP
DF-$\lambda^{\rightarrow\forall}$	TCP	TP
DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$	$\Uparrow$ TCP	TP

さっきと何が違うの？

- 型の縮約変換をどう定義するか？
  - 今回は、変換元の¬と∧の両方が、CPS変換によって→(と⊥)で表現される
  - 各→に対応するのは、変換元の¬か？∧か？
    - どうやってCPS型のパターンに当てはめる？

- CPS型にラベルをつける

$$(\neg A)^\bullet = C_\neg \to \neg A^\bullet$$

$$(A \wedge B)^\bullet = C_\wedge \to (\neg A^\bullet \to \neg\neg B^\bullet)$$

（$C_\neg$, $C_\wedge$ ：型定数、 $\neg A = A \to \bot$ ）

定理の証明

補題

項MがCPS項であるとき、

$\Gamma \vdash M : A$ in DF-$\lambda^{\to\forall}$ **ならば** Γ^c, $\Delta \vdash M : A^c$ in CPS像

ただしΔは項定数に対する型宣言

$\{\gamma_{\neg}:C_{\neg}, \gamma_{\wedge}:C_{\wedge}, \ldots, \delta_{\perp}:\perp \to \perp, \ldots\}$

定理

DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$におけるTCPは、

DF-$\lambda^{\to\forall}$におけるTCP にTuring還元可能である

- 証明はDF-$\lambda^{\to\exists}$の場合と同様
- ΔのせいでTPについては証明できない

定義:CPS変換

$C_\perp$, $C_\neg$, $C_\wedge$, $C_\exists$: 型定数

δ_A: 項定数(型は $A \to A$)

$\gamma_{C_\circ}$: 項定数(型は $C_\circ$)

$M/N := (\lambda xy.x)MN$

$M^A := \delta_A M$

$$
\begin{aligned}
X^\bullet &= X \\
\perp^\bullet &= C_\perp \to \neg\perp \\
(\neg A)^\bullet &= C_\neg \to \neg A^\bullet \\
(A \wedge B)^\bullet &= C_\wedge \to (\neg A^\bullet \to \neg\neg B^\bullet) \\
(\exists X.A)^\bullet &= C_\exists \to \forall X.\neg\neg A^\bullet
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!] &= x \\
[\![\lambda x.M]\!] &= \lambda k.((\lambda x.[\![M]\!]^{\neg(C_\perp \to \neg\perp)})(k\gamma_\neg))(\lambda v.I) \\
[\![MN]\!] &= \lambda k.([\![M]\!](\lambda v.[\![N]\!]/v^{C_\neg}))/k^{C_\perp \to \neg\perp} \\
[\![\langle M, N\rangle]\!] &= \lambda k.(k\gamma_\wedge[\![M]\!][\![N]\!])/\lambda xyzw.(w(k\gamma_\wedge xy)^\perp)(xz)^\perp \\
[\![M\pi_i]\!] &= \lambda k.[\![M]\!](\lambda vx_1x_2.(x_ik)^\perp/\lambda xw.(wv^{C_\wedge})(x_1x)^\perp) \\
[\![\langle A, M\rangle]\!] &= \lambda k.(k\gamma_\exists A^\bullet[\![M]\!])/\lambda x.(k\gamma_\exists Xx)^\perp \\
[\![M[Xx.N]]\!] &= \lambda k.([\![M]\!](\lambda v.\Lambda X.\lambda x.([\![N]\!]k)^\perp/v^{C_\exists}))
\end{aligned}
$$

定義：型の縮約

$$
\begin{aligned}
(A \longrightarrow B)^c &\equiv \neg A^d \\
A^c &\equiv \neg S \qquad (A \neq \longrightarrow) \\
X^d &\equiv X \\
(C_\perp \longrightarrow A)^d &\equiv C_\perp \longrightarrow \neg\perp \\
(C_\neg \longrightarrow A)^d &\equiv C_\neg \longrightarrow A^c \\
(C_\wedge \longrightarrow (\neg A \longrightarrow \neg B))^d &\equiv C_\wedge \longrightarrow (\neg A^d \longrightarrow \neg B^c) \\
(C_\exists \longrightarrow \forall X.\neg A)^d &\equiv C_\exists \longrightarrow \forall X.\neg A^c \\
A^d &\equiv S \qquad (\text{otherwise})
\end{aligned}
$$

まとめ

まとめ

- 存在型(∃)に対する型検査問題が多相型(∀)に対する型検査問題にTuring還元可能であることを証明した
- 以下の全ての問題がTuring同値であること証明した

体系	Type Checking (TCP) $\Gamma \vdash M:A?$		Typability (TP) $? \vdash M:?$
DF-$\lambda^{\rightarrow\exists}$	TCP	$\Leftrightarrow$	TP
	$\Downarrow\Uparrow$		$\Downarrow\Uparrow$
DF-$\lambda^{\rightarrow\forall}$	TCP	$\Leftrightarrow$	TP
	$\Uparrow\Downarrow$		$\Downarrow$
DF-$\lambda^{\neg\wedge\exists}$	TCP	$\Leftrightarrow$	TP

future work：存在型の型検査

- 決定可能な部分体系？
- DF以外のスタイルでは？

DF以外の、多相型との
Turing同値性は未知

Church style

$\lambda x{:}A.M : A \to B$

$\langle B,M\rangle_{\exists X.A} : \exists X.A$

決定可能

DF$^+$

$\lambda x.M : A \to B$

$\langle B,M\rangle_{\exists X.A} : \exists X.A$

？

モジュールの
シグネチャに相当

Church$^-$

$\lambda x{:}A.M : A \to B$

$\langle B,M\rangle : \exists X.A$

決定可能

Domain Free

$\lambda x.M : A \to B$

$\langle B,M\rangle : \exists X.A$

決定不可能
[Nakazawa et al. 2008]

Type Free

$\lambda x.M : A \to B$

$\langle \exists,M\rangle : \exists X.A$

決定不可能
[Fujita&Schubert 2009]

予備

準備：自動型検査に関する決定問題

- Type Checking Problem (TCP) $\Gamma \vdash M : A?$
  - 与えられたプログラム M は与えられた型 A を持つか？
- Typability Problem (TP) $? \vdash M : ?$
  - 与えられたプログラム M は型付け可能か？

準備：Turing還元可能性と同値性

- Turing還元可能性　P⇒Q
  - 決定問題Pのインスタンスを決定問題Qのインスタンスに写す計算可能関数fが存在して、
    ∀p : Pのインスタンス. [pの結果 = f(p)の結果]

- Turing同値　P⇔Q
  - P⇒Q かつ Q⇒P
  - 「問題の難しさ」に関するある種の同等性

準備：存在型

- 存在型　$\exists X.A$
  - 抽象データ型に相当
  - 実装中で用いられている具体的なデータの型を型変数 X として隠蔽
- 例：スタックモジュール
  - 実装はリストなどの具体的なデータ構造を利用

    {empty : int list, push : int list ∧ int→int list, ...}
  - クライアントには具体的な型情報は隠蔽

    ∃X. { empty : X, push : X ∧ int→X, ...}

$$\frac{\Gamma \vdash N : A[X := B]}{\Gamma \vdash \langle B, N \rangle : \exists X.A}\ (\exists I)$$