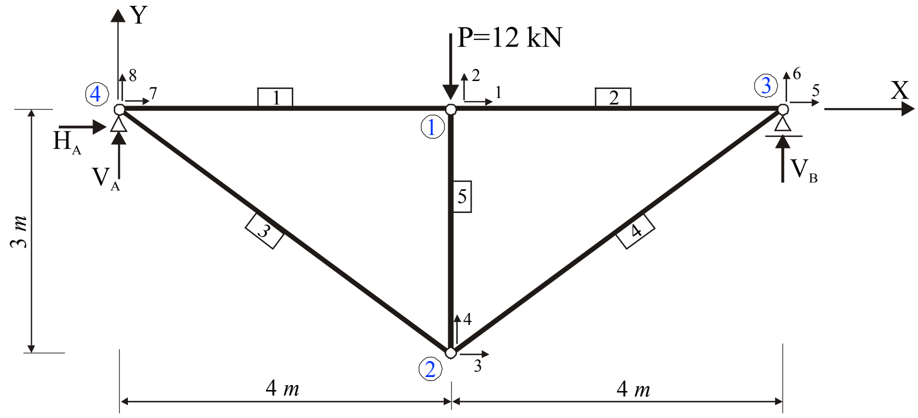
METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Przykład 1. Kratownica płaska – formalizm MES. Dane: $A=15 \times 10^{-4}\ m^2$, $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa



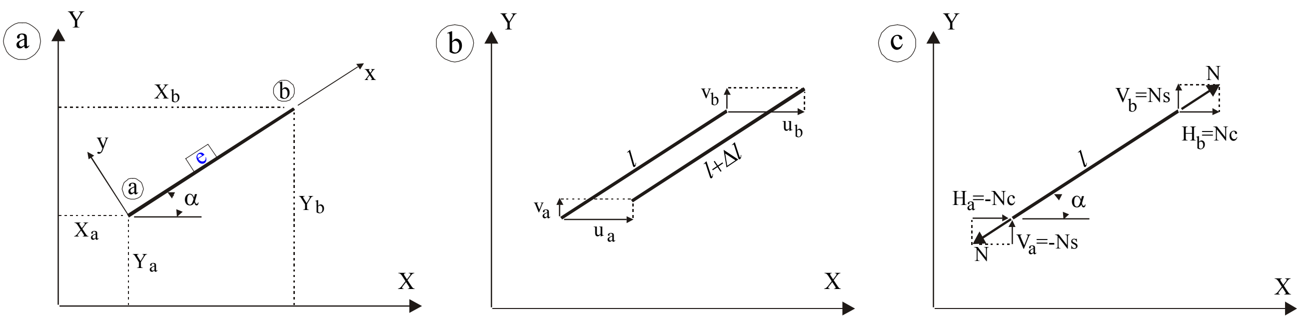
Rys.1.

1. **Dyskretyzacja**. W kratownicy podział jest oczywisty – pręt jest elementem, węzeł kratowy węzłem w rozumieniu MES. Przy podziale na węzły i elementy w układzie globalnym X,Y numery elementów oznaczono przez e (e=1,2,...5), numery węzłów przez i (i=1,...4); 5 elementów, 4 węzły. Węzły ponumerowano tak, aby znane stopnie swobody (nieruchome równe 0) były na końcu wektora **r**. Jest to wygodne w obliczeniach ręcznych, niekoniecznie przy analizie komputerowej. Dla dalszych potrzeb rozróżniamy prawoskrętny układ globalny X,Y,Z oraz prawoskrętny lokalny x,y,z związany z elementem. Początek układu lokalnego umieszczamy w węźle o niższym numerze, a zwroty osi z i Z powinny być zgodne.

   Wektory węzłowych stopni swobody **r** i sił węzłowych **R** mają następującą postać:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_B \\ H_A \\ V_A \end{bmatrix}$$

2. **Macierz sztywności elementu kratownicy płaskiej $\mathbf{k_e}$ w globalnym układzie współrzędnych z równania $\mathbf{Q_e = k_e \cdot q_e}$**



Rys.2.

Na rysunku 2.a przedstawiono typowy element o numerze **e** i dwóch węzłach. Węzeł o numerze niższym oznaczono literą **a**, a o wyższym literą **b**.

Długość pręta $l = \sqrt{\left(Y_b - Y_a\right)^2 + \left(X_b - X_a\right)^2}$

$$c = \cos\alpha = \frac{1}{l}\left(X_b - X_a\right)$$

$$s = \sin\alpha = \frac{1}{l}\left(Y_b - Y_a\right).$$

Na rysunku 2.b pokazano przemieszczenia pręta określone przez przesuniecia końców mierzone w globalnym układzie współrzędnych, tzn. wektor przemieszczeń węzłowych elementu e jest postaci

$$\mathrm{q_e} = \begin{bmatrix} \mathrm{u_a} \\ \mathrm{v_a} \\ \mathrm{u_b} \\ \mathrm{v_b} \end{bmatrix}$$

Wydłużenie pręta obliczamy jako różnicę rzutów przesunięć końców na jego kierunek

$$\Delta \mathrm{l} = \left(\mathrm{u_b} - \mathrm{u_a}\right)\mathrm{c} + \left(\mathrm{v_b} - \mathrm{v_a}\right)\mathrm{s}, \qquad \Delta \mathrm{l} = \begin{bmatrix} -\mathrm{c} & -\mathrm{s} & \mathrm{c} & \mathrm{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{u_a} \\ \mathrm{v_a} \\ \mathrm{u_b} \\ \mathrm{v_b} \end{bmatrix}.$$

W elemencie jest stała siła podłużna N , której rzuty H_i i V_i, (i=a,b), w węzłach podano na rysunku 2.c . Wektor sił węzłowych $\mathbf{Q}_e$ odpowiadający wektorowi $\mathbf{q}_e$ ma postać:

$$\mathbf{Q}_\mathrm{e} = \begin{bmatrix} \mathrm{H_a} \\ \mathrm{V_a} \\ \mathrm{H_b} \\ \mathrm{V_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{N\,c} \\ -\mathrm{N\,s} \\ \mathrm{N\,c} \\ \mathrm{N\,s} \end{bmatrix} = \mathrm{N} \begin{bmatrix} -\mathrm{c} \\ -\mathrm{s} \\ \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \end{bmatrix}$$

Z prawa Hooke'a $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{l}} \Delta \mathrm{l}$ zatem

$$\mathbf{Q}_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{l}} \begin{bmatrix} -\mathrm{c} \\ -\mathrm{s} \\ \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{c} & -\mathrm{s} & \mathrm{c} & \mathrm{s} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_\mathrm{e}$$

z tego zapisu ostatecznie otrzymamy

$$\mathbf{k}_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{l}} \begin{bmatrix} \mathrm{c\,c} & \mathrm{c\,s} & \mathrm{-c\,c} & \mathrm{-c\,s} \\ \mathrm{s\,c} & \mathrm{s\,s} & \mathrm{-s\,c} & \mathrm{-s\,s} \\ \mathrm{-c\,c} & \mathrm{-c\,s} & \mathrm{c\,c} & \mathrm{c\,s} \\ \mathrm{-s\,c} & \mathrm{-s\,s} & \mathrm{s\,c} & \mathrm{s\,s} \end{bmatrix}$$

Należy zauważyć, że w elemencie przyjęto stałą siłę N. Ponieważ N=A·E·ε to ε=const i $\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} = 0$. Zatem u(x) = A_o+A_1x. Oznacza to, że w elemencie dokonano liniowej aproksymacji pola przemieszczeń, które może być zapisane w postaci $u(x)=N_1(x)\Delta_a+N_2(x)\Delta_b$, gdzie $N_2(x) = \frac{x}{l}$, $N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$, a Δ_a i Δ_b są przesunięciami końców elementu wzdłuż osi pręta.

Macierze sztywności poszczególnych elementów są następujące:

element 1

cosα=-1 ; sinα=0 ; $l = 4\ m$,

$$k_1 = EA \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_7 & r_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_7 \\ r_8 \end{array}$$

element 3

cosα=-0,8 ; sinα=0,6 ; $l = 5\ m$,

$$k_3 = EA \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_3 & r_4 & r_7 & r_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,128 & -0,096 & -0,128 & 0,096 \\ & 0,072 & 0,096 & -0,072 \\ \text{symetria} & & 0,128 & -0,096 \\ & & & 0,072 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ r_3 \\ r_4 \\ r_7 \\ r_8 \end{array}$$

element 4

cosα=0,8 ; sinα=0,6 ; $l = 5\ m$,

$$k_4 = EA \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ \text{symetria} & & 0,128 & 0,096 \\ & & & 0,072 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{array}$$

element 5

cosα=0 ; sinα=-1 ; $l = 3\ m$,

$$k_5 = EA \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0,333 & 0 & -0,333 \\ \text{symetria} & & 0 & 0 \\ & & & 0,333 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}$$

element 2

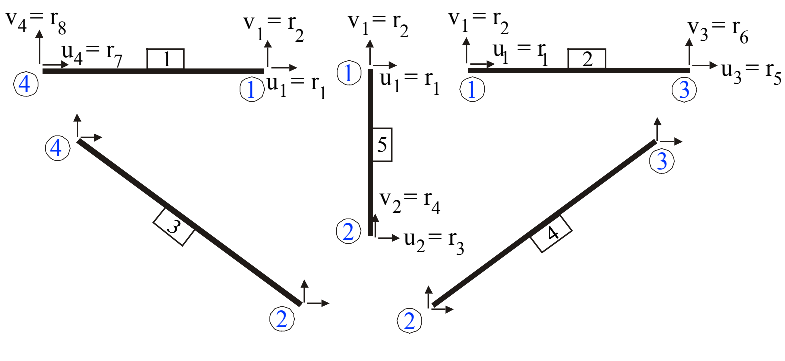
cosα=1 ; sinα=0 ; $l = 4\ m$,

$$k_2 = EA \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_5 & r_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{symetria} & & 0,25 & 0 \\ & & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_5 \\ r_6 \end{array}$$

Na bokach macierzy poszczególnych elementów zapisano globalne stopnie swobody odpowiadające numerom kolumn i wierszy.

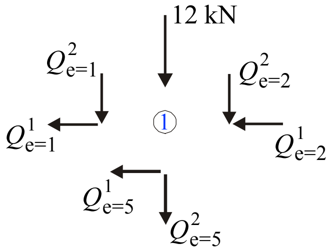
3. Macierz sztywności konstrukcji – „zszywanie" elementów: połączenia i równowaga.

Wykorzystujemy równania równowagi poszczególnych węzłów oraz zgodność przemieszczeń w węzłach. Zgodność przemieszczeń zapewnia się przez przyjęcie globalnej numeracji stopni swobody w każdym elemencie (np. dla elementu 5 u_1=r_1 , v_1=r_2 , u_2=r_3 , v_2=r_4 – patrz rysunek).



Rys.3.

Przykładowo równowaga węzła 1 (dwa pierwsze równania równowagi, węzeł wspólny dla elementów nr 1, 2 i 5):



$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^1_{e=1} + Q^1_{e=2} + Q^1_{e=5} = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^2_{e=1} + Q^2_{e=2} + Q^2_{e=5} = -12 \;\text{ kN}$$

Występujące w równaniach siły węzłowe elementów wyrażamy za pomocą zależności $\mathbf{Q}_e = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{q}_e$ wykorzystując warunki połączenia (zgodności przemieszczeń):

$$Q^1_{e=1} = EA(0{,}25r_1 - 0{,}25r_7)\ ,\ Q^1_{e=2} = EA(0{,}25r_1 - 0{,}25r_5)\quad ,\quad Q^1_{e=5} = 0$$

$$\text{równanie 1:}\quad EA(0{,}5r_1 - 0{,}25r_5 - 0{,}25r_7) = 0$$

$$Q^2_{e=1} = 0\ ,\ Q^2_{e=2} = 0\quad ,\quad Q^2_{e=5} = EA(0{,}333r_2 - 0{,}333r_4)$$

$$\text{równanie 2:}\quad EA(0{,}333r_2 - 0{,}333r_4) = -12$$

W podobny sposób można uzyskać pozostałe równania. Po zbudowaniu układu równań tj. macierzy sztywności konstrukcji oprócz macierzy sztywności poszczególnych elementów w układzie globalnym potrzebne są także globalne numery wierszy i kolumn wynikające ze sposobu połączeń. Budowa (agregacja) macierzy sztywności konstrukcji polega na sumowaniu wyrazów o tych samych numerach globalnych wierszy i kolumn – jest to tzw. dodawanie z alokacją.

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
k^1_{11}+k^2_{11} & & & & k^2_{13} & & k^1_{13} & \\
 & k^5_{22} & & k^5_{24} & & & & \\
 & & k^3_{11}+k^4_{11} & k^3_{12}+k^4_{12} & k^4_{13} & k^4_{14} & k^3_{13} & k^3_{14} \\
 & & & k^3_{22}+k^4_{22}+k^5_{44} & k^4_{23} & k^4_{24} & k^3_{23} & k^3_{24} \\
k^2_{31} & & & & k^2_{33}+k^4_{33} & k^4_{34} & & \\
 & \text{symetria} & & & & k^4_{44} & & \\
k^1_{31} & & & & & & k^1_{33}+k^3_{33} & k^3_{34} \\
 & & & & & & & k^3_{44}
\end{array}\right]
\end{array}
\left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_B \\ H_A \\ V_A \end{array}\right]
$$

Zatem macierz sztywności konstrukcji ma postać (w macierzy elementy zerowe opuszczono):

$$
K = EA\begin{bmatrix}
0{,}5 & & & & -0{,}25 & & -0{,}25 & \\
 & 0{,}333 & & -0{,}333 & & & & \\
 & & 0{,}256 & & -0{,}128 & -0{,}096 & -0{,}128 & 0{,}096 \\
 & & & 0{,}477 & -0{,}096 & -0{,}072 & 0{,}096 & -0{,}072 \\
 & & & & 0{,}378 & 0{,}096 & & \\
 & \text{symetria} & & & & 0{,}072 & & \\
 & & & & & & 0{,}378 & -0{,}096 \\
 & & & & & & & 0{,}072
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{matrix} \text{kolumny } 1\text{–}5: K_{11} \ (\text{góra}),\ K_{21} \ (\text{dół}) \\ \text{kolumny } 6\text{–}8: K_{12} \ (\text{góra}),\ K_{22} \ (\text{dół}) \end{matrix}
$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{R}$$

4. Rozwiązanie równań równowagi – uwzględnianie warunków brzegowych.

Rozwiązanie jest możliwe po uwzględnieniu sposobu podparcia konstrukcji. Równanie (1) zapiszemy w postaci blokowej rozróżniając stałe (nieruchome) stopnie swobody ($r_6 = r_7 = r_8$) oraz ruchome, nieznane stopnie swobody (pozostałe).

$$
\begin{bmatrix} \underset{(5\times5)}{K_{11}} & \underset{(5\times3)}{K_{12}} \\ \underset{(3\times5)}{K_{21}} & \underset{(3\times3)}{K_{22}} \end{bmatrix}
\text{x}
\begin{bmatrix} \underset{(5\times3)}{r_1} \\ \underset{(3\times1)}{r_0} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_0 \end{bmatrix}
$$

, gdzie $\mathbf{r}_0$ nieruchome stopnie swobody:

$$
r_0 = \begin{bmatrix} r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}
$$

$$
\begin{cases} \mathbf{K}_{11}\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{K}_{12}\,\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_1 & \Rightarrow \quad r_1 = K_{11}^{-1}R_1 \quad \Rightarrow \quad R_0 = K_{21}(K_{11}^{-1}\,R_1) \\ K_{21}\,r_1 + K_{22}\,r_0 = R_0 & \text{tzn. po obliczeniu ruchomych stopni swobody obliczamy reakcje.} \end{cases}
$$

$$
K_{11}^{-1} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix}
4 & 2.667 & 2 & 2.667 & 4 \\
2.667 & 13.503 & 2.667 & 10.5 & 5.333 \\
2 & 2.667 & 5.906 & 2.667 & 4 \\
2.667 & 10.5 & 2.667 & 10.5 & 5.333 \\
4 & 5.333 & 4 & 5.333 & 8
\end{bmatrix}
\qquad
r_1 = K^{-1}R_1 = \frac{1}{EA}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -32 \\ -162.036 \\ -32 \\ -126 \\ -64 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{array}
$$

$$\text{Reakcje:}\quad R_0 = K_{21}\, r_1 = \begin{bmatrix} V_B \\ H_A \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10^{-15} \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Obliczanie sił przekrojowych.

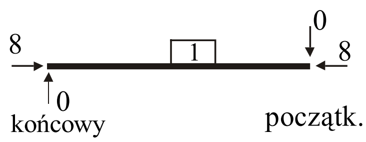
Obliczamy je z zależności $\mathbf{Q}_e = \mathbf{k}_e\, \mathbf{q}_e$.

<u>Element 1</u>

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_7 \\ r_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix} -32 \\ -162.036 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{k}_1\, \mathbf{q}_1$, możemy zapisać i wyliczyć

$$\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -32 \\ -162,036 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{węzeł początkowy} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{węzeł końcowy} \end{array}$$



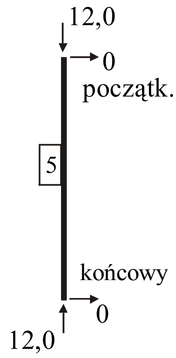
<u>Element 5</u>

Ponieważ $\mathbf{Q}_5 = \mathbf{k}_5\, \mathbf{q}_5$, możemy zapisać i wyliczyć

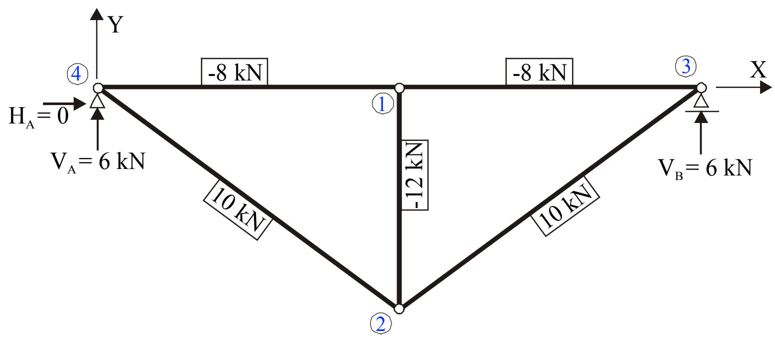
$$\mathbf{q}_5 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix} -32 \\ -162.036 \\ -32 \\ -126 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ -162,036 \\ -32 \\ -126 \end{bmatrix}$$

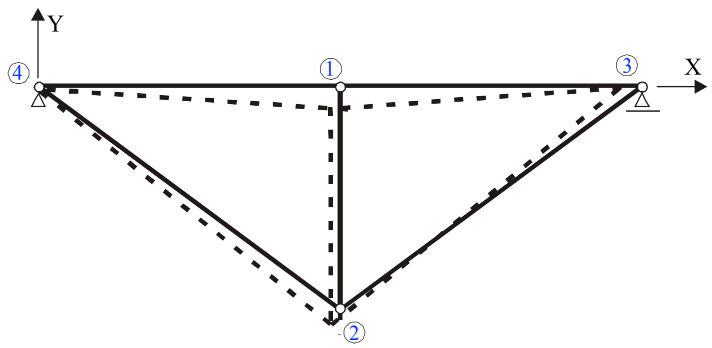
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -12.013 \\ 0 \\ 12.013 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{węzeł początkowy} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{węzeł końcowy} \end{matrix}$$



Ostatecznie wykres sił przekrojowych (rys. 4a) oraz przemieszczeń (rys. 4b) są następujące:



Rys.4a.



Rys. 4b.