**České vysoké učení technické v Praze**

**Fakulta elektrotechnická**

# Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec

Praha, 2025

https://github.com/knedl1k/A8B01OGT

# Obsah

Strana

# Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/A8B01OGT`.

**Poděkování.** Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

## Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u přednáškových příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

# 1 První týden

## 1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \to \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

(1) $\hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmin}} f(x) \iff \hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmax}}(-f(x))$,

(2) jesliže $\hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min_{x\in M} f(x) = -\max_{x\in M}(-f(x))$.

Důkaz.

(1) $\hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \underset{\cdot(-1)}{\iff} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmax}}(-f(x))$. $\square$

(2) Ať $\hat{x} \in \underset{x\in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min_{x\in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \overset{(1)}{=} -\max_{x\in M}(-f(x))$. $\square$

## 1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

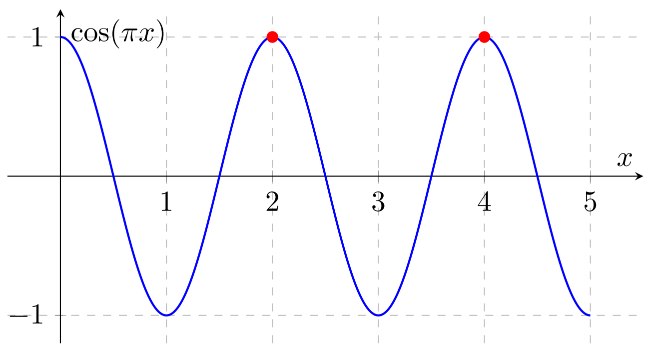
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

## 1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte } & \ln x \\ \text{za podmínek } & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$D(f) = (0, \infty)$.

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmínek: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1)$.




Očividně tedy $M = \{2, 4\}$.

Úvahou pak lze uhodnout $\underset{x\in M}{\operatorname{argmax}} \ln x = \{4\}$.

## 1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici $x$ (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého invetičního produktu (v tis. Kč) při investici $x$ (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} \text{maximalisujme } & \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ \text{za podmínek } & x + y = 100, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25}\right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \overset{!}{=} 0$$

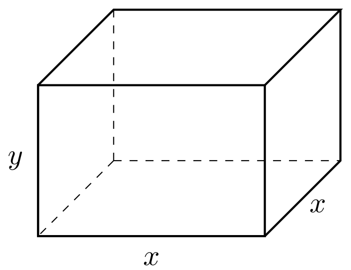
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \rightarrow x = 75$.

## 1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm$^3$ tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.




$$\begin{aligned} \text{minimalisujme } & 4xy + x^2 \\ \text{za podmínek } & x^2 y = 10, \\ & x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(4x\frac{10}{x^2}+x^2\right)=\frac{-40}{x^2}+2x\overset{!}{=}0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned}-40+2x^3&=0\\ x^3&=20\\ x&=\sqrt[3]{20}\end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x=\sqrt[3]{20}\to y=\frac{10}{\left(\sqrt[3]{20}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

## 1.6 Maximalisační úloha

V továrně vyrábějí zboží různých druhů. Označme je $X_1,\ldots,X_n$. Na jejich výrobu potřebují materiály $Y_1,\ldots,Y_m$. Na skladě mají k dispozici množství $b_i$ materiálu $Y_i$ a na trhu ho nakupují za cenu $\gamma_i$. Na výrobu jednotkového množství zboží $X_j$ potřebují množství $a_{ij}$ materiálu $Y_i$. Jednotkové množství výrobku $X_j$ prodávají za cenu $\sigma_j$. Formulujte optimalisační úlohu problému nastavení množství výroby jednotlivých druhů produktů (předpokládejte, že hledaná množství nemusí být celočíselná) tak, aby celkový zisk z jejich prodeje byl co největší.

## Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

### 1.7 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina
$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$
se nazývá uzavřená úsečka s krajními body $x$ a $y$.

### 1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Ať $x, z \in H(y, \alpha), \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $\lambda x + (1-\lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle definice.

$\langle \lambda x + (1-\lambda)z, y\rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\alpha} + (1-\lambda) \underbrace{\langle z, y\rangle}_{\alpha} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)z \in H(y, \alpha)$. $\square$

### 1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

### 1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| \leq r$. Tedy za $x$ z definice dosadíme úsečku mezi body $x$ a $y$, které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle definice.

$$\begin{aligned}||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1-\lambda)a + (1-\lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x-a}_{\leq r}|| + (1-\lambda)||\underbrace{y-a}_{\leq r}|| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r. \quad \square\end{aligned}$$

### 1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

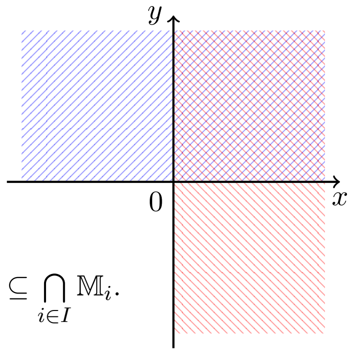
Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| < r$. Dle definice.

$$\begin{aligned}||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1-\lambda)a + (1-\lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x-a}_{<r}|| + (1-\lambda)||\underbrace{y-a}_{<r}|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r. \quad \square\end{aligned}$$

### 1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve $\mathbb{R}^2$:

Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) konvexní množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.




Visuálně je průnik nekonvexní.

Důkaz.

Nechť $x, y \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{M}_i$.

$\square$

### 1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou konvexní množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.
$\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

## Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in R^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

### 1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pak $f$ je afinní $\iff$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Cíl: Ukázat, že $f$ je afinní, tedy $f(x) = Ax + b$.
Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.
Pokud je $f$ afinní, pak zobrazení $\varphi$ by mělo být dáno jako $Ax$, tedy být lineární.
Cíl: $\varphi$ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) Ať $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in R$.
Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha\varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Cíl: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \overset{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

### 1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afinní a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je $C$ konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = [\underbrace{f(x)}_{a}, \underbrace{f(y)}_{b}] \subseteq f(C). \quad \square$

### 1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak $C_1$ a $C_2$ jsou konvexní množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle definice.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda)c \\ (1-\lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1-\lambda)c \\ \lambda b + (1-\lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Definujme afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak $f$ je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies$ $C_1$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro $C_2$, zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak $g$ je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies$ $C_2$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. $\square$

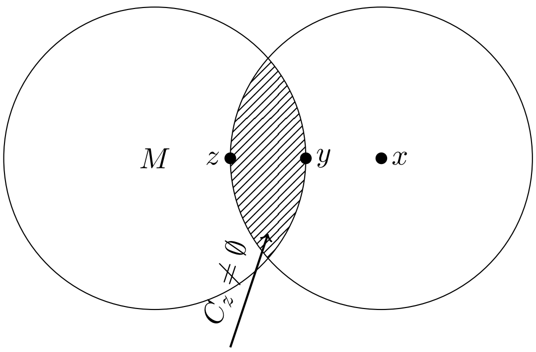
# 2 Druhý týden

## 2.1 Věta o nejlepší aproximaci

Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\operatorname{dist}(x; C) = ||x - \hat{y}||$.

Důkaz.

1. Existence
Cíl: Existuje bod minima
Úvaha:




$M$ je obecná konvexní množina.
c x $R = ||x - z||$,
$Cz = M \cap B(x, R) = M \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||z - a|| \leq R\}$.
$\uparrow$
$\underbrace{\text{uzavřená, omezená}}_{\text{kompaktní}}$, neprázdná

Tedy $a \mapsto ||x - a||$ je spojitá.

$\Rightarrow$ Spojitost na kompaktní množině znamená, že $f$ nabývá na $C_z$ minima dle Weierstrassova kritéria.

Ať $y$ je bod minima. Všechny body v $M$ mají od $x$ vzdálenost $\geq ||x - y||$. $\square$

2. Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| = ||x - b|| = \overbrace{\operatorname{dist}(x, M)}^{\delta}$, pak $a = b$.
Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.
Důkaz lemma:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2 + ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$$

$$= 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right). \quad \square$$

Důkaz jednoznačnosti:
Ať $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
Pak $\delta^2 \leq ||x - y||^2 = ||x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b||^2 = ||\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)||^2 = \frac{1}{4}||\underbrace{(x - a)}_{u} + \underbrace{(x - b)}_{v}||^2$

$$\overset{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4}\left[2\left(\underbrace{||x-a||^2}_{\delta^2} + \underbrace{||x-b||^2}_{\delta^2}\right) - \underbrace{||(x-a) + (x-b)||^2}_{b-a}\right] = \delta^2 - \frac{1}{4}||b-a||^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \underbrace{\frac{1}{4}||b-a||^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

## 2.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.

(2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) ⇒ (2):
Ať $v_\lambda = y + \lambda(z-y)$, $\lambda \in (0,1]$.
Pak

$$||x-y||^2 \le ||x-v_\lambda||^2 = ||x-y-\lambda(z-y)||^2 = \langle (x-y)-\lambda(z-y), (x-y)-\lambda(z-y)\rangle$$

$$||x-y||^2 \le ||x-y||^2 - 2\lambda\langle x-y, z-y\rangle + \lambda^2||z-y||^2$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \le \frac{\lambda}{2}||z-y||^2 \to 0 \text{ pro } \lambda \to 0^+$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \le 0. \quad \square$$

(2) ⇒ (1):
Ať $z \in C$.
Pak

$$0 \ge \langle x-y, z-y\rangle = \langle x-y, (z-x)+(x-y)\rangle = \langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2$$

$$\langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2 \ge ||x-y||^2 - \underbrace{|\langle x-y, z-y\rangle|}_{\text{odhad shora}} \ge \star$$

$$\star = ||x-y||^2 - ||x-y|| \cdot ||z-x||.$$

Je-li $x \ne y$, pak vydělíme: $||z-x|| \ge ||x-y||$.
Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \ldots$ triviální. $\square$

## 2.3 Koule?

## 2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

(1) $P_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

(2) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

(3) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x) a z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(1)
Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1. $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

2. $P_L(x+y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. : Ať $z \in L$. Pak

$$\langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle = \alpha\langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle$$

$$\overset{\alpha\ne 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0}\langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot z}_{\in L} - P_L(x)\rangle$$

# 3 Třetí týden

# 4 Čtvrtý týden

# 5 Pátý týden

# 6 Šestý týden

# 7 Sedmý týden

# 8 Osmý týden

# 9 Devátý týden

# 10 Desátý týden

# 11 Jedenáctý týden

## 12 Dvanáctý týden

# 13 Třináctý týden

# 14 Čtrnáctý týden