České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec

Praha, 2025

https://github.com/knedl1k/A8B01OGT

Obsah

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/A8B01OGT`.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u přednáškových příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \to \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

(1) $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname*{argmax}_{x \in M}(-f(x))$,

(2) jesliže $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M}(-f(x))$.

Důkaz.

(1) $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \underset{\cdot(-1)}{\iff} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \operatorname*{argmax}_{x \in M}(-f(x))$. □

(2) Ať $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \overset{(1)}{=} -\max_{x \in M}(-f(x))$. □

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

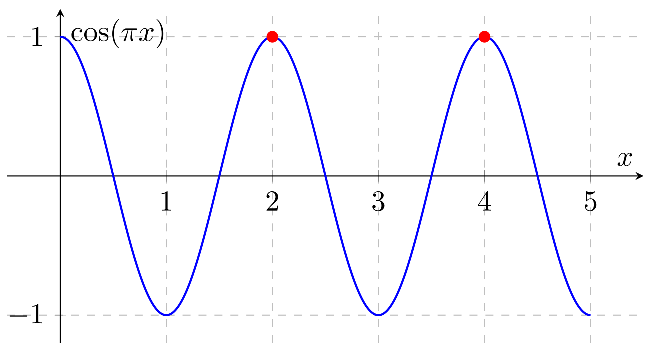
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte } & \ln x \\ \text{za podmínek } & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$D(f) = (0, \infty)$.

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmínek: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1)$.



Očividně tedy $M = \{2, 4\}$.

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname*{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}$.

1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého invetičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} \text{maximalisujme } & \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ \text{za podmínek } & x + y = 100, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25}\right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

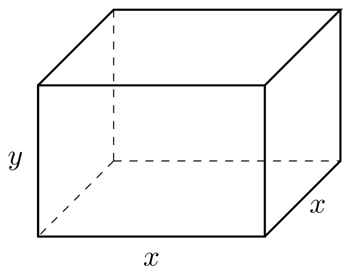
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25)-(150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \to x = 75$.

1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm^3 tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} \text{minimalisujme } & 4xy + x^2 \\ \text{za podmínek } & x^2 y = 10, \\ & x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(4x\frac{10}{x^2}+x^2\right)=\frac{-40}{x^2}+2x\overset{!}{=}0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned}-40+2x^3&=0\\ x^3&=20\\ x&=\sqrt[3]{20}\end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x=\sqrt[3]{20}\to y=\frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V $\mathbb{R}^n$ jsou dány množiny bodů $A=\{a_1,\dots,a_k\}$ a $B=\{b_1,\dots,b_t\}$. Ať $w\in\mathbb{R}^n$ a $\lambda\in\mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=-1$.

(a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{||w||}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{||w||}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2.

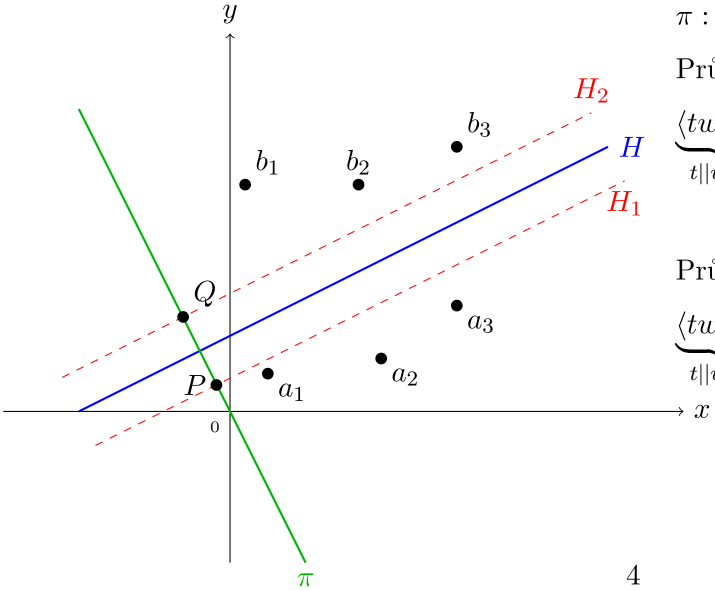
(b) Iterpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned}\text{maximalisujte } g(w,\lambda)&=\frac{2}{||w||}\\ \text{za podmínek } \langle a_i,w\rangle+\lambda&\geq 1 \text{ pro všechna } i=1,\dots,k,\\ \langle b_i,w\rangle+\lambda&\leq -1 \text{ pro všechna } j=1,\dots,l.\end{aligned}$$

(c) Ukažte, že $(\hat{w},\hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned}\text{minimalisujte } h(w,\lambda)&=\frac{1}{2}||w||^2\\ \text{za podmínek } \langle a_i,w\rangle+\lambda&\geq 1 \text{ pro všechna } i=1,\dots,k,\\ \langle b_i,w\rangle+\lambda&\leq -1 \text{ pro všechna } j=1,\dots,l.\end{aligned}$$

(a)



$\pi: x=t\cdot w, t\in\mathbb{R}.$

Průsečík Q:

$\underbrace{\langle tw,w\rangle}_{t||w||^2}+\lambda=1\to t=\frac{1-\lambda}{||w||^2}\Rightarrow Q=\frac{1-\lambda}{||w||^2}w$

Průsečík P:

$\underbrace{\langle tw,w\rangle}_{t||w||^2}+\lambda=-1\to t=\frac{-1-\lambda}{||w||^2}\Rightarrow P=\frac{-1-\lambda}{||w||^2}w$

Pak vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je dána rozdílem průsečíků P a Q v normě. Tedy:

$$||Q - P|| = \left\| \frac{1-\lambda}{||w||^2} w + \frac{1+\lambda}{||w||^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{||w||^2} \right\| = \frac{2}{||w||^2} ||w|| = \frac{2}{||w||}.$$

To je príma, to jsme přesně chtěli. $\square$

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení $\frac{1}{2}$, protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

1.7 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] \coloneqq \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y.

1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Ať $x, z \in H(y, \alpha), \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle definice.

$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y\rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y\rangle}_{\alpha} = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$

$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$

1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y, které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x - a}_{\leq r}|| + (1 - \lambda)||\underbrace{y - a}_{\leq r}|| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

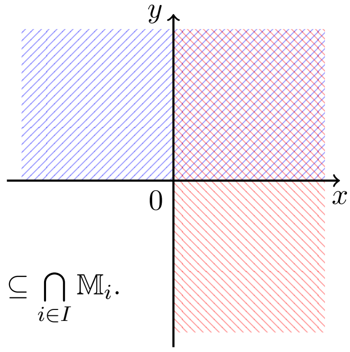
Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| < r$. Dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x - a}_{<r}|| + (1 - \lambda)||\underbrace{y - a}_{<r}|| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve $\mathbb{R}^2$:



Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) konvexní množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Visuálně je průnik nekonvexní.

Důkaz.

Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i$.

$\square$

1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou konvexní množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.
$\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in R^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pak f je afinní $\iff$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„$\Rightarrow$“: Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

„$\Leftarrow$“: Cíl: Ukázat, že f je afinní, tedy $f(x) = Ax + b$.
Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.
Pokud je f afinní, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax, tedy být lineární.
Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) Ať $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in R$.
Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha\varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Cíl: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \overset{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afinní a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = [\underbrace{f(x)}_{a}, \underbrace{f(y)}_{b}] \subseteq f(C)$. $\square$

1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou konvexní množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

„$\Rightarrow$“: Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle definice.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda)c \\ (1-\lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1-\lambda)c \\ \lambda b + (1-\lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„$\Leftarrow$“: Definujme afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies$ C_1 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2, zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies$ C_2 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. $\square$

1.17 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice A, jestliže

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být $\underbrace{\text{symetrická}}_{Q=Q^T}$.

Pak platí:

$$\begin{aligned} \langle Qx, x\rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je positivně semidefinitní.} \\ \langle Qx, x\rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je positivně definitní.} \end{aligned}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.
Matice je indefitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že Q je negativně (semi)defitní, jestliže $(-Q)$ je positivně (semi)defintní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit positivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \to |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0.$ $\to$ podezření na positivní semidefinitnost.

Hlavní minory jsou $Q_{\{1\}}$ a $Q_{\{1,2\}}$.
Menší minory: Q_I, kde $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ neprázdná. Aby matice byla positivně semidefinitní, tak $\det Q_I \geq 0$.

Tedy: $Q_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$. $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$.

Tedy matice $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ je positivně semidefinitní.

(b) $\begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0.$ Matice je positivně definitní.

(c) $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy det$Q = 0$.
$Q_{\{1\}} = 4 > 0$,
$Q_{\{2\}} = 1 > 0$,
$Q_{\{3\}} = 0 = 0$.
Tedy matice je jedině positivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Aby matice Q byla positivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být ≥ 0. Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice Q je indefinitní.

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy vlastnosti symetrických matic a určeme definitnost pro matici $(-Q)$.

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice $(-Q)$ je positivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$.

$\implies (-Q)$ je positivně semidefinitní $\iff Q$ je negativně semidefinitní.

1.18 Existence matice

Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?

(c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

Zadefinujme si vlastnost skalárního součinu: $\langle a, b \rangle = b^T a$, kde $b^T = \begin{pmatrix} b_1, \ldots, b_n \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(a)Využijme zmíněné vlastnosti.

$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$

(b) Pozorování: Matice B je symetrická a matice C je antisymetrická.

Zvolme: $\left.\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}(A + A^T) \\ C &= \tfrac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}\right\} B + C = A.$

$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C.$✓

$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B.$✓ □

(c) $\langle Cx, x\rangle \stackrel{?}{=} 0$

$$\langle Cx, x\rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x\rangle \stackrel{-C=C^T}{=} -\langle x, Cx\rangle = -\langle Cx, x\rangle = 0.$$

Matice C tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$. □

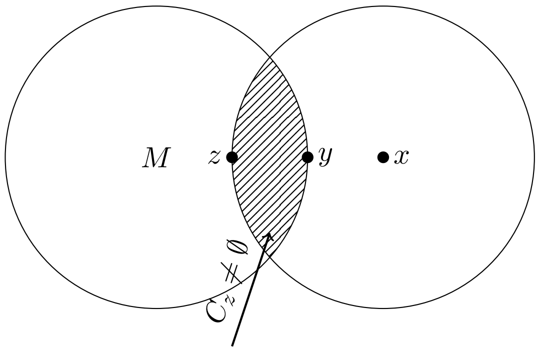
2 Druhý týden

2.1 Věta o nejlepší aproximaci

Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\operatorname{dist}(x; C) = ||x - \hat{y}||$.

Důkaz.

1. Existence
Cíl: Existuje bod minima
Úvaha:



M je obecná konvexní množina.
c x $R = ||x - z||$,
$Cz = M \cap B(x, R) = M \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||z - a|| \leq R\}$.
$\uparrow$
$\underbrace{\text{uzavřená, omezená}}_{\text{kompaktní}}$, neprázdná

Tedy $a \mapsto ||x - a||$ je spojitá.

$\Rightarrow$ Spojitost na kompaktní množině znamená, že f nabývá na C_z minima dle Weierstrassova kritéria.

Ať y je bod minima. Všechny body v M mají od x vzdálenost $\geq ||x - y||$. $\square$

2. Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| = ||x - b|| = \overbrace{\operatorname{dist}(x, M)}^{\delta}$, pak $a = b$.
Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.
Důkaz lemma:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2 + ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$$

$$= 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right). \quad \square$$

Důkaz jednoznačnosti:
Ať $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
Pak $\delta^2 \leq ||x - y||^2 = ||x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b||^2 = ||\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)||^2 = \frac{1}{4}||\underbrace{(x - a)}_{u} + \underbrace{(x - b)}_{v}||^2$

$$\overset{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4}\left[2\left(\underbrace{||x-a||^2}_{\delta^2} + \underbrace{||x-b||^2}_{\delta^2}\right) - \underbrace{||(x-a)+(x-b)||^2}_{b-a}\right] = \delta^2 - \frac{1}{4}||b-a||^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \underbrace{\frac{1}{4}||b-a||^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

2.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.

(2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2):
Ať $v_\lambda = y + \lambda(z-y)$, $\lambda \in (0,1]$.
Pak

$$||x-y||^2 \leq ||x-v_\lambda||^2 = ||x-y-\lambda(z-y)||^2 = \langle (x-y)-\lambda(z-y), (x-y)-\lambda(z-y)\rangle$$

$$||x-y||^2 \leq ||x-y||^2 - 2\lambda\langle x-y, z-y\rangle + \lambda^2||z-y||^2$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \leq \frac{\lambda}{2}||z-y||^2 \to 0 \text{ pro } \lambda \to 0^+$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \leq 0. \quad \square$$

(2) $\Rightarrow$ (1):
Ať $z \in C$.
Pak

$$0 \geq \langle x-y, z-y\rangle = \langle x-y, (z-x)+(x-y)\rangle = \langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2$$

$$\langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2 \geq ||x-y||^2 - \underbrace{|\langle x-y, z-y\rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star$$

$$\star = ||x-y||^2 - ||x-y|| \cdot ||z-x||.$$

Je-li $x \neq y$, pak vydělíme: $||z-x|| \geq ||x-y||$.
Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \ldots$ triviální. $\square$

2.3 Koule?

2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

(a) $P_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(a)
Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1. $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
2. $P_L(x+y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. : Ať $z \in L$. Pak

$$\langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle = \alpha\langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle$$

$$\overset{\alpha\neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0}\langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot z}_{\in L} - P_L(x)\rangle$$

Tedy $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$. Pro $\alpha = 0$ zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.

2. : Ať $z \in L$.

$$\langle \underbrace{x + y - (P_L(x) + P_L(y))}_{(x-P_L(x))+(y-P_L(y))}, z - (P_L(x) + P_L(y))\rangle$$

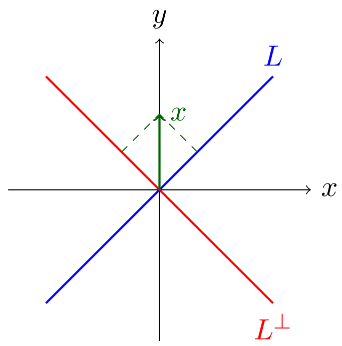
$$\underbrace{\langle x - P_L(x), \underbrace{(z - P_L(y))}_{\in L} - P_L(x)\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), \underbrace{(z - P_L(x))}_{\in L} - P_L(y)\rangle}_{\leq 0} \leq 0.$$

Z variační nerovnosti tedy plyne, že P_L je nutně lineární. $\square$

(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

L ... lineární podprostor $\mathbb{R}^n$,
$L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in L\}$.

Důkaz.
Cíl: $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.
Ať $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$. Pak



$$\langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x))\rangle = \langle \underbrace{P_L(x)}_{\in L}, z - (x - P_L(x))\rangle$$

$$= \underbrace{\langle P_L(x), z\rangle}_{0} - \langle P_L(x), x - P_L(x)\rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x)\rangle \leq 0. \quad \square$$

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz existence.
Pak $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$. $\square$

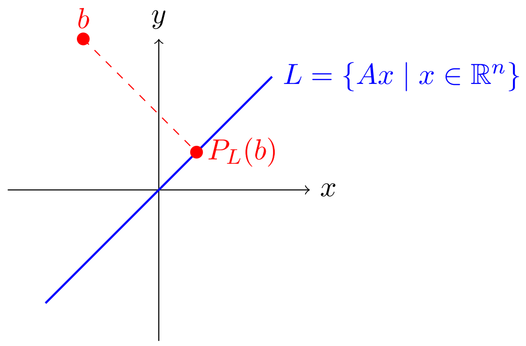
Důkaz jednoznačnosti.
Ať $a \in L, b \in L^\perp$ takové, že $x = a + b$.
Cíl: $a = P_L(x)$

Ať $z \in L$.

$$\langle x - a, z - a\rangle = \langle b, \underbrace{z - a}_{\in L}\rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \overset{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

3 Třetí týden

3.1 Metoda nejmenších čtverců



Pokud $b \in L$, řešíme úlohu $Ax = b$.
Pokud $b \notin L$, řešíme $Ax = P_L(b)$.

$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b^2\| \iff A^T A\hat{x} = A^T b$.

„$\Rightarrow$“: Ať $A\hat{x} = P_L(b) \overset{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A\hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\overset{?}{=}0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b)\rangle = \langle \underbrace{P_{L^\perp}(b)}_{\in L^\perp}, \underbrace{(A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b))}_{\in L}\rangle = 0. \quad \square$$

„$\Leftarrow$“: Ať $A^T A\hat{x} = A^T b$.
Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

$$0 = \langle \underbrace{x, A^T A\hat{x} - A^T b}_{A^T(A\hat{x}-b)}\rangle = \langle \underbrace{(A^T)^T x}_{L}, A\hat{x} - b\rangle \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \overset{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$A^T A\hat{x} = A^T b$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies$ existuje inverze.

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body $(0, -\frac{1}{2})^T, (1, \frac{1}{3})^T$ a $(2, \frac{2}{3})^T$. Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímku o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.

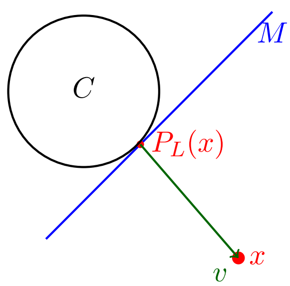
$$\left.\begin{aligned} 0k + q &= -\tfrac{1}{2} \\ 1k + q &= \tfrac{1}{3} \\ 2k + q &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina.
$x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$ existuje $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Důkaz.
$v = x - P_L(x) \neq 0$

$$\langle v, y \rangle = \langle v, P_L(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$
$$\langle y, v \rangle \leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Položme $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$.

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \underbrace{\overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha}}_{\langle P_L(x), v \rangle} = \langle \underbrace{x - P_L(x)}_{v}, v \rangle = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

Důsledek: Každá uzavřená konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ je průnikem všech poloprostorů, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

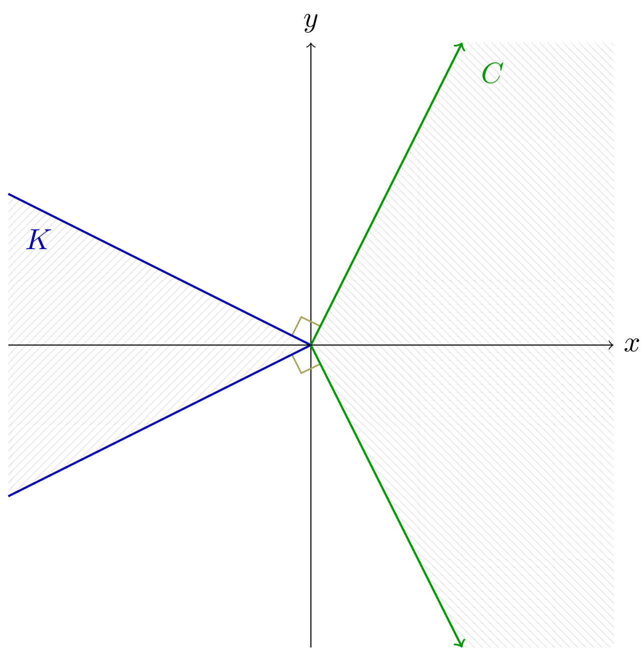
Ať neplatí: tj. existuje $C \in \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem P všech poloprostorů obsahujících C.

Pak $x \in P$ tak, že $x \notin C$. Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor M takový, že $C \subseteq M$ a $x \neq M$. Ale to je ve sporu s tím, že $x \in P$. $\square$

3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ a $b \in \mathbb{R}^2$. Označme

$$\begin{aligned} C &= \left\{ Ax \middle| x \in \mathbb{R}^2_+ \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \geq 0 \right\} \\ K &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$



Vždy nastane jeden z případů:

(a) $b \in C$

(b) $b \notin C$ - existuje nenulový vektor $y \in K$ svírající s b úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

3.6 Lemma neprázdné uzavřené konvexní

Jestliže $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pak $\left\{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$ je neprázdná uzavřená konvexní množina.

Důkaz.

- neprázdná - vždy obsahuje alespoň 0,
- konvexní - lineární zobrazení (matice) zachovává konvexitu,
- uzavřenost dokazovat nebudeme.

3.7 Farkasovo lemma

Výslovnost [farkášovo].

Je-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$, pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

(a) Existuje $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Ax = b$ a $x \geq 0$.

(b) Existuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $A^T y \leq 0$ a $\langle y, b \rangle > 0$.

Důkaz.

„$(a) \implies \neg(b)$“:
Ať $x \in \mathbb{R}^n_+$ a $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $Ax = b$ a $A^T y \leq 0$.

$$\langle y, b \rangle \overset{b=Ax}{=} \langle y, Ax \rangle = \langle \underbrace{A^T y}_{\leq 0}, \underbrace{x}_{\geq 0} \rangle \leq 0. \quad \square$$

„$\neg(a) \implies (b)$“:
Ať $C = \left\{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \right\} \implies b \notin C$, $C \ldots$ uzavřená neprázdná konvexní množina.

$\overset{\text{oddělitelnost}}{\implies}$ existuje $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tak, že: $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha < \langle b, y \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

Začněme s $\alpha < \langle b, y \rangle$. Chceme, aby $\langle b, y \rangle$ byl kladný. Pak nám y bude svírat ostrý úhel s b.

Protože v $0 \in C$, je $0 \leq \alpha < \langle b, y \rangle$ (za Ax dosadíme 0, takže budeme mít $\langle 0, y \rangle$).

Teď musíme dokázat, že y skutečně řeší zadanou soustavu nerovnic.

Víme tedy, že:

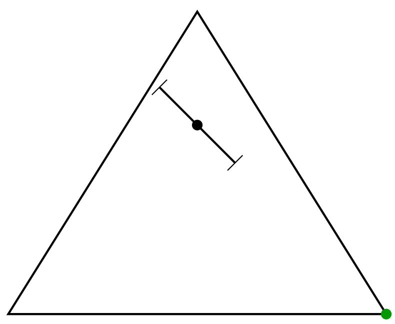
$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \langle x, A^T y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Odtud $\langle x, A^T y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$, neboť:

Ať $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n_+$ je takový, že $\langle \tilde{x}, A^T y \rangle > 0$.
Pak $\langle \underbrace{\lambda \tilde{x}}_{\lambda > 0,\ \text{tedy}\ \lambda \tilde{x} \in \mathbb{R}^n_+}, A^T y \rangle = \lambda \underbrace{\langle \tilde{x}, A^T y \rangle}_{>0} \to +\infty$, pro $\lambda \to +\infty$. Což je spor s $\langle x, A^T y \rangle \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

Ať $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Pak $(A^T y)_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, neboť $(A^T y)_i = \langle e_i, A^T y \rangle$. $\square$

3.8 Krajní body konvexní množiny



Mějme konvexní množinu. Když sestrojíme libovolnou nedegenerativní (tzn. netriviální = není to pouze bod) úsečku, vždy nalezneme bod, který bude ležet přesně uprostřed této úsečky.

Co když ale vezmeme například zelený bod vyznačený na nákresu? V takovém případě nejsme schopni sestroji nedegenerativní úsečku, na jejímž středu by ležel tento bod.

Definujme: Krajní bod $x \in C$ konvexní množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový bod, pro který neexistují dva <u>různé</u> body y, z tak, že

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

$\mathrm{ext}(C) \ldots$ množina všech krajních (extremálních) bodů

3.9 Kreinova-Milmanova věta

Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$. Důkaz vynecháme.

Kompaktnost je důležitá.

- Interval $(0, 1)$ není uzavřený a $\mathrm{ext}((0, 1)) = \emptyset$.
- Množina $\mathbb{R}^2_+$ není omezená a $\mathrm{ext}(\mathbb{R}^2_+) = \{0\}$.

3.10 Výpočet gradientu skalárního součinu

Nalezněte $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$, jestliže

(a) $f(x) = \langle x, c\rangle$, kde $c \in \mathbb{R}^n$;

(b) $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, kde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Určete také $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$ za dodatečného předpokladu, že A je symetrická matice.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^n x_i c_i \overset{\text{limita}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ik} \overset{\text{rozvoj}}{=} c_k$$

$$\implies \nabla f(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = c; \implies \nabla^2 f(x) = 0, \text{ kde } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = k, \\ 0, & \text{pokud } i \neq k. \end{cases}$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right]}_{(Ax)_i} x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}x_j + x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)}_{\text{derivace součinu}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\delta_{ik}x_j + x_i\delta_{jk})$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\delta_{ik}x_j + a_{ij}\delta_{jk}x_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j}_{(Ax)_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik}x_i}_{(A^Tx)_k}$$

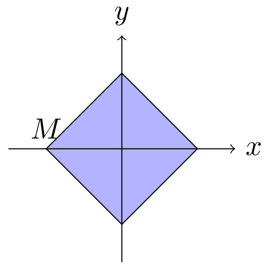
$\implies \nabla f(x) = Ax + A^T x$ (Speciálně: $\nabla f(x) = 2Ax$ pro $A = A^T$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_l} = \sum_{j=1}^n a_{kj}\delta_{jl} + \sum_{i=1}^n a_{ik}\delta_{il} = a_{kl} + a_{lk}$$

$\implies \nabla^2 f(x) = A + A^T$

3.11 Ověření konvexnosti množiny

Je množina $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \right\}$ konvexní?



1. způsob - dle definice

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x + (1-\lambda)a \\ \lambda y + (1-\lambda)b \end{bmatrix} \overset{?}{\in} M, \lambda \in [0,1].$$

$$|\lambda x + (1-\lambda)a| + |\lambda y + (1-\lambda)b| \leq \underbrace{\lambda|x| + (1-\lambda)|a| + \lambda|y| + (1-\lambda)|b|}_{\lambda \underbrace{(|x|+|y|)}_{\leq 1} + (1-\lambda) \underbrace{(|a|+|b|)}_{\leq 1}} \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \quad \square$$

M je konvexní.

2. způsob - úvaha nad vlastnostmi

$|x|$ je konvexní, $|y|$ je konvexní. Součet zachovává konvexitu, tedy i $|x| + |y|$ je konvexní.

3.12 Práce s maticemi

Je dána matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ať $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Ukažte, že A má lineárně nezávislé sloupce $\iff$ $A^T A$ je invertibilní.

Pomocný důkaz.
Ukažme, že: $\ker(A) = \ker(A^T A)$
Chci: $\ker(A) \subseteq \ker(A^T A)$

$$\begin{aligned} x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \quad / \cdot A^T \\ A^T A = 0 \Rightarrow x \in \ker(A^T A) \quad \square \end{aligned}$$

Chci: $\ker(A^T A) \subseteq \ker(A)$

$$\begin{aligned} x \in \ker(A^T A) \Rightarrow A^T A x = 0 \Rightarrow 0 &= \langle A^T A x, x \rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \|Ax\|^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \quad \square \end{aligned}$$

Konec pomocného důkazu.

A má lineárně nezávislé sloupce $\iff$ $\{0\} = \ker(A) = \ker(A^T A)$ $\iff$ $A^T A$ je invertibilní (protože $A^T A$ je čtvercová a $A^T A$ je prosté).

3.13 Proložení bodů pomocí MNČ

Jsou dány body $a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf

(a) afinní funkce $f(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(b) funkce $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= -2 \\ 0\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T b$. A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow$ $(A^T A)^{-1}$ existuje.
Pak: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \tfrac{11}{10};\ \beta = \tfrac{3}{10}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta + \gamma &= -1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -2 \\ 0\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow$ $A^T A$ je invertibilní.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 6 \\ -8 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ -15 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \tfrac{5}{4};\ \beta = \tfrac{7}{4};\ \gamma = \tfrac{-3}{4}.$$

3.14 Formulace úlohy MNČ

Ať závislost výstupního signálu $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ systému na vstupním signálu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je dána konvolucí posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ s posloupností $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ ($(h_n)_{n=0}^{\infty}$ popisuje odezvu systému na jednotkový impuls), tj. $y_n = \sum_{i=0}^{n} h_i x_{n-i}$. Předpokládejte dále, že $h_n = 0$ pro všechna $n \geq 4$. Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů $y_0, \dots, y_{20}$ výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty $x_0, \dots, x_{20}$. Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů h_0, h_1, h_2, h_3.

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \longrightarrow \boxed{(h_n)_{n=0}^{\infty}} \longrightarrow (y_n)_{n=0}^{\infty}$$

$y_k = \sum_{l=0}^{k} h_l x_{k-l} = h_0 x_k + \cdots + h_k x_0$

předpokládejme: $h_l = 0 \, \forall l \geq 4$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= h_0 x_0 \\
y_1 &= h_1 x_0 + h_0 x_1 \\
y_2 &= h_2 x_0 + h_1 x_1 + h_0 x_2 \\
y_3 &= h_3 x_0 + h_2 x_1 + h_1 x_2 + h_0 x_3 \\
y_4 &= h_3 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + h_0 x_4 \\
&\vdots \\
y_{20} &= h_3 x_{17} + h_2 x_{18} + h_1 x_{19} + h_0 x_{20}
\end{aligned}$$

Minimalisujme $f(x) = \|Ax + b\|^2$, kde

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} \end{bmatrix}; \, b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

4 Čtvrtý týden

4.1 Konvexní funkce

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina.
Řekněme, že f je

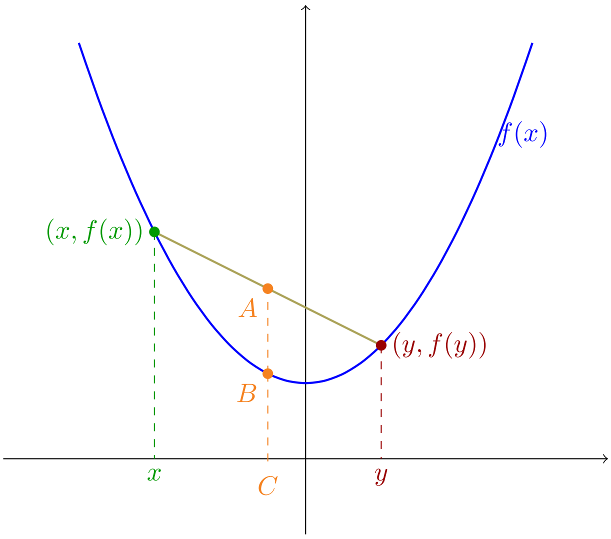
(a) konvexní na C, jestliže pro každé $x, y \in C$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ je

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(b) ryze konvexní na C, jestliže pro každé dva různé body $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$ je

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(c) konkávní (resp. ryze konkávní) na C, jestliže $(-f)$ je konvexní (resp. ryze konvexní) na C.



$A = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$
$B = (\lambda x + (1-\lambda)y, f(\lambda x + (1-\lambda)y))$
$C = \lambda x + (1-\lambda)y$

Pozorování: úsečka vždy leží nad funkcí.

4.2 Příklad konvexní funkce

Je afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (tj. $f(x) = \langle x, a\rangle + b, b \in \mathbb{R}$) konvexní?

Důkaz.
Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \langle \lambda x + (1-\lambda)y, a\rangle + b \\ &= \lambda\langle x, a\rangle + (1-\lambda)\langle y, a\rangle + \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní i konkávní.} \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Příklad konvexní funkce

Je funkce $f(x) = \|x\|$ konvexní?

Důkaz.
Ať Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

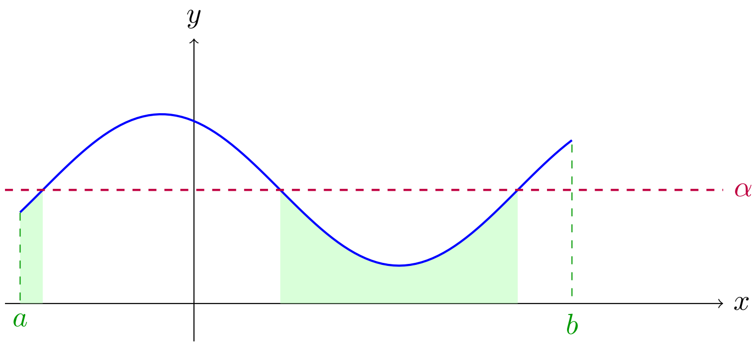
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\overset{\text{odhad}}{\le} \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní.} \quad \square \end{aligned}$$

4.4 Dolní úrovňová množina

Dolní úrovňování množina funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hladiny $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\operatorname{lev}_{\leq}(f;\alpha) := \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}\,.$$

Je-li f konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $\operatorname{lev}_{\leq}(f\big|_C;\alpha)$ je konvexní pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



Důkaz.

Ať $x, y \in \operatorname{lev}_{\leq}(f\big|_C;\alpha), \lambda \in [0,1]$.

Cíl: $\lambda x + (1-y)\lambda \overset{?}{\in} \operatorname{lev}_{\leq}(f\big|_C; y)$.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha. \quad \square$$

Poznámka.

Opačná implikace neplatí. Tedy pomocí dolní úrovňové množiny **nelze** určit, jestli původní funkce je konvexní.

Například $f = x^3$ není konvexní funkce na intervalu $x = [-2,2]$, ale když zvolíme $\alpha = 8$, tak dolní úrovňová množina bude konvexní.

4.5 Použití dolní úrovňové množiny

Je množina $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1, \left\langle x, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \leq 1\right\}$ konvexní?

Důkaz.

Rozdělme si množinu M na dvě podmnožiny M_1 a M_2, kde:

$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\right\} = \operatorname{lev}_{\leq}(\|x\|, 1) \to$ konvexní, protože norma je konvexní funkce.

$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \leq 1\right\} = \operatorname{lev}_{\leq}\left(\left\langle x, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle, 1\right) \to$ konvexní, protože skalární součin je konvexní.

To nám ale dává průnik dvou konvexních množin, tedy $M = M_1 \cap M_2$ je také konvexní. $\quad \square$

4.6 Součet a součin zachovávají konvexitu

Mějme funkce f, g, které jsou konvexní na C, $\alpha \geq 0$. Pak:

(a) $f + g$ je konvexní na C

(b) αf je konvexní na C

Důkaz.

(a) Ať $\lambda \in [0,1], x, y \in C$.

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)} + \underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)}$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) = \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y). \quad \square$$

(b) Ať $\lambda \in [0,1], x, y \in C, \alpha \geq 0$.

4.7 Příklad ověření konvexity

Je funkce $f(x) = e^x - 3\ln x + 2x$ konvexní?

Rozeberme si jednotlivé části funkce.

- e^x ... exponenciála je z grafu očividně konvexní.
- $-3\ln x$ ... logaritmus je konkávní, ale díky „$-$“ se celý výraz stane konvexní. Násobení konstatou konvexitu neovlivní, viz důkaz (b).
- $2x$ ... lineární funkce je konvexní.

Protože všechny komponenty funkce f jsou konvexní, pak je i funkce f nutně konvexní.

4.8 Skládání zachovává konvexitu

Skládání konvexních funkcí není obecně konvexní funkce. Například: $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^2 - 1$ jsou konvexní, ale

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x))) = (x^2-1)^2 \text{ z grafu očividně není konvexní.}$$

1. Mějme tedy tvrzení.

Nechť f je konvexní na $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní. Jestliže $g(C) \subseteq K$ (tedy g „obtiskne“ množinu C do K), pak $f \circ g$ je konvexní na C.

Důkaz.
Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$.
Pak

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \overset{g \text{ je afinní}}{=} f(\lambda \overbrace{g(x)}^{\in K} + (1-\lambda) \overbrace{g(y)}^{\in K}) \overset{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f((g(x))) + (1-\lambda) f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. $\square$

2. Mějme ještě druhé tvrzení.

Jestliže f je konvexní a **neklesající** na intervalu I, g je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$ a $g(C) \subseteq I$, pak $f \circ g$ je konvexní na C.

Důkaz.
Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$.
Pak

$$f(\underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\substack{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \\ \text{odhad, díky konvexitě } g}}) \underset{g \text{ je konvexní}}{\overset{f \text{ je neklesající}}{\leq}} f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)) \overset{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1-\lambda) f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. $\square$

4.9 Věta o extrémech konvexních funkcí

Nechť f je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(a) Každý bod lokálního minima f na C je bodem minima f na C.

(b) Množina $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ je konvexní. Je-li navíc f ryze konvexní na C, pak existuje nejvýše jeden bod minima funkce f na C.

Důkaz (a).
Sporem. Ať $\hat{x} \in C$ je bod lokálního minima f na C a ať existuje $\hat{y} \in C$ tak, že $f(\hat{y}) < f(\hat{x})$. $\lambda \in [0, 1)$.
Pak

$$f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \overset{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)\overbrace{f(\hat{y})}^{<f(\hat{x})} \underset{\text{odhad}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

Což je ale spor s naším předpokladem, protože kdykoliv si vezmu bod na úsečce mezi $\hat{x}$ a $\hat{y}$, tak je v něm hodnota ostře menší než funkční hodnota v bodě $f(\hat{x})$. $\square$

Důkaz (b).
Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\lambda \in [0, 1]$.
Pak

$$f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \overset{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)\overbrace{f(\hat{y})}^{=f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

$\implies \lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$. $\square$

Ať f je navíc ryze konvexní na C.
Cíl: $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ má nejvýše jeden prvek.

Důkaz.
Sporem. Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\hat{x} \neq \hat{y}$. $\lambda \in (0, 1)$.
Pak

$$f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \overset{f \text{ je ryze konv.}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)\underbrace{f(\hat{y})}_{=f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

Což je ale spor, protože mám nějakou funkční hodnotu bodu úsečky mezi $\hat{x}$ a $\hat{y}$ ostře menší jak funkční hodnotu bodu $\hat{x}$. To ale nemůže nastat, protože jako body minima funkce f na C musí mít stejnou hodnotu. Body $\hat{x}$ a $\hat{y}$ musí tedy nutně být stejné body. $\square$

4.10 Věta o konvexitě a první derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

(a) f je konvexní na C právě tehdy, když pro každé $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y).$$

(b) f je ryze konvexní na C právě tehdy, když pro každé dva různé body $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle < f(y).$$

Důkaz (b) vynecháme.

Důkaz (a).

„$\Rightarrow$“: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in (0, 1]$.

$$f(x + \lambda(y - x)) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \overset{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) = f(x) + \lambda[f(y) - f(x)]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda}}_{\substack{=\langle \nabla f(x), y - x\rangle \text{ pro } \lambda \to 0_+ \\ \text{z definice směrové derivace}}} \leq f(y) - f(x). \quad \square$$

„$\Leftarrow$“: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$.

$z := \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$
Z předpokladu:

$$f(z) + \langle \nabla f(z), x - z\rangle \leq f(x) \quad / \cdot \lambda \tag{1}$$
$$f(z) + \langle \nabla f(z), y - z\rangle \leq f(y) \quad / \cdot (-\lambda) \tag{2}$$

Pronásobením a sečtením dostaneme:

$$f(z) + \lambda\langle \nabla f(z), \underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y}_{z} - z\rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$\Rightarrow f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Což ale po dosazení za z je přesně ta nerovnost, která říká, že f je konvexní. $\square$

4.11 Věta o konvexitě a druhé derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^2(\Omega)$. Potom platí:

(a) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ positivně semidefinitní matice, pak f je konvexní na C.

(b) Jestliže f je konvexní na C a C je otevřená, potom $\nabla^2 f(x)$ je positivně semidefinitní matice pro každé $x \in C$.

(c) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ positivně definitní matice, pak f je ryze konvexní na C.

Důkaz (a).

Ať $x, y \in C$.

Taylorův polynom: existuje $\xi \in \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\} \subseteq C$ tak, že

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\left\langle \nabla^2 f(\xi)(y - x), y - x\right\rangle}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

Což je přesné znění věty o konvexitě a první derivaci. Tedy f je nutně konvexní na C.

Důkaz (b).

Cíl: $\langle \nabla^2 f(x)y, y\rangle \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$

Ať $x \in C, y \in \mathbb{R}^n$.

Pak C otevřená $\Rightarrow$ existuje $\delta > 0$ tak, že $x + \alpha y \in C$ $\forall \alpha \in (0, \delta]$.

Taylorův polynom:

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha\langle \nabla f(x), y\rangle + \frac{1}{2}\alpha^2\langle \nabla^2 f(x)y, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2\omega(\alpha y),$$

kde w má nulovou limitu v 0.

Použijme fakt, že f je konvexní:

$$f(x+\alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y\rangle$$

Když tedy dosadíme:

$$f(x) + \alpha\langle \nabla f(x), y\rangle + \frac{1}{2}\alpha^2\langle \nabla^2 f(x)y, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2\omega(\alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y\rangle$$

Upravíme a podělíme výrazem $\frac{1}{2}\alpha^2$ $(\alpha > 0)$.

$$\langle \nabla^2 f(x)y, y\rangle + \underbrace{2\|y\|^2\omega(\alpha y)}_{\to 0 \text{ pro } \alpha \to 0_+} \geq 0$$

V limitě $\alpha \to 0_+$ tedy máme $\langle \nabla^2 f(x)y, y\rangle \geq 0$, což je přesně to, co jsme chtěli. $\square$

Poznámka. Nutnost otevřenosti C je velmi důležitá!

Důkaz (c). Podobně jako (a).

4.12 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x,y) = x^2 - y^2$ je konvexní na $\mathbb{R} \times \{0\}$. ($\to$ množina $\mathbb{R} \times \{0\}$ není otevřená, jedná se o přímku)

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ je indefinitní, tedy funkce $f(x,y)$ není konvexní.

4.13 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ je ryze konvexní.

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \to 2 > 0$, $\det \nabla^2 f(x,y) = 4 - 1 > 0 \implies$ dle Sylvesterova kritéria je $\nabla^2 f(x,y)$ positivně definitní.

A podle bodu (c) věty o konvexitě a druhé derivaci můžeme říct, že funkce f je ryze konvexní.

5 Pátý týden

5.1 Kužel přípustných směrů

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in M$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve přípustný směr množiny M v bodě x, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $x + \alpha d \in M$.
- Množina $\mathcal{F}(M; x)$ všech přípustných směrů množiny M v bodě x se nazývá kužel přípustných směrů množiny M v bodě x.

$\mathcal{F}(M; x) \neq \emptyset$.
Je-li $x \in \operatorname{int}(M)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \mathbb{R}^n$.
Je-li M konečná (neprázdná), pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

5.2 Přípustné směry poklesu

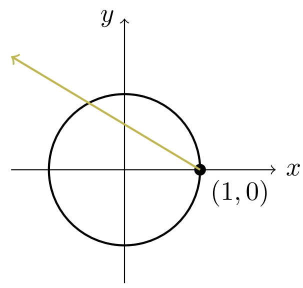
Mějme

(a) Je-li $M = S(0; 1)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

(b) Je-li $C = B(0; 1)$ a $\hat{x} = (1, 0)^T$, pak

$$F(C; \hat{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) $M = S(0; 1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1 \right\}$



Úvaha: Polopřímka z bodu $(1, 0)$ projde maximálně $2\times$ skrz kružnici.

Ať $d \neq 0 \in \mathbb{R}^2$

$$1 = \|x + \alpha d\|^2 = \langle x + \alpha d, x + \alpha d \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_{1} + 2\alpha \langle x, d \rangle + \alpha^2 \|d\|^2$$

$$\to 0 = \alpha(2\langle x, d \rangle + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2\langle x, d \rangle}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}(M; x) = \{0\}$$

(b) Uvažujme kouli

$M = S(0; 1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \right\}$; $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$1 \geq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\rangle = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2}_{1} + 2\alpha \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d \right\rangle + \alpha^2 \|d\|^2$$

$$\to 0 \geq \alpha(2d_1 + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2d_1}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}\left(M; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_1 < 0 \right\}.$$

5.3 Kužel směrů poklesu

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ a $f : D \to \mathbb{R}$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve směr poklesu funkce f v bodě x, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $f(x + \alpha d) < f(x)$.
- Množina $\mathcal{D}(f; x)$ všech směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel směrů poklesu funkce f v bodě x.

Definice implicitně obsahuje podmínku $[x, x + \delta d] \subseteq D$.

5.4 Nutná geometrická podmínka lokálního extrému

Jestliže x je bod lokálního minima funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $M \subseteq D$, pak $\mathcal{F}(M; x) \cap D(f; x) = \emptyset$.

Důkaz. Sporem.
Ať ne, tj. existuje $d \in \mathcal{F}(M, x) \cap D(f, x)$.
Pak: $f(x + \alpha d) < f(x)$ a $x + \alpha d \in M$ pro všechna $\alpha > 0$ dostatečně malá.
Tedy spor s tím, že x je bod lokálního minima f na M. $\square$

5.5 Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve silný směr poklesu funkce f v bodě x, jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$.
- Množina $\mathcal{D}_0(f; x)$ všech silných směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel silných směrů poklesu funkce f v bodě x.

Kužel $\mathcal{D}_0(f; x)$ je množina všech řešení lineární nerovnice

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

$\mathcal{D}_0(f; x)$ je konvexní kužel.

5.6 Tvrzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

(a) Je-li $d \in \mathcal{D}(f; x)$, potom $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$.

(b) $\mathcal{D}_0(f; x) \subseteq \mathcal{D}(f; x)$ (tj. jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, pak $d \in \mathcal{D}(f; x)$).

Důkaz.
(a) Ať $d \in D(f; x)$.

$$\frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} < 0 \text{ pro } \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.}$$

$$\implies \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x + \alpha d - f(x))}{\alpha}}_{= \langle \nabla f(x), d \rangle} \leq 0 \quad \square$$

(b) Ať $\alpha > 0$.

$$f(x+\alpha d) = f(x) + \alpha\langle \nabla f(x), d\rangle + \alpha\|d\|\overbrace{\omega(\alpha d)}^{\text{zbytek}}$$

$$\frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} = \underbrace{\langle \nabla f(x), d\rangle + \|d\|\omega(\alpha d)}_{\substack{\to\langle \nabla f(x),d\rangle \text{ pro } \alpha\to 0^+ \\ \text{a navíc } \langle \nabla f(x),d\rangle<0}} \implies \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} < 0 \text{ pro všechna } \alpha < 0 \text{ dostatečně malá.}$$

5.7 Fermatova věta - nutná podmínka optimality

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in M$ je bodem lokálního minima funkce $f \in C^1(\Omega)$ na M. Potom platí:

(a) $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ (tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d\rangle \geq 0$ pro všechny $d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$).

(b) Jestliže $\hat{x} \in \operatorname{int}(M)$, pak $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.
(a) Víme, že $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}(f; \hat{x}) = \emptyset$.
Pak:

$$\mathcal{D}_0(f, \hat{x}) \subseteq D(f, \hat{x}) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x}) = \emptyset. \quad \square$$

(Tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d\rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M, \hat{x})$)

(b)

$$\hat{x} \in \operatorname{int}(M) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) = \mathbb{R}^n \overset{(a)}{\implies} \langle \nabla f(\hat{x}), d\rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Ať $d = -\nabla f(\hat{x})$.

$$-\|\nabla f(\hat{x})\|^2 \geq 0 \implies \nabla f(\hat{x}) = 0. \quad \square$$

5.8 Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f \in C^1(\Omega)$ je konvexní na $C \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in C$. Potom platí:

(a) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x\in C} f(x)$ právě tehdy, když $\mathcal{F}(C; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$.

(b) Předpokládejme, že $\hat{x} \in \operatorname{int}(C)$. Pak $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x\in C} f(x)$ právě tehdy, když $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.

(a)
„$\Rightarrow$“: Víme. Když máme bod minima, je určitě bodem lokálního minima $\implies$ průnik je prázdný.
„$\Leftarrow$“: Sporem.
Ať existuje $y \in C : \overbrace{f(y) < f(\hat{x})}^{f(y)-f(\hat{x})<0}$.
Ať $d = y - \hat{x} (\neq 0) \in \mathcal{F}(C, \hat{x})$.
Cíl: $d \in \mathcal{F}(C, \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x})$.

$$\underbrace{\hat{x} + \alpha}_{\hat{x}+\alpha(y-\hat{x})=\alpha y+(1-\alpha)\hat{x}} d \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1] \text{ z konvexity } C.$$

f je konvexní na $C \iff f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), \overbrace{y - \hat{x}}^{d}\rangle \leq f(y). \implies \langle \nabla f(\hat{x}), d\rangle \leq f(y) - f(\hat{x}) \underset{\text{z předp.}}{<} 0.$
To je ale spor, protože byl předpoklad, že průnik je prázdný. My jsme ale ukázali, že není. $\square$

(b)
„$\Rightarrow$“ Víme.

„$\Leftarrow$“ Ať $\nabla f(\hat{x}) = 0$.
Pak $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n = \mathcal{F}(C; \hat{x})$. Nemáme tedy žádný směr poklesu $\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$. $\square$

5.9 Hledání bodu minima

$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + x - 2y$

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ ... dle Sylvesterova kritéria je positivně definitní.
$\Longrightarrow$ f je nutně (ryze) konvexní.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 1 \\ 6y - 2x - 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{rl} 2x - 2y = & -1 \\ -2x + 6y = & 2 \end{array} \to y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

5.10 Věta o podmínkách optimality 2. řádu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$, $\hat{x} \in \operatorname{int}(M)$ a $f \in C^2(\Omega)$. Potom platí:

(a) Jestliže $\hat{x}$ je bod lokálního minima funkce f na M, pak $\nabla^2 f(\hat{x})$ je positivně semidefinitní.

(b) Jestliže $\nabla f(\hat{x}) = 0$ a $\nabla^2 f(\hat{x})$ je positivně definitní, pak $\hat{x}$ je bod ostrého lokálního minima.

Důkaz vynecháme.

5.11 Příklad použití věty o podmínkách optimality 2. řádu

Je dána funkce
$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 2y.$$
Určete lokální extrémy funkce.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y + x + 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} x^2 + y = 0 \\ y + x + 2 = 0 \end{array} \to x^2 - x - 2 = 0 \to (x + 1)(x - 2) = 0$$

Podezřelé body jsou:

- $x = -1 \Longrightarrow y = -1$
- $x = 2 \Longrightarrow y = -4$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(-1, -1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ... dle Sylvesterova kritéria není positivně semidefinitní, není ani negativně semidefinitní, je indefinitní. Dle věty o podmínkách optimality 2. řádu není lokálním minimem ani maximem.
$\nabla^2 f(2, -4) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ... dle Sylvesterova kritéria je positivně definitní. V bodě $(2, -4)$ se tedy nachází (ostré) lokální minimum, nikoliv však globální.

5.12 Omezení ve tvaru nerovnosti - aproximace $\mathcal{F}(M;\hat{x})$

Ať $g_1,\dots,g_k$ jsou reálné funkce definované na množině $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $M=\{x\in\Omega\mid g_1(x)\le 0,\dots,g_k(x)\le 0\}$ a $x\in M$. Označme si:

- Množina $\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k;x\right):=\{i\in\{1,\dots,k\}\mid g_i(x)=0\}$ se nazývá indexová množina aktivních omezení v bodě x.
- Jestliže $i\in\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k;x\right)$, pak $g_i(x)\le 0$ se nazve **aktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě x.
- Jestliže $i\notin\mathcal{I}\left((g_i)_{i=1}^k;x\right)$, pak $g_i(x)\le 0$ se nazve **neaktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě x.

Poznámka. V textu dále se obvykle bude uvádět pouze $\mathcal{I}(x)=\{i\in\{1,\dots,k\}\mid g_i(x)=0\}$. Když přeindexujeme funkce $g_i(x)$, znamenalo by to něco jiného, proto se u $\mathcal{I}$ uvádí $\left((g_i)_{i=1}^k;x\right)$, ale my většinou přeindexovávat nebudeme.

Definice.

Nechť $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1,\dots,g_k\in C^1(\Omega)$, $x\in M$ a $M=\{x\in\Omega\mid g_1(x)\le 0,\dots,g_k(x)\le 0\}$. Definujme množinu

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\left((g_i)_{i=1}^k;x\right)&:=\{d\in\mathbb{R}^n\mid\langle\nabla g_i(x),d\rangle\le 0\quad\forall i\in\mathcal{I}(x)\}\\&=\bigcap_{i\in\mathcal{I}(x)}\{d\in\mathbb{R}^n\mid\langle\nabla g_i(x),d\rangle\le 0\}\end{aligned}$$

jako aproximaci $\mathcal{F}(M;\hat{x})$.

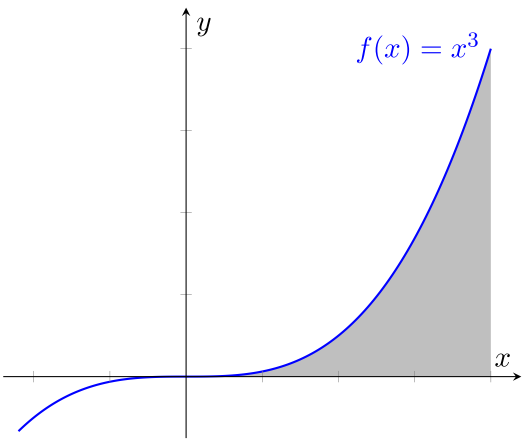
5.13 Příklad výpočtu $\mathcal{G}$ a $\mathcal{F}$

Je dána množina

$$M=\left\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2\mid y-x^3\le 0,-y\le 0\right\}$$

a bod $\hat{x}=(0,0)^T$. Určete množiny $\mathcal{F}(M;\hat{x})$ a $\mathcal{G}((g_i)_{i=1}^k;\hat{x})$.

Nákres množiny.



Výpočet $\mathcal{F}(M;\hat{x})$.

? $0+\alpha d\in M\quad\forall\alpha>0$ dostatečně malé.

$$\alpha d_2-\alpha^3 d_1^3\le 0 \tag{3}$$
$$-\alpha d_2\le 0\quad\forall\alpha>0\text{ dostatečně malé.} \tag{4}$$

$$(4)\implies d_2\ge 0$$
$$(3)\implies d_2\le\alpha^2 d_1^3\quad\forall\alpha>0\text{ dostatečně malé.}$$

$d_2\ge 0\implies d_1\ge 0$ a protože to platí $\forall\alpha>0$ dostatečně malá, pak $d_2=0$, protože si můžu vzít libovolné malé, tedy i limitně blízké nule, α.

$\implies\mathcal{F}(M;(0,0))=\left\{\begin{bmatrix}d_1\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,d_1\ge 0\right\}.$

Výpočet $G\left((g_i)_{i=1}^k; \hat{x}\right)$.

Označme si $g_1(x,y) = y - x^3$ a $g_2(x,y) = -y$.
Pak:

$$\left.\begin{aligned} \langle \nabla g_1(0), d\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}\right\rangle = d_2 \leq 0 \\ \langle \nabla g_1(0), d\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}\right\rangle = d_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} d_2 = 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2), (0,0)) = \left\{ \begin{bmatrix}d_1\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, d_1 \in \mathbb{R} \right\} \to \mathcal{G} \text{ je větší jak } \mathcal{F}.$$

Protože $\mathcal{G}$ je pouze aproximací $\mathcal{F}$, může a bude se stávat, že $\mathcal{G}$ bude větší jak $\mathcal{F}$.

Přidejme si další, fakticky zbytečnou, podmínku navíc.

$M = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y - x^3}_{g_1(x,y)} \leq 0, \underbrace{-y}_{g_2(x,y)} \leq 0, \underbrace{-x - y}_{g_3(x,y)} \leq 0\}$

$$\langle \nabla g_3(0), d\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}\right\rangle = -d_1 - \underbrace{d_2}_{=0} \leq 0 \implies -d_1 \leq 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2, g_3), (0,0)) = \left\{ \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} \mid d_1 \geq 0 \right\}.$$ Což odpovídá přesně množině $\mathcal{F}$.

Je tedy očividné, že $\mathcal{G}$ závisí na popisu množiny.

5.14 Ukázka, že aproximací $\mathcal{F}$ lze zkazit prázdnost průniku

Mějme optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } & x + y \\ \text{za podmínek } & y - x^3 \leq 0, \\ & -y \leq 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(f; 0) &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(0), d\rangle < 0\} \\ &\underset{\nabla f(0) = (1,1)}{=} \left\{ \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} \mid d_1 + d_2 < 0 \right\} \ldots \text{ například } \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \in \mathcal{D}_0(f; 0), \text{ ale } \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \in \mathcal{G}(x)! \end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{G}(\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) \neq \emptyset \implies$ nahrazením podmínek optimality můžeme zkazit prázdnost průniku, protože $\mathcal{G}$ může být větší jak $\mathcal{F}$.

5.15 Věta o nutných KKT podmínkách

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$,

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0\}$$

a $\hat{x} \in M$. Jestliže $\overline{\mathcal{F}(M;\hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$ a $\hat{x}$ je bod lokálního minima na f na M, pak existuje $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T \in \mathbb{R}^k$ tak, že

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \Sigma_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0, \\ \mu_i g_i(\hat{x}) = 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i \ge 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Důkaz.

- $\mathcal{I}(\hat{x}) = \emptyset \implies \hat{x} \in \operatorname{int}(M) \implies \nabla f(\hat{x}) = 0$ z Fermatovy věty.
  $\to$ volba $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$. Pak KKT podmínky splněny.
- $\emptyset \ne \mathcal{I}(\hat{x}) = \{1, \dots, l\}$
  Víme, že máme bod lokálního minima $(\hat{x}) \overset{\text{Fermatova}}{\underset{\text{věta}}{\Longrightarrow}} \mathcal{F}(M;\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f;\hat{x}) = \emptyset$,
  tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \ge 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M;\hat{x})$.

  Teď chceme dokázat, že platí $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \ge 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$.

  Protože $\overline{\mathcal{F}(M;\hat{x})}$ koinciduje s $\mathcal{G}(\hat{x})$ a ze spojitosti skalárního součinu plyne, že $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \ge 0 \quad \forall d \in \underbrace{\overline{\mathcal{F}(M;\hat{x})}}_{\mathcal{G}(\hat{x})}$.

  To tedy znamená $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \ge 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$. Z toho plyne, že neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$, pro který platí:

  $$\begin{aligned} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle < 0 \dots \text{ tj. } \langle -\nabla f(\hat{x}), d \rangle > 0 \\ \left.\begin{aligned} \langle \nabla g_1(\hat{x}), d \rangle \le 0 \\ \vdots \\ \langle \nabla g_l(\hat{x}), d \rangle \le 0 \end{aligned}\right\} A^T d \le 0, \text{ kde } A = (\nabla g_1(\hat{x}), \dots, \nabla g_l(\hat{x})) \end{aligned}$$

  No a z Farkasova lemma tedy nutně platí: ex. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)^T \in \mathbb{R}^l_+ : \underbrace{A\mu}_{\sum_{i=1}^l \mu_i \nabla g_i} = -\nabla f(\hat{x})$.

  $\to$ volme dále $\mu_{l+1}, \dots, \mu_k = 0$. Pak

  $$\begin{aligned} -\nabla f(\hat{x}) = \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), \\ \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i \ge 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

  A to jsou přesně KKT podmínky. $\square$

5.16 Příklad použití KKT podmínek

$$\begin{aligned}
\text{minimalisujte } & \underbrace{x+y}_{f(x,y)} \\
\text{za podmínek } & \underbrace{x}_{g_1(x,y)} \geq 0, \\
& \underbrace{y}_{g_2(x,y)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Určete KKT body.

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nabla g_1(x,y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla g_2(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

KKT podmínky:

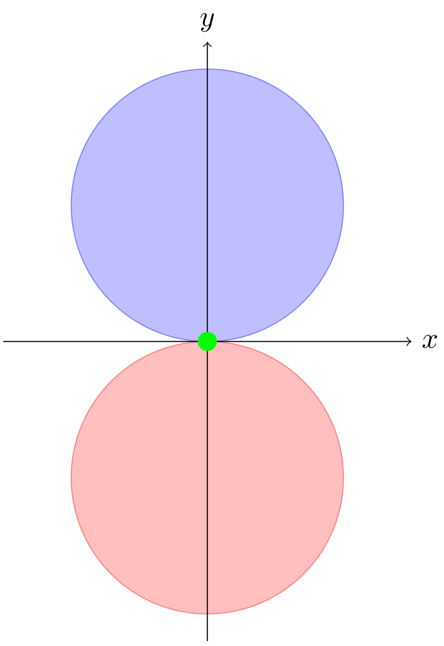
$$\begin{aligned}
1 + \mu_1(-1) + \mu_2(0) &= 0 \quad && \rightarrow \mu_1 = 1 \\
1 + \mu_1(0) + \mu_2(-1) &= 0 \quad && \rightarrow \mu_2 = 1 \\
\mu_1(-x) &= 0 \\
\mu_2(-y) &= 0 \\
\mu_1, \mu_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Jediný KKT bod je tedy $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a jedná se o bod minima.

5.17 Příklad, že KKT podmínky vždy nenaleznou všechny body

$$\begin{aligned}
\text{minimalisujte } & x \\
\text{za podmínek } & x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \\
& x^2 + (y+1)^2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Nákres.



Přípustná množina: $M = \{0\} \rightarrow$ určitě konvexní množina.

KKT podmínky:

$$1 + \mu_1(2 \cdot 0) + \mu_2(2 \cdot 0) = 0 \times$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow (0,0)$ není KKT bod i když je úloha konvexní a bod $(0,0)$ je očividně bodem minima.

5.18 Věta o postačujících KKT podmínkách

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ jsou konvexní funkce na $C = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0\}$. Jestliže $\hat{x} \in C$ je KKT bod, pak $\hat{x}$ je bod minima funkce f na C.

Důkaz. Ať $x\ inC$.
Cíl: $f(x) - f(\hat{x}) \ge 0$ (= $\hat{x}$ je minimum)

Charakterisace pomocí tečné nadroviny: $f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x}\rangle \le f(x) \quad x, \hat{x} \in C$

$$f(x) - f(\hat{x}) \underset{\substack{f \text{ je konvexní} \\ \text{na } C \subseteq \Omega}}{\ge} \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x}\rangle \overset{\text{podmínka}}{\underset{\text{stacionarity}}{=}} \langle -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x}\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} -\langle \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x}\rangle \mu_i = \sum_{i=1}^{n} (g_i(\hat{x}) - g_i(x))\mu_i \overset{\text{podmínka}}{\underset{\text{komplementarity}}{=}} -\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mu_i}_{\substack{\text{podmínka}\\ \text{nezápornosti}}} \overbrace{g_i(x)}^{\le 0\, \forall x \in C} \ge 0. \quad \square$$

5.19 Afinní podmínka regularity

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0\}.$$

Řekněme, že $(g_i)_{i=1}^k$ splňuje afinní podmínku regularity, jestliže $g_1, \dots, g_k$ jsou afinní.

5.20 Slaterova podmínka regularity

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0\}.$$

Řekněme, že $(g_i)_{i=1}^k$ splňuje Slaterovu podmínku regularity, jestliže $g_1, \dots, g_k$ jsou konvexní na Ω a existuje $x \in \Omega$ tak, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $g_i(x) < 0$.

5.21 Použití podmínek regularity k ověření KKT podmínek

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } & 2x^2 + y^2 \\ \text{za podmínek } & x^2 + y^2 - 1 \le 0, \\ & -x \le 0. \end{aligned}$$

Afinní podmínka splněna není, ověříme Slaterovu.

Množina je očividně konvexní a zároveň zvolme $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Omega$. Pak $g_i(x) < 0$, Slaterova podmínka je tedy očividně splněna.

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\Longrightarrow$ KKT podmínky:

$$
\begin{aligned}
4x + \mu_1 2x + \mu_2(-1) = 0 &\leftrightarrow 2x(2+\mu_1) - \mu_2 = 0 \\
2y + \mu_1 2y + \mu_2 0 = 0 &\Leftrightarrow 2y(1+\mu_1) = 0 \underset{\mu_1 \geq 0}{\Longrightarrow} y = 0 \\
\mu_1(x^2 + y^2 - 1) = 0& \\
\mu_2(-x) = 0& \\
\mu_1, \mu_2 \geq 0&
\end{aligned}
$$

$y = 0$:

$$
\left.\begin{aligned}
&2x(2+\mu_1) = \mu_2 \\
&\mu_1(x^2+1) = 0 \\
&\mu_2 x = 0 \\
&\mu_1, \mu_2 \geq 0
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&x \neq 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow 2 + \mu_1 = 0 \ldots \text{ spor s } \mu_1 \geq 0. \\
&x = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Existuje bod $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pro který jsou splněny nutné a postačující KKT podmínky.

6 Šestý týden

6.1 Pomocný důkaz vlastnosti infima

$$\inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) = \inf_{x\in M} h_1(x) + \inf_{y\in N} h_2(x)$$

Důkaz.
„$\geq$“:

$$\inf_{x\in M} h_1(x) \leq h_1(t) \quad \forall t \in M$$
$$\inf_{y\in N} h_2(y) \leq h_2(t) \quad \forall t \in N$$

$$\implies \inf_{x\in M} h_1(x) + \inf_{y\in N} h_2(y) \leq \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \square$$

„$\leq$“:

$$\inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) + h_2(s) \quad \forall \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \in M \times N$$

$$\text{což lze upravit: } -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x\in M} h_1(x) \quad \forall s \in N.$$

A to samé lze ukázat i pro h_2:

$$-h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_2(s) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{y\in N} h_2(y) \quad \forall t \in M.$$

Teď sečtěme tyto dvě nerovnice:

$$-h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x\in M} h_1(x) + \inf_{y\in N} h_2(y) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

Tedy stačí dokázat, že

$$\inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq -h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$
$$0 \leq -h_1(t) - h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$
$$h_1(t) + h_2(s) \leq \inf_{(x,y)^T \in M\times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

6.2 Dualita - motivační příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte } 2x + 3y \\ &\text{za podmínek } 1 - x - y \leq 0, \\ &\qquad\qquad x, y \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Označme $f(x, y) = 2x + 3y$, $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [0, 2]^2 \,\middle|\, 1 - x - y \leq 0 \right\}$ a $\hat{f} = \min_{x\in M} f(x)$.

Odhadněme min funkce ze spoda.

Pro $(x, y)^T \in M$:

$$f(x, y) \geq f(x, y) + g_1(x, y) = 2x + 3y + (1 - x - y) = x + 2y + 1 \geq 1.$$

A protože $\hat{f} = \min f(x)$, nutně musí platit $\hat{f} \geq 1$.

Zkusme teď jiný odhad.

$$f(x, y) \geq f(x, y) + 2g_1(x, y) = 2x + 3y + 2(1 - x - y) = 2y + 1 \geq 2.$$

Nalezli jsme lepší odhad: $\hat{f} \geq 2$. Jak tedy správně určit „nejlepší“ možný dolní odhad $\hat{f}$?

Definujme si

$$\begin{aligned} L(x, y, \mu) &= 2x + 3y + \mu(1 - x - y), \\ \varphi(\mu) &= \min_{(x,y)^T \in [0,2]^2} L(x, y, \mu). \end{aligned}$$

Pro každé $\mu \geq 0$ pak platí:

$$\varphi(\mu) = \min_{(x,y)^T \in \Omega} L(x, y, \mu) \leq \min_{(x,y)^T \in M} L(x, y, \mu) \leq \hat{f}$$

„Optimální“ dolní odhad $\hat{f}$ pomocí φ vede na úlohu

$$\begin{gathered} \text{maximalisujte } \varphi(\mu), \\ \text{za podmínek } \mu \geq 0. \end{gathered}$$

Tu budeme nazývat duální úlohou.

Hodnota $\max \varphi(\mu)$ na $[0, +\infty]$ je $\hat{\varphi} \implies \hat{\varphi} \leq \hat{f}$.

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden