

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec
Praha, 2025



Obsah

	Strana
1 První týden	2
1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima	2
1.2 Hledání přípustných množin	2
1.3 Hledání přípustných množin	2
1.4 Uzavřená úsečka	3
1.5 Je nadrovina konvexní?	3
1.6 Je uzavřený poloprostor konvexní?	3
1.7 Je uzavřená koule konvexní?	3
1.8 Je okolí konvexní?	3
1.9 Je průnik množin konvexní?	4
1.10 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu	4
1.11 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní	4
1.12 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní	4
1.13 Důkaz, že kartézský součin je konvexní	6
2 Druhý týden	7
3 Třetí týden	8
4 Čtvrtý týden	9
5 Pátý týden	10
6 Šestý týden	11
7 Sedmý týden	12
8 Osmý týden	13
9 Devátý týden	14
10 Desátý týden	15
11 Jedenáctý týden	16
12 Dvanáctý týden	17
13 Třináctý týden	18

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/A8B010GT>.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem \LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zprehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$
- (2) jestliže $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \xLeftrightarrow{(-1)} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$
- (2) Ať $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk } \frac{3}{x} \leq 1, \\ &x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

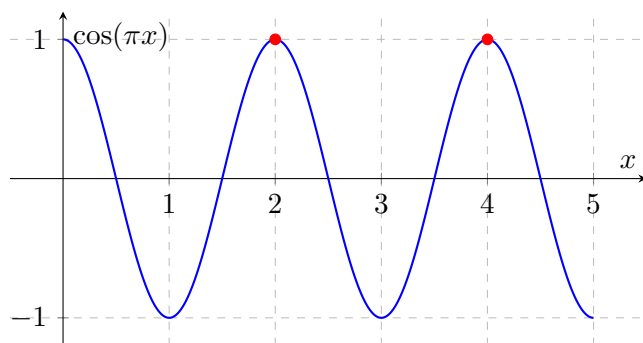
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } \ln x \\ &\text{za podmíněk } x \leq 5, \\ &\cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$

1.4 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y .

1.5 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Atť $x, z \in H(y, \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy chceme dokázat, že úsečka mezi dvěma libovolnými body z množiny také leží v množině.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$$

1.6 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.7 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Atť $x, y \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.8 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Atť $x, y \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| < r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v okolí.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.9 Je průnik množin konvexní?

Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} M_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in M_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} M_i$. \square

1.10 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou konvexní množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.

$\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

1.11 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, f je afinní \iff pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

" \implies ": At $f(x) = Ax + b$, kde $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

" \impliedby ": At $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.

Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání.

(1) At $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) At $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Cíl: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] = \\ &= f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square \end{aligned}$$

1.12 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ afinní a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = [\underbrace{f(x)}_a, \underbrace{f(y)}_b] \subseteq f(C). \quad \square$

1.13 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou konvexní množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

" \Rightarrow ": Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

" \Leftarrow ": Definujme afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\Rightarrow C_1$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2 , zde zdefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\Rightarrow C_2$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. \square

2 Druhý týden

3 Třetí týden

4 Čtvrtý týden

5 Pátý týden

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden