České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec

Praha, 2025

https://github.com/knedl1k/A8B01OGT

Obsah

Strana

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/A8B01OGT`.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u přednáškových příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \to \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

(1) $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x) \iff \hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmax}} (-f(x))$,

(2) jesliže $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min\limits_{x \in M} f(x) = -\max\limits_{x \in M}(-f(x))$.

Důkaz.

(1) $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \underset{\cdot(-1)}{\iff} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmax}}(-f(x))$. $\square$

(2) Ať $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min\limits_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \overset{(1)}{=} -\max\limits_{x \in M}(-f(x))$. $\square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

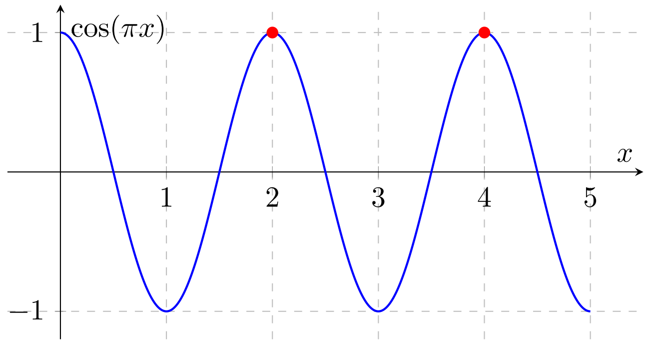
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte } & \ln x \\ \text{za podmínek } & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$D(f) = (0, \infty)$.

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmínek: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1)$.



Očividně tedy $M = \{2, 4\}$.

Úvahou pak lze uhodnout $\underset{x \in M}{\operatorname{argmax}} \ln x = \{4\}$.

1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého invetičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$
\begin{aligned}
\text{maximalisujme } & \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\
\text{za podmínek } & x + y = 100, \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25}\right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0
$$

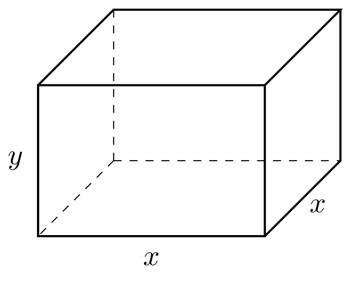
Zbavme se zlomků:

$$
\begin{aligned}
-50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\
(150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\
(150 - y - 4y - 25) - (150 - y + 4y + 25) &= 0 \\
(125 - 5y)(175 + 3y) &= 0 \\
y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3
\end{aligned}
$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \rightarrow x = 75$.

1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm^3 tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$
\begin{aligned}
\text{minimalisujme } & 4xy + x^2 \\
\text{za podmínek } & x^2 y = 10, \\
& x, y > 0.
\end{aligned}
$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(4x\frac{10}{x^2}+x^2\right)=\frac{-40}{x^2}+2x \overset{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40+2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x=\sqrt[3]{20} \to y=\frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V $\mathbb{R}^n$ jsou dány množiny bodů $A=\{a_1,\dots,a_k\}$ a $B=\{b_1,\dots,b_t\}$. Ať $w\in\mathbb{R}^n$ a $\lambda\in\mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x,w\rangle+\lambda=-1$.

(a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{||w||}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{||w||}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2.

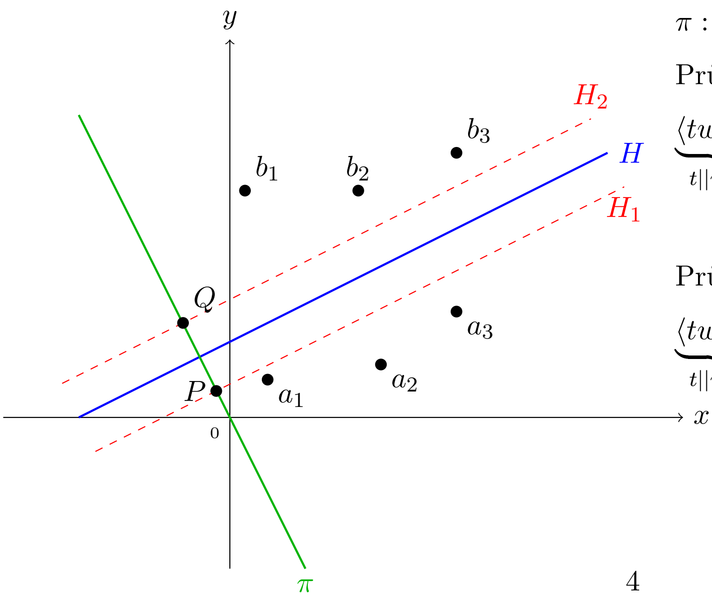
(b) Iterpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} \text{maximalisujte } g(w,\lambda) &= \frac{2}{||w||} \\ \text{za podmínek } \langle a_i,w\rangle+\lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i=1,\dots,k, \\ \langle b_i,w\rangle+\lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j=1,\dots,l. \end{aligned}$$

(c) Ukažte, že $(\hat{w},\hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } h(w,\lambda) &= \frac{1}{2}||w||^2 \\ \text{za podmínek } \langle a_i,w\rangle+\lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i=1,\dots,k, \\ \langle b_i,w\rangle+\lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j=1,\dots,l. \end{aligned}$$

(a)



$\pi: x=t\cdot w, t\in\mathbb{R}$.

Průsečík Q:

$\underbrace{\langle tw,w\rangle}_{t||w||^2}+\lambda=1 \to t=\frac{1-\lambda}{||w||^2} \Rightarrow Q=\frac{1-\lambda}{||w||^2}w$

Průsečík P:

$\underbrace{\langle tw,w\rangle}_{t||w||^2}+\lambda=-1 \to t=\frac{-1-\lambda}{||w||^2} \Rightarrow P=\frac{-1-\lambda}{||w||^2}w$

Pak vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je dána rozdílem průsečíků P a Q v normě. Tedy:

$$||Q - P|| = \left\| \frac{1-\lambda}{||w||^2} w + \frac{1+\lambda}{||w||^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{||w||^2} \right\| = \frac{2}{||w||^2} ||w|| = \frac{2}{||w||}.$$

To je príma, to jsme přesně chtěli. $\square$

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení $\frac{1}{2}$, protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

1.7 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y.

1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Ať $x, z \in H(y, \alpha), \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle definice.

$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$

$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$

1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y, které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x - a}_{\leq r}|| + (1 - \lambda)||\underbrace{y - a}_{\leq r}|| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

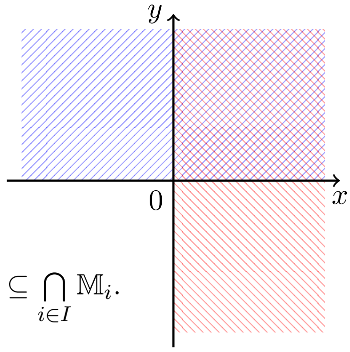
Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| < r$. Dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \\ &\leq \lambda||\underbrace{x - a}_{<r}|| + (1 - \lambda)||\underbrace{y - a}_{<r}|| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve $\mathbb{R}^2$:



Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) konvexní množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$.

Visuálně je průnik nekonvexní.

Důkaz.

Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x,y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x,y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i$.

□

1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0,1]$ a $(0,1)$ jsou konvexní množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.
$\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in R^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pak f je afinní $\iff$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = A[\lambda x + (1-\lambda)y] + b = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay + \lambda b + (1-\lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax+b)}_{f(x)} + (1-\lambda) \underbrace{(Ay+b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Cíl: Ukázat, že f je afinní, tedy $f(x) = Ax + b$.
Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.
Pokud je f afinní, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax, tedy být lineární.
Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) Ať $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in R$.
Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha\varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Cíl: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \overset{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afinní a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = [\underbrace{f(x)}_{a}, \underbrace{f(y)}_{b}] \subseteq f(C)$. $\square$

1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou konvexní množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle definice.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda)c \\ (1-\lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1-\lambda)c \\ \lambda b + (1-\lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Definujme afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies$ C_1 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2, zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies$ C_2 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. $\square$

1.17 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice A, jestliže

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být $\underbrace{\text{symetrická}}_{Q=Q^T}$.

Pak platí:

$$\langle Qx, x\rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je positivně semidefinitní.}$$
$$\langle Qx, x\rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je positivně definitní.}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.
Matice je indefitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že Q je negativně (semi)defitní, jestliže $(-Q)$ je positivně (semi)defintní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit positivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \to |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0.$ $\to$ podezření na positivní semidefinitnost.

Hlavní minory jsou $Q_{\{1\}}$ a $Q_{\{1,2\}}$.
Menší minory: Q_I, kde $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ neprázdná. Aby matice byla positivně semidefinitní, tak $\det Q_I \geq 0$.

Tedy: $Q_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$. $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$.

Tedy matice $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ je positivně semidefinitní.

(b) $\begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0.$ Matice je positivně definitní.

(c) $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy det$Q = 0$.
$Q_{\{1\}} = 4 > 0$,
$Q_{\{2\}} = 1 > 0$,
$Q_{\{3\}} = 0 = 0$.
Tedy matice je jedině positivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Aby matice Q byla positivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být ≥ 0. Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice Q je indefinitní.

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy vlastnosti symetrických matic a určeme definitnost pro matici $(-Q)$.

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice $(-Q)$ je positivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0$.

$\implies (-Q)$ je positivně semidefinitní $\iff$ Q je negativně semidefinitní.

1.18 Existence matice

Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?

(c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

Zadefinujme si vlastnost skalárního součinu: $\langle a, b \rangle = b^T a$, kde $b^T = \left(b_1, \ldots, b_n\right), a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(a)Využijme zmíněné vlastnosti.

$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle$. $\square$

(b) Pozorování: Matice B je symetrická a matice C je antisymetrická.

Zvolme: $\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C &= \frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}\right\} B + C = A.$

$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C.\checkmark$

$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B.\checkmark \quad \square$

(c) $\langle Cx, x\rangle \stackrel{?}{=} 0$

$$\langle Cx, x\rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x\rangle \stackrel{-C=C^T}{=} -\langle x, Cx\rangle = -\langle Cx, x\rangle = 0.$$

Matice C tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$. $\square$

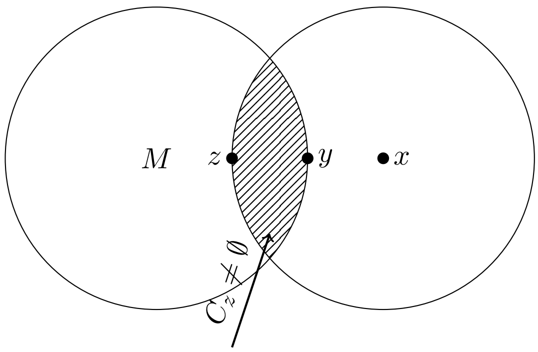
2 Druhý týden

2.1 Věta o nejlepší aproximaci

Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\operatorname{dist}(x; C) = ||x - \hat{y}||$.

Důkaz.

1. Existence
Cíl: Existuje bod minima
Úvaha:



M je obecná konvexní množina.
c x $R = ||x - z||$,
$Cz = M \cap B(x, R) = M \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||z - a|| \leq R\}$.
$\uparrow$
$\underbrace{\text{uzavřená, omezená}}_{\text{kompaktní}}$, neprázdná

Tedy $a \mapsto ||x - a||$ je spojitá.

$\Rightarrow$ Spojitost na kompaktní množině znamená, že f nabývá na C_z minima dle Weierstrassova kritéria.

Ať y je bod minima. Všechny body v M mají od x vzdálenost $\geq ||x - y||$. $\square$

2. Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| = ||x - b|| = \overbrace{\operatorname{dist}(x, M)}^{\delta}$, pak $a = b$.
Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.
Důkaz lemma:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2 + ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$$

$$= 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right). \quad \square$$

Důkaz jednoznačnosti:
Ať $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
Pak $\delta^2 \leq ||x - y||^2 = ||x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b||^2 = ||\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)||^2 = \frac{1}{4}||\underbrace{(x - a)}_{u} + \underbrace{(x - b)}_{v}||^2$

$$\overset{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4}\left[2\left(\underbrace{||x-a||^2}_{\delta^2} + \underbrace{||x-b||^2}_{\delta^2}\right) - \underbrace{||(x-a)+(x-b)||^2}_{b-a}\right] = \delta^2 - \frac{1}{4}||b-a||^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \underbrace{\frac{1}{4}||b-a||^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

2.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.

(2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2):
Ať $v_\lambda = y + \lambda(z-y)$, $\lambda \in (0,1]$.
Pak

$$||x-y||^2 \leq ||x-v_\lambda||^2 = ||x-y-\lambda(z-y)||^2 = \langle (x-y)-\lambda(z-y), (x-y)-\lambda(z-y)\rangle$$

$$||x-y||^2 \leq ||x-y||^2 - 2\lambda\langle x-y, z-y\rangle + \lambda^2||z-y||^2$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \leq \frac{\lambda}{2}||z-y||^2 \to 0 \text{ pro } \lambda \to 0^+$$

$$\Rightarrow \langle x-y, z-y\rangle \leq 0. \quad \square$$

(2) $\Rightarrow$ (1):
Ať $z \in C$.
Pak

$$0 \geq \langle x-y, z-y\rangle = \langle x-y, (z-x)+(x-y)\rangle = \langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2$$

$$\langle x-y, z-y\rangle + ||x-y||^2 \geq ||x-y||^2 - \underbrace{|\langle x-y, z-y\rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star$$

$$\star = ||x-y||^2 - ||x-y|| \cdot ||z-x||.$$

Je-li $x \neq y$, pak vydělíme: $||z-x|| \geq ||x-y||$.
Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \ldots$ triviální. $\square$

2.3 Koule?

2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

(1) $P_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

(2) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

(3) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x) a z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(1)
Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1. $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
2. $P_L(x+y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. : Ať $z \in L$. Pak

$$\langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle = \alpha\langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x)\rangle$$

$$\overset{\alpha\neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0}\langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot z}_{\in L} - P_L(x)\rangle$$

3 Třetí týden

4 Čtvrtý týden

5 Pátý týden

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden