

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Důkazy a řešené příklady

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec
Praha, 2025



Obsah

| | Strana |
|--|-----------|
| 1 Úvod do matematické optimalisace | 2 |
| 1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima | 2 |
| 1.2 Hledání přípustných množin | 2 |
| 1.3 Hledání přípustných množin | 2 |
| 1.4 Maximalisační úloha | 3 |
| 1.5 Minimalisační úloha | 3 |
| 1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami | 4 |
| 2 Konvexní množiny | 6 |
| 2.1 Uzavřená úsečka | 6 |
| 2.2 Je nadrovina konvexní? | 6 |
| 2.3 Je uzavřený poloprostor konvexní? | 6 |
| 2.4 Je uzavřená koule konvexní? | 6 |
| 2.5 Je okolí konvexní? | 7 |
| 2.6 Je průnik množin konvexní? | 7 |
| 2.7 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu | 7 |
| 2.8 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní | 7 |
| 2.9 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní | 8 |
| 2.10 Důkaz, že kartézský součin je konvexní | 8 |
| 2.11 Určení definitnosti matic | 9 |
| 2.12 Existence matice | 11 |
| 3 Projekce | 12 |
| 3.1 Věta o nejlepší aproximaci | 12 |
| 3.2 Projekce bodu a variační nerovnost | 12 |
| 3.3 Projekce na jednotkovou kouli | 13 |
| 3.4 Věta o ortogonálním rozkladu | 13 |
| 4 Metoda nejmenších čtverců | 16 |
| 4.1 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců | 16 |
| 4.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců | 17 |
| 4.3 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny | 17 |
| 4.4 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou | 18 |
| 4.5 Lemma neprázdné uzavřené konvexní | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.6 | Farkasovo lemma | 19 |
| 4.7 | Krajní body konvexní množiny | 19 |
| 4.8 | Kreinova-Milmanova věta | 20 |
| 4.9 | Výpočet gradientu skalárního součinu | 20 |
| 4.10 | Ověření konvexnosti množiny | 21 |
| 4.11 | Práce s maticemi | 21 |
| 4.12 | Proložení bodů pomocí MNČ | 22 |
| 4.13 | Formulace úlohy MNČ | 23 |
| 5 | Konvexní funkce | 24 |
| 5.1 | Příklad konvexní funkce | 24 |
| 5.2 | Příklad konvexní funkce | 24 |
| 5.3 | Dolní úrovněová množina | 25 |
| 5.4 | Použití dolní úrovněové množiny | 25 |
| 5.5 | Součet a součin zachovávají konvexitu | 26 |
| 5.6 | Příklad ověření konvexity | 26 |
| 5.7 | Skládání zachovává konvexitu | 26 |
| 5.8 | Věta o extrémech konvexních funkcí | 27 |
| 5.9 | Věta o konvexitě a první derivaci | 28 |
| 5.10 | Věta o konvexitě a druhé derivaci | 28 |
| 5.11 | Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace | 29 |
| 5.12 | Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace | 29 |
| 5.13 | Příklad ověření konvexnosti funkce s parametrem | 30 |
| 5.14 | Příklad ověření konvexity množiny | 30 |
| 6 | Podmínky optimality | 32 |
| 6.1 | Kužel přípustných směrů | 32 |
| 6.2 | Hledání přípustných směrů | 32 |
| 6.3 | Kužel směrů poklesu | 33 |
| 6.4 | Nutná geometrická podmínka lokálního extrému | 33 |
| 6.5 | Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu | 33 |
| 6.6 | Tvrzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci | 34 |
| 6.7 | Fermatova věta - nutná podmínka optimality | 34 |
| 6.8 | Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu | 35 |
| 6.9 | Hledání bodu minima | 35 |
| 6.10 | Věta o podmínkách optimality 2. řádu | 35 |
| 6.11 | Příklad použití věty o podmínkách optimality 2. řádu | 36 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6.12 | Hledání bodu minima | 36 |
| 6.13 | Omezení ve tvaru nerovnosti - aproximace $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ | 37 |
| 6.14 | Příklad výpočtu \mathcal{G} a \mathcal{F} | 37 |
| 6.15 | Ukázka, že aproximací \mathcal{F} lze zkazit prázdnotu průniku | 38 |
| 7 | KKT podmínky | 39 |
| 7.1 | Věta o nutných KKT podmínkách | 39 |
| 7.2 | Terminologie KKT podmínek | 40 |
| 7.3 | Příklad použití KKT podmínek | 40 |
| 7.4 | Příklad, že KKT podmínky vždy nenaleznou všechny body | 40 |
| 7.5 | Afinní podmínka regularity | 41 |
| 7.6 | Slaterova podmínka regularity | 41 |
| 7.7 | Věta o postačujících KKT podmínkách | 41 |
| 7.8 | Použití podmínek regularity k ověření KKT podmínek | 41 |
| 7.9 | Určení nutných a postačujících podmínek optimality | 42 |
| 7.10 | Určení KKT podmínek | 43 |
| 7.11 | Určení KKT podmínek | 44 |
| 7.12 | Určení KKT podmínek s trikem | 46 |
| 8 | Dualita | 47 |
| 8.1 | Pomocný důkaz vlastnosti infima | 47 |
| 8.2 | Dualita - motivační příklad | 47 |
| 8.3 | Tvrzení o konkávnosti duální úlohy | 48 |
| 8.4 | Věta o slabé dualitě | 49 |
| 8.5 | Důsledek věty o slabé dualitě | 49 |
| 8.6 | Ukázkový příklad na slabou dualitu | 50 |
| 8.7 | Věta o silné dualitě | 50 |
| 9 | Lineární programování | 51 |
| 9.1 | Zápis úlohy lineárního programování | 52 |
| 9.2 | Terminologie lineárního programování | 52 |
| 9.3 | Basický přípustný bod | 53 |
| 9.4 | Příklad BPB | 53 |
| 9.5 | Tvrzení o charakterisaci BPB | 53 |
| 9.6 | Tvrzení, že dva různé BPB musí mít různé množiny B | 54 |
| 9.7 | Příklad na degenerované BPB | 54 |
| 9.8 | Příklad na souvislost BPB a krajních bodů | 55 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 9.9 | Věta o souvislosti BPB a krajních bodů | 55 |
| 9.10 | Základní věta lineárního programování | 56 |
| 9.11 | Tvrzení o množině všech řešení úlohy LP | 56 |
| 9.12 | Příklad na Simplexovu metodu | 56 |
| 9.13 | Tvrzení o vztahu přípustné množiny a hodnoty cílové funkce | 57 |
| 9.14 | Příklad dvoufázové Simplexové metody | 57 |
| 9.15 | Tvrzení o primární a duální úloze | 57 |
| 9.16 | Hledání duální úlohy k duální úloze | 58 |
| 9.17 | Věta o silné dualitě pro LP | 58 |
| 9.18 | Simplexová metoda a řešení duální úlohy | 59 |
| 9.19 | Příklad řešení duální úlohy | 59 |
| 9.20 | Příklad na hledání duální úlohy | 60 |
| 9.21 | Příklad na hledání duální úlohy | 61 |
| 10 | Kvadratické programování | 63 |
| 10.1 | Tvrzení o duální úloze kvadratického programování | 63 |
| 10.2 | Věta o silné dualitě pro kvadratické programování | 64 |
| 11 | Numerické metody optimalisace | 65 |
| 11.1 | Newtonova metoda v jednorozměrné optimalisaci | 65 |
| 11.2 | Omezení na minimalizační úlohy | 65 |
| 11.3 | Nepodmíněná optimalisace - Metoda největšího spádu | 66 |
| 11.4 | Podmíněná optimalisace - Metoda projekce gradientu | 67 |
| 11.5 | Podmíněná optimalisace - Metoda penalizačních funkcí | 67 |
| 12 | Úvod do strategických her | 68 |
| 12.1 | Příklad Vězňovo dilemma | 68 |
| 12.2 | Příklad Panna nebo orel | 68 |
| 12.3 | Příklad Manželský spor | 68 |
| 12.4 | Příklad Kámen-nůžky-papír | 68 |
| 12.5 | Nashovo equilibrium | 69 |
| 12.6 | Vězňovo dilemma a Nashovo equilibrium | 69 |
| 12.7 | Panna nebo orel a Nashovo equilibrium | 69 |
| 12.8 | Manželský spor a Nashovo equilibrium | 69 |
| 12.9 | Tvrzení o Nashově equilibriu | 70 |
| 12.10 | Příklad Cournotův model oligopolu a Nashovo equilibrium | 70 |
| 12.11 | Hra dvou hráčů s nulovým součtem | 71 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 12.12 | Definice ceny hry | 71 |
| 12.13 | Definice optimální strategie | 72 |
| 12.14 | Příklad na optimální strategii | 72 |
| 12.15 | Optimální strategie Panna nebo orel | 73 |
| 12.16 | Optimální strategie pouze pro jednoho hráče | 73 |
| 12.17 | Tvrzení o existenci optimální strategie | 73 |
| 12.18 | Sedlový bod typu maxmin | 73 |
| 12.19 | Vztah Nashova equilibria a sedlového bodu | 74 |
| 12.20 | Věta o Nashově equilibriu a optimálních strategiích | 74 |
| 13 | Smíšené strategie | 75 |
| 13.1 | Definice konečné hry | 75 |
| 13.2 | Definice smíšeného rozšíření | 75 |
| 13.3 | Příklad Panna nebo orel | 75 |
| 13.4 | Nashova věta | 77 |
| 14 | Maticové hry | 78 |
| 14.1 | Věta o minimaxu | 78 |
| 14.2 | Lemma o omezení na standardní bázi | 79 |
| 14.3 | Tvrzení o kladnosti komponent matice A | 79 |
| 14.4 | Souvislost maticové hry a lineárního programování | 80 |
| 14.5 | Příklad na vztah maticové hry a LP | 81 |
| 15 | Řešená vzorová písemka | 82 |
| 15.1 | Konvexní funkce | 82 |
| 15.2 | Metoda nejmenších čtverců | 82 |
| 15.3 | KKT podmínky | 83 |
| 15.4 | Smíšené rozšíření maticové hry | 84 |

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/kned11k/A8B010GT>.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem \LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 Úvod do matematické optimalisace

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$
(2) jestliže $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \iff -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M,$
tj. $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$
(2) Ať $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk} \quad \frac{3}{x} \leq 1, \\ &\quad \quad \quad x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

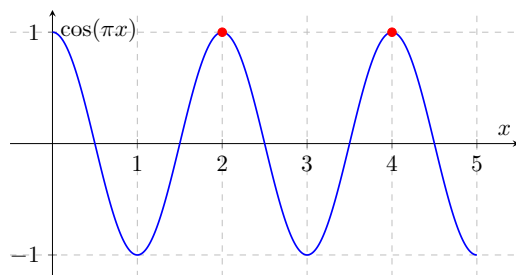
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} \quad \ln x \\ &\text{za podmíněk} \quad \cos(\pi x) = 1, \\ &\quad \quad \quad x \leq 5. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$

1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici y (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} \quad \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ &\text{za podmínek} \quad x + y = 100, \\ &\quad \quad \quad x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25} \right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

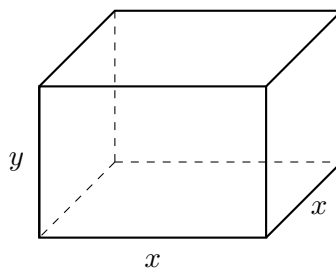
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \rightarrow x = 75$.

1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm^3 tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad 4xy + x^2 \\ &\text{za podmínek} \quad x^2y = 10, \\ &\quad \quad \quad x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dx} \left(4x \frac{10}{x^2} + x^2 \right) = \frac{-40}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40 + 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x = \sqrt[3]{20} \rightarrow y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V \mathbb{R}^n jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = -1$.

(a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{\|w\|}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{\|w\|}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2 .

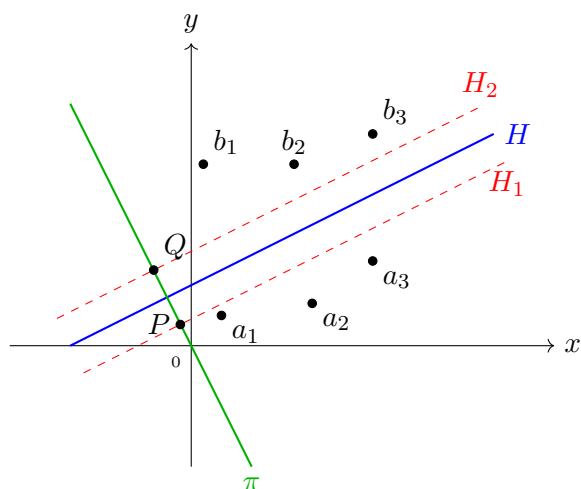
(b) Interpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} && g(w, \lambda) = \frac{2}{\|w\|} \\ &\text{za podmíněk} && \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & && \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(c) Ukažte, že $(\hat{w}, \hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && h(w, \lambda) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ &\text{za podmíněk} && \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & && \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(a)



$$\pi : x = t \cdot w, t \in \mathbb{R}.$$

Průsečík Q :

$$\underbrace{\langle tw, w \rangle}_{t\|w\|^2} + \lambda = 1 \rightarrow t = \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} \Rightarrow Q = \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} w$$

Průsečík P :

$$\underbrace{\langle tw, w \rangle}_{t\|w\|^2} + \lambda = -1 \rightarrow t = \frac{-1-\lambda}{\|w\|^2} \Rightarrow P = \frac{-1-\lambda}{\|w\|^2} w$$

Pak vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je dána rozdílem průsečíků P a Q v normě. Tedy:

$$\|Q - P\| = \left\| \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} w + \frac{1+\lambda}{\|w\|^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{\|w\|^2} \right\| = \frac{2}{\|w\|^2} \|w\| = \frac{2}{\|w\|}.$$

To je prima, to jsme přesně chtěli. \square

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení $\frac{1}{2}$, protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

2 Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

2.1 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y .

2.2 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

At $x, z \in H(y; \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y; \alpha)$. Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y; \alpha). \quad \square$$

2.3 Je uzavřený poloprostor konvexní?

Nechť $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uzavřený poloprostor $P(y; \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq \alpha\}$ je konvexní množina.

Důkaz.

At $a, b \in P(y; \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda a + (1 - \lambda)b \in P(y; \alpha)$. Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda a + (1 - \lambda)b, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle a, y \rangle}_{\leq \alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle b, y \rangle}_{\leq \alpha} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \in P(y; \alpha). \quad \square$$

2.4 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

At $x, y \in B(a; r)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|\lambda x + (1 - \lambda)y - a\| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

2.5 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a; r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a\| < r$. Dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

2.6 Je průnik množin konvexní?

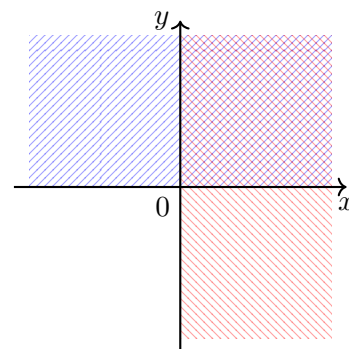
Úvaha pro 2 množiny ve \mathbb{R}^2 :

Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) **konvexní** množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Visuálně je průnik konvexní.

Důkaz.

Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i$.



2.7 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou **konvexní** množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.
 $\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$f(x) = Ax + b.$$

2.8 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pak f je **afinní** \iff pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y). \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Cíl: Ukázat, že f je **afinní**, tedy $f(x) = Ax + b$.

Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.

Pokud je f **afinní**, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax , tedy být lineární.

Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) At $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x) &= f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) = \\ &= \alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square \end{aligned}$$

(2) At $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Cíl: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x + y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = \\ &= 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] = f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square \end{aligned}$$

2.9 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **afinní** a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **konvexní**, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = \underbrace{[f(x), f(y)]}_a \subseteq f(C). \quad \square$

2.10 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou **konvexní** množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle **definice**.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Definujme **afinní** zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies C_1$ je **konvexní**, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2 , zde zadefinujeme afinní zobrazení $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies C_2$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. \square

2.11 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice A , jestliže

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix};$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být symetrická.
 $Q=Q^T$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \langle Qx, x \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je pozitivně semidefinitní.} \\ \langle Qx, x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je pozitivně definitní.} \end{aligned}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.

Matice je indefinitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že Q je negativně (semi)definitní, jestliže $(-Q)$ je pozitivně (semi)definitní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit pozitivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

(a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \rightarrow$ podezření na pozitivní semidefinitnost.

Hlavní minory jsou $Q_{\{1\}}$ a $Q_{\{1,2\}}$.

Menší minory: Q_I , kde $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ neprázdná. Aby matice byla pozitivně semidefinitní, tak $\det Q_I \geq 0$.

Tedy: $Q_{\{2\}} = [4]$. $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$.

Tedy matice $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.

$$(b) \begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0. \text{ Matice je pozitivně definitní.}$$

$$(c) Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy $\det Q = 0$.

$$Q_{\{1\}} = 4 > 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 1 > 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 0 = 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočteme tedy vedlejší minor, například vynecháme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Aby matice Q byla pozitivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být ≥ 0 . Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice Q je indefinitní.

$$(d) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy **vlastnosti** symetrických matic a určíme definitnost pro matici $(-Q)$.

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice $(-Q)$ je pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0.$$

$\implies (-Q)$ je pozitivně semidefinitní $\iff Q$ je negativně semidefinitní.

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy $\det Q = 0$.

$$Q_{\{1\}} = 1 \geq 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 5 \geq 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 1 \geq 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$Q_{\{1,2\}} = 1 \geq 0,$$

$$Q_{\{2,3\}} = 4 \geq 0,$$

$$Q_{\{1,3\}} = 1 \geq 0.$$

Matice Q je pozitivně semidefinitní.

2.12 Existence matice

Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?
- (c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

Zdefinujme si vlastnost skalárního součinu: $\langle a, b \rangle = b^T a$, kde $b^T = (b_1, \dots, b_n)$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(a) Využijme zmíněné **vlastnosti**.

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$$

(b) Pozorování: Matice B je symetrická a matice C je antisymetrická.

$$\text{Zvolme: } \left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} \right\} B + C = A.$$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C. \checkmark$$

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B. \checkmark \quad \square$$

(c) $\langle Cx, x \rangle \stackrel{?}{=} 0$

$$\langle Cx, x \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x \rangle \stackrel{-C \equiv C^T}{=} -\langle x, Cx \rangle = -\langle Cx, x \rangle = 0.$$

Matice C tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$. \square

3 Projekce

3.1 Věta o nejlepší aproximaci

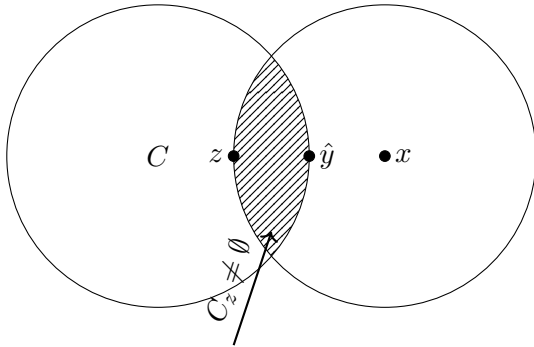
Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\text{dist}(x; C) = \|x - \hat{y}\|$.

Důkaz.

(a) Existence

Cíl: Existuje bod minima

Úvaha:



C je obecná neprázdná uzavřená konvexní množina.

$R = \|x - z\|$, $z \in C$ je libovolné,

$C_z = C \cap B(x, R) = C \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|z - a\| \leq R\}$.

↑
uzavřená, omezená, neprázdná
kompaktní

Tedy $a \mapsto \|x - a\|$ je spojitá.

⇒ Spojitost na kompaktní množině znamená, že f nabývá na C_z minima dle **Weierstrassovy věty**.

At \hat{y} je bod minima. Všechny body v C mají od x vzdálenost $\geq \|x - \hat{y}\|$. □

(b) Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \|x - b\| = \overbrace{\text{dist}(x, C)}^{\delta}$, pak $a = b$.

Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Důkaz lemma:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad \square \end{aligned}$$

Důkaz jednoznačnosti:

At $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Pak $\delta^2 \leq \|x - y\|^2 = \|x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\|^2 = \|\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)\|^2 = \frac{1}{4} \|\underbrace{(x - a)}_u + \underbrace{(x - b)}_v\|^2$

$$\stackrel{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4} \left[2 \left(\underbrace{\|x - a\|^2}_{\delta^2} + \underbrace{\|x - b\|^2}_{\delta^2} \right) - \underbrace{\|(x - a) + (x - b)\|^2}_{\|b - a\|} \right] = \delta^2 - \frac{1}{4} \|b - a\|^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \underbrace{\frac{1}{4} \|b - a\|^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

3.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.
- (2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) \Rightarrow (2):

Ať $v_\lambda = y + \lambda(z - y)$, $\lambda \in (0, 1]$.

Pak

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - v_\lambda\|^2 = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 = \langle (x - y) - \lambda(z - y), (x - y) - \lambda(z - y) \rangle$$

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0. \quad \square$$

(2) \Rightarrow (1):

Ať $z \in C$.

Pak

$$0 \geq \langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, (z - x) + (x - y) \rangle = \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2$$

$$\langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 \geq \|x - y\|^2 - \underbrace{|\langle x - y, z - y \rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star$$

$$\star = \|x - y\|^2 - \|x - y\| \cdot \|z - x\|.$$

Je-li $x \neq y$, pak vydělíme: $\|z - x\| \geq \|x - y\|$.

Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \dots$ triviální. \square

3.3 Projekce na jednotkovou kouli

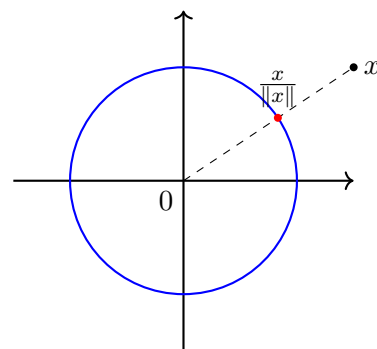
Mějme jednotkovou kouli $C = B(0; 1)$. Hledáme projekci libovolného $x \in \mathbb{R}^n$ bodu na takovou kouli.

Případ, kdy $x \in C$, je triviální, to platí $P_C(x) = x$.

Vyšetřeme teď případ kdy $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $\|x\| > 1$ a $z \in C$ libovolný.

$$\begin{aligned} \left\langle x - \frac{x}{\|x\|}, z - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle &= \langle x, z \rangle - \frac{1}{\|x\|} \|x\|^2 - \frac{1}{\|x\|} \langle x, z \rangle + \frac{1}{\|x\|^2} \|x\|^2 \\ &= \langle x, z \rangle - \|x\| - \frac{1}{\|x\|} \langle x, z \rangle + 1 \\ &= \langle x, z \rangle \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|x\| \|z\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 \leq \|x\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 = 0.$$



3.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

(a) $P_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(a)

Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

$$1. P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

$$2. P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1. : Ať $z \in L$. Pak

$$\langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle = \alpha \langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle$$

$$\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0} \langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot z - P_L(x)}_{\in L} \rangle$$

Tedy $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$. Pro $\alpha = 0$ zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.

2. : Ať $z \in L$.

$$\begin{aligned} & \langle \underbrace{x + y - (P_L(x) + P_L(y))}_{(x - P_L(x)) + (y - P_L(y))}, z - (P_L(x) + P_L(y)) \rangle \\ & \underbrace{\langle x - P_L(x), \underbrace{(z - P_L(y)) - P_L(x)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), \underbrace{(z - P_L(x)) - P_L(y)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Z **variační nerovnosti** tedy plyne, že P_L je nutně lineární. \square

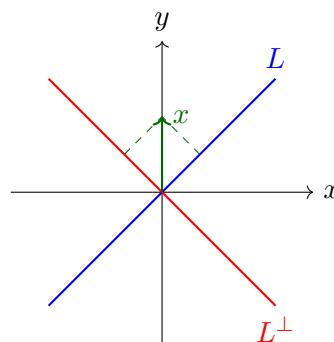
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

$L \dots$ lineární podprostor \mathbb{R}^n ,
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$.

Důkaz.

Cíl: $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$. Pak



$$\begin{aligned} & \langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x)) \rangle = \langle \underbrace{P_L(x)}_{\in L}, z - (x - P_L(x)) \rangle \\ & = \underbrace{\langle P_L(x), z \rangle}_0 - \langle P_L(x), x - P_L(x) \rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x) \rangle \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz existence.

Pak $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$. \square

Důkaz jednoznačnosti.

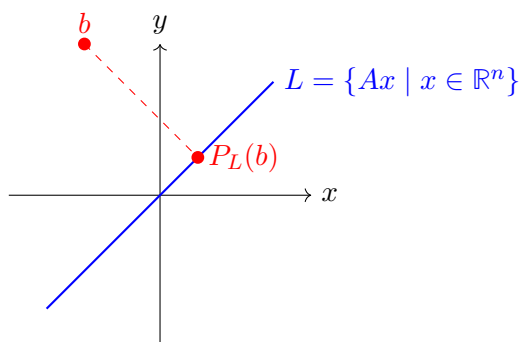
Ať $a \in L, b \in L^\perp$ takové, že $x = a + b$.

Cíl: $a = P_L(x)$

Ať $z \in L$.

$$\langle x - a, z - a \rangle = \langle b, \underbrace{z - a}_{\in L} \rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \stackrel{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

4 Metoda nejmenších čtverců



Pokud $b \in L$, řešíme úlohu $Ax = b$.

Pokud $b \notin L$, řešíme $Ax = P_L(b)$.

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \iff A^T A \hat{x} = A^T b$.

„ \Rightarrow “: Ať $A \hat{x} = P_L(b) \stackrel{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A \hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b) \rangle = \underbrace{\langle P_{L^\perp}(b), \rangle}_{\in L^\perp} \underbrace{(A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b))}_{\in L} = 0. \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Ať $A^T A \hat{x} = A^T b$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

$$0 = \underbrace{\langle x, A^T A \hat{x} - A^T b \rangle}_{A^T(A\hat{x}-b)} = \underbrace{\langle (A^T)^T x, A\hat{x} - b \rangle}_L \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \stackrel{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

4.1 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body $(0, -\frac{1}{2})^T$, $(1, \frac{1}{3})^T$ a $(2, \frac{2}{3})^T$. Pomocí metody nejmenších čtverců proložíme těmito body přímku o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.

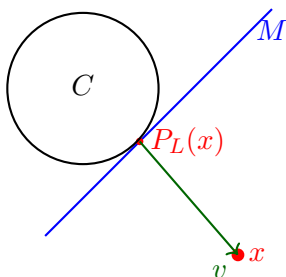
$$\left. \begin{array}{l} 0k + q = -\frac{1}{2} \\ 1k + q = \frac{1}{3} \\ 2k + q = \frac{2}{3} \end{array} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

4.3 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina.
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$ existuje $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že
 $\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$

Důkaz.

$$v = x - P_L(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \langle v, y \rangle - \langle v, P_L(x) \rangle &\leq 0, \quad \forall y \in C. \\ \langle y, v \rangle &\leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Položme $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$.

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha} = \underbrace{\langle x - P_L(x), v \rangle}_v = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

Důsledek: Každá uzavřená konvexní množina v \mathbb{R}^n je průnikem všech poloprostorů, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

Ať neplatí: tj. existuje $C \in \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem P všech poloprostorů obsahujících C .

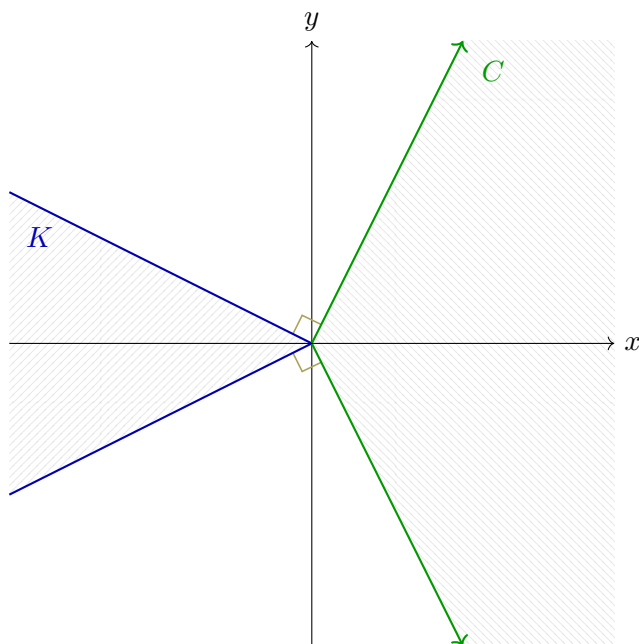
Pak $x \in P$ tak, že $x \notin C$. Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor M takový, že $C \subseteq M$ a $x \notin M$. Ale to je ve sporu s tím, že $x \in P$. \square

4.4 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ a $b \in \mathbb{R}^2$. Označme

$$C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^2\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \geq 0 \right\}$$

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0\} \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}.$$



Vždy nastane jeden z případů:

- (a) $b \in C$
- (b) $b \notin C$ - existuje nenulový vektor $y \in K$ svírající s b úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

4.5 Lemma neprázdné uzavřené konvexní

Jestliže $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pak $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$ je neprázdna uzavřená konvexní množina.

Důkaz.

- neprázdna - vždy obsahuje alespoň 0,
- konvexní - lineární zobrazení (matice) zachovává konvexitu,
- uzavřenost dokazovat nebudeme.

4.6 Farkasovo lemma

Výslovnost [farkášovo].

Je-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$, pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- (a) Existuje $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Ax = b$ a $x \geq 0$.
- (b) Existuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $A^T y \leq 0$ a $\langle y, b \rangle > 0$.

Důkaz.

„(a) $\implies \neg(b)$ “:

Ať $x \in \mathbb{R}_+^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $Ax = b$ a $A^T y \leq 0$.

$$\langle y, b \rangle \stackrel{b=Ax}{=} \langle y, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T y, x \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle x \rangle}_{\geq 0} \leq 0. \quad \square$$

„ $\neg(a) \implies (b)$ “:

Ať $C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} \implies b \notin C, C \dots$ uzavřená neprázdná konvexní množina.

oddělitelnost \implies existuje $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tak, že: $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha < \langle b, y \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Začneme s $\alpha < \langle b, y \rangle$. Chceme, aby $\langle b, y \rangle$ byl kladný. Pak nám y bude svírat ostrý úhel s b .

Protože $0 \in C$, je $0 \leq \alpha < \langle b, y \rangle$ (za Ax dosadíme 0, takže budeme mít $\langle 0, y \rangle$).

Teď musíme dokázat, že y skutečně řeší zadanou soustavu nerovnic.

Víme tedy, že:

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \\ \langle x, A^T y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

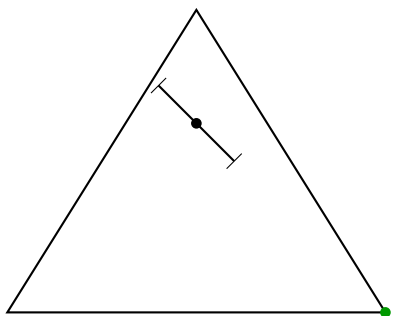
Odtud $\langle x, A^T y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$, neboť:

Ať $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$ je takový, že $\langle \tilde{x}, A^T y \rangle > 0$.

Pak $\langle \underbrace{\lambda \tilde{x}}_{\lambda > 0, \text{ tedy } \lambda \tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n}, A^T y \rangle = \lambda \underbrace{\langle \tilde{x}, A^T y \rangle}_{> 0} \rightarrow +\infty$, pro $\lambda \rightarrow +\infty$. Což je spor s $\langle x, A^T y \rangle \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Ať $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Pak $(A^T y)_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, neboť $(A^T y)_i = \langle e_i, A^T y \rangle$. \square

4.7 Krajiní body konvexní množiny



Mějme konvexní množinu. Když sestrojíme libovolnou nedegenerativní (tzn. netriviální = není to pouze bod) úsečku, vždy nalezneme bod, který bude ležet přesně uprostřed této úsečky.

Co když ale vezmeme například **zelený bod** vyznačený na nákrese? V takovém případě nejsme schopni sestřít nedegenerativní úsečku, na jejímž středu by ležel tento bod.

Definujeme: Krajní bod $x \in C$ konvexní množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový bod, pro který neexistují dva různé body y, z tak, že

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

$\text{ext}(C) \dots$ množina všech krajních (extremálních) bodů

4.8 Kreinova-Milmanova věta

Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$.
Důkaz vynecháme.

Kompaktnost je důležitá.

- Interval $(0, 1)$ není uzavřený a $\text{ext}((0, 1)) = \emptyset$.
- Množina \mathbb{R}_+^2 není omezená a $\text{ext}(\mathbb{R}_+^2) = \{0\}$.

4.9 Výpočet gradientu skalárního součinu

Nalezněte $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$, jestliže

(a) $f(x) = \langle x, c \rangle$, kde $c \in \mathbb{R}^n$;

(b) $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, kde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Určete také $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$ za dodatečného předpokladu, že A je symetrická matice.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n x_i c_i \stackrel{\text{limita}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ik} \stackrel{\text{rozvoj}}{=} c_k$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = c; \Rightarrow \nabla^2 f(x) = 0, \text{ kde } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = k, \\ 0, & \text{pokud } i \neq k. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]}_{(Ax)_i} x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)}_{\text{derivace součinu}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + a_{ij} \delta_{jk} x_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}_{(Ax)_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i}_{(A^T x)_k} \end{aligned}$$

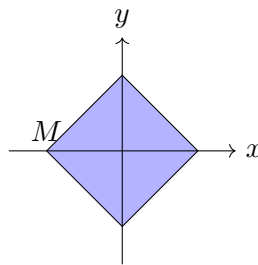
$$\Rightarrow \nabla f(x) = Ax + A^T x \text{ (Speciálně: } \nabla f(x) = 2Ax \text{ pro } A = A^T)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{jl} + \sum_{i=1}^n a_{ik} \delta_{il} = a_{kl} + a_{lk}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = A + A^T$$

4.10 Ověření konvexnosti množiny

Je množina $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \right\}$ konvexní?



1. způsob - dle definice

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x + (1 - \lambda)a \\ \lambda y + (1 - \lambda)b \end{bmatrix} \stackrel{?}{\in} M, \lambda \in [0, 1].$$

$$|\lambda x + (1 - \lambda)a| + |\lambda y + (1 - \lambda)b| \leq \underbrace{\lambda|x| + (1 - \lambda)|a| + \lambda|y| + (1 - \lambda)|b|}_{\lambda \underbrace{(|x| + |y|)}_{\leq 1} + (1 - \lambda) \underbrace{(|a| + |b|)}_{\leq 1}} \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \quad \square$$

M je konvexní.

2. způsob - úvaha nad vlastnostmi

$|x|$ je konvexní, $|y|$ je konvexní. Součet zachovává konvexitu, tedy i $|x| + |y|$ je konvexní.

4.11 Práce s maticemi

Je dána matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. At $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Ukažte, že A má lineárně nezávislé sloupce $\iff A^T A$ je invertibilní.

Pomocný důkaz.

Ukažme, že: $\ker(A) = \ker(A^T A)$

Chci: $\ker(A) \subseteq \ker(A^T A)$

$$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \quad / \cdot A^T$$

$$A^T A = 0 \Rightarrow x \in \ker(A^T A) \quad \square$$

Chci: $\ker(A^T A) \subseteq \ker(A)$

$$\begin{aligned} x \in \ker(A^T A) &\Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow 0 = \langle A^T Ax, x \rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \|Ax\|^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \quad \square \end{aligned}$$

Konec pomocného důkazu.

A má lineárně nezávislé sloupce $\iff \{0\} = \ker(A) = \ker(A^T A) \iff A^T A$ je invertibilní (protože $A^T A$ je čtvercová a $A^T A$ je prosté).

4.12 Proložení bodů pomocí MNČ

Jsou dány body $a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf

(a) afinní funkce $f(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(b) funkce $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= -2 \\ 0\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T b$. A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow (A^T A)^{-1}$ existuje.

Pak: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{10}; \beta = \frac{3}{10}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta + \gamma &= -1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -2 \\ 0\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow A^T A$ je invertibilní.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 6 \\ -8 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4}; \beta = \frac{7}{4}; \gamma = \frac{-3}{4}.$$

4.13 Formulace úlohy MNČ

Ať závislost výstupního signálu $(y_n)_{n=0}^\infty$ systému na vstupním signálu $(x_n)_{n=0}^\infty$ je dána konvolucí posloupností $(x_n)_{n=0}^\infty$ s posloupností $(h_n)_{n=0}^\infty$ ($(h_n)_{n=0}^\infty$ popisuje odezvu systému na jednotkový impuls), tj. $y_n = \sum_{i=0}^n h_i x_{n-i}$. Předpokládejte dále, že $h_n = 0$ pro všechna $n \geq 4$. Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů y_0, \dots, y_{20} výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty x_0, \dots, x_{20} . Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů h_0, h_1, h_2, h_3 .

$$(x_n)_{n=0}^\infty \longrightarrow \boxed{(h_n)_{n=0}^\infty} \longrightarrow (y_n)_{n=0}^\infty$$

$$y_k = \sum_{l=0}^k h_l x_{k-l} = h_0 x_k + \dots + h_k x_0$$

předpokládejme: $h_l = 0 \forall l \geq 4$.

$$y_0 = h_0 x_0$$

$$y_1 = h_1 x_0 + h_0 x_1$$

$$y_2 = h_2 x_0 + h_1 x_1 + h_0 x_2$$

$$y_3 = h_3 x_0 + h_2 x_1 + h_1 x_2 + h_0 x_3$$

$$y_4 = h_3 x_1 + h_2 x_2 + h_1 x_3 + h_0 x_4$$

$$\vdots$$

$$y_{20} = h_3 x_{17} + h_2 x_{18} + h_1 x_{19} + h_0 x_{20}$$

Minimalisujme $f(x) = \|Ax + b\|^2$, kde

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

5 Konvexní funkce

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina.
Řekněme, že f je

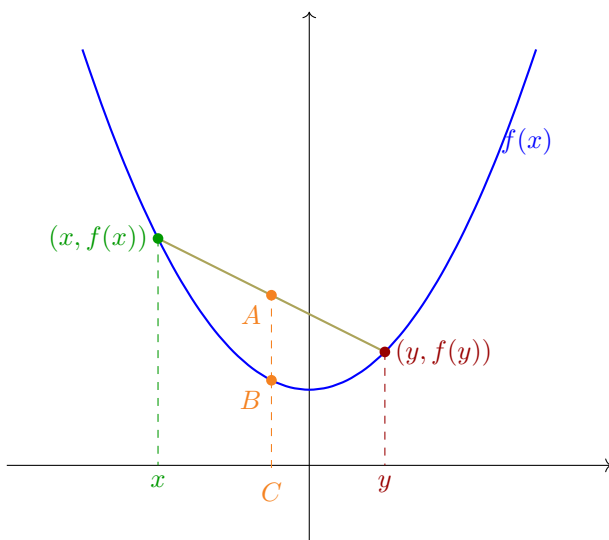
- (a) konvexní na C , jestliže pro každé $x, y \in C$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (b) ryze konvexní na C , jestliže pro každé dva různé body $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (c) konkávní (resp. ryze konkávní) na C , jestliže $(-f)$ je konvexní (resp. ryze konvexní) na C .



$$A = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

$$B = (\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$$

$$C = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Pozorování: úsečka vždy leží nad funkcí.

5.1 Příklad konvexní funkce

Je afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. $f(x) = \langle x, a \rangle + b, b \in \mathbb{R}$) konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle \lambda x + (1 - \lambda)y, a \rangle + b \\ &= \lambda \langle x, a \rangle + (1 - \lambda) \langle y, a \rangle + \lambda b + (1 - \lambda)b \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní i konkávní. } \square \end{aligned}$$

5.2 Příklad konvexní funkce

Je funkce $f(x) = \|x\|$ konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

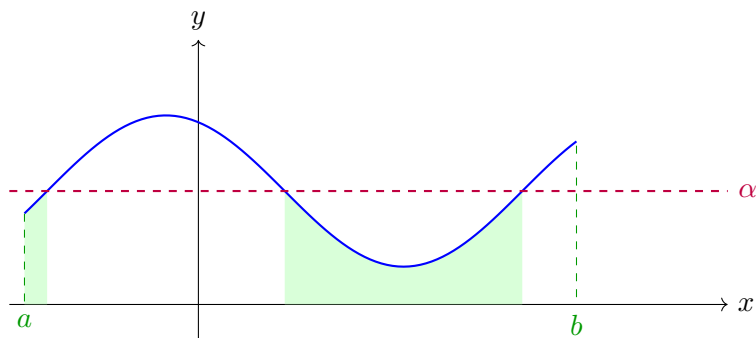
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \stackrel{\text{odhad}}{\leq} \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní. } \square \end{aligned}$$

5.3 Dolní úrovněová množina

Dolní úrovněová množina funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hladiny $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\text{lev}_{\leq}(f; \alpha) := \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Je-li f konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $\text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$ je konvexní pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



Důkaz.

At $x, y \in \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)y \stackrel{?}{\in} \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \quad \square$$

Poznámka.

Opačná implikace neplatí. Tedy pomocí dolní úrovněové množiny **nelze** určit, jestli původní funkce je konvexní.

Například $f = x^3$ není konvexní funkce na intervalu $x = [-2, 2]$, ale když zvolíme $\alpha = 8$, tak dolní úrovněová množina bude konvexní.

5.4 Použití dolní úrovněové množiny

Je množina $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1, \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\}$ konvexní?

Důkaz.

Rozdělme si množinu M na dvě podmnožiny M_1 a M_2 , kde:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \text{lev}_{\leq}(\|x\|, 1) \rightarrow \text{konvexní, protože norma je konvexní funkce.}$$

$$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\} = \text{lev}_{\leq}\left(\left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 1\right) \rightarrow \text{konvexní, protože skalární součin je konvexní.}$$

To nám ale dává průnik dvou konvexních množin, tedy $M = M_1 \cap M_2$ je také konvexní. \square

5.5 Součet a součin zachovávají konvexitu

Mějme funkce f, g , které jsou konvexní na C , $\alpha \geq 0$. Pak:

(a) $f + g$ je konvexní na C

(b) αf je konvexní na C

Důkaz.

(a) Ať $\lambda \in [0, 1], x, y \in C$.

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \underbrace{f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)} + \underbrace{g(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)} \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) = \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y). \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ať $\lambda \in [0, 1], x, y \in C, \alpha \geq 0$.

$$\alpha f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \alpha f(\lambda x) + \alpha f((1 - \lambda)y) = \alpha \lambda f(x) + \alpha(1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

5.6 Příklad ověření konvexity

Je funkce $f(x) = e^x - 3 \ln x + 2x$ konvexní?

Rozeberme si jednotlivé části funkce.

- $e^x \dots$ exponenciála je z grafu očividně konvexní.
- $-3 \ln x \dots$ logaritmus je konkávní, ale díky „-“ se celý výraz stane konvexní. Násobení konstatou konvexitu neovlivní, viz důkaz (b).
- $2x \dots$ lineární funkce je konvexní.

Protože všechny komponenty funkce f jsou konvexní, pak je i funkce f nutně konvexní.

5.7 Skládání zachovává konvexitu

Skládání konvexních funkcí není obecně konvexní funkce. Například: $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^2 - 1$ jsou konvexní, ale

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x))) = (x^2 - 1)^2 \text{ z grafu očividně není konvexní.}$$

1. Mějme tedy tvrzení.

Nechť f je konvexní na $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je afinní. Jestliže $g(C) \subseteq K$ (tedy g „obtiskne“ množinu C do K), pak $f \circ g$ je konvexní na C .

Důkaz.

Ať $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \stackrel{g \text{ je } \text{afinní}}{=} f(\lambda \overbrace{g(x)}^{\in K} + (1 - \lambda) \overbrace{g(y)}^{\in K}) \stackrel{f \text{ je } \text{konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. \square

2. Mějme ještě druhé tvrzení.

Jestliže f je konvexní a **neklesající** na intervalu I , g je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$ a $g(C) \subseteq I$, pak $f \circ g$ je konvexní na C .

Důkaz.

Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(\underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\substack{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ \text{odhad, díky konvexitě } g}}) \stackrel{\substack{f \text{ je neklesající} \\ g \text{ je konvexní}}}{\leq} f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle **definice konvexní** funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. \square

5.8 Věta o extrémích konvexních funkcí

Nechť f je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom platí:

- (a) Každý bod lokálního minima f na C je bodem minima f na C .
- (b) Množina $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ je konvexní. Je-li navíc f ryze konvexní na C , pak existuje nejvýše jeden bod minima funkce f na C .

Důkaz (a).

Sporem. Ať $\hat{x} \in C$ je bod lokálního minima f na C a ať existuje $\hat{y} \in C$ tak, že $f(\hat{y}) < f(\hat{x})$. $\lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{< f(\hat{x})} \underset{\text{odhad}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

Což je ale spor s naším předpokladem, protože kdykoliv si vezmu bod na úsečce mezi \hat{x} a \hat{y} , tak je v něm hodnota ostře menší než funkční hodnota v bodě $f(\hat{x})$. \square

Důkaz (b).

Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

$$\implies \lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x). \quad \square$$

Ať f je navíc ryze konvexní na C .

Cíl: $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ má nejvýše jeden prvek.

Důkaz.

Sporem. Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\hat{x} \neq \hat{y}$. $\lambda \in (0, 1)$.

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je ryze konv.}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \underbrace{f(\hat{y})}_{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

Což je ale spor, protože mám nějakou funkční hodnotu bodu úsečky mezi \hat{x} a \hat{y} ostře menší jak funkční hodnotu bodu \hat{x} . To ale nemůže nastat, protože jako body minima funkce f na C musí mít stejnou hodnotu. Body \hat{x} a \hat{y} musí tedy nutně být stejné body. \square

5.9 Věta o konvexitě a první derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

(a) f je konvexní na C právě tehdy, když pro každé $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y).$$

(b) f je ryze konvexní na C právě tehdy, když pro každé dva různé body $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle < f(y).$$

Důkaz (b) vynecháme.

Důkaz (a).

„ \Rightarrow “: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in (0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x + \lambda(y - x)) &= f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) = f(x) + \lambda[f(y) - f(x)] \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda}}_{\substack{= \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ pro } \lambda \rightarrow 0_+ \\ \text{z definice směrové derivace}}} \leq f(y) - f(x). \quad \square \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$.

$z := \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$

Z předpokladu:

$$\begin{aligned} f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle &\leq f(x) \quad / \cdot \lambda \\ f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle &\leq f(y) \quad / \cdot (-\lambda) \end{aligned}$$

Pronásobením a sečtením dostaneme:

$$\begin{aligned} f(z) + \lambda \langle \nabla f(z), \underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y - z}_z \rangle &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ \Rightarrow f(z) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

Což ale po dosazení za z je přesně ta nerovnost, která říká, že f je konvexní. \square

5.10 Věta o konvexitě a druhé derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^2(\Omega)$. Potom platí:

(a) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ pozitivně semidefinitní matice, pak f je konvexní na C .

(b) Jestliže f je konvexní na C a C je otevřená, potom $\nabla^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní matice pro každé $x \in C$.

(c) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ pozitivně definitní matice, pak f je ryze konvexní na C .

Důkaz (a).

Ať $x, y \in C$.

Taylorův polynom: existuje $\xi \in \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\} \subseteq C$ tak, že

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\xi)(y - x), y - x \rangle}_{\geq 0}$$
$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Což je přesné znění **věty o konvexitě a první derivaci**. Tedy f je nutně konvexní na C .

Důkaz (b).

Cíl: $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$

Ať $x \in C, y \in \mathbb{R}^n$.

Pak C otevřená \Rightarrow existuje $\delta > 0$ tak, že $x + \alpha y \in C \forall \alpha \in (0, \delta]$.

Taylorův polynom:

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y),$$

kde w má nulovou limitu v 0.

Použijme fakt, že f je konvexní:

$$f(x + \alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Když tedy dosadíme:

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Upravíme a podělíme výrazem $\frac{1}{2} \alpha^2$ ($\alpha > 0$).

$$\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \underbrace{2\|y\|^2 \omega(\alpha y)}_{\rightarrow 0 \text{ pro } \alpha \rightarrow 0_+} \geq 0$$

V limitě $\alpha \rightarrow 0_+$ tedy máme $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0$, což je přesně to, co jsme chtěli. \square

Poznámka. Nutnost otevřenosti C je velmi důležitá!

Důkaz (c). Podobně jako (a).

5.11 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 - y^2$ je konvexní na $\mathbb{R} \times \{0\}$. (\rightarrow množina $\mathbb{R} \times \{0\}$ není otevřená, jedná se o přímku)

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ je indefinitní, tedy funkce $f(x, y)$ není konvexní.

5.12 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ je ryze konvexní.

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 > 0, \det \nabla^2 f(x, y) = 4 - 1 > 0 \implies$ dle Sylvesterova kritéria je $\nabla^2 f(x, y)$ pozitivně definitní.

A podle bodu (c) **věty o konvexitě a druhé derivaci** můžeme říct, že funkce f je ryze konvexní.

5.13 Příklad ověření konvexnosti funkce s parametrem

Mějme funkci $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ je parametr.}$$

Pro jaké α je funkce f konvexní?

$$\nabla^2 f(x) = \overbrace{A + A^T}^{\text{ze symetrie}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(x) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2\alpha \end{vmatrix} \stackrel{R_3 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 4 \end{vmatrix} = (2\alpha - 4) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(2\alpha - 4) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 30(\alpha - 2)$$

Tedy aby f byla konvexní funkce: $30(\alpha - 2) \geq 0 \iff \alpha \geq 2$.

Musíme vyšetřit menší minory matice.

Vyškrtněme 3. řádek a 3. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

Vyškrtněme 2. řádek a 2. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2\alpha \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 8(\alpha - 2) \geq 0 \iff \alpha \geq 2 \dots \text{tuto podmínku již vyžadujeme.}$$

Vyškrtněme 1. řádek a 1. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2\alpha \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2\alpha \end{vmatrix} = 3(4\alpha - 3) \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{3}{4} \dots \text{vyžadujeme již silnější podmínku.}$$

A teď zbylé minoru po vyškrtnutí dvou řádků a sloupců:

$$4 \geq 0, \quad 6 \geq 0, \quad 2\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq 0 \dots \text{vyžadujeme již silnější podmínku.}$$

\implies Pokud $\alpha \geq 2$, pak je funkce f konvexní. Při $\alpha > 2$ je ryze konvexní.

5.14 Příklad ověření konvexity množiny

Mějme množinu

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2e^{-x+y^2} \leq 4, -x^2 + 3xy - 3y^2 \geq -1 \right\}.$$

Je M konvexní?

$$\text{Označme: } g_1(x, y) = x + 2e^{-x+y^2} \dots M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid g_1(x, y) \leq 4 \right\}$$

$$g_2(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 \dots M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid g_2(x, y) \leq 1 \right\}$$

$M = M_1 \cap M_2 \implies$ ukážeme konvexnost M_1 a M_2 , protože průnik zachovává konvexitu.

$\implies g_1$ a g_2 musí být konvexní.

- g_1 :

- x je afinní funkce \rightarrow konvexní.
- součet zachovává konvexitu.
- násobení zachovává konvexitu.
- exponenciála je konvexní funkce (dokonce striktně rostoucí).
- vnitřní funkce $(-x + y^2)$ je také konvexní.

$\implies g_1$ je konvexní funkce $\implies M_1$ je konvexní množina.

- g_2 :

- kvadrát je konvexní.
- je ale člen „ xy “ konvexní? Musíme se podívat na Hessovu matici.

$$\nabla^2 g_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \det \nabla^2 g_2(x, y) = 12 - 9 = 3 > 0 \\ 2 \geq 0 \end{array} \right\} g_2 \text{ je (ryze) konvexní funkce } \implies M_2 \text{ je konvexní množina.}$$

Protože M_1 i M_2 jsou konvexní množiny, pak nutně i $M_1 \cap M_2 = M$ je konvexní množina.

6 Podmínky optimality

6.1 Kužel přípustných směrů

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in M$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve přípustný směr množiny M v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $x + \alpha d \in M$.
- Množina $\mathcal{F}(M; x)$ všech přípustných směrů množiny M v bodě x se nazývá kužel přípustných směrů množiny M v bodě x .

$\mathcal{F}(M; x) \neq \emptyset$.

Je-li $x \in \text{int}(M)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \mathbb{R}^n$.

Je-li M konečná (neprázdná), pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

6.2 Hledání přípustných směrů

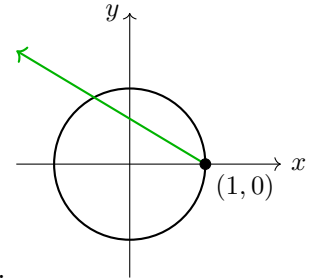
Mějme

(a) Je-li $M = S(0; 1)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

(b) Je-li $C = B(0; 1)$ a $\hat{x} = (1, 0)^T$, pak

$$\mathcal{F}(C; \hat{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) $M = S(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



Úvaha: Polopřímka z bodu $(1, 0)$ projde maximálně $2 \times$ skrz kružnici.

At $d \neq 0 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 1 &= \|x + \alpha d\|^2 = \langle x + \alpha d, x + \alpha d \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_1 + 2\alpha \langle x, d \rangle + \alpha^2 \|d\|^2 \\ \rightarrow 0 &= \alpha (2\langle x, d \rangle + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2\langle x, d \rangle}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}(M; x) = \{0\}. \end{aligned}$$

(b) Uvažujme kouli

$$C = B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \geq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\rangle = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2}_1 + 2\alpha \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d \right\rangle + \alpha^2 \|d\|^2$$

$$\rightarrow 0 \geq \alpha (2d_1 + \alpha \|d\|^2) \iff \alpha \leq -\frac{2d_1}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}\left(C; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

6.3 Kužel směrů poklesu

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve směr poklesu funkce f v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $f(x + \alpha d) < f(x)$.
- Množina $\mathcal{D}(f; x)$ všech směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel směrů poklesu funkce f v bodě x .

Definice implicitně obsahuje podmínku $[x, x + \delta d] \subseteq D$.

6.4 Nutná geometrická podmínka lokálního extrému

Jestliže x je bod lokálního minima funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na $M \subseteq D$, pak $\mathcal{F}(M; x) \cap \mathcal{D}(f; x) = \emptyset$.

Důkaz. Sporem.

Ať ne, tj. existuje $d \in \mathcal{F}(M, x) \cap \mathcal{D}(f, x)$.

Pak: $f(x + \alpha d) < f(x)$ a $x + \alpha d \in M$ pro všechna $\alpha > 0$ dostatečně malá.

Tedy spor s tím, že x je bod lokálního minima f na M . \square

6.5 Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve silný směr poklesu funkce f v bodě x , jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$.
- Množina $\mathcal{D}_0(f; x)$ všech silných směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel silných směrů poklesu funkce f v bodě x .

Kužel $\mathcal{D}_0(f; x)$ je množina všech řešení lineární nerovnice

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

$\mathcal{D}_0(f; x)$ je konvexní kužel.

6.6 Tvzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

- (a) Je-li $d \in \mathcal{D}(f; x)$, potom $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$.
- (b) $\mathcal{D}_0(f; x) \subseteq \mathcal{D}(f; x)$ (tj. jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, pak $d \in \mathcal{D}(f; x)$).

Důkaz.

(a) Ať $d \in \mathcal{D}(f; x)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &< 0 \text{ pro } \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.} \\ \implies \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}}_{=\langle \nabla f(x), d \rangle} &\leq 0 \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ať $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} f(x + \alpha d) &= f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), d \rangle + \alpha \|d\| \overbrace{\omega(\alpha d)}^{\text{zbytek}} \\ \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &= \underbrace{\langle \nabla f(x), d \rangle + \|d\| \omega(\alpha d)}_{\substack{\rightarrow \langle \nabla f(x), d \rangle \text{ pro } \alpha \rightarrow 0^+ \\ \text{a navíc } \langle \nabla f(x), d \rangle < 0}} \\ \implies \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &> 0 \text{ pro všechna } \alpha > 0 \text{ dostatečně malá.} \end{aligned}$$

6.7 Fermatova věta - nutná podmínka optimality

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in M$ je bodem lokálního minima funkce $f \in C^1(\Omega)$ na M . Potom platí:

- (a) $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ (tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0$ pro všechny $d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$).
- (b) Jestliže $\hat{x} \in \text{int}(M)$, pak $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.

(a) Víme, že $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}(f; \hat{x}) = \emptyset$.

Pak:

$$\mathcal{D}_0(f, \hat{x}) \subseteq \mathcal{D}(f, \hat{x}) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x}) = \emptyset. \quad \square$$

(Tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M, \hat{x})$)

(b)

$$\hat{x} \in \text{int}(M) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) = \mathbb{R}^n \xrightarrow{(a)} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Ať $d = -\nabla f(\hat{x})$.

$$-\|\nabla f(\hat{x})\|^2 \geq 0 \implies \nabla f(\hat{x}) = 0. \quad \square$$

6.8 Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f \in C^1(\Omega)$ je konvexní na $C \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in C$. Potom platí:

- (a) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\mathcal{F}(C; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$.
- (b) Předpokládejme, že $\hat{x} \in \operatorname{int}(C)$. Pak $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.

(a)

„ \Rightarrow “: Víme. Když máme bod minima, je určitě bodem lokálního minima \Rightarrow průnik je prázdný.

„ \Leftarrow “: Sporem.

At existuje $y \in C : \overbrace{f(y) - f(\hat{x})} < 0$.

At $d = y - \hat{x} (\neq 0) \in \mathcal{F}(C, \hat{x})$.

Cíl: $d \in \mathcal{F}(C, \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x})$.

$$\underbrace{\hat{x} + \alpha d}_{\hat{x} + \alpha(y - \hat{x}) = \alpha y + (1 - \alpha)\hat{x}} \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1] \text{ z konvexity } C.$$

f je konvexní na $C \iff f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), \overbrace{y - \hat{x}}^d \rangle \leq f(y) \implies \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \leq f(y) - f(\hat{x}) \underset{\text{z předp.}}{<} 0$.

To je ale spor, protože byl předpoklad, že průnik je prázdný. My jsme ale ukázali, že není. \square

(b)

„ \Rightarrow “ Víme.

„ \Leftarrow “ At $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Pak $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle = 0 \forall d \in \mathbb{R}^n = \mathcal{F}(C; \hat{x})$. Nemáme žádný směr poklesu $\xRightarrow{(a)} \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$. \square

6.9 Hledání bodu minima

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + x - 2y$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \dots \text{dle Sylvesterova kritéria je pozitivně definitní.}$$

$\implies f$ je nutně (ryze) konvexní.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 1 \\ 6y - 2x - 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x - 2y = -1 \\ -2x + 6y = 2 \end{matrix} \rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

6.10 Věta o podmínkách optimality 2. řádu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$, $\hat{x} \in \operatorname{int}(M)$ a $f \in C^2(\Omega)$. Potom platí:

- (a) Jestliže \hat{x} je bod lokálního minima funkce f na M , pak $\nabla^2 f(\hat{x})$ je pozitivně semidefinitní.
- (b) Jestliže $\nabla f(\hat{x}) = 0$ a $\nabla^2 f(\hat{x})$ je pozitivně definitní, pak \hat{x} je bod ostrého lokálního minima.

Důkaz vynecháme.

6.11 Příklad použití věty o podmínkách optimality 2. řádu

Je dána funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 2y.$$

Určete lokální extrémy funkce.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y + x + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x^2 + y = 0 \\ y + x + 2 = 0 \end{matrix} \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

Podezřelé body jsou:

- $x = -1 \implies y = -1$
- $x = 2 \implies y = -4$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(-1, -1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$ dle Sylvesterova kritéria není pozitivně semidefinitní, není ani negativně semidefinitní, je indefinitní. Dle věty o podmínkách optimality 2. řádu není lokálním minimem ani maximem.

$\nabla^2 f(2, -4) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$ dle Sylvesterova kritéria je pozitivně definitní. V bodě $(2, -4)$ se tedy nachází (ostré) lokální minimum, nikoliv však globální.

6.12 Hledání bodu minima

Nalezněte, pokud existují, všechny body minima funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2xz$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \det \nabla^2 f(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 7 > 0 \\ |4| &= 4 > 0 \end{aligned} \right\} \text{pozitivně definitní} \implies f \text{ je ryze konvexní.}$$

Protože f je konvexní, body minima budou přesně stacionární body. A protože f je ryze konvexní, tak bude mít právě jeden bod minima.

$$\begin{aligned} 4x + y - 2z &= 0 &\Rightarrow 2z + y &= 0 \Rightarrow z = -2y \\ x + 2y &= 0 &\Rightarrow x &= -2y \\ -2x &+ 2z &= 0 &\Rightarrow x = z \end{aligned}$$

Jediný bod minima je tedy očividně $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6.13 Omezení ve tvaru nerovnosti - aproximace $\mathcal{F}(M; \hat{x})$

At g_1, \dots, g_k jsou reálné funkce definované na množině $M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in M$. Označme si:

- Množina $\mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x) := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x) = 0\}$ se nazývá indexová množina aktivních omezení v bodě x .
- Jestliže $i \in \mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x)$, pak $g_i(x) \leq 0$ se nazve **aktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě x .
- Jestliže $i \notin \mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x)$, pak $g_i(x) < 0$ se nazve **neaktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě x .

Poznámka. V textu dále se obvykle bude uvádět pouze $\mathcal{I}(x) = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x) = 0\}$. Když přeindexujeme funkce $g_i(x)$, znamenalo by to něco jiného, proto se u \mathcal{I} uvádí $((g_i)_{i=1}^k; x)$, ale my většinou přeindexovávat nebudeme.

Definice. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina,

$$g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega), x \in M \text{ a } M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Definujme množinu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}((g_i)_{i=1}^k; x) &:= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}(x)\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}(x)} \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0\} \end{aligned}$$

jako aproximaci $\mathcal{F}(M; \hat{x})$.

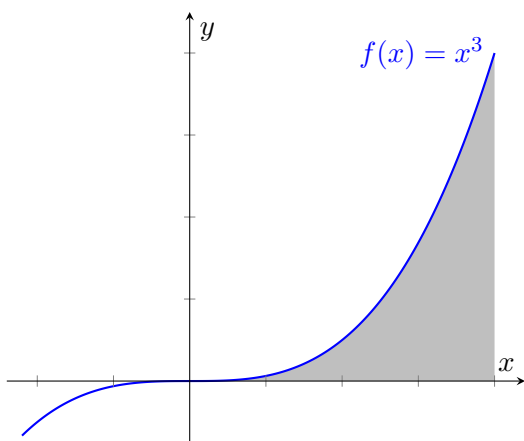
6.14 Příklad výpočtu \mathcal{G} a \mathcal{F}

Je dána množina

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 \leq 0, -y \leq 0\}$$

a bod $\hat{x} = (0, 0)^T$. Určete množiny $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ a $\mathcal{G}((g_i)_{i=1}^2; \hat{x})$.

Nákres množiny.



Výpočet $\mathcal{F}(M; \hat{x})$.

? $0 + \alpha d \in M \quad \forall \alpha > 0$ dostatečně malé.

$$\alpha d_2 - \alpha^3 d_1^3 \leq 0 \quad (1)$$

$$-\alpha d_2 \leq 0 \quad \forall \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.} \quad (2)$$

$$(2) \implies d_2 \geq 0$$

$$(1) \implies d_2 \leq \alpha^2 d_1^3 \quad \forall \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.}$$

$d_2 \geq 0 \implies d_1 \geq 0$ a protože to platí $\forall \alpha > 0$ dostatečně malá, pak $d_2 = 0$, protože si můžu vzít libovolné malé, tedy i limitně blízké nule, α .

$$\implies \mathcal{F}(M; (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 \geq 0 \right\}.$$

Výpočet $\mathcal{G}((g_i)_{i=1}^k; \hat{x})$.

Označme si $g_1(x, y) = y - x^3$ a $g_2(x, y) = -y$.

Pak:

$$\left. \begin{aligned} \langle \nabla g_1(0), d \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = d_2 \leq 0 \\ \langle \nabla g_2(0), d \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = d_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} d_2 = 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2), (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid d_1 \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \mathcal{G} \text{ je větší jak } \mathcal{F}.$$

Protože \mathcal{G} je pouze aproximací \mathcal{F} , může a bude se stávat, že \mathcal{G} bude větší jak \mathcal{F} .

Přidejme si další, fakticky zbytečnou, podmínku navíc.

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y - x^3}_{g_1(x, y)} \leq 0, \underbrace{-y}_{g_2(x, y)} \leq 0, \underbrace{-x - y}_{g_3(x, y)} \leq 0\}$$

$$\langle \nabla g_3(0), d \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = -d_1 - \underbrace{d_2}_{=0} \leq 0 \implies -d_1 \leq 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2, g_3), (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid d_1 \geq 0 \right\}. \text{ Což odpovídá přesně množině } \mathcal{F}.$$

Je tedy očividné, že \mathcal{G} závisí na popisu množiny.

6.15 Ukázka, že aproximací \mathcal{F} lze zkazit prázdnot průniku

Mějme optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && x + y \\ &\text{za podmínek} && y - x^3 \leq 0, \\ &&& -y \leq 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(f; 0) &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(0), d \rangle < 0\} \\ &\stackrel{=}{=}_{\nabla f(0)=(1,1)} \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid d_1 + d_2 < 0 \right\} \dots \text{například } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_0(f; 0), \text{ ale } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}(x)! \end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{G}(\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) \neq \emptyset \implies$ nahrazením podmínek optimality můžeme zkazit prázdnot průniku, protože \mathcal{G} může být větší jak \mathcal{F} .

7 KKT podmínky

7.1 Věta o nutných KKT podmínkách

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$,

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\} \text{ a } \hat{x} \in M.$$

Jestliže $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$ a \hat{x} je bod lokálního minima na f na M , pak existuje $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T \in \mathbb{R}^k$ tak, že

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) &= 0, \\ \mu_i g_i(\hat{x}) &= 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i &\geq 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Důkaz.

- $\mathcal{I}(\hat{x}) = \emptyset \implies \hat{x} \in \text{int}(M) \implies \nabla f(\hat{x}) = 0$ z **Fermatovy věty**.
 \rightarrow volba $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$. Pak KKT podmínky splněny.

- $\emptyset \neq \mathcal{I}(\hat{x}) = \{1, \dots, l\}$

Víme, že máme bod lokálního minima $(\hat{x}) \xRightarrow{\text{Fermatova věta}} \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$,

tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$.

Teď chceme dokázat, že platí $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$.

Protože $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})}$ koinciduje s $\mathcal{G}(\hat{x})$ a ze spojitosti skalárního součinu plyne, že
 $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \underbrace{\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})}}_{\mathcal{G}(\hat{x})}$.

To tedy znamená $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$. Z toho plyne, že neexistuje $d \in \mathbb{R}^n$, pro který platí:

$$\left. \begin{aligned} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle &< 0 \dots \text{ tj. } \langle -\nabla f(\hat{x}), d \rangle > 0 \\ \langle \nabla g_1(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \\ &\vdots \\ \langle \nabla g_l(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \end{aligned} \right\} A^T d \leq 0, \text{ kde } A = (\nabla g_1(\hat{x}), \dots, \nabla g_l(\hat{x}))$$

No a z **Farkasova lemma** tedy nutně platí: ex. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)^T \in \mathbb{R}_+^l : \underbrace{A\mu}_{\sum_{i=1}^l \mu_i \nabla g_i} = -\nabla f(\hat{x})$.

\rightarrow volme dále $\mu_{l+1}, \dots, \mu_k = 0$. Pak

$$\begin{aligned} -\nabla f(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), \\ \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) &= 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i &\geq 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

A to jsou přesně KKT podmínky. \square

7.2 Terminologie KKT podmínek

- Podmínky

$$(P1) \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

$$(P2) \mu_i g_i(\hat{x}) = 0,$$

$$(P3) \mu_i \geq 0,$$

se souhrnně nazývají **KKT podmínky**.

- Podmínka (P1) se nazývá **podmínka stacionarity**.
- Podmínka (P2) se nazývá **podmínka komplementarity**.
- Koeficienty $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ splňující KKT podmínky se nazývají **KKT multiplikátory** (Lagrangeovy multiplikátory) v bodě \hat{x} .
- Bod \hat{x} se nazve **KKT bod**, existuje-li vektor $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ KKT multiplikátorů v bodě \hat{x} .

7.3 Příklad použití KKT podmínek

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte } \underbrace{x+y}_{f(x,y)} \\ &\text{za podmínek } \underbrace{x}_{g_1(x,y)} \geq 0, \\ &\quad \underbrace{y}_{g_2(x,y)} \geq 0. \end{aligned}$$

Určete KKT body.

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x, y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

KKT podmínky:

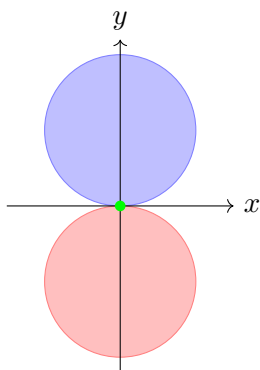
$$\begin{aligned} 1 + \mu_1(-1) + \mu_2(0) &= 0 &\rightarrow \mu_1 &= 1 \\ 1 + \mu_1(0) + \mu_2(-1) &= 0 &\rightarrow \mu_2 &= 1 \\ \mu_1(-x) &= 0 \\ \mu_2(-y) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jediný KKT bod je tedy $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a jedná se o bod minima.

7.4 Příklad, že KKT podmínky vždy nenaleznou všechny body

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte } x \\ &\text{za podmínek } x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \\ &\quad x^2 + (y+1)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Nákres.



Přípustná množina: $M = \{0\} \rightarrow$ určitě konvexní množina.

KKT podmínky:

$$1 + \mu_1(2 \cdot 0) + \mu_2(2 \cdot 0) = 0 \times$$

\vdots

$\Rightarrow (0,0)$ není KKT bod i když je úloha konvexní a bod $(0,0)$ je očividně bodem minima.

7.5 Afinní podmínka regularity

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Řekněme, že $(g_i)_{i=1}^k$ splňuje afinní podmínku regularity, jestliže g_1, \dots, g_k jsou afinní.

7.6 Slaterova podmínka regularity

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Řekněme, že $(g_i)_{i=1}^k$ splňuje Slaterovu podmínku regularity, jestliže g_1, \dots, g_k jsou konvexní na Ω a existuje $x \in \Omega$ tak, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $g_i(x) < 0$.

7.7 Věta o postačujících KKT podmínkách

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ jsou konvexní funkce na $C = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$. Jestliže $\hat{x} \in C$ je KKT bod, pak \hat{x} je bod minima funkce f na C .

Důkaz. Ať $x \in C$.

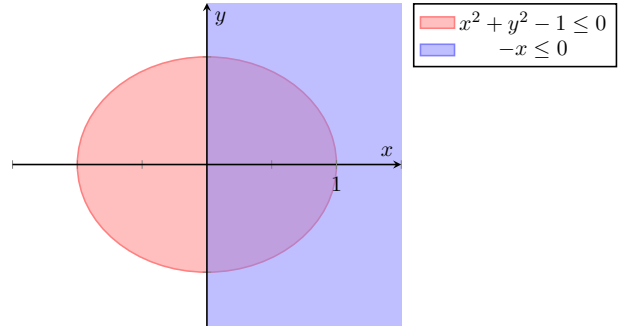
Cíl: $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0$ ($= \hat{x}$ je minimum)

Charakterisace pomocí tečné nadroviny: $f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \leq f(x) \quad x, \hat{x} \in C$

$$\begin{aligned} f(x) - f(\hat{x}) &\stackrel{\substack{f \text{ je konvexní} \\ \text{na } C \subseteq \Omega}}{\geq} \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \stackrel{\substack{\text{podmínka} \\ \text{stacionarity}}}{=} \left\langle - \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k -\langle \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \mu_i = \sum_{i=1}^n (g_i(\hat{x}) - g_i(x)) \mu_i \stackrel{\substack{\text{podmínka} \\ \text{komplementarity}}}{=} - \sum_{i=1}^n \underbrace{\mu_i}_{\substack{\text{podmínka} \\ \text{nezápornosti}}} \overbrace{g_i(x)}^{\leq 0 \forall x \in C} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

7.8 Použití podmínek regularity k ověření KKT podmínek

minimalisujte $2x^2 + y^2$
 za podmínek $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$,
 $-x \leq 0$.



Afinní podmínka splněna není,
 ověříme Slaterovu.

Množina je očividně konvexní a zároveň zvolme $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Omega$. Pak $g_i(x) < 0$, Slaterova podmínka je tedy očividně splněna.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\Rightarrow KKT podmínky:

$$\begin{aligned} 4x + \mu_1 2x + \mu_2(-1) &= 0 \Leftrightarrow 2x(2 + \mu_1) - \mu_2 = 0 \\ 2y + \mu_1 2y + \mu_2 0 &= 0 \Leftrightarrow 2y(1 + \mu_1) = 0 \xRightarrow{\mu_1 \geq 0} y = 0 \\ \mu_1(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ \mu_2(-x) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$y = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 2x(2 + \mu_1) &= \mu_2 \\ \mu_1(x^2 + 1) &= 0 \\ \mu_2 x &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x \neq 0 &\Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow 2 + \mu_1 = 0 \dots \text{spor s } \mu_1 \geq 0. \\ x = 0 &\Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Existuje bod $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pro který jsou splněny nutné a postačující KKT podmínky.

7.9 Určení nutných a postačujících podmínek optimality

Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $\lambda > 0$. Je dána úloha

$$\text{minimalisujte } f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Dx\|^2 \text{ na } \mathbb{R}^n.$$

Jaké jsou nutné a postačující podmínky optimality?

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Ax - b, Ax - b \rangle + \lambda \langle Dx, Dx \rangle \\ &= \underbrace{\langle Ax, Ax \rangle}_{A^T A x, x} - 2 \langle Ax, b \rangle + \|b\|^2 + \lambda \underbrace{\langle Dx, Dx \rangle}_{D^T D x, x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \langle (A^T A + \lambda D^T D) x, x \rangle - 2 \langle x, A^T b \rangle + \|b\|^2$$

Je f konvexní?

Ano, neboť $\nabla^2 f(x) = 2(A^T A + \lambda D^T D)$ je pozitivně semidefinitní, protože pro $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle 2(A^T A + \lambda D^T D) x, x \rangle &= 2[\langle Ax, Ax \rangle + \lambda \langle Dx, Dx \rangle] \\ &= 2[\|Ax\|^2 + \lambda \|Dx\|^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Tedy f je konvexní \implies stačí najít stacionární body.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 f(x) = 2(A^T A + \lambda D^T D)x - 2(A^T b) + 0 \\ &= (A^T A + \lambda D^T D)x - A^T b \\ \implies A^T b &= (A^T A + \lambda D^T D)x \end{aligned}$$

A to je nutná a postačující podmínka pro x , aby byl bodem minima f na \mathbb{R}^n .

7.10 Určení KKT podmínek

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & x^4 + y^4 + 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y \\ \text{za podmínku} \quad & x + y \geq 6, \\ & 2x - y \geq 3, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Napište KKT podmínky.
- (b) Jsou nutné a postačující?
- (c) Ukažte, že $(3, 3)^T$ je jediný bod minima.

(a) Mějme

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= -x - y + 6, \\ g_2(x, y) &= 2x - y + 3, \\ g_3(x, y) &= -x, \\ g_4(x, y) &= -y, \\ f(x, y) &= x^4 + y^4 + 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y. \end{aligned}$$

\rightarrow použijeme **afinní podmínku regularity** $\rightarrow g_i$ jsou affinní.

KKT podmínky:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) + \mu_1 \nabla g_1(x, y) + \mu_2 \nabla g_2(x, y) + \mu_3 \nabla g_3(x, y) + \mu_4 \nabla g_4(x, y) &= 0 \\ \mu_i g_i(x, y) &= 0, i = 1, 2, \dots, \\ \mu_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} 4x^3 + 24x - y - 1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ 4y^3 + 12y - x - 1 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 0 \\ \mu_1(-x - y + 6) &= 0, \\ \mu_2(x - 2y + 3) &= 0, \\ x\mu_3 &= 0, \\ y\mu_4 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jsou postačující? Máme konvexní úlohu? Musíme ověřit konvexitu u g_i a f .

- g_i jsou afinní \implies jsou konvexní.

• f :

- kvadráty jsou ryze konvexní
- součet ryzích konvexních je ryzí konvexní

$$h(x, y) = 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y$$

$$\nabla^2 h(x, y) = \begin{bmatrix} 24 & -1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} = 24 \cdot 12 - 1 > 0; \quad 24 > 0 \implies h(x, y) \text{ je pozitivně definitní.}$$

$\implies h(x, y)$ je ryze konvexní.

A proto je i $f(x, y)$ ryze konvexní, protože součet ryze konvexních dává ryze konvexní \implies existuje právě jeden bod minima.

Ověříme $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Ať $x = y = 3$. Pak

$$4 \cdot 27 + 24 \cdot 3 - 4 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \quad (\text{I.})$$

$$4 \cdot 12 + 12 \cdot 3 - 4 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_4 = 0 \quad (\text{II.})$$

$$\mu_1 \cdot 0 = 0$$

$$\mu_2 \cdot 0 = 0$$

$$3\mu_3 = 0 \implies \mu_3 = 0$$

$$3\mu_4 = 0 \implies \mu_4 = 0$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\text{I.} - \text{II.}: 24 \cdot 3 - 12 \cdot 3 - 3\mu_2 = 0 \implies \mu_2 = \frac{1}{3}(24 \cdot 3 - 12 \cdot 3) > 0.$$

$$\mu_1 = 4 \cdot 27 + 24 \cdot 3 - 4 - \frac{2}{3}(24 \cdot 3 - 36) > 0.$$

7.11 Určení KKT podmínek

minimalisujte $\alpha x + y$, $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

za podmínek $x^2 + y^2 - 25 \leq 0$,

$x - y - 1 \leq 0$.

Určete α tak, aby $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ bylo řešení.

KKT podmínky:

$$\alpha + \mu_1(2x) + \mu_2 \cdot 1 = 0$$

$$1 + \mu_1(2y) - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1(x^2 + y^2 - 25) = 0,$$

$$\mu_2(x - y - 1) = 0,$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

g_i jsou konvexní, f je konvexní \implies KKT podmínky jsou postačující.

Slaterova podmínka optimality je splněna \implies KKT podmínky jsou nutné.

$x = 4, y = 3$:

$$\alpha + 8\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (\text{I.})$$

$$1 + 6\mu_1 - \mu_2 = 0, \quad (\text{II.})$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

$$\text{I. + II.: } \alpha + 1 + 14\mu_1 = 0$$

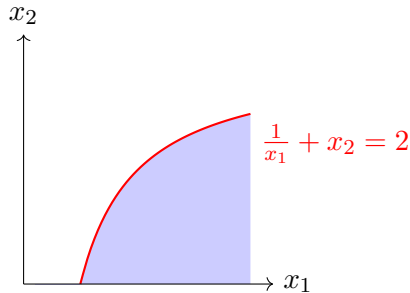
$$\mu_1 = \frac{-\alpha-1}{14} \stackrel{!}{\geq} 0 \implies -1 \geq \alpha. \text{ A tedy } \mu_2 = 1 + 6\mu_1 \geq 0.$$

Tedy aby $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ bylo řešení této úlohy, musí platit $\alpha \leq -1$.

7.12 Určení KKT podmínek s trikem

Mějme zadání

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && \frac{x_1}{x_2} \\ &\text{za podmínek} && \frac{1}{x_1} + x_2 \leq 2, \\ &&& x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$



Z nákresu množina vypadá konvexní, co ale minimalisovaná funkce?

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^4} < 0 \dots \text{indefinitní}$$

\Rightarrow KKT podmínky jsou jen nutné, nikoliv postačující.

Využijeme trik, uděláme substituci: $x_1 = e^{y_1}$, $x_2 = e^{y_2} \dots \varphi(y_1, y_2) = (e^{y_1}, e^{y_2})$, $\varphi(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. A úlohu převedeme na:

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && e^{y_1} - e^{y_2} \\ &\text{za podmínek} && e^{-y_1} + e^{y_2} \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{y}_1 - \hat{y}_2} &\leq e^{y_1 - y_2} \\ \underbrace{\frac{e^{\hat{y}_1}}{e^{\hat{y}_2}}}_{f(\varphi(\hat{y}_1, \hat{y}_2))} &\leq \underbrace{\frac{e^{y_1}}{e^{y_2}}}_{f(\varphi(y_1, y_2))} \\ f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &\leq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in M. \end{aligned}$$

Slaterova podmínka je splněna $\rightarrow (y_1, y_2) = (1, 0)$.

\Rightarrow KKT podmínky jsou nutné a postačující.

$$e^{y_1 - y_2} + \mu(-e^{-y_1}) = 0 \tag{I}$$

$$-e^{y_1 - y_2} + \mu e^{y_2} = 0 \rightarrow \mu = \frac{e^{y_1 - y_2}}{e^{y_2}} = e^{y_1 - 2y_2} \tag{II}$$

$$\mu(e^{-y_1} + e^{y_2} - 2) = 0 \tag{III}$$

$$\mu \geq 0 \tag{IV}$$

Očividně $\mu \neq 0 \Rightarrow e^{-y_1} + e^{y_2} - 2 = 0$ (III).

$$\text{Dosazení (II) do (I): } e^{y_1 - y_2} - e^{-2y_2} = 0.$$

$$e^{y_1 - y_2} = e^{-2y_2}$$

$$y_1 - y_2 = -2y_2$$

$$y_1 = -y_2$$

Dosazením do (III) získáme $2e^{y_2} - 2 = 0 \Rightarrow e^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0 = y_1$.

Jediný bod minima je $[0, 0]^T$.

Tedy zpětný chod na původní úlohu: $x_1 = e^0 = 1$, $x_2 = e^0 = 1$.

Původní úloha má řešení $[1, 1]^T$.

8 Dualita

8.1 Pomocný důkaz vlastnosti infima

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) = \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y)$$

Důkaz.

„ \geq “:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in M} h_1(x) &\leq h_1(t) \quad \forall t \in M \\ \inf_{y \in N} h_2(y) &\leq h_2(s) \quad \forall s \in N \end{aligned}$$

$$\implies \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y) \leq \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \square$$

„ \leq “:

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) + h_2(s) \quad \forall \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \in M \times N$$

$$\text{což lze upravit: } -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x \in M} h_1(x) \quad \forall s \in N.$$

A to samé lze ukázat i pro h_2 :

$$-h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_2(s) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{y \in N} h_2(y) \quad \forall t \in M.$$

Ted sečteme tyto dvě nerovnice:

$$-h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

Tedy stačí dokázat, že

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq -h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$0 \leq -h_1(t) - h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$h_1(t) + h_2(s) \leq \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

8.2 Dualita - motivační příklad

Je dána úloha

$$\text{minimalisujte } 2x + 3y$$

$$\text{za podmíněk } 1 - x - y \leq 0,$$

$$x, y \in [0, 2].$$

Označme $f(x, y) = 2x + 3y$, $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [0, 2]^2 \mid 1 - x - y \leq 0 \right\}$ a $\hat{f} = \min_{x \in M} f(x)$.

Odhadněme min funkce ze spoda.

Pro $(x, y)^T \in M$:

$$f(x, y) \geq f(x, y) + g_1(x, y) = 2x + 3y + (1 - x - y) = x + 2y + 1 \geq 1.$$

A protože $\hat{f} = \min f(x)$, nutně musí platit $\hat{f} \geq 1$.

Zkusme teď jiný odhad.

$$f(x, y) \geq f(x, y) + 2g_1(x, y) = 2x + 3y + 2(1 - x - y) = 2y + 2 \geq 2.$$

Nalezli jsme lepší odhad: $\hat{f} \geq 2$. Jak tedy správně určit „nejlepší“ možný dolní odhad \hat{f} ?

Definujme si

$$L(x, y, \mu) = 2x + 3y + \mu(1 - x - y),$$

$$\varphi(\mu) = \min_{(x, y)^T \in [0, 2]^2} L(x, y, \mu).$$

Pro každé $\mu \geq 0$ pak platí:

$$\varphi(\mu) = \min_{(x, y)^T \in \Omega} L(x, y, \mu) \leq \min_{(x, y)^T \in M} L(x, y, \mu) \leq \hat{f}$$

„Optimální“ dolní odhad \hat{f} pomocí φ vede na úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \varphi(\mu) \\ \text{za podmínek} & \mu \geq 0. \end{array}$$

Kde

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \min_{(x, y)^T \in [0, 2]^2} [(2 - \mu)x + (3 - \mu)y + \mu] \\ &= \mu + \min_{x \in [0, 2]} (2 - \mu)x + \min_{y \in [0, 2]} (3 - \mu)y \\ &= \begin{cases} \mu & \mu < 2 \\ \mu + 4 - 2\mu & \mu \in [2, 3) \\ 10 - 3\mu & \mu \in [3, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Tu budeme nazývat duální úlohou.

Hodnota $\max \varphi(\mu)$ na $[0, +\infty)$ je $\hat{\varphi} \implies \hat{\varphi} \leq \hat{f}$.

8.3 Tvrzení o konkávnosti duální úlohy

Jestliže $D_\varphi \neq \emptyset$, pak φ je konkávní.

Důkaz.

Mějme $\mu, \nu \in D_\varphi$, $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu) &\stackrel{?}{=} \inf_{x \in \Omega} \overbrace{\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)}^{f(x)} + \overbrace{\lambda \langle g(x), \mu \rangle + (1 - \lambda)\langle g(x), \nu \rangle}^{\langle g(x), \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \rangle} \\ &= \inf_{x \in \Omega} \lambda(f(x) + \langle g(x), \mu \rangle) + (1 - \lambda)(f(x) + \langle g(x), \nu \rangle) \\ &\stackrel{\text{vlastnost}}{\geq} \lambda \inf_{x \in \Omega} (f(x) + \langle g(x), \mu \rangle) + (1 - \lambda) \inf_{x \in \Omega} (f(x) + \langle g(x), \nu \rangle) \\ &\stackrel{\text{infima}}{=} \lambda\varphi(\mu) + (1 - \lambda)\varphi(\nu) > -\infty \implies \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \in D_\varphi. \quad \square \end{aligned}$$

8.4 Věta o slabé dualitě

(a) Pro každé $x \in M$ a $\mu \in N$ je $\varphi(\mu) \leq f(x)$.

(b) $\hat{\varphi} \leq \hat{f}$.

(a) Důkaz.

Víme: $L(x, \mu) \leq f(x) \quad \forall x \in M, \forall \mu \geq 0$.

$$\varphi(\mu) = \inf_{y \in \Omega} L(y, \mu) \leq \inf_{y \in M} L(y, \mu) \leq L(x, \mu) \leq f(x) \quad \forall x \in M, \forall \mu \in N. \quad \square$$

(b) Důkaz.

Z (a) máme $\overbrace{\sup_{\mu \in N} \varphi(\mu)}^{\hat{\varphi}} \leq f(x) \quad \forall x \in M$.

$$\implies \hat{\varphi} \leq \inf_{x \in M} f(x) = \hat{f}. \quad \square$$

8.5 Důsledek věty o slabé dualitě

(a) Jestliže existují $\hat{x} \in M$ a $\hat{\mu} \in N$ splňující $\varphi(\hat{\mu}) = f(\hat{x})$, pak

$$\hat{\mu} \in \operatorname{argmax}_{\mu \in N} \varphi(\mu) \quad \text{a} \quad \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x).$$

(b) Je-li $\hat{f} = -\infty$, pak $N = \emptyset$.

(c) Je-li $\hat{\varphi} = +\infty$, pak $M = \emptyset$.

Důkaz (a).

Z **věty o slabé dualitě** platí:

$$\varphi(\mu) \leq f(\hat{x}) \stackrel{\text{předpoklad}}{=} \varphi(\hat{\mu}) \quad \forall \mu \in N \iff \hat{\mu} \in \operatorname{argmax}_{\mu \in N} \varphi(\mu).$$

Analogicky:

$$f(\hat{x}) \stackrel{\text{předpoklad}}{=} \varphi(\hat{\mu}) \leq f(x) \quad \forall x \in M \iff \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x). \quad \square$$

Důkaz (b).

Sporem. Ať $N \neq \emptyset$. Volme $\mu \in N$.

$$\text{Pak } \underbrace{\varphi(\mu)}_{\in \mathbb{R}} \leq \hat{\varphi} \leq \hat{f} = -\infty \dots \text{spor.} \quad \square$$

Důkaz (c).

Sporem. Ať $M \neq \emptyset$. Volme $x \in M, \mu \in N$.

$$\text{Pak } \varphi(\mu) \leq \hat{\varphi} = +\infty \leq \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \dots \text{spor.} \quad \square$$

8.6 Ukázkový příklad na slabou dualitu

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -x^2 \\ &\text{za podmínek} && 2x - 1 \leq 0, \\ &&& x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

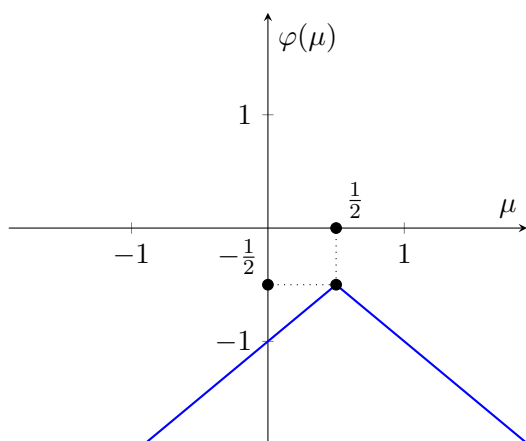
Tedy:

$$L(x, \mu) = -x^2 + \mu(2x - 1) = (-x^2 + 2x\mu) - \mu$$

$$\varphi(\mu) = \left[\min_{x \in [0, 1]} (-x^2 + 2x\mu) \right] - \mu$$

Pozorování. Minimalisovaná funkce je (ryze) konkávní. Nemůže tedy v žádném vnitřním bodě nabývat minima. Dosazení krajních bodů intervalu:

$$\varphi(\mu) = \min \{0, 2\mu - 1\} - \mu = \begin{cases} \mu - 1 & \text{pro } \mu < \frac{1}{2}, \\ -\mu & \text{pro } \mu \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Z grafu vyčteme: $\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}$. A to samé uděláme pro f , kde výsledek bude $\hat{f} = -\frac{1}{4}$.

Tedy $\hat{\varphi} < \hat{f}$.

8.7 Věta o silné dualitě

Nechť $\hat{f} < \infty$ a cílová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- (a) Komponenty g_1, \dots, g_k zobrazení g splňují **Slaterovu podmínku** regularity.
- (b) Zobrazení g je afinní a Ω je konvexní polyedrická množina.

Potom $\hat{f} = \hat{\varphi}$. Je-li navíc $\hat{f} \in \mathbb{R}$, pak existuje řešení úlohy (D) .

Důkaz vynecháme.

9 Lineární programování

Úlohy lineárního programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

- (a) cílová funkce afinní (bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na lineární funkce)
- (b) přípustná množina je konvexní polyedrická množina (tj. lze popsat pomocí konečné soustavy lineárních rovnic a nerovnic)

Příklad.

Firma vyrábí 2 druhy výrobků A a B . V tabulce je uvedeno množství materiálu (ve vhodných jednotkách) potřebný k výrobě jednotkového množství daného druhu výrobku a také jeho prodejní cena.

| | Materiál X | Materiál Y | Cena |
|-------------|--------------|--------------|----------|
| Výrobek A | 2 | 3 | 6000 Kč |
| Výrobek B | 4 | 4 | 10000 Kč |

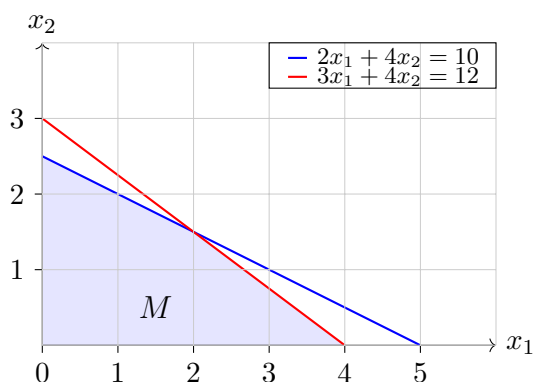
Na skladu je jen 10 jednotek materiálu X a 12 jednotek materiálu Y . Jak mají ve firmě nastavit výrobní proces, aby celková cena za vyrobené množství výrobků byla co největší?

Odpověď je přímo v zadání.

x_1 ... množství výrobku A

x_2 ... množství výrobku B

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} && 6x_1 + 10x_2 \\ &\text{za podmínek} && 2x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ & && 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & && x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Graficky lze nalézt, že maximum se nabývá v bodě $(2, \frac{3}{2})^T$. Maximum je $f(2, \frac{3}{2}) = 27$.

Pokračování příkladu.

Obchodník chce od firmy koupit veškerý materiál ze skladu. Jaké ceny za materiál X a Y by měl firmě nabídnout, aby zaplatil co nejmenší částku a firmě se přesto vyplatilo materiál prodat namísto výroby výrobků?

Tato otázka vede na úlohu:

$y_1 \dots$ cena za jednotkové množství materiálu X

$y_2 \dots$ cena za jednotkové množství materiálu Y

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && 10y_1 + 12y_2 \\ &\text{za podmínek} && 2y_1 + 3y_2 > 6, \\ &&& 4y_1 + 4y_2 > 10, \\ &&& y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pozorování. Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální.

9.1 Zápis úlohy lineárního programování

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && x_1 - x_2 \\ &\text{za podmínek} && 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ &&& -2 \leq x_2 \leq 3, \\ &&& x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Zapišme úlohu v kanonickém tvaru.

Pomocné substituce: $y_1 = -x_1$, $x_2 = y_2 - y_3$, $y_2, y_3 \geq 0$.

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -y_1 - y_2 + y_3 \\ &\text{za podmínek} && -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ &&& 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq -5, \\ &&& -y_2 + y_3 \geq -3, \\ &&& y_2 - y_3 \geq -2, \\ &&& y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zapišme úlohu ve standardním tvaru.

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -y_1 - y_2 + y_3 \\ &\text{za podmínek} && -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 = 5, \\ &&& y_2 - y_3 - y_4 = -2, \\ &&& y_2 - y_3 + y_5 = 3, \\ &&& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \end{aligned}$$

9.2 Terminologie lineárního programování

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && \langle x, c \rangle \\ &\text{za podmínek} && Ax = b, \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

kde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ splňuje

$$\text{rank } A = \text{rank}(A, b) = m \leq n.$$

Dále se v této sekci budeme držet následujícího značení:

- Přípustná množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
- $J(x) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j > 0\}$, kde $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ sloupce matice A .
- Nechť $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ je neprázdná. Pak A_B je matice tvořená sloupci matice A s indexy v B (v daném pořadí). Je-li $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, pak x_B je sloupec tvořený prvky $x_i, i \in B$, v daném pořadí.
- $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$.

9.3 Basický přípustný bod

Bod $x \in M$ se nazve basický přípustný bod (BPB) úlohy lineárního programování, pokud existuje m -prvková množina $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že

- A_B je regulární,
- $x_j = 0$ pro každé $j \in N$.

Množina B z definice BPB se nazývá přípustná báse.

9.4 Příklad BPB

Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ a $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Jaké jsou BPB?

- $B = \{1, 2\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Evidentně invertibilní.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \dots \underbrace{Ax}_{A_B x_B + A_N \underbrace{x_N}_{=0}} = b. \text{ Tedy } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in M \text{ je BPB.}$$

- $B = \{1, 3\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Evidentně invertibilní.

$$\text{Tedy } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in M \text{ je BPB.}$$

- $B = \{2, 3\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Evidentně není regulární. Žádný bod nemůže být BPB.

9.5 Tvzení o charakterisaci BPB

Nechť $x \in M$. Pak x je BPB právě tehdy, když $\{a_j \mid j \in J(x)\}$ je lineárně nezávislá množina.

Důkaz.

„ \Rightarrow “: x je BPB \implies existuje $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ m -prvková tak, že $\{a_j \mid j \in B\}$ je lineárně nezávislá. Navíc $J(x) \subseteq B$, protože $J(x)$ obsahuje ty indexy, které odpovídají kladným komponentám a všechny komponenty indexované mimo indexy z B jsou nulové.

Tedy $\{a_j \mid j \in J(x)\}$ je lineárně nezávislá.

„ \Leftarrow “: Je-li $|J(x)| = m$, pak jasně ($B = J(x)$).

Ať $|J(x)| < m$. Z předpokladu víme $\text{rank}(A) = m$. Pak lze $J(x)$ doplnit do m -prvkové množiny $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ tak, že $\{a_j \mid j \in B\}$ je lineárně nezávislá. $\Rightarrow x$ je BPB. \square

9.6 Tvrzení, že dva různé BPB musí mít různé množiny B

Pro každou m -prvkovou množinu $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ takovou, že A_B je regulární, existuje nejvýše jedno $x \in M$ splňující $x_j = 0$ pro každé $j \in N$.

Důkaz. Sporem.

Ať $x, y \in M$ jsou různé a splňují $x_j = y_j = 0$ pro každé $j \in N$.

$$\left. \begin{aligned} b &= Ax = \sum_{j=1}^n x_j a_j = \sum_{j \in B} x_j a_j = A_B x_B \\ b &= Ay = A_B y_B \end{aligned} \right\} A_B x_B = A_B y_B$$

A protože A je dle předpokladu regulární, tak dostaneme:

$$x_B = y_B \Rightarrow x = y$$

Což je ale spor, protože x a y mají být různé. \square

Horní hranice počtu BPB úlohy LP je tedy $\binom{n}{m}$.

9.7 Příklad na degenerované BPB

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Určete všechny základní přípustné body.

- $B = \{1, 2\}$. Tedy $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je určitě regulární.
Pak očividně $[1, 0, 0, 0]^T$ je BPB s přípustnou bází B .
- $B = \{1, 3\}$. Tedy $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je určitě regulární.
Pak $[1, 0, 0, 0]^T$ je BPB s přípustnou bází B .
- $B = \{1, 4\}$. $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je singulární, tedy není přípustnou bází BPB.
- $B = \{2, 3\}$. Tedy $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je určitě regulární.
Pak $[0, 1, 1, 0]^T$ je BPB s přípustnou bází B .
- $B = \{2, 4\}$. Tedy $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je určitě regulární.
Pak $[0, 0, 0, 1]^T$ je BPB s přípustnou bází B .
- $B = \{3, 4\}$. Tedy $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je určitě regulární.
Pak $[0, 0, 0, 1]^T$ je BPB s přípustnou bází B .

9.8 Příklad na souvislost BPB a krajních bodů

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid Ax = b\}.$$

Již víme, že $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $y = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ jsou BPB.

$$Ax = b \dots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Tedy řešení soustavy $z = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}(3-3t) \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Kdy je $z \in \mathbb{R}_+^3$?

Právě tehdy, když $t \geq 0$ a $1 \geq t$, tedy $t \in [0, 1]$.

$$z \in [x, y] \iff z = tx + (1-t)y = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2}(1-t) \\ t \end{bmatrix}, t \in [0, 1].$$

Tedy $M = [x, y]$.

9.9 Věta o souvislosti BPB a krajních bodů

- (a) Nechť $x \in M$. Pak x je BPB úlohy LP právě tehdy, když x je krajní bod množiny M .
- (b) M je neprázdná právě tehdy, když existuje BPB úlohy LP.

Důkaz (a).

„ \Rightarrow “: Sporem.

Existují dva různé body $y, z \in M$ tak, že $x = \frac{y+z}{2}$. At B je přípustná báse BPB x .

Pak $y_j = z_j = 0$ pro každé $j \in N$. Navíc A_B je regulární dle **definice BPB**. Ale dle této stejné definice platí, že y a z jsou BPB s přípustnou bází B . Ale dle **tvrzení** nemohou mít dva různé BPB stejnou přípustnou bási. $\Rightarrow y = z$, což je spor.

„ \Leftarrow “: Sporem.

At x není BPB. Pak z **charakterisace BPB** plyne, že $\{a_j \mid j \in J(x)\}$ je lineárně závislá množina.

\rightarrow existují $d_j \in \mathbb{R}, j \in J(x)$, ne všechny nulové tak, že

$$\sum_{j \in J(x)} d_j a_j = 0.$$

Definujme $d_j = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\} \setminus J(x)$.

Pak $Ad = 0$. Odtud $A(x \pm \alpha d) = b \pm \underbrace{Ad}_{=0} = b$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pro dostatečně malé $\alpha > 0$ je $x \pm \alpha d \geq 0$. Pro takové α je $x \pm \alpha d \in M$. Pak $x + \alpha d \neq x - \alpha d$ a navíc evidentně platí $x = \frac{(x+\alpha d) + (x-\alpha d)}{2}$. To je spor s tvrzením, že máme krajní bod. \square

Důkaz (b). Vynecháme.

9.10 Základní věta lineárního programování

- (a) Úloha LP má řešení právě tehdy, když M je neprázdná a $\langle x, c \rangle$ je zdola omezená na M .
 (b) Má-li LP řešení, pak existuje řešení úlohy LP, které je BPB.

Zde budeme dokazovat jen pro případ, že M je kompaktní.

Důkaz (a).

„ \Rightarrow “: Když máme řešení, pak určitě leží v M a je určitě zdola omezená, protože to je právě to ono řešení.

„ \Leftarrow “: **Weierstrassova věta.** \square

Důkaz (b). LP má řešení $\xrightarrow{(a)} M \neq \emptyset$.

Cíl: Ukázat, že alespoň jedno řešení je krajní bod (=BPB).

Ať $x \in M$. Ať $\text{ext}(M) = \{e_1, \dots, e_k\}$ je neprázdná (díky předpokladu) a konečná množina (díky **Tvrzení o různých BPB**).

Pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ tak, že $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ a navíc $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ dle **Kreinovy-Milmanovy věty**.

Proto

$$\langle x, c \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, c \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underbrace{\langle e_i, c \rangle}_{\geq \min_{1 \leq i \leq k} \langle e_i, c \rangle} \geq \left(\min_{1 \leq i \leq k} \langle e_i, c \rangle \right) \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i}_{=1} = \min_{1 \leq i \leq k} \langle e_i, c \rangle$$

\Rightarrow existuje krajní bod, ve kterém nabývá $\langle x, c \rangle$ minima na M . \square

9.11 Tvrzení o množině všech řešení úlohy LP

Množina všech řešení úlohy LP je konvexní polyedrická množina.

Důkaz.

Cíl: Množina všech řešení LP lze napsat jako průnik konečně mnoha poloprostorů.

Množina všech řešení je buď prázdná, pak je určitě konvexní polyedrická, nebo je neprázdná tvaru $M \cap H$, kde $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c \rangle = \min_{y \in M} \langle y, c \rangle\}$. A protože H je dáno jako průnik 2 poloprostorů ($\langle x, c \rangle \leq \min_{y \in M} \langle y, c \rangle$ a $\langle x, c \rangle \geq \min_{y \in M} \langle y, c \rangle$), navíc M je dáno jako průnik konečně mnoha poloprostorů, tedy i průnik je konvexní polyedrická. \square

9.12 Příklad na Simplexovou metodu

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{za podmíněk} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} z \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]; \text{BPB je } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyměníme x_2 a x_4 v BPB.

$$x_2 = 1 + x_1 - x_4$$

$$\rightarrow z = -x_1 - 3(1 + x_1 - x_4) = -4x_1 + 3x_4 - 3$$

$$\rightarrow x_3 = 6 - 2x_1 - 3(1 + x_1 - x_4) = 3 - 5x_1 + 3x_4$$

$$\begin{array}{c} z \\ x_3 \\ x_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline -4 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ \hline -5 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]; \text{BPB je } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9.13 Tvrzení o vztahu přípustné množiny a hodnoty cílové funkce

Přípustná množina M úlohy LP je neprázdná právě tehdy, když v bodě minima $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \in \Omega$ úlohy F_1 tak, že $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. V tomto případě je $\hat{y} = 0$.

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Ať $\hat{x} \in M$. Pak $v = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix}$ leží v Ω a $g(v) = 0$ (tj. v je řešení úlohy (F_1) splňující $g(v) = 0$). A to jsme přesně chtěli dokázat. \square

„ \Leftarrow “: Ať $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ je řešení úlohy (F_1) , splňující $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Pak $\hat{y} = 0$, a tedy $b = A\hat{x} + \hat{y} = A\hat{x}$. A protože $\hat{x} \geq 0$, tak $\hat{x} \in M$. \square

9.14 Příklad dvoufázové Simplexové metody

Je dána úloha

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & x_2 \\ \text{za podmínek} & x_1 = 1, \\ & x_1 - x_2 = 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Sloupeček pravých stran je větší roven nule, takže můžeme použít dvoufázovou Simplexovu metodu.

1. fáze:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & y_1 + y_2 \\ \text{za podmínek} & x_1 + y_1 = 1, \\ & x_1 - x_2 + y_2 = 2, \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{array}$$

9.15 Tvrzení o primární a duální úloze

Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Duální úloha k úloze

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array} \right\} (P)$$

je

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T y \geq c, \\ y \geq 0. \end{array} \right\} (D)$$

Důkaz.

$$L(x, y) = \langle x, c \rangle + \langle y, b - Ax \rangle = \langle x, c \rangle + \langle y, b \rangle - \underbrace{\langle y, Ax \rangle}_{\langle A^T y, x \rangle} = \langle x, c - A^T y \rangle + \langle y, b \rangle$$

$$\inf_{x \geq 0} L(x, y) = \langle y, b \rangle + \inf_{x \geq 0} \langle x, c - A^T y \rangle = \begin{cases} \langle y, b \rangle & \text{je-li } c - A^T y \geq 0, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy duální úloha k (P) je

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínek} \quad c - A^T y \geq 0, \rightarrow A^T y \leq c \\ y \geq 0. \end{array} \right\} \square$$

9.16 Hledání duální úlohy k duální úloze

Mějme

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T y \geq c, \\ y \geq 0. \end{array} \right\} (D)$$

Přepíšeme:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} \quad -\langle y, b \rangle & \text{minimalisujte} \quad \langle y, -b \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T y \leq c, & \text{za podmínky} \quad (-A^T)y \geq -c, \\ y \geq 0. & y \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.}$$

Duální úloha po tom je:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} \quad \langle x, -c \rangle & \text{minimalisujte} \quad \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad (A^T)^T x \leq -b, & \text{za podmínky} \quad Ax \geq b, \\ x \geq 0. & x \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.}$$

9.17 Věta o silné dualitě pro LP

Úloha (P) má řešení právě tehdy, když má řešení úloha (D) . V takovém případě jsou hodnoty obou úloh stejné.

Nechť $\hat{f} < \infty$ a cílová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek

- (a) Komponenty g_1, \dots, g_k zobrazení g splňují **Slaterovu podmínku** regularity.
- (b) Zobrazení g je **afinní** a Ω je konvexní polyedrická množina.

Potom $\hat{f} = \hat{\varphi}$. Je-li navíc $\hat{f} \in \mathbb{R}$, pak existuje řešení úlohy (D) .

Důkaz vynecháme.

9.18 Simplexová metoda a řešení duální úlohy

Do úlohy (P) zavedme doplňkové proměnné $y = (y_1, \dots, y_m)^T$. Tím dostaneme úlohu

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax - y \geq b, \\ & x, y \geq 0. \end{array} \right\} (\tilde{P})$$

Je-li výsledná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc|c} \tilde{c}_1 & \cdots & \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \cdots & \tilde{c}_{n+m} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

kde $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{m+n} \geq 0$ a sloupce na levé straně odpovídají postupně proměnným $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Pak $\hat{y} = (\tilde{c}_{n+1}, \dots, \tilde{c}_{m+n})^T$ je řešením úlohy (D) .

9.19 Příklad řešení duální úlohy

Je dána dvojice vzájemně duálních úloh

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

$$\text{kde } A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zaměříme se na primární úlohu. Tedy doplníme doplňkové proměnné dle **předchozí poznámky**.

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \text{za podmínek} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x_1, \dots, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Simplexová tabulka:

$$\begin{array}{cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 0 & -15 & 0 & 4 & 1 & -9 \\ \hline x_3 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Zafixujeme si sloupec x_2 , protože má v sobě záporný koeficient. Teď vhodně vybrat řádek \rightarrow vezmeme pravou stranou a podělíme ji koeficientem, tedy $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ a $\frac{1}{1} = 1$. Vybereme menší podíl.

$$\begin{array}{cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & \\ \hline & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -9 + \frac{15}{2} \\ x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ x_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Protože v levé části prvního řádku není žádný záporný koeficient, algoritmus končí.

Úloha má řešení $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T$. Tedy řešení původní primární úlohy je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$. A když dosadíme, tak zjistíme, že toto je řešení i duální úlohy.

9.20 Příklad na hledání duální úlohy

V \mathbb{R}^n jsou daný množiny bodů $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. K úloze

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & h(w, \lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek} & \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{array}$$

Zkonstruuje úlohu duální (přímé omezení je $w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$).

$$L(w, \lambda, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i [1 - \langle a_i, w \rangle - \lambda] + \sum_{j=1}^l z_j [1 + \langle b_j, w \rangle + \lambda]$$

$$\inf_{w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}} L(w, \lambda, y, z) = ?$$

Pro fixní $y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^l$ je $(w, \lambda) \mapsto L(w, \lambda, y, z)$ konvexní funkce.

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla_w L(w, \lambda, y, z)}_{\begin{bmatrix} \partial w_1 L \\ \vdots \\ \partial w_n L \end{bmatrix}} &= w - \sum_{i=1}^k a_i y_i + \sum_{j=1}^l b_j z_j = 0 \\ \implies w &= \sum_{i=1}^k a_i y_i - \sum_{j=1}^l b_j z_j \implies \sum_{i=1}^k y_i = \sum_{j=1}^l z_j \end{aligned}$$

A tedy máme:

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^k a_i y_i - \sum_{j=1}^l b_j z_j, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle + \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i \quad (5)$$

$$- \sum_{i=1}^k y_i \left\langle a_i, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle + \sum_{i=1}^l z_i \left\langle b_i, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle \quad (6)$$

Což upravíme:

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle a_i, a_j \rangle - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle a_i, b_j \rangle - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k z_i y_j \langle b_i, a_j \rangle + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle b_i, b_j \rangle \right] \quad (7)$$

$$+ \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j \langle a_i, a_j \rangle + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i y_j \langle a_i, b_j \rangle \quad (8)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle b_j, a_j \rangle - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l z_i z_j \langle b_i, b_j \rangle \quad (9)$$

A tedy:

Hledaná duální úloha je:

$$\varphi(y, z) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j \langle a_i, a_j \rangle \quad (10)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle a_i, b_j \rangle \quad (11)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle b_i, b_j \rangle \quad (12)$$

$$+ \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i \quad (13)$$

maximalisujte $\varphi(y, z)$

za podmínek $\sum_{i=1}^k y_i - \sum_{j=1}^l z_j = 0$

$y, z \geq 0$

9.21 Příklad na hledání duální úlohy

Mějme úlohu

minimalisujte $x_1 + 2x_2$

za podmínek $x_1 + x_2 \geq 1 \dots -x_1 - x_2 + 1 \leq 0$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Najděte duální úlohu, jestliže $x_1, x_2 \geq 0$ je přímé omezení.

(b) Najděte duální úlohu, jestliže $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ je přímé omezení.

(a) $L(x_1, x_2, \mu) = x_1 + 2x_2 + \mu(-x_1 - x_2 + 1)$

$$\varphi(\mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} L(x_1, x_2, \mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} (1 - \mu)x_1 + (2 - \mu)x_2 + \mu$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \underbrace{\left[\inf_{x_1 \in \mathbb{R}_+} (1 - \mu)x_1 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 1 \geq \mu, \\ -\infty & \text{pro } 1 < \mu. \end{cases}} + \underbrace{\left[\inf_{x_2 \in \mathbb{R}_+} (2 - \mu)x_2 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 2 \geq \mu, \\ -\infty & \text{pro } 2 < \mu. \end{cases}} + \mu \\ &\Rightarrow \varphi(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{pro } \mu \in [0, 1], \\ -\infty & \text{pro } \mu \notin [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

A tedy duální úloha je

maximalisujte μ

za podmínek $\mu \in [0, 1]$.

(b) $L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = x_1 + 2x_2 + \mu_1(-x_1 - x_2 + 1) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)$

$$\varphi(\mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} (1 - \mu_1 - \mu_2)x_1 + (2 - \mu_1 - \mu_3)x_2 + \mu_1$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \underbrace{\left[\inf_{x_1 \in \mathbb{R}} (1 - \mu_1 - \mu_2)x_1 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{cases}} + \underbrace{\left[\inf_{x_2 \in \mathbb{R}} (2 - \mu_1 - \mu_3)x_2 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 \neq 0. \end{cases}} + \mu_1 \end{aligned}$$

$$\varphi(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \begin{cases} \mu_1 & \text{pro } D_\varphi = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0\}, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

A tedy duální úloha je

$$\begin{aligned} & \text{maximalisujte} \quad \mu_1 \\ & \text{za podmínek} \quad 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ & \quad \quad \quad 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0, \\ & \quad \quad \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0. \end{aligned}$$

10 Kvadratické programování

Úlohy kvadratického programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

- (a) cílová funkce f kvadratická, tj.

$$f(x) = \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + d,$$

kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ (budeme předpokládat, že Q je symetrická a $d = 0$);

- (b) přípustná množina je konvexní polyedrická množina.

Úloha kvadratického programování není obecně konvexní!

- Pokud ale minimalisujeme kvadratickou funkci f , ve které je Q pozitivně semidefinitní matice, pak se jedná o konvexní úlohu.

Dále už budeme uvažovat jen úlohu kvadratického programování ve tvaru

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalisujte} \quad \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad Ax \leq b, \end{array} \right\} (QP)$$

kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je pozitivně definitní, $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. $\frac{1}{2}$ v zápisu se nám zde zrovna hodí. Samozřejmě lze schovat přímo do matice Q , proto v původní definici není vidět.

Cílová funkce v (QP) je ryze konvexní. Úloha tak má nejvýše jedno řešení. KKT podmínky

$$\begin{aligned} Qx + c + A^T \mu &= 0 \\ \langle Ax - b, \mu \rangle &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

jsou nutné a postačující.

10.1 Tvrzení o duální úloze kvadratického programování

Duální úloha k úloze (QP) je

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad -\frac{1}{2} \langle By, y \rangle - \langle y, v \rangle - \frac{1}{2} \langle Q^{-1}c, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad y \geq 0, \end{array} \right\} (DQP)$$

kde $B = AQ^{-1}A^T$ a $v = AQ^{-1}c + b$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + \langle y, Ax - b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + \langle A^T y, x \rangle - \langle y, b \rangle \end{aligned}$$

Ať $y \geq 0$. Pak funkce $x \mapsto L(x, y)$ je určitě (ryze) konvexní díky předpokladu na Q . Tedy \hat{x} je bodem minima funkce $x \mapsto L(x, y) \iff \nabla_x L(x, y) = 0$.

$$\varphi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) = L(\hat{x}, y)$$

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, y) &= Q\hat{x} + c + A^T y \stackrel{!}{=} 0 \\ \text{Tedy: } \hat{x} &= -Q^{-1}(c + A^T y)\end{aligned}$$

Dosadme:

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \frac{1}{2} \langle QQ^{-1}(c + A^T y), Q^{-1}(c + A^T y) \rangle - \langle Q^{-1}(c + A^T y), c + A^T y \rangle - \langle y, b \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [\langle c, Q^{-1}c \rangle + 2 \langle c, Q^{-1}A^T y \rangle + \langle A^T y, Q^{-1}A^T y \rangle] - \langle y, b \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle y, AQ^{-1}A^T y \rangle - \langle y, AQ^{-1}c + b \rangle - \frac{1}{2} \langle c, Q^{-1}c \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle AQ^{-1}A^T y, y \rangle - \langle y, AQ^{-1}c + b \rangle - \frac{1}{2} \langle Q^{-1}c, c \rangle\end{aligned}$$

Což je přesně duální úloha (DQP). \square

Poznámka. Úlohy kvadratického programování nejsou vzájemně duální.

10.2 Věta o silné dualitě pro kvadratické programování

Úloha (QP) má řešení právě tehdy, když (DQP) má řešení. Má-li (QP) řešení, pak se hodnoty obou úloh rovnají.

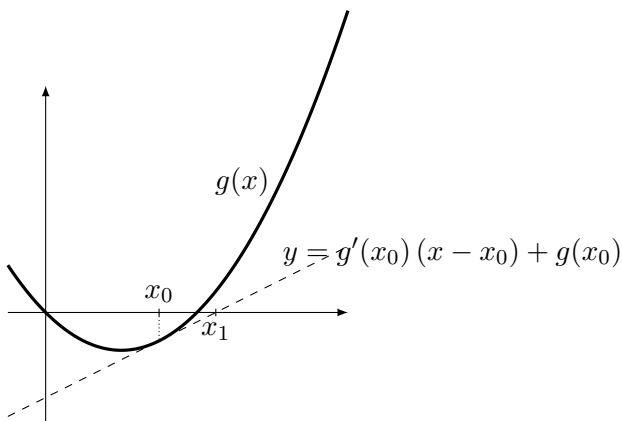
Důkaz vynecháme.

11 Numerické metody optimalisace

11.1 Newtonova metoda v jednorozměrné optimalisaci

Je dána rovnice $g(x) = 0$, kde $g \in C^1(\mathbb{R})$. Necht $x_0 \in \mathbb{R}$. Položme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$



- Předpokládejme, že $g'(x_k) \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.
- Pokud x_0 je dostatečně blízko řešení \hat{x} rovnice $g(x)$, pak $x_k \rightarrow \hat{x}$.

Je dána funkce $f \in C^2(\mathbb{R})$. Hledejme stacionární body funkce f , tj. řešme rovnici $f'(x) = 0$. Z Newtonovy metody pro řešení rovnic plyne, že

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Algoritmus

- Zvolíme $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Položíme $k = 0$.
- Vypočítáme $f'(x_k)$ a $f''(x_k)$.
- Je-li $|f'(x_k)| < \varepsilon$, pak algoritmus končí a x_k je hledaná aproximace stacionárního bodu. V opačném případě přejdeme na další krok.
- Položíme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

(nutno ověřit, že $f''(x_k) \neq 0$) hodnotu k zvýšíme o 1 a jdeme na krok (b).

11.2 Omezení na minimalizační úlohy

Chceme nalézt alespoň přibližně bod minima (alespoň lokálního) funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Postup:

- Zvolíme x_0 a konstruujeme posloupnost, jejíž členy jsou dány

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

kde $\alpha_k \geq 0$ je délka k -tého kroku a $d_k \in \mathbb{R}^n$ je směr k -tého kroku.

- Vhodnou volbou délky kroku a směru se snažíme dosáhnout toho, aby $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

11.3 Nepodmíněná optimalisace - Metoda největšího spádu

V metodě největšího spádu předpokládáme, že $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Volba směru d_k :

- Chceme, aby $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, a proto za směr d_k budeme volit směr poklesu, tj. prvek z $\mathcal{D}(f; x_k)$.
- Konkrétně volme $d_k = -\nabla f(x_k)$.
- Jestliže $\nabla f(x_k) \neq 0$, pak

$$\langle d_k, \nabla f(x_k) \rangle = \langle -\nabla f(x_k), \nabla f(x_k) \rangle = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0,$$

tj. $d_k \in \mathcal{D}_0(f; x_k) \subseteq \mathcal{D}(f; x_k)$.

- Směr $d_k = -\nabla f(x_k)$ je směr největšího poklesu v bodě x_k .

Volba délky kroku α_k :

- Buď pevná volba kroku $\alpha_k = \alpha$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Příliš velké α může zkazit konvergenci.
- Nebo například $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$.

Příklad špatně zvoleného α .

Mějme $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $\alpha = 11$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pak $\nabla f(x) = \frac{1}{2}2x = x$.

$$x_1 = x_0 + \alpha(-x_0) = -10x_0$$

$$x_2 = x_1 - \alpha x_1 = -10x_1 = (-10)^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_k = (-10)^k x_0 \dots \text{tedy očividně nekonverguje.}$$

Volba kritéria zastavení:

- $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$.
- Další možnosti jsou $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$, $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$, ...
- Možná je i kombinace více kritérií.

Algoritmus

1. Zvolme $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Položme $k = 0$.
2. Je-li $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$, pak algoritmus končí a x_k je hledaná aproximace. V opačném případě přejdeme na další krok.
3. Položíme $d_k = -\nabla f(x_k)$.
4. Nalezneme $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$.
5. Položíme $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$. Zvýšíme hodnotu k o 1 a jdeme na krok (b).

11.4 Podmíněná optimalisace - Metoda projekce gradientu

Modifikuje metodu největšího spádu.

Předpokládejme $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná, uzavřená a konvexní.

Nulovost gradientu již není vhodným kritériem pro zastavení.

Algoritmus

- (a) Zvolme $x_0 \in C$ a $\varepsilon > 0$. Položme $k = 0$.
- (b) Vypočteme $d_k = -\nabla f(x_k)$.
- (c) Nalezneme $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$.
- (d) Položíme $x_{k+1} = P_C(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$.
- (e) Je-li $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$, pak algoritmus končí a x_k je hledaná aproximace. V opačném případě zvýšíme hodnotu k o 1 a jdeme na krok (b).

11.5 Podmíněná optimalisace - Metoda penalizačních funkcí

Nechť $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$ a je dána úloha

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & f(x) \\ \text{za podmínky} & g_1(x) \leq 0, \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq 0. \end{array} \right\} (U)$$

- Chceme nahradit (U) úlohami nepodmíněné optimalisace.
- $p(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^2 \dots$ penalizační funkce.

Penalizační funkce zařídí, že čím dál budeme od přípustné množiny C , tím více budeme takové body penalizovat.

Algoritmus

- (a) Zvolme $\varepsilon > 0, c_0 > 0$ a $\alpha > 1$. Položme $k = 0$.
- (b) Nalezněme bod minima x_k funkce $f(x) + c_k p(x)$ na \mathbb{R}^n .
- (c) Je-li $c_k p(x) < \varepsilon$, pak algoritmus končí a x_k je hledaná aproximace. V opačném případě zvýšíme hodnotu k o 1 a jdeme na krok (b).

12 Úvod do strategických her

12.1 Příklad Vězňovo dilemma

Hra je daná tabulkou:

| | P | Z |
|-----|----------|----------|
| P | $-5; -5$ | $0; -10$ |
| Z | $-10; 0$ | $-1; -1$ |

$$N = \{1, 2\}.$$

$$S_1 = S_2 = \{P, Z\}.$$

Funkce užitku:

$$u_1(P, P) = -5 = u_2(P, P)$$

$$u_1(P, Z) = 0 = u_2(Z, P)$$

$$u_1(Z, P) = -10 = u_2(P, Z)$$

$$u_1(Z, Z) = -1 = u_2(Z, Z)$$

12.2 Příklad Panna nebo orel

Hra je daná tabulkou:

| | P | O |
|-----|-----------|-----------|
| P | $10; -10$ | $-10; 10$ |
| O | $-10; 10$ | $10; -10$ |

První hráč dostane body, pokud se budou oba hráči shodovat. Druhý hráč dostane body, pokud budou odlišné.

12.3 Příklad Manželský spor

Hra je daná tabulkou:

| | D | H |
|-----|--------|----------|
| D | $2; 3$ | $-1; -1$ |
| H | $0; 0$ | $3; 2$ |

Hokej a Divadlo. Čísla jsou radosti.

12.4 Příklad Kámen-nůžky-papír

Hra je daná tabulkou:

| | K | N | P |
|-----|---------|---------|---------|
| K | $0; 0$ | $1; -1$ | $-1; 1$ |
| N | $-1; 1$ | $0; 0$ | $1; -1$ |
| P | $1; -1$ | $-1; 1$ | $0; 0$ |

12.5 Nashovo equilibrium

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je strategická hra. Strategický profil $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) \in S$ se nazve Nashovo equilibrium hry G , jestliže pro každé $i \in N$ a každé $\sigma_i \in S_i$ je

$$u_i(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) \geq u_i(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \dots, \hat{\sigma}_n)$$

Nashovo equilibrium nám říká, že hráč, pouze změnou své strategie, si nemůže polepšit. Nevede k „maximalisaci zisku“, ale k rovnováze.

Zároveň N.e. nemusí být určeno jednoznačně, dokonce ani nemusí existovat.

Speciálně pokud $N = \{1, 2\}$.

- $u_1(\sigma_1, \hat{\sigma}_2) \leq u_1(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_1 \in S_1,$
- $u_2(\hat{\sigma}_1, \sigma_2) \leq u_2(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_2 \in S_2.$

12.6 Věžňovo dilemma a Nashovo equilibrium

| | P | Z |
|-----|----------|----------|
| P | $-5; -5$ | $0; -10$ |
| Z | $-10; 0$ | $-1; -1$ |

(a) Strategický profil (P, P) :

$$u_1(Z, P) \leq u_1(P, P) \checkmark$$

$$u_1(P, P) \leq u_1(P, P) \checkmark$$

$$u_2(P, Z) \leq u_2(P, P) \checkmark$$

$$u_2(P, P) \leq u_2(P, P) \checkmark$$

$\implies (P, P)$ je N. e.

(b) Strategický profil (P, Z) : Zde není N. e., neboť

$$u_2(P, Z) < u_2(P, P).$$

(c) Strategický profil (P, Z) : Zde není N. e., neboť

$$u_1(Z, P) < u_1(P, P).$$

(d) Strategický profil (Z, Z) : Zde není N. e., neboť

$$u_1(Z, Z) < u_1(P, Z).$$

12.7 Panna nebo orel a Nashovo equilibrium

| | P | O |
|-----|-----------|-----------|
| P | $10; -10$ | $-10; 10$ |
| O | $-10; 10$ | $10; -10$ |

Zde N.e. neexistuje.

12.8 Manželský spor a Nashovo equilibrium

| | D | H |
|-----|--------|----------|
| D | $2; 3$ | $-1; -1$ |
| H | $0; 0$ | $3; 2$ |

Strategické profily (D, D) a (H, H) jsou jediná N.e. v této hře.

12.9 Tvrzení o Nashově equilibriu

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je strategická hra a $\hat{\sigma} \in S$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) $\hat{\sigma}$ je Nashovo equilibrium.

(b) Pro každé $i \in N$ je

$$\hat{\sigma}_i \in \operatorname{argmax}_{\sigma_i \in S_i} u_i(\hat{\sigma}_i, \dots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \dots, \hat{\sigma}_n).$$

Důkaz plyne přímo z definice Nashova equilibria.

12.10 Příklad Cournotův model oligopolu a Nashovo equilibrium

Ať

- $N = \{1, 2\}$ (tj. uvažujeme model duopolu) a $S_1 = S_2 = [0, \infty)$.
- $C_1(q_1) = cq_1$ a $C_2(q_2) = cq_2$, kde $c > 0$.
- $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, kde $a > c$ a $b > 0$.
- $u_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1$ a
 $u_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2$.

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0 \dots - bq_1 + a - b(q_1 + q_2) - c = 0 \rightarrow -2bq_1 = -a + c + bq_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0 \dots - bq_2 + a - b(q_1 + q_2) - c = 0 \rightarrow -2bq_2 = -a + c + bq_1 \quad (15)$$

Dosadíme do (5):

$$\begin{aligned} -2bq_1 &= -a + c + \frac{a - c}{2} - \frac{bq_1}{2} \implies \left(\frac{b}{2} - 2b\right)q_1 = -\frac{a - c}{2} \\ \implies q_1 &= \frac{a - c}{3b} > 0 \end{aligned}$$

Z (6):

$$q_2 = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2} \left(\frac{a - c}{3b} \right) = \frac{3(a - c) - (a - c)}{6b} = \frac{a - c}{3b} > 0$$

Díky **tvzení o Nashově equilibriu** jsme našli dvojici, která je Nashovým equilibriem: $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$.

12.11 Hra dvou hráčů s nulovým součtem

Hra dvou hráčů s nulovým součtem je strategická hra

$$G = (\{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$$

taková, že pro každé $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_1 \times S_2$ je

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) + u_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0.$$

- Hráči mají zcela opačné zájmy.
- Stačí zadat jen jednu funkci užitku, neboť $u_1 = -u_2$.
- Je zbytečné uvádět množinu $\{1, 2\}$ všech hráčů.
- Zjednodušené značení hry dvou hráčů:

$$G = (S_1, S_2, u), \text{ kde } u = u_1.$$

12.12 Definice ceny hry

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

(a) Dolní cena hry G je číslo

$$\underline{v} := \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau).$$

(b) Horní cena hry G je číslo

$$\bar{v} := \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau).$$

(c) Řekněme, že $v \in \mathbb{R}$ je **cena hry** G , jestliže $v = \underline{v} = \bar{v}$.

Pozorování.

- První hráč nemůže „získat“ méně, než \underline{v} .
- Druhý hráč nemůže „prohrát“ více, než \bar{v} .
- Platí $\underline{v} \leq \bar{v}$, neboť:

$$\inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) \leq u(\sigma, \tilde{\tau}) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tilde{\tau} \in S_2$$

Aplikujme supremum:

$$\sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tilde{\tau}) \quad \forall \tilde{\tau} \in S_2$$

Levá strana je dolní odhad pravé. A infimum pravé je největší dolní mez.

$$\underbrace{\sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau)}_{\underline{v}} \leq \underbrace{\inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau)}_{\bar{v}}$$

12.13 Definice optimální strategie

At $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem a v je její cena. Řekněme, že

(a) $\hat{\sigma} \in S_1$ je optimální strategie **prvního** hráče, jestliže

$$v = \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau),$$

(b) $\hat{\tau} \in S_2$ je optimální strategie **druhého** hráče, jestliže

$$v = \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}).$$

12.14 Příklad na optimální strategii

Hra G je dána tabulkou:

| | C | D |
|-----|-------|-------|
| A | 1; -1 | 2; -2 |
| B | 3; -3 | 4; -4 |

A protože G je hra dvou hráčů s nulovým součtem, stačí zadat tabulku:

| | C | D |
|-----|-----|-----|
| A | 1 | 2 |
| B | 3 | 4 |

Tedy $G = (S_1, S_2, u)$, kde $S_1 = \{A, B\}$, $S_2 = \{C, D\}$ a

$$u(A, C) = 1,$$

$$u(A, D) = 2,$$

$$u(B, C) = 3,$$

$$u(B, D) = 4.$$

Určeme dolní cenu hry G :

$$\inf_{\tau \in S_2} u(A, \tau) = 1,$$

$$\inf_{\tau \in S_2} u(B, \tau) = 3.$$

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = 3$$

Obdobně horní cena hry G :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) = 3$$

A proto je cena hry $v = 3$. Optimální strategie prvního hráče je pouze B . Optimální strategie druhého hráče je pouze C . Shodou náhod je (B, C) **Nashovým equilibriem**.

12.15 Optimální strategie Panna nebo orel

G je hra dvou hráčů s nulovým součtem, a proto stačí zadat tabulku:

| | | |
|-----|-----|-----|
| | P | O |
| P | 10 | -10 |
| O | -10 | 10 |

Určeme dolní cenu hry G :

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = -10$$

Obdobně horní cena hry G :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) = 10$$

Optimální strategie pro prvního i druhého hráče neexistuje, protože horní a dolní cena hry jsou rozdílné.

12.16 Optimální strategie pouze pro jednoho hráče

Uvažme hru $G = (S_1, S_2, u)$ dvou hráčů s nulovým součtem, kde $S_1 = S_2 = (0, 1)$ a $u(\sigma, \tau) = \sigma\tau$.

Určeme dolní cenu hry G :

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} \sigma\tau = \sup_{\sigma \in S_1} 0 = 0$$

Horní cena hry G :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} \sigma\tau = \inf_{\tau \in S_2} \tau = 0$$

A proto je cena hry $v = 0$. Optimální strategie prvního hráče je každá strategie z S_1 . Optimální strategie druhého hráče neexistuje.

12.17 Tvrzení o existenci optimální strategie

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem taková, že S_1 a S_2 jsou konečné. Jestliže existuje cena hry G , pak nutně existuje optimální strategie prvního a také druhého hráče.

Důkaz.

Díky předpokladu, že S_1 a S_2 jsou konečné množiny, můžeme při výpočtech dolní, respektive horní, ceny hry nahradit sup za max, respektive inf za min. A protože budeme hledat max, respektive min, na konečné množině strategií, pak nutně musí max, respektive min, existovat.

A to tedy budou optimální strategie. \square

12.18 Sedlový bod typu maxmin

Nechť $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$. Řekněme, že $(\hat{x}, \hat{y}) \in M \times N$ je **sedlový bod** funkce f , jestliže pro každé $x \in M$ a každé $y \in N$ je

$$f(x, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y).$$

12.19 Vztah Nashova equilibria a sedlového bodu

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem a $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$. Potom $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je **Nashovo equilibrium** hry G právě tehdy, když $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je **sedlový bod** funkce u .

Důkaz.

$(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je N. e., tj.

$$\begin{aligned} u(\sigma, \hat{\tau}) &\leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \quad \forall \sigma \in S_1 \\ -u(\hat{\sigma}, \tau) &\leq -u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \quad \forall \tau \in S_2 \\ &\Updownarrow \\ u(\sigma, \hat{\tau}) &\leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \tau \in S_2 \end{aligned}$$

Což je přesně **sedlový bod** funkce u . \square

12.20 Věta o Nashově equilibriu a optimálních strategiích

Nechť $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

- (a) Je-li $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$ **Nashovo equilibrium** hry G , pak $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je cena hry G , $\hat{\sigma}$ je **optimální strategie** prvního hráče a $\hat{\tau}$ je **optimální strategie** druhého hráče.
- (b) Jestliže v je cena hry G , $\hat{\sigma}$ je **optimální strategie** prvního hráče a $\hat{\tau}$ je **optimální strategie** druhého hráče, pak $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ a $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je **Nashovo equilibrium**.

Důkaz (a).

$(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je N. e. $\implies \underbrace{u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tau \in S_2}_{(*)} \dots$ N. e. je **sedlový bod** funkce u .

$$(*) \implies \bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = \underline{v}$$

Tedy $\bar{v} \leq \underline{v}$. Navíc již víme, že $\underline{v} \leq \bar{v}$. Proto $\underline{v} = \bar{v}$.

Odtud $v = \underline{v} = \bar{v} = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$, $\hat{\sigma}$ je **optimální strategie** 1. hráče a $\hat{\tau}$ je **optimální strategie** 2. hráče. \square

Důkaz (b).

Z předpokladu plyne:

$$\sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}) = v = \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau)$$

Proto:

$$u(\sigma, \hat{\tau}) \leq v \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \tau \in S_2$$

A z toho nutně plyne $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ když dosadíme $\sigma = \hat{\sigma}$ a $\tau = \hat{\tau}$.

Tedy platí

$$u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tau \in S_2 \implies (\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \text{ je N. e.} \quad \square$$

13 Smíšené strategie

13.1 Definice konečné hry

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je strategická hra. Řekněme, že G je konečná, jestliže pro každé $i \in N$ je S_i konečná množina.

13.2 Definice smíšeného rozšíření

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je konečná strategická hra $N = \{1, \dots, n\}$ a pro každé $i \in N$ je $S_i = \{\sigma_1^i, \dots, \sigma_{m_i}^i\}$. Smíšené rozšíření G je strategická hra $\bar{G} = (N, (\Delta S_i)_{i=1}^n, (U_i)_{i=1}^n)$, kde pro každé $i \in N$ je

- $\Delta S_i = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{m_i} \mid \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1 \right\}$ množina všech smíšených strategií (loterií) nad S_i ,
- $U_i : \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$U_i(p^1, \dots, p^n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} u_i(\sigma_{j_1}^1, \dots, \sigma_{j_n}^n) p_{j_1}^1 \dots p_{j_n}^n.$$

Pozorování.

- Prvek σ_k^i ztotožňujeme s prvkem $\mathbb{R}_+^{m_i}$, který má na k -té pozici jedničku a všude jinde nuly.
- Prvky z ΔS_i , které mají na jedné pozici jedničku a na ostatních nulu, nazýváme **čisté strategie**.

13.3 Příklad Panna nebo orel

Hra je daná tabulkou:

| | | |
|-----|-----|-----|
| | P | O |
| P | 10 | -10 |
| O | -10 | 10 |

$$\begin{aligned} u_1(P, P) &= -u_2(P, P) = 10 \\ u_1(P, O) &= -u_2(P, O) = -10 \\ u_1(O, P) &= -u_2(O, P) = 10 \\ u_1(O, O) &= -u_2(O, O) = -10 \\ \sigma_1 &= \tau_1 = P, \sigma_2 = \tau_2 = O \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 = \{P, O\}$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

$$U_1(p, q) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 u_1(\sigma_i, \tau_j) p_i q_j = 10p_1q_1 + (-10)p_2q_1 + (-10)p_2q_2 + 10p_1q_2$$

Zřejmě $U_2(p, q) = -U_1(p, q)$. $\implies \bar{G} = (\Delta S_1, \Delta S_2, U)$, kde $U = U_1$, tedy jedná se o hru dvou hráčů s nulovým součtem.

Najdeme optimální strategie.

Položme $p_1 = x$, $q_1 = y$. Pak $x, y \in [0, 1]$, $p_2 = 1 - x$, $q_2 = 1 - y$.

$$\tilde{U}(x, y) = 10xy - 10x(1-y) - 10(1-x)y + 10(1-x)(1-y) = 40xy - 20x - 20y + 10 = 10(4xy - 2x - 2y + 1)$$

Místo \bar{G} uvažme hru $\Gamma = ([0, 1], [0, 1], \tilde{U})$.

Hledejme Nashovo equilibrium hry Γ .

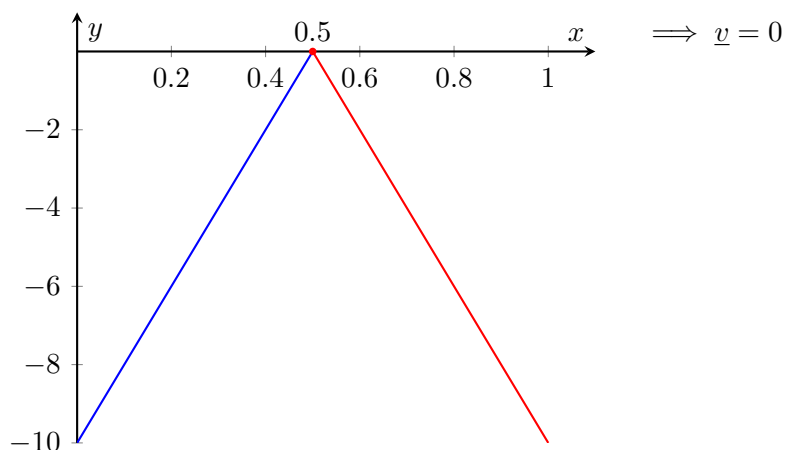
Použijeme **definici ceny hry**:

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} \tilde{U}(x, y)$$

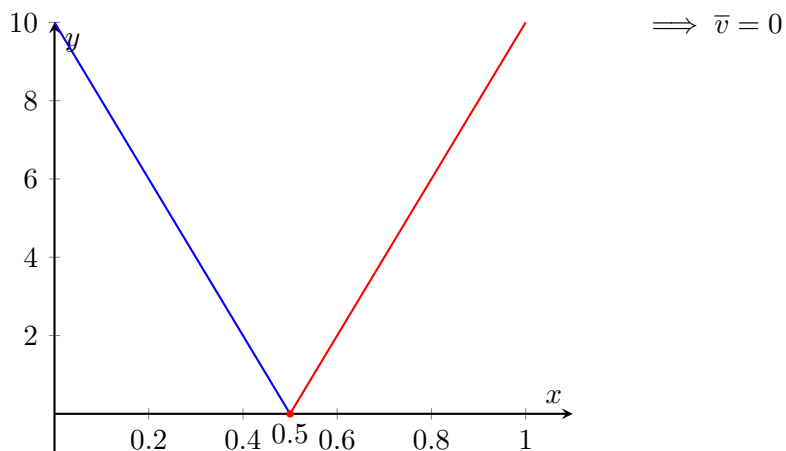
$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} \tilde{U}(x, y)$$

Spočtěme

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0,1]} \tilde{U}(x, y) &= \min_{y \in [0,1]} 10(4xy - 2x - 2y + 1) \\ &= 10 \min_{y \in [0,1]} (4x - 2)y - 2x + 1 = \begin{cases} 10(-2x + 1) & x \geq \frac{1}{2} \\ 10(2x - 1) & x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} \tilde{U}(x, y) &= \max_{x \in [0,1]} 10(4xy - 2x - 2y + 1) \\ &= 10 \max_{x \in [0,1]} (4y - 2)x - 2y + 1 = \begin{cases} 10(2y - 1) & y \geq \frac{1}{2} \\ 10(-2y + 1) & y < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Tedy $\underline{v} = \bar{v} = v = 0$. Z grafu vyčteme, že optimální strategie 1. hráče je $x = \frac{1}{2}$ a optimální strategie 2. hráče je $y = \frac{1}{2}$ pro hru Γ .

Nashovo equilibrium hry $\bar{G} = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

13.4 Nashova věta

Smíšené rozšíření konečné strategické hry má nejméně jedno Nashovo equilibrium.

Důkaz vynecháme.

14 Maticové hry

Maticová hra je **konečná** hra dvou hráčů s nulovým součtem.

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je maticová hra, kde $S_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, $S_2 = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ a $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- Jednoznačná korespondence mezi u a maticí $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, kde $a_{ij} = u(\sigma_i, \tau_j)$.
- $A \dots$ matice hry (výplatní matice, matice užitku, ...)
- **Smíšené rozšíření** hry G je hra $\Gamma(A) = (X, Y, U)$, kde
 - $X = \{x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$
 - $Y = \{y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$
 - $U : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m u(\sigma_i, \tau_j) x_i y_j = x^T A y = \langle A y, x \rangle.$$

Značení a konvence:

- X, Y jsou neprázdné konvexní kompaktní množiny a U je spojitá funkce na $X \times Y$.
- Smíšené rozšíření maticové hry je plně určeno maticí A , neboť:
 - počet řádků matice A určuje X ,
 - počet sloupců matice A určuje Y ,
 - funkce U je dána maticí A .
- $\Gamma(A)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem.
- $\mathcal{O}_1(A) \dots$ množina všech optimálních strategií 1. hráče ve hře $\Gamma(A)$.
- $\mathcal{O}_2(A) \dots$ množina všech optimálních strategií 2. hráče ve hře $\Gamma(A)$.
- $\underline{V}(x) := \inf_{y \in Y} U(x, y) = \min_{y \in Y} \langle A y, x \rangle$.
- $\overline{V}(y) := \sup_{x \in X} U(x, y) = \max_{x \in X} \langle A y, x \rangle$.

14.1 Věta o minimaxu

Cena hry $\Gamma(A)$ existuje a oba hráči mají alespoň jednu optimální strategii.

Důkaz.

Dle **Nashovy věty** existuje **Nashovo equilibrium** (\hat{x}, \hat{y}) hry $\Gamma(A)$. Tudíž ze **souvislosti Nashova equilibria a optimální strategie** platí $\hat{x} \in \mathcal{O}_1(A)$, $\hat{y} \in \mathcal{O}_2(A)$, $v = U(\hat{x}, \hat{y})$. \square

14.2 Lemma o omezení na standardní bási

Značme

- vektory standardní báse v \mathbb{R}^m symboly e_1, \dots, e_m ;
- vektory standardní báse v \mathbb{R}^n symboly f_1, \dots, f_n .

Pak

$$\underline{V}(x) = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \langle A f_j, x \rangle,$$

$$\overline{V}(x) = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle A y, e_i \rangle$$

Důkaz.

$$\underline{V}(x) = \min_{y \in Y} \langle A y, x \rangle, \quad Y = \text{conv}(\{f_1, \dots, f_n\}). \quad \text{ext } Y = (\{f_1, \dots, f_n\}).$$

At $x \in X$ je dáno. Pak $y \in Y \mapsto \langle A y, x \rangle$ je lineární, a proto nějaký krajní bod je bodem minima.

Obdobně $\overline{V}(x)$. \square

14.3 Tvrzení o kladnosti komponent matice A

Nechť $E \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ je matice samých jedniček $\left(\text{tj. } E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right)$, $v \in \mathbb{R}$ je cena hry $\Gamma(A)$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom $\mathcal{O}_1(A) = \mathcal{O}_1(A + cE)$, $\mathcal{O}_2(A) = \mathcal{O}_2(A + cE)$ a cena hry $\Gamma(A + cE)$ je $v + c$.

Důkaz.

Vezměme si

$$\hat{x} \in \mathcal{O}_1(A) \text{ a } \hat{y} \in \mathcal{O}_2(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle A \hat{y}, x \rangle \leq \langle A \hat{y}, \hat{x} \rangle \leq \langle A y, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y$$

Tedy (\hat{x}, \hat{y}) je **sedlový bod**, kde f z definice je funkce úžitku, která je dána skalárním součinem.

$$\Updownarrow$$

$$\langle A \hat{y}, x \rangle + c \leq \langle A \hat{y}, \hat{x} \rangle + c \leq \langle A y, \hat{x} \rangle + c \quad \forall x \in X \forall y \in Y$$

$$\Updownarrow \left\langle E y, x \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, x \right\rangle = 1 \quad \forall x \in X \forall y \in Y$$

$$\langle A \hat{y}, x \rangle + c \langle E \hat{y}, x \rangle \leq \langle A \hat{y}, \hat{x} \rangle + c \langle E \hat{y}, \hat{x} \rangle \leq \langle A y, \hat{x} \rangle + c \langle E y, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y$$

$$\Updownarrow \text{ linearita}$$

$$\langle (A + cE) \hat{y}, x \rangle \leq \langle (A + cE) \hat{y}, \hat{x} \rangle \leq \langle (A + cE) y, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y$$

Což je nutně ekvivalentní s

$$\hat{x} \in \mathcal{O}_1(A + cE), \quad \hat{y} \in \mathcal{O}_2(A + cE).$$

Cena hry $\Gamma(A + cE)$ je

$$\langle (A + cE) \hat{y}, \hat{x} \rangle = \underbrace{\langle A \hat{y}, \hat{x} \rangle}_{=v} + c \underbrace{\langle E \hat{y}, \hat{x} \rangle}_{=1} = v + c. \quad \square$$

14.4 Souvislost maticové hry a lineárního programování

Množina $\mathcal{O}_1(A)$ je množina všech řešení úlohy

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \langle Af_j, x \rangle \\ \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ \quad \quad \quad x \geq 0. \end{array} \right\} (U1)$$

Množina $\mathcal{O}_2(A)$ je množina všech řešení úlohy

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalisujte} \quad \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle Ay, e_i \rangle \\ \text{za podmínky} \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1, \\ \quad \quad \quad y \geq 0. \end{array} \right\} (U2)$$

Takové úlohy ale můžeme přepsat (například přepíšme $U1$):

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & w \\ \text{za podmínky} & \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \langle Af_j, x \rangle \geq w, \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Což ale stále jde přepsat:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & w \\ \text{za podmínky} & \langle Af_j, x \rangle \geq w \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Můžeme uvážit jen $w > 0$, neboť A má všechny komponenty kladné (tj. $\langle Af_j, x \rangle > 0 \quad \forall j$).

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \frac{1}{w} \\ \text{za podmínky} & \left\langle Af_j, \frac{x}{w} \right\rangle \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{w} = \frac{1}{w}, \\ & \frac{x}{w} \geq 0, \end{array} \quad w \geq 0.$$

Označme si $\mathbb{1}_k = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$. Také uvažme substituci $\xi = \frac{x}{w}$.

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{w} = \frac{1}{w} = \left\langle \frac{x}{w}, \frac{1}{w} \right\rangle$$

Tudíž konečně

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \langle \xi, \mathbb{1}_k \rangle \\ \text{za podmínky} & \langle Af_j, \xi \rangle \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & \xi \geq 0. \end{array}$$

což je krásná úloha lineárního programování.

Můžeme ještě přepsat na maticový zápis

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalisujte} \quad \langle \xi, \mathbb{1}_k \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T \xi \geq \mathbb{1}_n, \\ \quad \quad \quad \xi \geq 0. \end{array} \right\} (P)$$

Stejným postupem získáme i přepis $U2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle \eta, \mathbb{1}_k \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A\eta \leq \mathbb{1}_m, \\ \quad \quad \quad \eta \geq 0. \end{array} \right\} (D)$$

Pozorování. Úlohy jsou vzájemně duální.

14.5 Příklad na vztah maticové hry a LP

Je dána hra $\Gamma(A)$ s maticí hry

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jaká je optimální strategie 1. a optimální strategie 2. hráče?

Matice A už má všechny komponenty kladné, tudíž nemusíme přičítat nějakou konstantu c .

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \xi_1 + \xi_2 \\ \text{za podmínky} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ & \xi \geq 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \\ \text{za podmínky} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ & \eta \geq 0. \end{array}$$

Vybereme si jednu z těchto úloh, ideálně tu jednodušší. Tou bude druhá, tedy maximalizační, úloha.

Inicializace:

1. iterace:

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 | |
| | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| η_4 | 3 | 1 | 5 | 1 | 0 | 1 |
| η_5 | 2 | 4 | 3 | 0 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------|---------------|
| | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 | |
| | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| η_1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| η_5 | 0 | $\frac{10}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |

2. iterace:

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|------------------------------|------------------------------|----------------|------------------------------|
| | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 | |
| | 0 | 0 | $\frac{2}{3} - \frac{2}{30}$ | $\frac{1}{3} - \frac{4}{30}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{3} + \frac{2}{30}$ |
| η_1 | 1 | 0 | \times | \times | \times | $\frac{1}{3} - \frac{1}{30}$ |
| η_2 | 0 | 1 | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A tedy: $\eta_1 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$, $\eta_2 = \frac{1}{10}$, $\eta_3 = 0$.

$$\xi_1 = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \xi_2 = \frac{1}{5}$$

15 Řešená vzorová písemka

15.1 Konvexní funkce

Je dána funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} + x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^4,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

- (a) Pro jaké hodnoty parametru α je f konvexní?
(b) Ukažte, že pro $\alpha = 0$ je množina

$$M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

konvexní.

(a) Určíme definitnost Hessiánu funkce. Pokud bude pozitivně (semi)definitní, funkce bude (ne)ryze konvexní.

$$f'(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2\alpha x_2, -2\alpha x_1 + 4x_2^3, e^{x_3})$$
$$f''(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{bmatrix}$$

Použijme Sylvesterova kritéria k určení definitnosti.

$$|2| = 2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 12x_2^2 \end{vmatrix} = 24x_2^2 - 4\alpha^2 \geq 0 \iff 6x_2^2 \geq \alpha^2 \dots \text{což lze zajistit jen tehdy, když } \alpha = 0, \text{ protože}$$

nemůžeme omezit hodnoty x_2 .

A proto funkce f bude konvexní právě tehdy, když $\alpha = 0$.

(b) Z předchozího bodu víme, že funkce f je konvexní právě tehdy, když $\alpha = 0$.

Podmínka $f(x_1, x_2, x_3) \leq 1$ je pouhá dolní úrovněová množina. A ta je určitě konvexní, protože je původní funkce f konvexní za těchto podmínek.

Zbylé podmínky $x_1 \geq 0$ a $x_2 \geq 0$ jsou rozhodně konvexní.

A protože průnik zachovává konvexitu, tak průnik těchto 3 podmínek je stále konvexní. Množina M je tedy konvexní.

15.2 Metoda nejmenších čtverců

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nalezněte všechny body minima funkce $f(x) = \|Ax - b\|^2$ na \mathbb{R}^2 .

Pokusíme se použít $(A^T A)^{-1} A^T A x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 16 = 9 > 0 \dots \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

15.3 KKT podmínky

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & -2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_2 \leq 0, \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 8. \end{aligned}$$

(a) Napište KKT podmínky pro tuto úlohu.

(b) Ověřte, že KKT podmínky jsou splněny v bodě $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) Využitím KKT podmínek zdůvodněte, proč $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ je řešení zadané úlohy.

(a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -2x_1 + x_2 \\ g_1(x_1, x_2) &= x_1 - x_2 \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= (-2, 1) \\ \nabla g_1(x_1, x_2) &= (1, -1) \\ \nabla g_2(x_1, x_2) &= (2x_1, 2x_2) \end{aligned}$$

KKT podmínky jsou:

$$\begin{aligned} -2 + \mu_1 + \mu_2 \cdot 2x_1 &= 0 \\ 1 - \mu_1 + \mu_2 \cdot 2x_2 &= 0 \\ \mu_1(x_1 - x_2) &= 0 \\ \mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 8) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Dosadíme do KKT podmínek a ověříme, že všechny podmínky jsou splněny.

$$\begin{aligned} -2 + \mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \quad (\text{I}) \\ 1 - \mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \quad (\text{II}) \\ \mu_1(0) &= 0 \quad \checkmark \\ \mu_2(0) &= 0 \quad \checkmark \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Po odečtení (I)-(II) nám vyjde $\mu_1 = \frac{3}{2}$ a $\mu_2 = \frac{1}{8}$, což je v souladu s podmínkami.

(c) Afinity podmínka regularity není splněna, ověříme Slaterovu.

g_1 je afinity \implies konvexní funkce. U g_2 musíme ověřit definitnost Hessiánu.

$$\nabla^2 g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matice je symetrická, můžeme tedy ověřovat definitnost. Využijeme Sylvesterova pravidla.

$|2| = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$. g_2 je (ryze) konvexní. Když se nám podaří nalézt $x \in \Omega$ takové, že $g_i(x) < 0$, pak bude Slaterova podmínka splněna. Zvolme $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pak očividně $g_i(x) < 0$, Slaterova podmínka regularity je splněna. Dále $f(x_1, x_2)$ je afinity, tedy konvexní. Platí nutné i postačující podmínky. Postačující KKT podmínky nám zaručují, že když bod $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ je KKT bodem, pak je bodem minima funkce f .

15.4 Smíšené rozšíření maticové hry

Nechť $\Gamma(A)$ je smíšené rozšíření maticové hry s maticí hry

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocí úlohy lineárního programování nalezněte cenu hry $\Gamma(A)$ a optimální strategii prvního hráče.

Nejdříve by bylo vhodné, aby matice A měla všechny koeficienty kladné, přičtíme tedy koeficient $c = 2$.

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vytvořme teď primární, respektive duální úlohu:

minimalisujte $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

$$\text{za podmínky } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi \geq 0.$$

maximalisujte $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$

$$\text{za podmínky } \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\eta \geq 0.$$

Vyberme si duální úlohu.

| | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 | η_6 | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| η_4 | 4 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| η_5 | 1 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| η_6 | 3 | 5 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |

| | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 | η_6 | |
|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------|----------|---------------|
| | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| η_1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| η_5 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| η_6 | 0 | $\frac{7}{2}$ | $-\frac{7}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ |