České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec
Praha, 2025

Obsah

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/A8B01OGT`.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u přednáškových příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení:

pro $f: D \to \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

(1) $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname*{argmax}_{x \in M}(-f(x))$,

(2) jesliže $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M}(-f(x))$.

(1) $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \underset{\cdot(-1)}{\iff} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \operatorname*{argmax}_{x \in M}(-f(x))$. $\square$

(2) Ať $\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \overset{(1)}{=} -\max_{x \in M}(-f(x))$. $\square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $x - 3 \geq 0 \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

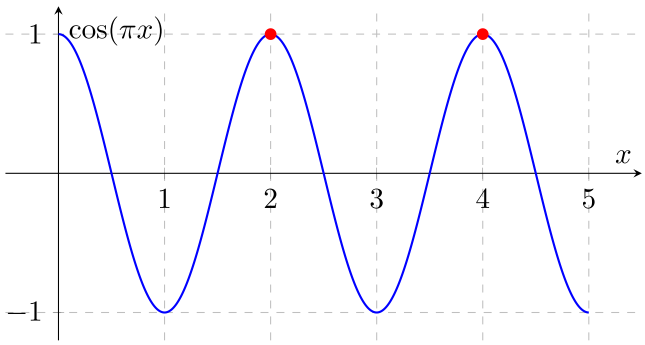
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte } & \ln x \\ \text{za podmínek } & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$D(f) = (0, \infty)$.

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmínek: $x \in (0, \infty) \wedge x \leq 5 \wedge \cos(\pi x) = 1$.



Očividně tedy $M = \{2, 4\}$.

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname*{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}$.

2 Druhý týden

3 Třetí týden

4 Čtvrtý týden

5 Pátý týden

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden