

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

# Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec  
Praha, 2025

<https://github.com/kned11k/A8B010GT>



# Obsah

	Strana
<b>1 První týden</b>	<b>2</b>
1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima . . . . .	2
1.2 Hledání přípustných množin . . . . .	2
1.3 Hledání přípustných množin . . . . .	2
1.4 Maximalisační úloha . . . . .	3
1.5 Minimalisační úloha . . . . .	3
1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami . . . . .	4
1.7 Uzavřená úsečka . . . . .	6
1.8 Je nadrovina konvexní? . . . . .	6
1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní? . . . . .	6
1.10 Je uzavřená koule konvexní? . . . . .	6
1.11 Je okolí konvexní? . . . . .	6
1.12 Je průnik množin konvexní? . . . . .	7
1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu . . . . .	7
1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní . . . . .	7
1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní . . . . .	8
1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní . . . . .	8
1.17 Určení definitnosti matic . . . . .	9
1.18 Existence matice . . . . .	10
<b>2 Druhý týden</b>	<b>12</b>
2.1 Věta o nejlepší aproximaci . . . . .	12
2.2 Projekce bodu a variační nerovnost . . . . .	12
2.3 Koule? . . . . .	13
2.4 Věta o ortogonálním rozkladu . . . . .	13
<b>3 Třetí týden</b>	<b>15</b>
3.1 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	15
3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců . . . . .	15
3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců . . . . .	16
3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny . . . . .	16
3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou . . . . .	17
<b>4 Čtvrtý týden</b>	<b>18</b>

5	Pátý týden	19
6	Šestý týden	20
7	Sedmý týden	21
8	Osmý týden	22
9	Devátý týden	23
10	Desátý týden	24
11	Jedenáctý týden	25
12	Dvanáctý týden	26
13	Třináctý týden	27
14	Čtrnáctý týden	28

# Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/A8B010GT>.

**Poděkování.** Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem  $\text{\LaTeX}$  Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastianiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

## Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zprehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

# 1 První týden

## 1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$  platí:

- (1)  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$
- (2) jestliže  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , pak  $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1)  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , tj.  $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \xLeftrightarrow{(-1)} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$ , tj.  $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$
- (2) Ať  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , pak  $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

## 1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk } \frac{3}{x} \leq 1, \\ &x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik:  $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

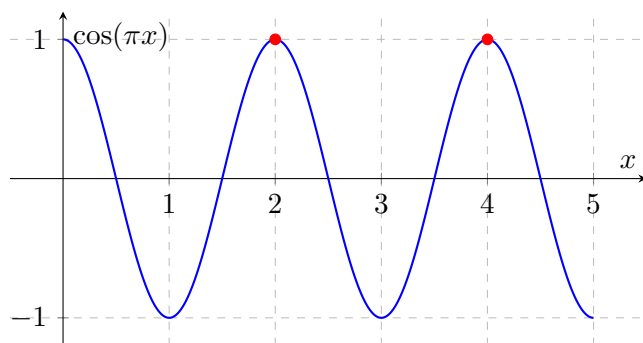
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě  $x = 3$ .

## 1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } \ln x \\ &\text{za podmíněk } x \leq 5, \\ &\cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk:  $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy  $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout  $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$

## 1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici  $x$  (v tis. Kč) je  $\frac{2x}{4x+25}$  a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici  $y$  (v tis. Kč) je  $\frac{x}{x+50}$ . Jakým způsobem má investor rozdělit částku  $c = 100000$  Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujeme } \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ &\text{za podmínek } x+y=100, \\ &x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například  $x = 100 - y$ . Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25} \right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

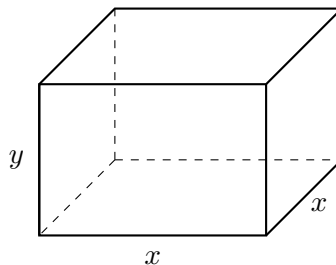
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení  $y = 25 \rightarrow x = 75$ .

## 1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu  $10 \text{ dm}^3$  tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} &\text{minimalisujeme } 4xy + x^2 \\ &\text{za podmínek } x^2y = 10, \\ &x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například  $y = \frac{10}{x^2}$ . Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left( 4x \frac{10}{x^2} + x^2 \right) = \frac{-40}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40 + 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení  $x = \sqrt[3]{20} \rightarrow y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ .

## 1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V  $\mathbb{R}^n$  jsou dány množiny bodů  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  a  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ . Ať  $w \in \mathbb{R}^n$  a  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $H$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = 0$ ,  $H_1$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = 1$  a  $H_2$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = -1$ .

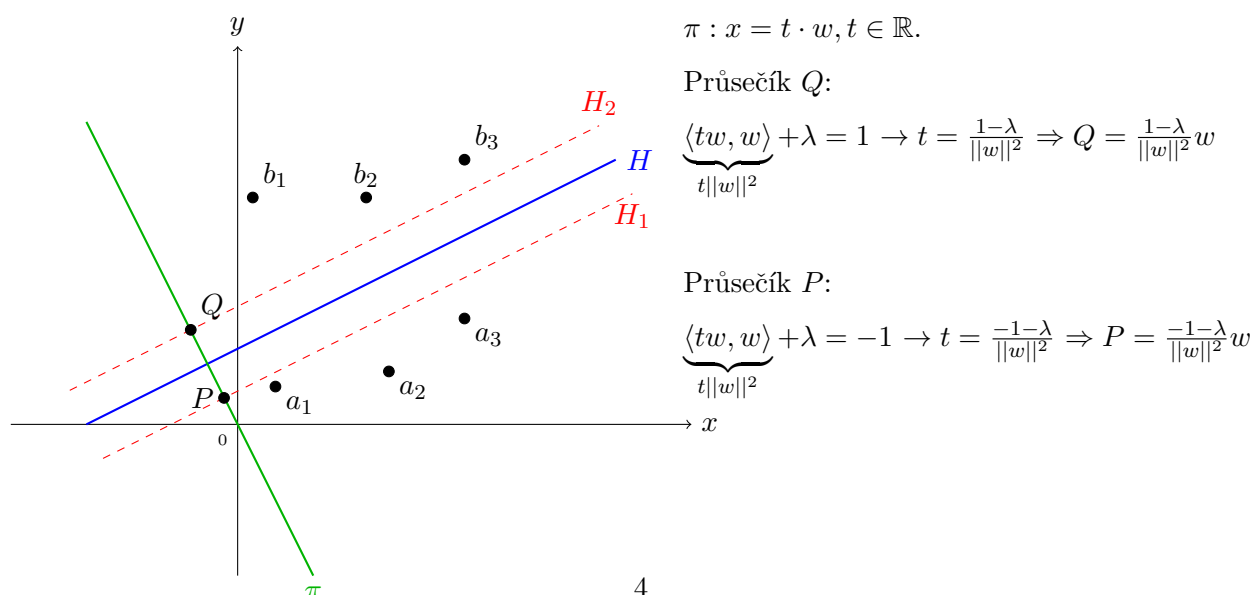
- (a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami  $H_1$  a  $H_2$  je  $\frac{2}{\|w\|}$ . Dále ukažte, že  $\frac{1}{\|w\|}$  je vzdálenost  $H$  od  $H_1$  a také vzdálenost  $H$  od  $H_2$ .
- (b) Interpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} \text{maximalisujte } g(w, \lambda) &= \frac{2}{\|w\|} \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

- (c) Ukažte, že  $(\hat{w}, \hat{\lambda})$  je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } h(w, \lambda) &= \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(a)



Pak vzdálenost mezi nadrovinami  $H_1$  a  $H_2$  je dána rozdílem průsečíků  $P$  a  $Q$  v normě. Tedy:

$$\|Q - P\| = \left\| \frac{1 - \lambda}{\|w\|^2} w + \frac{1 + \lambda}{\|w\|^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{\|w\|^2} \right\| = \frac{2}{\|w\|^2} \|w\| = \frac{2}{\|w\|}.$$

To je prima, to jsme přesně chtěli.  $\square$

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení  $\frac{1}{2}$ , protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.



## Konvexní množiny

Definice. Množina  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazve konvexní, jestliže pro každé  $x, y \in C$  je  $[x, y] \in C$ .

### 1.7 Uzavřená úsečka

Nechť  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body  $x$  a  $y$ .

### 1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny:  $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Důkaz.

Atť  $x, z \in H(y, \alpha)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$ . Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$$

### 1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

#### 1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule:  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ , o středu  $a \in \mathbb{R}^n$  a poloměru  $r > 0$ .

Důkaz.

Atť  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| \leq r$ . Tedy za  $x$  z definice dosadíme úsečku mezi body  $x$  a  $y$ , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

#### 1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí:  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ , o středu  $a \in \mathbb{R}^n$  a poloměru  $r > 0$ .

Důkaz.

Atť  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| < r$ . Dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

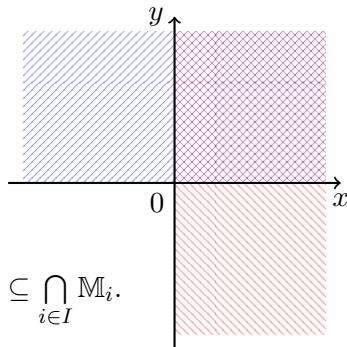
## 1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve  $\mathbb{R}^2$ :

Mějme jednu modrou ( $y \geq 0$ ) a druhou červenou ( $x \geq 0$ ) **konvexní** množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Visuálně je průnik nekonvexní.



Důkaz.

$$\text{Nechť } x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i.$$

□

## 1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme  $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ .

$[0, 1]$  a  $(0, 1)$  jsou **konvexní** množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.  $\{0\}$  a  $\{1\}$  jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

## Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se nazývá afinní, existují-li  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  a  $b \in \mathbb{R}^m$  tak, že  $f(x) = Ax + b$ .

## 1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pak  $f$  je **afinní**  $\iff$  pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$  a každé  $\lambda \in \mathbb{R}$  platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $f(x) = Ax + b$ , kde  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Ať  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\underbrace{\lambda(Ax + b)}_{f(x)} + \underbrace{(1 - \lambda)(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

„ $\Leftarrow$ “: Cíl: Ukázat, že  $f$  je **afinní**, tedy  $f(x) = Ax + b$ .

Zvolme  $\varphi(x) = f(x) - f(0)$ .

Pokud je  $f$  **afinní**, pak zobrazení  $\varphi$  by mělo být dáno jako  $Ax$ , tedy být lineární.

Cíl:  $\varphi$  je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) At  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Cíl:  $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ .

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) At  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Cíl:  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ .

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

### 1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  **afinní** a  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  **konvexní**, pak  $f(C)$  je konvexní.

Důkaz.

Mějme  $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$ .

Dle předpokladu je  $C$  konvexní.  $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = \underbrace{[f(x), f(y)]}_a \subseteq f(C). \quad \square$

### 1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť  $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ . Pak  $C_1$  a  $C_2$  jsou **konvexní** množiny právě tehdy, když  $C_1 \times C_2$  je konvexní množina.

Důkaz.

„ $\implies$ “: Mějme  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl:  $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$ . Dle **definice**.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„ $\impliedby$ “: Definujme **afinní** zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak  $f$  je afinní. Navíc  $f(C_1 \times C_2) = C_1. \implies C_1$  je **konvexní**, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro  $C_2$ , zde zadefinujme afinní zobr.  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak  $g$  je afinní. Navíc  $g(C_1 \times C_2) = C_2. \implies C_2$  je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu.  $\square$

## 1.17 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice  $A$ , jestliže

(a)  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$

(b)  $\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(c)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(d)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(e)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix};$

(f)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být symetrická.  
 $Q=Q^T$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \langle Qx, x \rangle &\geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně semidefinitní.} \\ \langle Qx, x \rangle &> 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně definitní.} \end{aligned}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.

Matice je indefinitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že  $Q$  je negativně (semi)definitní, jestliže  $(-Q)$  je pozitivně (semi)definitní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit pozitivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

(a)  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \rightarrow \text{podezření na pozitivní semidefinitnost.}$

Hlavní minory jsou  $Q_{\{1\}}$  a  $Q_{\{1,2\}}$ .

Menší minory:  $Q_I$ , kde  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  neprázdná. Aby matice byla pozitivně semidefinitní, tak  $\det Q_I \geq 0$ .

Tedy:  $Q_{\{2\}} = [4]$ .  $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$ .

Tedy matice  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$  je pozitivně semidefinitní.

(b)  $\begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0. \text{ Matice je pozitivně definitní.}$

$$(c) Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy  $\det Q = 0$ .

$$Q_{\{1\}} = 4 > 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 1 > 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 0 = 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ . Aby matice  $Q$  byla pozitivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být  $\geq 0$ . Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice  $Q$  je indefinitní.

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy **vlastnosti** symetrických matic a určíme definitnost pro matici  $(-Q)$ .

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice  $(-Q)$  je pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0.$$

$\implies (-Q)$  je pozitivně semidefinitní  $\iff Q$  je negativně semidefinitní.

## 1.18 Existence matice

Ať  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

(a) Ukažte, že  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$  pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Ukažte, že existují matice  $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  takové, že  $B^T = B$ ,  $C^T = -C$  a  $A = B + C$ . Jsou matice  $B$  a  $C$  určeny jednoznačně?

(c) Ukažte, že existuje symetrická matice  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  taková, že  $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ .

Zdefinujme si vlastnost skalárního součinu:  $\langle a, b \rangle = b^T a$ , kde  $b^T = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

(a) Využijme zmíněné **vlastnosti**.

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$$

(b) Pozorování: Matice  $B$  je symetrická a matice  $C$  je antisymetrická.

$$\text{Zvolme: } \left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} \right\} B + C = A.$$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C. \checkmark$$

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B. \checkmark \quad \square$$

$$(c) \langle Cx, x \rangle \stackrel{?}{=} 0$$

$$\langle Cx, x \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x \rangle \stackrel{-C \equiv C^T}{=} -\langle x, Cx \rangle = -\langle Cx, x \rangle = 0.$$

Matice  $C$  tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí  $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ .  $\square$



Důkaz.

(1)  $\Rightarrow$  (2):

Ať  $v_\lambda = y + \lambda(z - y)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ .

Pak

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - v_\lambda\|^2 = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 = \langle (x - y) - \lambda(z - y), (x - y) - \lambda(z - y) \rangle \\ \|x - y\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2 \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1):

Ať  $z \in C$ .

Pak

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, (z - x) + (x - y) \rangle = \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 \\ \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 &\geq \|x - y\|^2 - \underbrace{|\langle x - y, z - y \rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star \\ \star &= \|x - y\|^2 - \|x - y\| \cdot \|z - x\|. \end{aligned}$$

Je-li  $x \neq y$ , pak vydělíme:  $\|z - x\| \geq \|x - y\|$ .

Je-li  $x = y$ , pak  $y \in C : x \in C \dots$  triviální.  $\square$

## 2.3 Koule?

## 2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  je lineární podprostor. Potom platí:

- (a)  $P_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lineární zobrazení.
- (b) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .
- (c) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  existují jednoznačně určené body  $y \in L$  a  $z \in L^\perp$  tak, že  $x = y + z$ . Navíc  $y = P_L(x)$  a  $z = P_{L^\perp}(x)$ .

Důkaz.

(a)

Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1.  $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .

1. : Ať  $z \in L$ . Pak

$$\begin{aligned} \langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle &= \alpha \langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle \\ &\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0} \langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot z - P_L(x)}_{\in L} \rangle \end{aligned}$$

Tedy  $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$ . Pro  $\alpha = 0$  zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.



2. : Ať  $z \in L$ .

$$\underbrace{\langle x + y - (P_L(x) + P_L(y)), z - (P_L(x) + P_L(y)) \rangle}_{(x - P_L(x)) + (y - P_L(y))} \leq 0.$$

$$\underbrace{\langle x - P_L(x), \underbrace{(z - P_L(y)) - P_L(x)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), \underbrace{(z - P_L(x)) - P_L(y)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} \leq 0.$$

Z **variační nerovnosti** tedy plyne, že  $P_L$  je nutně lineární.  $\square$

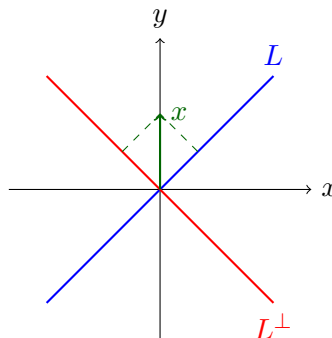
(b) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .

$L$  ... lineární podprostor  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$ .

Důkaz.

Cíl:  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$ . Pak



$$\begin{aligned} \langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x)) \rangle &= \underbrace{\langle P_L(x), z - (x - P_L(x)) \rangle}_{\in L} \\ &= \underbrace{\langle P_L(x), z \rangle}_0 - \langle P_L(x), x - P_L(x) \rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x) \rangle \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(c) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  existují jednoznačně určené body  $y \in L$  a  $z \in L^\perp$  tak, že  $x = y + z$ . Navíc  $y = P_L(x)$  a  $z = P_{L^\perp}(x)$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Důkaz existence.

Pak  $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$ .  $\square$

Důkaz jednoznačnosti.

Ať  $a \in L, b \in L^\perp$  takové, že  $x = a + b$ .

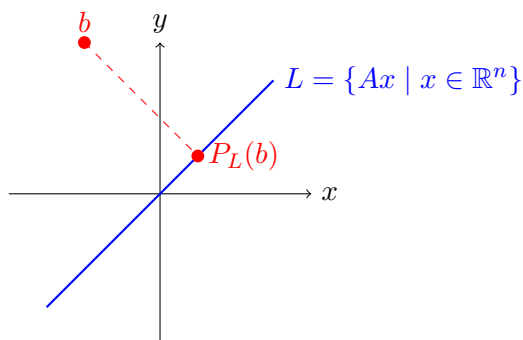
Cíl:  $a = P_L(x)$

Ať  $z \in L$ .

$$\langle x - a, z - a \rangle = \langle \underbrace{b}_{\in L}, z - a \rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \stackrel{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

### 3 Třetí týden

#### 3.1 Metoda nejmenších čtverců



Pokud  $b \in L$ , řešíme úlohu  $Ax = b$ .

Pokud  $b \notin L$ , řešíme  $Ax = P_L(b)$ .

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \iff A^T A \hat{x} = A^T b$ .

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $A \hat{x} = P_L(b) \stackrel{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A \hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b) \rangle = \underbrace{\langle P_{L^\perp}(b), (A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b)) \rangle}_{\substack{\in L^\perp \\ \in L}} = 0. \quad \square$$

„ $\Leftarrow$ “: Ať  $A^T A \hat{x} = A^T b$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$0 = \underbrace{\langle x, A^T A \hat{x} - A^T b \rangle}_{A^T(A\hat{x}-b)} = \underbrace{\langle (A^T)^T x, A\hat{x} - b \rangle}_L \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \stackrel{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

#### 3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body  $(0, -\frac{1}{2})^T$ ,  $(1, \frac{1}{3})^T$  a  $(2, \frac{2}{3})^T$ . Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímkou o rovnici  $y = kx + q$ , kde  $k, q \in \mathbb{R}$ .

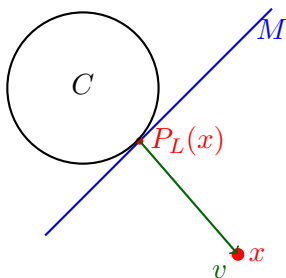
$$\left. \begin{aligned} 0k + q &= -\frac{1}{2} \\ 1k + q &= \frac{1}{3} \\ 2k + q &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$  je neprázdná uzavřená konvexní množina.  
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$  existuje  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  tak, že  
 $\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$

Důkaz.

$$v = x - P_L(x) \neq 0$$

$$\langle v, y \rangle = \langle v, P_L(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle y, v \rangle \leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Položme  $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$ .

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha} = \underbrace{\langle x - P_L(x), v \rangle}_v = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

**Důsledek:** Každá uzavřená konvexní množina v  $\mathbb{R}^n$  je průnikem všech polopřímek, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

Ať neplatí: tj. existuje  $C \in \mathbb{R}^n$  uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem  $P$  všech polopřímek obsahujících  $C$ .

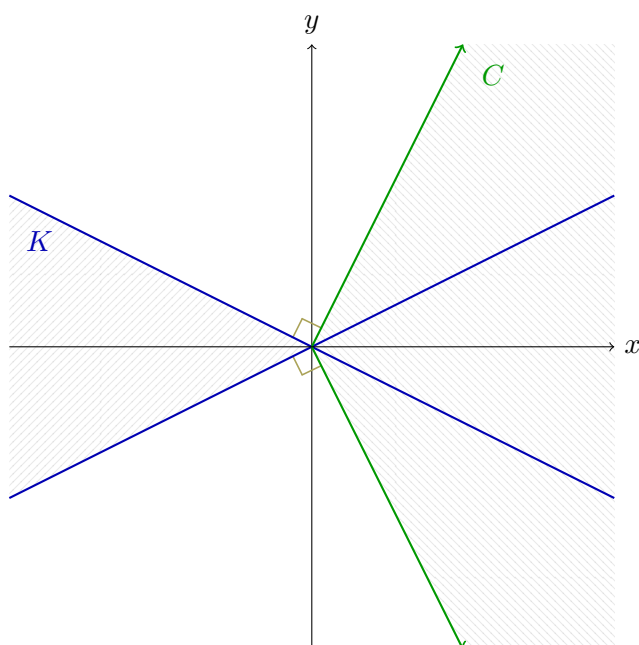
Pak  $x \in P$  tak, že  $x \notin C$ . Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor  $M$  takový, že  $C \subseteq M$  a  $x \notin M$ . Ale to je ve sporu s tím, že  $x \in P$ .  $\square$

### 3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  a  $b \in \mathbb{R}^2$ . Označme

$$C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^2\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \geq 0 \right\}$$

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0\} \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}.$$



Vždy nastane jeden z případů:

- (a)  $b \in C$
- (b)  $b \notin C$

## 4 Čtvrtý týden

## 5 Pátý týden

## 6 Šestý týden

## 7 Sedmý týden



## 8 Osmý týden

## 9 Devátý týden

## 10 Desátý týden

## 11 Jedenáctý týden

## 12 Dvanáctý týden

## 13 Třináctý týden

## 14 Čtrnáctý týden