

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec
Praha, 2025

<https://github.com/knedl1k/A8B010GT>



Obsah

	Strana
1 První týden	2
1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima	2
1.2 Hledání přípustných množin	2
1.3 Hledání přípustných množin	2
1.4 Maximalisační úloha	3
1.5 Minimalisační úloha	3
1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami	4
1.7 Uzavřená úsečka	6
1.8 Je nadrovina konvexní?	6
1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?	6
1.10 Je uzavřená koule konvexní?	6
1.11 Je okolí konvexní?	6
1.12 Je průnik množin konvexní?	7
1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu	7
1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní	7
1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní	8
1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní	8
1.17 Určení definitnosti matic	9
1.18 Existence matice	10
2 Druhý týden	12
2.1 Věta o nejlepší aproximaci	12
2.2 Projekce bodu a variační nerovnost	12
2.3 Koule?	13
2.4 Věta o ortogonálním rozkladu	13
3 Třetí týden	15
3.1 Metoda nejmenších čtverců	15
3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců	15
3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců	16
3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny	16
3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou	17
3.6 Lemma neprázdné uzavřené konvexní	17
3.7 Farkasovo lemma	18

3.8	Krajní body konvexní množiny	18
3.9	Kreinova-Milmanova věta	19
4	Čtvrtý týden	20
4.1	Konvexní funkce	20
4.2	Příklad konvexní funkce	20
4.3	Příklad konvexní funkce	20
4.4	Dolní úrovněová množina	21
4.5	Použití dolní úrovněové množiny	21
4.6	Součet a součin zachovávají konvexitu	21
4.7	Příklad ověření konvexity	22
5	Pátý týden	23
6	Šestý týden	24
7	Sedmý týden	25
8	Osmý týden	26
9	Devátý týden	27
10	Desátý týden	28
11	Jedenáctý týden	29
12	Dvanáctý týden	30
13	Třináctý týden	31
14	Čtrnáctý týden	32

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/A8B010GT>.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem \LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastianiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zprehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$
- (2) jestliže $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \xLeftrightarrow{(-1)} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$
- (2) Ať $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk } \frac{3}{x} \leq 1, \\ &x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

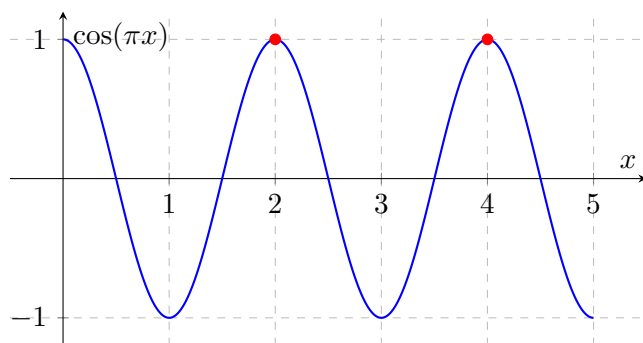
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } \ln x \\ &\text{za podmíněk } x \leq 5, \\ &\cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$

1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici y (v tis. Kč) je $\frac{y}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujeme } \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ &\text{za podmínek } x+y=100, \\ &x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25} \right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

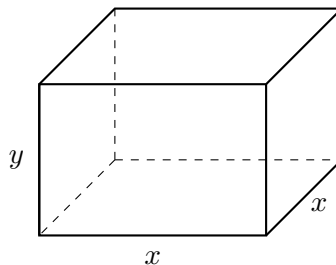
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \rightarrow x = 75$.

1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm^3 tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} &\text{minimalisujeme } 4xy + x^2 \\ &\text{za podmínek } x^2y = 10, \\ &x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left(4x \frac{10}{x^2} + x^2 \right) = \frac{-40}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40 + 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x = \sqrt[3]{20} \rightarrow y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V \mathbb{R}^n jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = -1$.

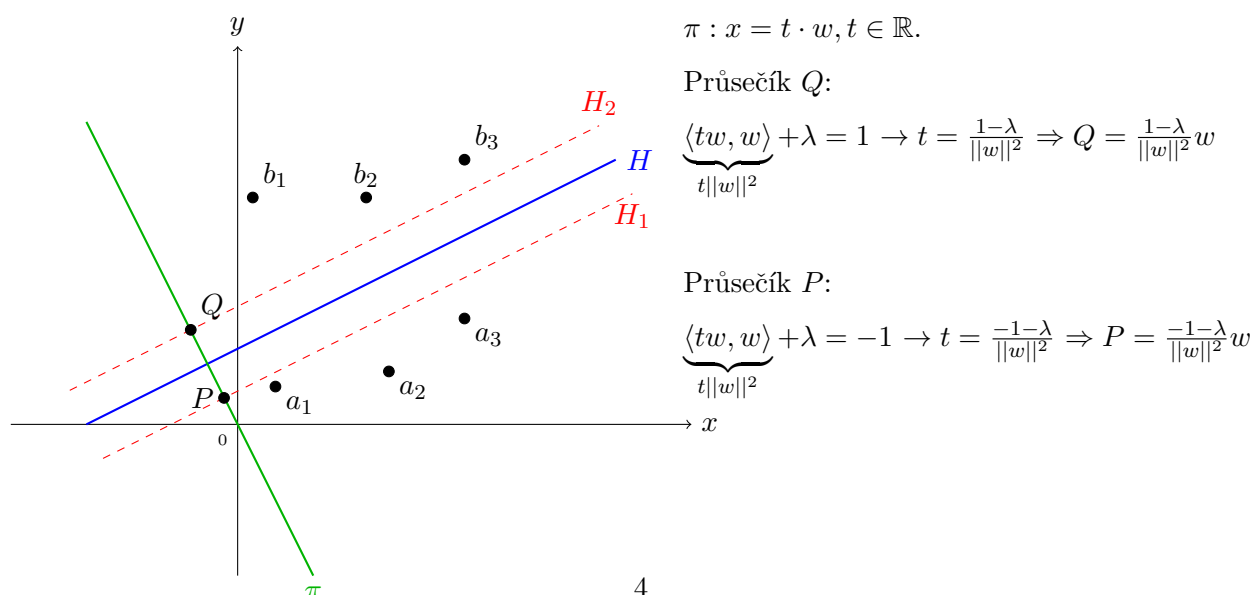
- (a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{\|w\|}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{\|w\|}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2 .
- (b) Interpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} \text{maximalisujte } g(w, \lambda) &= \frac{2}{\|w\|} \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

- (c) Ukažte, že $(\hat{w}, \hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } h(w, \lambda) &= \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(a)



Pak vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je dána rozdílem průsečíků P a Q v normě. Tedy:

$$\|Q - P\| = \left\| \frac{1 - \lambda}{\|w\|^2} w + \frac{1 + \lambda}{\|w\|^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{\|w\|^2} \right\| = \frac{2}{\|w\|^2} \|w\| = \frac{2}{\|w\|}.$$

To je prima, to jsme přesně chtěli. \square

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení $\frac{1}{2}$, protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

1.7 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y .

1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

At' $x, z \in H(y, \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$$

1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

At' $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

At' $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| < r$. Dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

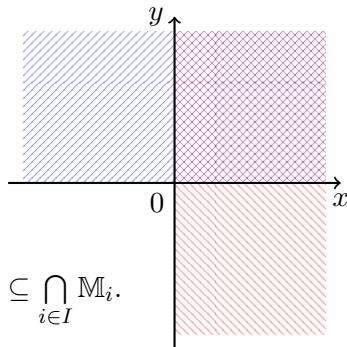
1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve \mathbb{R}^2 :

Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) **konvexní** množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Visuálně je průnik nekonvexní.



Důkaz.

$$\text{Nechť } x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i.$$

□

1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou **konvexní** množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není. $\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pak f je **afinní** \iff pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\underbrace{\lambda(Ax + b)}_{f(x)} + \underbrace{(1 - \lambda)(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Cíl: Ukázat, že f je **afinní**, tedy $f(x) = Ax + b$.

Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.

Pokud je f **afinní**, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax , tedy být lineární.

Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) At $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) At $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Cíl: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **afinní** a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **konvexní**, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = \underbrace{[f(x), f(y)]}_a \subseteq f(C). \quad \square$

1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou **konvexní** množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

„ \implies “: Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle **definice**.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„ \impliedby “: Definujme **afinní** zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies C_1$ je **konvexní**, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2 , zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies C_2$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. \square

1.17 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice A , jestliže

$$(a) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být symetrická.
 $Q=Q^T$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \langle Qx, x \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je pozitivně semidefinitní.} \\ \langle Qx, x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Q \text{ je pozitivně definitní.} \end{aligned}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.

Matice je indefinitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že Q je negativně (semi)definitní, jestliže $(-Q)$ je pozitivně (semi)definitní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit pozitivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

$$(a) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \rightarrow \text{podezření na pozitivní semidefinitnost.}$$

Hlavní minory jsou $Q_{\{1\}}$ a $Q_{\{1,2\}}$.

Menší minory: Q_I , kde $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ neprázdná. Aby matice byla pozitivně semidefinitní, tak $\det Q_I \geq 0$.

Tedy: $Q_{\{2\}} = [4]$. $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$.

Tedy matice $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.

$$(b) \begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0. \text{ Matice je pozitivně definitní.}$$

$$(c) Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy $\det Q = 0$.

$$Q_{\{1\}} = 4 > 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 1 > 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 0 = 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Aby matice Q byla pozitivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být ≥ 0 . Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice Q je indefinitní.

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy **vlastnosti** symetrických matic a určíme definitnost pro matici $(-Q)$.

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice $(-Q)$ je pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0.$$

$\implies (-Q)$ je pozitivně semidefinitní $\iff Q$ je negativně semidefinitní.

1.18 Existence matice

Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?

(c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

Zdefinujme si vlastnost skalárního součinu: $\langle a, b \rangle = b^T a$, kde $b^T = (b_1, \dots, b_n)$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(a) Využijme zmíněné **vlastnosti**.

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$$

(b) Pozorování: Matice B je symetrická a matice C je antisymetrická.

$$\text{Zvolme: } \left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} \right\} B + C = A.$$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C. \checkmark$$

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B. \checkmark \quad \square$$

$$(c) \langle Cx, x \rangle \stackrel{?}{=} 0$$

$$\langle Cx, x \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x \rangle \stackrel{-C \equiv C^T}{=} -\langle x, Cx \rangle = -\langle Cx, x \rangle = 0.$$

Matice C tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$. \square

2 Druhý týden

2.1 Věta o nejlepší aproximaci

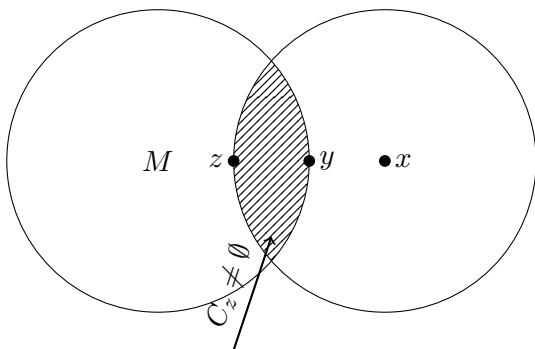
Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\text{dist}(x; C) = \|x - \hat{y}\|$.

Důkaz.

1. Existence

Cíl: Existuje bod minima

Úvaha:



M je obecná konvexní množina.

$C \times R = \|x - z\|$,

$C_z = M \cap B(x, R) = M \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|z - a\| \leq R\}$.

\uparrow

uzavřená, omezená, neprázdná
kompaktní

Tedy $a \mapsto \|x - a\|$ je spojitá.

\Rightarrow Spojitost na kompaktní množině znamená, že f nabývá na C_z minima dle Weierstrassova kritéria.

Ať y je bod minima. Všechny body v M mají od x vzdálenost $\geq \|x - y\|$. \square

2. Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \|x - b\| = \overbrace{\text{dist}(x, M)}^\delta$, pak $a = b$.

Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Důkaz lemma:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad \square \end{aligned}$$

Důkaz jednoznačnosti:

Ať $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Pak $\delta^2 \leq \|x - y\|^2 = \|x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\|^2 = \|\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)\|^2 = \frac{1}{4}\|\underbrace{(x - a)}_u + \underbrace{(x - b)}_v\|^2$

$$\stackrel{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4} \left[2 \left(\underbrace{\|x - a\|^2}_{\delta^2} + \underbrace{\|x - b\|^2}_{\delta^2} \right) - \underbrace{\|(x - a) + (x - b)\|^2}_{b - a} \right] = \delta^2 - \frac{1}{4}\|b - a\|^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \frac{1}{4}\underbrace{\|b - a\|^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

2.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.

(2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) \Rightarrow (2):

At $v_\lambda = y + \lambda(z - y)$, $\lambda \in (0, 1]$.

Pak

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - v_\lambda\|^2 = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 = \langle (x - y) - \lambda(z - y), (x - y) - \lambda(z - y) \rangle \\ \|x - y\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2 \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (1):

At $z \in C$.

Pak

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, (z - x) + (x - y) \rangle = \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 \\ \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 &\geq \|x - y\|^2 - \underbrace{|\langle x - y, z - y \rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star \\ \star &= \|x - y\|^2 - \|x - y\| \cdot \|z - x\|. \end{aligned}$$

Je-li $x \neq y$, pak vydělíme: $\|z - x\| \geq \|x - y\|$.

Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \dots$ triviální. \square

2.3 Koule?

2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

- (a) $P_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.
- (b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.
- (c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(a)

Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1. $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
2. $P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. : At $z \in L$. Pak

$$\begin{aligned} \langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle &= \alpha \langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle \\ &\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0} \langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot z - P_L(x)}_{\in L} \rangle \end{aligned}$$

Tedy $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$. Pro $\alpha = 0$ zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.

2. : Ať $z \in L$.

$$\underbrace{\langle x + y - (P_L(x) + P_L(y)), z - (P_L(x) + P_L(y)) \rangle}_{(x - P_L(x)) + (y - P_L(y))} = \underbrace{\langle x - P_L(x), (z - P_L(y)) - P_L(x) \rangle}_{\in L, \leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), (z - P_L(x)) - P_L(y) \rangle}_{\in L, \leq 0} \leq 0.$$

Z **variační nerovnosti** tedy plyne, že P_L je nutně lineární. \square

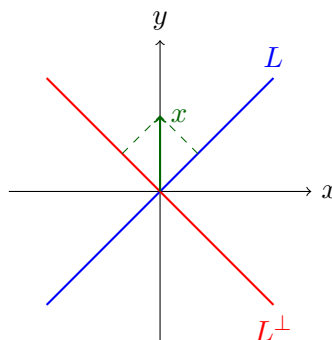
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

$L \dots$ lineární podprostor \mathbb{R}^n ,
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$.

Důkaz.

Cíl: $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$. Pak



$$\begin{aligned} \langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x)) \rangle &= \underbrace{\langle P_L(x), z - (x - P_L(x)) \rangle}_{\in L} \\ &= \underbrace{\langle P_L(x), z \rangle}_0 - \langle P_L(x), x - P_L(x) \rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x) \rangle \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz existence.

Pak $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$. \square

Důkaz jednoznačnosti.

Ať $a \in L, b \in L^\perp$ takové, že $x = a + b$.

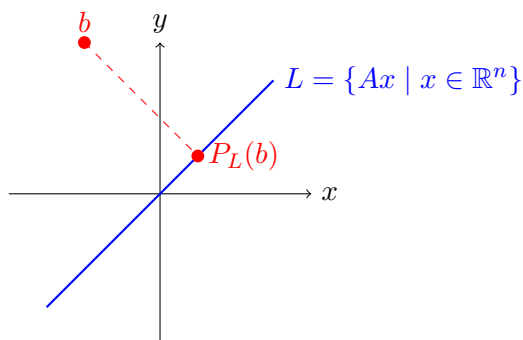
Cíl: $a = P_L(x)$

Ať $z \in L$.

$$\langle x - a, z - a \rangle = \langle \underbrace{b}_{\in L}, z - a \rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \stackrel{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

3 Třetí týden

3.1 Metoda nejmenších čtverců



Pokud $b \in L$, řešíme úlohu $Ax = b$.

Pokud $b \notin L$, řešíme $Ax = P_L(b)$.

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \iff A^T A \hat{x} = A^T b$.

„ \Rightarrow “: Ať $A \hat{x} = P_L(b) \stackrel{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A \hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b) \rangle = \underbrace{\langle P_{L^\perp}(b), (A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b)) \rangle}_{\substack{\in L^\perp \\ \in L}} = 0. \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Ať $A^T A \hat{x} = A^T b$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

$$0 = \underbrace{\langle x, A^T A \hat{x} - A^T b \rangle}_{A^T(A\hat{x}-b)} = \underbrace{\langle (A^T)^T x, A\hat{x} - b \rangle}_L \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \stackrel{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body $(0, -\frac{1}{2})^T$, $(1, \frac{1}{3})^T$ a $(2, \frac{2}{3})^T$. Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímku o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.

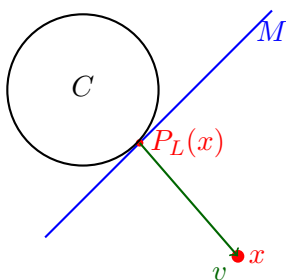
$$\left. \begin{aligned} 0k + q &= -\frac{1}{2} \\ 1k + q &= \frac{1}{3} \\ 2k + q &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina.
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$ existuje $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že
 $\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$

Důkaz.

$$v = x - P_L(x) \neq 0$$

$$\langle v, y \rangle = \langle v, P_L(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle y, v \rangle \leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Položme $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$.

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha} = \underbrace{\langle x - P_L(x), v \rangle}_v = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

Důsledek: Každá uzavřená konvexní množina v \mathbb{R}^n je průnikem všech polopřímek, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

Ať neplatí: tj. existuje $C \in \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem P všech polopřímek obsahujících C .

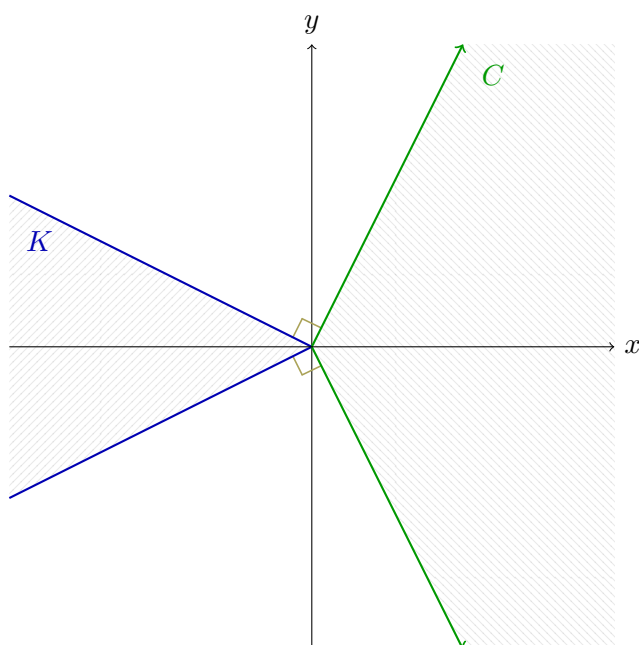
Pak $x \in P$ tak, že $x \notin C$. Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor M takový, že $C \subseteq M$ a $x \notin M$. Ale to je ve sporu s tím, že $x \in P$. \square

3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ a $b \in \mathbb{R}^2$. Označme

$$C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^2\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \geq 0 \right\}$$

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0\} \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}.$$



Vždy nastane jeden z případů:

- (a) $b \in C$
- (b) $b \notin C$ - existuje nenulový vektor $y \in K$ svírající s b úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

3.6 Lemma neprázdné uzavřené konvexní

Jestliže $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pak $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$ je neprázdna uzavřená konvexní množina.

Důkaz.

- neprázdna - vždy obsahuje alespoň 0,
- konvexní - lineární zobrazení (matice) zachovává konvexitu,
- uzavřenost dokazovat nebudeme.

3.7 Farkasovo lemma

Výslovnost [farkášovo].

Je-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$, pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- (a) Existuje $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Ax = b$ a $x \geq 0$.
- (b) Existuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $A^T y \leq 0$ a $\langle y, b \rangle > 0$.

Důkaz.

„(a) $\implies \neg(b)$ “:

At' $x \in \mathbb{R}_+^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $Ax = b$ a $A^T y \leq 0$.

$$\langle y, b \rangle \stackrel{b=Ax}{=} \langle y, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T y, x \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle x \rangle}_{\geq 0} \leq 0. \quad \square$$

„ $\neg(a) \implies (b)$ “:

At' $C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} \implies b \notin C, C \dots$ uzavřená neprázdná konvexní množina.

oddělitelnost \implies existuje $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tak, že: $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha < \langle b, y \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Začneme s $\alpha < \langle b, y \rangle$. Chceme, aby $\langle b, y \rangle$ byl kladný. Pak nám y bude svírat ostrý úhel s b .

Protože $0 \in C$, je $0 \leq \alpha < \langle b, y \rangle$ (za Ax dosadíme 0, takže budeme mít $\langle 0, y \rangle$).

Ted' musíme dokázat, že y skutečně řeší zadanou soustavu nerovnic.

Víme tedy, že:

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \\ \langle x, A^T y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

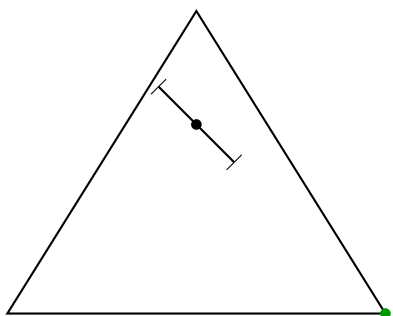
Odtud' $\langle x, A^T y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$, neboť:

At' $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$ je takový, že $\langle \tilde{x}, A^T y \rangle > 0$.

Pak $\langle \underbrace{\lambda \tilde{x}}_{\lambda > 0, \text{ tedy } \lambda \tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n}, A^T y \rangle = \lambda \underbrace{\langle \tilde{x}, A^T y \rangle}_{> 0} \rightarrow +\infty, \text{ pro } \lambda \rightarrow +\infty$. Což je spor s $\langle x, A^T y \rangle \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

$$\text{At' } e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Pak } (A^T y)_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \text{ neboť } (A^T y)_i = \langle e_i, A^T y \rangle. \quad \square$$

3.8 Krajiní body konvexní množiny



Mějme konvexní množinu. Když sestrojíme libovolnou nedegenerativní (tzn. netriviální = není to pouze bod) úsečku, vždy nalezneme bod, který bude ležet přesně uprostřed této úsečky.

Co když ale vezmeme například **zelený bod** vyznačený na nákrese? V takovém případě nejsme schopni sestroji nedegenerativní úsečku, na jejímž středu by ležel tento bod.

Definujeme: Krajní bod $x \in C$ konvexní množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový bod, pro který neexistují dva různé body y, z tak, že

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

$\text{ext}(C) \dots$ množina všech krajních (extremálních) bodů

3.9 Kreinova-Milmanova věta

Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$.
Důkaz vynecháme.

Kompaktnost je důležitá.

- Interval $(0, 1)$ není uzavřený a $\text{ext}((0, 1)) = \emptyset$.
- Množina \mathbb{R}_+^2 není omezená a $\text{ext}(\mathbb{R}_+^2) = \{0\}$.

4 Čtvrtý týden

4.1 Konvexní funkce

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina.
Řekněme, že f je

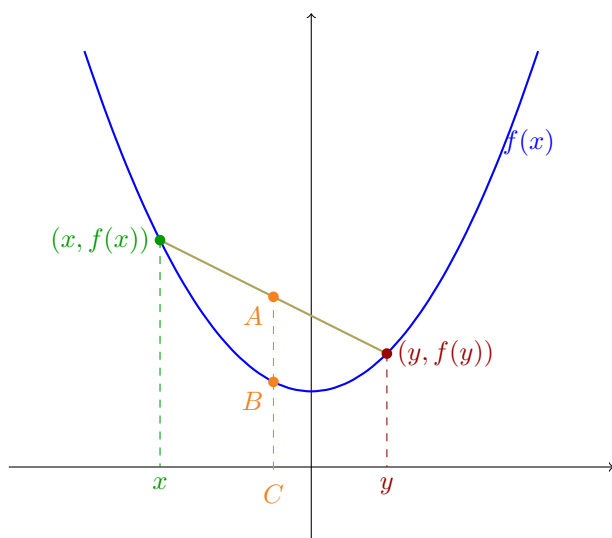
- (a) konvexní na C , jestliže pro každé $x, y \in C$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (b) ryze konvexní na C , jestliže pro každé dva různé body $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (c) konkávní (resp. ryze konkávní) na C , jestliže $(-f)$ je konvexní (resp. ryze konvexní) na C .



$$A = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

$$B = (\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$$

$$C = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Pozorování: úsečka vždy leží nad funkcí.

4.2 Příklad konvexní funkce

Je afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (tj. $f(x) = \langle x, a \rangle + b, b \in \mathbb{R}$) konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle \lambda x + (1 - \lambda)y, a \rangle + b \\ &= \lambda \langle x, a \rangle + (1 - \lambda) \langle y, a \rangle + \lambda b + (1 - \lambda)b \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní i konkávní. } \square \end{aligned}$$

4.3 Příklad konvexní funkce

Je funkce $f(x) = \|x\|$ konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

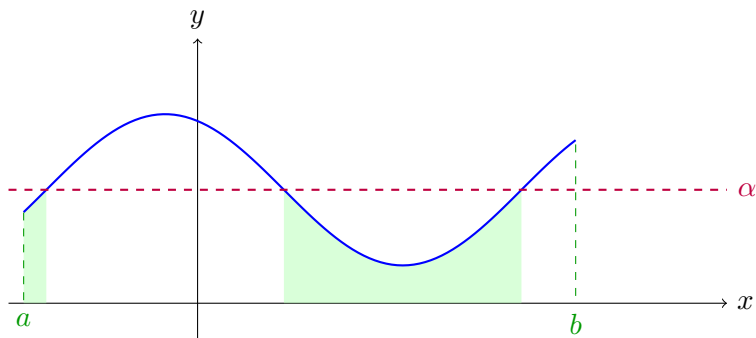
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \stackrel{\text{odhad}}{\leq} \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní. } \square \end{aligned}$$

4.4 Dolní úrovněová množina

Dolní úrovněová množina funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hladiny $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\text{lev}_{\leq}(f; \alpha) := \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Je-li f konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $\text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$ je konvexní pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



Důkaz.

Ať $x, y \in \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)y \stackrel{?}{\in} \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \quad \square$$

Poznámka.

Opačná implikace neplatí. Tedy pomocí dolní úrovněové množiny **nelze** určit, jestli původní funkce je konvexní.

Například $f = x^3$ není konvexní funkce na intervalu $x = [-2, 2]$, ale když zvolíme $\alpha = 8$, tak dolní úrovněová množina bude konvexní.

4.5 Použití dolní úrovněové množiny

Je množina $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1, \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\}$ konvexní?

Důkaz.

Rozdělme si množinu M na dvě podmnožiny M_1 a M_2 , kde:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \text{lev}_{\leq}(\|x\|, 1) \rightarrow$ konvexní, protože norma je konvexní funkce.

$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\} = \text{lev}_{\leq}\left(\left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 1\right) \rightarrow$ konvexní, protože skalární součin je konvexní.

To nám ale dává průnik dvou konvexních množin, tedy $M = M_1 \cap M_2$ je také konvexní. \square

4.6 Součet a součin zachovávají konvexitu

Mějme funkce f, g , které jsou konvexní na C , $\alpha \geq 0$. Pak:

(a) $f + g$ je konvexní na C

(b) αf je konvexní na C

Důkaz.

(a) At $\lambda \in [0, 1], x, y \in C$.

$$\begin{aligned}(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \underbrace{f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)} + \underbrace{g(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)} \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) = \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y). \quad \square\end{aligned}$$

(b) At $\lambda \in [0, 1], x, y \in C, \alpha \geq 0$.

4.7 Příklad ověření konvexity

Je funkce $f(x) = e^x - 3 \ln x + 2x$ konvexní?

Rozeberme si jednotlivé části funkce.

- $e^x \dots$ exponenciála je z grafu očividně konvexní.
- $-3 \ln x \dots$ logaritmus je konkávní, ale díky „ $-$ “ se celý výraz stane konvexní. Násobení konstatou konvexitu neovlivní, viz důkaz (b).
- $2x \dots$ lineární funkce je konvexní.

Protože všechny komponenty funkce f jsou konvexní, pak je i funkce f nutně konvexní.

5 Pátý týden

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden