České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec

Praha, 2025

Obsah

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/A8B01OGT`.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u přednáškových příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \to \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

(1) $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x) \iff \hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmax}}(-f(x))$,

(2) jesliže $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min\limits_{x \in M} f(x) = -\max\limits_{x \in M}(-f(x))$.

Důkaz.

(1) $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \underset{\cdot(-1)}{\iff} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmax}}(-f(x))$. $\square$

(2) Ať $\hat{x} \in \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}} f(x)$, pak $\min\limits_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \overset{(1)}{=} -\max\limits_{x \in M}(-f(x))$. $\square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x^2 + 1 \\ \text{za podmínek } & \frac{3}{x} \leq 1, \\ & x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

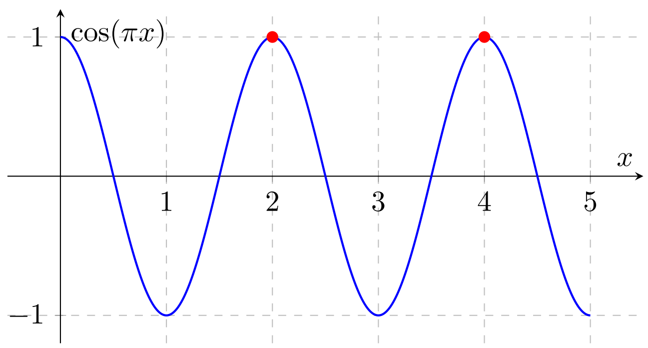
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte } & \ln x \\ \text{za podmínek } & x \leq 5, \\ & \cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$D(f) = (0, \infty)$.

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmínek: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1)$.



Očividně tedy $M = \{2, 4\}$.

Úvahou pak lze uhodnout $\underset{x \in M}{\operatorname{argmax}} \ln x = \{4\}$.

Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

1.4 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y.

1.5 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Ať $x, z \in H(y, \alpha), \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $\lambda x + (1-\lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle definice.

$\langle \lambda x + (1-\lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1-\lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$

1.6 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.7 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y, které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1-\lambda)a + (1-\lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)|| \\ &\leq \lambda ||\underbrace{x-a}_{\leq r}|| + (1-\lambda)||\underbrace{y-a}_{\leq r}|| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.8 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

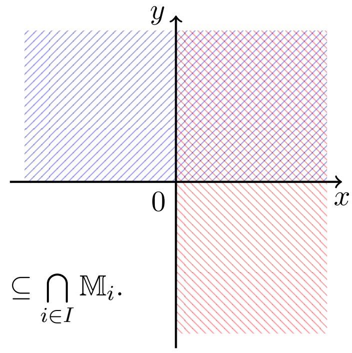
Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.
Cíl: $||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| < r$. Dle definice.

$$\begin{aligned} ||[\lambda x + (1-\alpha)y] - a|| &= ||\lambda x - (1-\lambda)a + (1-\lambda)y - \lambda a|| = ||\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)|| \\ &\leq \lambda ||\underbrace{x-a}_{<r}|| + (1-\lambda)||\underbrace{y-a}_{<r}|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.9 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve $\mathbb{R}^2$:

Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) konvexní množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy
$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.



Visuálně je průnik nekonvexní.

Důkaz.

Nechť $x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i$.

$\square$

1.10 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou konvexní množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.
$\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in R^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

1.11 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pak f je afinní $\iff$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Cíl: Ukázat, že f je afinní, tedy $f(x) = Ax + b$.
Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.
Pokud je f afinní, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax, tedy být lineární.
Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) Ať $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in R$.
Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha\varphi(x-0). \quad \square$$

(2) Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Cíl: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \overset{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

1.12 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afinní a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = [\underbrace{f(x)}_{a}, \underbrace{f(y)}_{b}] \subseteq f(C). \quad \square$

1.13 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou konvexní množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

"$\Rightarrow$": Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle definice.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda)c \\ (1-\lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1-\lambda)c \\ \lambda b + (1-\lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

"$\Leftarrow$": Definujme afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies$ C_1 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2, zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies$ C_2 je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. $\square$

2 Druhý týden

3 Třetí týden

4 Čtvrtý týden

5 Pátý týden

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden