

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

# Důkazy a řešené příklady

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec  
Praha, 2025



# Obsah

|  | Strana    |
|--|-----------|
| <b>1 Úvod do matematické optimalisace</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima . . . . .                                  | 2         |
| 1.2 Hledání přípustných množin . . . . .   | 2         |
| 1.3 Hledání přípustných množin . . . . .   | 2         |
| 1.4 Maximalisační úloha . . . . .  | 3         |
| 1.5 Minimalisační úloha . . . . .  | 3         |
| 1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami . . . . .                                  | 4         |
| <b>2 Konvexní množiny</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1 Uzavřená úsečka . . . . .  | 6         |
| 2.2 Je nadrovina konvexní? . . . . .   | 6         |
| 2.3 Je uzavřený poloprostor konvexní? . . . . .                                  | 6         |
| 2.4 Je uzavřená koule konvexní? . . . . .  | 6         |
| 2.5 Je okolí konvexní? . . . . .   | 7         |
| 2.6 Je průnik množin konvexní? . . . . .   | 7         |
| 2.7 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu . . . . .                | 7         |
| 2.8 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní . . . . .                             | 7         |
| 2.9 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní . . . . . | 8         |
| 2.10 Důkaz, že kartézský součin je konvexní . . . . .                            | 8         |
| 2.11 Určení definitnosti matic . . . . .   | 9         |
| 2.12 Existence matice . . . . .  | 11        |
| <b>3 Projekce</b>  | <b>12</b> |
| 3.1 Věta o nejlepší aproximaci . . . . .   | 12        |
| 3.2 Projekce bodu a variační nerovnost . . . . .                                 | 12        |
| 3.3 Projekce na jednotkovou kouli . . . . .                                      | 13        |
| 3.4 Věta o ortogonálním rozkladu . . . . .                                       | 13        |
| <b>4 Metoda nejmenších čtverců</b>   | <b>16</b> |
| 4.1 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců . . . . .                          | 16        |
| 4.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců . . . . .                          | 17        |
| 4.3 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny . . . . .                      | 17        |
| 4.4 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou . . . . .                | 18        |
| 4.5 Lemma neprázdné uzavřené konvexní . . . . .                                  | 18        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.6      | Farkasovo lemma . . . . .  | 19        |
| 4.7      | Krajní body konvexní množiny . . . . .   | 19        |
| 4.8      | Kreinova-Milmanova věta . . . . .  | 20        |
| 4.9      | Výpočet gradientu skalárního součinu . . . . .                                 | 20        |
| 4.10     | Ověření konvexnosti množiny . . . . .  | 21        |
| 4.11     | Práce s maticemi . . . . .   | 21        |
| 4.12     | Proložení bodů pomocí MNČ . . . . .  | 22        |
| 4.13     | Formulace úlohy MNČ . . . . .  | 23        |
| <b>5</b> | <b>Konvexní funkce</b>   | <b>24</b> |
| 5.1      | Příklad konvexní funkce . . . . .  | 24        |
| 5.2      | Příklad konvexní funkce . . . . .  | 24        |
| 5.3      | Dolní úrovněová množina . . . . .  | 25        |
| 5.4      | Použití dolní úrovněové množiny . . . . .                                      | 25        |
| 5.5      | Součet a součin zachovávají konvexitu . . . . .                                | 26        |
| 5.6      | Příklad ověření konvexity . . . . .  | 26        |
| 5.7      | Skládání zachovává konvexitu . . . . .   | 26        |
| 5.8      | Věta o extrémech konvexních funkcí . . . . .                                   | 27        |
| 5.9      | Věta o konvexitě a první derivaci . . . . .                                    | 28        |
| 5.10     | Věta o konvexitě a druhé derivaci . . . . .                                    | 28        |
| 5.11     | Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace . . . . .                          | 29        |
| 5.12     | Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace . . . . .                          | 29        |
| 5.13     | Příklad ověření konvexnosti funkce s parametrem . . . . .                      | 30        |
| 5.14     | Příklad ověření konvexity množiny . . . . .                                    | 30        |
| <b>6</b> | <b>Podmínky optimality</b>   | <b>32</b> |
| 6.1      | Kužel přípustných směrů . . . . .  | 32        |
| 6.2      | Hledání přípustných směrů . . . . .  | 32        |
| 6.3      | Kužel směrů poklesu . . . . .  | 33        |
| 6.4      | Nutná geometrická podmínka lokálního extrému . . . . .                         | 33        |
| 6.5      | Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu . . . . .                       | 33        |
| 6.6      | Tvrzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci . . . . . | 34        |
| 6.7      | Fermatova věta - nutná podmínka optimality . . . . .                           | 34        |
| 6.8      | Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu . . . . .         | 35        |
| 6.9      | Hledání bodu minima . . . . .  | 35        |
| 6.10     | Věta o podmínkách optimality 2. řádu . . . . .                                 | 35        |
| 6.11     | Příklad použití věty o podmínkách optimality 2. řádu . . . . .                 | 36        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 6.12     | Hledání bodu minima . . . . .  | 36        |
| 6.13     | Omezení ve tvaru nerovnosti - aproximace $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ . . . . . | 37        |
| 6.14     | Příklad výpočtu $\mathcal{G}$ a $\mathcal{F}$ . . . . .                      | 37        |
| 6.15     | Ukázka, že aproximací $\mathcal{F}$ lze zkazit prázdnotu průniku . . . . .   | 38        |
| <b>7</b> | <b>KKT podmínky</b>  | <b>39</b> |
| 7.1      | Věta o nutných KKT podmínkách . . . . .                                      | 39        |
| 7.2      | Terminologie KKT podmínek . . . . .  | 40        |
| 7.3      | Příklad použití KKT podmínek . . . . .                                       | 40        |
| 7.4      | Příklad, že KKT podmínky vždy nenaleznou všechny body . . . . .              | 40        |
| 7.5      | Afinní podmínka regularity . . . . .   | 41        |
| 7.6      | Slaterova podmínka regularity . . . . .                                      | 41        |
| 7.7      | Věta o postačujících KKT podmínkách . . . . .                                | 41        |
| 7.8      | Použití podmínek regularity k ověření KKT podmínek . . . . .                 | 41        |
| 7.9      | Určení nutných a postačujících podmínek optimality . . . . .                 | 42        |
| 7.10     | Určení KKT podmínek . . . . .  | 43        |
| 7.11     | Určení KKT podmínek . . . . .  | 44        |
| 7.12     | Určení KKT podmínek s trikem . . . . .                                       | 46        |
| <b>8</b> | <b>Dualita</b>   | <b>47</b> |
| 8.1      | Pomocný důkaz vlastnosti infima . . . . .                                    | 47        |
| 8.2      | Dualita - motivační příklad . . . . .  | 47        |
| 8.3      | Tvrzení o konkávnosti duální úlohy . . . . .                                 | 48        |
| 8.4      | Věta o slabé dualitě . . . . .   | 49        |
| 8.5      | Důsledek věty o slabé dualitě . . . . .                                      | 49        |
| 8.6      | Ukázkový příklad na slabou dualitu . . . . .                                 | 50        |
| 8.7      | Věta o silné dualitě . . . . .   | 50        |
| <b>9</b> | <b>Lineární programování</b>   | <b>51</b> |
| 9.1      | Zápis úlohy lineárního programování . . . . .                                | 52        |
| 9.2      | Terminologie lineárního programování . . . . .                               | 52        |
| 9.3      | Basický přípustný bod . . . . .  | 53        |
| 9.4      | Příklad BPB . . . . .  | 53        |
| 9.5      | Tvrzení o charakterisaci BPB . . . . .                                       | 53        |
| 9.6      | Tvrzení, že dva různé BPB musí mít různé množiny $B$ . . . . .               | 54        |
| 9.7      | Příklad na degenerované BPB . . . . .  | 54        |
| 9.8      | Příklad na souvislost BPB a krajních bodů . . . . .                          | 55        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 9.9       | Věta o souvislosti BPB a krajních bodů . . . . .                     | 55        |
| 9.10      | Základní věta lineárního programování . . . . .                      | 56        |
| 9.11      | Příklad na hledání duální úlohy . . . . .                            | 56        |
| 9.12      | Příklad na hledání duální úlohy . . . . .                            | 57        |
| 9.13      | Tvrzení o množině všech řešení úlohy LP . . . . .                    | 57        |
| 9.14      | Příklad na Simplexovu metodu . . . . .                               | 57        |
| 9.15      | Příklad na Simplexovu metodu . . . . .                               | 58        |
| 9.16      | Příklad na Simplexovu metodu . . . . .                               | 58        |
| 9.17      | Tvrzení o vztahu přípustné množiny a hodnoty cílové funkce . . . . . | 58        |
| 9.18      | Příklad dvoufázové Simplexové metody . . . . .                       | 58        |
| 9.19      | Tvrzení o primární a duální úloze . . . . .                          | 59        |
| 9.20      | Hledání duální úlohy k duální úloze . . . . .                        | 59        |
| 9.21      | Věta o silné dualitě pro LP . . . . .                                | 60        |
| 9.22      | Simplexová metoda a řešení duální úlohy . . . . .                    | 60        |
| 9.23      | Příklad řešení duální úlohy . . . . .                                | 60        |
| 9.24      | Hledání duální úlohy . . . . .                                       | 61        |
| <b>10</b> | <b>Kvadratické programování</b>                                      | <b>63</b> |
| 10.1      | Tvrzení o duální úloze kvadratického programování . . . . .          | 63        |
| 10.2      | Věta o silné dualitě pro kvadratické programování . . . . .          | 64        |
| <b>11</b> | <b>Numerické metody optimalisace</b>                                 | <b>65</b> |
| 11.1      | Newtonova metoda v jednorozměrné optimalisaci . . . . .              | 65        |
| 11.2      | Omezení na minimalizační úlohy . . . . .                             | 65        |
| 11.3      | Nepodmíněná optimalisace - Metoda největšího spádu . . . . .         | 66        |
| 11.4      | Podmíněná optimalisace - Metoda projekce gradientu . . . . .         | 67        |
| 11.5      | Podmíněná optimalisace - Metoda penalizačních funkcí . . . . .       | 67        |
| <b>12</b> | <b>Úvod do strategických her</b>                                     | <b>68</b> |
| 12.1      | Příklad Vězňovo dilemma . . . . .                                    | 68        |
| 12.2      | Příklad Panna nebo orel . . . . .                                    | 68        |
| 12.3      | Příklad Manželský spor . . . . .                                     | 68        |
| 12.4      | Příklad Kámen-nůžky-papír . . . . .                                  | 68        |
| 12.5      | Nashovo equilibrium . . . . .  | 69        |
| 12.6      | Vězňovo dilemma a Nashovo equilibrium . . . . .                      | 69        |
| 12.7      | Panna nebo orel a Nashovo equilibrium . . . . .                      | 69        |
| 12.8      | Manželský spor a Nashovo equilibrium . . . . .                       | 69        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 12.9      | Tvrzení o Nashově equilibriu . . . . .                            | 70        |
| 12.10     | Příklad Cournotův model oligopolu a Nashovo equilibrium . . . . . | 70        |
| 12.11     | Hra dvou hráčů s nulovým součtem . . . . .                        | 71        |
| 12.12     | Definice ceny hry . . . . .                                       | 71        |
| 12.13     | Definice optimální strategie . . . . .                            | 72        |
| 12.14     | Příklad na optimální strategii . . . . .                          | 72        |
| 12.15     | Optimální strategie Panna nebo orel . . . . .                     | 73        |
| 12.16     | Optimální strategie pouze pro jednoho hráče . . . . .             | 73        |
| 12.17     | Tvrzení o existenci optimální strategie . . . . .                 | 73        |
| 12.18     | Sedlový bod typu maxmin . . . . .                                 | 73        |
| 12.19     | Vztah Nashova equilibria a sedlového bodu . . . . .               | 74        |
| 12.20     | Věta o Nashově equilibriu a optimálních strategiích . . . . .     | 74        |
| <b>13</b> | <b>Smíšené strategie</b>  | <b>75</b> |
| 13.1      | Definice konečné hry . . . . .                                    | 75        |
| 13.2      | Definice smíšeného rozšíření . . . . .                            | 75        |
| 13.3      | Příklad Panna nebo orel . . . . .                                 | 75        |
| 13.4      | Nashova věta . . . . .  | 77        |
| <b>14</b> | <b>Maticové hry</b>   | <b>78</b> |
| 14.1      | Věta o minimaxu . . . . .   | 78        |
| 14.2      | Lemma o omezení na standardní bázi . . . . .                      | 79        |
| 14.3      | Grafické řešení hry $\Gamma(A)$ s maticí $2 \times n$ . . . . .   | 79        |
| 14.4      | Tvrzení o kladnosti komponent matice $A$ . . . . .                | 80        |
| 14.5      | Souvislost maticové hry a lineárního programování . . . . .       | 80        |
| 14.6      | Příklad na vztah maticové hry a LP . . . . .                      | 82        |
| <b>15</b> | <b>Řešená vzorová písemka</b>                                     | <b>83</b> |
| 15.1      | Konvexní funkce . . . . .   | 83        |
| 15.2      | Metoda nejmenších čtverců . . . . .                               | 83        |
| 15.3      | KKT podmínky . . . . .  | 84        |
| 15.4      | Smíšené rozšíření maticové hry . . . . .                          | 85        |

# Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/kned11k/A8B010GT>.

**Poděkování.** Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem  $\text{\LaTeX}$  Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

## Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

# 1 Úvod do matematické optimalisace

## 1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$  platí:

- (1)  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$   
(2) jestliže  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , pak  $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1)  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , tj.  $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \iff -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M,$   
tj.  $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$   
(2) Ať  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ , pak  $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

## 1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk} \quad \frac{3}{x} \leq 1, \\ &\quad \quad \quad x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik:  $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

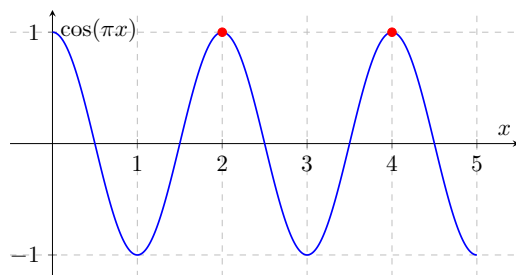
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě  $x = 3$ .

## 1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} \quad \ln x \\ &\text{za podmíněk} \quad \cos(\pi x) = 1, \\ &\quad \quad \quad x \leq 5. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk:  $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy  $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout  $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$



## 1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici  $x$  (v tis. Kč) je  $\frac{2x}{4x+25}$  a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici  $y$  (v tis. Kč) je  $\frac{x}{x+50}$ . Jakým způsobem má investor rozdělit částku  $c = 100000$  Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} \text{maximalisujte} \quad & \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ \text{za podmínek} \quad & x + y = 100, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například  $x = 100 - y$ . Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25} \right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

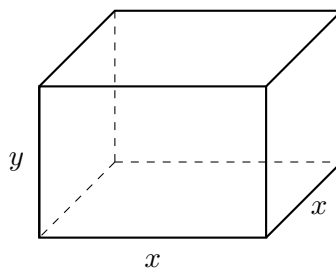
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení  $y = 25 \rightarrow x = 75$ .

## 1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu  $10 \text{ dm}^3$  tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & 4xy + x^2 \\ \text{za podmínek} \quad & x^2y = 10, \\ & x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například  $y = \frac{10}{x^2}$ . Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dx} \left( 4x \frac{10}{x^2} + x^2 \right) = \frac{-40}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40 + 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení  $x = \sqrt[3]{20} \rightarrow y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ .

## 1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V  $\mathbb{R}^n$  jsou dány množiny bodů  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  a  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ . Ať  $w \in \mathbb{R}^n$  a  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $H$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = 0$ ,  $H_1$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = 1$  a  $H_2$  je nadrovina o rovnici  $\langle x, w \rangle + \lambda = -1$ .

(a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami  $H_1$  a  $H_2$  je  $\frac{2}{\|w\|}$ . Dále ukažte, že  $\frac{1}{\|w\|}$  je vzdálenost  $H$  od  $H_1$  a také vzdálenost  $H$  od  $H_2$ .

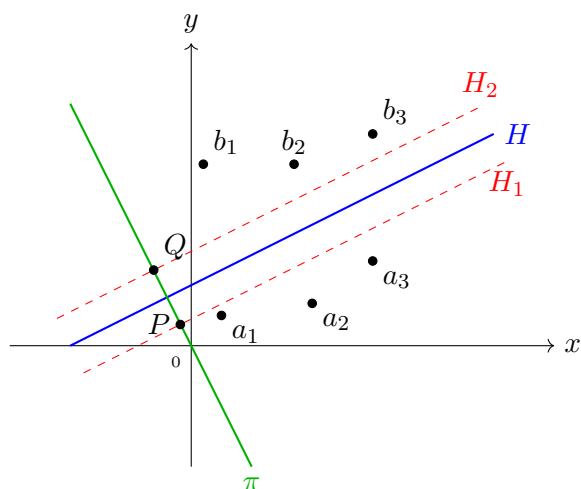
(b) Interpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} && g(w, \lambda) = \frac{2}{\|w\|} \\ &\text{za podmíněk} && \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & && \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(c) Ukažte, že  $(\hat{w}, \hat{\lambda})$  je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && h(w, \lambda) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ &\text{za podmíněk} && \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & && \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(a)



$$\pi : x = t \cdot w, t \in \mathbb{R}.$$

Průsečík  $Q$ :

$$\underbrace{\langle tw, w \rangle}_{t\|w\|^2} + \lambda = 1 \rightarrow t = \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} \Rightarrow Q = \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} w$$

Průsečík  $P$ :

$$\underbrace{\langle tw, w \rangle}_{t\|w\|^2} + \lambda = -1 \rightarrow t = \frac{-1-\lambda}{\|w\|^2} \Rightarrow P = \frac{-1-\lambda}{\|w\|^2} w$$

Pak vzdálenost mezi nadrovinami  $H_1$  a  $H_2$  je dána rozdílem průsečíků  $P$  a  $Q$  v normě. Tedy:

$$\|Q - P\| = \left\| \frac{1-\lambda}{\|w\|^2} w + \frac{1+\lambda}{\|w\|^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{\|w\|^2} \right\| = \frac{2}{\|w\|^2} \|w\| = \frac{2}{\|w\|}.$$

To je prima, to jsme přesně chtěli.  $\square$

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení  $\frac{1}{2}$ , protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

## 2 Konvexní množiny

Definice. Množina  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazve konvexní, jestliže pro každé  $x, y \in C$  je  $[x, y] \in C$ .

### 2.1 Uzavřená úsečka

Nechť  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body  $x$  a  $y$ .

### 2.2 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny:  $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Důkaz.

Ať  $x, z \in H(y; \alpha)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y; \alpha)$ . Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y; \alpha). \quad \square$$

### 2.3 Je uzavřený poloprostor konvexní?

Nechť  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Uzavřený poloprostor  $P(y; \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq \alpha\}$  je konvexní množina.

Důkaz.

Ať  $a, b \in P(y; \alpha)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in P(y; \alpha)$ . Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda a + (1 - \lambda)b, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle a, y \rangle}_{\leq \alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle b, y \rangle}_{\leq \alpha} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \in P(y; \alpha). \quad \square$$

### 2.4 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule:  $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ , o středu  $a \in \mathbb{R}^n$  a poloměru  $r > 0$ .

Důkaz.

Ať  $x, y \in B(a; r)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\|\lambda x + (1 - \lambda)y - a\| \leq r$ . Tedy za  $x$  z definice dosadíme úsečku mezi body  $x$  a  $y$ , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.5 Je okolí konvexní?

Definice okolí:  $B(a; r) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ , o středu  $a \in \mathbb{R}^n$  a poloměru  $r > 0$ .

Důkaz.

Ať  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\|[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a\| < r$ . Dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \alpha)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.6 Je průnik množin konvexní?

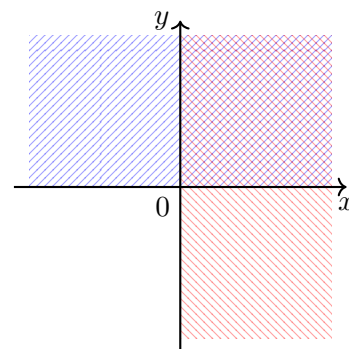
Úvaha pro 2 množiny ve  $\mathbb{R}^2$ :

Mějme jednu modrou ( $y \geq 0$ ) a druhou červenou ( $x \geq 0$ ) **konvexní** množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ .

Visuálně je průnik nekonvexní.

Důkaz.

Nechť  $x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i$ .



## 2.7 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme  $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ .

$[0, 1]$  a  $(0, 1)$  jsou **konvexní** množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není.  
 $\{0\}$  a  $\{1\}$  jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

## Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se nazývá afinní, existují-li  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  a  $b \in \mathbb{R}^m$  tak, že

$$f(x) = Ax + b.$$

## 2.8 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pak  $f$  je **afinní**  $\iff$  pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$  a každé  $\lambda \in \mathbb{R}$  platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $f(x) = Ax + b$ , kde  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Ať  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\lambda \underbrace{(Ax + b)}_{f(x)} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y). \quad \square$$

„ $\Leftarrow$ “: Cíl: Ukázat, že  $f$  je **afinní**, tedy  $f(x) = Ax + b$ .

Zvolme  $\varphi(x) = f(x) - f(0)$ .

Pokud je  $f$  **afinní**, pak zobrazení  $\varphi$  by mělo být dáno jako  $Ax$ , tedy být lineární.

Cíl:  $\varphi$  je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) At  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Cíl:  $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x) &= f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) = \\ &= \alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square \end{aligned}$$

(2) At  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Cíl:  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x + y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = \\ &= 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] = f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square \end{aligned}$$

## 2.9 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  **afinní** a  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  **konvexní**, pak  $f(C)$  je konvexní.

Důkaz.

Mějme  $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$ .

Dle předpokladu je  $C$  konvexní.  $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = \underbrace{[f(x), f(y)]}_a \subseteq f(C). \quad \square$

## 2.10 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť  $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ . Pak  $C_1$  a  $C_2$  jsou **konvexní** množiny právě tehdy, když  $C_1 \times C_2$  je konvexní množina.

Důkaz.

„ $\Rightarrow$ “: Mějme  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl:  $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$ . Dle **definice**.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„ $\Leftarrow$ “: Definujme **afinní** zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak  $f$  je afinní. Navíc  $f(C_1 \times C_2) = C_1$ .  $\implies C_1$  je **konvexní**, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro  $C_2$ , zde zadefinujeme afinní zobr.  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak  $g$  je afinní. Navíc  $g(C_1 \times C_2) = C_2$ .  $\implies C_2$  je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu.  $\square$

## 2.11 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice  $A$ , jestliže

(a)  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$

(b)  $\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(c)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(d)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(e)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix};$

(f)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být symetrická.  
 $\underbrace{Q=Q^T}$

Pak platí:

$$\langle Qx, x \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně semidefinitní.}$$

$$\langle Qx, x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně definitní.}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.

Matice je indefinitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že  $Q$  je negativně (semi)definitní, jestliže  $(-Q)$  je pozitivně (semi)definitní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit pozitivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

(a)  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \rightarrow \text{podezření na pozitivní semidefinitnost.}$

Hlavní minory jsou  $Q_{\{1\}}$  a  $Q_{\{1,2\}}$ .

Menší minory:  $Q_I$ , kde  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  neprázdná. Aby matice byla pozitivně semidefinitní, tak  $\det Q_I \geq 0$ .

Tedy:  $Q_{\{2\}} = [4]$ .  $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$ .

Tedy matice  $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$  je pozitivně semidefinitní.

$$(b) \begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0. \text{ Matice je pozitivně definitní.}$$

$$(c) Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy  $\det Q = 0$ .

$$Q_{\{1\}} = 4 > 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 1 > 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 0 = 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ . Aby matice  $Q$  byla pozitivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být  $\geq 0$ . Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice  $Q$  je indefinitní.

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy **vlastnosti** symetrických matic a určíme definitnost pro matici  $(-Q)$ .

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice  $(-Q)$  je pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0.$$

$\implies (-Q)$  je pozitivně semidefinitní  $\iff Q$  je negativně semidefinitní.

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy  $\det Q = 0$ .

$$Q_{\{1\}} = 1 \geq 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 5 \geq 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 1 \geq 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$Q_{\{1,2\}} = 1 \geq 0,$$

$$Q_{\{2,3\}} = 4 \geq 0,$$

$$Q_{\{1,3\}} = 1 \geq 0.$$

Matice  $Q$  je pozitivně semidefinitní.



## 2.12 Existence matice

Ať  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Ukažte, že  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$  pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Ukažte, že existují matice  $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  takové, že  $B^T = B$ ,  $C^T = -C$  a  $A = B + C$ . Jsou matice  $B$  a  $C$  určeny jednoznačně?
- (c) Ukažte, že existuje symetrická matice  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  taková, že  $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ .

Zdefinujme si vlastnost skalárního součinu:  $\langle a, b \rangle = b^T a$ , kde  $b^T = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

(a) Využijme zmíněné **vlastnosti**.

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$$

(b) Pozorování: Matice  $B$  je symetrická a matice  $C$  je antisymetrická.

$$\text{Zvolme: } \left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} \right\} B + C = A.$$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C. \checkmark$$

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B. \checkmark \quad \square$$

(c)  $\langle Cx, x \rangle \stackrel{?}{=} 0$

$$\langle Cx, x \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x \rangle \stackrel{-C \equiv C^T}{=} -\langle x, Cx \rangle = -\langle Cx, x \rangle = 0.$$

Matice  $C$  tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí  $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ .  $\square$

### 3 Projekce

#### 3.1 Věta o nejlepší aproximaci

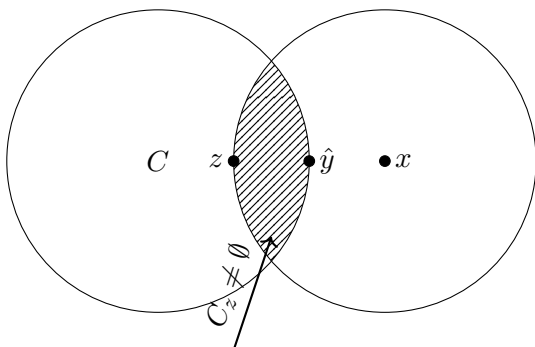
Je-li  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  existuje právě jeden bod  $\hat{y} \in C$  tak, že  $\text{dist}(x; C) = \|x - \hat{y}\|$ .

Důkaz.

(a) Existence

Cíl: Existuje bod minima

Úvaha:



$C$  je obecná neprázdná uzavřená konvexní množina.

$R = \|x - z\|$ ,  $z \in C$  je libovolné,

$C_z = C \cap B(x, R) = C \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|z - a\| \leq R\}$ .

$\uparrow$   
 uzavřená, omezená, neprázdná  
 kompaktní

Tedy  $a \mapsto \|x - a\|$  je spojitá.

$\Rightarrow$  Spojitost na kompaktní množině znamená, že  $f$  nabývá na  $C_z$  minima dle **Weierstrassovy věty**.

At  $\hat{y}$  je bod minima. Všechny body v  $C$  mají od  $x$  vzdálenost  $\geq \|x - \hat{y}\|$ .  $\square$

(b) Jednoznačnost.

Cíl: Pokud  $a, b \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \|x - b\| = \overbrace{\text{dist}(x, C)}^{\delta}$ , pak  $a = b$ .

Lemma, rovnoběžníkové pravidlo:  $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ .

Důkaz lemma:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad \square \end{aligned}$$

Důkaz jednoznačnosti:

At  $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ .

Pak  $\delta^2 \leq \|x - y\|^2 = \|x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\|^2 = \|\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)\|^2 = \frac{1}{4} \|\underbrace{(x - a)}_u + \underbrace{(x - b)}_v\|^2$

$$\stackrel{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4} \left[ 2 \left( \underbrace{\|x - a\|^2}_{\delta^2} + \underbrace{\|x - b\|^2}_{\delta^2} \right) - \underbrace{\|(x - a) + (x - b)\|^2}_{\|b - a\|} \right] = \delta^2 - \frac{1}{4} \|b - a\|^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \underbrace{\frac{1}{4} \|b - a\|^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

#### 3.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná uzavřená konvexní množina,  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $y \in C$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1)  $y = P_C(x)$ , kde  $P_C(x)$  je projekční operátor.
- (2) Pro každé  $z \in C$  je  $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ .

Důkaz.

(1)  $\Rightarrow$  (2):

Ať  $v_\lambda = y + \lambda(z - y)$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ .

Pak

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - v_\lambda\|^2 = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 = \langle (x - y) - \lambda(z - y), (x - y) - \lambda(z - y) \rangle$$

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0. \quad \square$$

(2)  $\Rightarrow$  (1):

Ať  $z \in C$ .

Pak

$$0 \geq \langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, (z - x) + (x - y) \rangle = \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2$$

$$\langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 \geq \|x - y\|^2 - \underbrace{|\langle x - y, z - y \rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star$$

$$\star = \|x - y\|^2 - \|x - y\| \cdot \|z - x\|.$$

Je-li  $x \neq y$ , pak vydělíme:  $\|z - x\| \geq \|x - y\|$ .

Je-li  $x = y$ , pak  $y \in C : x \in C \dots$  triviální.  $\square$

### 3.3 Projekce na jednotkovou kouli

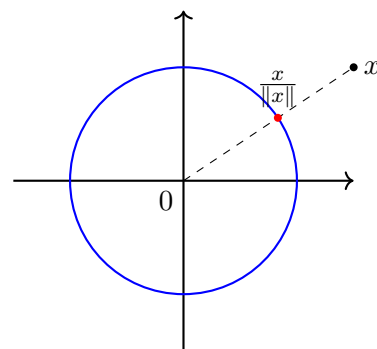
Mějme jednotkovou kouli  $C = B(0; 1)$ . Hledáme projekci libovolného  $x \in \mathbb{R}^n$  bodu na takovou kouli.

Případ, kdy  $x \in C$ , je triviální, to platí  $P_C(x) = x$ .

Vyšetřeme teď případ kdy  $x \in \mathbb{R}^n$  splňuje  $\|x\| > 1$  a  $z \in C$  libovolný.

$$\begin{aligned} \left\langle x - \frac{x}{\|x\|}, z - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle &= \langle x, z \rangle - \frac{1}{\|x\|} \|x\|^2 - \frac{1}{\|x\|} \langle x, z \rangle + \frac{1}{\|x\|^2} \|x\|^2 \\ &= \langle x, z \rangle - \|x\| - \frac{1}{\|x\|} \langle x, z \rangle + 1 \\ &= \langle x, z \rangle \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|x\| \|z\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 \leq \|x\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 = 0.$$



### 3.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  je lineární podprostor. Potom platí:

(a)  $P_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lineární zobrazení.

(b) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .

(c) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  existují jednoznačně určené body  $y \in L$  a  $z \in L^\perp$  tak, že  $x = y + z$ . Navíc  $y = P_L(x)$  a  $z = P_{L^\perp}(x)$ .

Důkaz.

(a)

Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

$$1. P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

$$2. P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1. : Ať  $z \in L$ . Pak

$$\langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle = \alpha \langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle$$

$$\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0} \langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot z - P_L(x)}_{\in L} \rangle$$

Tedy  $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$ . Pro  $\alpha = 0$  zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.

2. : Ať  $z \in L$ .

$$\begin{aligned} & \langle \underbrace{x + y - (P_L(x) + P_L(y))}_{(x - P_L(x)) + (y - P_L(y))}, z - (P_L(x) + P_L(y)) \rangle \\ & \underbrace{\langle x - P_L(x), \underbrace{(z - P_L(y)) - P_L(x)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), \underbrace{(z - P_L(x)) - P_L(y)}_{\in L} \rangle}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Z **variační nerovnosti** tedy plyne, že  $P_L$  je nutně lineární.  $\square$

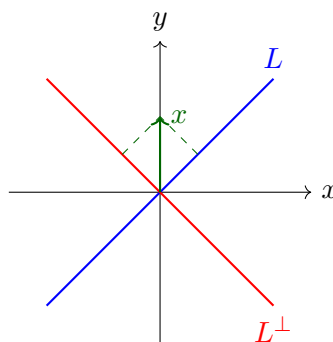
(b) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .

$L \dots$  lineární podprostor  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$ .

Důkaz.

Cíl:  $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$ . Pak



$$\begin{aligned} & \langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x)) \rangle = \langle \underbrace{P_L(x)}_{\in L}, z - (x - P_L(x)) \rangle \\ & = \underbrace{\langle P_L(x), z \rangle}_0 - \langle P_L(x), x - P_L(x) \rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x) \rangle \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(c) Pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  existují jednoznačně určené body  $y \in L$  a  $z \in L^\perp$  tak, že  $x = y + z$ . Navíc  $y = P_L(x)$  a  $z = P_{L^\perp}(x)$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Důkaz existence.

Pak  $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$ .  $\square$

Důkaz jednoznačnosti.

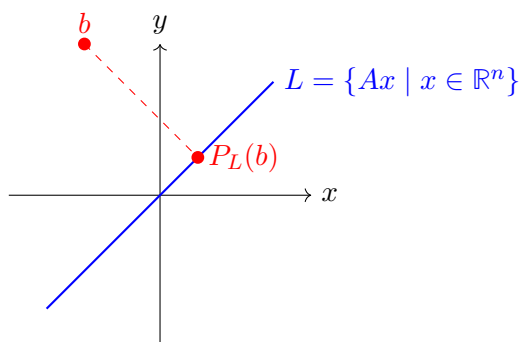
Ať  $a \in L, b \in L^\perp$  takové, že  $x = a + b$ .

Cíl:  $a = P_L(x)$

Ať  $z \in L$ .

$$\langle x - a, z - a \rangle = \langle b, \underbrace{z - a}_{\in L} \rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \stackrel{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

## 4 Metoda nejmenších čtverců



Pokud  $b \in L$ , řešíme úlohu  $Ax = b$ .

Pokud  $b \notin L$ , řešíme  $Ax = P_L(b)$ .

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \iff A^T A \hat{x} = A^T b$ .

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $A \hat{x} = P_L(b) \stackrel{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A \hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b) \rangle = \underbrace{\langle P_{L^\perp}(b), \rangle}_{\in L^\perp} \underbrace{(A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b))}_{\in L} = 0. \quad \square$$

„ $\Leftarrow$ “: Ať  $A^T A \hat{x} = A^T b$ .

Ať  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$0 = \underbrace{\langle x, A^T A \hat{x} - A^T b \rangle}_{A^T(A\hat{x}-b)} = \underbrace{\langle (A^T)^T x, A\hat{x} - b \rangle}_L \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \stackrel{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

### 4.1 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body  $(0, -\frac{1}{2})^T$ ,  $(1, \frac{1}{3})^T$  a  $(2, \frac{2}{3})^T$ . Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímku o rovnici  $y = kx + q$ , kde  $k, q \in \mathbb{R}$ .

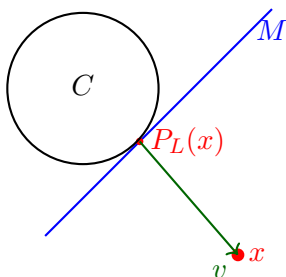
$$\left. \begin{array}{l} 0k + q = -\frac{1}{2} \\ 1k + q = \frac{1}{3} \\ 2k + q = \frac{2}{3} \end{array} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

## 4.3 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$  je neprázdná uzavřená konvexní množina.  
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$  existuje  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  tak, že  
 $\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$

Důkaz.

$$v = x - P_L(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \langle v, y \rangle - \langle v, P_L(x) \rangle &\leq 0, \quad \forall y \in C. \\ \langle y, v \rangle &\leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Položme  $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$ .

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha} = \underbrace{\langle x - P_L(x), v \rangle}_v = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

**Důsledek:** Každá uzavřená konvexní množina v  $\mathbb{R}^n$  je průnikem všech poloprostorů, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

Ať neplatí: tj. existuje  $C \in \mathbb{R}^n$  uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem  $P$  všech poloprostorů obsahujících  $C$ .

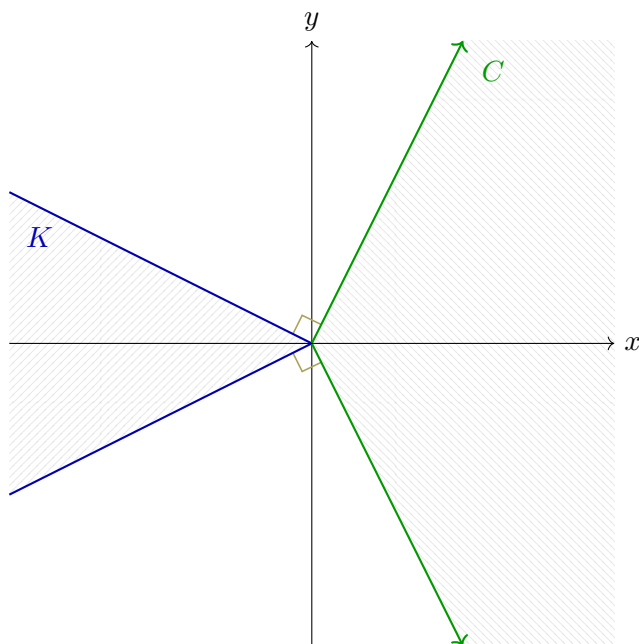
Pak  $x \in P$  tak, že  $x \notin C$ . Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor  $M$  takový, že  $C \subseteq M$  a  $x \notin M$ . Ale to je ve sporu s tím, že  $x \in P$ .  $\square$

#### 4.4 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  a  $b \in \mathbb{R}^2$ . Označme

$$C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^2\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \geq 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} K &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$



Vždy nastane jeden z případů:

- (a)  $b \in C$
- (b)  $b \notin C$  - existuje nenulový vektor  $y \in K$  svírající s  $b$  úhel  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

#### 4.5 Lemma neprázdné uzavřené konvexní

Jestliže  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , pak  $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$  je neprázdna uzavřená konvexní množina.

Důkaz.

- neprázdna - vždy obsahuje alespoň 0,
- konvexní - lineární zobrazení (matice) zachovává konvexitu,
- uzavřenost dokazovat nebudeme.



## 4.6 Farkasovo lemma

Výslovnost [farkášovo].

Je-li  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  a  $b \in \mathbb{R}^m$ , pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- (a) Existuje  $x \in \mathbb{R}^n$  tak, že  $Ax = b$  a  $x \geq 0$ .
- (b) Existuje  $y \in \mathbb{R}^m$  tak, že  $A^T y \leq 0$  a  $\langle y, b \rangle > 0$ .

Důkaz.

„(a)  $\implies \neg(b)$ “:

Ať  $x \in \mathbb{R}_+^n$  a  $y \in \mathbb{R}^m$  tak, že  $Ax = b$  a  $A^T y \leq 0$ .

$$\langle y, b \rangle \stackrel{b=Ax}{=} \langle y, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T y, x \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle x \rangle}_{\geq 0} \leq 0. \quad \square$$

„ $\neg(a) \implies (b)$ “:

Ať  $C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} \implies b \notin C, C \dots$  uzavřená neprázdná konvexní množina.

**oddělitelnost**  $\implies$  existuje  $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$  tak, že:  $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha < \langle b, y \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$ .

Začneme s  $\alpha < \langle b, y \rangle$ . Chceme, aby  $\langle b, y \rangle$  byl kladný. Pak nám  $y$  bude svírat ostrý úhel s  $b$ .

Protože  $0 \in C$ , je  $0 \leq \alpha < \langle b, y \rangle$  (za  $Ax$  dosadíme 0, takže budeme mít  $\langle 0, y \rangle$ ).

Teď musíme dokázat, že  $y$  skutečně řeší zadanou soustavu nerovnic.

Víme tedy, že:

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \\ \langle x, A^T y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

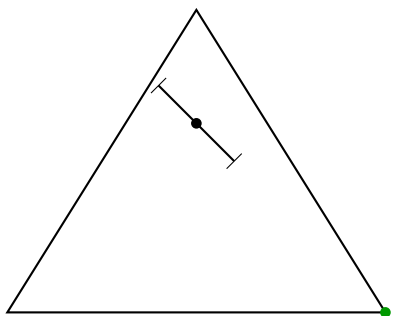
Odtud  $\langle x, A^T y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$ , neboť:

Ať  $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$  je takový, že  $\langle \tilde{x}, A^T y \rangle > 0$ .

Pak  $\langle \underbrace{\lambda \tilde{x}}_{\lambda > 0, \text{ tedy } \lambda \tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n}, A^T y \rangle = \lambda \underbrace{\langle \tilde{x}, A^T y \rangle}_{> 0} \rightarrow +\infty$ , pro  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Což je spor s  $\langle x, A^T y \rangle \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$ .

Ať  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ . Pak  $(A^T y)_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , neboť  $(A^T y)_i = \langle e_i, A^T y \rangle$ .  $\square$

## 4.7 Krajní body konvexní množiny



Mějme konvexní množinu. Když sestrojíme libovolnou nedegenerativní (tzn. netriviální = není to pouze bod) úsečku, vždy nalezneme bod, který bude ležet přesně uprostřed této úsečky.

Co když ale vezmeme například **zelený bod** vyznačený na nákrese? V takovém případě nejsme schopni sestřít nedegenerativní úsečku, na jejímž středu by ležel tento bod.

Definujeme: Krajní bod  $x \in C$  konvexní množiny  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  je takový bod, pro který neexistují dva různé body  $y, z$  tak, že

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

$\text{ext}(C) \dots$  množina všech krajních (extremálních) bodů

#### 4.8 Kreinova-Milmanova věta

Jestliže  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak  $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$ .  
Důkaz vynecháme.

Kompaktnost je důležitá.

- Interval  $(0, 1)$  není uzavřený a  $\text{ext}((0, 1)) = \emptyset$ .
- Množina  $\mathbb{R}_+^2$  není omezená a  $\text{ext}(\mathbb{R}_+^2) = \{0\}$ .

#### 4.9 Výpočet gradientu skalárního součinu

Nalezněte  $\nabla f(x)$  a  $\nabla^2 f(x)$ , jestliže

(a)  $f(x) = \langle x, c \rangle$ , kde  $c \in \mathbb{R}^n$ ;

(b)  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ , kde  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Určete také  $\nabla f(x)$  a  $\nabla^2 f(x)$  za dodatečného předpokladu, že  $A$  je symetrická matice.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n x_i c_i \stackrel{\text{limita}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ik} \stackrel{\text{rozvoj}}{=} c_k$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = c; \Rightarrow \nabla^2 f(x) = 0, \text{ kde } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = k, \\ 0, & \text{pokud } i \neq k. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]}_{(Ax)_i} x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \underbrace{\left( \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)}_{\text{derivace součinu}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + a_{ij} \delta_{jk} x_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}_{(Ax)_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i}_{(A^T x)_k} \end{aligned}$$

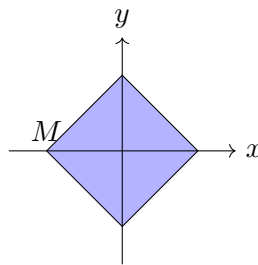
$$\Rightarrow \nabla f(x) = Ax + A^T x \text{ (Speciálně: } \nabla f(x) = 2Ax \text{ pro } A = A^T)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{jl} + \sum_{i=1}^n a_{ik} \delta_{il} = a_{kl} + a_{lk}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = A + A^T$$

#### 4.10 Ověření konvexnosti množiny

Je množina  $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \right\}$  konvexní?



1. způsob - dle definice

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x + (1 - \lambda)a \\ \lambda y + (1 - \lambda)b \end{bmatrix} \stackrel{?}{\in} M, \lambda \in [0, 1].$$

$$|\lambda x + (1 - \lambda)a| + |\lambda y + (1 - \lambda)b| \leq \underbrace{\lambda|x| + (1 - \lambda)|a| + \lambda|y| + (1 - \lambda)|b|}_{\lambda \underbrace{(|x| + |y|)}_{\leq 1} + (1 - \lambda) \underbrace{(|a| + |b|)}_{\leq 1}} \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \quad \square$$

$M$  je konvexní.

2. způsob - úvaha nad vlastnostmi

$|x|$  je konvexní,  $|y|$  je konvexní. Součet zachovává konvexitu, tedy i  $|x| + |y|$  je konvexní.

#### 4.11 Práce s maticemi

Je dána matice  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . At  $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ .

Ukažte, že  $A$  má lineárně nezávislé sloupce  $\iff A^T A$  je invertibilní.

Pomocný důkaz.

Ukažme, že:  $\ker(A) = \ker(A^T A)$

Chci:  $\ker(A) \subseteq \ker(A^T A)$

$$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \quad / \cdot A^T$$

$$A^T A = 0 \Rightarrow x \in \ker(A^T A) \quad \square$$

Chci:  $\ker(A^T A) \subseteq \ker(A)$

$$\begin{aligned} x \in \ker(A^T A) &\Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow 0 = \langle A^T Ax, x \rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \|Ax\|^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \quad \square \end{aligned}$$

Konec pomocného důkazu.

$A$  má lineárně nezávislé sloupce  $\iff \{0\} = \ker(A) = \ker(A^T A) \iff A^T A$  je invertibilní (protože  $A^T A$  je čtvercová a  $A^T A$  je prosté).

#### 4.12 Proložení bodů pomocí MNČ

Jsou dány body  $a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf

(a) afinní funkce  $f(x) = \alpha x + \beta$ , kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

(b) funkce  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , kde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

(a)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= -2 \\ 0\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T b$ .  $A$  má lineárně nezávislé sloupce  $\Rightarrow (A^T A)^{-1}$  existuje.

Pak:  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{10}; \beta = \frac{3}{10}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta + \gamma &= -1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -2 \\ 0\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$A$  má lineárně nezávislé sloupce  $\Rightarrow A^T A$  je invertibilní.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 6 \\ -8 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4}; \beta = \frac{7}{4}; \gamma = \frac{-3}{4}.$$

### 4.13 Formulace úlohy MNČ

Ať závislost výstupního signálu  $(y_n)_{n=0}^\infty$  systému na vstupním signálu  $(x_n)_{n=0}^\infty$  je dána konvolucí posloupností  $(x_n)_{n=0}^\infty$  s posloupností  $(h_n)_{n=0}^\infty$  ( $(h_n)_{n=0}^\infty$  popisuje odezvu systému na jednotkový impuls), tj.  $y_n = \sum_{i=0}^n h_i x_{n-i}$ . Předpokládejte dále, že  $h_n = 0$  pro všechna  $n \geq 4$ . Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů  $y_0, \dots, y_{20}$  výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty  $x_0, \dots, x_{20}$ . Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů  $h_0, h_1, h_2, h_3$ .

$$(x_n)_{n=0}^\infty \longrightarrow \boxed{(h_n)_{n=0}^\infty} \longrightarrow (y_n)_{n=0}^\infty$$

$$y_k = \sum_{l=0}^k h_l x_{k-l} = h_0 x_k + \dots + h_k x_0$$

předpokládejme:  $h_l = 0 \forall l \geq 4$ .

$$y_0 = h_0 x_0$$

$$y_1 = h_1 x_0 + h_0 x_1$$

$$y_2 = h_2 x_0 + h_1 x_1 + h_0 x_2$$

$$y_3 = h_3 x_0 + h_2 x_1 + h_1 x_2 + h_0 x_3$$

$$y_4 = h_3 x_1 + h_2 x_2 + h_1 x_3 + h_0 x_4$$

$$\vdots$$

$$y_{20} = h_3 x_{17} + h_2 x_{18} + h_1 x_{19} + h_0 x_{20}$$

Minimalisujme  $f(x) = \|Ax + b\|^2$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

## 5 Konvexní funkce

Nechť  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $C \subseteq D$  je neprázdná konvexní množina.

Řekněme, že  $f$  je

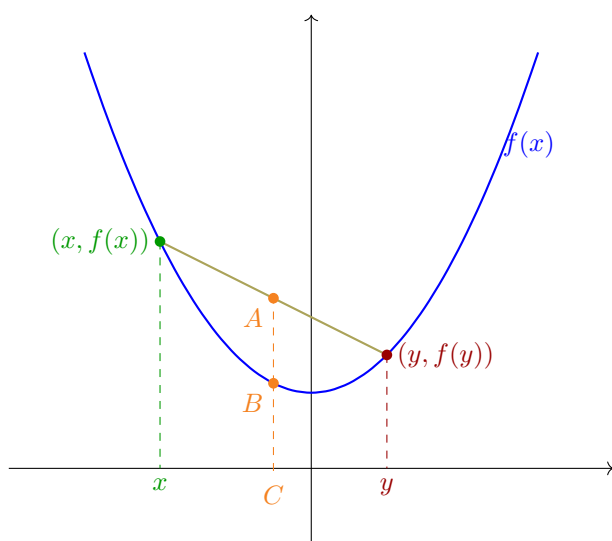
- (a) konvexní na  $C$ , jestliže pro každé  $x, y \in C$  a každé  $\lambda \in [0, 1]$  je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (b) ryze konvexní na  $C$ , jestliže pro každé dva různé body  $x, y \in C$  a  $\lambda \in (0, 1)$  je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (c) konkávní (resp. ryze konkávní) na  $C$ , jestliže  $(-f)$  je konvexní (resp. ryze konvexní) na  $C$ .



$$A = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

$$B = (\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$$

$$C = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Pozorování: úsečka vždy leží nad funkcí.

### 5.1 Příklad konvexní funkce

Je afinní zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (tj.  $f(x) = \langle x, a \rangle + b, b \in \mathbb{R}$ ) konvexní?

Důkaz.

At  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle \lambda x + (1 - \lambda)y, a \rangle + b \\ &= \lambda \langle x, a \rangle + (1 - \lambda) \langle y, a \rangle + \lambda b + (1 - \lambda)b \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní i konkávní. } \square \end{aligned}$$

### 5.2 Příklad konvexní funkce

Je funkce  $f(x) = \|x\|$  konvexní?

Důkaz.

At  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$ .

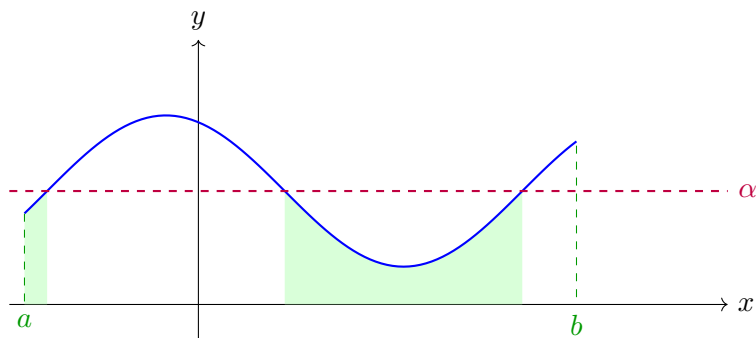
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \stackrel{\text{odhad}}{\leq} \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní. } \square \end{aligned}$$

### 5.3 Dolní úrovněová množina

Dolní úrovněová množina funkce  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  hladiny  $\alpha \in \mathbb{R}$  je množina

$$\text{lev}_{\leq}(f; \alpha) := \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Je-li  $f$  konvexní na  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , pak  $\text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$  je konvexní pro  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .



Důkaz.

At  $x, y \in \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha), \lambda \in [0, 1]$ .

Cíl:  $\lambda x + (1 - \lambda)y \stackrel{?}{\in} \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$ .

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \quad \square$$

Poznámka.

Opačná implikace neplatí. Tedy pomocí dolní úrovněové množiny **nelze** určit, jestli původní funkce je konvexní.

Například  $f = x^3$  není konvexní funkce na intervalu  $x = [-2, 2]$ , ale když zvolíme  $\alpha = 8$ , tak dolní úrovněová množina bude konvexní.

### 5.4 Použití dolní úrovněové množiny

Je množina  $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1, \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\}$  konvexní?

Důkaz.

Rozdělme si množinu  $M$  na dvě podmnožiny  $M_1$  a  $M_2$ , kde:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \text{lev}_{\leq}(\|x\|, 1) \rightarrow \text{konvexní, protože norma je konvexní funkce.}$$

$$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\} = \text{lev}_{\leq}\left(\left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 1\right) \rightarrow \text{konvexní, protože skalární součin je konvexní.}$$

To nám ale dává průnik dvou konvexních množin, tedy  $M = M_1 \cap M_2$  je také konvexní.  $\square$

## 5.5 Součet a součin zachovávají konvexitu

Mějme funkce  $f, g$ , které jsou konvexní na  $C$ ,  $\alpha \geq 0$ . Pak:

(a)  $f + g$  je konvexní na  $C$

(b)  $\alpha f$  je konvexní na  $C$

Důkaz.

(a) Ať  $\lambda \in [0, 1], x, y \in C$ .

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \underbrace{f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)} + \underbrace{g(\lambda x + (1 - \lambda)y)}_{\leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)} \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) = \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y). \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ať  $\lambda \in [0, 1], x, y \in C, \alpha \geq 0$ .

$$\alpha f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \alpha f(\lambda x) + \alpha f((1 - \lambda)y) = \alpha \lambda f(x) + \alpha(1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

## 5.6 Příklad ověření konvexity

Je funkce  $f(x) = e^x - 3 \ln x + 2x$  konvexní?

Rozeberme si jednotlivé části funkce.

- $e^x \dots$  exponenciála je z grafu očividně konvexní.
- $-3 \ln x \dots$  logaritmus je konkávní, ale díky „-“ se celý výraz stane konvexní. Násobení konstatou konvexitu neovlivní, viz důkaz (b).
- $2x \dots$  lineární funkce je konvexní.

Protože všechny komponenty funkce  $f$  jsou konvexní, pak je i funkce  $f$  nutně konvexní.

## 5.7 Skládání zachovává konvexitu

Skládání konvexních funkcí není obecně konvexní funkce. Například:  $f(x) = x^2$  a  $g(x) = x^2 - 1$  jsou konvexní, ale

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x))) = (x^2 - 1)^2 \text{ z grafu očividně není konvexní.}$$

1. Mějme tedy tvrzení.

Nechť  $f$  je konvexní na  $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná konvexní a  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je afinní. Jestliže  $g(C) \subseteq K$  (tedy  $g$  „obtiskne“ množinu  $C$  do  $K$ ), pak  $f \circ g$  je konvexní na  $C$ .

Důkaz.

Ať  $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$ .

Pak

$$f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \stackrel{g \text{ je } \text{afinní}}{=} f(\lambda \overbrace{g(x)}^{\in K} + (1 - \lambda) \overbrace{g(y)}^{\in K}) \stackrel{f \text{ je } \text{konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že  $f \circ g$  je konvexní funkce.  $\square$



2. Mějme ještě druhé tvrzení.

Jestliže  $f$  je konvexní a **neklesající** na intervalu  $I$ ,  $g$  je konvexní na  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $g(C) \subseteq I$ , pak  $f \circ g$  je konvexní na  $C$ .

Důkaz.

Ať  $x, y \in C$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Pak

$$f(\underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\substack{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ \text{odhad, díky konvexitě } g}}) \stackrel{\substack{f \text{ je neklesající} \\ g \text{ je konvexní}}}{\leq} f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle **definice konvexní** funkce dává, že  $f \circ g$  je konvexní funkce.  $\square$

## 5.8 Věta o extrémeh konvexních funkcí

Nechť  $f$  je konvexní na  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Potom platí:

- (a) Každý bod lokálního minima  $f$  na  $C$  je bodem minima  $f$  na  $C$ .
- (b) Množina  $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$  je konvexní. Je-li navíc  $f$  ryze konvexní na  $C$ , pak existuje nejvýše jeden bod minima funkce  $f$  na  $C$ .

Důkaz (a).

Sporem. Ať  $\hat{x} \in C$  je bod lokálního minima  $f$  na  $C$  a ať existuje  $\hat{y} \in C$  tak, že  $f(\hat{y}) < f(\hat{x})$ .  $\lambda \in [0, 1]$ .

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{< f(\hat{x})} \underset{\text{odhad}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

Což je ale spor s naším předpokladem, protože kdykoliv si vezmu bod na úsečce mezi  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$ , tak je v něm hodnota ostře menší než funkční hodnota v bodě  $f(\hat{x})$ .  $\square$

Důkaz (b).

Ať  $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

$$\implies \lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x). \quad \square$$

Ať  $f$  je navíc ryze konvexní na  $C$ .

Cíl:  $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$  má nejvýše jeden prvek.

Důkaz.

Sporem. Ať  $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ ,  $\hat{x} \neq \hat{y}$ .  $\lambda \in (0, 1)$ .

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je ryze konv.}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda) \underbrace{f(\hat{y})}_{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

Což je ale spor, protože mám nějakou funkční hodnotu bodu úsečky mezi  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$  ostře menší jak funkční hodnotu bodu  $\hat{x}$ . To ale nemůže nastat, protože jako body minima funkce  $f$  na  $C$  musí mít stejnou hodnotu. Body  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$  musí tedy nutně být stejné body.  $\square$

## 5.9 Věta o konvexitě a první derivaci

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $C \subseteq \Omega$  neprázdná konvexní a  $f \in C^1(\Omega)$ . Potom platí:

(a)  $f$  je konvexní na  $C$  právě tehdy, když pro každé  $x, y \in C$  je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y).$$

(b)  $f$  je ryze konvexní na  $C$  právě tehdy, když pro každé dva různé body  $x, y \in C$  je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle < f(y).$$

Důkaz (b) vynecháme.

Důkaz (a).

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $x, y \in C$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ .

$$\begin{aligned} f(x + \lambda(y - x)) &= f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) = f(x) + \lambda[f(y) - f(x)] \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda}}_{\substack{= \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ pro } \lambda \rightarrow 0_+ \\ \text{z definice směrové derivace}}} &\leq f(y) - f(x). \quad \square \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Ať  $x, y \in C$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

$z := \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$

Z předpokladu:

$$\begin{aligned} f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle &\leq f(x) \quad / \cdot \lambda \\ f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle &\leq f(y) \quad / \cdot (-\lambda) \end{aligned}$$

Pronásobením a sečtením dostaneme:

$$\begin{aligned} f(z) + \lambda \langle \nabla f(z), \underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y - z}_z \rangle &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ \Rightarrow f(z) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

Což ale po dosazení za  $z$  je přesně ta nerovnost, která říká, že  $f$  je konvexní.  $\square$

## 5.10 Věta o konvexitě a druhé derivaci

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená,  $C \subseteq \Omega$  neprázdná konvexní a  $f \in C^2(\Omega)$ . Potom platí:

(a) Jestliže pro každé  $x \in C$  je  $\nabla^2 f(x)$  pozitivně semidefinitní matice, pak  $f$  je konvexní na  $C$ .

(b) Jestliže  $f$  je konvexní na  $C$  a  $C$  je otevřená, potom  $\nabla^2 f(x)$  je pozitivně semidefinitní matice pro každé  $x \in C$ .

(c) Jestliže pro každé  $x \in C$  je  $\nabla^2 f(x)$  pozitivně definitní matice, pak  $f$  je ryze konvexní na  $C$ .

Důkaz (a).

Ať  $x, y \in C$ .

Taylorův polynom: existuje  $\xi \in \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\} \subseteq C$  tak, že

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\xi)(y - x), y - x \rangle}_{\geq 0}$$
$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Což je přesné znění **věty o konvexitě a první derivaci**. Tedy  $f$  je nutně konvexní na  $C$ .

Důkaz (b).

Cíl:  $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$

Ať  $x \in C, y \in \mathbb{R}^n$ .

Pak  $C$  otevřená  $\Rightarrow$  existuje  $\delta > 0$  tak, že  $x + \alpha y \in C \forall \alpha \in (0, \delta]$ .

Taylorův polynom:

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y),$$

kde  $w$  má nulovou limitu v 0.

Použijme fakt, že  $f$  je konvexní:

$$f(x + \alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Když tedy dosadíme:

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Upravíme a podělíme výrazem  $\frac{1}{2} \alpha^2$  ( $\alpha > 0$ ).

$$\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \underbrace{2\|y\|^2 \omega(\alpha y)}_{\rightarrow 0 \text{ pro } \alpha \rightarrow 0_+} \geq 0$$

V limitě  $\alpha \rightarrow 0_+$  tedy máme  $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0$ , což je přesně to, co jsme chtěli.  $\square$

Poznámka. Nutnost otevřenosti  $C$  je velmi důležitá!

Důkaz (c). Podobně jako (a).

### 5.11 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 - y^2$  je konvexní na  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . ( $\rightarrow$  množina  $\mathbb{R} \times \{0\}$  není otevřená, jedná se o přímku)

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  je indefinitní, tedy funkce  $f(x, y)$  není konvexní.

### 5.12 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  je ryze konvexní.

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 > 0, \det \nabla^2 f(x, y) = 4 - 1 > 0 \implies$  dle Sylvesterova kritéria je  $\nabla^2 f(x, y)$  pozitivně definitní.

A podle bodu (c) **věty o konvexitě a druhé derivaci** můžeme říct, že funkce  $f$  je ryze konvexní.

### 5.13 Příklad ověření konvexnosti funkce s parametrem

Mějme funkci  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ je parametr.}$$

Pro jaké  $\alpha$  je funkce  $f$  konvexní?

$$\nabla^2 f(x) = \overbrace{A + A^T}^{\text{ze symetrie}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(x) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2\alpha \end{vmatrix} \stackrel{R_3 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 4 \end{vmatrix} = (2\alpha - 4) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(2\alpha - 4) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 30(\alpha - 2)$$

Tedy aby  $f$  byla konvexní funkce:  $30(\alpha - 2) \geq 0 \iff \alpha \geq 2$ .

Musíme vyšetřit menší minory matice.

Vyškrtněme 3. řádek a 3. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

Vyškrtněme 2. řádek a 2. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2\alpha \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 8(\alpha - 2) \geq 0 \iff \alpha \geq 2 \dots \text{tuto podmínku již vyžadujeme.}$$

Vyškrtněme 1. řádek a 1. sloupec:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2\alpha \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2\alpha \end{vmatrix} = 3(4\alpha - 3) \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{3}{4} \dots \text{vyžadujeme již silnější podmínku.}$$

A teď zbylé minoru po vyškrtnutí dvou řádků a sloupců:

$$4 \geq 0, \quad 6 \geq 0, \quad 2\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq 0 \dots \text{vyžadujeme již silnější podmínku.}$$

$\implies$  Pokud  $\alpha \geq 2$ , pak je funkce  $f$  konvexní. Při  $\alpha > 2$  je ryze konvexní.

### 5.14 Příklad ověření konvexity množiny

Mějme množinu

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2e^{-x+y^2} \leq 4, -x^2 + 3xy - 3y^2 \geq -1 \right\}.$$

Je  $M$  konvexní?

$$\text{Označme: } g_1(x, y) = x + 2e^{-x+y^2} \dots M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid g_1(x, y) \leq 4 \right\}$$

$$g_2(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 \dots M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid g_2(x, y) \leq 1 \right\}$$

$M = M_1 \cap M_2 \implies$  ukážeme konvexnost  $M_1$  a  $M_2$ , protože průnik zachovává konvexitu.

$\implies g_1$  a  $g_2$  musí být konvexní.

- $g_1$ :

- $x$  je afinní funkce  $\rightarrow$  konvexní.
- součet zachovává konvexitu.
- násobení zachovává konvexitu.
- exponenciála je konvexní funkce (dokonce striktně rostoucí).
- vnitřní funkce  $(-x + y^2)$  je také konvexní.

$\implies g_1$  je konvexní funkce  $\implies M_1$  je konvexní množina.

- $g_2$ :

- kvadrát je konvexní.
- je ale člen „ $xy$ “ konvexní? Musíme se podívat na Hessovu matici.

$$\nabla^2 g_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \det \nabla^2 g_2(x, y) = 12 - 9 = 3 > 0 \\ 2 \geq 0 \end{array} \right\} g_2 \text{ je (ryze) konvexní funkce } \implies M_2 \text{ je konvexní množina.}$$

Protože  $M_1$  i  $M_2$  jsou konvexní množiny, pak nutně i  $M_1 \cap M_2 = M$  je konvexní množina.

## 6 Podmínky optimality

### 6.1 Kužel přípustných směrů

Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $x \in M$ .

- Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  se nazve přípustný směr množiny  $M$  v bodě  $x$ , jestliže existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $\alpha \in (0, \delta]$  je  $x + \alpha d \in M$ .
- Množina  $\mathcal{F}(M; x)$  všech přípustných směrů množiny  $M$  v bodě  $x$  se nazývá kužel přípustných směrů množiny  $M$  v bodě  $x$ .

$\mathcal{F}(M; x) \neq \emptyset$ .

Je-li  $x \in \text{int}(M)$ , pak  $\mathcal{F}(M; x) = \mathbb{R}^n$ .

Je-li  $M$  konečná (neprázdná), pak  $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$  pro každé  $x \in M$ .

### 6.2 Hledání přípustných směrů

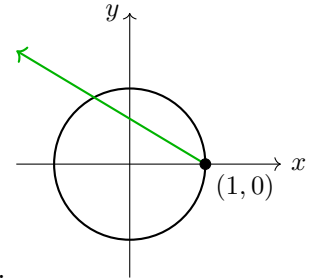
Mějme

(a) Je-li  $M = S(0; 1)$ , pak  $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$  pro každé  $x \in M$ .

(b) Je-li  $C = B(0; 1)$  a  $\hat{x} = (1, 0)^T$ , pak

$$\mathcal{F}(C; \hat{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a)  $M = S(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



Úvaha: Polopřímka z bodu  $(1, 0)$  projde maximálně  $2 \times$  skrz kružnici.

At  $d \neq 0 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 1 &= \|x + \alpha d\|^2 = \langle x + \alpha d, x + \alpha d \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_1 + 2\alpha \langle x, d \rangle + \alpha^2 \|d\|^2 \\ \rightarrow 0 &= \alpha (2\langle x, d \rangle + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2\langle x, d \rangle}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}(M; x) = \{0\}. \end{aligned}$$

(b) Uvažujme kouli

$$C = B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \geq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\rangle = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2}_1 + 2\alpha \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d \right\rangle + \alpha^2 \|d\|^2$$

$$\rightarrow 0 \geq \alpha (2d_1 + \alpha \|d\|^2) \iff \alpha \leq -\frac{2d_1}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}\left(C; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

### 6.3 Kužel směrů poklesu

Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in D$  a  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  se nazve směr poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$ , jestliže existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $\alpha \in (0, \delta]$  je  $f(x + \alpha d) < f(x)$ .
- Množina  $\mathcal{D}(f; x)$  všech směrů poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$  se nazývá kužel směrů poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$ .

Definice implicitně obsahuje podmínku  $[x, x + \delta d] \subseteq D$ .

### 6.4 Nutná geometrická podmínka lokálního extrému

Jestliže  $x$  je bod lokálního minima funkce  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na  $M \subseteq D$ , pak  $\mathcal{F}(M; x) \cap \mathcal{D}(f; x) = \emptyset$ .

Důkaz. Sporem.

Ať ne, tj. existuje  $d \in \mathcal{F}(M, x) \cap \mathcal{D}(f, x)$ .

Pak:  $f(x + \alpha d) < f(x)$  a  $x + \alpha d \in M$  pro všechna  $\alpha > 0$  dostatečně malá.

Tedy spor s tím, že  $x$  je bod lokálního minima  $f$  na  $M$ .  $\square$

### 6.5 Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $x \in \Omega$  a  $f \in C^1(\Omega)$ .

- Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  se nazve silný směr poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$ , jestliže  $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$ .
- Množina  $\mathcal{D}_0(f; x)$  všech silných směrů poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$  se nazývá kužel silných směrů poklesu funkce  $f$  v bodě  $x$ .

Kužel  $\mathcal{D}_0(f; x)$  je množina všech řešení lineární nerovnice

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

$\mathcal{D}_0(f; x)$  je konvexní kužel.

## 6.6 Tvzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $x \in \Omega$  a  $f \in C^1(\Omega)$ . Potom platí:

- (a) Je-li  $d \in \mathcal{D}(f; x)$ , potom  $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$ .
- (b)  $\mathcal{D}_0(f; x) \subseteq \mathcal{D}(f; x)$  (tj. jestliže  $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$ , pak  $d \in \mathcal{D}(f; x)$ ).

Důkaz.

(a) Ať  $d \in \mathcal{D}(f; x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &< 0 \text{ pro } \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.} \\ \implies \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}}_{=\langle \nabla f(x), d \rangle} &\leq 0 \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ať  $\alpha > 0$ .

$$\begin{aligned} f(x + \alpha d) &= f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), d \rangle + \alpha \|d\| \overbrace{\omega(\alpha d)}^{\text{zbytek}} \\ \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &= \underbrace{\langle \nabla f(x), d \rangle + \|d\| \omega(\alpha d)}_{\substack{\rightarrow \langle \nabla f(x), d \rangle \text{ pro } \alpha \rightarrow 0^+ \\ \text{a navíc } \langle \nabla f(x), d \rangle < 0}} \\ \implies \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &> 0 \text{ pro všechna } \alpha > 0 \text{ dostatečně malá.} \end{aligned}$$

## 6.7 Fermatova věta - nutná podmínka optimality

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $M \subseteq \Omega$  a  $\hat{x} \in M$  je bodem lokálního minima funkce  $f \in C^1(\Omega)$  na  $M$ . Potom platí:

- (a)  $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$  (tj.  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0$  pro všechny  $d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$ ).
- (b) Jestliže  $\hat{x} \in \text{int}(M)$ , pak  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .

Důkaz.

(a) Víme, že  $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}(f; \hat{x}) = \emptyset$ .

Pak:

$$\mathcal{D}_0(f, \hat{x}) \subseteq \mathcal{D}(f, \hat{x}) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x}) = \emptyset. \quad \square$$

(Tj.  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M, \hat{x})$ )

(b)

$$\hat{x} \in \text{int}(M) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) = \mathbb{R}^n \xrightarrow{(a)} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Ať  $d = -\nabla f(\hat{x})$ .

$$-\|\nabla f(\hat{x})\|^2 \geq 0 \implies \nabla f(\hat{x}) = 0. \quad \square$$



## 6.8 Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $f \in C^1(\Omega)$  je konvexní na  $C \subseteq \Omega$  a  $\hat{x} \in C$ . Potom platí:

- (a)  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$  právě tehdy, když  $\mathcal{F}(C; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ .
- (b) Předpokládejme, že  $\hat{x} \in \operatorname{int}(C)$ . Pak  $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$  právě tehdy, když  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .

Důkaz.

(a)

„ $\Rightarrow$ “: Víme. Když máme bod minima, je určitě bodem lokálního minima  $\Rightarrow$  průnik je prázdný.

„ $\Leftarrow$ “: Sporem.

At existuje  $y \in C : \overbrace{f(y) - f(\hat{x})} < 0$ .

At  $d = y - \hat{x} (\neq 0) \in \mathcal{F}(C, \hat{x})$ .

Cíl:  $d \in \mathcal{F}(C, \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x})$ .

$$\underbrace{\hat{x} + \alpha d}_{\hat{x} + \alpha(y - \hat{x}) = \alpha y + (1 - \alpha)\hat{x}} \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1] \text{ z konvexity } C.$$

$f$  je konvexní na  $C \iff f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), \overbrace{y - \hat{x}}^d \rangle \leq f(y) \implies \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \leq f(y) - f(\hat{x}) \underset{\text{z předp.}}{<} 0$ .

To je ale spor, protože byl předpoklad, že průnik je prázdný. My jsme ale ukázali, že není.  $\square$

(b)

„ $\Rightarrow$ “ Víme.

„ $\Leftarrow$ “ At  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .

Pak  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle = 0 \forall d \in \mathbb{R}^n = \mathcal{F}(C; \hat{x})$ . Nemáme žádný směr poklesu  $\xRightarrow{(a)} \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ .  $\square$

## 6.9 Hledání bodu minima

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + x - 2y$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \dots \text{dle Sylvesterova kritéria je pozitivně definitní.}$$

$\implies f$  je nutně (ryze) konvexní.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 1 \\ 6y - 2x - 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x - 2y = -1 \\ -2x + 6y = 2 \end{matrix} \rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

## 6.10 Věta o podmínkách optimality 2. řádu

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $M \subseteq \Omega$ ,  $\hat{x} \in \operatorname{int}(M)$  a  $f \in C^2(\Omega)$ . Potom platí:

- (a) Jestliže  $\hat{x}$  je bod lokálního minima funkce  $f$  na  $M$ , pak  $\nabla^2 f(\hat{x})$  je pozitivně semidefinitní.
- (b) Jestliže  $\nabla f(\hat{x}) = 0$  a  $\nabla^2 f(\hat{x})$  je pozitivně definitní, pak  $\hat{x}$  je bod ostrého lokálního minima.

Důkaz vynecháme.

## 6.11 Příklad použití věty o podmínkách optimality 2. řádu

Je dána funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 2y.$$

Určete lokální extrémy funkce.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y + x + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x^2 + y = 0 \\ y + x + 2 = 0 \end{matrix} \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

Podezřelé body jsou:

- $x = -1 \implies y = -1$
- $x = 2 \implies y = -4$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(-1, -1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$  dle Sylvesterova kritéria není pozitivně semidefinitní, není ani negativně semidefinitní, je indefinitní. Dle věty o podmínkách optimality 2. řádu není lokálním minimem ani maximem.

$\nabla^2 f(2, -4) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$  dle Sylvesterova kritéria je pozitivně definitní. V bodě  $(2, -4)$  se tedy nachází (ostré) lokální minimum, nikoliv však globální.

## 6.12 Hledání bodu minima

Nalezněte, pokud existují, všechny body minima funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2xz$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \det \nabla^2 f(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 7 > 0 \\ |4| &= 4 > 0 \end{aligned} \right\} \text{pozitivně definitní} \implies f \text{ je ryze konvexní.}$$

Protože  $f$  je konvexní, body minima budou přesně stacionární body. A protože  $f$  je ryze konvexní, tak bude mít právě jeden bod minima.

$$\begin{aligned} 4x + y - 2z &= 0 &\Rightarrow 2z + y &= 0 \Rightarrow z = -2y \\ x + 2y &= 0 &\Rightarrow x &= -2y \\ -2x &+ 2z &= 0 &\Rightarrow x = z \end{aligned}$$

Jediný bod minima je tedy očividně  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

### 6.13 Omezení ve tvaru nerovnosti - aproximace $\mathcal{F}(M; \hat{x})$

At  $g_1, \dots, g_k$  jsou reálné funkce definované na množině  $M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $x \in M$ . Označme si:

- Množina  $\mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x) := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x) = 0\}$  se nazývá indexová množina aktivních omezení v bodě  $x$ .
- Jestliže  $i \in \mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x)$ , pak  $g_i(x) \leq 0$  se nazve **aktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě  $x$ .
- Jestliže  $i \notin \mathcal{I}((g_i)_{i=1}^k; x)$ , pak  $g_i(x) < 0$  se nazve **neaktivní** omezení (ve tvaru nerovnosti) v bodě  $x$ .

Poznámka. V textu dále se obvykle bude uvádět pouze  $\mathcal{I}(x) = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(x) = 0\}$ . Když přeindexujeme funkce  $g_i(x)$ , znamenalo by to něco jiného, proto se u  $\mathcal{I}$  uvádí  $((g_i)_{i=1}^k; x)$ , ale my většinou přeindexovávat nebudeme.

**Definice.** Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,

$$g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega), x \in M \text{ a } M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Definujme množinu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}((g_i)_{i=1}^k; x) &:= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}(x)\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}(x)} \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), d \rangle \leq 0\} \end{aligned}$$

jako aproximaci  $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ .

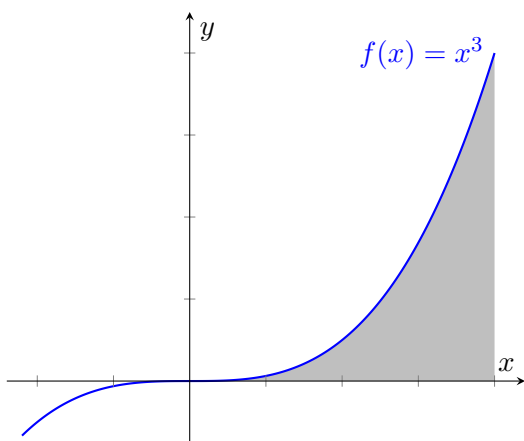
### 6.14 Příklad výpočtu $\mathcal{G}$ a $\mathcal{F}$

Je dána množina

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 \leq 0, -y \leq 0\}$$

a bod  $\hat{x} = (0, 0)^T$ . Určete množiny  $\mathcal{F}(M; \hat{x})$  a  $\mathcal{G}((g_i)_{i=1}^2; \hat{x})$ .

Nákres množiny.



Výpočet  $\mathcal{F}(M; \hat{x})$ .

?  $0 + \alpha d \in M \quad \forall \alpha > 0$  dostatečně malé.

$$\alpha d_2 - \alpha^3 d_1^3 \leq 0 \quad (1)$$

$$-\alpha d_2 \leq 0 \quad \forall \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.} \quad (2)$$

$$(2) \implies d_2 \geq 0$$

$$(1) \implies d_2 \leq \alpha^2 d_1^3 \quad \forall \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.}$$

$d_2 \geq 0 \implies d_1 \geq 0$  a protože to platí  $\forall \alpha > 0$  dostatečně malá, pak  $d_2 = 0$ , protože si můžu vzít libovolné malé, tedy i limitně blízké nule,  $\alpha$ .

$$\implies \mathcal{F}(M; (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 \geq 0 \right\}.$$

Výpočet  $\mathcal{G}((g_i)_{i=1}^k; \hat{x})$ .

Označme si  $g_1(x, y) = y - x^3$  a  $g_2(x, y) = -y$ .

Pak:

$$\left. \begin{aligned} \langle \nabla g_1(0), d \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = d_2 \leq 0 \\ \langle \nabla g_2(0), d \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = d_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} d_2 = 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2), (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid d_1 \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \mathcal{G} \text{ je větší jak } \mathcal{F}.$$

Protože  $\mathcal{G}$  je pouze aproximací  $\mathcal{F}$ , může a bude se stávat, že  $\mathcal{G}$  bude větší jak  $\mathcal{F}$ .

Přidejme si další, fakticky zbytečnou, podmínku navíc.

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y - x^3}_{g_1(x, y)} \leq 0, \underbrace{-y}_{g_2(x, y)} \leq 0, \underbrace{-x - y}_{g_3(x, y)} \leq 0\}$$

$$\langle \nabla g_3(0), d \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle = -d_1 - \underbrace{d_2}_{=0} \leq 0 \implies -d_1 \leq 0$$

$$\implies \mathcal{G}((g_1, g_2, g_3), (0, 0)) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid d_1 \geq 0 \right\}. \text{ Což odpovídá přesně množině } \mathcal{F}.$$

Je tedy očividné, že  $\mathcal{G}$  závisí na popisu množiny.

## 6.15 Ukázka, že aproximací $\mathcal{F}$ lze zkazit prázdnot průniku

Mějme optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && x + y \\ &\text{za podmínek} && y - x^3 \leq 0, \\ &&& -y \leq 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(f; 0) &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(0), d \rangle < 0\} \\ &\stackrel{=}{=}_{\nabla f(0)=(1,1)} \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mid d_1 + d_2 < 0 \right\} \dots \text{ například } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_0(f; 0), \text{ ale } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}(x)! \end{aligned}$$

Tedy  $\mathcal{G}(\hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) \neq \emptyset \implies$  nahrazením podmínek optimality můžeme zkazit prázdnot průniku, protože  $\mathcal{G}$  může být větší jak  $\mathcal{F}$ .

## 7 KKT podmínky

### 7.1 Věta o nutných KKT podmínkách

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ ,

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\} \text{ a } \hat{x} \in M.$$

Jestliže  $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})} = \mathcal{G}(\hat{x})$  a  $\hat{x}$  je bod lokálního minima na  $f$  na  $M$ , pak existuje  $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T \in \mathbb{R}^k$  tak, že

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) &= 0, \\ \mu_i g_i(\hat{x}) &= 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i &\geq 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Důkaz.

- $\mathcal{I}(\hat{x}) = \emptyset \implies \hat{x} \in \text{int}(M) \implies \nabla f(\hat{x}) = 0$  z **Fermatovy věty**.  
 $\rightarrow$  volba  $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ . Pak KKT podmínky splněny.

- $\emptyset \neq \mathcal{I}(\hat{x}) = \{1, \dots, l\}$

Víme, že máme bod lokálního minima  $(\hat{x}) \xRightarrow{\text{Fermatova věta}} \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ ,

tj.  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$ .

Teď chceme dokázat, že platí  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$ .

Protože  $\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})}$  koinciduje s  $\mathcal{G}(\hat{x})$  a ze spojitosti skalárního součinu plyne, že  
 $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \underbrace{\overline{\mathcal{F}(M; \hat{x})}}_{\mathcal{G}(\hat{x})}$ .

To tedy znamená  $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{G}(\hat{x})$ . Z toho plyne, že neexistuje  $d \in \mathbb{R}^n$ , pro který platí:

$$\left. \begin{aligned} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle &< 0 \dots \text{ tj. } \langle -\nabla f(\hat{x}), d \rangle > 0 \\ \langle \nabla g_1(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \\ &\vdots \\ \langle \nabla g_l(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \end{aligned} \right\} A^T d \leq 0, \text{ kde } A = (\nabla g_1(\hat{x}), \dots, \nabla g_l(\hat{x}))$$

No a z **Farkasova lemma** tedy nutně platí: ex.  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)^T \in \mathbb{R}_+^l : \underbrace{A\mu}_{\sum_{i=1}^l \mu_i \nabla g_i} = -\nabla f(\hat{x})$ .

$\rightarrow$  volme dále  $\mu_{l+1}, \dots, \mu_k = 0$ . Pak

$$\begin{aligned} -\nabla f(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), \\ \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) &= 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu_i &\geq 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

A to jsou přesně KKT podmínky.  $\square$

## 7.2 Terminologie KKT podmínek

- Podmínky

$$(P1) \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0,$$

$$(P2) \mu_i g_i(\hat{x}) = 0,$$

$$(P3) \mu_i \geq 0,$$

se souhrnně nazývají **KKT podmínky**.

- Podmínka (P1) se nazývá **podmínka stacionarity**.
- Podmínka (P2) se nazývá **podmínka komplementarity**.
- Koeficienty  $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$  splňující KKT podmínky se nazývají **KKT multiplikátory** (Lagrangeovy multiplikátory) v bodě  $\hat{x}$ .
- Bod  $\hat{x}$  se nazve **KKT bod**, existuje-li vektor  $(\mu_1, \dots, \mu_k)^T$  KKT multiplikátorů v bodě  $\hat{x}$ .

## 7.3 Příklad použití KKT podmínek

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte } \underbrace{x+y}_{f(x,y)} \\ &\text{za podmínek } \underbrace{x}_{g_1(x,y)} \geq 0, \\ &\quad \underbrace{y}_{g_2(x,y)} \geq 0. \end{aligned}$$

Určete KKT body.

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x, y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

KKT podmínky:

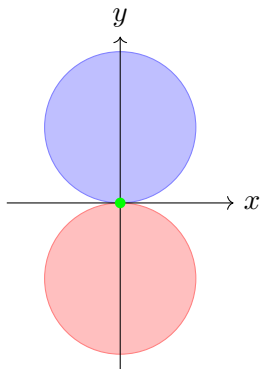
$$\begin{aligned} 1 + \mu_1(-1) + \mu_2(0) &= 0 &\rightarrow \mu_1 &= 1 \\ 1 + \mu_1(0) + \mu_2(-1) &= 0 &\rightarrow \mu_2 &= 1 \\ \mu_1(-x) &= 0 \\ \mu_2(-y) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jediný KKT bod je tedy  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  a jedná se o bod minima.

## 7.4 Příklad, že KKT podmínky vždy nenaleznou všechny body

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte } x \\ &\text{za podmínek } x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \\ &\quad x^2 + (y+1)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Nákres.



**Přípustná** množina:  $M = \{0\} \rightarrow$  určitě konvexní množina.

KKT podmínky:

$$1 + \mu_1(2 \cdot 0) + \mu_2(2 \cdot 0) = 0 \times$$

$\vdots$

$\Rightarrow (0,0)$  není KKT bod i když je úloha konvexní a bod  $(0,0)$  je očividně bodem minima.

## 7.5 Afinní podmínka regularity

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$  a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Řekněme, že  $(g_i)_{i=1}^k$  splňuje afinní podmínku regularity, jestliže  $g_1, \dots, g_k$  jsou afinní.

## 7.6 Slaterova podmínka regularity

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$  a

$$M = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}.$$

Řekněme, že  $(g_i)_{i=1}^k$  splňuje Slaterovu podmínku regularity, jestliže  $g_1, \dots, g_k$  jsou konvexní na  $\Omega$  a existuje  $x \in \Omega$  tak, že pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$  je  $g_i(x) < 0$ .

## 7.7 Věta o postačujících KKT podmínkách

Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$  jsou konvexní funkce na  $C = \{x \in \Omega \mid g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0\}$ . Jestliže  $\hat{x} \in C$  je KKT bod, pak  $\hat{x}$  je bod minima funkce  $f$  na  $C$ .

Důkaz. Ať  $x \in C$ .

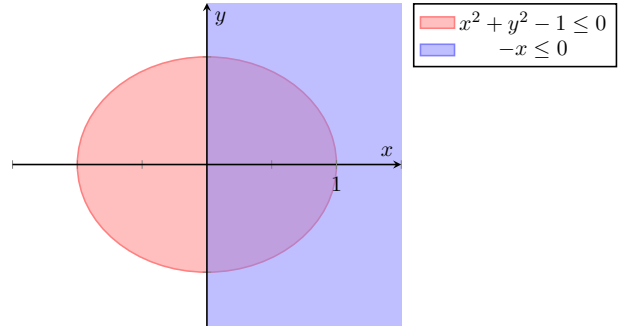
Cíl:  $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0$  ( $= \hat{x}$  je minimum)

Charakterisace pomocí tečné nadroviny:  $f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \leq f(x) \quad x, \hat{x} \in C$

$$\begin{aligned} f(x) - f(\hat{x}) &\stackrel{\substack{f \text{ je konvexní} \\ \text{na } C \subseteq \Omega}}{\geq} \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \stackrel{\substack{\text{podmínka} \\ \text{stacionarity}}}{=} \left\langle - \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k -\langle \nabla g_i(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \mu_i = \sum_{i=1}^n (g_i(\hat{x}) - g_i(x)) \mu_i \stackrel{\substack{\text{podmínka} \\ \text{komplementarity}}}{=} - \sum_{i=1}^n \underbrace{\mu_i}_{\substack{\text{podmínka} \\ \text{nezápornosti}}} \overbrace{g_i(x)}^{\leq 0 \forall x \in C} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

## 7.8 Použití podmínek regularity k ověření KKT podmínek

minimalisujte  $2x^2 + y^2$   
 za podmínek  $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ ,  
 $-x \leq 0$ .



Afinní podmínka splněna není,  
 ověříme Slaterovu.

Množina je očividně konvexní a zároveň zvolme  $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Omega$ . Pak  $g_i(x) < 0$ , Slaterova podmínka je tedy očividně splněna.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$  KKT podmínky:

$$\begin{aligned} 4x + \mu_1 2x + \mu_2(-1) &= 0 \Leftrightarrow 2x(2 + \mu_1) - \mu_2 = 0 \\ 2y + \mu_1 2y + \mu_2 0 &= 0 \Leftrightarrow 2y(1 + \mu_1) = 0 \xRightarrow{\mu_1 \geq 0} y = 0 \\ \mu_1(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ \mu_2(-x) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$y = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} 2x(2 + \mu_1) &= \mu_2 \\ \mu_1(x^2 + 1) &= 0 \\ \mu_2 x &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x \neq 0 &\Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow 2 + \mu_1 = 0 \dots \text{spor s } \mu_1 \geq 0. \\ x = 0 &\Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Existuje bod  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , pro který jsou splněny nutné a postačující KKT podmínky.

## 7.9 Určení nutných a postačujících podmínek optimality

Ať  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $D \in \mathbb{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  a  $\lambda > 0$ . Je dána úloha

$$\text{minimalisujte } f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Dx\|^2 \text{ na } \mathbb{R}^n.$$

Jaké jsou nutné a postačující podmínky optimality?

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Ax - b, Ax - b \rangle + \lambda \langle Dx, Dx \rangle \\ &= \underbrace{\langle Ax, Ax \rangle}_{A^T A x, x} - 2 \langle Ax, b \rangle + \|b\|^2 + \lambda \underbrace{\langle Dx, Dx \rangle}_{D^T D x, x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \langle (A^T A + \lambda D^T D) x, x \rangle - 2 \langle x, A^T b \rangle + \|b\|^2$$

Je  $f$  konvexní?

Ano, neboť  $\nabla^2 f(x) = 2(A^T A + \lambda D^T D)$  je pozitivně semidefinitní, protože pro  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \langle 2(A^T A + \lambda D^T D) x, x \rangle &= 2[\langle Ax, Ax \rangle + \lambda \langle Dx, Dx \rangle] \\ &= 2[\|Ax\|^2 + \lambda \|Dx\|^2] \geq 0 \end{aligned}$$



Tedy  $f$  je konvexní  $\implies$  stačí najít stacionární body.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 f(x) = 2(A^T A + \lambda D^T D)x - 2(A^T b) + 0 \\ &= (A^T A + \lambda D^T D)x - A^T b \\ \implies A^T b &= (A^T A + \lambda D^T D)x \end{aligned}$$

A to je nutná a postačující podmínka pro  $x$ , aby byl bodem minima  $f$  na  $\mathbb{R}^n$ .

## 7.10 Určení KKT podmínek

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & x^4 + y^4 + 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y \\ \text{za podmínku} \quad & x + y \geq 6, \\ & 2x - y \geq 3, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Napište KKT podmínky.
- (b) Jsou nutné a postačující?
- (c) Ukažte, že  $(3, 3)^T$  je jediný bod minima.

(a) Mějme

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= -x - y + 6, \\ g_2(x, y) &= 2x - y + 3, \\ g_3(x, y) &= -x, \\ g_4(x, y) &= -y, \\ f(x, y) &= x^4 + y^4 + 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y. \end{aligned}$$

$\rightarrow$  použijeme **afinní podmínku regularity**  $\rightarrow g_i$  jsou affinní.

KKT podmínky:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) + \mu_1 \nabla g_1(x, y) + \mu_2 \nabla g_2(x, y) + \mu_3 \nabla g_3(x, y) + \mu_4 \nabla g_4(x, y) &= 0 \\ \mu_i g_i(x, y) &= 0, i = 1, 2, \dots, \\ \mu_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} 4x^3 + 24x - y - 1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ 4y^3 + 12y - x - 1 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 0 \\ \mu_1(-x - y + 6) &= 0, \\ \mu_2(x - 2y + 3) &= 0, \\ x\mu_3 &= 0, \\ y\mu_4 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jsou postačující? Máme konvexní úlohu? Musíme ověřit konvexitu u  $g_i$  a  $f$ .

- $g_i$  jsou afinní  $\implies$  jsou konvexní.

•  $f$  :

- kvadráty jsou ryze konvexní
- součet ryzích konvexních je ryzí konvexní

$$h(x, y) = 12x^2 + 6y^2 - xy - x - y$$

$$\nabla^2 h(x, y) = \begin{bmatrix} 24 & -1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} = 24 \cdot 12 - 1 > 0; \quad 24 > 0 \implies h(x, y) \text{ je pozitivně definitní.}$$

$\implies h(x, y)$  je ryze konvexní.

A proto je i  $f(x, y)$  ryze konvexní, protože součet ryze konvexních dává ryze konvexní  $\implies$  existuje právě jeden bod minima.

Ověříme  $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Ať  $x = y = 3$ . Pak

$$4 \cdot 27 + 24 \cdot 3 - 4 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \quad (\text{I.})$$

$$4 \cdot 12 + 12 \cdot 3 - 4 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_4 = 0 \quad (\text{II.})$$

$$\mu_1 \cdot 0 = 0$$

$$\mu_2 \cdot 0 = 0$$

$$3\mu_3 = 0 \implies \mu_3 = 0$$

$$3\mu_4 = 0 \implies \mu_4 = 0$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\text{I.} - \text{II.}: 24 \cdot 3 - 12 \cdot 3 - 3\mu_2 = 0 \implies \mu_2 = \frac{1}{3}(24 \cdot 3 - 12 \cdot 3) > 0.$$

$$\mu_1 = 4 \cdot 27 + 24 \cdot 3 - 4 - \frac{2}{3}(24 \cdot 3 - 36) > 0.$$

## 7.11 Určení KKT podmínek

minimalisujte  $\alpha x + y$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  je parametr.

za podmínek  $x^2 + y^2 - 25 \leq 0$ ,

$$x - y - 1 \leq 0.$$

Určete  $\alpha$  tak, aby  $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  bylo řešení.

KKT podmínky:

$$\alpha + \mu_1(2x) + \mu_2 \cdot 1 = 0$$

$$1 + \mu_1(2y) - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1(x^2 + y^2 - 25) = 0,$$

$$\mu_2(x - y - 1) = 0,$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

$g_i$  jsou konvexní,  $f$  je konvexní  $\implies$  KKT podmínky jsou postačující.

**Slaterova podmínka optimality** je splněna  $\implies$  KKT podmínky jsou nutné.

$x = 4, y = 3$ :

$$\alpha + 8\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (\text{I.})$$

$$1 + 6\mu_1 - \mu_2 = 0, \quad (\text{II.})$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

$$\text{I. + II.: } \alpha + 1 + 14\mu_1 = 0$$

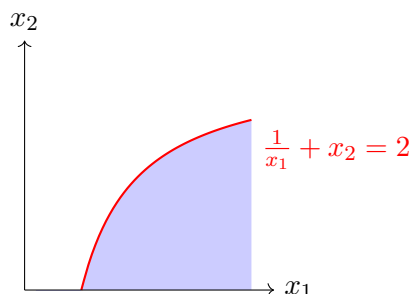
$$\mu_1 = \frac{-\alpha-1}{14} \stackrel{!}{\geq} 0 \implies -1 \geq \alpha. \text{ A tedy } \mu_2 = 1 + 6\mu_1 \geq 0.$$

Tedy aby  $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  bylo řešení této úlohy, musí platit  $\alpha \leq -1$ .

## 7.12 Určení KKT podmínek s trikem

Mějme zadání

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && \frac{x_1}{x_2} \\ &\text{za podmínek} && \frac{1}{x_1} + x_2 \leq 2, \\ &&& x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$



Z nákresu množina vypadá konvexní, co ale minimalisovaná funkce?

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^4} < 0 \dots \text{indefinitní}$$

$\Rightarrow$  KKT podmínky jsou jen nutné, nikoliv postačující.

Využijeme trik, uděláme substituci:  $x_1 = e^{y_1}$ ,  $x_2 = e^{y_2}$  ...  $\varphi(y_1, y_2) = (e^{y_1}, e^{y_2})$ ,  $\varphi(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . A úlohu převedeme na:

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && e^{y_1} - e^{y_2} \\ &\text{za podmínek} && e^{-y_1} + e^{y_2} \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{y}_1 - \hat{y}_2} &\leq e^{y_1 - y_2} \\ \underbrace{\frac{e^{\hat{y}_1}}{e^{\hat{y}_2}}}_{f(\varphi(\hat{y}_1, \hat{y}_2))} &\leq \underbrace{\frac{e^{y_1}}{e^{y_2}}}_{f(\varphi(y_1, y_2))} \\ f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &\leq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in M. \end{aligned}$$

**Slaterova podmínka** je splněna  $\rightarrow (y_1, y_2) = (1, 0)$ .

$\Rightarrow$  KKT podmínky jsou nutné a postačující.

$$e^{y_1 - y_2} + \mu(-e^{-y_1}) = 0 \tag{I}$$

$$-e^{y_1 - y_2} + \mu e^{y_2} = 0 \rightarrow \mu = \frac{e^{y_1 - y_2}}{e^{y_2}} = e^{y_1 - 2y_2} \tag{II}$$

$$\mu(e^{-y_1} + e^{y_2} - 2) = 0 \tag{III}$$

$$\mu \geq 0 \tag{IV}$$

Očividně  $\mu \neq 0 \Rightarrow e^{-y_1} + e^{y_2} - 2 = 0$  (III).

$$\text{Dosazení (II) do (I): } e^{y_1 - y_2} - e^{-2y_2} = 0.$$

$$e^{y_1 - y_2} = e^{-2y_2}$$

$$y_1 - y_2 = -2y_2$$

$$y_1 = -y_2$$

Dosazením do (III) získáme  $2e^{y_2} - 2 = 0 \Rightarrow e^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0 = y_1$ .

Jediný bod minima je  $[0, 0]^T$ .

Tedž zpětný chod na původní úlohu:  $x_1 = e^0 = 1$ ,  $x_2 = e^0 = 1$ .

Původní úloha má řešení  $[1, 1]^T$ .

## 8 Dualita

### 8.1 Pomocný důkaz vlastnosti infima

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) = \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y)$$

Důkaz.

„ $\geq$ “:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in M} h_1(x) &\leq h_1(t) \quad \forall t \in M \\ \inf_{y \in N} h_2(y) &\leq h_2(s) \quad \forall s \in N \end{aligned}$$

$$\implies \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y) \leq \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \square$$

„ $\leq$ “:

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) + h_2(s) \quad \forall \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \in M \times N$$

$$\text{což lze upravit: } -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_1(t) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x \in M} h_1(x) \quad \forall s \in N.$$

A to samé lze ukázat i pro  $h_2$ :

$$-h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq h_2(s) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$\implies -h_1(t) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{y \in N} h_2(y) \quad \forall t \in M.$$

Ted sečteme tyto dvě nerovnice:

$$-h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq \inf_{x \in M} h_1(x) + \inf_{y \in N} h_2(y) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

Tedy stačí dokázat, že

$$\inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \leq -h_1(t) - h_2(s) + 2 \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$0 \leq -h_1(t) - h_2(s) + \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

$$h_1(t) + h_2(s) \leq \inf_{(x,y)^T \in M \times N} (h_1(x) + h_2(y)) \quad \forall t \in M, \forall s \in N.$$

### 8.2 Dualita - motivační příklad

Je dána úloha

$$\text{minimalisujte } 2x + 3y$$

$$\text{za podmíněk } 1 - x - y \leq 0,$$

$$x, y \in [0, 2].$$

Označme  $f(x, y) = 2x + 3y$ ,  $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [0, 2]^2 \mid 1 - x - y \leq 0 \right\}$  a  $\hat{f} = \min_{x \in M} f(x)$ .

Odhadněme min funkce ze spoda.

Pro  $(x, y)^T \in M$ :

$$f(x, y) \geq f(x, y) + g_1(x, y) = 2x + 3y + (1 - x - y) = x + 2y + 1 \geq 1.$$

A protože  $\hat{f} = \min f(x)$ , nutně musí platit  $\hat{f} \geq 1$ .

Zkusme teď jiný odhad.

$$f(x, y) \geq f(x, y) + 2g_1(x, y) = 2x + 3y + 2(1 - x - y) = 2y + 2 \geq 2.$$

Nalezli jsme lepší odhad:  $\hat{f} \geq 2$ . Jak tedy správně určit „nejlepší“ možný dolní odhad  $\hat{f}$ ?

Definujme si

$$L(x, y, \mu) = 2x + 3y + \mu(1 - x - y),$$

$$\varphi(\mu) = \min_{(x, y)^T \in [0, 2]^2} L(x, y, \mu).$$

Pro každé  $\mu \geq 0$  pak platí:

$$\varphi(\mu) = \min_{(x, y)^T \in \Omega} L(x, y, \mu) \leq \min_{(x, y)^T \in M} L(x, y, \mu) \leq \hat{f}$$

„Optimální“ dolní odhad  $\hat{f}$  pomocí  $\varphi$  vede na úlohu

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \varphi(\mu) \\ \text{za podmínek} & \mu \geq 0. \end{array}$$

Kde

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \min_{(x, y)^T \in [0, 2]^2} [(2 - \mu)x + (3 - \mu)y + \mu] \\ &= \mu + \min_{x \in [0, 2]} (2 - \mu)x + \min_{y \in [0, 2]} (3 - \mu)y \\ &= \begin{cases} \mu & \mu < 2 \\ \mu + 4 - 2\mu & \mu \in [2, 3) \\ 10 - 3\mu & \mu \in [3, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Tu budeme nazývat duální úlohou.

Hodnota  $\max \varphi(\mu)$  na  $[0, +\infty)$  je  $\hat{\varphi} \implies \hat{\varphi} \leq \hat{f}$ .

### 8.3 Tvrzení o konkávnosti duální úlohy

Jestliže  $D_\varphi \neq \emptyset$ , pak  $\varphi$  je konkávní.

Důkaz.

Mějme  $\mu, \nu \in D_\varphi$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu) &\stackrel{?}{=} \inf_{x \in \Omega} \overbrace{\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)}^{f(x)} + \overbrace{\lambda \langle g(x), \mu \rangle + (1 - \lambda)\langle g(x), \nu \rangle}^{\langle g(x), \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \rangle} \\ &= \inf_{x \in \Omega} \lambda(f(x) + \langle g(x), \mu \rangle) + (1 - \lambda)(f(x) + \langle g(x), \nu \rangle) \\ &\stackrel{\text{vlastnost}}{\geq} \lambda \inf_{x \in \Omega} (f(x) + \langle g(x), \mu \rangle) + (1 - \lambda) \inf_{x \in \Omega} (f(x) + \langle g(x), \nu \rangle) \\ &\stackrel{\text{infima}}{=} \lambda\varphi(\mu) + (1 - \lambda)\varphi(\nu) > -\infty \implies \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \in D_\varphi. \quad \square \end{aligned}$$

## 8.4 Věta o slabé dualitě

(a) Pro každé  $x \in M$  a  $\mu \in N$  je  $\varphi(\mu) \leq f(x)$ .

(b)  $\hat{\varphi} \leq \hat{f}$ .

(a) Důkaz.

Víme:  $L(x, \mu) \leq f(x) \quad \forall x \in M, \forall \mu \geq 0$ .

$$\varphi(\mu) = \inf_{y \in \Omega} L(y, \mu) \leq \inf_{y \in M} L(y, \mu) \leq L(x, \mu) \leq f(x) \quad \forall x \in M, \forall \mu \in N. \quad \square$$

(b) Důkaz.

Z (a) máme  $\overbrace{\sup_{\mu \in N} \varphi(\mu)}^{\hat{\varphi}} \leq f(x) \quad \forall x \in M$ .

$$\implies \hat{\varphi} \leq \inf_{x \in M} f(x) = \hat{f}. \quad \square$$

## 8.5 Důsledek věty o slabé dualitě

(a) Jestliže existují  $\hat{x} \in M$  a  $\hat{\mu} \in N$  splňující  $\varphi(\hat{\mu}) = f(\hat{x})$ , pak

$$\hat{\mu} \in \operatorname{argmax}_{\mu \in N} \varphi(\mu) \quad \text{a} \quad \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x).$$

(b) Je-li  $\hat{f} = -\infty$ , pak  $N = \emptyset$ .

(c) Je-li  $\hat{\varphi} = +\infty$ , pak  $M = \emptyset$ .

Důkaz (a).

Z **věty o slabé dualitě** platí:

$$\varphi(\mu) \leq f(\hat{x}) \stackrel{\text{předpoklad}}{=} \varphi(\hat{\mu}) \quad \forall \mu \in N \iff \hat{\mu} \in \operatorname{argmax}_{\mu \in N} \varphi(\mu).$$

Analogicky:

$$f(\hat{x}) \stackrel{\text{předpoklad}}{=} \varphi(\hat{\mu}) \leq f(x) \quad \forall x \in M \iff \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x). \quad \square$$

Důkaz (b).

Sporem. Ať  $N \neq \emptyset$ . Volme  $\mu \in N$ .

$$\text{Pak } \underbrace{\varphi(\mu)}_{\in \mathbb{R}} \leq \hat{\varphi} \leq \hat{f} = -\infty \dots \text{spor.} \quad \square$$

Důkaz (c).

Sporem. Ať  $M \neq \emptyset$ . Volme  $x \in M, \mu \in N$ .

$$\text{Pak } \varphi(\mu) \leq \hat{\varphi} = +\infty \leq \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \dots \text{spor.} \quad \square$$

## 8.6 Ukázkový příklad na slabou dualitu

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -x^2 \\ &\text{za podmínek} && 2x - 1 \leq 0, \\ &&& x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

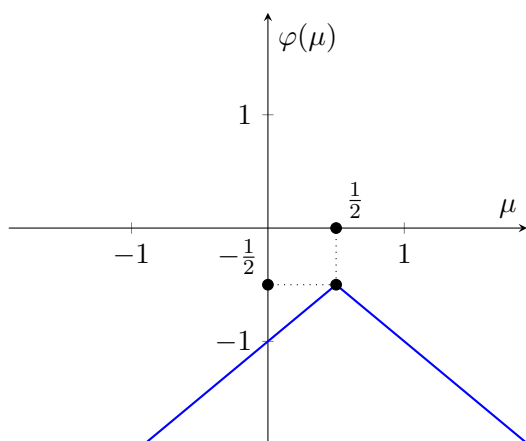
Tedy:

$$L(x, \mu) = -x^2 + \mu(2x - 1) = (-x^2 + 2x\mu) - \mu$$

$$\varphi(\mu) = \left[ \min_{x \in [0, 1]} (-x^2 + 2x\mu) \right] - \mu$$

Pozorování. Minimalisovaná funkce je (ryze) konkávní. Nemůže tedy v žádném vnitřním bodě nabývat minima. Dosazení krajních bodů intervalu:

$$\varphi(\mu) = \min \{0, 2\mu - 1\} - \mu = \begin{cases} \mu - 1 & \text{pro } \mu < \frac{1}{2}, \\ -\mu & \text{pro } \mu \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Z grafu vyčteme:  $\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}$ . A to samé uděláme pro  $f$ , kde výsledek bude  $\hat{f} = -\frac{1}{4}$ .

Tedy  $\hat{\varphi} < \hat{f}$ .

## 8.7 Věta o silné dualitě

Nechť  $\hat{f} < \infty$  a cílová funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- (a) Komponenty  $g_1, \dots, g_k$  zobrazení  $g$  splňují **Slaterovu podmínku** regularity.
- (b) Zobrazení  $g$  je afinní a  $\Omega$  je konvexní polyedrická množina.

Potom  $\hat{f} = \hat{\varphi}$ . Je-li navíc  $\hat{f} \in \mathbb{R}$ , pak existuje řešení úlohy  $(D)$ .

Důkaz vynecháme.



## 9 Lineární programování

Úlohy lineárního programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

- (a) cílová funkce afinní (bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na lineární funkce)
- (b) přípustná množina je konvexní polyedrická množina (tj. lze popsat pomocí konečné soustavy lineárních rovnic a nerovnic)

Příklad.

Firma vyrábí 2 druhy výrobků  $A$  a  $B$ . V tabulce je uvedeno množství materiálu (ve vhodných jednotkách) potřebný k výrobě jednotkového množství daného druhu výrobku a také jeho prodejní cena.

|             | Materiál $X$ | Materiál $Y$ | Cena     |
|-------------|--------------|--------------|----------|
| Výrobek $A$ | 2            | 3            | 6000 Kč  |
| Výrobek $B$ | 4            | 4            | 10000 Kč |

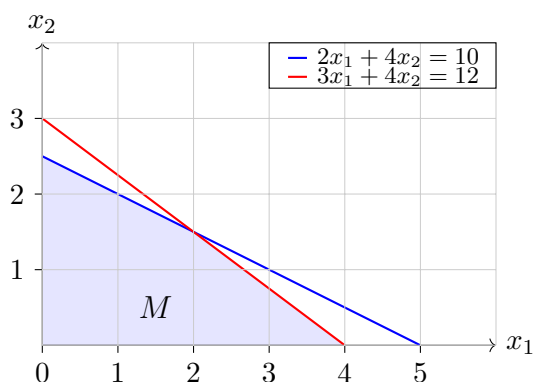
Na skladu je jen 10 jednotek materiálu  $X$  a 12 jednotek materiálu  $Y$ . Jak mají ve firmě nastavit výrobní proces, aby celková cena za vyrobené množství výrobků byla co největší?

Odpověď je přímo v zadání.

$x_1 \dots$  množství výrobku  $A$

$x_2 \dots$  množství výrobku  $B$

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} && 6x_1 + 10x_2 \\ &\text{za podmínek} && 2x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ & && 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & && x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Graficky lze nalézt, že maximum se nabývá v bodě  $(2, \frac{3}{2})^T$ . Maximum je  $f(2, \frac{3}{2}) = 27$ .

Pokračování příkladu.

Obchodník chce od firmy koupit veškerý materiál ze skladu. Jaké ceny za materiál  $X$  a  $Y$  by měl firmě nabídnout, aby zaplatil co nejmenší částku a firmě se přesto vyplatilo materiál prodat namísto výroby výrobků?

Tato otázka vede na úlohu:

$y_1 \dots$  cena za jednotkové množství materiálu  $X$

$y_2 \dots$  cena za jednotkové množství materiálu  $Y$

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && 10y_1 + 12y_2 \\ &\text{za podmínek} && 2y_1 + 3y_2 > 6, \\ &&& 4y_1 + 4y_2 > 10, \\ &&& y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pozorování. Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální.

## 9.1 Zápis úlohy lineárního programování

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && x_1 - x_2 \\ &\text{za podmínek} && 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ &&& -2 \leq x_2 \leq 3, \\ &&& x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Zapišme úlohu v kanonickém tvaru.

Pomocné substituce:  $y_1 = -x_1$ ,  $x_2 = y_2 - y_3$ ,  $y_2, y_3 \geq 0$ .

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -y_1 - y_2 + y_3 \\ &\text{za podmínek} && -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ &&& 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq -5, \\ &&& -y_2 + y_3 \geq -3, \\ &&& y_2 - y_3 \geq -2, \\ &&& y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zapišme úlohu ve standardním tvaru.

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && -y_1 - y_2 + y_3 \\ &\text{za podmínek} && -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 = 5, \\ &&& y_2 - y_3 - y_4 = -2, \\ &&& y_2 - y_3 + y_5 = 3, \\ &&& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \end{aligned}$$

## 9.2 Terminologie lineárního programování

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} && \langle x, c \rangle \\ &\text{za podmínek} && Ax = b, \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

kde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  a  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  splňuje

$$\text{rank } A = \text{rank}(A, b) = m \leq n.$$

Dále se v této sekci budeme držet následujícího značení:

- Přípustná množina  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ .
- $J(x) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j > 0\}$ , kde  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ .
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$  sloupce matice  $A$ .
- Nechť  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  je neprázdná. Pak  $A_B$  je matice tvořená sloupci matice  $A$  s indexy v  $B$  (v daném pořadí). Je-li  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , pak  $x_B$  je sloupec tvořený prvky  $x_i, i \in B$ , v daném pořadí.
- $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ .

### 9.3 Basický přípustný bod

Bod  $x \in M$  se nazve basický přípustný bod (BPB) úlohy lineárního programování, pokud existuje  $m$ -prvková množina  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  taková, že

- $A_B$  je regulární,
- $x_j = 0$  pro každé  $j \in N$ .

Množina  $B$  z definice BPB se nazývá přípustná báse.

### 9.4 Příklad BPB

Nechť  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  a  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Jaké jsou BPB?

- $B = \{1, 2\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Evidentně invertibilní.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \dots \underbrace{Ax}_{A_B x_B + A_N \underbrace{x_N}_{=0}} = b. \text{ Tedy } \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in M \text{ je BPB.}$$

- $B = \{1, 3\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Evidentně invertibilní.

$$\text{Tedy } \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in M \text{ je BPB.}$$

- $B = \{2, 3\} \dots A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Evidentně není regulární. Žádný bod nemůže být BPB.

### 9.5 Tvzení o charakterisaci BPB

Nechť  $x \in M$ . Pak  $x$  je BPB právě tehdy, když  $\{a_j \mid j \in J(x)\}$  je lineárně nezávislá množina.

Důkaz.

„ $\Rightarrow$ “:  $x$  je BPB  $\implies$  existuje  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$   $m$ -prvková tak, že  $\{a_j \mid j \in B\}$  je lineárně nezávislá. Navíc  $J(x) \subseteq B$ , protože  $J(x)$  obsahuje ty indexy, které odpovídají kladným komponentám a všechny komponenty indexované mimo indexy z  $B$  jsou nulové.

Tedy  $\{a_j \mid j \in J(x)\}$  je lineárně nezávislá.

„ $\Leftarrow$ “: Je-li  $|J(x)| = m$ , pak jasně ( $B = J(x)$ ).

Ať  $|J(x)| < m$ . Z předpokladu víme  $\text{rank}(A) = m$ . Pak lze  $J(x)$  doplnit do  $m$ -prvkové množiny  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  tak, že  $\{a_j \mid j \in B\}$  je lineárně nezávislá.  $\Rightarrow x$  je BPB.  $\square$

## 9.6 Tvrzení, že dva různé BPB musí mít různé množiny $B$

Pro každou  $m$ -prvkovou množinu  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  takovou, že  $A_B$  je regulární, existuje nejvýše jedno  $x \in M$  splňující  $x_j = 0$  pro každé  $j \in N$ .

Důkaz. Sporem.

Ať  $x, y \in M$  jsou různé a splňují  $x_j = y_j = 0$  pro každé  $j \in N$ .

$$\left. \begin{aligned} b &= Ax = \sum_{j=1}^n x_j a_j = \sum_{j \in B} x_j a_j = A_B x_B \\ b &= Ay = A_B y_B \end{aligned} \right\} A_B x_B = A_B y_B$$

A protože  $A$  je dle předpokladu regulární, tak dostaneme:

$$x_B = y_B \Rightarrow x = y$$

Což je ale spor, protože  $x$  a  $y$  mají být různé.  $\square$

Horní hranice počtu BPB úlohy LP je tedy  $\binom{n}{m}$ .

## 9.7 Příklad na degenerované BPB

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Určete všechny základní přípustné body.

- $B = \{1, 2\}$ . Tedy  $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  je určitě regulární.  
Pak očividně  $[1, 0, 0, 0]^T$  je BPB s přípustnou bází  $B$ .
- $B = \{1, 3\}$ . Tedy  $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  je určitě regulární.  
Pak  $[1, 0, 0, 0]^T$  je BPB s přípustnou bází  $B$ .
- $B = \{1, 4\}$ .  $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  je singulární, tedy není přípustnou bází BPB.
- $B = \{2, 3\}$ . Tedy  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  je určitě regulární.  
Pak  $[0, 1, 1, 0]^T$  je BPB s přípustnou bází  $B$ .
- $B = \{2, 4\}$ . Tedy  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  je určitě regulární.  
Pak  $[0, 0, 0, 1]^T$  je BPB s přípustnou bází  $B$ .
- $B = \{3, 4\}$ . Tedy  $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  je určitě regulární.  
Pak  $[0, 0, 0, 1]^T$  je BPB s přípustnou bází  $B$ .

## 9.8 Příklad na souvislost BPB a krajních bodů

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid Ax = b\}.$$

Již víme, že  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  a  $y = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  jsou BPB.

$$Ax = b \dots \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Tedy řešení soustavy  $z = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}(3-3t) \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ . Kdy je  $z \in \mathbb{R}_+^3$ ?

Právě tehdy, když  $t \geq 0$  a  $1 \geq t$ , tedy  $t \in [0, 1]$ .

$$z \in [x, y] \iff z = tx + (1-t)y = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2}(1-t) \\ t \end{bmatrix}, t \in [0, 1].$$

Tedy  $M = [x, y]$ .

## 9.9 Věta o souvislosti BPB a krajních bodů

- (a) Nechť  $x \in M$ . Pak  $x$  je BPB úlohy LP právě tehdy, když  $x$  je krajní bod množiny  $M$ .
- (b)  $M$  je neprázdná právě tehdy, když existuje BPB úlohy LP.

Důkaz (a).

„ $\Rightarrow$ “: Sporem.

Existují dva různé body  $y, z \in M$  tak, že  $x = \frac{y+z}{2}$ . At  $B$  je přípustná báse BPB  $x$ .

Pak  $y_j = z_j = 0$  pro každé  $j \in N$ . Navíc  $A_B$  je regulární dle **definice BPB**. Ale dle této stejné definice platí, že  $y$  a  $z$  jsou BPB s přípustnou bází  $B$ . Ale dle **tvrzení** nemohou mít dva různé BPB stejnou přípustnou bási.  $\Rightarrow y = z$ , což je spor.

„ $\Leftarrow$ “: Sporem.

At  $x$  není BPB. Pak z **charakterisace BPB** plyne, že  $\{a_j \mid j \in J(x)\}$  je lineárně závislá množina.

$\rightarrow$  existují  $d_j \in \mathbb{R}, j \in J(x)$ , ne všechny nulové tak, že

$$\sum_{j \in J(x)} d_j a_j = 0.$$

Definujme  $d_j = 0$  pro každé  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus J(x)$ .

Pak  $Ad = 0$ . Odtud  $A(x \pm \alpha d) = b \pm \underbrace{Ad}_{=0} = b$  pro všechna  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Pro dostatečně malé  $\alpha > 0$  je  $x \pm \alpha d \geq 0$ . Pro takové  $\alpha$  je  $x \pm \alpha d \in M$ . Pak  $x + \alpha d \neq x - \alpha d$  a navíc evidentně platí  $x = \frac{(x+\alpha d) + (x-\alpha d)}{2}$ . To je spor s tvrzením, že máme krajní bod.  $\square$

Důkaz (b). Vynecháme.

## 9.10 Základní věta lineárního programování

- (a) Úloha LP má řešení právě tehdy, když  $M$  je neprázdná a  $\langle x, c \rangle$  je zdola omezená na  $M$ .  
 (b) Má-li LP řešení, pak existuje řešení úlohy LP, které je BPB.

Důkaz (a).

„ $\Rightarrow$ “: Když máme řešení, pak určitě leží v  $M$  a je určitě zdola omezená, protože to je právě to ono řešení.

„ $\Leftarrow$ “: **Weierstrassova věta.**  $\square$

Důkaz (b).

Ať  $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} \langle x, c \rangle$ .

Protože  $M$  je kompaktní a konvexní, tak víme  $\hat{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))$ .

$\operatorname{ext}(M) \dots$  konečná množina, tj.  $\operatorname{ext}(M) = \{e_1, \dots, e_k\}$ .

$$\xrightarrow[\text{obal}]{\text{konvexní}} \hat{x} = \sum_{i=1}^l \lambda_i e_i \text{ pro nějaké } \lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0 \text{ a } \sum \lambda_i = 1.$$

Alespoň jeden krajní bod musí být mezi  $e_i$ . Ať  $e_N \in \operatorname{ext}(M)$  splňuje  $\langle e_N, c \rangle = \min_{i \in \{1, \dots, l\}} \langle e_i, c \rangle$ .

$$\langle \hat{x}, c \rangle = \sum_{i=1}^l \lambda_i \langle e_i, c \rangle \geq \left( \sum_{i=1}^l \lambda_i \right) \langle e_N, c \rangle = \langle e_N, c \rangle \implies e_N \in \operatorname{argmax}_{x \in M} \langle x, c \rangle. \quad \square$$

## 9.11 Příklad na hledání duální úlohy

Mějme úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad x_1 + 2x_2 \\ &\text{za podmíněk} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \dots -x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \\ &\quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Najděte duální úlohu, jestliže  $x_1, x_2 \geq 0$  je přímé omezení.  
 (b) Najděte duální úlohu, jestliže  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  je přímé omezení.

(a)  $L(x_1, x_2, \mu) = x_1 + 2x_2 + \mu(-x_1 - x_2 + 1)$

$$\varphi(\mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} L(x_1, x_2, \mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} (1 - \mu)x_1 + (2 - \mu)x_2 + \mu$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \underbrace{\left[ \inf_{x_1 \in \mathbb{R}_+} (1 - \mu)x_1 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 1 \geq \mu, \\ -\infty & \text{pro } 1 < \mu. \end{cases}} + \underbrace{\left[ \inf_{x_2 \in \mathbb{R}_+} (2 - \mu)x_2 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 2 \geq \mu, \\ -\infty & \text{pro } 2 < \mu. \end{cases}} + \mu \\ &\implies \varphi(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{pro } \mu \in [0, 1], \\ -\infty & \text{pro } \mu \notin [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

A tedy duální úloha je

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} \quad \mu \\ &\text{za podmíněk} \quad \mu \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$$(b) L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = x_1 + 2x_2 + \mu_1(-x_1 - x_2 + 1) + \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2)$$

$$\varphi(\mu) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} (1 - \mu_1 - \mu_2)x_1 + (2 - \mu_1 - \mu_3)x_2 + \mu_1$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \underbrace{\left[ \inf_{x_1 \in \mathbb{R}} (1 - \mu_1 - \mu_2)x_1 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{cases}} + \underbrace{\left[ \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} (2 - \mu_1 - \mu_3)x_2 \right]}_{\begin{cases} 0 & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 \neq 0. \end{cases}} + \mu_1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 1 - \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{cases} \begin{cases} 0 & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0, \\ -\infty & \text{pro } 2 - \mu_1 - \mu_3 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \begin{cases} \mu_1 & \text{pro } D_\varphi = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0\}, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

A tedy duální úloha je

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujte} \quad \mu_1 \\ &\text{za podmínek} \quad \begin{aligned} 1 - \mu_1 - \mu_2 &= 0, \\ 2 - \mu_1 - \mu_3 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

## 9.12 Příklad na hledání duální úlohy

Mějme úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{za podmínek} \quad \begin{aligned} -x_1 - x_2 + 4 &\leq 0, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

(a) Najděte duální úlohu, jestliže  $x_1, x_2 \geq 0$  je přímé omezení.

(b) Najděte duální úlohu, jestliže  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  je přímé omezení.

## 9.13 Tvrzení o množině všech řešení úlohy LP

Množina všech řešení úlohy LP je konvexní polyedrická množina.

## 9.14 Příklad na Simplexovu metodu

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalisujte} \quad -x_1 - 3x_2 \\ &\text{za podmínek} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} z \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]; \text{BPB je } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyměníme  $x_2$  a  $x_4$  v BPB.

$$x_2 = 1 + x_1 - x_4$$

$$\begin{aligned}\rightarrow z &= -x_1 - 3(1 + x_1 - x_4) = -4x_1 + 3x_4 - 3 \\ \rightarrow x_3 &= 6 - 2x_1 - 3(1 + x_1 - x_4) = 3 - 5x_1 + 3x_4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} z \\ x_3 \\ x_2 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ -4 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]; \text{BPB je } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 9.15 Příklad na Simplexovu metodu

$$\begin{aligned}\text{minimalisujte} \quad & 2x_2 - x_4 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{aligned}$$

### 9.16 Příklad na Simplexovu metodu

$$\begin{aligned}\text{minimalisujte} \quad & 4x_3 - 6x_4 \\ \text{za podmínek} \quad & x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{aligned}$$

### 9.17 Tvrzení o vztahu přípustné množiny a hodnoty cílové funkce

Přípustná množina  $M$  úlohy LP je neprázdná právě tehdy, když v bodě minima  $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \in \Omega$  úlohy  $F_1$  tak, že  $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ . V tomto případě je  $\hat{y} = 0$ .

Důkaz.

„ $\Rightarrow$ “: Ať  $\hat{x} \in M$ . Pak  $v = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix}$  leží v  $\Omega$  a  $g(v) = 0$  (tj.  $v$  je řešení úlohy  $(F_1)$  splňující  $g(v) = 0$ ). A to jsme přesně chtěli dokázat.  $\square$

„ $\Leftarrow$ “: Ať  $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$  je řešení úlohy  $(F_1)$ , splňující  $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ . Pak  $\hat{y} = 0$ , a tedy  $b = A\hat{x} + \hat{y} = A\hat{x}$ . A protože  $\hat{x} \geq 0$ , tak  $\hat{x} \in M$ .  $\square$

### 9.18 Příklad dvoufázové Simplexové metody

Je dána úloha

$$\begin{aligned}\text{minimalisujte} \quad & x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 = 1, \\ & x_1 - x_2 = 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Sloupeček pravých stran je větší roven nule, takže můžeme použít dvoufázovou Simplexovu metodu.



1. fáze:

$$\begin{aligned} & \text{minimalisujte} && y_1 + y_2 \\ & \text{za podmínky} && x_1 + y_1 = 1, \\ & && x_1 - x_2 + y_2 = 2, \\ & && x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

## 9.19 Tvrzení o primární a duální úloze

Nechť  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  a  $b \in \mathbb{R}^m$ . Duální úloha k úloze

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalizujte} \quad \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad Ax \geq b, \\ \quad \quad \quad x \geq 0. \end{array} \right\} (P)$$

je

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T y \geq c, \\ \quad \quad \quad y \geq 0. \end{array} \right\} (D)$$

Důkaz.

$$L(x, y) = \langle x, c \rangle + \langle y, b - Ax \rangle = \langle x, c \rangle + \langle y, b \rangle - \underbrace{\langle y, Ax \rangle}_{\langle A^T y, x \rangle} = \langle x, c - A^T y \rangle + \langle y, b \rangle$$

$$\inf_{x \geq 0} L(x, y) = \langle y, b \rangle + \inf_{x \geq 0} \langle x, c - A^T y \rangle = \begin{cases} \langle y, b \rangle & \text{je-li } c - A^T y \geq 0, \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy duální úloha k  $(P)$  je

$$\begin{aligned} & \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ & \text{za podmínek} \quad c - A^T y \geq 0, \rightarrow A^T y \leq c \\ & \quad \quad \quad y \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

## 9.20 Hledání duální úlohy k duální úloze

Mějme

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} \quad A^T y \geq c, \\ \quad \quad \quad y \geq 0. \end{array} \right\} (D)$$

Přepíšeme:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & -\langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \langle y, -b \rangle \\ \text{za podmínky} & (-A^T)y \geq -c, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Duální úloha po tom je:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \langle x, -c \rangle \\ \text{za podmínky} & (A^T)^T x \leq -b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

## 9.21 Věta o silné dualitě pro LP

Úloha  $(P)$  má řešení právě tehdy, když má řešení úloha  $(D)$ . V takovém případě jsou hodnoty obou úloh stejné.

Nechť  $\hat{f} < \infty$  a cílová funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek

- (a) Komponenty  $g_1, \dots, g_k$  zobrazení  $g$  splňují **Slaterovu podmínku** regularity.
- (b) Zobrazení  $g$  je **afinní** a  $\Omega$  je konvexní polyedrická množina.

Potom  $\hat{f} = \hat{\varphi}$ . Je-li navíc  $\hat{f} \in \mathbb{R}$ , pak existuje řešení úlohy  $(D)$ .

Důkaz vynecháme.

## 9.22 Simplexová metoda a řešení duální úlohy

Do úlohy  $(P)$  zavedme doplňkové proměnné  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ . Tím dostaneme úlohu

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax - y \geq b, \\ & x, y \geq 0. \end{array} \right\} (\tilde{P})$$

Je-li výsledná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc|c} \tilde{c}_1 & \cdots & \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \cdots & \tilde{c}_{n+m} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

kde  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{m+n} \geq 0$  a sloupce na levé straně odpovídají postupně proměnným  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ . Pak  $\hat{y} = (\tilde{c}_{n+1}, \dots, \tilde{c}_{m+n})^T$  je řešením úlohy  $(D)$ .

## 9.23 Příklad řešení duální úlohy

Je dána dvojice vzájemně duálních úloh

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{ll} \text{maximalisujte} & \langle y, b \rangle \\ \text{za podmínky} & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

$$\text{kde } A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zaměřme se na primární úlohu. Tedy doplníme doplňkové proměnné dle **předchozí poznámky**.

$$\begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \text{za podmínek} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x_1, \dots, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Simplexová tabulka:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 1     | 2     | 4     | 0     | 0     | 0  |
| $x_3$ | 0     | 4     | 1     | -1    | 0     | 2  |
| $x_1$ | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 1  |
|       | 0     | -15   | 0     | 4     | 1     | -9 |
| $x_3$ | 0     | 4     | 1     | -1    | 0     | 2  |
| $x_1$ | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 1  |

Zafixujeme si sloupec  $x_2$ , protože má v sobě záporný koeficient. Teď vhodně vybrat řádek  $\rightarrow$  vezmeme pravou stranou a podělíme ji koeficientem, tedy  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{1} = 1$ . Vybereme menší podíl.

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $y_1$          | $y_2$ |                     |
|-------|-------|-------|----------------|----------------|-------|---------------------|
|       | 0     | 0     | $\frac{15}{4}$ | $\frac{1}{4}$  | 1     | $-9 + \frac{15}{2}$ |
| $x_2$ | 0     | 1     | $\frac{1}{4}$  | $-\frac{1}{4}$ | 0     | $\frac{1}{2}$       |
| $x_1$ | 1     | 0     | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$  | -1    | $\frac{1}{2}$       |

Protože v levé části prvního řádku není žádný záporný koeficient, algoritmus končí.

Úloha má řešení  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T$ . Tedy řešení původní primární úlohy je  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ . A když dosadíme, tak zjistíme, že toto je řešení i duální úlohy.

## 9.24 Hledání duální úlohy

V  $\mathbb{R}^n$  jsou daný množiny bodů  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  a  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ . Ať  $w \in \mathbb{R}^n$  a  $\lambda \in \mathbb{R}$ . K úloze

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & h(w, \lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek} \quad & \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ & \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Zkonstruuje úlohu duální (přímé omezení je  $w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ ).

$$L(w, \lambda, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i [1 - \langle a_i, w \rangle - \lambda] + \sum_{j=1}^l z_j [1 + \langle b_j, w \rangle + \lambda]$$

$$\inf_{w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}} L(w, \lambda, y, z) = ?$$

Pro fixní  $y \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^l$  je  $(w, \lambda) \mapsto L(w, \lambda, y, z)$  konvexní funkce.

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla_w L(w, \lambda, y, z)}_{= \begin{bmatrix} \partial w_1 L \\ \vdots \\ \partial w_n L \end{bmatrix}} &= w - \sum_{i=1}^k a_i y_i + \sum_{i=1}^l b_i z_i = 0 \\ \implies w &= \sum_{i=1}^k a_i y_i - \sum_{i=1}^l b_i z_i \implies \sum_{i=1}^k y_i = \sum_{i=1}^l z_i \end{aligned}$$

A tedy máme:

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^k a_i y_i - \sum_{i=1}^l b_i z_i, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle \quad (5)$$

$$+ \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i - \sum_{i=1}^k y_i \left\langle a_i, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle \quad (6)$$

$$+ \sum_{i=1}^l z_i \left\langle b_i, \sum_{j=1}^k a_j y_j - \sum_{j=1}^l b_j z_j \right\rangle \quad (7)$$

Což upravíme:

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle a_i, a_j \rangle - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle a_i, b_j \rangle - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k z_i y_j \langle b_i, a_j \rangle + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle b_i, b_j \rangle \right] \quad (8)$$

$$+ \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j \langle a_i, a_j \rangle + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i y_j \langle a_i, b_j \rangle \quad (9)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l z_i y_j \langle b_j, a_j \rangle - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l z_i z_j \langle b_i, b_j \rangle \quad (10)$$

A tedy:

Hledaná duální úloha je:

$$\varphi(y, z) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j \langle a_i, a_j \rangle \quad (11)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle a_i, b_j \rangle \quad (12)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i z_j \langle b_i, b_j \rangle \quad (13)$$

$$+ \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^l z_i \quad (14)$$

maximalisujte  $\varphi(y, z)$

za podmíněk  $\sum_{i=1}^k y_i - \sum_{j=1}^l z_j = 0$

$y, z \geq 0$

## 10 Kvadratické programování

Úlohy kvadratického programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

- (a) cílová funkce  $f$  kvadratická, tj.

$$f(x) = \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + d,$$

kde  $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$  (budeme předpokládat, že  $Q$  je symetrická a  $d = 0$ );

- (b) přípustná množina je konvexní polyedrická množina.

Úloha kvadratického programování není obecně konvexní!

- Pokud ale minimalisujeme kvadratickou funkci  $f$ , ve které je  $Q$  pozitivně semidefinitní matice, pak se jedná o konvexní úlohu.

Dále už budeme uvažovat jen úlohu kvadratického programování ve tvaru

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalisujte} \quad \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad Ax \leq b, \end{array} \right\} (QP)$$

kde  $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  je pozitivně definitní,  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  a  $c \in \mathbb{R}^n$ .

Poznámka.  $\frac{1}{2}$  v zápisu se nám zde zrovna hodí. Samozřejmě lze schovat přímo do matice  $Q$ , proto v původní definici není vidět.

Cílová funkce v  $(QP)$  je ryze konvexní. Úloha tak má nejvýše jedno řešení. KKT podmínky

$$\begin{aligned} Qx + c + A^T \mu &= 0 \\ \langle Ax - b, \mu \rangle &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

jsou nutné a postačující.

### 10.1 Tvrzení o duální úloze kvadratického programování

Duální úloha k úloze  $(QP)$  je

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \quad -\frac{1}{2} \langle By, y \rangle - \langle y, v \rangle - \frac{1}{2} \langle Q^{-1}c, c \rangle \\ \text{za podmínky} \quad y \geq 0, \end{array} \right\} (DQP)$$

kde  $B = AQ^{-1}A^T$  a  $v = AQ^{-1}c + b$ .

Důkaz.

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + \langle y, Ax - b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + \langle A^T y, x \rangle - \langle y, b \rangle \end{aligned}$$

Ať  $y \geq 0$ . Pak funkce  $x \mapsto L(x, y)$  je určitě (ryze) konvexní díky předpokladu na  $Q$ . Tedy  $\hat{x}$  je bodem minima funkce  $x \mapsto L(x, y) \iff \nabla_x L(x, y) = 0$ .

$$\varphi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) = L(\hat{x}, y)$$

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, y) &= Q\hat{x} + c + A^T y \stackrel{!}{=} 0 \\ \text{Tedy: } \hat{x} &= -Q^{-1}(c + A^T y)\end{aligned}$$

Dosadme:

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \frac{1}{2} \langle QQ^{-1}(c + A^T y), Q^{-1}(c + A^T y) \rangle - \langle Q^{-1}(c + A^T y), c + A^T y \rangle - \langle y, b \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [\langle c, Q^{-1}c \rangle + 2 \langle c, Q^{-1}A^T y \rangle + \langle A^T y, Q^{-1}A^T y \rangle] - \langle y, b \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle y, AQ^{-1}A^T y \rangle - \langle y, AQ^{-1}c + b \rangle - \frac{1}{2} \langle c, Q^{-1}c \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle AQ^{-1}A^T y, y \rangle - \langle y, AQ^{-1}c + b \rangle - \frac{1}{2} \langle Q^{-1}c, c \rangle\end{aligned}$$

Což je přesně duální úloha ( $DQP$ ).  $\square$

Poznámka. Úlohy kvadratického programování nejsou vzájemně duální.

## 10.2 Věta o silné dualitě pro kvadratické programování

Úloha ( $QP$ ) má řešení právě tehdy, když ( $DQP$ ) má řešení. Má-li ( $QP$ ) řešení, pak se hodnoty obou úloh rovnají.

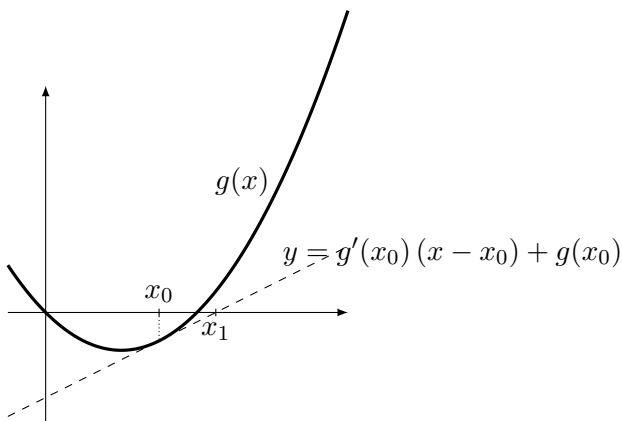
Důkaz vynecháme.

## 11 Numerické metody optimalisace

### 11.1 Newtonova metoda v jednorozměrné optimalisaci

Je dána rovnice  $g(x) = 0$ , kde  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Necht  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Položme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$



- Předpokládejme, že  $g'(x_k) \neq 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$ .
- Pokud  $x_0$  je dostatečně blízko řešení  $\hat{x}$  rovnice  $g(x)$ , pak  $x_k \rightarrow \hat{x}$ .

Je dána funkce  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Hledejme stacionární body funkce  $f$ , tj. řešme rovnici  $f'(x) = 0$ . Z Newtonovy metody pro řešení rovnic plyne, že

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

#### Algoritmus

- Zvolíme  $\varepsilon > 0$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Položíme  $k = 0$ .
- Vypočítáme  $f'(x_k)$  a  $f''(x_k)$ .
- Je-li  $|f'(x_k)| < \varepsilon$ , pak algoritmus končí a  $x_k$  je hledaná aproximace stacionárního bodu. V opačném případě přejdeme na další krok.
- Položíme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

(nutno ověřit, že  $f''(x_k) \neq 0$ ) hodnotu  $k$  zvýšíme o 1 a jdeme na krok (b).

### 11.2 Omezení na minimalizační úlohy

Chceme nalézt alespoň přibližně bod minima (alespoň lokálního) funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Postup:

- Zvolíme  $x_0$  a konstruujeme posloupnost, jejíž členy jsou dány

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

kde  $\alpha_k \geq 0$  je délka  $k$ -tého kroku a  $d_k \in \mathbb{R}^n$  je směr  $k$ -tého kroku.

- Vhodnou volbou délky kroku a směru se snažíme dosáhnout toho, aby  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ .

### 11.3 Nepodmíněná optimalisace - Metoda největšího spádu

V metodě největšího spádu předpokládáme, že  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Volba směru  $d_k$ :**

- Chceme, aby  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ , a proto za směr  $d_k$  budeme volit směr poklesu, tj. prvek z  $\mathcal{D}(f; x_k)$ .
- Konkrétně volme  $d_k = -\nabla f(x_k)$ .
- Jestliže  $\nabla f(x_k) \neq 0$ , pak

$$\langle d_k, \nabla f(x_k) \rangle = \langle -\nabla f(x_k), \nabla f(x_k) \rangle = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0,$$

tj.  $d_k \in \mathcal{D}_0(f; x_k) \subseteq \mathcal{D}(f; x_k)$ .

- Směr  $d_k = -\nabla f(x_k)$  je směr největšího poklesu v bodě  $x_k$ .

**Volba délky kroku  $\alpha_k$ :**

- Buď pevná volba kroku  $\alpha_k = \alpha$  pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$ . Příliš velké  $\alpha$  může zkazit konvergenci.
- Nebo například  $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$ .

Příklad špatně zvoleného  $\alpha$ .

Mějme  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ ,  $\alpha = 11$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Pak  $\nabla f(x) = \frac{1}{2}2x = x$ .

$$x_1 = x_0 + \alpha(-x_0) = -10x_0$$

$$x_2 = x_1 - \alpha x_1 = -10x_1 = (-10)^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_k = (-10)^k x_0 \dots \text{tedy očividně nekonverguje.}$$

**Volba kritéria zastavení:**

- $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ .
- Další možnosti jsou  $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ ,  $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$ , ...
- Možná je i kombinace více kritérií.

**Algoritmus**

1. Zvolme  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Položme  $k = 0$ .
2. Je-li  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ , pak algoritmus končí a  $x_k$  je hledaná aproximace. V opačném případě přejdeme na další krok.
3. Položíme  $d_k = -\nabla f(x_k)$ .
4. Nalezneme  $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$ .
5. Položíme  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$ . Zvýšíme hodnotu  $k$  o 1 a jdeme na krok (b).



## 11.4 Podmíněná optimalisace - Metoda projekce gradientu

Modifikuje metodu největšího spádu.

Předpokládejme  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  a  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná, uzavřená a konvexní.

Nulovost gradientu již není vhodným kritériem pro zastavení.

### Algoritmus

- (a) Zvolme  $x_0 \in C$  a  $\varepsilon > 0$ . Položme  $k = 0$ .
- (b) Vypočteme  $d_k = -\nabla f(x_k)$ .
- (c) Nalezneme  $\alpha_k \in \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$ .
- (d) Položíme  $x_{k+1} = P_C(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ .
- (e) Je-li  $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$ , pak algoritmus končí a  $x_k$  je hledaná aproximace. V opačném případě zvýšíme hodnotu  $k$  o 1 a jdeme na krok (b).

## 11.5 Podmíněná optimalisace - Metoda penalizačních funkcí

Nechť  $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$  a je dána úloha

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimalisujte} & f(x) \\ \text{za podmínky} & g_1(x) \leq 0, \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq 0. \end{array} \right\} (U)$$

- Chceme nahradit  $(U)$  úlohami nepodmíněné optimalisace.
- $p(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^2 \dots$  penalizační funkce.

Penalizační funkce zařídí, že čím dál budeme od přípustné množiny  $C$ , tím více budeme takové body penalizovat.

### Algoritmus

- (a) Zvolme  $\varepsilon > 0, c_0 > 0$  a  $\alpha > 1$ . Položme  $k = 0$ .
- (b) Nalezněme bod minima  $x_k$  funkce  $f(x) + c_k p(x)$  na  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) Je-li  $c_k p(x) < \varepsilon$ , pak algoritmus končí a  $x_k$  je hledaná aproximace. V opačném případě zvýšíme hodnotu  $k$  o 1 a jdeme na krok (b).

## 12 Úvod do strategických her

### 12.1 Příklad Vězňovo dilemma

Hra je daná tabulkou:

|     | $P$      | $Z$      |
|-----|----------|----------|
| $P$ | $-5; -5$ | $0; -10$ |
| $Z$ | $-10; 0$ | $-1; -1$ |

$$N = \{1, 2\}.$$

$$S_1 = S_2 = \{P, Z\}.$$

Funkce užitku:

$$u_1(P, P) = -5 = u_2(P, P)$$

$$u_1(P, Z) = 0 = u_2(Z, P)$$

$$u_1(Z, P) = -10 = u_2(P, Z)$$

$$u_1(Z, Z) = -1 = u_2(Z, Z)$$

### 12.2 Příklad Panna nebo orel

Hra je daná tabulkou:

|     | $P$       | $O$       |
|-----|-----------|-----------|
| $P$ | $10; -10$ | $-10; 10$ |
| $O$ | $-10; 10$ | $10; -10$ |

První hráč dostane body, pokud se budou oba hráči shodovat. Druhý hráč dostane body, pokud budou odlišné.

### 12.3 Příklad Manželský spor

Hra je daná tabulkou:

|     | $D$    | $H$      |
|-----|--------|----------|
| $D$ | $2; 3$ | $-1; -1$ |
| $H$ | $0; 0$ | $3; 2$   |

Hokej a Divadlo. Čísla jsou radosti.

### 12.4 Příklad Kámen-nůžky-papír

Hra je daná tabulkou:

|     | $K$     | $N$     | $P$     |
|-----|---------|---------|---------|
| $K$ | $0; 0$  | $1; -1$ | $-1; 1$ |
| $N$ | $-1; 1$ | $0; 0$  | $1; -1$ |
| $P$ | $1; -1$ | $-1; 1$ | $0; 0$  |

## 12.5 Nashovo equilibrium

Nechť  $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$  je strategická hra. Strategický profil  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) \in S$  se nazve Nashovo equilibrium hry  $G$ , jestliže pro každé  $i \in N$  a každé  $\sigma_i \in S_i$  je

$$u_i(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) \geq u_i(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \dots, \hat{\sigma}_n)$$

Nashovo equilibrium nám říká, že hráč, pouze změnou své strategie, si nemůže polepšit. Nevede k „maximalisaci zisku“, ale k rovnováze.

Zároveň N.e. nemusí být určeno jednoznačně, dokonce ani nemusí existovat.

Speciálně pokud  $N = \{1, 2\}$ .

- $u_1(\sigma_1, \hat{\sigma}_2) \leq u_1(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_1 \in S_1,$
- $u_2(\hat{\sigma}_1, \sigma_2) \leq u_2(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_2 \in S_2.$

## 12.6 Věžňovo dilemma a Nashovo equilibrium

|     | $P$      | $Z$      |
|-----|----------|----------|
| $P$ | $-5; -5$ | $0; -10$ |
| $Z$ | $-10; 0$ | $-1; -1$ |

(a) Strategický profil  $(P, P)$ :

$$u_1(Z, P) \leq u_1(P, P) \checkmark$$

$$u_1(P, P) \leq u_1(P, P) \checkmark$$

$$u_2(P, Z) \leq u_2(P, P) \checkmark$$

$$u_2(P, P) \leq u_2(P, P) \checkmark$$

$\implies (P, P)$  je N. e.

(b) Strategický profil  $(P, Z)$ : Zde není N. e., neboť

$$u_2(P, Z) < u_2(P, P).$$

(c) Strategický profil  $(P, Z)$ : Zde není N. e., neboť

$$u_1(Z, P) < u_1(P, P).$$

(d) Strategický profil  $(Z, Z)$ : Zde není N. e., neboť

$$u_1(Z, Z) < u_1(P, Z).$$

## 12.7 Panna nebo orel a Nashovo equilibrium

|     | $P$       | $O$       |
|-----|-----------|-----------|
| $P$ | $10; -10$ | $-10; 10$ |
| $O$ | $-10; 10$ | $10; -10$ |

Zde N.e. neexistuje.

## 12.8 Manželský spor a Nashovo equilibrium

|     | $D$    | $H$      |
|-----|--------|----------|
| $D$ | $2; 3$ | $-1; -1$ |
| $H$ | $0; 0$ | $3; 2$   |

Strategické profily  $(D, D)$  a  $(H, H)$  jsou jediná N.e. v této hře.

## 12.9 Tvrzení o Nashově equilibriu

Nechť  $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$  je strategická hra a  $\hat{\sigma} \in S$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a)  $\hat{\sigma}$  je Nashovo equilibrium.

(b) Pro každé  $i \in N$  je

$$\hat{\sigma}_i \in \operatorname{argmax}_{\sigma_i \in S_i} u_i(\hat{\sigma}_i, \dots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \dots, \hat{\sigma}_n).$$

Důkaz plyne přímo z definice Nashova equilibria.

## 12.10 Příklad Cournotův model oligopolu a Nashovo equilibrium

Ať

- $N = \{1, 2\}$  (tj. uvažujeme model duopolu) a  $S_1 = S_2 = [0, \infty)$ .
- $C_1(q_1) = cq_1$  a  $C_2(q_2) = cq_2$ , kde  $c > 0$ .
- $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$ , kde  $a > c$  a  $b > 0$ .
- $u_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1$  a  
 $u_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2$ .

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0 \dots - bq_1 + a - b(q_1 + q_2) - c = 0 \rightarrow -2bq_1 = -a + c + bq_2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0 \dots - bq_2 + a - b(q_1 + q_2) - c = 0 \rightarrow -2bq_2 = -a + c + bq_1 \quad (16)$$

Dosadíme do (5):

$$\begin{aligned} -2bq_1 &= -a + c + \frac{a-c}{2} - \frac{bq_1}{2} \implies \left(\frac{b}{2} - 2b\right)q_1 = -\frac{a-c}{2} \\ \implies q_1 &= \frac{a-c}{3b} > 0 \end{aligned}$$

Z (6):

$$q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{3b} \right) = \frac{3(a-c) - (a-c)}{6b} = \frac{a-c}{3b} > 0$$

Díky **tvrzení o Nashově equilibriu** jsme našli dvojici, která je Nashovým equilibriem:  $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$ .

### 12.11 Hra dvou hráčů s nulovým součtem

Hra dvou hráčů s nulovým součtem je strategická hra

$$G = (\{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$$

taková, že pro každé  $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_1 \times S_2$  je

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) + u_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0.$$

- Hráči mají zcela opačné zájmy.
- Stačí zadat jen jednu funkci užitku, neboť  $u_1 = -u_2$ .
- Je zbytečné uvádět množinu  $\{1, 2\}$  všech hráčů.
- Zjednodušené značení hry dvou hráčů:

$$G = (S_1, S_2, u), \text{ kde } u = u_1.$$

### 12.12 Definice ceny hry

Ať  $G = (S_1, S_2, u)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

(a) Dolní cena hry  $G$  je číslo

$$\underline{v} := \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau).$$

(b) Horní cena hry  $G$  je číslo

$$\bar{v} := \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau).$$

(c) Řekněme, že  $v \in \mathbb{R}$  je **cena hry**  $G$ , jestliže  $v = \underline{v} = \bar{v}$ .

Pozorování.

- První hráč nemůže „získat“ méně, než  $\underline{v}$ .
- Druhý hráč nemůže „prohrát“ více, než  $\bar{v}$ .
- Platí  $\underline{v} \leq \bar{v}$ , neboť:

$$\inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) \leq u(\sigma, \tilde{\tau}) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tilde{\tau} \in S_2$$

Aplikujme supremum:

$$\sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tilde{\tau}) \quad \forall \tilde{\tau} \in S_2$$

Levá strana je dolní odhad pravé. A infimum pravé je největší dolní mez.

$$\underbrace{\sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau)}_{\underline{v}} \leq \underbrace{\inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau)}_{\bar{v}}$$

### 12.13 Definice optimální strategie

Ať  $G = (S_1, S_2, u)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem a  $v$  je její cena. Řekněme, že

(a)  $\hat{\sigma} \in S_1$  je optimální strategie **prvního** hráče, jestliže

$$v = \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau),$$

(b)  $\hat{\tau} \in S_2$  je optimální strategie **druhého** hráče, jestliže

$$v = \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}).$$

### 12.14 Příklad na optimální strategii

Hra  $G$  je dána tabulkou:

|     | $C$   | $D$   |
|-----|-------|-------|
| $A$ | 1; -1 | 2; -2 |
| $B$ | 3; -3 | 4; -4 |

A protože  $G$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem, stačí zadat tabulku:

|     | $C$ | $D$ |
|-----|-----|-----|
| $A$ | 1   | 2   |
| $B$ | 3   | 4   |

Tedy  $G = (S_1, S_2, u)$ , kde  $S_1 = \{A, B\}$ ,  $S_2 = \{C, D\}$  a

$$u(A, C) = 1,$$

$$u(A, D) = 2,$$

$$u(B, C) = 3,$$

$$u(B, D) = 4.$$

Určeme dolní cenu hry  $G$ :

$$\inf_{\tau \in S_2} u(A, \tau) = 1,$$

$$\inf_{\tau \in S_2} u(B, \tau) = 3.$$

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = 3$$

Obdobně horní cena hry  $G$ :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) = 3$$

A proto je cena hry  $v = 3$ . Optimální strategie prvního hráče je pouze  $B$ . Optimální strategie druhého hráče je pouze  $C$ . Shodou náhod je  $(B, C)$  **Nashovým equilibriem**.

### 12.15 Optimální strategie Panna nebo orel

$G$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem, a proto stačí zadat tabulku:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
|     | $P$ | $O$ |
| $P$ | 10  | -10 |
| $O$ | -10 | 10  |

Určeme dolní cenu hry  $G$ :

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = -10$$

Obdobně horní cena hry  $G$ :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) = 10$$

Optimální strategie pro prvního i druhého hráče neexistuje, protože horní a dolní cena hry jsou rozdílné.

### 12.16 Optimální strategie pouze pro jednoho hráče

Uvažme hru  $G = (S_1, S_2, u)$  dvou hráčů s nulovým součtem, kde  $S_1 = S_2 = (0, 1)$  a  $u(\sigma, \tau) = \sigma\tau$ .

Určeme dolní cenu hry  $G$ :

$$\underline{v} = \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} \sigma\tau = \sup_{\sigma \in S_1} 0 = 0$$

Horní cena hry  $G$ :

$$\bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} \sigma\tau = \inf_{\tau \in S_2} \tau = 0$$

A proto je cena hry  $v = 0$ . Optimální strategie prvního hráče je každá strategie z  $S_1$ . Optimální strategie druhého hráče neexistuje.

### 12.17 Tvrzení o existenci optimální strategie

Ať  $G = (S_1, S_2, u)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem taková, že  $S_1$  a  $S_2$  jsou konečné. Jestliže existuje cena hry  $G$ , pak nutně existuje optimální strategie prvního a také druhého hráče.

Důkaz.

Díky předpokladu, že  $S_1$  a  $S_2$  jsou konečné množiny, můžeme při výpočtech dolní, respektive horní, ceny hry nahradit sup za max, respektive inf za min. A protože budeme hledat max, respektive min, na konečné množině strategií, pak nutně musí max, respektive min, existovat.

A to tedy budou optimální strategie.  $\square$

### 12.18 Sedlový bod typu maxmin

Nechť  $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekněme, že  $(\hat{x}, \hat{y}) \in M \times N$  je **sedlový bod** funkce  $f$ , jestliže pro každé  $x \in M$  a každé  $y \in N$  je

$$f(x, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y).$$

## 12.19 Vztah Nashova equilibria a sedlového bodu

Ať  $G = (S_1, S_2, u)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem a  $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$ . Potom  $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je **Nashovo equilibrium** hry  $G$  právě tehdy, když  $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je **sedlový bod** funkce  $u$ .

Důkaz.

$(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je N. e., tj.

$$\begin{aligned} u(\sigma, \hat{\tau}) &\leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \quad \forall \sigma \in S_1 \\ -u(\hat{\sigma}, \tau) &\leq -u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \quad \forall \tau \in S_2 \\ &\Updownarrow \\ u(\sigma, \hat{\tau}) &\leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \tau \in S_2 \end{aligned}$$

Což je přesně **sedlový bod** funkce  $u$ .  $\square$

## 12.20 Věta o Nashově equilibriu a optimálních strategiích

Nechť  $G = (S_1, S_2, u)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

- (a) Je-li  $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$  **Nashovo equilibrium** hry  $G$ , pak  $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je cena hry  $G$ ,  $\hat{\sigma}$  je **optimální strategie** prvního hráče a  $\hat{\tau}$  je **optimální strategie** druhého hráče.
- (b) Jestliže  $v$  je cena hry  $G$ ,  $\hat{\sigma}$  je **optimální strategie** prvního hráče a  $\hat{\tau}$  je **optimální strategie** druhého hráče, pak  $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  a  $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je **Nashovo equilibrium**.

Důkaz (a).

$(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  je N. e.  $\implies \underbrace{u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tau \in S_2}_{(*)} \dots$  N. e. je **sedlový bod** funkce  $u$ .

$$(*) \implies \bar{v} = \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau) \leq \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau) = \underline{v}$$

Tedy  $\bar{v} \leq \underline{v}$ . Navíc již víme, že  $\underline{v} \leq \bar{v}$ . Proto  $\underline{v} = \bar{v}$ .

Odtud  $v = \underline{v} = \bar{v} = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ ,  $\hat{\sigma}$  je **optimální strategie** 1. hráče a  $\hat{\tau}$  je **optimální strategie** 2. hráče.  $\square$

Důkaz (b).

Z předpokladu plyne:

$$\sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau}) = v = \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau)$$

Proto:

$$u(\sigma, \hat{\tau}) \leq v \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \tau \in S_2$$

A z toho nutně plyne  $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$  když dosadíme  $\sigma = \hat{\sigma}$  a  $\tau = \hat{\tau}$ .

Tedy platí

$$u(\sigma, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \leq u(\hat{\sigma}, \tau) \quad \forall \sigma \in S_1, \forall \tau \in S_2 \implies (\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \text{ je N. e.} \quad \square$$



## 13 Smíšené strategie

### 13.1 Definice konečné hry

Nechť  $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$  je strategická hra. Řekněme, že  $G$  je konečná, jestliže pro každé  $i \in N$  je  $S_i$  konečná množina.

### 13.2 Definice smíšeného rozšíření

Nechť  $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$  je konečná strategická hra  $N = \{1, \dots, n\}$  a pro každé  $i \in N$  je  $S_i = \{\sigma_1^i, \dots, \sigma_{m_i}^i\}$ . Smíšené rozšíření  $G$  je strategická hra  $\bar{G} = (N, (\Delta S_i)_{i=1}^n, (U_i)_{i=1}^n)$ , kde pro každé  $i \in N$  je

- $\Delta S_i = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{m_i} \mid \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1 \right\}$  množina všech smíšených strategií (loterií) nad  $S_i$ ,
- $U_i : \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n \rightarrow \mathbb{R}$  je dána předpisem

$$U_i(p^1, \dots, p^n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} u_i(\sigma_{j_1}^1, \dots, \sigma_{j_n}^n) p_{j_1}^1 \dots p_{j_n}^n.$$

Pozorování.

- Prvek  $\sigma_k^i$  ztotožňujeme s prvkem  $\mathbb{R}_+^{m_i}$ , který má na  $k$ -té pozici jedničku a všude jinde nuly.
- Prvky z  $\Delta S_i$ , které mají na jedné pozici jedničku a na ostatních nulu, nazýváme **čisté strategie**.

### 13.3 Příklad Panna nebo orel

Hra je daná tabulkou:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
|     | $P$ | $O$ |
| $P$ | 10  | -10 |
| $O$ | -10 | 10  |

$$\begin{aligned} u_1(P, P) &= -u_2(P, P) = 10 \\ u_1(P, O) &= -u_2(P, O) = -10 \\ u_1(O, P) &= -u_2(O, P) = 10 \\ u_1(O, O) &= -u_2(O, O) = -10 \\ \sigma_1 &= \tau_1 = P, \sigma_2 = \tau_2 = O \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 = \{P, O\}$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

$$U_1(p, q) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 u_1(\sigma_i, \tau_j) p_i q_j = 10p_1q_1 + (-10)p_2q_1 + (-10)p_2q_2 + 10p_1q_2$$

Zřejmě  $U_2(p, q) = -U_1(p, q)$ .  $\implies \bar{G} = (\Delta S_1, \Delta S_2, U)$ , kde  $U = U_1$ , tedy jedná se o hru dvou hráčů s nulovým součtem.

Najdeme optimální strategie.

Položme  $p_1 = x$ ,  $q_1 = y$ . Pak  $x, y \in [0, 1]$ ,  $p_2 = 1 - x$ ,  $q_2 = 1 - y$ .

$$\tilde{U}(x, y) = 10xy - 10x(1-y) - 10(1-x)y + 10(1-x)(1-y) = 40xy - 20x - 20y + 10 = 10(4xy - 2x - 2y + 1)$$

Místo  $\bar{G}$  uvažme hru  $\Gamma = ([0, 1], [0, 1], \tilde{U})$ .

Hledejme Nashovo equilibrium hry  $\Gamma$ .

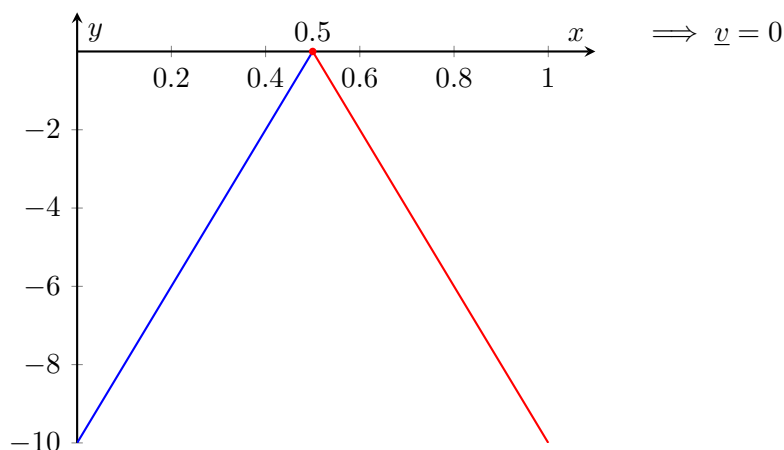
Použijeme **definici ceny hry**:

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} \tilde{U}(x, y)$$

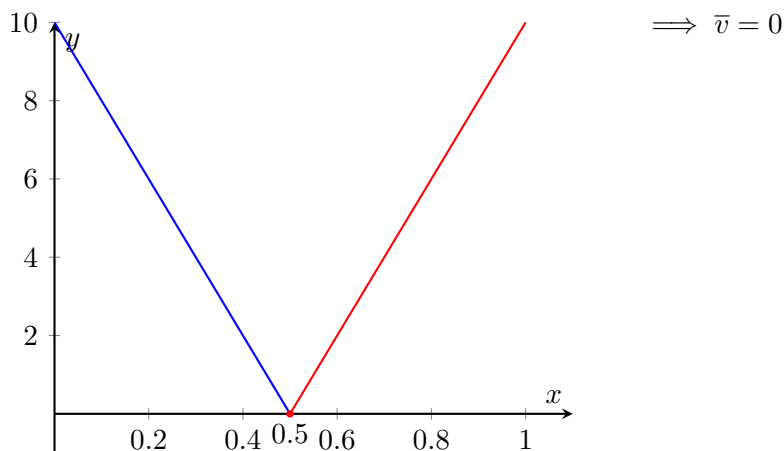
$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} \tilde{U}(x, y)$$

Spočtěme

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0,1]} \tilde{U}(x, y) &= \min_{y \in [0,1]} 10(4xy - 2x - 2y + 1) \\ &= 10 \min_{y \in [0,1]} (4x - 2)y - 2x + 1 = \begin{cases} 10(-2x + 1) & x \geq \frac{1}{2} \\ 10(2x - 1) & x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} \tilde{U}(x, y) &= \max_{x \in [0,1]} 10(4xy - 2x - 2y + 1) \\ &= 10 \max_{x \in [0,1]} (4y - 2)x - 2y + 1 = \begin{cases} 10(2y - 1) & y \geq \frac{1}{2} \\ 10(-2y + 1) & y < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Tedy  $\underline{v} = \bar{v} = v = 0$ . Z grafu vyčteme, že optimální strategie 1. hráče je  $x = \frac{1}{2}$  a optimální strategie 2. hráče je  $y = \frac{1}{2}$  pro hru  $\Gamma$ .

**Nashovo equilibrium** hry  $\bar{G} = \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

### 13.4 Nashova věta

Smíšené rozšíření konečné strategické hry má nejméně jedno Nashovo equilibrium.

Důkaz vynecháme.

## 14 Maticové hry

Maticová hra je **konečná** hra dvou hráčů s nulovým součtem.

Ať  $G = (S_1, S_2, u)$  je maticová hra, kde  $S_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ,  $S_2 = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  a  $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Jednoznačná korespondence mezi  $u$  a maticí  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , kde  $a_{ij} = u(\sigma_i, \tau_j)$ .
- $A \dots$  matice hry (výplatní matice, matice užitku, ...)
- **Smíšené rozšíření** hry  $G$  je hra  $\Gamma(A) = (X, Y, U)$ , kde
  - $X = \{x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$
  - $Y = \{y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$
  - $U : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  je dána předpisem

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m u(\sigma_i, \tau_j) x_i y_j = x^T A y = \langle A y, x \rangle.$$

Značení a konvence:

- $X, Y$  jsou neprázdné konvexní kompaktní množiny a  $U$  je spojitá funkce na  $X \times Y$ .
- Smíšené rozšíření maticové hry je plně určeno maticí  $A$ , neboť:
  - počet řádků matice  $A$  určuje  $X$ ,
  - počet sloupců matice  $A$  určuje  $Y$ ,
  - funkce  $U$  je dána maticí  $A$ .
- $\Gamma(A)$  je hra dvou hráčů s nulovým součtem.
- $\mathcal{O}_1(A) \dots$  množina všech optimálních strategií 1. hráče ve hře  $\Gamma(A)$ .
- $\mathcal{O}_2(A) \dots$  množina všech optimálních strategií 2. hráče ve hře  $\Gamma(A)$ .
- $\underline{V}(x) := \inf_{y \in Y} U(x, y) = \min_{y \in Y} \langle A y, x \rangle$ .
- $\overline{V}(y) := \sup_{x \in X} U(x, y) = \max_{x \in X} \langle A y, x \rangle$ .

### 14.1 Věta o minimaxu

Cena hry  $\Gamma(A)$  existuje a oba hráči mají alespoň jednu optimální strategii.

Důkaz.

Dle **Nashovy věty** existuje **Nashovo equilibrium**  $(\hat{x}, \hat{y})$  hry  $\Gamma(A)$ . Tudíž ze **souvislosti Nashova equilibria a optimální strategie** platí  $\hat{x} \in \mathcal{O}_1(A)$ ,  $\hat{y} \in \mathcal{O}_2(A)$ ,  $v = U(\hat{x}, \hat{y})$ .  $\square$

## 14.2 Lemma o omezení na standardní bási

Značme

- vektory standardní báse v  $\mathbb{R}^m$  symboly  $e_1, \dots, e_m$ ;
- vektory standardní báse v  $\mathbb{R}^n$  symboly  $f_1, \dots, f_n$ .

Pak

$$\underline{V}(x) = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \langle Af_j, x \rangle,$$
$$\overline{V}(x) = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle Ay, e_i \rangle$$

Důkaz.

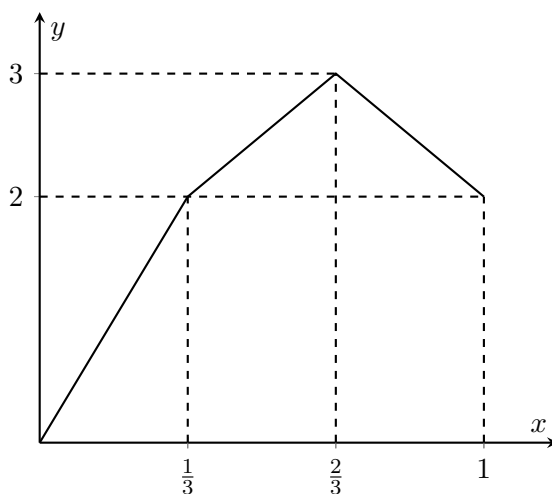
$$\underline{V}(x) = \min_{y \in Y} \langle Ay, x \rangle, \quad Y = \text{conv}(\{f_1, \dots, f_n\}), \quad \text{ext } Y = (\{f_1, \dots, f_n\}).$$

Ať  $x \in X$  je dáno. Pak  $y \in Y \mapsto \langle Ay, x \rangle$  je lineární, a proto nějaký krajní bod je bodem minima.

Obdobně  $\overline{V}(x)$ .  $\square$

## 14.3 Grafické řešení hry $\Gamma(A)$ s maticí $2 \times n$

Je dána hra  $\Gamma(A)$ , kde  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ .



## 14.4 Tvrzení o kladnosti komponent matice $A$

Nechť  $E \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  je matice samých jedniček (tj.  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ ),  $v \in \mathbb{R}$  je cena hry  $\Gamma(A)$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Potom  $\mathcal{O}_1(A) = \mathcal{O}_1(A + cE)$ ,  $\mathcal{O}_2(A) = \mathcal{O}_2(A + cE)$  a cena hry  $\Gamma(A + cE)$  je  $v + c$ .

Důkaz.

Vezměme si

$$\begin{aligned} \hat{x} \in \mathcal{O}_1(A) \text{ a } \hat{y} \in \mathcal{O}_2(A) \\ \Updownarrow \\ \langle A\hat{y}, x \rangle \leq \langle A\hat{y}, \hat{x} \rangle \leq \langle Ay, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y \end{aligned}$$

Tedy  $(\hat{x}, \hat{y})$  je **sedlový bod**, kde  $f$  z definice je funkce úžitku, která je dána skalárním součinem.

$$\begin{aligned} \Updownarrow \\ \langle A\hat{y}, x \rangle + c \leq \langle A\hat{y}, \hat{x} \rangle + c \leq \langle Ay, \hat{x} \rangle + c \quad \forall x \in X \forall y \in Y \\ \Updownarrow \langle Ey, x \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, x \right\rangle = 1 \quad \forall x \in X \forall y \in Y \\ \langle A\hat{y}, x \rangle + c \langle Ey, x \rangle \leq \langle A\hat{y}, \hat{x} \rangle + c \langle Ey, \hat{x} \rangle \leq \langle Ay, \hat{x} \rangle + c \langle Ey, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y \\ \Updownarrow \text{linearita} \\ \langle (A + cE)\hat{y}, x \rangle \leq \langle (A + cE)\hat{y}, \hat{x} \rangle \leq \langle (A + cE)y, \hat{x} \rangle \quad \forall x \in X \forall y \in Y \end{aligned}$$

Což je nutně ekvivalentní s

$$\hat{x} \in \mathcal{O}_1(A + cE), \hat{y} \in \mathcal{O}_2(A + cE).$$

Cena hry  $\Gamma(A + cE)$  je

$$\langle (A + cE)\hat{y}, \hat{x} \rangle = \underbrace{\langle A\hat{y}, \hat{x} \rangle}_{=v} + c \underbrace{\langle Ey, \hat{x} \rangle}_{=1} = v + c. \quad \square$$

## 14.5 Souvislost maticové hry a lineárního programování

Množina  $\mathcal{O}_1(A)$  je množina všech řešení úlohy

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximalisujte} \\ \text{za podmínky} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \langle Af_j, x \rangle \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ x \geq 0. \end{array} \right\} \right\} (U1)$$

Množina  $\mathcal{O}_2(A)$  je množina všech řešení úlohy

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimalisujte} \\ \text{za podmínky} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \langle Ay, e_i \rangle \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1, \\ y \geq 0. \end{array} \right\} \right\} (U2)$$

Takové úlohy ale můžeme přepsat (například přepíšme  $U1$ ):

$$\begin{aligned} & \text{maximalisujte} && w \\ & \text{za podmínky} && \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \geq w, \\ & && \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ & && x \geq 0. \end{aligned}$$

Což ale stále jde přepsat:

$$\begin{aligned} & \text{maximalisujte} && w \\ & \text{za podmínky} && \langle Af_j, x \rangle \geq w \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & && \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ & && x \geq 0. \end{aligned}$$

Můžeme uvážit jen  $w > 0$ , neboť  $A$  má všechny komponenty kladné (tj.  $\langle Af_j, x \rangle > 0 \quad \forall j$ ).

$$\begin{aligned} & \text{minimalisujte} && \frac{1}{w} \\ & \text{za podmínky} && \left\langle Af_j, \frac{x}{w} \right\rangle \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & && \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{w} = \frac{1}{w}, \\ & && \frac{x}{w} \geq 0, && w \geq 0. \end{aligned}$$

Označme si  $\mathbb{1}_k = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$ . Také uvažme substituci  $\xi = \frac{x}{w}$ .

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{w} = \frac{1}{w} = \left\langle \frac{x}{w}, \frac{1}{w} \right\rangle$$

Tudíž konečně

$$\begin{aligned} & \text{minimalisujte} && \langle \xi, \mathbb{1}_k \rangle \\ & \text{za podmínky} && \langle Af_j, \xi \rangle \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & && \xi \geq 0. \end{aligned}$$

což je krásná úloha lineárního programování.

Můžeme ještě přepsat na maticový zápis

$$\left. \begin{aligned} & \text{minimalisujte} && \langle \xi, \mathbb{1}_k \rangle \\ & \text{za podmínky} && A^T \xi \geq \mathbb{1}_n, \\ & && \xi \geq 0. \end{aligned} \right\} (P)$$

Stejným postupem získáme i přepis  $U2$ .

$$\left. \begin{aligned} & \text{maximalisujte} && \langle \eta, \mathbb{1}_k \rangle \\ & \text{za podmínky} && A\eta \leq \mathbb{1}_m, \\ & && \eta \geq 0. \end{aligned} \right\} (D)$$

Pozorování. Úlohy jsou vzájemně duální.

## 14.6 Příklad na vztah maticové hry a LP

Je dána hra  $\Gamma(A)$  s maticí hry

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jaká je optimální strategie 1. a optimální strategie 2. hráče?

Matice  $A$  už má všechny komponenty kladné, tudíž nemusíme přičítat nějakou konstantu  $c$ .

minimalisujte  $\xi_1 + \xi_2$

$$\text{za podmínky} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi \geq 0.$$

maximalisujte  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$

$$\text{za podmínky} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\eta \geq 0.$$

Vybereme si jednu z těchto úloh, ideálně tu jednodušší. Tou bude druhá, tedy maximalizační, úloha.

$$\begin{array}{c|cccccc} & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \\ \hline & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \eta_4 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ \eta_5 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \\ \hline & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline \eta_1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \eta_5 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \\ \hline & 0 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{2}{30} & \frac{1}{3} - \frac{4}{30} & \frac{2}{10} & \frac{1}{3} + \frac{2}{30} \\ \hline \eta_1 & 1 & 0 & x & x & x & \frac{1}{3} - \frac{1}{30} \\ \eta_2 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}$$

A tedy:  $\eta_1 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ ,  $\eta_2 = \frac{1}{10}$ ,  $\eta_3 = 0$ .

$$\xi_1 = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \xi_2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## 15 Řešená vzorová písemka

### 15.1 Konvexní funkce

Je dána funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} + x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^4,$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je parametr.

- (a) Pro jaké hodnoty parametru  $\alpha$  je  $f$  konvexní?  
(b) Ukažte, že pro  $\alpha = 0$  je množina

$$M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

konvexní.

(a) Určíme definitnost Hessiánu funkce. Pokud bude pozitivně (semi)definitní, funkce bude (ne)ryze konvexní.

$$f'(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2\alpha x_2, -2\alpha x_1 + 4x_2^3, e^{x_3})$$
$$f''(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{bmatrix}$$

Použijme Sylvesterova kritéria k určení definitnosti.

$$|2| = 2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 12x_2^2 \end{vmatrix} = 24x_2^2 - 4\alpha^2 \geq 0 \iff 6x_2^2 \geq \alpha^2 \dots \text{což lze zajistit jen tehdy, když } \alpha = 0, \text{ protože}$$

nemůžeme omezit hodnoty  $x_2$ .

A proto funkce  $f$  bude konvexní právě tehdy, když  $\alpha = 0$ .

(b) Z předchozího bodu víme, že funkce  $f$  je konvexní právě tehdy, když  $\alpha = 0$ .

Podmínka  $f(x_1, x_2, x_3) \leq 1$  je pouhá dolní úrovněová množina. A ta je určitě konvexní, protože je původní funkce  $f$  konvexní za těchto podmínek.

Zbylé podmínky  $x_1 \geq 0$  a  $x_2 \geq 0$  jsou rozhodně konvexní.

A protože průnik zachovává konvexitu, tak průnik těchto 3 podmínek je stále konvexní. Množina  $M$  je tedy konvexní.

### 15.2 Metoda nejmenších čtverců

Nechť

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nalezněte všechny body minima funkce  $f(x) = \|Ax - b\|^2$  na  $\mathbb{R}^2$ .

Pokusíme se použít  $(A^T A)^{-1} A^T A x = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 16 = 9 > 0 \dots \text{existuje inverze.}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

### 15.3 KKT podmínky

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte} \quad & -2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_2 \leq 0, \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 8. \end{aligned}$$

(a) Napište KKT podmínky pro tuto úlohu.

(b) Ověřte, že KKT podmínky jsou splněny v bodě  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

(c) Využitím KKT podmínek zdůvodněte, proč  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  je řešení zadané úlohy.

(a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -2x_1 + x_2 \\ g_1(x_1, x_2) &= x_1 - x_2 \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= (-2, 1) \\ \nabla g_1(x_1, x_2) &= (1, -1) \\ \nabla g_2(x_1, x_2) &= (2x_1, 2x_2) \end{aligned}$$

KKT podmínky jsou:

$$\begin{aligned} -2 + \mu_1 + \mu_2 \cdot 2x_1 &= 0 \\ 1 - \mu_1 + \mu_2 \cdot 2x_2 &= 0 \\ \mu_1(x_1 - x_2) &= 0 \\ \mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 8) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Dosadíme do KKT podmínek a ověříme, že všechny podmínky jsou splněny.

$$\begin{aligned} -2 + \mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \quad (\text{I}) \\ 1 - \mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \quad (\text{II}) \\ \mu_1(0) &= 0 \quad \checkmark \\ \mu_2(0) &= 0 \quad \checkmark \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Po odečtení (I)-(II) nám vyjde  $\mu_1 = \frac{3}{2}$  a  $\mu_2 = \frac{1}{8}$ , což je v souladu s podmínkami.

(c) Afinity podmínka regularity není splněna, ověříme Slaterovu.

$g_1$  je afinity  $\implies$  konvexní funkce. U  $g_2$  musíme ověřit definitnost Hessiánu.

$$\nabla^2 g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matice je symetrická, můžeme tedy ověřovat definitnost. Využijeme Sylvesterova pravidla.

$|2| = 2 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ .  $g_2$  je (ryze) konvexní. Když se nám podaří nalézt  $x \in \Omega$  takové, že  $g_i(x) < 0$ , pak bude Slaterova podmínka splněna. Zvolme  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , pak očividně  $g_i(x) < 0$ , Slaterova podmínka regularity je splněna. Dále  $f(x_1, x_2)$  je afinity, tedy konvexní. Platí nutné i postačující podmínky. Postačující KKT podmínky nám zaručují, že když bod  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  je KKT bodem, pak je bodem minima funkce  $f$ .

## 15.4 Smíšené rozšíření maticové hry

Nechť  $\Gamma(A)$  je smíšené rozšíření maticové hry s maticí hry

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocí úlohy lineárního programování nalezněte cenu hry  $\Gamma(A)$  a optimální strategii prvního hráče.