

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Optimalizace a teorie her

Jakub Adamec
Praha, 2025

<https://github.com/kned11k/A8B010GT>



Obsah

	Strana
1 První týden	2
1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima	2
1.2 Hledání přípustných množin	2
1.3 Hledání přípustných množin	2
1.4 Maximalisační úloha	3
1.5 Minimalisační úloha	3
1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami	4
1.7 Uzavřená úsečka	6
1.8 Je nadrovina konvexní?	6
1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?	6
1.10 Je uzavřená koule konvexní?	6
1.11 Je okolí konvexní?	6
1.12 Je průnik množin konvexní?	7
1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu	7
1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní	7
1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní	8
1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní	8
1.17 Určení definitnosti matic	9
1.18 Existence matice	10
2 Druhý týden	12
2.1 Věta o nejlepší aproximaci	12
2.2 Projekce bodu a variační nerovnost	12
2.3 Koule?	13
2.4 Věta o ortogonálním rozkladu	13
3 Třetí týden	15
3.1 Metoda nejmenších čtverců	15
3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců	15
3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců	16
3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny	16
3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou	17
3.6 Lemma neprázdné uzavřené konvexní	17
3.7 Farkasovo lemma	18

3.8	Krajní body konvexní množiny	18
3.9	Kreinova-Milmanova věta	19
3.10	Výpočet gradientu skalárního součinu	19
3.11	Ověření konvexnosti množiny	20
3.12	Práce s maticemi	20
3.13	Proložení bodů pomocí MNČ	21
3.14	Formulace úlohy MNČ	22
4	Čtvrtý týden	23
4.1	Konvexní funkce	23
4.2	Příklad konvexní funkce	23
4.3	Příklad konvexní funkce	23
4.4	Dolní úrovněová množina	24
4.5	Použití dolní úrovněové množiny	24
4.6	Součet a součin zachovávají konvexitu	24
4.7	Příklad ověření konvexity	25
4.8	Skládání zachovává konvexitu	25
4.9	Věta o extrémech konvexních funkcí	26
4.10	Věta o konvexitě a první derivaci	26
4.11	Věta o konvexitě a druhé derivaci	27
4.12	Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace	28
4.13	Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace	28
5	Pátý týden	29
5.1	Kužel přípustných směrů	29
5.2	Přípustné směry poklesu	29
5.3	Kužel směrů poklesu	30
5.4	Nutná geometrická podmínka lokálního extrému	30
5.5	Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu	30
5.6	Tvrzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci	30
5.7	Fermatova věta - nutná podmínka optimality	31
5.8	Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu	31
5.9	Hledání bodu minima	32
6	Šestý týden	33
7	Sedmý týden	34

8 Osmý týden	35
9 Devátý týden	36
10 Desátý týden	37
11 Jedenáctý týden	38
12 Dvanáctý týden	39
13 Třináctý týden	40
14 Čtrnáctý týden	41

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné moje poznámky, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Velmi ocením, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/A8B010GT>.

Poděkování. Rád bych poděkoval docentu Martinu Bohatovi nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Optimalizace a teorie her.

Text je vysázen makrem \LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy. Často jsou použity u **přednáškových** příkladů, pomocí nichž lze vidět ukázkové řešení příkladu na přednášce.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zprehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 První týden

1.1 Důkaz souvislosti minima a maxima

Tvrzení. Pro $f : D \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq D, \hat{x} \in M$ platí:

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x) \iff \hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)),$
- (2) jestliže $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = -\max_{x \in M} (-f(x)).$

Důkaz.

- (1) $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, tj. $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in M \xLeftrightarrow{(-1)} -f(\hat{x}) \geq -f(x), \forall x \in M$, tj. $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$
- (2) Ať $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$, pak $\min_{x \in M} f(x) = f(\hat{x}) = -(-f(\hat{x})) \stackrel{(1)}{=} -\max_{x \in M} (-f(x)). \quad \square$

1.2 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x^2 + 1 \\ &\text{za podmíněk } \frac{3}{x} \leq 1, \\ &x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Upravíme podmínky a uděláme jejich průnik: $(x - 3 \geq 0) \wedge (x \in \mathbb{N}) \Rightarrow M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$

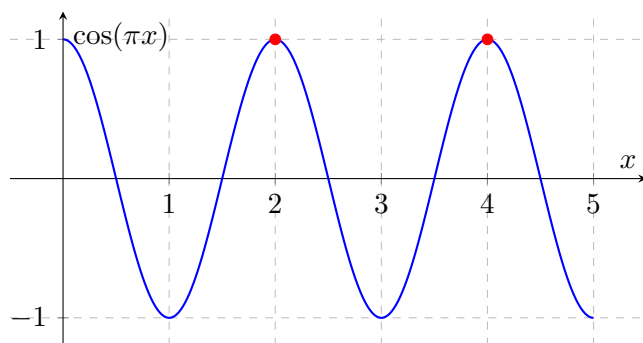
Úvahou pak lze uhodnout minimum - minimum leží v bodě $x = 3$.

1.3 Hledání přípustných množin

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } \ln x \\ &\text{za podmíněk } x \leq 5, \\ &\cos(\pi x) = 1. \end{aligned}$$

$$D(f) = (0, \infty).$$

Udělejme průnik definičního oboru funkce a podmíněk: $(x \in (0, \infty)) \wedge (x \leq 5) \wedge (\cos(\pi x) = 1).$



Očividně tedy $M = \{2, 4\}.$

Úvahou pak lze uhodnout $\operatorname{argmax}_{x \in M} \ln x = \{4\}.$

1.4 Maximalisační úloha

Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici y (v tis. Kč) je $\frac{y}{y+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$ Kč mezi uvedené dva produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

$$\begin{aligned} &\text{maximalisujeme } \frac{x}{x+50} + \frac{2y}{4y+25} \\ &\text{za podmínek } x+y=100, \\ &x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $x = 100 - y$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{100-y}{150-y} + \frac{2y}{4y+25} \right) = \frac{-50}{(150-y)^2} + \frac{50}{(4y+25)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

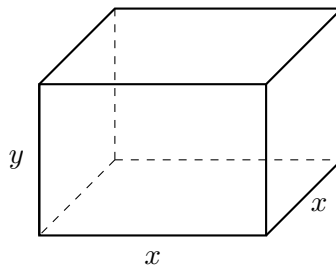
Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -50(4y+25)^2 + 50(150-y)^2 &= 0 \\ (150-y)^2 - (4y+25)^2 &= 0 \\ (150-y-4y-25) - (150-y+4y+25) &= 0 \\ (125-5y)(175+3y) &= 0 \\ y_1 = 25, y_2 &\approx -58.3 \end{aligned}$$

Tedy aby byly splněny všechny podmínky je jediné možné řešení $y = 25 \rightarrow x = 75$.

1.5 Minimalisační úloha

Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu 10 dm^3 tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalisační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.



$$\begin{aligned} &\text{minimalisujeme } 4xy + x^2 \\ &\text{za podmínek } x^2y = 10, \\ &x, y > 0. \end{aligned}$$

Vyjádřeme si jednu proměnnou v závislosti na druhé, například $y = \frac{10}{x^2}$. Následně dosadíme do úlohy a vyšetříme stacionární body pomocí první derivace.

$$\frac{d}{dy} \left(4x \frac{10}{x^2} + x^2 \right) = \frac{-40}{x^2} + 2x \stackrel{!}{=} 0$$

Zbavme se zlomků:

$$\begin{aligned} -40 + 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= 20 \\ x &= \sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

Tedy jediné možné řešení $x = \sqrt[3]{20} \rightarrow y = \frac{10}{(\sqrt[3]{20})^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

1.6 Optimalisační úloha s nadrovinami

V \mathbb{R}^n jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = 1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x, w \rangle + \lambda = -1$.

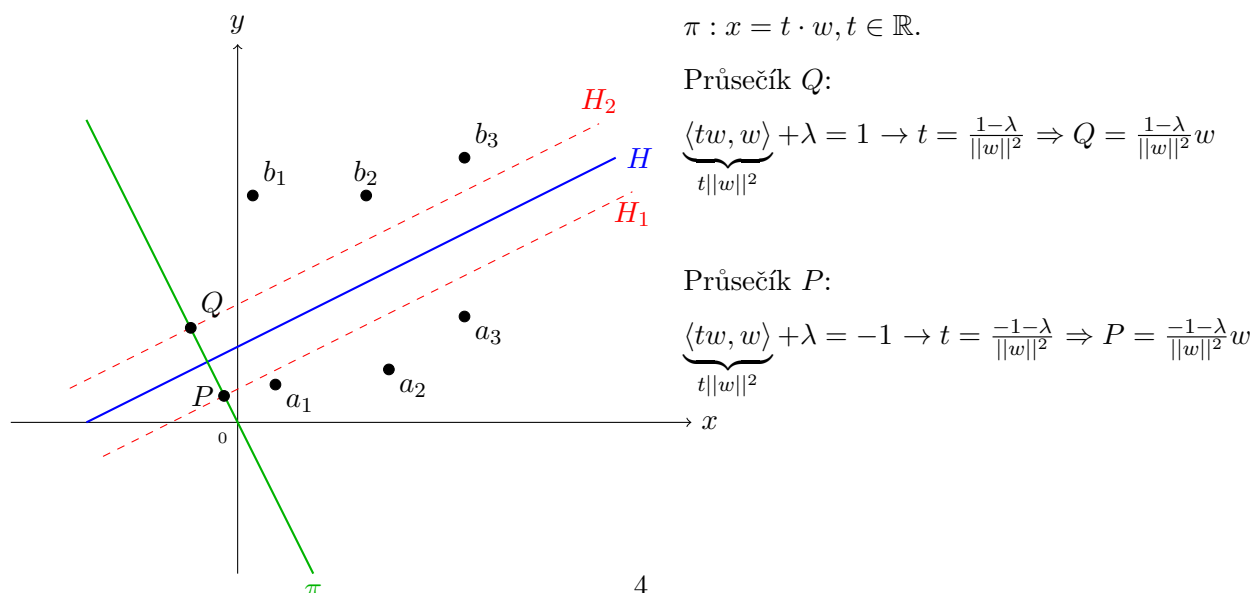
- (a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{\|w\|}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{\|w\|}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2 .
- (b) Interpretujte optimalisační úlohu

$$\begin{aligned} \text{maximalisujte } g(w, \lambda) &= \frac{2}{\|w\|} \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

- (c) Ukažte, že $(\hat{w}, \hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalisujte } h(w, \lambda) &= \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek } \langle a_i, w \rangle + \lambda &\geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \dots, k, \\ \langle b_j, w \rangle + \lambda &\leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

(a)



Pak vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je dána rozdílem průsečíků P a Q v normě. Tedy:

$$\|Q - P\| = \left\| \frac{1 - \lambda}{\|w\|^2} w + \frac{1 + \lambda}{\|w\|^2} w \right\| = \left\| \frac{2w}{\|w\|^2} \right\| = \frac{2}{\|w\|^2} \|w\| = \frac{2}{\|w\|}.$$

To je prima, to jsme přesně chtěli. \square

(b)

(c) V úloze (b) maximalisujeme zlomek, kde se proměnná nachází ve jmenovateli. Tedy snažíme se najít co nejmenší možný jmenovatel, aby zlomek měl co největší hodnotu. Můžeme úlohu převrátit a minimalisovat samotný jmenovatel. Protože násobení je lineární a zachovává nám všechny nerovnosti, můžeme různě modifikovat jakou konstantou násobíme námi minimalisovanou proměnnou. Zároveň si můžeme dovolit umocnit normu, protože i to nám zachová všechny nerovnosti. Zde si tedy chytře zvolíme násobení $\frac{1}{2}$, protože při následném hledání stacionárních bodů funkce nám vyskočí z kvadrátu dvojka, jenž pěkně pokrátíme. Podmínky nám zůstaly stejné, není co řešit.

Konvexní množiny

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \in C$.

1.7 Uzavřená úsečka

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá uzavřená úsečka s krajními body x a y .

1.8 Je nadrovina konvexní?

Definice nadroviny: $H(y; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Atť $x, z \in H(y, \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha)$. Tedy dokazujeme podle **definice**.

$$\langle \lambda x + (1 - \lambda)z, y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\alpha} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle z, y \rangle}_{\alpha} = \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)z \in H(y, \alpha). \quad \square$$

1.9 Je uzavřený poloprostor konvexní?

1.10 Je uzavřená koule konvexní?

Definice uzavřené koule: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Atť $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| \leq r$. Tedy za x z definice dosadíme úsečku mezi body x a y , které jsme si vybrali a chceme ukázat, že i tato úsečka leží v uzavřené kouli, dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{\leq r} \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

1.11 Je okolí konvexní?

Definice okolí: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$, o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

Důkaz.

Atť $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| < r$. Dle **definice**.

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda)y] - a\| &= \|\lambda x - (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)y - \lambda a\| = \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda \underbrace{\|x - a\|}_{< r} + (1 - \lambda) \underbrace{\|y - a\|}_{< r} < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \square \end{aligned}$$

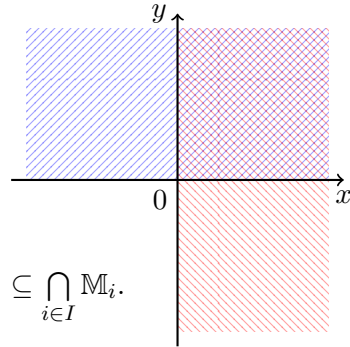
1.12 Je průnik množin konvexní?

Úvaha pro 2 množiny ve \mathbb{R}^2 :

Mějme jednu modrou ($y \geq 0$) a druhou červenou ($x \geq 0$) **konvexní** množinu. Jejich průnik je pak nezáporný ortant, tedy

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Visuálně je průnik nekonvexní.



Důkaz.

$$\text{Nechť } x, y \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \in \mathbb{M}_i, \forall i \in I \implies [x, y] \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{M}_i.$$

□

1.13 Důkaz, že rozdíl a sjednocení nezachovává konvexitu

Mějme $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

$[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou **konvexní** množiny. Jejich rozdíl ale už konvexní není. $\{0\}$ a $\{1\}$ jsou konvexní množiny. Jejich sjednocení ale už konvexní není.

Afinní zobrazení

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

1.14 Důkaz, že afinní zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pak f je **afinní** \iff pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Ať $f(x) = Ax + b$, kde $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ať $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = A[\lambda x + (1 - \lambda)y] + b = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay + \lambda b + (1 - \lambda)b =$$

$$\underbrace{\lambda(Ax + b)}_{f(x)} + \underbrace{(1 - \lambda)(Ay + b)}_{f(y)} = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Cíl: Ukázat, že f je **afinní**, tedy $f(x) = Ax + b$.

Zvolme $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.

Pokud je f **afinní**, pak zobrazení φ by mělo být dáno jako Ax , tedy být lineární.

Cíl: φ je lineární zobrazení.

Musíme ověřit uzavřenost na násobení a sčítání z definice.

(1) At $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cíl: $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

$$\varphi(\alpha x) = f(\alpha x) - f(0) = f(\alpha x + (1 - \alpha)0) - f(0) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(0) - f(0) =$$

$$\alpha f(x) - \alpha f(0) = \alpha(f(x) - f(0)) = \alpha \varphi(x - 0). \quad \square$$

(2) At $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Cíl: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right) \stackrel{(1)}{=} 2\varphi\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - f(0)\right] = 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f(0)\right] =$$

$$f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(y) - f(0)}_{\varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y). \quad \square$$

1.15 Důkaz, že obraz konvexní množiny při afinním zobrazení je konvexní

Tvrzení.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **afinní** a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **konvexní**, pak $f(C)$ je konvexní.

Důkaz.

Mějme $a, b \in f(C) \implies \exists x, y \in C : f(x) = a, f(y) = b$.

Dle předpokladu je C konvexní. $\implies [x, y] \subseteq C \implies \underbrace{f([x, y])}_{\subseteq f(C)} = \underbrace{[f(x), f(y)]}_a \subseteq f(C). \quad \square$

1.16 Důkaz, že kartézský součin je konvexní

Tvrzení.

Nechť $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Pak C_1 a C_2 jsou **konvexní** množiny právě tehdy, když $C_1 \times C_2$ je konvexní množina.

Důkaz.

„ \implies “: Mějme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2, \lambda \in [0, 1]$

Cíl: $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2$. Dle **definice**.

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda)c \\ (1 - \lambda)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + (1 - \lambda)c \\ \lambda b + (1 - \lambda)d \end{bmatrix} \in C_1 \times C_2. \quad \square$$

„ \impliedby “: Definujme **afinní** zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$f(x, y) = x.$$

Pak f je afinní. Navíc $f(C_1 \times C_2) = C_1$. $\implies C_1$ je **konvexní**, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. A důkaz bude obdobný pro C_2 , zde zadefinujme afinní zobr. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

$$g(x, y) = y.$$

Pak g je afinní. Navíc $g(C_1 \times C_2) = C_2$. $\implies C_2$ je konvexní, protože afinní zobrazení zachovává konvexitu. \square

1.17 Určení definitnosti matic

Určete definitnost matice A , jestliže

$$(a) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice, u které chceme určovat definitnost, musí být symetrická.
 $Q=Q^T$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \langle Qx, x \rangle &\geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně semidefinitní.} \\ \langle Qx, x \rangle &> 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \iff Q \text{ je pozitivně definitní.} \end{aligned}$$

Analogicky pro negativně semidefinitní, respektive definitní.

Matice je indefinitní pokud nesplňuje ani jednu možnost.

Pro symetrické matice také platí, že Q je negativně (semi)definitní, jestliže $(-Q)$ je pozitivně (semi)definitní.

Pomocí Sylvesterova kritéria lze určit pozitivní, či negativní definitnost. Pro případy podezření na semidefinitnost je potřeba navíc prozkoumat menší minory matice.

$$(a) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |9| = 9 > 0, \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \rightarrow \text{podezření na pozitivní semidefinitnost.}$$

Hlavní minory jsou $Q_{\{1\}}$ a $Q_{\{1,2\}}$.

Menší minory: Q_I , kde $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ neprázdná. Aby matice byla pozitivně semidefinitní, tak $\det Q_I \geq 0$.

Tedy: $Q_{\{2\}} = [4]$. $\det Q_{\{2\}} = 4 > 0$.

Tedy matice $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.

$$(b) \begin{vmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 9 = 2 > 0. \text{ Matice je pozitivně definitní.}$$

$$(c) \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorování: Matice je lineárně závislá, tedy $\det Q = 0$.

$$Q_{\{1\}} = 4 > 0,$$

$$Q_{\{2\}} = 1 > 0,$$

$$Q_{\{3\}} = 0 = 0.$$

Tedy matice je jediné pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

Spočtěme tedy vedlejší minor, například vynechejme 1. řádek a 1. sloupec:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Aby matice Q byla pozitivně semidefinitní, musely by i všechny vedlejší minory být ≥ 0 . Protože jsme našli případ, kdy tomu tak není, matice Q je indefinitní.

$$(e) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Pozorování: matice může být negativně (semi)definitní, nebo indefinitní.

Využijme tedy **vlastnosti** symetrických matic a určíme definitnost pro matici $(-Q)$.

$$-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(-Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 + R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy matice $(-Q)$ je pozitivně semidefinitní, nebo indefinitní.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \geq 0.$$

$\implies (-Q)$ je pozitivně semidefinitní $\iff Q$ je negativně semidefinitní.

1.18 Existence matice

Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?

(c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

Zdefinujme si vlastnost skalárního součinu: $\langle a, b \rangle = b^T a$, kde $b^T = (b_1, \dots, b_n)$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(a) Využijme zmíněné **vlastnosti**.

$$\langle Ax, y \rangle = y^T Ax = \underbrace{y^T (A^T)^T}_{(A^T y)^T} x = (A^T y)^T x = \langle x, A^T y \rangle. \quad \square$$

(b) Pozorování: Matice B je symetrická a matice C je antisymetrická.

$$\text{Zvolme: } \left. \begin{array}{l} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{array} \right\} B + C = A.$$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C. \checkmark$$

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = B. \checkmark \quad \square$$

$$(c) \langle Cx, x \rangle \stackrel{?}{=} 0$$

$$\langle Cx, x \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle x, C^T x \rangle \stackrel{-C \equiv C^T}{=} -\langle x, Cx \rangle = -\langle Cx, x \rangle = 0.$$

Matice C tedy nijak nepřispívá do výsledku. Takže platí $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$. \square

2 Druhý týden

2.1 Věta o nejlepší aproximaci

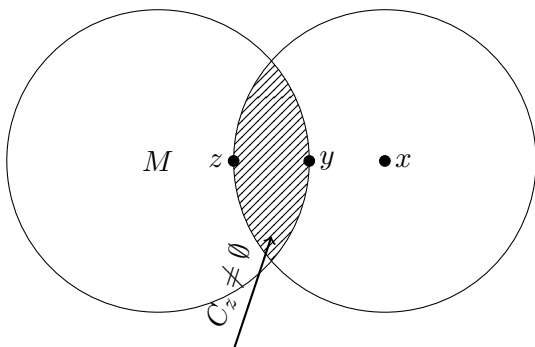
Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že $\text{dist}(x; C) = \|x - \hat{y}\|$.

Důkaz.

1. Existence

Cíl: Existuje bod minima

Úvaha:



M je obecná konvexní množina.

$C \times R = \|x - z\|$,

$C_z = M \cap B(x, R) = M \cap \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|z - a\| \leq R\}$.

↑

uzavřená, omezená, neprázdná
kompaktní

Tedy $a \mapsto \|x - a\|$ je spojitá.

⇒ Spojitost na kompaktní množině znamená, že f nabývá na C_z minima dle Weierstrassova kritéria.

At y je bod minima. Všechny body v M mají od x vzdálenost $\geq \|x - y\|$. □

2. Jednoznačnost.

Cíl: Pokud $a, b \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \|x - b\| = \overbrace{\text{dist}(x, M)}^\delta$, pak $a = b$.

Lemma, rovnoběžníkové pravidlo: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Důkaz lemma:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad \square \end{aligned}$$

Důkaz jednoznačnosti:

At $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Pak $\delta^2 \leq \|x - y\|^2 = \|x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\|^2 = \|\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - b)\|^2 = \frac{1}{4}\|\underbrace{(x - a)}_u + \underbrace{(x - b)}_v\|^2$

$$\stackrel{\text{lemma}}{=} \frac{1}{4} \left[2 \left(\underbrace{\|x - a\|^2}_{\delta^2} + \underbrace{\|x - b\|^2}_{\delta^2} \right) - \underbrace{\|(x - a) + (x - b)\|^2}_{b - a} \right] = \delta^2 - \frac{1}{4}\|b - a\|^2 \Rightarrow \delta^2 \leq \delta^2 - \frac{1}{4}\underbrace{\|b - a\|^2}_{\leq 0 \Rightarrow a=b}.$$

2.2 Projekce bodu a variační nerovnost

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $y = P_C(x)$, kde $P_C(x)$ je projekční operátor.

(2) Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Důkaz.

(1) \Rightarrow (2):

Ať $v_\lambda = y + \lambda(z - y)$, $\lambda \in (0, 1]$.

Pak

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - v_\lambda\|^2 = \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 = \langle (x - y) - \lambda(z - y), (x - y) - \lambda(z - y) \rangle \\ \|x - y\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle x - y, z - y \rangle + \lambda^2 \|z - y\|^2 \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow \langle x - y, z - y \rangle &\leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (1):

Ať $z \in C$.

Pak

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, (z - x) + (x - y) \rangle = \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 \\ \langle x - y, z - y \rangle + \|x - y\|^2 &\geq \|x - y\|^2 - \underbrace{|\langle x - y, z - y \rangle|}_{\text{odhad shora}} \geq \star \\ \star &= \|x - y\|^2 - \|x - y\| \cdot \|z - x\|. \end{aligned}$$

Je-li $x \neq y$, pak vydělíme: $\|z - x\| \geq \|x - y\|$.

Je-li $x = y$, pak $y \in C : x \in C \dots$ triviální. \square

2.3 Koule?

2.4 Věta o ortogonálním rozkladu

Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:

- (a) $P_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.
- (b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.
- (c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Důkaz.

(a)

Cíl: Dokázat vlastnosti lineárního zobrazení, tedy

1. $P_L(\alpha x) = \alpha \cdot P_L(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
2. $P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. : Ať $z \in L$. Pak

$$\begin{aligned} \langle \alpha x - \alpha P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle &= \alpha \langle x - P_L(x), z - \alpha P_L(x) \rangle \\ &\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \underbrace{\alpha^2}_{>0} \langle x - P_L(x), \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot z - P_L(x)}_{\in L} \rangle \end{aligned}$$

Tedy $P_L(\alpha x) = \alpha P_L(x), \forall \alpha \neq 0$. Pro $\alpha = 0$ zřejmě plyne z lineárnosti zobrazení.

2. : Ať $z \in L$.

$$\underbrace{\langle x + y - (P_L(x) + P_L(y)), z - (P_L(x) + P_L(y)) \rangle}_{(x - P_L(x)) + (y - P_L(y))} = \underbrace{\langle x - P_L(x), (z - P_L(y)) - P_L(x) \rangle}_{\in L, \leq 0} + \underbrace{\langle y - P_L(y), (z - P_L(x)) - P_L(y) \rangle}_{\in L, \leq 0} \leq 0.$$

Z **variační nerovnosti** tedy plyne, že P_L je nutně lineární. \square

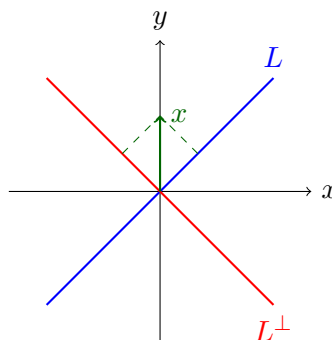
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

L ... lineární podprostor \mathbb{R}^n ,
 $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$.

Důkaz.

Cíl: $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n, z \in L^\perp$. Pak



$$\begin{aligned} \langle x - (x - P_L(x)), z - (x - P_L(x)) \rangle &= \underbrace{\langle P_L(x), z - (x - P_L(x)) \rangle}_{\in L} \\ &= \underbrace{\langle P_L(x), z \rangle}_0 - \langle P_L(x), x - P_L(x) \rangle = \langle x - P_L(x), 0 - P_L(x) \rangle \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz existence.

Pak $x = \underbrace{P_L(x)}_{\in L} + \underbrace{(x - P_L(x))}_{\in L^\perp}$. \square

Důkaz jednoznačnosti.

Ať $a \in L, b \in L^\perp$ takové, že $x = a + b$.

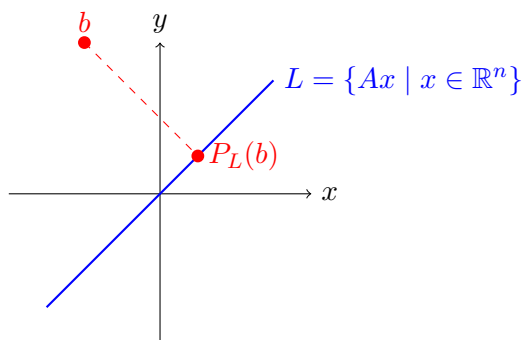
Cíl: $a = P_L(x)$

Ať $z \in L$.

$$\langle x - a, z - a \rangle = \langle b, \underbrace{z - a}_{\in L} \rangle = 0 \leq 0 \implies a = P_L(x) \implies x - P_L(x) = b \stackrel{(2)}{\implies} P_{L^\perp}(x) = b. \quad \square$$

3 Třetí týden

3.1 Metoda nejmenších čtverců



Pokud $b \in L$, řešíme úlohu $Ax = b$.

Pokud $b \notin L$, řešíme $Ax = P_L(b)$.

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \iff A^T A \hat{x} = A^T b$.

„ \Rightarrow “: Ať $A \hat{x} = P_L(b) \stackrel{(2)}{=} b - P_{L^\perp}(b) \quad / \cdot A^T$

$$A^T A \hat{x} = A^T b - \underbrace{A^T P_{L^\perp}(b)}_{\stackrel{?}{=} 0}$$

$$\rightarrow \|A^T P_{L^\perp}(b)\|^2 = \langle A^T P_{L^\perp}(b), A^T P_{L^\perp}(b) \rangle = \underbrace{\langle P_{L^\perp}(b), (A^T)^T (A^T P_{L^\perp}(b)) \rangle}_{\substack{\in L^\perp \\ \in L}} = 0. \quad \square$$

„ \Leftarrow “: Ať $A^T A \hat{x} = A^T b$.

Ať $x \in \mathbb{R}^n$.

$$0 = \underbrace{\langle x, A^T A \hat{x} - A^T b \rangle}_{A^T(A\hat{x}-b)} = \underbrace{\langle (A^T)^T x, A\hat{x} - b \rangle}_L \implies A\hat{x} - b \in L^\perp$$

$$\rightarrow b = \underbrace{A\hat{x}}_{\in L} + \underbrace{(b - A\hat{x})}_{L^\perp} \stackrel{(c)}{\implies} A\hat{x} = P_L(b). \quad \square$$

3.2 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det = 3 \implies \text{existuje inverze.}$$

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.3 Příklad výpočtu metody nejmenších čtverců

V rovině jsou dány body $(0, -\frac{1}{2})^T$, $(1, \frac{1}{3})^T$ a $(2, \frac{2}{3})^T$. Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímkou o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.

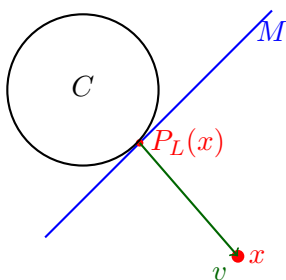
$$\left. \begin{aligned} 0k + q &= -\frac{1}{2} \\ 1k + q &= \frac{1}{3} \\ 2k + q &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

3.4 Věta o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny



$C \in \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina.
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus C \implies$ existuje $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že
 $\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle, \quad \forall y \in C.$

Důkaz.

$$v = x - P_L(x) \neq 0$$

$$\langle v, y \rangle = \langle v, P_L(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle y, v \rangle \leq \langle v, P_L(x) \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Položme $\alpha = \langle v, P_L(x) \rangle$.

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha, \quad \forall y \in C.$$

$$\langle x, v \rangle - \overbrace{\langle v, P_L(x) \rangle}^{\alpha} = \underbrace{\langle x - P_L(x), v \rangle}_v = \|v\|^2 > 0. \implies \alpha < \langle x, v \rangle. \quad \square$$

Důsledek: Každá uzavřená konvexní množina v \mathbb{R}^n je průnikem všech poloprostorů, které ji obsahují.

Důkaz sporem.

Ať neplatí: tj. existuje $C \in \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina tak, že není průnikem P všech poloprostorů obsahujících C .

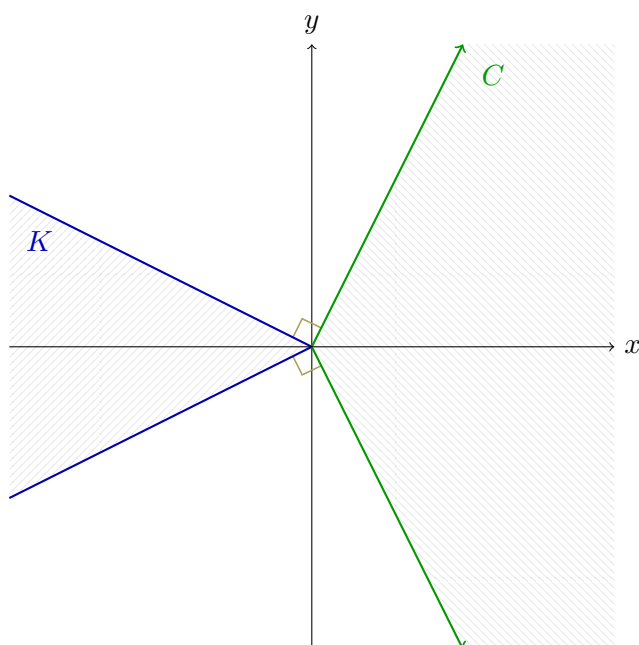
Pak $x \in P$ tak, že $x \notin C$. Z věty o oddělitelnosti bodu a konvexní množiny existuje poloprostor M takový, že $C \subseteq M$ a $x \notin M$. Ale to je ve sporu s tím, že $x \in P$. \square

3.5 Příklad na použití věty o oddělitelnosti nadrovinou

Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ a $b \in \mathbb{R}^2$. Označme

$$C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^2\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \geq 0 \right\}$$

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid A^T y \leq 0\} \\ = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}.$$



Vždy nastane jeden z případů:

- (a) $b \in C$
- (b) $b \notin C$ - existuje nenulový vektor $y \in K$ svírající s b úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

3.6 Lemma neprázdné uzavřené konvexní

Jestliže $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, pak $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}$ je neprázdna uzavřená konvexní množina.

Důkaz.

- neprázdna - vždy obsahuje alespoň 0,
- konvexní - lineární zobrazení (matice) zachovává konvexitu,
- uzavřenost dokazovat nebudeme.

3.7 Farkasovo lemma

Výslovnost [farkášovo].

Je-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$, pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- (a) Existuje $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Ax = b$ a $x \geq 0$.
- (b) Existuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $A^T y \leq 0$ a $\langle y, b \rangle > 0$.

Důkaz.

„(a) $\implies \neg(b)$ “:

At' $x \in \mathbb{R}_+^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $Ax = b$ a $A^T y \leq 0$.

$$\langle y, b \rangle \stackrel{b=Ax}{=} \langle y, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T y, x \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle x \rangle}_{\geq 0} \leq 0. \quad \square$$

„ $\neg(a) \implies (b)$ “:

At' $C = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} \implies b \notin C, C \dots$ uzavřená neprázdná konvexní množina.

oddělitelnost \implies existuje $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tak, že: $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha < \langle b, y \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Začneme s $\alpha < \langle b, y \rangle$. Chceme, aby $\langle b, y \rangle$ byl kladný. Pak nám y bude svírat ostrý úhel s b .

Protože $0 \in C$, je $0 \leq \alpha < \langle b, y \rangle$ (za Ax dosadíme 0, takže budeme mít $\langle 0, y \rangle$).

Ted' musíme dokázat, že y skutečně řeší zadanou soustavu nerovnic.

Víme tedy, že:

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \\ \langle x, A^T y \rangle &\leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

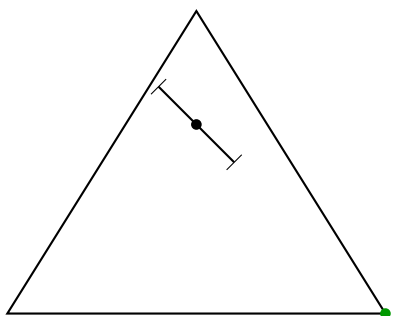
Odtud' $\langle x, A^T y \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$, neboť:

At' $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$ je takový, že $\langle \tilde{x}, A^T y \rangle > 0$.

Pak $\langle \underbrace{\lambda \tilde{x}}_{\lambda > 0, \text{ tedy } \lambda \tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n}, A^T y \rangle = \lambda \underbrace{\langle \tilde{x}, A^T y \rangle}_{> 0} \rightarrow +\infty, \text{ pro } \lambda \rightarrow +\infty$. Což je spor s $\langle x, A^T y \rangle \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

$$\text{At' } e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Pak } (A^T y)_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \text{ neboť } (A^T y)_i = \langle e_i, A^T y \rangle. \quad \square$$

3.8 Krajiní body konvexní množiny



Mějme konvexní množinu. Když sestrojíme libovolnou nedegenerativní (tzn. netriviální = není to pouze bod) úsečku, vždy nalezneme bod, který bude ležet přesně uprostřed této úsečky.

Co když ale vezmeme například **zelený bod** vyznačený na nákrese? V takovém případě nejsme schopni sestroji nedegenerativní úsečku, na jejímž středu by ležel tento bod.

Definujme: Krajní bod $x \in C$ konvexní množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový bod, pro který neexistují dva různé body y, z tak, že

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

$\text{ext}(C) \dots$ množina všech krajních (extremálních) bodů

3.9 Kreinova-Milmanova věta

Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$.
Důkaz vynecháme.

Kompaktnost je důležitá.

- Interval $(0, 1)$ není uzavřený a $\text{ext}((0, 1)) = \emptyset$.
- Množina \mathbb{R}_+^2 není omezená a $\text{ext}(\mathbb{R}_+^2) = \{0\}$.

3.10 Výpočet gradientu skalárního součinu

Nalezněte $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$, jestliže

(a) $f(x) = \langle x, c \rangle$, kde $c \in \mathbb{R}^n$;

(b) $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, kde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Určete také $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$ za dodatečného předpokladu, že A je symetrická matice.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n x_i c_i \stackrel{\text{limita}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ik} \stackrel{\text{rozvoj}}{=} c_k$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = c; \Rightarrow \nabla^2 f(x) = 0, \text{ kde } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = k, \\ 0, & \text{pokud } i \neq k. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]}_{(Ax)_i} x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)}_{\text{derivace součinu}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + a_{ij} \delta_{jk} x_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}_{(Ax)_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i}_{(A^T x)_k} \end{aligned}$$

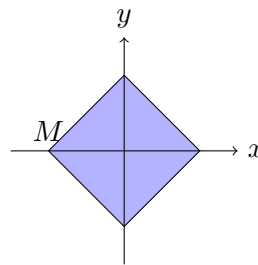
$$\Rightarrow \nabla f(x) = Ax + A^T x \text{ (Speciálně: } \nabla f(x) = 2Ax \text{ pro } A = A^T)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{jl} + \sum_{i=1}^n a_{ik} \delta_{il} = a_{kl} + a_{lk}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = A + A^T$$

3.11 Ověření konvexnosti množiny

Je množina $M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \right\}$ konvexní?



1. způsob - dle definice

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x + (1 - \lambda)a \\ \lambda y + (1 - \lambda)b \end{bmatrix} \stackrel{?}{\in} M, \lambda \in [0, 1].$$

$$|\lambda x + (1 - \lambda)a| + |\lambda y + (1 - \lambda)b| \leq \underbrace{\lambda|x| + (1 - \lambda)|a| + \lambda|y| + (1 - \lambda)|b|}_{\lambda \underbrace{(|x| + |y|)}_{\leq 1} + (1 - \lambda) \underbrace{(|a| + |b|)}_{\leq 1}} \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \quad \square$$

M je konvexní.

2. způsob - úvaha nad vlastnostmi

$|x|$ je konvexní, $|y|$ je konvexní. Součet zachovává konvexitu, tedy i $|x| + |y|$ je konvexní.

3.12 Práce s maticemi

Je dána matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ať $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Ukažte, že A má lineárně nezávislé sloupce $\iff A^T A$ je invertibilní.

Pomocný důkaz.

Ukažme, že: $\ker(A) = \ker(A^T A)$

Chci: $\ker(A) \subseteq \ker(A^T A)$

$$x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \quad / \cdot A^T$$

$$A^T A = 0 \Rightarrow x \in \ker(A^T A) \quad \square$$

Chci: $\ker(A^T A) \subseteq \ker(A)$

$$x \in \ker(A^T A) \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow 0 = \langle A^T Ax, x \rangle$$

$$= \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \|Ax\|^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \quad \square$$

Konec pomocného důkazu.

A má lineárně nezávislé sloupce $\iff \{0\} = \ker(A) = \ker(A^T A) \iff A^T A$ je invertibilní (protože $A^T A$ je čtvercová a $A^T A$ je prosté).

3.13 Proložení bodů pomocí MNČ

Jsou dány body $a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf

(a) afinní funkce $f(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(b) funkce $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= -2 \\ 0\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T b$. A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow (A^T A)^{-1}$ existuje.

Pak: $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{10}; \beta = \frac{3}{10}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta + \gamma &= -1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -2 \\ 0\alpha + 0\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{aligned} \iff A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = b, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

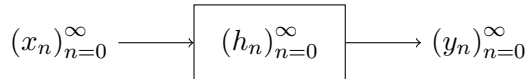
A má lineárně nezávislé sloupce $\Rightarrow A^T A$ je invertibilní.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 6 \\ -8 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4}; \beta = \frac{7}{4}; \gamma = \frac{-3}{4}.$$

3.14 Formulace úlohy MNČ

At' závislost výstupního signálu $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ systému na vstupním signálu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je dána konvolucí posloupností $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ s posloupností $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ ($(h_n)_{n=0}^{\infty}$ popisuje odezvu systému na jednotkový impuls), tj. $y_n = \sum_{i=0}^n h_i x_{n-i}$. Předpokládejte dále, že $h_n = 0$ pro všechna $n \geq 4$. Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů y_0, \dots, y_{20} výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty x_0, \dots, x_{20} . Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů h_0, h_1, h_2, h_3 .



$$y_k = \sum_{l=0}^k h_l x_{k-l} = h_0 x_k + \dots + h_k x_0$$

předpokládejme: $h_l = 0 \forall l \geq 4$.

$$y_0 = h_0 x_0$$

$$y_1 = h_1 x_0 + h_0 x_1$$

$$y_2 = h_2 x_0 + h_1 x_1 + h_0 x_2$$

$$y_3 = h_3 x_0 + h_2 x_1 + h_1 x_2 + h_0 x_3$$

$$y_4 = h_3 x_1 + h_2 x_2 + h_1 x_3 + h_0 x_4$$

$$\vdots$$

$$y_{20} = h_3 x_{17} + h_2 x_{18} + h_1 x_{19} + h_0 x_{20}$$

Minimalisujme $f(x) = \|Ax + b\|^2$, kde

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

4 Čtvrtý týden

4.1 Konvexní funkce

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina.
Řekněme, že f je

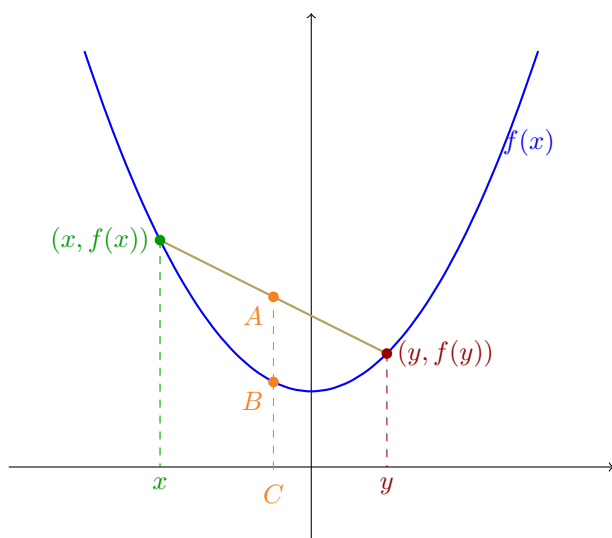
- (a) konvexní na C , jestliže pro každé $x, y \in C$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (b) ryze konvexní na C , jestliže pro každé dva různé body $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$ je

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- (c) konkávní (resp. ryze konkávní) na C , jestliže $(-f)$ je konvexní (resp. ryze konvexní) na C .



$$A = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

$$B = (\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$$

$$C = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Pozorování: úsečka vždy leží nad funkcí.

4.2 Příklad konvexní funkce

Je afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (tj. $f(x) = \langle x, a \rangle + b, b \in \mathbb{R}$) konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle \lambda x + (1 - \lambda)y, a \rangle + b \\ &= \lambda \langle x, a \rangle + (1 - \lambda) \langle y, a \rangle + \lambda b + (1 - \lambda)b \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní i konkávní. } \square \end{aligned}$$

4.3 Příklad konvexní funkce

Je funkce $f(x) = \|x\|$ konvexní?

Důkaz.

At $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$.

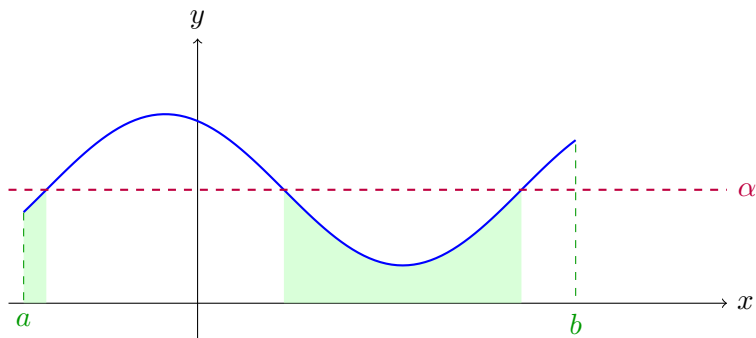
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \stackrel{\text{odhad}}{\leq} \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \implies f \text{ je konvexní. } \square \end{aligned}$$

4.4 Dolní úroňňová množina

Dolní úroňňování množina funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hladiny $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\text{lev}_{\leq}(f; \alpha) := \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Je-li f konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $\text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$ je konvexní pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



Důkaz.

Ať $x, y \in \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Cíl: $\lambda x + (1 - \lambda)y \stackrel{?}{\in} \text{lev}_{\leq}(f|_C; \alpha)$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \quad \square$$

Poznámka.

Opačná implikace neplatí. Tedy pomocí dolní úroňňové množiny **nelze** určit, jestli původní funkce je konvexní.

Například $f = x^3$ není konvexní funkce na intervalu $x = [-2, 2]$, ale když zvolíme $\alpha = 8$, tak dolní úroňňová množina bude konvexní.

4.5 Použití dolní úroňňové množiny

Je množina $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1, \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\}$ konvexní?

Důkaz.

Rozdělme si množinu M na dvě podmnožiny M_1 a M_2 , kde:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \text{lev}_{\leq}(\|x\|, 1) \rightarrow$ konvexní, protože norma je konvexní funkce.

$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 1\right\} = \text{lev}_{\leq}\left(\left\langle x, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 1\right) \rightarrow$ konvexní, protože skalární součin je konvexní.

To nám ale dává průnik dvou konvexních množin, tedy $M = M_1 \cap M_2$ je také konvexní. \square

4.6 Součet a součin zachovávají konvexitu

Mějme funkce f, g , které jsou konvexní na C , $\alpha \geq 0$. Pak:

(a) $f + g$ je konvexní na C

(b) αf je konvexní na C

Důkaz.

(a) At $\lambda \in [0, 1], x, y \in C$.

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)} + \underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) = \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y). \quad \square \end{aligned}$$

(b) At $\lambda \in [0, 1], x, y \in C, \alpha \geq 0$.

4.7 Příklad ověření konvexity

Je funkce $f(x) = e^x - 3 \ln x + 2x$ konvexní?

Rozeberme si jednotlivé části funkce.

- $e^x \dots$ exponenciála je z grafu očividně konvexní.
- $-3 \ln x \dots$ logaritmus je konkávní, ale díky „-“ se celý výraz stane konvexní. Násobení konstatou konvexitu neovlivní, viz důkaz (b).
- $2x \dots$ lineární funkce je konvexní.

Protože všechny komponenty funkce f jsou konvexní, pak je i funkce f nutně konvexní.

4.8 Skládání zachovává konvexitu

Skládání konvexních funkcí není obecně konvexní funkce. Například: $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^2 - 1$ jsou konvexní, ale

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x))) = (x^2 - 1)^2 \text{ z grafu očividně není konvexní.}$$

1. Mějme tedy tvrzení.

Nechť f je konvexní na $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je afinní. Jestliže $g(C) \subseteq K$ (tedy g „obtiskne“ množinu C do K), pak $f \circ g$ je konvexní na C .

Důkaz.

At $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \stackrel{g \text{ je afinní}}{=} f(\lambda \overbrace{g(x)}^{\in K} + (1-\lambda) \overbrace{g(y)}^{\in K}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. \square

2. Mějme ještě druhé tvrzení.

Jestliže f je konvexní a **neklesající** na intervalu I , g je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$ a $g(C) \subseteq I$, pak $f \circ g$ je konvexní na C .

Důkaz.

At $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(\underbrace{g(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\substack{\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ \text{odhad, díky konvexitě } g}}) \stackrel{\substack{f \text{ je neklesající} \\ g \text{ je konvexní}}}{\leq} f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))$$

A to přesně dle definice konvexní funkce dává, že $f \circ g$ je konvexní funkce. \square

4.9 Věta o extrémeh konvexních funkcí

Nechť f je konvexní na $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom platí:

- (a) Každý bod lokálního minima f na C je bodem minima f na C .
- (b) Množina $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ je konvexní. Je-li navíc f ryze konvexní na C , pak existuje nejvýše jeden bod minima funkce f na C .

Důkaz (a).

Sporem. Ať $\hat{x} \in C$ je bod lokálního minima f na C a ať existuje $\hat{y} \in C$ tak, že $f(\hat{y}) < f(\hat{x})$. $\lambda \in [0, 1]$. Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1 - \lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{< f(\hat{x})} \underset{\text{odhad}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

Což je ale spor s naším předpokladem, protože kdykoliv si vezmu bod na úsečce mezi \hat{x} a \hat{y} , tak je v něm hodnota ostře menší než funkční hodnota v bodě $f(\hat{x})$. \square

Důkaz (b).

Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1 - \lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda) \overbrace{f(\hat{y})}^{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

$$\implies \lambda \hat{x} + (1 - \lambda)\hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x). \quad \square$$

Ať f je navíc ryze konvexní na C .

Cíl: $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$ má nejvýše jeden prvek.

Důkaz.

Sporem. Ať $\hat{x}, \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$, $\hat{x} \neq \hat{y}$. $\lambda \in (0, 1)$.

Pak

$$f(\lambda \hat{x} + (1 - \lambda)\hat{y}) \stackrel{f \text{ je ryze konv.}}{<} \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda) \underbrace{f(\hat{y})}_{= f(\hat{x})} = f(\hat{x})$$

Což je ale spor, protože mám nějakou funkční hodnotu bodu úsečky mezi \hat{x} a \hat{y} ostře menší jak funkční hodnotu bodu \hat{x} . To ale nemůže nastat, protože jako body minima funkce f na C musí mít stejnou hodnotu. Body \hat{x} a \hat{y} musí tedy nutně být stejné body. \square

4.10 Věta o konvexitě a první derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

- (a) f je konvexní na C právě tehdy, když pro každé $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y).$$

- (b) f je ryze konvexní na C právě tehdy, když pro každé dva různé body $x, y \in C$ je

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle < f(y).$$

Důkaz (b) vynecháme.

Důkaz (a).

„ \Rightarrow “: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in (0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x + \lambda(y - x)) &= f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \stackrel{f \text{ je konvexní}}{\leq} \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) = f(x) + \lambda[f(y) - f(x)] \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda}}_{=\langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ pro } \lambda \rightarrow 0+ \text{ z definice směrové derivace}} \leq f(y) - f(x). \quad \square \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Ať $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$.

$$z := \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

Z předpokladu:

$$f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle \leq f(x) \quad / \cdot \lambda \quad (1)$$

$$f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle \leq f(y) \quad / \cdot (-\lambda) \quad (2)$$

Pronásobením a sečtením dostaneme:

$$\begin{aligned} f(z) + \lambda \langle \nabla f(z), \underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y - z}_z \rangle &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ \Rightarrow f(z) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

Což ale po dosazení za z je přesně ta nerovnost, která říká, že f je konvexní. \square

4.11 Věta o konvexitě a druhé derivaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $C \subseteq \Omega$ neprázdná konvexní a $f \in C^2(\Omega)$. Potom platí:

- (a) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ pozitivně semidefinitní matice, pak f je konvexní na C .
- (b) Jestliže f je konvexní na C a C je otevřená, potom $\nabla^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní matice pro každé $x \in C$.
- (c) Jestliže pro každé $x \in C$ je $\nabla^2 f(x)$ pozitivně definitní matice, pak f je ryze konvexní na C .

Důkaz (a).

Ať $x, y \in C$.

Taylorův polynom: existuje $\xi \in \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1)\} \subseteq C$ tak, že

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\xi)(y - x), y - x \rangle}_{\geq 0} \\ \Rightarrow f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \end{aligned}$$

Což je přesné znění **věty o konvexitě a první derivaci**. Tedy f je nutně konvexní na C .

Důkaz (b).

Cíl: $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$

Ať $x \in C, y \in \mathbb{R}^n$.

Pak C otevřená \Rightarrow existuje $\delta > 0$ tak, že $x + \alpha y \in C \forall \alpha \in (0, \delta]$.

Taylorův polynom:

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y),$$

kde w má nulovou limitu v 0.

Použijme fakt, že f je konvexní:

$$f(x + \alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Když tedy dosadíme:

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \omega(\alpha y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \alpha y \rangle$$

Upravíme a podělíme výrazem $\frac{1}{2} \alpha^2$ ($\alpha > 0$).

$$\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle + \underbrace{2\|y\|^2 \omega(\alpha y)}_{\rightarrow 0 \text{ pro } \alpha \rightarrow 0_+} \geq 0$$

V limitě $\alpha \rightarrow 0_+$ tedy máme $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq 0$, což je přesně to, co jsme chtěli. \square

Poznámka. Nutnost otevřenosti C je velmi důležitá!

Důkaz (c). Podobně jako (a).

4.12 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 - y^2$ je konvexní na $\mathbb{R} \times \{0\}$. (\rightarrow množina $\mathbb{R} \times \{0\}$ není otevřená, jedná se o přímku)

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ je indefinitní, tedy funkce $f(x, y)$ není konvexní.

4.13 Příklad ověření konvexnosti pomocí derivace

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ je ryze konvexní.

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 > 0, \det \nabla^2 f(x, y) = 4 - 1 > 0 \implies$ dle Sylvesterova kritéria je $\nabla^2 f(x, y)$ pozitivně definitní.

A podle bodu (c) **věty o konvexitě a druhé derivaci** můžeme říct, že funkce f je ryze konvexní.

5 Pátý týden

5.1 Kužel přípustných směrů

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in M$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve přípustný směr množiny M v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $x + \alpha d \in M$.
- Množina $\mathcal{F}(M; x)$ všech přípustných směrů množiny M v bodě x se nazývá kužel přípustných směrů množiny M v bodě x .

$\mathcal{F}(M; x) \neq \emptyset$.

Je-li $x \in \text{int}(M)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \mathbb{R}^n$.

Je-li M konečná (neprázdná), pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

5.2 Přípustné směry poklesu

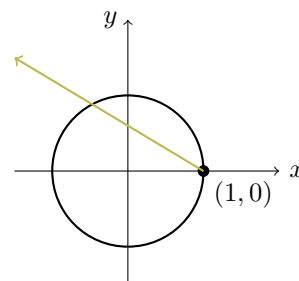
Mějme

(a) Je-li $M = S(0; 1)$, pak $\mathcal{F}(M; x) = \{0\}$ pro každé $x \in M$.

(b) Je-li $C = B(0; 1)$ a $\hat{x} = (1, 0)^T$, pak

$$\mathcal{F}(C; \hat{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) $M = S(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



Úvaha: Polopřímka z bodu $(1, 0)$ projde maximálně $2 \times$ skrz kružnici.

Ať $d \neq 0 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 1 &= \|x + \alpha d\|^2 = \langle x + \alpha d, x + \alpha d \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_1 + 2\alpha \langle x, d \rangle + \alpha^2 \|d\|^2 \\ \rightarrow 0 &= \alpha(2\langle x, d \rangle + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2\langle x, d \rangle}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}(M; x) = \{0\} \end{aligned}$$

(b) Uvažujme kouli

$$M = S(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}; \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \geq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha d \right\rangle = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2}_1 + 2\alpha \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d \right\rangle + \alpha^2 \|d\|^2$$

$$\rightarrow 0 \geq \alpha(2d_1 + \alpha \|d\|^2) \implies \alpha = -\frac{2d_1}{\|d\|^2} \implies \mathcal{F}\left(M; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 < 0 \right\}.$$

5.3 Kužel směrů poklesu

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve směr poklesu funkce f v bodě x , jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\alpha \in (0, \delta]$ je $f(x + \alpha d) < f(x)$.
- Množina $\mathcal{D}(f; x)$ všech směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel směrů poklesu funkce f v bodě x .

Definice implicitně obsahuje podmínku $[x, x + \delta d] \subseteq D$.

5.4 Nutná geometrická podmínka lokálního extrému

Jestliže x je bod lokálního minima funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na $M \subseteq D$, pak $\mathcal{F}(M; x) \cap \mathcal{D}(f; x) = \emptyset$.

Důkaz. Sporem.

At ne, tj. existuje $d \in \mathcal{F}(M; x) \cap \mathcal{D}(f; x)$.

Pak: $f(x + \alpha d) < f(x)$ a $x + \alpha d \in M$ pro všechna $\alpha > 0$ dostatečně malá.

Tedy spor s tím, že x je bod lokálního minima f na M . \square

5.5 Silný směr poklesu - linearisace směru poklesu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$.

- Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ se nazve silný směr poklesu funkce f v bodě x , jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$.
- Množina $\mathcal{D}_0(f; x)$ všech silných směrů poklesu funkce f v bodě x se nazývá kužel silných směrů poklesu funkce f v bodě x .

Kužel $\mathcal{D}_0(f; x)$ je množina všech řešení lineární nerovnice

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

$\mathcal{D}_0(f; x)$ je konvexní kužel.

5.6 Tvzení o souvislosti přípustných směrů poklesu a jejich linearisaci

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$. Potom platí:

- Je-li $d \in \mathcal{D}(f; x)$, potom $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$.
- $\mathcal{D}_0(f; x) \subseteq \mathcal{D}(f; x)$ (tj. jestliže $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, pak $d \in \mathcal{D}(f; x)$).

Důkaz.

(a) At $d \in \mathcal{D}(f; x)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} &< 0 \text{ pro } \alpha > 0 \text{ dostatečně malé.} \\ \implies \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}}_{= \langle \nabla f(x), d \rangle} &\leq 0 \quad \square \end{aligned}$$

(b) Ať $\alpha > 0$.

$$f(x + \alpha d) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), d \rangle + \alpha \|d\| \overbrace{\omega(\alpha d)}^{\text{zbytek}}$$

$$\frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \underbrace{\langle \nabla f(x), d \rangle + \|d\| \omega(\alpha d)}_{\substack{\rightarrow \langle \nabla f(x), d \rangle \text{ pro } \alpha \rightarrow 0^+ \\ \text{a navíc } \langle \nabla f(x), d \rangle < 0}} \implies \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} < 0 \text{ pro všechna } \alpha < 0 \text{ dostatečně malá.}$$

5.7 Fermatova věta - nutná podmínka optimality

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $M \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in M$ je bodem lokálního minima funkce $f \in C^1(\Omega)$ na M . Potom platí:

(a) $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$ (tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0$ pro všechny $d \in \mathcal{F}(M; \hat{x})$).

(b) Jestliže $\hat{x} \in \text{int}(M)$, pak $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.

(a) Víme, že $\mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}(f; \hat{x}) = \emptyset$.

Pak:

$$\mathcal{D}_0(f, \hat{x}) \subseteq \mathcal{D}(f, \hat{x}) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x}) = \emptyset. \quad \square$$

(Tj. $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{F}(M, \hat{x})$)

(b)

$$\hat{x} \in \text{int}(M) \implies \mathcal{F}(M; \hat{x}) = \mathbb{R}^n \xrightarrow{(a)} \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Ať $d = -\nabla f(\hat{x})$.

$$-\|\nabla f(\hat{x})\|^2 \geq 0 \implies \nabla f(\hat{x}) = 0. \quad \square$$

5.8 Věta o nutných a postačujících podmínkách pro konvexní úlohu

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f \in C^1(\Omega)$ je konvexní na $C \subseteq \Omega$ a $\hat{x} \in C$. Potom platí:

(a) $\hat{x} \in \text{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\mathcal{F}(C; \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f; \hat{x}) = \emptyset$.

(b) Předpokládejme, že $\hat{x} \in \text{int}(C)$. Pak $\hat{x} \in \text{argmin}_{x \in C} f(x)$ právě tehdy, když $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Důkaz.

(a)

„ \Rightarrow “: Víme. Když máme bod minima, je určitě bodem lokálního minima \implies průnik je prázdný.

„ \Leftarrow “: Sporem.

Ať existuje $y \in C : \overbrace{f(y) - f(\hat{x})}^{< 0} < 0$.

Ať $d = y - \hat{x} (\neq 0) \in \mathcal{F}(C, \hat{x})$.

Cíl: $d \in \mathcal{F}(C, \hat{x}) \cap \mathcal{D}_0(f, \hat{x})$.

$$\underbrace{\hat{x} + \alpha d}_{\hat{x} + \alpha(y - \hat{x}) = \alpha y + (1 - \alpha)\hat{x}} \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1] \text{ z konvexity } C.$$

$$f \text{ je konvexní na } C \iff f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), \overbrace{y - \hat{x}}^d \rangle \leq f(y). \implies \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle \leq f(y) - f(\hat{x}) \underset{\text{z předp.}}{<} 0.$$

To je ale spor, protože byl předpoklad, že průnik je prázdný. My jsme ale ukázali, že není. \square

(b)

„ \Rightarrow “ Víme.

„ \Leftarrow “ At $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Pak $\langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n = \mathcal{F}(C; \hat{x})$. Nemáme tedy žádný směr poklesu $\stackrel{(a)}{\implies} \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$. \square

5.9 Hledání bodu minima

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + x - 2y$$

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \dots$ dle Sylvesterova kritéria je pozitivně definitní.

$\implies f$ je nutně (ryze) konvexní.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 1 \\ 6y - 2x - 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2y = -1 \\ -2x + 6y = 2 \end{array} \rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

6 Šestý týden

7 Sedmý týden

8 Osmý týden

9 Devátý týden

10 Desátý týden

11 Jedenáctý týden

12 Dvanáctý týden

13 Třináctý týden

14 Čtrnáctý týden