Josef Tkadlec

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné

Obsah

Předmluva

Tato skripta jsou určena pro výuku diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné v reálném oboru. Jsou doplněna přehledem základních vlastností množiny reálných čísel a jejich posloupností a dále zavedením funkcí a jejich vlastností.

Jedná se o matematickou látku, která byla již mnohokrát různými způsoby zpracována. Snažil jsem se, aby text byl přehledný, jednoduchý a srozumitelný, k čemuž mají přispět četné ilustrativní příklady. Na druhou stranu jsem nechtěl vypustit (i složitější) důkazy, které mohou hloubavějším čtenářům osvětlit podstatu a souvislosti.

Jedná se o druhé přepracované vydání, které bylo upraveno a doplněno podle připomínek vyučujících i studentů a podle změn v osnovách předmětů, které toto skriptum využívají. Největší změnou je doplnění kapitoly o numerické integraci.

Přes veškerou snahu se v práci takového rozsahu objeví různě závažné chyby. Na internetové stránce

`http://math.feld.cvut.cz/skripta/difint12/`

najdete případné opravy a doplňky.

Děkuji Vlastě Sedláčkové, Veronice Sobotíkové, Jozefu Bobokovi, Petru Habalovi, Petru Olšákovi, Aleši Němečkovi a Mirko Navarovi za cenné připomínky.

Josef Tkadlec

Kapitola 1

Reálná čísla

□ Uvedeme základní vlastnosti množiny reálných čísel a zavedeme další pojmy, které budeme dále potřebovat: nevlastní čísla, intervaly, okolí bodu, supremum, infimum.

□ Začneme přehledem číselných oborů.

- Množina *přirozených čísel*
  $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$
  Přirozená čísla jsou počty prvků konečných množin. Někdy se mezi ně zahrnuje i číslo 0 (počet prvků prázdné množiny).

- Množina *celých čísel*
  $$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$
  Skládá se z 0, z přirozených čísel a z čísel k nim opačných. Je to nejmenší nadmnožina množiny přirozených čísel uzavřená na operace sčítání a odčítání (součet a rozdíl každých dvou prvků množiny patří do této množiny).

- Množina *racionálních čísel*
  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}.$$
  Je tvořena všemi podíly celých a přirozených čísel. Je to nejmenší nadmnožina množiny celých čísel uzavřená na operace násobení a dělení nenulovým číslem.

- Množina *reálných čísel* $\mathbb{R}$. Zavedení reálných čísel je složitější. Pro naši potřebu je budeme brát jako čísla, která lze vyjádřit desetinným rozvojem (uzavřenost na limity). Dají se zavést také doplněním suprem a infim množin racionálních čísel. Množina reálných čísel se skládá z čísel racionálních a z čísel *iracionálních*. Další dělení reálných čísel je na čísla *algebraická* (kořeny algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty, kromě racionálních například $\sqrt{2}$) a *transcendentní* (například Ludolfovo číslo π, Eulerovo číslo e). Pokud nebude upřesněno jinak, pod pojmem číslo budeme rozumět reálné číslo.

- Množina *komplexních čísel*
  $$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{j}y \colon\, x, y \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathrm{j}^2 = -1.$$
  Je tvořena dvojicemi reálných čísel (reálná a imaginární část). Je to nejmenší nadmnožina množiny reálných čísel uzavřená na řešení algebraických rovnic.

1.1. Poznámka. Racionální čísla mají oproti iracionálním číslům konečný nebo periodický desetinný rozvoj (konečný desetinný rozvoj lze brát jako zvláštní případ periodického s periodou složenou z 0). Periodický desetinný rozvoj racionálních čísel vyplývá z algoritmu celočíselného dělení — v určitém okamžiku se už budou ke zbytkům připisovat jen nuly, je jen konečně mnoho zbytků, takže po několika krocích se začnou tyto zbytky opakovat a tím i cifry podílu. Racionalitu čísla s periodickým desetinným rozvojem lze ukázat pomocí součtu geometrické řady, ukážeme jednodušší a názornější postup.

1.2. Příklad. Ukažte, že číslo $0{,}8\overline{23}$ je racionální.

Řešení. Označme $x = 0{,}8\overline{23}$. Pak $100x = 82{,}3\overline{23}$ a dostaneme

$$99x = 100x - x = 82{,}3\overline{23} - 0{,}8\overline{23} = 81{,}5$$

(společná část desetinného rozvoje se vyruší). Je tedy

$$x = \frac{81{,}5}{99} = \frac{815}{990}\,.$$

1.3. Poznámka. Nenulová čísla s konečným desetinným rozvojem mají dva různé desetinné zápisy. Lze je totiž zapsat také s nekonečným periodickým rozvojem složeným z cifer 9 (poslední nenulová cifra se přitom o 1 sníží). Například $0{,}2 = 0{,}1\overline{9}$.

1.4. Poznámka. Množiny přirozených, celých a racionálních čísel (i čísel algebraických) jsou *spočetné* — existují vzájemně jednoznačná zobrazení těchto množin na množinu přirozených čísel. Spočetné množiny jsou v tomto smyslu nejmenší nekonečné množiny (existují menší nekonečné množiny než $\mathbb{N}$ ve smyslu vlastní podmnožiny, ale i ty jsou spočetné). Množina reálných čísel je nespočetná, v tomto smyslu jsou skoro všechna reálná čísla iracionální (dokonce transcendentní). Prakticky ale pracujeme s velmi omezenou množinou některých racionálních čísel, s iracionálními čísly se setkáme spíše jen v teoretických úvahách.

1.5. Příklad. Ukažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo a odvoďme spor. Je-li $\sqrt{2}$ racionální číslo, pak ho lze napsat jako podíl dvou nesoudělných přirozených čísel $\sqrt{2} = a/b$. Po vynásobení této rovnosti číslem b a po umocnění dostaneme $2b^2 = a^2$. To znamená, že číslo a je dělitelné 2, existuje tedy přirozené číslo c tak, že $a = 2c$. Po dosazení a zkrácení 2 dostáváme $b^2 = 2c^2$, tudíž i číslo b je dělitelné 2, což je spor s nesoudělností čísel a, b.

□ Na množině reálných čísel máme definovány operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, jejich vlastnosti zde rozebírat nebudeme. Podívejme se podrobněji na uspořádání reálných čísel. Rozlišujeme *ostré uspořádání* „$<$“ a *neostré uspořádání* „$\leq$“ ($x \leq y$ právě tehdy, když $x < y$ nebo $x = y$). Místo $x < y$ (resp. $x \leq y$) píšeme také $y > x$ (resp. $y \geq x$).

1.6. Tvrzení (vlastnosti ostrého uspořádání reálných čísel)**.**

(1) *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí právě jedna z možností: $x < y$, $x = y$, $y < x$ (trichotomie).*

(2) *Pro každé* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *platí: je-li* $x < y$ *a* $y < z$, *pak* $x < z$ (*tranzitivita*).
(3) *Pro každé* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *platí: je-li* $x < y$, *pak* $x + z < y + z$ (*monotonie sčítání*).
(4) *Pro každé* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *platí: je-li* $x < y$ *a* $z > 0$, *pak* $xz < yz$ (*monotonie násobení*).

□ Podle uspořádání s číslem 0 zavádíme následující pojmy.

1.7. Definice. Reálné číslo x se nazývá:

1) *kladné*, pokud $x > 0$;
2) *záporné*, pokud $x < 0$;
3) *nezáporné*, pokud $x \geq 0$;
4) *nekladné*, pokud $x \leq 0$.

1.8. Definice. *Absolutní hodnota* reálného čísla x je

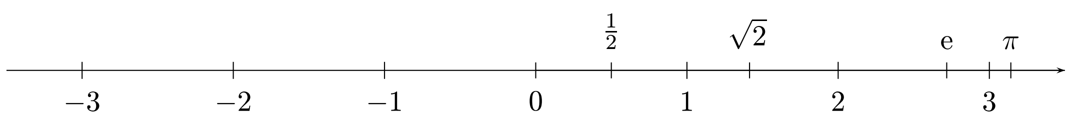
$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0\,, \\ -x\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

□ Rozborem možností znamének výrazů v absolutních hodnotách se snadno odvodí následující vlastnosti absolutní hodnoty.

1.9. Tvrzení. *Pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x|\,, \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y|\,, \\ |x + y| &\leq |x| + |y| \qquad\qquad (\textit{trojúhelníková nerovnost})\,. \end{aligned}$$

1.10. Poznámka. Reálná čísla znázorňujeme na takzvané *reálné ose* — na přímce zvolíme počátek (odpovídá číslu 0), orientaci a jednotku (oboje například volbou bodu odpovídajícího číslu 1). Každé reálné číslo x odpovídá bodu přímky ve vzdálenosti $|x|$ od počátku, pro kladná x ve zvolené orientaci od bodu 0, pro záporná x na druhou stranu:



□ Pro označení intervalů a pro výpočty limit je vhodné zavést takzvaná nevlastní čísla.

1.11. Definice. *Rozšířená množina reálných čísel* je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $+\infty$ a $-\infty$ se nazývají *nevlastní čísla*. Uspořádání a absolutní hodnotu rozšiřujeme na $\overline{\mathbb{R}}$ následujícím způsobem:

1) $-\infty < x < +\infty$ pro každé reálné číslo x, $-\infty < +\infty$,
2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.

1.12. Poznámka. Místo $+\infty$ se někdy píše stručněji ∞.

1.13. Definice. Pro každé $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy *intervalů* s *krajními body* a, b:

1) *otevřený* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x < b\}$;
2) *uzavřený* $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \le x \le b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$;
3) *polouzavřený* (*polootevřený*)

$$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x \le b\} \quad \text{pro } b \in \mathbb{R}\,,$$
$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \le x < b\} \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}\,.$$

Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní body*.

1.14. Definice. *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - a| < r\} = (a - r, a + r)\,.$$

Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je

$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < |x - a| < r\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)\,.$$

Jednostranná okolí jsou následující: *levé* a *pravé okolí* (resp. *levé* a *pravé prstencové okolí*) *bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ jsou intervaly

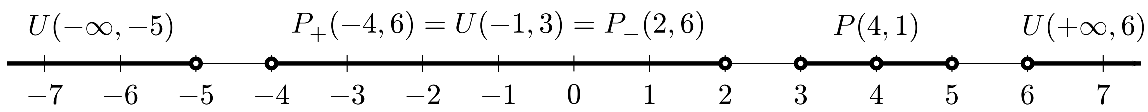
$$U_-(a, r) = (a - r, a\rangle\,, \qquad U_+(a, r) = \langle a, a + r)\,, \qquad \text{resp.}$$
$$P_-(a, r) = (a - r, a)\,, \qquad P_+(a, r) = (a, a + r)\,.$$

Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):

$$U(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < r\} = (-\infty, r)\,,$$
$$U(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > r\} = (r, +\infty)\,.$$

Pro jednodušší vyjadřování v definicích limit a spojitosti tato okolí označujeme zároveň jako prstencová a jednostranná: pro bod $-\infty$ pravá, pro bod $+\infty$ levá.

1.15. Příklady. Příklady různých typů okolí:



1.16. Poznámka. Často neupřesňujeme poloměr okolí — mluvíme jen o (prstencovém) okolí. Průnik dvou (prstencových) okolí jednoho bodu je opět (prstencové) okolí tohoto bodu (menší z nich). V literatuře se můžete setkat s obecnějším pojetím — okolím se rozumí kterákoliv nadmnožina výše definovaného okolí.

□ S pojmem okolí bodu souvisí pojem hromadného bodu množiny.

1.17. Definice. Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá *hromadný bod množiny* A, pokud v každém okolí bodu a existuje nekonečně mnoho prvků množiny A.

□ Pro operace s limitami je vhodné zavést další operace s nevlastními čísly.

1.18. Definice. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
(+\infty) \pm a &= +\infty\,, & (-\infty) \pm a &= -\infty\,,\\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty\,, & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty\,,\\
(+\infty) - (-\infty) &= +\infty\,, & (-\infty) - (+\infty) &= -\infty\,,\\
a \cdot (+\infty) &= \begin{cases} +\infty\,, & a > 0\,,\\ -\infty\,, & a < 0\,,\end{cases} & a \cdot (-\infty) &= \begin{cases} -\infty\,, & a > 0\,,\\ +\infty\,, & a < 0\,,\end{cases}\\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty\,, & (+\infty) \cdot (-\infty) &= -\infty\,,\\
(-\infty) \cdot (+\infty) &= -\infty\,, & (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty\,,\\
\frac{a}{+\infty} &= 0\,, & \frac{a}{-\infty} &= 0\,.
\end{aligned}$$

1.19. Poznámka. Podobně jako u reálných čísel někdy vypouštíme některé závorky případně symbol $+$, takže například místo $+\infty + (-\infty)$ píšeme $\infty - \infty$. Nedefinujeme součet různých (rozdíl stejných) nevlastních čísel (typ $\infty - \infty$), součin 0 s nevlastním číslem (typ $0 \cdot \infty$), podíly nevlastních čísel (typ $\frac{\infty}{\infty}$) a dělení nulou.

□ Z vlastností uspořádání odvodíme některé vlastnosti reálné osy.

1.20. Tvrzení. *Mezi každými dvěma čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních i nekonečně mnoho čísel iracionálních.*

Důkaz. Důkaz jen naznačíme v několika krocích. Uvažujme různá reálná čísla x, y. Podle vlastnosti trichotomie je buď $x < y$ nebo $y < x$. Předpokládejme $x < y$ (opačný případ by se dokazoval podobně).

1) Ukážeme, že mezi čísly x, y je číslo $(x+y)/2$. K nerovnosti $x < y$ můžeme přičíst x, y a pak ji vydělit 2 (monotonie sčítání a násobení):

$$\begin{aligned}
2x &< x + y\,, & x + y &< 2y\,,\\
x &< \frac{x+y}{2}\,, & \frac{x+y}{2} &< y\,.
\end{aligned}$$

2) Jsou-li čísla x, y, racionální, pak i číslo $(x+y)/2$ je racionální.

3) K nalezení racionálního (nebo iracionálního) čísla $z \in (x, y)$ můžeme využít desetinný rozvoj čísla $(x+y)/2$ — vezmeme takovou část, aby už bylo jisté, že bez ohledu na zbývající desetinný rozvoj bude číslo z ležet v intervalu (x, y) a pak buď rozvoj ukončíme (pro $z \in \mathbb{Q}$) nebo doplníme neperiodicky (pro $z \notin \mathbb{Q}$).

4) Výše uvedené konstrukce můžeme použít pro nové dvojice bodů x, z, a z, y, ...

1.21. Poznámka. Uvedli jsme, že racionálních čísel je oproti reálným číslům málo, přesto jich je podle předcházejícího tvrzení dost na to, abychom jimi mohli každé reálné číslo aproximovat s libovolnou přesností. V každém intervalu existují jak racionální tak iracionální čísla — říkáme, že racionální i iracionální čísla jsou *hustá* v $\mathbb{R}$.

1.22. Tvrzení. *Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ jsou různá čísla. Pak existují disjunktní okolí U_a, U_b bodů a, b.*

Důkaz. Zvolme libovolně číslo $c \in \mathbb{R}$ mezi a, b (různé od a, b). Stačí najít taková okolí, která neobsahují bod c. Ukažme to pro bod a (pro bod b je to podobné). Pro $a \in \mathbb{R}$ můžeme vzít $U(a, |a-c|)$, pro $a = +\infty$ můžeme vzít $(c, +\infty)$, pro $a = -\infty$ můžeme vzít $(-\infty, c)$.

□ Přistupme k důležitým pojmům suprema a infima.

1.23. Definice. Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Číslo $k \in \mathbb{R}$ se nazývá:

1) *horní mez* množiny M, pokud $x \leq k$ pro každé $x \in M$;
2) *dolní mez* množiny M, pokud $x \geq k$ pro každé $x \in M$.

Množina M se nazývá:

1) *shora omezená*, pokud má horní mez;
2) *zdola omezená*, pokud má dolní mez;
3) *omezená*, pokud má horní i dolní mez.

1.24. Příklady.

1) Množina $\mathbb{N}$ je zdola omezená (například číslem 0), není shora omezená.
2) Množina $\mathbb{Z}$ není omezená ani zdola, ani shora.
3) Interval $(0, 1)$ je omezená množina.

□ Množina reálných čísel může (ale nemusí) mít největší (resp. nejmenší) prvek, tj. takový, že všechny ostatní prvky množiny jsou menší (resp. větší).

1.25. Definice. Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.

1) *Maximum množiny M* ($\max M$) je největší prvek množiny M (pokud existuje).
2) *Minimum množiny M* ($\min M$) je nejmenší prvek množiny M (pokud existuje).
3) *Supremum množiny M* ($\sup M$) je nejmenší horní mez množiny M (pokud existuje).
4) *Infimum množiny M* ($\inf M$) je největší dolní mez množiny M (pokud existuje).

1.26. Příklady. Pro intervaly $\langle 0, 1\rangle$, $(0, 1)$ dostáváme:

1)
$$\max\langle 0,1\rangle = 1\,, \qquad \sup\langle 0,1\rangle = \min\langle 1,+\infty) = 1\,,$$
$$\min\langle 0,1\rangle = 0\,, \qquad \inf\langle 0,1\rangle = \max(-\infty, 0\rangle = 0\,.$$

2)
$$\max(0,1) \text{ neexistuje}\,, \qquad \sup(0,1) = \min\langle 1,+\infty) = 1\,,$$
$$\min(0,1) \text{ neexistuje}\,, \qquad \inf(0,1) = \max(-\infty, 0\rangle = 0\,.$$

1.27. Poznámka. Jestliže existuje maximum množiny, pak je zároveň supremem této množiny. Podobně jestliže existuje minimum množiny, pak je zároveň infimem této množiny. Supremum je tedy zobecněním maxima a infimum je zobecněním minima.

□ Zatímco maximum ani minimum existovat nemusí, supremum a infimum existují vždy.

1.28. Věta. *Každá neprázdná shora omezená (resp. zdola omezená) množina reálných čísel má v* $\mathbb{R}$ *supremum (resp. infimum).*

1.29. Poznámka. Výše uvedená věta charakterizuje reálná čísla, v oboru racionálních čísel neplatí. Například množina $\{x \in \mathbb{Q}\colon\ x^2 < 2\}$ nemá v oboru racionálních čísel nejmenší horní mez — mezi každým racionálním číslem větším než $\sqrt{2}$ a číslem $\sqrt{2}$ existují další racionální čísla.

□ Předpoklad omezenosti množiny můžeme vypustit, pokud rozšíříme definici suprema a infima následujícím způsobem.

1.30. Definice. Pro shora neomezenou množinu M pokládáme $\sup M = +\infty$, pro zdola neomezenou množinu M pokládáme $\inf M = -\infty$.

1.31. Věta. *Každá neprázdná množina reálných čísel má supremum i infimum.*

1.32. Poznámka. Ani předpoklad neprázdnosti v předcházející větě není nutný. Pro prázdnou množinu ale dostáváme bizarní hodnoty:

$$\sup \emptyset = -\infty\,, \qquad\qquad \inf \emptyset = +\infty\,.$$

Je to jediný případ, kdy supremum množiny je menší než její infimum.

1.33. Příklad. Platí $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\max \mathbb{N}$ neexistuje.

1.34. Příklad. Určete maximum a supremum množiny $M = \{\frac{n-1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Platí $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$, takže číslo 1 je horní mezí množiny M. Ukážeme, že to je nejmenší horní mez množiny M, tedy že žádné číslo $x < 1$ není horní mezí množiny M. Hledáme přirozené číslo n, pro které platí $\frac{n-1}{n} > x$. Řešením této nerovnice jsou přirozená čísla splňující podmínku $n > \frac{1}{1-x}$ (taková existují). Je tedy $\sup M = 1$, $\max M$ neexistuje (muselo by být rovno supremu, ale $1 \notin M$).

□ Na závěr ukažme důležitý důsledek věty o supremu a infimu.

1.35. Věta (princip vnořených intervalů). *Jestliže pro uzavřené intervaly* I_n $(n \in \mathbb{N})$ *platí* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, *pak* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. *Jestliže navíc délky intervalů* I_n *klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz. Označme $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1\,.$$

Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n $(n \in \mathbb{N})$, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset .$$

Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

□ Jak ukazuje následující příklad, podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná.

1.36. Příklad. Označme $I_n = (0, \frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Neřešené úlohy

1. Vyjádřete racionální čísla jako podíl celých čísel:

   a) 1,2; b) 0,124; c) $0{,}\overline{18}$; d) $0{,}1\overline{234}$; e) $0{,}2\overline{9}$.

2. Dokažte, že následující čísla jsou iracionální:

   a) $\sqrt[3]{5}$; b) $\log 2$; c) $\sqrt[n]{p}$ pro p prvočíslo a $n > 1$ přirozené číslo.

3. Pomocí nerovnosti s absolutní hodnotou zapište následující okolí:

   a) $U(1,2)$; b) $U(4,3)$; c) $U(-2,1)$; d) $U(-3,5)$; e) $U(0,2)$.

4. Pomocí nerovnosti zapište následující okolí:

   a) $U(+\infty,3)$; b) $U(+\infty,-1)$; c) $U(-\infty,-5)$.

5. Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

   a) $\mathbb{Z}$;

   b) $M = (-1,1) \cup \langle 3,5 \rangle$;

   c) $M = \left\langle 0, \sqrt{2} \right\rangle \cap \mathbb{Q}$;

   d) $M = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$;

   e) $M = \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle \cap \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$;

   f) $M = \left\{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Výsledky

1. a) $6/5$; b) $31/250$; c) $2/11$; d) $137/1110$; e) $3/10$.

3. a) $|x-1|<2$; b) $|x-4|<3$; c) $|x+2|<1$; d) $|x+3|<5$; e) $|x|<2$.

4. a) $x>3$; b) $x>-1$; c) $x<-5$.

5. a) $\max\mathbb{Z}$ ani $\min\mathbb{Z}$ neexistují, $\sup\mathbb{Z}=+\infty$, $\inf\mathbb{Z}=-\infty$;
   b) $\max M=5=\sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M=-1$;
   c) $\max M$ neexistuje, $\sup M=\sqrt{2}$, $\min M=0=\inf M$;
   d) $\max M=\frac{3}{2}=\sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M=1$;
   e) $\max M=\frac{1}{4}=\sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M=0$;
   f) $\max M$ ani $\min M$ neexistují, $\sup M=1$, $\inf M=-1$.

Kapitola 2

Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost je uspořádaný soubor nejvýše spočetně mnoha prvků. Pojmem uspořádaný rozumíme to, že máme dán počáteční prvek a ke každému prvku (s výjimkou posledního, pokud je posloupnost konečná) jeho následníka. Prvky posloupnosti můžeme pak indexovat přirozenými čísly tak, že následník má větší index než jeho předchůdci. Toto pojetí je názorné, ale korektnější je definovat posloupnost jako zobrazení na množině přirozených čísel. Nás budou zajímat nekonečné posloupnosti reálných čísel.

2.1. Definice. (*Nekonečná*) *posloupnost reálných čísel* je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Označíme-li a_n obraz čísla n (n-tý *člen* posloupnosti), pak posloupnost zapisujeme jako $(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.2. Poznámky.

1) V literatuře je možné setkat se s různým označením. Někdy se místo kulatých závorek používají složené závorky jako pro množiny ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), u množin však na rozdíl od posloupností nezáleží na pořadí uvedených prvků a na tom, kolikrát se prvek v zápisu množiny objeví. Kulaté závorky se používají u konečných posloupností, což není nic jiného než tzv. aritmetické vektory. Někdy se používá zápis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, někdy se označení indexu vypouští, někdy se vypouští i označení mezí (pokud jsou tyto údaje z kontextu zřejmé). Obecnější definice připouští, aby se nezačínalo indexovat zrovna číslem 1, takže může být například posloupnost $(a_3, a_4, a_5, \dots) = (a_n)_{n=3}^{\infty}$. Pro naše úvahy to však není podstatné.

2) Kromě číselných posloupností můžeme mít posloupnosti i jiných objektů. Například ve větě o vnořených intervalech (věta 1.35) jsme pracovali s posloupností intervalů $(I_n)_{n=1}^{\infty}$. Podstatné je, že objekty „indexujeme“ přirozenými čísly.

3) Posloupnost můžeme zadat různým způsobem: popisem n-tého členu, neúplným výčtem nebo rekurentně (zadáme několik prvních členů a předpis, jak počítat členy posloupnosti z předcházejících). Neúplný výčet je přehledný, jeho nevýhodou je, že není jednoznačně určeno, jak vypadají další prvky. Používá se proto jen v jednoduchých situacích, kdy se předpokládá, že doplnění je víceméně jasné, nebo pokud chceme pro názornost několik členů posloupnosti vypsat. Z rekurentního zadání můžeme někdy popis n-tého členu získat.

2.3. Příklady.

1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.
2) $((1 + 1/n)^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{10}{27}, \dots)$.
3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, je to posloupnost $(1, 2, 4, \dots) = \left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$; obecně předpis $a_1 = a$, $a_{n+1} = qa_n$ $(a, q \in \mathbb{R})$, dává tzv. *geometrickou* posloupnost $(a, aq, aq^2, \dots) = \left(aq^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

s *kvocientem* q (q^0 pokládáme rovno 1 pro každé q).

4) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$, je to posloupnost $(3, 5, 7, \dots) = (2n+1)_{n=1}^{\infty}$; obecně předpis $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$), dává tzv. *aritmetickou* posloupnost $(a, a+d, a+2d, \dots) = (a + (n-1)d)_{n=1}^{\infty}$ s *diferencí* d.

5) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, je to tzv. *Fibonacciova* posloupnost $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, n-tý člen lze popsat
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2.4. Poznámka. Posloupnosti lze sčítat, odčítat, násobit konstantou či porovnávat člen po členu (stejně jako ostatní funkce nebo aritmetické vektory).

□ Další vlastnosti (tzv. monotonie) závisejí na porovnání prvků uvnitř posloupnosti. Je to speciální případ situace pro funkce (definice 3.17).

2.5. Definice. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

1) *rostoucí*, pokud $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
2) *klesající*, pokud $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
3) *neklesající*, pokud $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
4) *nerostoucí*, pokud $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnosti všech těchto typů se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající posloupnosti se nazývají *ryze monotonní*.

2.6. Příklady.

1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots)$ je rostoucí posloupnost.
2) $(-n)_{n=1}^{\infty} = (-1, -2, -3, \dots)$ je klesající posloupnost.
3) Fibonacciova posloupnost $(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ (viz příklady 2.3) je neklesající, není ryze monotonní.
4) $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ není monotonní posloupnost.

2.7. Definice. Posloupnost je *omezená* (resp. *zdola omezená*, *shora omezená*), pokud je omezená (resp. zdola omezená, shora omezená) množina jejích členů.

2.8. Poznámka. Posloupnost je omezená právě tehdy, když je omezená zdola i shora.

2.9. Příklady.

1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots)$ je zdola omezená, není omezená shora.
2) $(-n)_{n=1}^{\infty} = (-1, -2, -3, \dots)$ je shora omezená, není omezená zdola.
3) $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ je omezená.
4) $((-2)^n)_{n=1}^{\infty} = (-2, 4, -8, 16, \dots)$ není omezená ani zdola ani shora.

2.10. Definice. *Vybraná posloupnost* z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.11. Příklad. Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(n^2\right)_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, \dots)$, chceme z ní vybrat každý druhý prvek. Pro rostoucí posloupnost vybíraných indexů

$$(k_n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 6, \dots) = (2n)_{n=1}^{\infty}$$

dostaneme $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty} = (a_{2n})_{n=1}^{\infty} = \left((2n)^2\right)_{n=1}^{\infty} = (4, 16, \dots)$.

□ Budeme se zabývat limitami posloupností. Zavedeme najednou *vlastní* (z $\mathbb{R}$) i *nevlastní* limity (rovny $\pm\infty$) pomocí pojmu okolí bodu.

2.12. Definice. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \in U$. Značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\,, \qquad a_n \to a \text{ pro } n \to \infty\,.$$

Posloupnost s vlastní limitou se nazývá *konvergentní*, s nevlastní limitou *divergentní*.

2.13. Poznámka. Definice říká, že ať zvolíme jakkoliv malé okolí předpokládané limity, pak počínaje některým indexem všechny členy posloupnosti leží v tomto okolí. Jinak řečeno, jen konečně mnoho členů v tomto okolí neleží. Při výpočtu limity nezáleží tedy na konečném počtu členů posloupnosti.

2.14. Poznámka. Limitu posloupnosti můžeme odvodit z pojmu limita funkce (definice 4.1). Limitu funkce lze obecně definovat v hromadném bodě definičního oboru, což je pro posloupnosti pouze bod $+\infty$. My zavedeme limitu funkce ve speciálním případě, kdy funkce je definována v některém prstencovém okolí uvažovaného bodu. Abychom vyžili tuto speciální definici, můžeme nejprve posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přiřadit funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = a_n \text{ pro } x \in \langle n, n+1)\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

pak je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ve zbytku této kapitoly se budeme často odkazovat právě na tento přepis a na příslušné věty pro limity funkcí.

□ Při ověřování limity posloupnosti postupujeme takto: pro každé okolí U ověřované limity zjistíme, které členy a_n posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ patří do okolí U. Podmínku $a_n \in U$ můžeme přepsat jako nerovnici (pro $n \in \mathbb{N}$), kterou vyřešíme. Řešením mají být všechna přirozená čísla větší než nějaké přirozené číslo n_0, tj. všechna přirozená čísla až na konečně mnoho.

2.15. Tvrzení.

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a = a\,. \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0\,, & a < 0\,,\\ 1\,, & a = 0\,,\\ +\infty\,, & a > 0\,. \end{cases} \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} a^n \begin{cases} \textit{neexistuje}\,, & a \le -1\,,\\ = 0\,, & a \in (-1, 1)\,,\\ = 1\,, & a = 1\,,\\ = +\infty\,, & a > 1\,. \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz částí 1), 2) a části 3) pro $a > 0$ viz poznámka 2.14, tvrzení 4.5 a tvrzení 4.12. Zbývá dokázat část 3) pro $a \le 0$.

Pro $a \le -1$ je $a^n \in (-\infty, -1\rangle$ pro liché n, $a^n \in \langle 1, +\infty)$ pro sudé n. Pro každé $b \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje jeho okolí $U(b,r)$, které je disjunktní s alespoň jedním z těchto intervalů (pro $b \in \mathbb{R}$ například $U(b, \frac{1}{2})$), takže v $U(b,r)$ neleží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$. Žádné $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tedy není limitou této posloupnosti.

Nechť $a \in (-1,1)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ hledáme $a_n \in U(0,\varepsilon)$, řešíme tedy nerovnici $|a^n| < \varepsilon$, tj. $|a|^n < \varepsilon$. Pro $a = 0$ je řešením $n \in \mathbb{N}$, pro $a \ne 0$ je řešením $n > \log_{|a|} \varepsilon$. V obou případech tedy všechna přirozená čísla až na konečně mnoho.

□ Uveďme základních věty o limitách posloupností.

2.16. Věta. *Každá neklesající posloupnost má limitu rovnu supremu množiny jejích členů. Každá nerostoucí posloupnost má limitu rovnou infimu množiny jejích členů.*

Důkaz. Viz poznámka 2.14 a věta 4.11.

□ Ukažme využití této věty pro důkaz existence limity, kterou se dá definovat *Eulerovo číslo* $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,\ldots = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ používané mimo jiné jako základ přirozených logaritmů.

2.17. Příklad. Dokážeme existenci vlastní $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Nejprve ukažme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $a_n = (1+1/n)^{n+1}$ je klesající:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+1/n)^{n+1}}{\big(1+1/(n+1)\big)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}\,.$$

Využijeme Bernoulliovu nerovnost $(1+x)^k > 1+kx$ pro $x > 0$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (umocněním $(1+x)^k$ získáme kromě $1+kx$ ještě kladné sčítance s vyššími mocninami u x), takže dostaneme:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1\,.$$

Protože $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ klesající a zdola omezená, má tedy vlastní limitu, kterou označme e. Využitím věty o limitě podílu dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\mathrm{e}}{1} = \mathrm{e}\,.$$

2.18. Věta (o jednoznačnosti limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Viz poznámka 2.14 a věta 4.13.

2.19. Věta. *Konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Viz poznámka 2.14 a věta 4.14.

2.20. Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Jestliže existují limity posloupností* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *(vlastní nebo nevlastní), pak*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,,$$

pokud je výraz na pravé straně definován (včetně operací s nevlastními čísly).

Důkaz. Viz poznámka 2.14 a věta 4.24.

2.21. Příklad.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{-n}}{3-2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-2\cdot n^2} = \frac{1+0}{3-2\cdot(+\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0\,.$$

2.22. Tvrzení. *Nechť limita posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *neexistuje. Pak platí:*

1) *Jestliže existuje vlastní limita posloupnosti* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$*, pak neexistují limity posloupností* $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$.
2) *Jestliže existuje nenulová vlastní limita posloupnosti* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$*, pak neexistují limity posloupností* $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz. Viz poznámka 2.14 a tvrzení 4.41.

□ V některých případech nelze větu o limitě součtu, rozdílu nebo součinu použít přímo a je nutno použít určité úpravy. Například pro lineární kombinaci funkcí tvaru n^a (resp. a^n) lze limitu vyšetřit po vytknutí funkce s největším exponentem (resp. s největší absolutní hodnotou základu). Stručně řečeno, takové mocniny jsou podstatné, na ostatních nezáleží.

2.23. Příklady.

1) $$\lim_{n\to\infty}(2n^2-7n) = |{+\infty}-\infty| = \lim_{n\to\infty} n^2\big(2-7n^{-1}\big) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty\,.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}(2\cdot 3^{n+1}-2^{2n}) = |{+\infty}-\infty| = \lim_{n\to\infty}\Big(4^n\cdot\big(6\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^n-1\big)\Big) = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty\,.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\big((-3)^n+2^n\big) = |\text{neex.}+\infty| = \lim_{n\to\infty}\Big((-3)^n\cdot\big(1+\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\big)\Big) = |\text{neex.}\cdot 1| \quad \text{neex.}$$

□ V podílech posloupností s nevlastní limitou můžeme vytýkat (a krátit) „největší mocniny“ (v absolutní hodnotě) v čitateli i jmenovateli.

2.24. Příklady.

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2+3n+4} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} =$$

$$= \frac{1+2\cdot 0+1\cdot 0}{2+3\cdot 0+4\cdot 0} = \frac{1}{2}\,.$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+1} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} =$$
$$= (+\infty)\cdot\frac{1-0}{1+0} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,.$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-4^n}{2^n+3^n} = \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} =$$
$$= (+\infty)\cdot\frac{0-1}{0+1} = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty\,.$$

□ Rozdíly druhých odmocnin lze upravit rozšířením součtem těchto odmocnin.

2.25. Příklady.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0\,.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} = \frac{3}{2}\,.$$

□ Ukázali jsme, jak spočítat limity některých posloupností. Zabývejme se teď otázkou, zda a jak se dá určit existence limity. Nejprve bez důkazu uvedeme kriterium konvergence posloupnosti.

2.26. Věta (Bolzanovo–Cauchyovo kriterium konvergence). *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n > n_0$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

□ Zhruba řečeno, v posloupnosti se můžeme dostat tak daleko, že rozdíly zbývajících členů jsou malé. Ukažme příklad použití tohoto kriteria.

2.27. Příklad. Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje, protože pro $\varepsilon < 2$ nemají žádné dva sousední členy vzdálenost menší než ε (liší se o 2). Tato posloupnost ani nediverguje (protože je omezená), takže její limita neexistuje.

□ Podívejme se nyní podrobněji na posloupnosti, které limitu nemají.

2.28. Definice. Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá *hromadná hodnota posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.29. Poznámka. Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je každý hromadný bod množiny $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ hromadnou hodnotou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Obráceně to neplatí: například bod a je hromadnou hodnotou konstantní posloupnosti $(a)_{n=1}^{\infty}$, ale není hromadným bodem množiny $\{a\}$.

□ Vazba hromadné hodnoty k limitě je dána následujícími tvrzeními.

2.30. Tvrzení. *Limita posloupnosti je hromadnou hodnotou posloupnosti. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé vybrané posloupnosti.*

Důkaz. První část je zřejmá (v okolích limity musí ležet až na konečně mnoho všechny členy posloupnosti, tedy nekonečně mnoho z nich). Druhá část vyplývá z toho, že můžeme najít posloupnost okolí $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ smršťujících se do příslušného hromadné hodnoty a. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme například položit $U_n = U(a, \frac{1}{n})$ (pokud $a \in \mathbb{R}$), $U_n = (n, +\infty)$ (pokud $a = +\infty$) nebo $U_n = (-\infty, n)$ (pokud $a = -\infty$). Z těchto okolí můžeme postupně vybírat členy posloupnosti, dostaneme tak vybranou posloupnost, jejíž limitou je daný bod.

2.31. Příklad. Ne každá hromadná hodnota posloupnosti je limitou posloupnosti, například posloupnost $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, ale má dvě hromadné hodnoty: ± 1.

□ Na rozdíl od limity hromadné hodnoty posloupnosti vždy existují.

2.32. Věta. *Každá posloupnost má v* $\overline{\mathbb{R}}$ *alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

Důkaz. Pokud není posloupnost omezená shora, je hromadnou hodnotou $+\infty$. Pokud není omezená zdola, je hromadnou hodnotou $-\infty$. Pokud je omezená, můžeme hromadnou hodnotu dostat následujícím způsobem: Vezměme uzavřený interval I_1, který obsahuje všechny členy dané posloupnosti a rozdělme ho na poloviny. V jednom z polovičních uzavřených intervalů (může i v obou) leží nekonečně mnoho členů dané posloupnosti. Označme tento interval I_2, rozdělme ho na poloviny a postup opakujme. Dostaneme posloupnost vnořených uzavřených intervalů. Podle principu vnořených intervalů je jejich průnik neprázdný a obsahuje jediný bod. Ten je hromadnou hodnotou dané posloupnosti.

2.33. Tvrzení. *Supremum i infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadnými hodnotami této posloupnosti.*

Důkaz. V každém okolí suprema (infima) množiny hromadných hodnot leží hromadná hodnota a spolu s ní nekonečně mnoho členů dané posloupnosti.

□ Množina hromadných hodnot posloupnosti má tedy maximum a minimum, tyto hodnoty mají zvláštní označení.

2.34. Definice. Nejmenší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *limes inferior* a značí se $\liminf_{n\to\infty} a_n$, největší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *limes superior* a značí se $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

2.35. Příklad. Platí: $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$, $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

□ Shrňme do jedné věty různé charakterizace existence limity.

2.36. Věta. *Posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu právě tehdy, když má jedinou hromadnou hodnotu, tj. právě tehdy, když všechny z ní vybrané posloupnosti mají stejnou limitu, tj. právě tehdy, když*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \,.$$

Neřešené úlohy

1. Vyšetřete monotonii posloupností:

$$\text{a)}\ \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{b)}\ \left(\frac{1}{1+2^n}\right)_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{c)}\ \left(\frac{2^n}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{d)}\ \left(\frac{5^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

2. Ověřte podle definice, že $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$. Od kterého členu se všechny členy této posloupnosti liší od limity o méně než $\frac{3}{100}$?

3. Spočtěte:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} (3n^3 - 2n^2 + 4n - 1)\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} (n^4 + n^3 - 5n^2)\,;$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} (-n^2 + 6n + 2)\,; \qquad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty} (-4n^5 + 8n^4 + n^3)\,;$$

$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty} (3^n - 4\cdot 2^{n+3})\,; \qquad \text{f)}\ \lim_{n\to\infty} \big(2\cdot(-3)^{2n-1} - 5\cdot 7^{n+2}\big)\,;$$

$$\text{g)}\ \lim_{n\to\infty} \big(2\cdot 5^{n+1} + 3\cdot(-2)^{2n}\big)\,; \qquad \text{h)}\ \lim_{n\to\infty} \big(2\cdot(-5)^{n-1} - 5\cdot 2^{2n+2}\big)\,.$$

4. Spočtěte:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3}\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2n-1}\,;$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2+1}{n^3}\,; \qquad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{3n^2-n+4}\,;$$

$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n-1}{3n+1}\,; \qquad \text{f)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2-n^6}{1+2n^2}\,.$$

5. Spočtěte:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n + (-1)^n}{4^n}\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n + (-3)^n}{3^n - 2^{2n}}\,;$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n - 3\cdot 2^{n+2}}{2^n - 2\cdot 3^n}\,; \qquad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(-5)^n + 3\cdot 4^n}{2^{n+3} + (-5)^n}\,;$$

$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - (-4)^n}{2\cdot 3^n + 2^{2n-1}}\,; \qquad \text{f)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^n + (-4)^n}{2^n + 4^n}\,.$$

6. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+1}\right)^4$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-n+5}{2n^3+5n-3}\right)^{-3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n-1)^3}{(2n+1)^3-(n+1)^2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n}$.

7. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2)\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

8. Určete $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n}$.

9. Určete množinu hromadných hodnot posloupnosti:

a) $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$; b) $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$; c) $\left(\sin\frac{\pi}{2}n\right)_{n=1}^{\infty}$;

d) $\left(5+n\sin\frac{\pi}{2}n\right)_{n=1}^{\infty}$; e) $\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\dots\right)$.

Výsledky

1. a) rostoucí; b) klesající; c) není monotonní ($a_1>\dots>a_4<a_5<\cdots$); d) není monotonní ($a_1<\dots<a_4=a_5>a_6>\cdots$).
2. Od členu s indexem 100.
3. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) neexistuje.
4. a) 0; b) 0; c) 3; d) $\frac{2}{3}$; e) $+\infty$; f) $-\infty$.
5. a) 0; b) 0; c) $-\frac{5}{2}$; d) 2; e) neexistuje; f) $+\infty$.
6. a) $\frac{1}{16}$; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{8}$; d) 0; e) 1.
7. a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) $\frac{3}{4}$; d) 1.
8. e (vybraná posloupnost z $(1+\frac{1}{n})^n$).
9. a) $\{0,1\}$; b) $\{0,+\infty\}$; c) $\{-1,0,1\}$; d) $\{-\infty,5,+\infty\}$; e) $\langle 0,1\rangle$.

Kapitola 3

Reálné funkce reálné proměnné

□ V této kapitole uvedeme základní vlastnosti funkcí a přehled různých druhů funkcí (takzvané elementární funkce). Začneme obecnějším pojmem zobrazení.

3.1. Definice. *Zobrazení* množiny A do množiny B je neprázdná podmnožina f kartézského součinu $A \times B$ splňující následující vlastnost: pro každé $x \in A$ (*vzor*) existuje právě jedno $y \in B$ (*obraz* x) takové, že $(x, y) \in f$ (značíme obvykle $y = f(x)$). Používáme označení

$$f\colon A \to B, \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B.$$

Množina A se nazývá *definiční obor* zobrazení f, značíme ho $D(f)$. Množina $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f, značíme ho $R(f)$.

Obraz množiny $M \subset A$ při zobrazení f je množina $f(M) = \{f(x)\colon x \in M\}$, *vzor množiny* $M \subset B$ při zobrazení f je množina $f_{-1}(M) = \{x \in A\colon f(x) \in M\}$.

3.2. Poznámka. Na zobrazení f se díváme jako na předpis, kterým jsou ke vzorům přiřazeny obrazy. Takto budeme zobrazení obvykle definovat, k popisu předpisu se používá i zápis $x \mapsto f(x)$. Zatímco stanovení množiny A (definičního oboru zobrazení) je nutnou součástí definice zobrazení, pro množinu B tomu tak není, může to být libovolná nadmnožina oboru hodnot.

3.3. Definice. Zobrazení $f\colon A \to B$ se nazývá

1) *prosté*, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy, tj. pro $x, y \in A$, $x \neq y$, je $f(x) \neq f(y)$;
2) *na* B, pokud jeho obor hodnot je B (zapisujeme $f\colon A \xrightarrow{\text{na}} B$);
3) *vzájemně jednoznačné* (*bijekce*), pokud je to prosté zobrazení na B.

3.4. Příklady.

1) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = x^2$ není prosté ani na $\mathbb{R}$: například $f(1) = f(-1)$, obor hodnot je $R(f) = \langle 0, \infty) \neq \mathbb{R}$.

2) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = \mathrm{e}^x$ je prosté, není na $\mathbb{R}$: obor hodnot je $R(f) = (0, \infty) \neq \mathbb{R}$.

3) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = x^3 - x^2$ není prosté, je na $\mathbb{R}$: například $f(0) = f(1)$.

4) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = x^3$ je vzájemně jednoznačné.

□ Zobrazení můžeme skládat, obrazy při jednom zobrazení mohou být vzory při dalším zobrazení.

3.5. Definice. Mějme zobrazení $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Zobrazení $g \circ f\colon A \to C$ definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

nazýváme *složeným zobrazením*, zobrazení f se nazývá *vnitřní zobrazení*, zobrazení g se nazývá *vnější zobrazení*.

3.6. Poznámka. Výše uvedeným předpisem definujeme složené zobrazení i v případě, kdy $R(f) \not\subset D(g)$. Pak je ovšem definičním oborem složeného zobrazení $g \circ f$ množina $\{x \in A\colon f(x) \in B\}$.

□ Jak ukazuje následují příklad, záměnou vnitřního a vnějšího zobrazení můžeme dostat jiné složené zobrazení.

3.7. Příklad. Mějme zobrazení $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisy $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$. Pak

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 = (2x)^2 = 4x^2\,,\\ (f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) = 2g(x) = 2x^2\,.\end{aligned}$$

3.8. Definice. Mějme zobrazení $f\colon A \to B$. Zobrazení $g\colon R(f) \to A$ nazýváme *inverzní* k zobrazení f, pokud

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{pro každé } x \in A.$$

Značíme $g = f_{-1}$.

□ Jednoduchým ověřením vlastností dostaneme následující větu.

3.9. Věta. *Zobrazení $f\colon A \to B$ má inverzní zobrazení právě tehdy, když je prosté, tj. když je to vzájemně jednoznačné zobrazení $A \xrightarrow{\text{na}} R(f)$. V takovém případě existuje jediné inverzní zobrazení $f_{-1}\colon R(f) \to A$, které je také vzájemně jednoznačné a platí*

$$(f \circ f_{-1})(y) = y \quad \textit{pro každé } y \in R(f).$$

□ Zobrazení lze skládat se zobrazením k němu inverzním dvěma způsoby, v obou případech dostaneme identické zobrazení ($x \mapsto x$), které ale může být definováno na různých množinách.

3.10. Příklad. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = \mathrm{e}^x$. Obor hodnot zobrazení f je $R(f) = (0, +\infty)$, f je prosté zobrazení a tedy vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$. Existuje proto inverzní zobrazení $f_{-1}\colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$. Toto zobrazení značíme $f_{-1}(y) = \ln y$. Platí

$$\begin{aligned}(f_{-1} \circ f)(x) &= \ln \mathrm{e}^x = x\,, && x \in \mathbb{R}\,,\\ (f \circ f_{-1})(y) &= \mathrm{e}^{\ln y} = y\,, && y \in (0, +\infty)\,.\end{aligned}$$

□ Budeme se zabývat hlavně zobrazeními mezi číselnými množinami — takovýmto zobrazením se říká funkce.

3.11. Definice. (*Reálná*) *funkce* (*reálné proměnné*) je zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde A je podmnožina $\mathbb{R}$.

3.12. Poznámky.

1) Speciálním příkladem funkce je posloupnost (definiční obor je množina přirozených čísel). Nás budou obvykle zajímat funkce definované na intervalech nebo jejich sjednoceních.

2) Symbol $f(x)$ označuje hodnotu funkce f v bodě x. Někdy se tím označuje i funkce sama, například místo „funkce f definovaná předpisem $f(x) = x^2$“ říkáme stručněji „funkce $f(x) = x^2$“ případně mluvíme o „funkci x^2“.

3) Pokud při zadávání funkce funkčním předpisem není stanoven definiční obor, uvažujeme největší možný. Například za definiční obor funkce f definované předpisem $f(x) = \sqrt{x}$ bereme interval $\langle 0, +\infty)$ (pokud není stanoveno jinak).

□ Někdy pracujeme s funkcemi, které mají stejný funkční předpis, ale liší se definičním oborem. Například při hledání inverzní funkce se budeme omezovat na podmnožinu definičního oboru.

3.13. Definice. *Zúžení funkce* $f\colon A \to \mathbb{R}$ na množinu $B \subset A$ je funkce $g\colon B \to \mathbb{R}$, pro kterou je $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in B$.

□ Množinu reálných čísel znázorňujeme přímkou — reálnou osou. Podobně funkci můžeme znázornit body v rovině.

3.14. Definice. *Graf funkce* $f\colon A \to \mathbb{R}$ je množina $\{[x, f(x)] \colon x \in A\}$ bodů v rovině.

3.15. Tvrzení. *Graf inverzní funkce* (*pokud existuje*) *je symetrický s grafem původní funkce podle osy prvního a třetího kvadrantu* (*přímky o rovnici* $y = x$).

3.16. Příklad. Funkce $f(x) = x^2$ není prostá ($f(-1) = f(1)$), nemá tedy inverzní funkci. Pokud se omezíme na definiční obor $D(f) = \langle 0, +\infty)$, pak je prostá a existuje k ní inverzní funkce $f_{-1}\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, kterou označujeme $\sqrt{x}$. Grafy jsou znázorněny na obrázku 3.1.

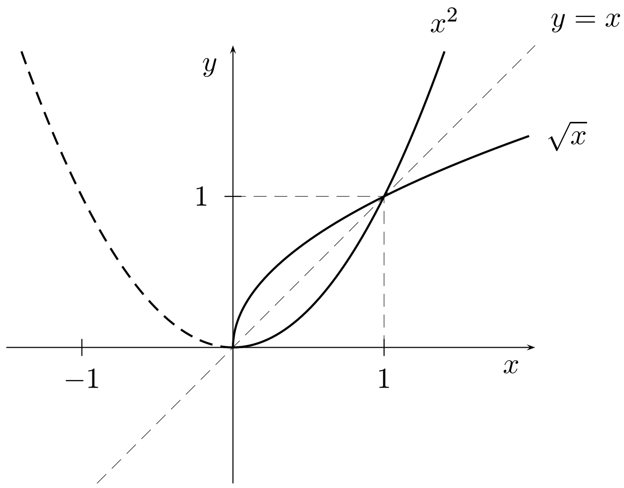
□ Další důležité pojmy jsou pojmy monotonie a omezenosti funkcí. Abychom nemuseli v některých úvahách zužovat definiční obor, zavedeme tyto pojmy pro podmnožiny definičního oboru.

3.17. Definice. Funkce f se nazývá *omezená* (resp. *zdola omezená*, *shora omezená*) *na množině* $A \subset D(f)$, pokud je omezená (resp. zdola omezená, shora omezená) množina $f(A)$. Pokud není množina A upřesněna, máme na mysli celý definiční obor funkce f.

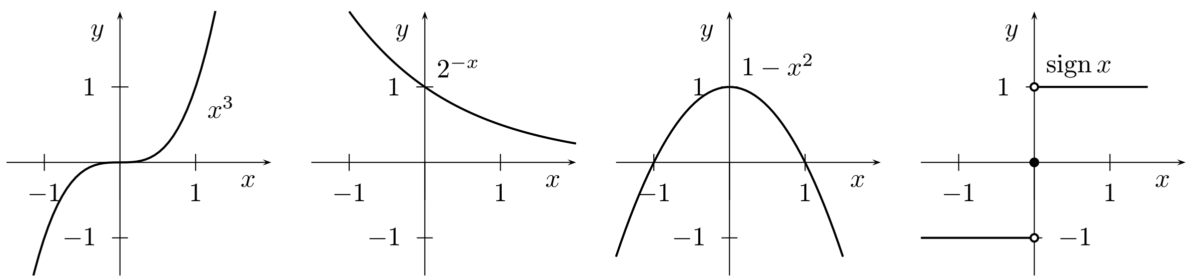
3.18. Poznámka. Funkce je tedy omezená právě tehdy, když je omezená zdola i shora.

3.19. Příklady. (Viz obrázek 3.2.)

1) Funkce x^3 není omezená ani zdola, ani shora.
2) Funkce 2^{-x} je omezená zdola ($2^{-x} > 0$), není omezená shora.
3) Funkce $1 - x^2$ je omezená shora ($1 - x^2 \leq 1$), není omezená zdola.



Obrázek 3.1: Příklad grafu inverzní funkce.



Obrázek 3.2: Ilustrace k pojmům omezenosti, monotonie, sudosti a lichosti funkce.

4) Funkce

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1\,, & x < 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ 1\,, & x > 0 \end{cases}$$

je omezená ($-1 \le \operatorname{sign} x \le 1$).

3.20. Definice. Funkce f se nazývá *rostoucí* (resp. *klesající*, *neklesající*, *nerostoucí*) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$, $f(x) \le f(y)$, $f(x) \ge f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$.

Funkce se nazývá *monotonní* (resp. *ryze monotonní*) na množině $A \subset D(f)$, pokud je na množině A neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající).

Pokud není množina A upřesněna, máme na mysli celý definiční obor funkce f.

□ Rostoucí funkce je neklesající, klesající funkce je nerostoucí, ryze monotonní funkce je monotonní. Konstantní funkce jsou jediné funkce, které jsou zároveň nerostoucí i neklesající.

3.21. Příklady. (Pro 1)–4) viz obrázek 3.2.)

1) Funkce x^3 je rostoucí.
2) Funkce 2^{-x} je klesající.
3) Funkce $1 - x^2$ není monotonní, je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$, klesající na $\langle 0, +\infty)$.
4) Funkce $\operatorname{sign} x$ je neklesající.
5) Funkce $1/x$ je klesající na $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, ale není klesající: $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

□ Snadno nahlédneme, že platí následující věta.

3.22. Věta. *Rostoucí* (*resp. klesající*) *funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí* (*resp. klesající*).

□ Při hledání inverzní funkce se tedy obvykle omezíme na interval, na kterém je funkce ryze monotonní.

□ Další vlastnosti funkcí popisují určitou symetrii grafu.

3.23. Definice. Funkce f se nazývá

1) *sudá*, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé x z definičního oboru funkce f;
2) *lichá*, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé x z definičního oboru funkce f.

□ Definice sudosti a lichosti v sobě obsahují i podmínku, aby hodnota $-x$ byla v definičním oboru funkce, pokud je hodnota x v tomto definičním oboru. Definiční obory sudých a lichých funkcí jsou tedy na reálné ose symetrické vzhledem k počátku. Graf sudé funkce je symetrický vzhledem k ose y, graf liché funkce je symetrický vzhledem k počátku souřadnic. Příklady sudých (lichých) funkcí jsou sudé (liché) mocniny:

3.24. Příklady. (Viz obrázek 3.2.)

1) Funkce $f(x) = x^3$ je lichá: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.
2) Funkce $f(x) = 1 - x^2$ je sudá: $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

3.25. Poznámky.

1) Je-li f lichá funkce, která je definována v bodě 0, pak $f(0) = f(-0) = -f(0)$ a tedy $f(0) = 0$.
2) Součet sudých (lichých) funkcí je funkce sudá (lichá).
3) Součin a podíl sudých funkcí je funkce sudá, součin a podíl dvou lichých funkcí je funkce sudá, součin (podíl) sudé a liché funkce je funkce lichá.

3.26. Definice. Funkce f se nazývá *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud pro každé $x \in D(f)$ platí

$$f(x + p) = f(x - p) = f(x)\,.$$

3.27. Poznámka. Z podmínky vyplývá, že je-li funkce definována v bodě x, pak je definována i v bodech $x \pm p$, $x \pm 2p$, ..., tedy v nekonečně mnoha bodech. Je-li p perioda funkce, pak i její kladné celočíselné násobky jsou periodou. Nejmenší perioda se nazývá *základní perioda*.

Základní perioda nemusí pro periodickou funkci existovat — například pro konstantní funkci na $\mathbb{R}$ je periodou každé kladné číslo, nejmenší perioda neexistuje.

3.28. Příklad. Funkce $\sin x$ je periodická se základní periodou 2π.

□ Funkce můžeme „bod po bodu" porovnávat, sčítat, odčítat, násobit a dělit.

3.29. Definice. *Uspořádání funkcí* f, g:

1) $f < g$ na množině A znamená, že $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in A$;
2) $f \le g$ na množině A znamená, že $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in A$.

3.30. Definice. Pro funkce f, g definujeme *součet*, *rozdíl*, *součin* a *podíl*:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x)\,, && x \in D(f) \cap D(g)\,, \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,, && x \in D(f) \cap D(g)\,, \\ \left(\tfrac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\,, && x \in D(f) \cap D(g) \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ g(x) \ne 0\}\,. \end{aligned}$$

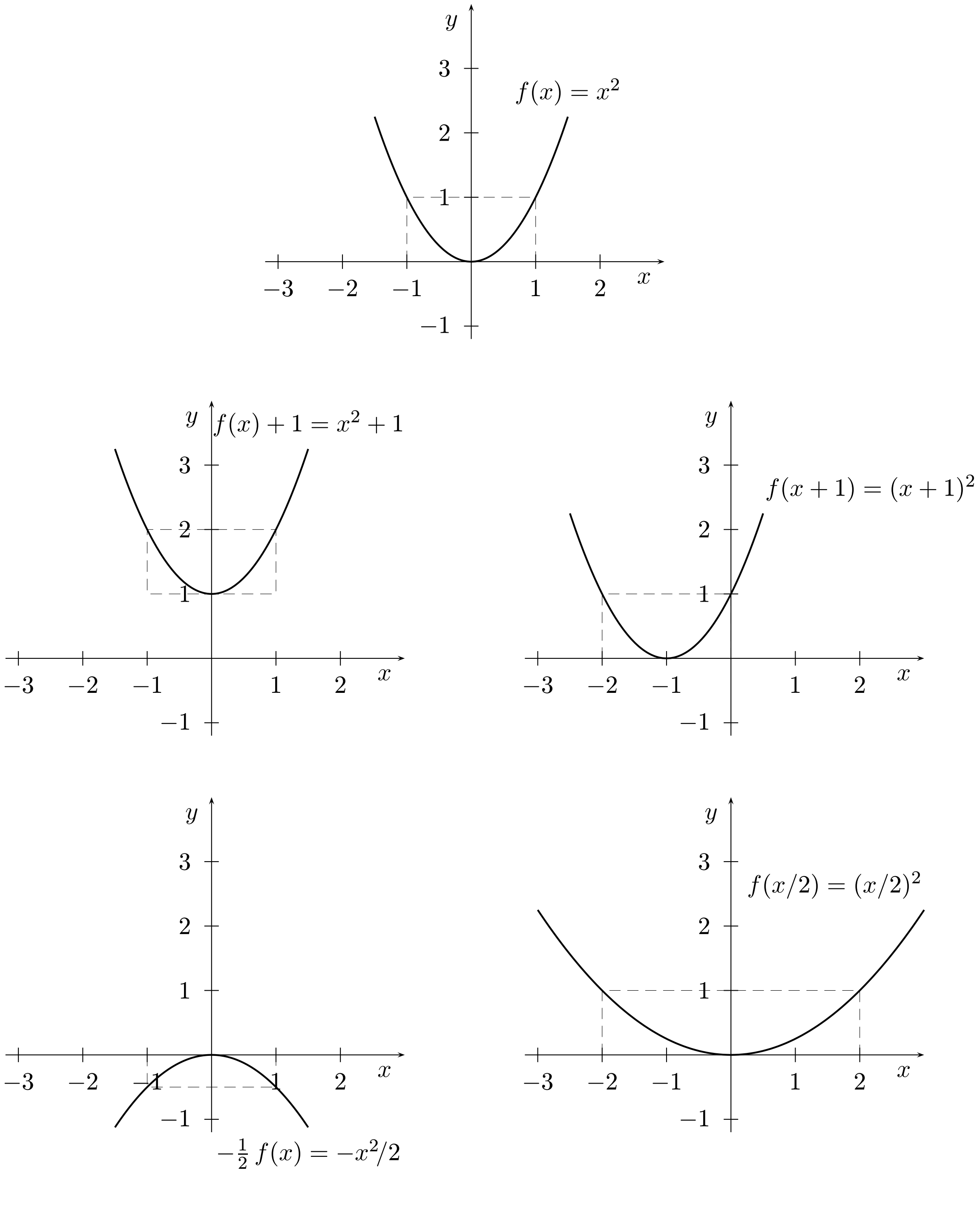
□ Uvedli jsme, co se stane s grafem funkce, pokud přejdeme k inverzní funkci. Podívejme se teď na výsledky skládání s lineární funkcí.

3.31. Věta. *Nechť f je funkce, c je reálné číslo.*

1) *Graf funkce $f(x) + c$ dostaneme z grafu funkce $f(x)$ posunutím o $|c|$ v kladném směru osy y pro $c \ge 0$ a v záporném směru osy y pro $c \le 0$.*
2) *Graf funkce $f(x + c)$ dostaneme z grafu funkce $f(x)$ posunutím o $|c|$ v záporném směru osy x pro $c \ge 0$ a v kladném směru osy x pro $c \le 0$.*
3) *Graf funkce $c\,f(x)$ dostaneme z grafu funkce $f(x)$ dilatací vzhledem k ose x (tj. roztažením ve směru osy y) s koeficientem c (pro $|c| < 1$ jde o stažení, pro $c < 0$ navíc o překlopení vzhledem k ose x).*
4) *Graf funkce $f(cx)$ pro $c \ne 0$ dostaneme z grafu funkce $f(x)$ dilatací vzhledem k ose y s koeficientem $1/c$ (pro $|c| > 1$ jde o stažení, pro $c < 0$ navíc překlopení vzhledem k ose y). Je-li funkce f definována v bodě 0, pak pro $c = 0$ dostaneme graf konstantní funkce.*

3.32. Příklad. Grafy funkcí $f(x) = x^2$, $f(x)+1 = x^2+1$, $f(x+1) = (x+1)^2$, $-\frac{1}{2}\,f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2$ a $f\left(\frac{1}{2}\,x\right) = \frac{1}{4}\,x^2$ jsou znázorněny na obrázku 3.3 na straně 29.

□ Uveďme teď přehled základních funkcí.



Obrázek 3.3: Ukázky transformace grafu pro skládání s lineární funkcí.

Mocniny

□ Hodnoty funkce x^n pro $n \in \mathbb{N}$ dostaneme opakovaným násobením. Funkce $x^{1/n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ je inverzní funkce k funkci x^n (pro n sudé jen k jejímu zúžení na interval $\langle 0, +\infty))$. Záporné celočíselné mocniny dostaneme přechodem k převrácené hodnotě: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (pro $x \neq 0$), „nultou" mocninu x^0 pokládáme rovnu 1 (i pro $x = 0$). Přehledy grafů a vlastností těchto funkcí i funkcí k nim inverzních jsou uvedeny na obrázcích a připojených tabulkách 3.4 a 3.5 na stranách 31 a 32. Inverzní funkci k x^0 neuvažujeme — pro konstantní funkci bychom se museli omezit na jednoprvkovou množinu.

□ Racionální mocninu $x^{p/q}$ pro nesoudělná čísla $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ dostaneme složením funkce x^p a funkce $x^{1/q}$. Iracionální mocninu x^a bychom mohli pro $x > 0$ definovat následujícím způsobem: existuje (viz kapitola 2) posloupnost racionálních čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergující k a; dá se dokázat, že existuje číslo, které je limitou posloupnosti $(x^{a_n})_{n=1}^{\infty}$ pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ racionálních čísel s limitou a; toto číslo značíme právě x^a. S výhodou budeme používat vyjádření pomocí exponenciální funkce a logaritmu (viz dále):

$$x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}, \qquad x > 0\,.$$

Grafy funkcí x^a $(a \in \mathbb{R})$ jsou znázorněny na obrázku 3.6 na straně 33.

□ Kombinací nezáporných celočíselných mocnin dostáváme tzv. *polynomy* (*mnohočleny*). Polynom *stupně* $n \geq 0$ má tvar

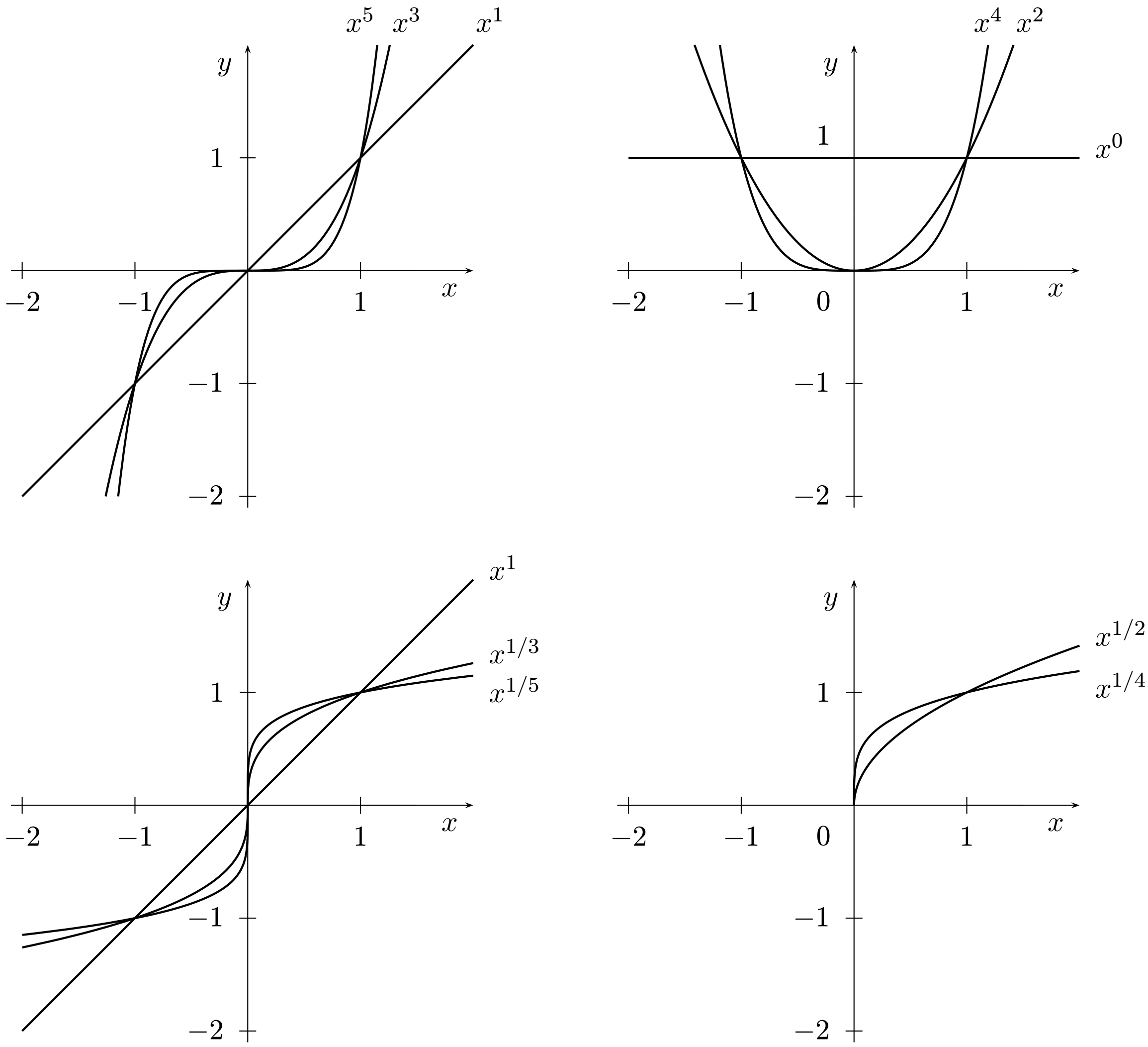
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,.$$

Stupeň nulového polynomu (nulové funkce) pokládáme roven -1. Polynomy hrají významnou roli například při aproximaci funkcí, protože hodnoty polynomů se dobře počítají.

Exponenciální a logaritmické funkce

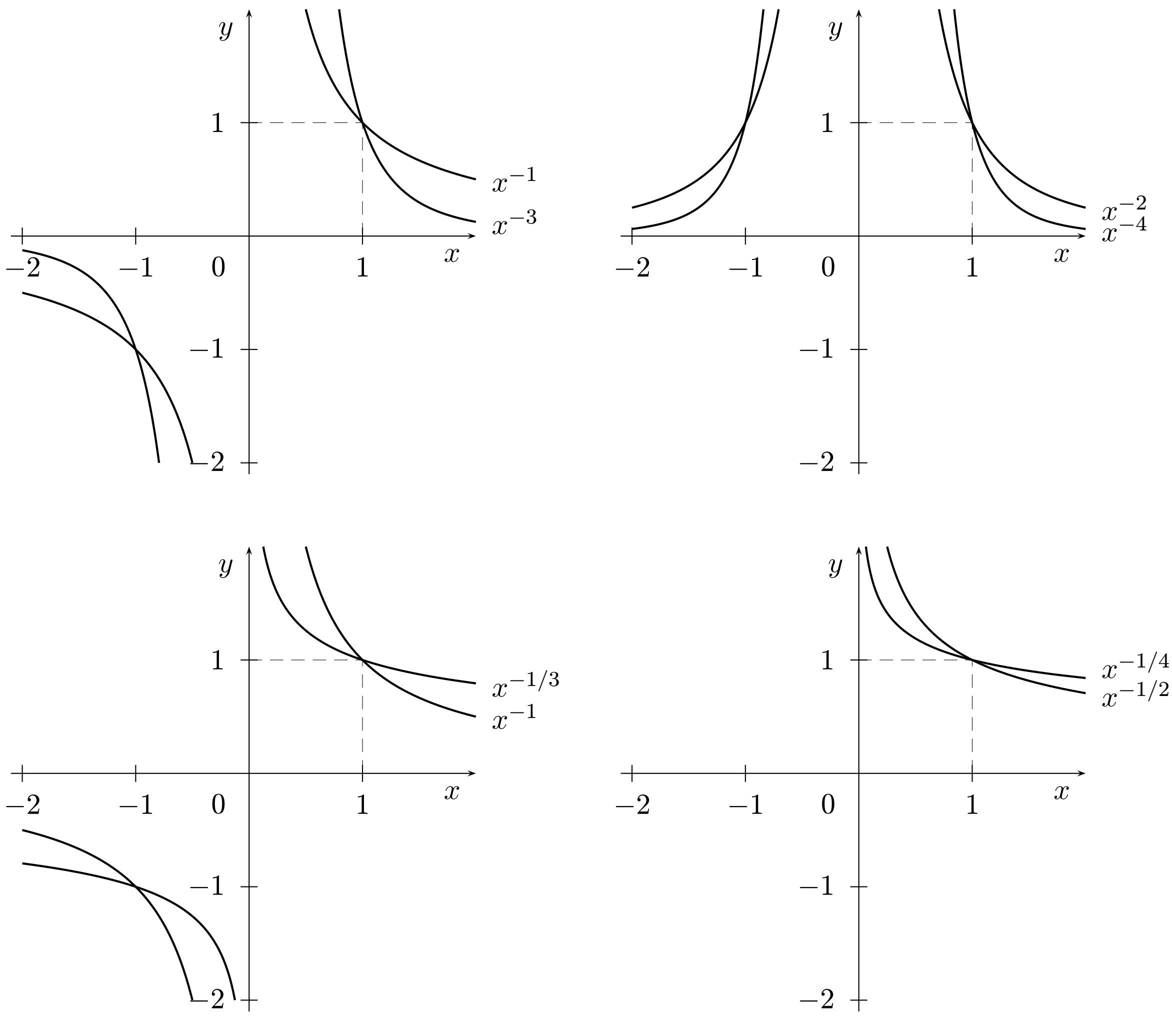
□ Exponenciální funkce jsou jistým opakem mocnin, při umocňování máme konstantní základ a mění se exponent. *Exponenciální funkce* se *základem* $a > 0$ je funkce a^x. Pokud neurčujeme základ, máme na mysli Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$, funkci e^x značíme také $\exp x$. Opět narážíme na problém s definicí a^x pro iracionální exponent. Jeho řešení uvedené pro mocniny bychom mohli formulovat tak, že existuje jediné spojité (viz kapitola 4) dodefinování a^x pro iracionální čísla. Můžeme se ale obejít i bez limit, existuje totiž i jediné monotonní dodefinování a^x.

□ Pro $a \neq 1$ $(a > 0)$ je funkce a^x ryze monotonní, má tedy inverzní funkci. Tu nazýváme *logaritmus se základem* a, značíme ji $\log_a x$. Logaritmus se základem 10 nazýváme *dekadický logaritmus* a značíme jednodušeji $\log x$ (základ vypouštíme), logaritmus se základem e (Eulerovo číslo) nazýváme *přirozený logaritmus* a značíme $\ln x$. Pokud nezmíníme základ, máme na mysli přirozený logaritmus. Grafy exponenciálních funkcí a logaritmů jsou na obrázku 3.7 na straně 34.



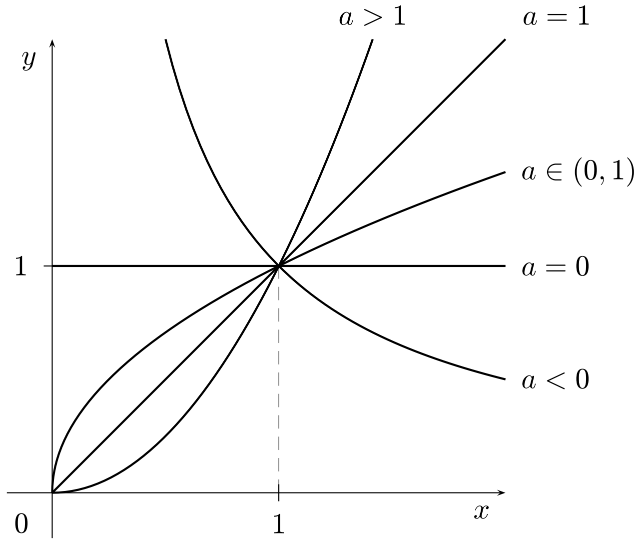
funkce x^n	$n \in \mathbb{N}$ liché	$n \in \mathbb{N}$ sudé	$n = 0$
definiční obor	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
obor hodnot	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty)$	$\{1\}$
omezenost	ne	zdola	omezená
monotonie	rostoucí	$(-\infty, 0\rangle$ klesající	konstantní
		$\langle 0, +\infty)$ rostoucí	
další vlastnosti	lichá	sudá	sudá

Obrázek 3.4: Přehled funkcí x^n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ a funkcí k nim inverzních.



funkce x^{-n}	$n \in \mathbb{N}$ liché	$n \in \mathbb{N}$ sudé
definiční obor	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
obor hodnot	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$
omezenost	ne	zdola
monotonie	$(-\infty, 0)$ klesající	$(-\infty, 0)$ rostoucí
	$(0, +\infty)$ klesající	$(0, +\infty)$ klesající
další vlastnosti	lichá	sudá

Obrázek 3.5: Přehled funkcí x^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ a funkcí k nim inverzních.



Obrázek 3.6: Grafy funkcí x^a $(a \in \mathbb{R})$.

□ Pro operace s exponenciálními funkcemi a logaritmy platí důležité rovnosti.

3.33. Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \,, \qquad (a^x)^y = a^{xy} \,.$$

Pro každé $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ platí

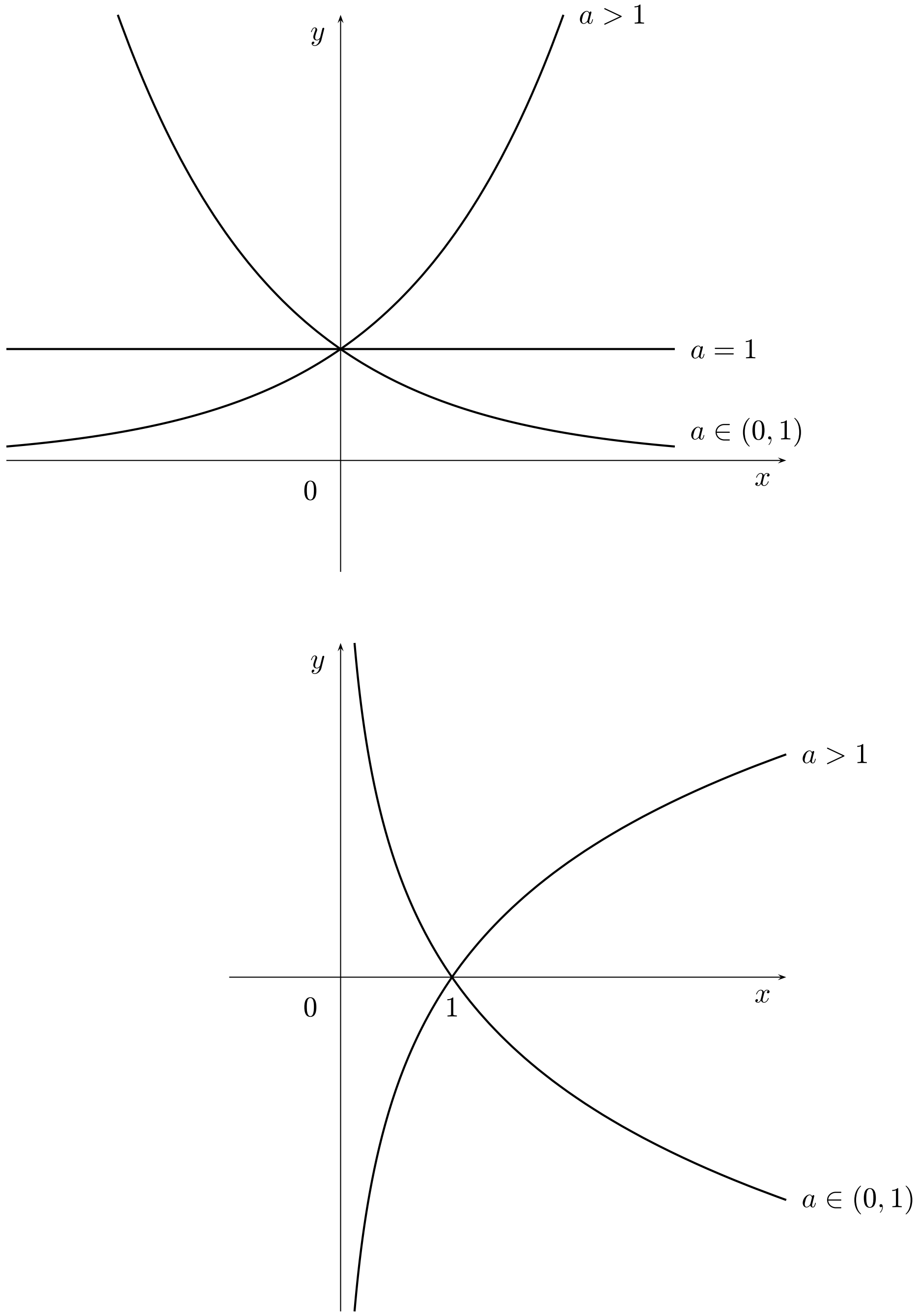
$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \,, && x, y > 0 \,, \\ \log_a x^y &= y \log_a x \,, && x > 0 \,. \end{aligned}$$

3.34. Důsledek. *Pro každé $a, b \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ platí (druhý řádek je zvláštní případ pro $b = \mathrm{e}$):*

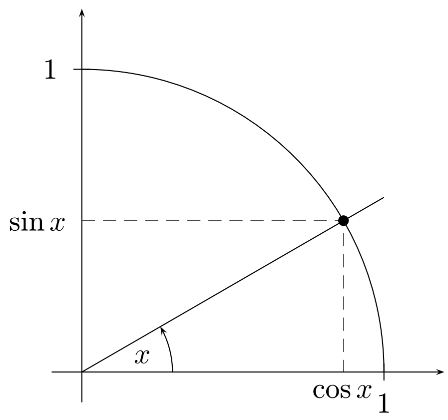
$$a^x = b^{x \log_b a} \,, \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \,,$$

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} \,, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \,.$$

3.35. Poznámka. Grafy různých exponenciálních funkcí se tedy liší (věta 3.31) jen dilatací vzhledem k ose y (tomu odpovídá změna měřítka na ose x a případně orientace této osy) a grafy různých logaritmických funkcí se liší jen dilatací vzhledem k ose x (tomu odpovídá změna měřítka na ose y a případně orientace této osy).



Obrázek 3.7: Grafy funkcí a^x, $\log_a x$.



Obrázek 3.8: Zavedení goniometrických funkcí.

Goniometrické a cyklometrické funkce

□ *Goniometrické funkce sinus* $(\sin x)$ a *kosinus* $(\cos x)$ lze zavést jako souřadnice bodu jednotkové kružnice pro daný úhel průvodiče (viz obrázek 3.8). Dále se definují funkce *tangens* a *kotangens* předpisy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Přehled základních goniometrických funkcí a k nim inverzních cyklometrických funkcí *arkussinus* $(\arcsin x)$, *arkuskosinus* $(\arccos x)$, *arkustangens* $(\operatorname{arctg} x)$ a *arkuskotangens* $(\operatorname{arccotg} x)$, je na obrázcích 3.9 a 3.10 na stranách 36 a 37.

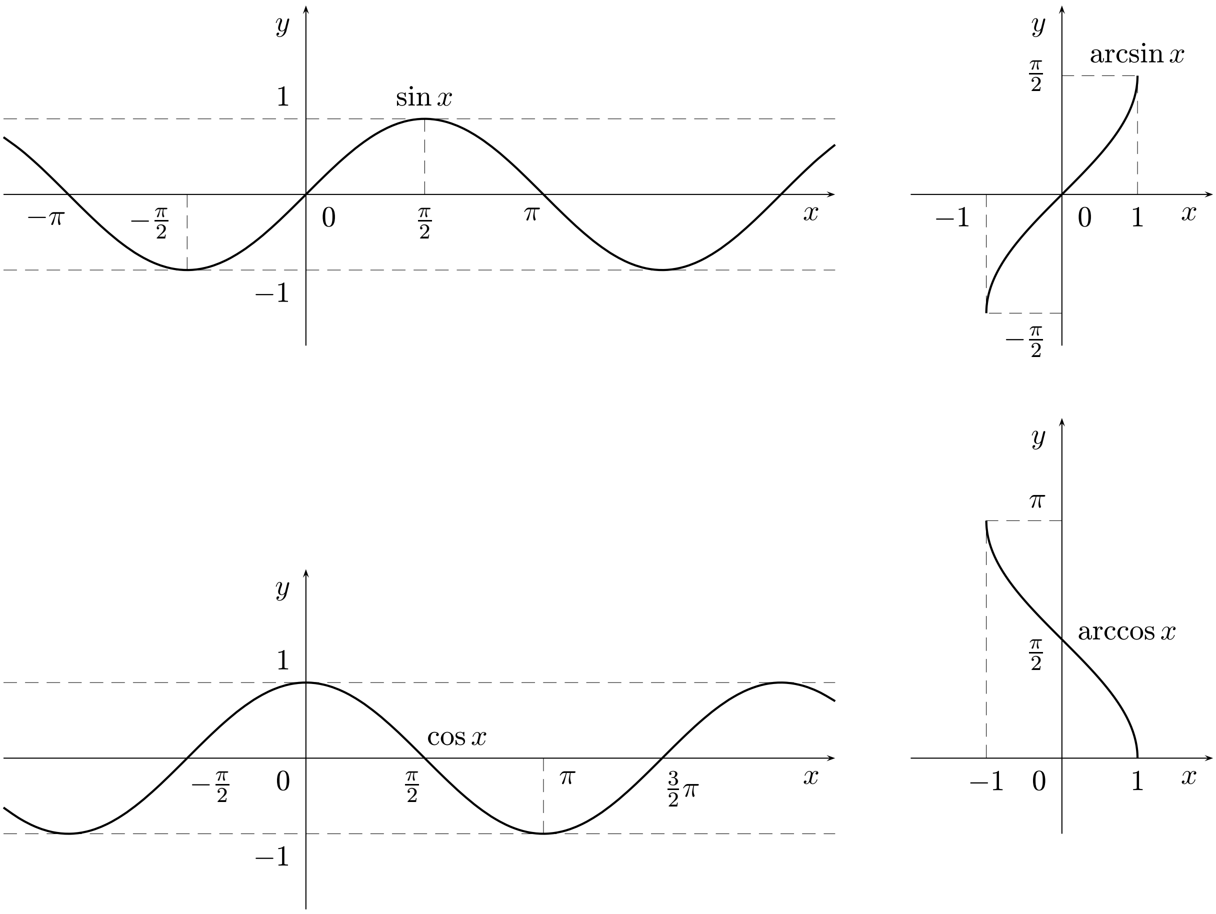
3.36. Tvrzení (ve druhém řádku tzv. *součtové vzorce*). *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$
$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y, \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

□ Z těchto identit dostaneme další identity.

3.37. Důsledky. *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:*

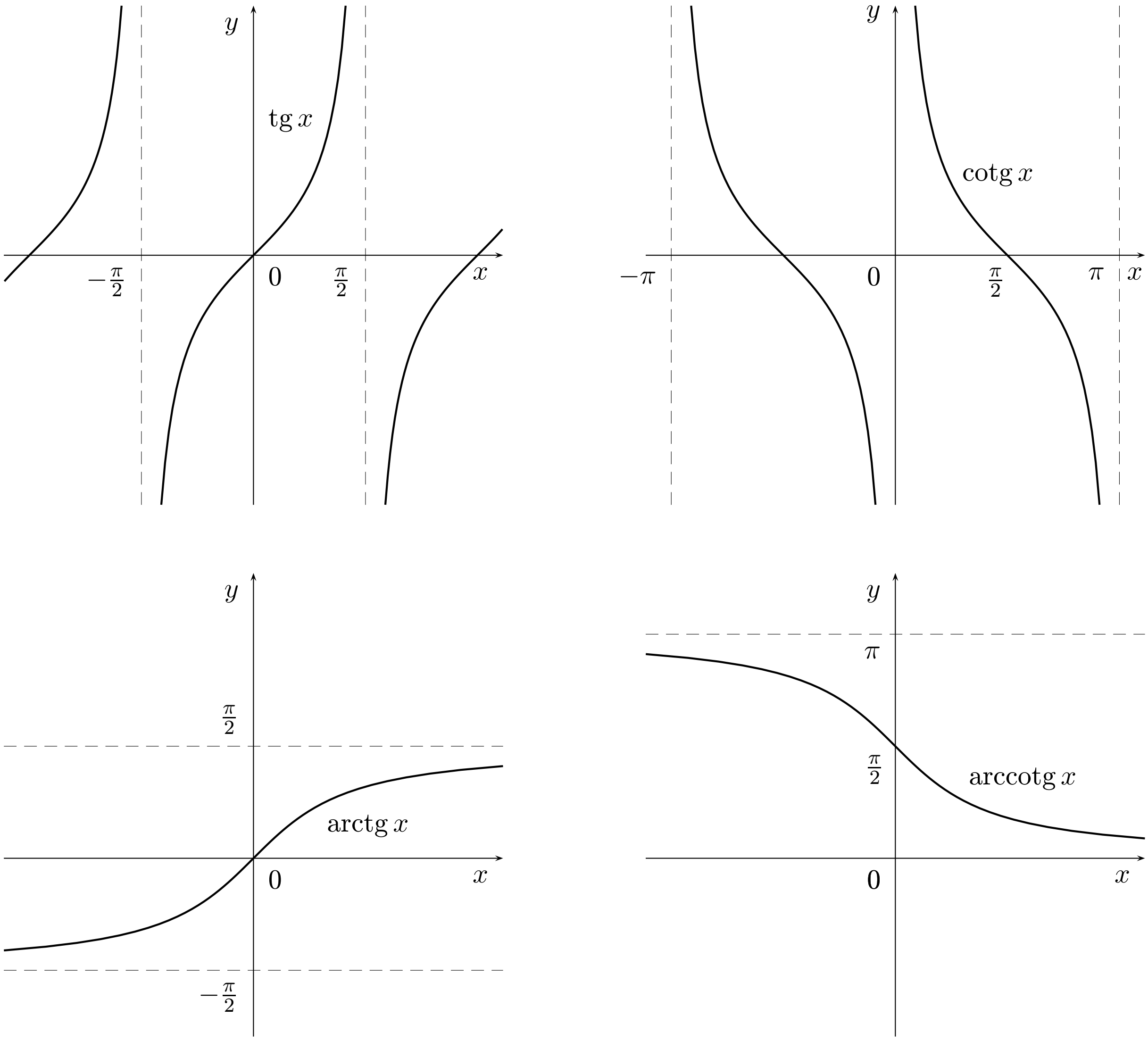
$$\sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2}), \qquad \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}),$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x,$$
$$\sin 2x = 2\sin x\,\cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$



	$\sin x$	$\cos x$
definiční obor	$\mathbb{R}$	
obor hodnot	$\langle -1, 1 \rangle$	
omezenost	omezená	
monotonie ($k \in \mathbb{Z}$)	$\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ rostoucí	$\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$ rostoucí
	$\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \rangle$ klesající	$\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ klesající
další vlastnosti	lichá	sudá
	periodická, základní perioda 2π	

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Obrázek 3.9: Přehled funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$.



	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
definiční obor	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$
obor hodnot	$\mathbb{R}$	
omezenost	ne	
monotonie ($k \in \mathbb{Z}$)	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ rostoucí	$(k\pi, \pi + k\pi)$ klesající
další vlastnosti	lichá	
	periodická, základní perioda π	

Obrázek 3.10: Přehled funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

□ Někdy se uvádějí vzorce pro výpočet sinu a kosinu rozdílu, ty dostaneme ze součtových vzorců a z toho, že funkce sinus je lichá a funkce kosinus je sudá.

□ Při výpočtu některých integrálů (například koeficientů Fourierových řad) se dají s výhodou použít následující identity, které lze ověřit dosazením do součtových vzorců.

3.38. Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\sin x \, \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, \qquad \cos x \, \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2},$$
$$\sin x \, \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}.$$

□ Při odvozování derivací funkcí sinus a kosinus využijeme další identity.

3.39. Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \, \sin \tfrac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \, \sin \tfrac{x-y}{2}.$$

Důkaz. Použitím součtových vzorců pro sinus a kosinus součtu dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= \sin\left(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}\right) = \\
&= \sin \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} + \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} - \sin \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} + \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} = \\
&= 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}, \\
\cos x - \cos y &= \cos\left(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}\right) = \\
&= \cos \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} - \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} - \cos \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} - \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} = \\
&= -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

□ Goniometrické funkce $\cos x$ a $\sin x$ se dají vyjádřit jako reálná a imaginární část komplexní funkce reálné proměnné

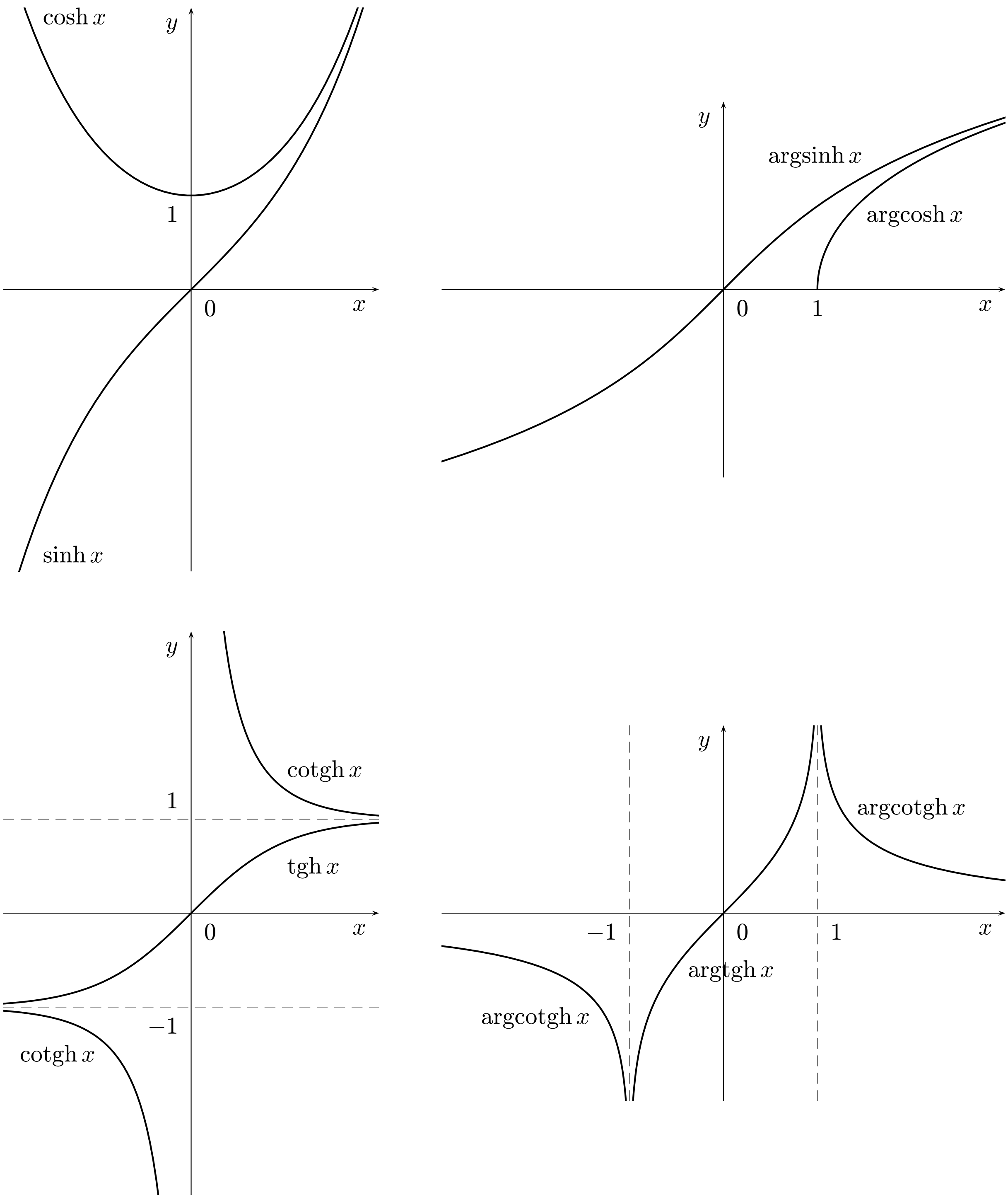
$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j} \sin x,$$

tedy

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}.$$

Podobně se v reálném oboru dají zavést *hyperbolické* funkce: *hyperbolický sinus* ($\sinh x$), *hyperbolický kosinus* ($\cosh x$), *hyperbolický tangens* ($\operatorname{tgh} x$), *hyperbolický kotangens* ($\operatorname{cotgh} x$):

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$



Obrázek 3.11: Grafy hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Přehled grafů těchto funkcí a k nim inverzních *hyperbolometrických* funkcí je na obrázku 3.11 na straně 39.

□ Stejně jako pro goniometrické funkce, i pro hyperbolické funkce platí řada identit, které se dají ověřit přepisem pomocí exponenciální funkce. Vypadají podobně, občas se liší znaménkem.

3.40. Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y\,,\\ \cosh(x+y) &= \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y\,,\\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,.\end{aligned}$$

Důkaz. Dokážeme jen poslední identitu (ostatní se dokazují podobně):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1\,.$$

□ Hyperbolometrické funkce lze vyjádřit pomocí logaritmu.

3.41. Příklad. Ukažte, že platí

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\,\bigr)\,, \qquad x \in \langle 1, +\infty)\,.$$

Řešení. Označme $\operatorname{argcosh} x = y$, $e^y = z$. Pak

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\,.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro z

$$z^2 - 2xz + 1 = 0\,,$$

která má dvě kladná řešení $z = x \pm \sqrt{x^2-1}$, pro která dostaneme $y = \ln z = \ln\bigl(x \pm \sqrt{x^2-1}\,\bigr)$. Dostali jsme dvě řešení rovnice $\cosh y = x$ (ověřte si, že jsou navzájem opačná), funkce $\operatorname{argcosh} x$ vybírá nezáporné z nich, tedy $\operatorname{argcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\,\bigr)$.

Neřešené úlohy

1. Určete definiční obor funkce:

a) $\dfrac{x^2}{x+1}$; b) $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$; c) $\sqrt{2+x-x^2}$;

d) $\sqrt{3x-x^3}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; f) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}$;

g) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; h) $\sqrt{1-|x|}$; i) $\log_2 \log_3 \log_4 x$;

j) $\dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1}$; k) $\ln|\sin x|$; l) $\arcsin\sqrt{\dfrac{2x+1}{2}}$;

m) $\bigl(\operatorname{arctg}(x-1)\bigr)^{1/(x-3)}$; n) $\log\bigl(1-\log(x^2-4x+13)\bigr)$.

2. Vyšetřete omezenost funkce:

a) $\dfrac{3}{x-2}$; b) x^2+6x-4; c) $-2x^2+x+5$; d) $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3. Dokažte:

a) Kladný násobek rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) funkce je funkce rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající).

b) Záporný násobek rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) funkce je funkce klesající (resp. nerostoucí, neklesající, rostoucí).

c) Součet rostoucích (resp. neklesajících, nerostoucích, klesajících) funkcí je funkce rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající).

d) Složení dvou rostoucích i dvou klesajících funkcí je funkce rostoucí, složení rostoucí a klesající funkce je funkce klesající.

4. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá:

a) $5x-x^3$; b) x^4+3x^2-1; c) x^2+3x-2;

d) 2^x-2^{-x}; e) $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; f) $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$;

g) $\log\bigl(\sqrt{x^2+1}+x\bigr)$; h) $\dfrac{\sin x}{x}$; i) 2^{-x^2};

j) $\sin x-\cos x$; k) $\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

5. Dokažte:

a) Násobek sudé (liché) funkce je funkce sudá (lichá). Součet sudých (lichých) funkcí je funkce sudá (lichá). (Jak sudé tak liché funkce na dané množině tvoří lineární prostor.)

b) Součin (podíl) dvou sudých i dvou lichých funkcí je funkce sudá, součin (podíl) liché a sudé funkce je funkce lichá.

c) Složení dvou funkcí je sudá funkce, jestliže vnitřní funkce je sudá. Složení dvou lichých funkcí je funkce lichá, složení sudé a liché funkce je funkce sudá.

6. Vyšetřete, zda je funkce periodická, a pokud ano, určete její periodu:

a) $\sin 3x$; b) $5\cos 2x$; c) $4\sin \pi x$;

d) $-3\cos(4x+5)$; e) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$; f) $\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

g) $2\sin 3x + 3\sin 2x$; h) $\sin\bigl(5\pi x + \frac{\pi}{4}\bigr) - \cos\bigl(\frac{\pi}{6} - 3\pi x\bigr)$.

7. Určete periody *Dirichletovy funkce*

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

8. Dokažte:

a) Součet (rozdíl, součin, podíl) periodických funkcí se stejnou periodou má tutéž periodu (může mít i menší).

b) Je-li podíl period dvou periodických funkcí racionální číslo, pak tyto funkce mají společnou periodu.

9. Dokažte:

a) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; b) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.

10. Dokažte:

a) $\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y$;

b) $\cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$.

11. Odvoďte následující vztahy:

a) $\operatorname{argsinh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$;

b) $\operatorname{argtgh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,, \qquad x \in (-1,1)$;

c) $\operatorname{argcotgh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\,, \qquad x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Výsledky

1. a) $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$; b) $(-\infty,-2) \cup (-2,3) \cup (3,+\infty)$; c) $\langle -1,2\rangle$; d) $(-\infty,-\sqrt{3}\,\rangle \cup \langle 0,\sqrt{3}\,\rangle$; e) $(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$; f) $(-\infty,-1\rangle \cup \{1\}$; g) $\emptyset$; h) $\langle -1,1\rangle$; i) $(4,+\infty)$; j) $(-1,0) \cup (0,+\infty)$; k) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(k\pi,(k+1)\pi\bigr)$; l) $\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$; m) $(1,3) \cup (3,+\infty)$; n) $(1,3)$.

2. a) není omezená ani zdola, ani shora; b) omezená zdola; c) omezená shora; d) omezená.

4. a) lichá; b) sudá; c) ani sudá ani lichá; d) lichá; e) lichá; f) lichá; g) lichá; h) sudá; i) sudá; j) ani sudá ani lichá; k) sudá.

6. a) $\frac{2}{3}\pi$; b) π; c) 2; d) $\frac{1}{2}\pi$; e) π; f) není periodická; g) 2π; h) 2.

7. a) $\mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$.

Kapitola 4

Limity a spojitost funkcí

□ Pojem limity funkce je jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Popisuje vlastnost určitého „blížení se“ funkční hodnoty, pokud se argument „blíží“ nějaké hodnotě. Pojem „blížení se“ můžeme zavést pomocí „blízkosti“, tj. pomocí malých (zmenšujících se) okolí bodu.

Například pro funkci $f(x) = \frac{1}{|x|}$ (viz obr. 4.1), pokud se x blíží k 0 (píšeme $x \to 0$), vidíme, že funkční hodnoty rostou nade všechny meze, tedy $f(x) \to +\infty$. To je charakterizováno vlastností, že pro každé okolí U bodu $+\infty$ existuje prstencové okolí P bodu 0, které se funkcí f zobrazí do okolí U, tj. graf graf funkce f leží v množině $\mathbb{R} \times U$. Jinými slovy k okolí U bodu $+\infty$ na ose y hledáme vzor $f_{-1}(U)$, tedy pro která x graf funkce f padne do množiny $\mathbb{R} \times U$, a vyžadujeme, aby tento vzor obsahoval některé prstencové okolí bodu 0.

Podobně pro $x \to +\infty$ vidíme, že $f(x) \to 0$, neboli pro každé okolí U bodu 0 existuje prstencové okolí P bodu $+\infty$ takové, že $f(P) \subset U$.

Je třeba podotknout, že hodnota funkce v bodě, ve kterém zjišťujeme limitu, nás vůbec nezajímá, funkce v tomto bodě nemusí být dokonce definována (viz oba uvedené případy), proto na ose x uvažujeme **prstencová** okolí.

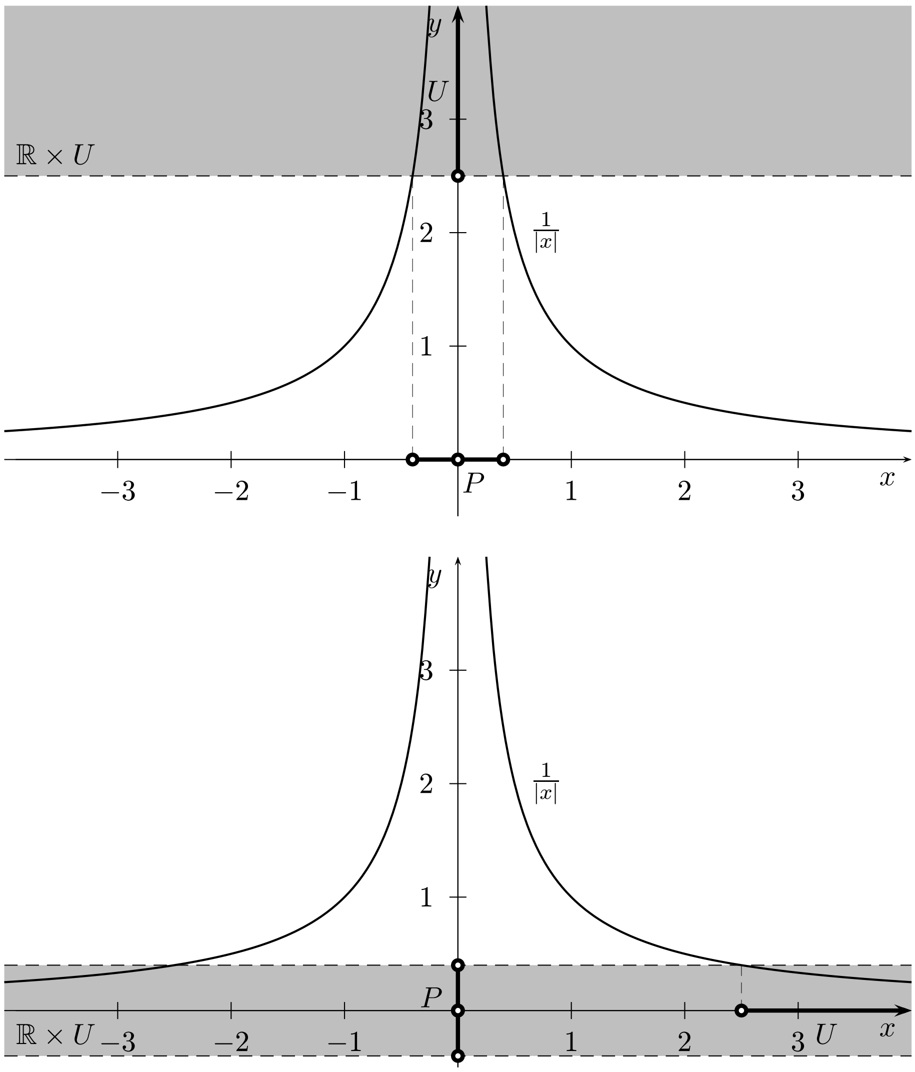
4.1. Definice. Řekneme, že funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a *limitu* $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$. Značíme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,, \qquad f(x) \xrightarrow{x \to a} b\,, \qquad f(x) \to b \text{ pro } x \to a\,.$$

4.2. Poznámka. Při ověřování limity uvažujeme libovolné okolí U uvažované limity, podmínka $f(x) \in U$ vede na nerovnici pro x.

4.3. Příklad. Dokažme, že $\lim_{x \to 0}(x^2 + 1) = 1$. Podle definice máme ke každému okolí $U = U(1, \varepsilon)$ najít prstencové okolí P bodu 0, pro které je $f(P) \subset U$. Určeme, pro která $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 + 1 \in U(1, \varepsilon)$, tedy $|(x^2 + 1) - 1| < \varepsilon$. Řešením nerovnice je $x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}\,)$. Za hledané prstencové okolí můžeme tedy vzít $P(0, \sqrt{\varepsilon}\,)$.

4.4. Poznámka. Ve výše uvedeném příkladu jsme vyřešením nerovnice dostali dokonce okolí bodu a. To nemusí vždy platit — jednak nemusí být množina řešení symetrická, jednak vůbec nemusí obsahovat bod a. V definici je podstatné, že prstencové okolí P můžeme najít pro



Obrázek 4.1: Znázornění limit $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$ a $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{|x|}$.

libovolně *malé* okolí U. Jestliže některé takové prstencové okolí najdeme, pak podmínce vyhovují i všechna menší.

□ Dokažme podle definice dvě základní limity.

4.5. Tvrzení. *Pro každé* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí*

1) $\lim_{x\to a} c = c$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$ (*limita konstantní funkce*).
2) $\lim_{x\to a} x = a$ (*limita identity*).

Důkaz. 1) Pro okolí $U = U(c,\varepsilon)$ je $f_{-1}(U) = \mathbb{R}$, můžeme vzít libovolné prstencové okolí bodu a.

2) Pro okolí $U = U(a,r)$ je $f_{-1}(U) = U$, za prstencové okolí bodu a můžeme vzít například $P(a,r)$.

□ V definici limity jsme předpokládali, že funkce je definována v některém prstencovém okolí příslušného bodu. Limitu lze obecněji definovat v hromadných bodech definičního oboru, což je pro naše účely zbytečně komplikované — nás budou zajímat hlavně funkce definované na některém intervalu (případně na jednoduchých sjednoceních intervalů). Schází nám jen definice limity v krajních bodech takovýchto intervalů (a to jen pro vlastní čísla). K tomu slouží tzv. jednostranné limity — v množině vzorů se omezíme jen na body na „jedné straně“ od bodu a.

4.6. Definice. Řekneme, že funkce f definovaná v levém (resp. pravém) prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ má v bodě a *jednostrannou limitu zleva* (resp. *zprava*) rovnu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje levé (resp. pravé) prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$. Značíme

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b\,, \qquad f(a-) = b\,, \qquad \text{resp.}$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = b\,, \qquad f(a+) = b\,.$$

Pokud potřebujeme zdůraznit, že se nejedná o limitu jednostrannou, mluvíme o *oboustranné* limitě.

4.7. Věta. *Limita funkce ve vlastním bodě existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné (pak se jim rovná i limita funkce).*

Důkaz. $\Rightarrow$: Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak k libovolnému okolí U bodu b najdeme prstencové okolí P, které se do okolí U funkcí f zobrazí. Prstencové okolí P je sjednocením levého a pravého prstencového okolí, která můžeme vzít pro ověření podmínky z definice jednostranných limit.

$\Leftarrow$: Pokud $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak k libovolnému okolí U bodu b najdeme levé prstencové okolí P_- a pravé prstencové okolí P_+, která se do okolí U funkcí f zobrazí. Jejich sjednocením dostaneme množinu obsahující prstencové okolí bodu a (za poloměr můžeme vzít menší z délek intervalů P_-, P_+), které můžeme vzít pro ověření podmínky z definice limity.

4.8. Příklad. Platí $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$ a $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sign}}{x} = 1$, takže $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje.

□ Uveďme souvislost limity funkce s limitou posloupnosti.

4.9. Věta. *Nechť f je funkce definovaná v prstencovém okolí bodu a. Pak* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *právě tehdy, když pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ čísel z $D(f) \setminus \{a\}$ s limitou rovnou a platí* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

Důkaz. $\Rightarrow$: Pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a takové, že $f(P) \subset U$. Až na konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in P$, tedy $f(a_n) \in U$.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že neplatí $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (limita neexistuje nebo je různá od b) a dokažme, že existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a přitom neplatí $b = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Uvažujme posloupnost prstencových okolí P_n bodu a definovaných pro každé

$n \in \mathbb{N}$ takto:

$$P_n = \begin{cases} P(a, \frac{1}{n}), & a \in \mathbb{R}, \\ P(a, \pm n), & a = \pm\infty. \end{cases}$$

Existuje okolí U bodu b takové, že žádné prstencové okolí bodu P se do něj funkcí f nezobrazí. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje $a_n \in P_n \cap D(f)$ takové, že $f(a_n) \notin U$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je hledanou posloupností.

□ Uvedenou větu můžeme použít různým způsobem: k důkazu neexistence limity funkce, pro výpočet limity posloupnosti pomocí limity funkce (viz poznámka 6.18).

4.10. Příklad. Limity $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ neexistují.

Řešení. Dokážeme neexistenci $\lim_{x\to\infty} \sin x$ (ostatní případy se dokazují podobně). Pro posloupnosti $(\pi n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)_{n=1}^{\infty}$ je

$$\lim_{n\to+\infty} \pi n = \lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = +\infty,$$

přitom dostaneme různé limity posloupností funkčních hodnot:

$$\lim_{n\to+\infty} \sin \pi n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

□ Hodnota řady limit vyplývá z monotonie a oboru hodnot funkce.

4.11. Věta. *Nechť f je neklesající (resp. nerostoucí) funkce na intervalu $I = (a, b)$. Pak platí*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f(I), \qquad \lim_{x\to b-} f(x) = \sup f(I), \qquad \textit{resp.}$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f(I), \qquad \lim_{x\to b-} f(x) = \inf f(I).$$

Důkaz. Dokažme, že $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f(I)$ pro f neklesající (ostatní případy se dokazují podobně). Pro každé okolí U bodu $\sup f(I)$ existuje číslo $x \in I$ tak, že $f(x) \in U$. Interval (x, b) je pak levé prstencové okolí bodu b. Protože funkce f je neklesající, je jeho obraz ve funkci f částí $\big(f(x), \sup f(I)\big) \subset U$.

□ Využitím této věty dostaneme následující limity elementárních funkcí. (Pro periodické funkce jsou uvedeny limity jen v základním intervalu.)

4.12. Tvrzení.

$$\lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} +\infty, & a < 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a > 0, \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1, & a = 0, \\ +\infty, & a > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty\,, & a\in(0,1)\,,\\ 1\,, & a=1\,,\\ 0\,, & a>1\,, \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0\,, & a\in(0,1)\,,\\ 1\,, & a=1\,,\\ +\infty\,, & a>1\,, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+} \ln x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\pi/2+} \operatorname{tg} x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pi/2-} \operatorname{tg} x = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to0+} \operatorname{cotg} x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0\,.$$

□ Dokažme řadu tvrzení o limitách funkcí. Všechna tvrzení platí i pro jednostranné limity, pro jednoduchost je formulujeme jen pro limity oboustranné.

4.13. Věta (o jednoznačnosti limity). *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Mějme funkci f a uvažujme její limity v bodě a. Pokud funkce f v bodě a žádnou limitu nemá, jsme s důkazem hotovi. Předpokládejme, že $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je uvažovanou limitou, a ukažme, že žádné jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ uvažovanou limitou není. Existují okolí U_b bodu b a U_c bodu c, která jsou disjunktní. Podle definice limity existuje prstencové okolí P_b bodu a tak, že $f(P_b) \subset U_b$. Pak ale $f(P_b) \cap U_c = \emptyset$ a neexistuje žádné prstencové okolí P_c bodu a tak, aby $f(P_c) \subset U_c$. Číslo c tedy není uvažovanou limitou.

4.14. Věta. *Má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, pak je omezená na některém prstencovém okolí bodu a.*

Důkaz. Označme $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Podle definice limity existuje k okolí $U = U(b,1)$ prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$. Na tomto prstencovém okolí bodu a je funkce f omezená.

4.15. Věta (o zachování znaménka). *Má-li funkce f v bodě a kladnou (resp. zápornou) limitu, pak je na některém prstencovém okolí bodu a kladná (resp. záporná).*

Důkaz. Má-li funkce f v bodě a nenulovou limitu, pak existuje okolí U této limity, které neobsahuje bod 0 (tvrzení 1.22). Podle definice limity k okolí U existuje prstencové okolí bodu a, na kterém funkční hodnoty padnou do okolí U. Funkce f má tedy na tomto prstencovém okolí stejné znaménko jako daná limita.

4.16. Věta. *Platí:* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *právě tehdy, když* $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz. Pro každé okolí U bodu 0 je $f(x) \in U$ právě tehdy, když $|f(x)| \in U$.

4.17. Věta (o monotonii limity). *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ *a* $f \le g$ *na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $b \le c$.

Důkaz. Předpokládejme, že $b > c$. Pak existují disjunktní okolí U_b bodu b a U_c bodu c. Z definice limity existují prstencová okolí P_f, P_g bodu a tak, že $f(P_f) \subset U_b$, $g(P_g) \subset U_c$. Na prstencovém okolí $P_f \cap P_g$ bodu a je $f > g$, což je spor s předpoklady věty.

4.18. Poznámka. Výše uvedená věta by neplatila pro ostré nerovnosti. Například pro funkce $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ je $f < g$ na každém prstencovém okolí bodu 0, přitom $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \not< 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$.

4.19. Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *a* $f \le g$ *na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$. *Je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ *a* $f \le g$ *na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Důkaz. Dokážeme první část (důkaz druhé části je podobný). Označme P_a prstencové okolí bodu a, na kterém je $f \le g$. Pro každé okolí U bodu $+\infty$ existuje prstencové okolí P_f bodu a tak, že $f(P_f) \subset U$. Pak $P_g = P_f \cap P_a$ je prstencové okolí bodu a a platí $g(P_g) \subset f(P_g) \subset f(P_f) \subset U$.

4.20. Věta (o sevření). *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$ *a* $f \le h \le g$ *na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a} h(x) = b$.

Důkaz. Mějme okolí U bodu b, máme najít prstencové okolí P bodu a tak, aby $h(P) \subset U$. Označme P_a prstencové okolí bodu a, na kterém je $f \le h \le g$. Podle definice limity existují prstencová okolí P_f, P_g bodu a tak, že $f(P_f) \subset U$ a $g(P_g) \subset U$. Položme $P = P_f \cap P_g \cap P_a$. P je prstencové okolí bodu a a pro každé $x \in P$ je $f(x), g(x) \in U$ a $h(x)$ je mezi $f(x)$ a $g(x)$, tedy $h(x) \in U$.

□ Větu o sevření využijeme k důkazu jedné z následujících limit.

4.21. Tvrzení.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1. \qquad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Důkaz. Dokážeme jen první limitu.

1) Funkce $(\sin x)/x$ je sudá, stačí tedy spočítat limitu zprava a uvažovat hodnoty $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Z obrázku 4.2 je vidět, že obsah kruhové výseče jednotkového kruhu se středovým úhlem x je zdola omezen obsahem vepsaného trojúhelníku a shora obsahem trojúhelníku, který je vymezen prodloužením poloměrů a tečnou jednotkové kružnice:

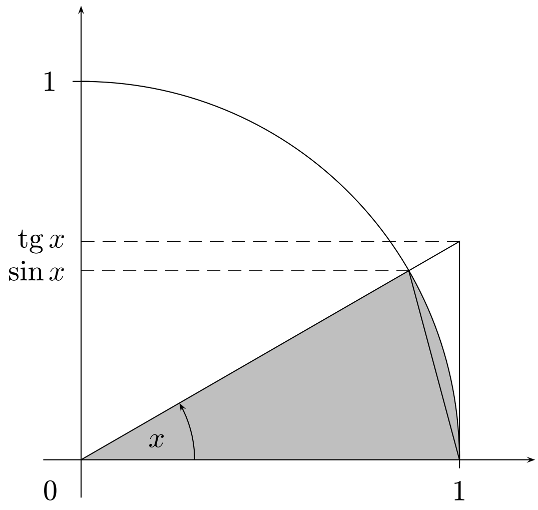
$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Vynásobíme-li nerovnosti kladným číslem $2/\sin x$, dostaneme

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Přechodem k převráceným hodnotám (všechna čísla jsou kladná) získáme

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$



Obrázek 4.2: Odvození $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (tvrzení 4.21).

Funkce $(\sin x)/x$ je „sevřena“ mezi dvě funkce, které mají v bodě 0 zprava stejnou limitu 1 (využíváme už spojitosti funkce kosinus, viz dále), podle věty o sevření je i $\lim_{x\to 0+}(\sin x)/x = 1$.

4.22. Poznámka. Limity výše uvedeného typu budeme počítat pomocí l'Hospitalova pravidla (věta 6.10). Pro jeho použití je ale třeba počítat derivace, které se odvodí pomocí výše uvedených limit. Je tedy nutné určit tyto limity bez l'Hospitalova pravidla.

□ Užitečné je následující pozorování.

4.23. Tvrzení. *Nechť funkce f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.*

Důkaz. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$f(x) \in U(b,\varepsilon)\,, \qquad f(x) - b \in U(0,\varepsilon)\,, \qquad |f(x) - b| \in U(0,\varepsilon)\,.$$

□ K výpočtu limit používáme už známé limity a různé věty.

4.24. Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Jestliže pro funkce f, g existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ (vlastní nebo nevlastní), pak*

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)\,,$$
$$\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)\,,$$
$$\lim_{x\to a}\big(\tfrac{f}{g}\big)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,,$$

pokud je výraz na pravé straně definován (včetně operací s nevlastními čísly).

Důkaz. Pokud mají funkce f, g limitu v bodě a, pak je každá z nich definována v některém prstencovém okolí bodu a, obě společně v menším z nich. Funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ jsou na tomto prstencovém okolí definovány. Pro podíl f/g si stačí uvědomit, že pokud je definován podíl limit, pak limita jmenovatele je nenulová, funkce g je pak nenulová na některém prstencovém okolí (věta 4.15) a tedy funkce f/g je definována na některém prstencovém okolí bodu a.

Provedeme důkazy v případě vlastních limit. Označme $b = \lim_{x\to a} f(x)$, $c = \lim_{x\to a} g(x)$.

1) Zvolme okolí $U(b+c,\varepsilon)$ bodu $b+c$. Podle definice limity existují prstencová okolí P_f, P_g bodu a tak, že $f(x) \in U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ na P_f a $g(x) \in U(c, \frac{\varepsilon}{2})$ na P_g. Pro $x \in P_f \cap P_g$ dostaneme

$$|(f+g)(x) - (b+c)| = \big|\big(f(x)-b\big) + \big(g(x)-c\big)\big| \le |f(x)-b| + |g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

tedy $(f+g)(x) \in U(b+c,\varepsilon)$. (Pro rozdíl je důkaz podobný.)

2) Zvolme okolí $U(ab,\varepsilon)$ bodu ab. Funkce g je omezená na některém prstencovém okolí P'_g bodu a (věta 4.14), existuje tedy číslo $M > |b|$ takové, že $|g(x)| < M$ na P'_g. Podle definice limity existují prstencová okolí P_f, P_g bodu a tak, že $f(x) \in U(b, \varepsilon/2M)$ na P_f a $g(x) \in U(c, \varepsilon/2M)$ na P_g. Pro $x \in P_f \cap P_g \cap P'_g$ dostaneme

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - ab| &= \big|g(x)\big(f(x)-b\big) + b\big(g(x)-c\big)\big| \le \\ &\le |g(x)|\cdot|f(x)-b| + |b|\cdot|g(x)-c| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

tedy $(fg)(x) \in U(ab,\varepsilon)$.

3) Zvolme okolí $U(b/c,\varepsilon)$ bodu b/c. Funkce g je omezená na některém prstencovém okolí P'_g bodu a (věta 4.14), existuje tedy číslo $M > |b|$ takové, že $|g(x)| < M$ na P'_g a tedy i $c < M$. Aby byl výraz na pravé straně definován, musí být $c \neq 0$, je tudíž $g(x) \in U(c, |c|/2)$, tedy $|g(x)| > |c|/2$ na některém prstencovém okolí P''_g bodu a. Podle definice limity existují prstencová okolí P_f, P_g bodu a tak, že $f(x) \in U(b, \varepsilon c^2/4M)$ a $g(x) \in U(c, \varepsilon c^2/4M)$. Pro $x \in P_f \cap P_g \cap P'_g \cap P''_g$ dostaneme

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c}\right| &= \frac{|c\,f(x) - b\,g(x)|}{|c\,g(x)|} = \frac{\big|c\big(f(x)-b\big) - b\big(g(x)-c\big)\big|}{|c\,g(x)|} \le \\ &\le \frac{|c|\cdot|f(x)-b| + |b|\cdot|g(x)-c|}{|c\,g(x)|} < \frac{M\cdot\varepsilon c^2/4M + M\cdot\varepsilon c^2/4M}{c^2/2} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

tedy $(f/g)(x) \in U(b/c,\varepsilon)$.

4.25. Příklad. Využitím tvrzení 4.21 dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

4.26. Poznámka. Zvláštním případem věty o limitě součinu je výpočet limity násobku — jestliže existuje $\lim_{x\to a} f(x)$, dostaneme:

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = \Big(\lim_{x\to a} c\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)\,.$$

□ Větu nemůžeme použít, pokud bychom dostali nedefinovanou operaci (dělení nulou, výrazy typu $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, ∞/∞). To neznamená, že by limita neexistovala — můžeme ji někdy spočítat po vhodné úpravě.

□ Limita polynomu stupně alespoň 1 v nevlastním bodě je nevlastní, je rovna limitě sčítance s největší mocninou.

4.27. Tvrzení. *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \ge 1$ (tj. $a_n \ne 0$). Pak*

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \in \{-\infty, +\infty\}\,.$$

Důkaz. Použitím věty o limitě součtu, součinu a podílu a využitím limit konstantní funkce a identity (tvrzení 4.5) dostaneme

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = a_n \cdot (\pm\infty)^n \cdot 1 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n\,.$$

Znaménko je určeno znaménkem a_n, pro limitu v bodě $-\infty$ záleží navíc na tom, zda stupeň n polynomu je sudý nebo lichý.

□ Limitu racionální funkce v nevlastním bodě lze spočítat vytknutím (a zkrácením) nejvyšších mocnin z čitatele i jmenovatele. Lze také zkrátit nejvyšší mocninou ve jmenovateli nebo, není-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, nejvyšší mocninou v čitateli.

4.28. Příklady.

$$1)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2+1} = \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{-\infty}\cdot\frac{2-\frac{1}{-\infty}}{1+\frac{1}{(-\infty)^2}} = 0\cdot\frac{2-0}{1+0} = 0\,, \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{-\infty}-\frac{1}{(-\infty)^2}}{1+\frac{1}{(-\infty)^2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0\,, \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} = \frac{2-\frac{1}{-\infty}}{-\infty+\frac{1}{-\infty}} = \frac{2-0}{-\infty+0} = \frac{2}{-\infty} = 0\,. \end{cases}$$

$$2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2-\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{2-0}{1+0} = 2\,.$$

$$3)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-1}{x^2+1} = \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2\cdot(-\infty)-\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{-\infty-0}{1+0} = -\infty\,.$$

$$4)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^3}{x^2+1} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} x^2\cdot\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = (-\infty)^2\cdot\frac{2-\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}} = +\infty\,.$$

4.29. Poznámka. Limita racionální funkce v nevlastním bodě je buď nulová (je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele), vlastní nenulová (je-li stupeň čitatele roven stupni jmenovatele, limitou je pak podíl koeficientů u nejvyšších mocnin) nebo nevlastní (je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, znaménko je určeno znaménky koeficientů u nejvyšších mocnin a pro limitu v bodě $-\infty$ i tím, zda je rozdíl stupňů čitatele a jmenovatele sudý nebo lichý).

□ Limitu racionální funkce v nulovém bodě jmenovatele počítáme vytknutím (a případně zkrácením) příslušného kořenového činitele.

4.30. Příklad.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,.$$

□ Při výpočtu limity racionální funkce v nulovém bodě jmenovatele se nemusí příslušný kořenový činitel jmenovatele zkrátit. V takovém případě můžeme využít následující větu.

4.31. Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $g > 0$ *na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = +\infty$.

Důkaz. Označme $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Existuje prstencové okolí P_f bodu a, na kterém $f(x) \in$ $\in U(b, \frac{b}{2})$ a tedy $f(x) > \frac{b}{2}$. Pro každé okolí $U(+\infty, r)$ bodu $+\infty$ $(r > 0)$ existuje prstencové okolí P_g bodu a, na kterém $g(x) \in U(0, \frac{b}{2r})$. Na prstencovém okolí $P_f \cap P_g$ bodu a pak je

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2r}} = r\,,$$

tedy $f(x)/g(x) \in U(+\infty, r)$.

4.32. Poznámka. Výše uvedenou větu můžeme schematicky (s možným přenásobením nenulovou konstantou) zapsat jako

$$\left|\frac{1}{0\pm}\right| = \pm\infty\,.$$

4.33. Příklady.

1) $$\lim_{x\to 1\pm} \frac{2}{x-1} = \left|\frac{2}{0\pm}\right| = \pm\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(x-1)^2} = \left|\frac{-2}{0+}\right| = -\infty\,,$$

3) $$\lim_{x\to 2-} \frac{\ln(2-x)}{x^2-4} = \left|\frac{-\infty}{0-}\right| = +\infty\,.$$

4.34. Poznámka. Limita racionální funkce v nulovém bodě jmenovatele je buď vlastní (je-li nulový bod i kořenem čitatele alespoň stejné násobnosti) nebo nevlastní (je-li násobnost kořene ve jmenovateli o sudé přirozené číslo větší, než v čitateli) nebo neexistuje (je-li násobnost kořene ve jmenovateli o liché přirozené číslo větší, než v čitateli) — v takovém případě existují různé nevlastní jednostranné limity.

□ Ukážeme dvě věty, které umožňují určit limitu i v případě, že jedna z funkcí limitu nemá, ale je omezená.

4.35. Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *nevlastní,* g *je omezená na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = b$.

Důkaz. Uvažujme $b = +\infty$ (případ $b = -\infty$ se dokazuje podobně). Funkce g je omezená na některém prstencovém okolí P_g bodu a, existuje tedy číslo $K \in \mathbb{R}$ tak, že $g > K$ na P_g. Na tomto prstencovém okolí je tedy $f(x)+g(x) > f(x)+K$. Protože $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+K\bigr) = \infty+K = \infty$, je $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \infty$ (věta 4.19).

4.36. Poznámka. Ve výše uvedené větě stačila jednostranná omezenost funkce g: zdola pro limitu $+\infty$ funkce f a shora pro limitu $-\infty$ funkce f. Schematicky ji můžeme zapsat

$$|\pm\infty + \text{omez.}| = \pm\infty\,.$$

4.37. Příklad.

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x) = |+\infty + \text{omez.}| = +\infty\,.$$

4.38. Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a je-li* g *omezená na některém prstencovém okolí bodu* a, *pak* $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$.

Důkaz. Existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že $|g| \le K$ na prstencovém okolí bodu a. Na tomto okolí je $0 \le |fg| \le K\,|f|$. Protože $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$ (tvrzení 4.23) a $\lim_{x\to a} 0 = 0$, podle věty o sevření dostáváme $\lim_{x\to a}|f(x)\,g(x)| = 0$ a tedy $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$ (opět tvrzení 4.23).

4.39. Poznámka. Výše uvedenou větu můžeme použít i pro podíl omezené funkce a funkce s nevlastní limitou — takový podíl $g(x)/h(x)$ můžeme přepsat jako $\bigl(1/h(x)\bigr)\cdot g(x)$, přičemž podle věty o limitě podílu je limita $1/h(x)$ rovna 0. Schematicky ji můžeme zapsat

$$|0\cdot\text{omez.}| = \left|\frac{\text{omez.}}{\pm\infty}\right| = 0\,.$$

4.40. Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\text{omez.}}{+\infty}\right| = 0\,.$$

□ Větu o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu můžeme použít i k důkazu neexistence limity.

4.41. Tvrzení. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x)$ *neexistuje.*

1) *Je-li* $\lim_{x\to a} g(x)$ *vlastní, pak* $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)$ *neexistuje.*
2) *Je-li* $\lim_{x\to a} g(x)$ *vlastní a nenulová, pak* $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)$ *a* $\lim_{x\to a}\bigl(f(x)/g(x)\bigr)$ *neexistují.*

Důkaz. Kdyby příslušné limity existovaly, pak by podle věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu existovala v bodě a i limita funkce f — ta se dá v jednotlivých případech vyjádřit $f(x) = \big(f(x) \pm g(x)\big) \mp g(x)$, $f(x) = \big(f(x) \cdot g(x)\big)/g(x)$, $f(x) = \big(f(x)/g(x)\big) \cdot g(x)$.

4.42. Příklady.

1) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\cos x + \frac{1}{x}\right) = |\text{neex.} + 0| \quad \text{neexistuje.}$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1 - 2^{-x}} = \left|\frac{\text{neex.}}{1}\right| \quad \text{neexistuje.}$$

4.43. Věta (o limitě složené funkce). *Nechť* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *a*

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$,
(2) $\lim_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,
(3) $g(b) = c$ *nebo* $f(x) \neq b$ *na některém prstencovém okolí bodu* a.

Pak $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Důkaz. Ke každému okolí U_c bodu c existuje prstencové okolí P_b bodu b tak, že $g(P_b) \subset U_c$. K okolí $U_b = P_b \cup \{b\}$ existuje okolí P_a bodu a tak, že $f(P_a) \subset U_b$. Dostáváme tedy

$$P_a \xrightarrow{f} U_b = P_b \cup \{b\}\,, \qquad P_b \xrightarrow{g} U_c\,.$$

Je-li $g(b) = c$, pak

$$P_a \xrightarrow{f} U_b \xrightarrow{g} U_c\,.$$

Existuje-li prstencové okolí P' bodu a na kterém je $f(x) \neq b$, pak pro prstencové okolí $P = P_a \cap P'$ platí

$$P \xrightarrow{f} P_b \xrightarrow{g} U_c\,.$$

4.44. Příklad. Spočtěme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x}$. Počítáme limitu složené funkce, vnitřní funkce je $f(x) = 1/x$, vnější funkce je $g(y) = \mathrm{e}^y$, platí

(1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

(2) $$\lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = 1\,,$$

(3) $$\frac{1}{x} \neq 0 \text{ na prstencovém okolí } +\infty.$$

Je tedy $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1$.

□ Aby závěr věty o limitě složené funkce neplatil, je nutné (a stačí), aby funkční hodnota vnější funkce byla různá od její limity a aby v každém prstencovém okolí bodu a existoval bod, ve kterém vnitřní funkce nabývá své limity.

4.45. Příklad.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,,$$

$$g(y) = \begin{cases} 1\,, & y = 0\,, \\ 0\,, & y \neq 0\,, \end{cases} \qquad \lim_{y\to 0} g(y) = 0\,,$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \{1/(k\pi)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}\,, \\ 0\,, & x \notin \{1/(k\pi)\colon\ k \in \mathbb{Z}\}\,, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) \quad \text{neexistuje.}$$

4.46. Poznámka. Požadavek $g(b) = c$ v podmínce (3) věty o limitě složené funkce znamená, že funkce g je takzvaně spojitá v bodě b.

□ Dostáváme se tak k významnému pojmu spojitosti funkce. Názorně řečeno, grafy některých funkcí jsou „přetržené“ ($\operatorname{sign} x$, $1/x$), zatímco některých ne — malé změně proměnné odpovídá malá změna funkční hodnoty, vzory okolí funkční hodnoty obsahují okolí bodu.

4.47. Definice. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f\bigl(V \cap D(f)\bigr) \subset U$.

Řekneme, že funkce f je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Řekneme, že funkce f je *spojitá na množině* $A \subset D(f)$, pokud je spojitá funkce $g(x) = f(x)$, $D(g) = A$.

4.48. Příklady.

1) Funkce $\operatorname{sign} x$ je spojitá v bodech $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, není spojitá v bodě 0. Pro $a \neq 0$ obsahuje vzor každého okolí bodu $f(a)$ reálná čísla stejného znaménka jako a, obsahuje tedy například okolí bodu a o poloměru $|a|$. Vzorem okolí $U\bigl(f(0), 1\bigr)$ je množina $\{0\}$, která neobsahuje žádné okolí bodu 0.

2) *Dirichletova funkce*

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

není spojitá v žádném bodě. Mějme $a \in \mathbb{R}$ a zvolme $U\bigl(f(a), \frac{1}{2}\bigr)$. Vzor tohoto okolí bodu $f(a)$ se skládá jen z racionálních nebo jen z iracionálních čísel, přitom v každém okolí bodu a jsou jak čísla racionální, tak čísla iracionální.

4.49. Poznámka. Oproti definici limity jsme se zde neomezovali na funkce, definované v prstencovém okolí daného bodu. Máme tedy zavedenu spojitost i na (polo)uzavřeném intervalu. Podobně jako pro limity můžeme uvažovat spojitost „jednostrannou“: funkce f je *zleva* (resp. *zprava*) *spojitá* v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje levé (resp. pravé) okolí V bodu a tak, že $f\bigl(V \cap D(f)\bigr) \subset U$. Spojitost pak znamená současně spojitost zleva i zprava.

4.50. Příklad. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1\,, & x \geq 0\,, \end{cases}$$

je v bodě 0 spojitá zprava, není v něm spojitá zleva, takže není v bodě 0 spojitá. Skutečně, pro každé okolí U bodu $f(0) = 1$ najdeme pravé okolí $(0, +\infty)$ bodu 0, které se do okolí U zobrazí. Na druhou stranu například pro okolí $U(1,1)$ neexistuje žádné levé okolí bodu 0, které by se do okolí $U(1,1)$ zobrazilo.

□ Definice limity a spojitosti jsou velice podobné, u spojitosti hraje roli i funkční hodnota v příslušném bodě. Bez důkazu uvedeme příslušnou souvislost.

4.51. Věta. *Funkce f definovaná v okolí bodu a je v tomto bodě spojitá právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

4.52. Poznámka. Funkce f definovaná v levém (resp. pravém) okolí bodu a je v tomto bodě spojitá zleva (resp. zprava) právě tehdy, když $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$).

□ Podobně jako pro limity platí řada tvrzení i pro spojité funkce. Důkazy zde uvádět nebudeme — byly by podobné, navíc pro funkce definované v (jednostranných) okolích bodu jsou bezprostředními důsledky vět o limitách.

4.53. Věta. *Nechť funkce f, g jsou spojité v bodě a. Pak platí:*

1) *Funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ jsou spojité v bodě a; je-li $g(a) \neq 0$, pak i funkce f/g je spojitá v bodě a.*
2) *Existuje okolí bodu a, na kterém je funkce f omezená.*
3) *Je-li $f(a) > 0$, pak $f > 0$ na některém okolí bodu a.*

□ Ukázali jsme, že konstantní funkce a identita ($f(x) = x$) jsou spojité funkce (věta 4.51, tvrzení 4.5). Užitím věty o spojitosti součtu, rozdílu součinu a podílu dostáváme spojitost racionálních funkcí. Bez důkazu uvedeme tvrzení o spojitosti dalších funkcí.

4.54. Věta. *Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.*

□ Využitím věty o limitě složené funkce dostaneme následující větu.

4.55. Věta. *Je-li funkce f spojitá v bodě a, funkce g spojitá v bodě $f(a)$, pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a.*

4.56. Poznámka. Využitím věty o limitě složené funkce lze počítat limity funkcí typu f^g, kde f je kladná funkce, přepisem přes exponenciální funkci

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\,.$$

Protože jak logaritmus tak exponenciální funkce jsou funkce spojité, dá se leckdy „dosadit“ a můžeme rozšířit operace s nevlastními čísly následujícím způsobem:

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty\,, \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0\,,$$

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0\,, & a \in \langle 0, 1)\,, \\ +\infty\,, & a > 1\,, \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty\,, & a \in (0, 1)\,, \\ 0\,, & a > 1\,, \end{cases}$$

$$(+\infty)^a = \begin{cases} 0\,, & a < 0\,,\\ +\infty\,, & a > 0\,. \end{cases}$$

Nedefinované jsou výrazy $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$ a 0^0.

4.57. Poznámka. Rozlišujeme různé typy nespojitosti funkce v bodě podle toho, jaké jsou vztahy mezi jednostrannými limitami a funkční hodnotou v příslušném bodě (následující výčet není úplný):

1) *Odstranitelná nespojitost*: funkce má v daném bodě limitu (různou od funkční hodnoty nebo funkční hodnota není definována), takže ji lze spojitě předefinovat nebo dodefinovat. Například funkce $f(x) = (\sin x)/x$ není definována v bodě 0, lze ji tam spojitě dodefinovat limitou 1.

2) *Skok*: funkce má v daném bodě různé vlastní jednostranné limity. Například funkce $\operatorname{sign} x$ v bodě 0.

3) *Asymptotická nespojitost*: funkce má v daném bodě alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu (nemusí být v tomto bodě definována). Například $f(x) = 1/x$ v bodě 0.

□ Zatím jsme se zabývali tzv. lokálními vlastnostmi — vlastnostmi v některém okolí. Uveďme několik důležitých vlastností spojitých funkcí, které jsou globálního charakteru — týkají se celého intervalu.

4.58. Věta (věta o maximu a minimu funkce). *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.*

Důkaz. Dokažme část o maximu (důkaz pro minimum je podobný). Mějme spojitou funkci f na uzavřeném intervalu I_1. Označme $\sup f(I_1) = M$. Existuje posloupnost funkčních hodnot s limitou M (jinak by supremum bylo menší) a tedy i posloupnost čísel $x_n \in I_1$ tak, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Opakujme teď následující konstrukci: interval I_1 rozpůlíme, vybereme ten z polovičních intervalů, ve kterém je nekonečně mnoho členů posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (mohou to být oba), ten označíme I_2 a vrátíme se na začátek konstrukce s intervalem I_2. Dostaneme tak posloupnost uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, jejichž délka se blíží k 0. Podle principu vnořených intervalů (věta 1.35) je jejich průnik jednobodová množina, označme ji $\{x_0\}$. Přejděme k vybrané posloupnosti $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ takové, že $x_{n_k} \in I_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ (vybereme $x_{n_1} \in I_1$, mezi dalšími členy posloupnosti vybereme $x_{n_2} \in I_2$, …). Tato vybraná posloupnost má za limitu x_0. Protože funkce f je spojitá, je $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Sestrojili jsme bod $x_0 \in I_1$, ve kterém se nabývá suprema funkčních hodnot, je to tedy maximum funkce f.

□ Jak ukazují následující příklady, předpoklady spojitosti funkce a uzavřenosti intervalu se nedají vypustit.

4.59. Příklady. 1) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in (0,1\rangle\,,\\ 1\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

nabývá maxima ($\max f = f(0) = f(1) = 1$), nenabývá minima (obor hodnot je $(0,1\rangle$).

2) Funkce $f(x) = 1/x$ na intervalu $(0,1)$ nenabývá ani maxima ani minima, obor hodnot je $(1,+\infty)$.

4.60. Věta (o mezihodnotě). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M\rangle$.*

Důkaz. Zvolme $c \in (m, M)$ a dokažme, že funkce f nabývá této hodnoty v některém bodě intervalu I. Označme $I_1 = \langle a_1, b_1\rangle \subset I$ interval s krajními body, ve kterých funkce f nabývá hodnot m, M. Opakujme následující konstrukci: interval I_1 rozpůlíme, označíme $I_2 = \langle a_2, b_2\rangle$ ten z polovičních intervalů, pro který číslo c leží mezi $f(a_2), f(b_2)$ (může být i stejné) a vrátíme se na začátek konstrukce s intervalem I_2. Dostaneme tak posloupnost uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, jejichž délka se blíží k 0. Podle principu vnořených intervalů (věta 1.35) je jejich průnik jednobodová množina, označme ji $\{a\}$. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ a protože funkce f je spojitá, je $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Protože c je mezi $f(a_n), f(b_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $c = f(a)$.

4.61. Důsledky.

1) *Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $f(a)\cdot f(b) < 0$, pak funkce f má v intervalu (a, b) nulový bod.*
2) *Pro spojitou funkci je obrazem intervalu jednobodová množina (pro konstantní funkci) nebo interval.*

4.62. Příklad. Pro nespojitou funkci věta o mezihodnotě platit nemusí, například obor hodnot funkce $\operatorname{sign} x$ je $\{-1, 0, 1\}$.

4.63. Věta. *Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotonní. Inverzní funkce je pak spojitá.*

Důkaz. $\Leftarrow$: Ryze monotonní funkce je prostá.

$\Rightarrow$: Dokážeme, že pokud funkce není ryze monotonní, pak není prostá. Mějme spojitou funkci f na intervalu I, která není ryze monotonní. Pokud nabývá stejné hodnoty v různých bodech, tak prostá není. V opačném případě existují $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ tak, že buď $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ nebo $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Uvažujme první případ (druhý se dokáže podobně). Vyberme libovolné číslo c mezi $\max\{f(x_1), f(x_3)\}$ a $f(x_2)$ (různé od obou hodnot). Podle věty o mezihodnotě (věta 4.60) se této hodnoty nabývá v intervalu (x_1, x_2) i v intervalu (x_2, x_3), funkce f tedy není prostá.

Mějme spojitou ryze monotonní funkci f na intervalu I, obor hodnot funkce f je interval, označme ho J. Inverzní funkce $f_{-1}\colon J \to I$ je spojitá, jestliže pro každé $a \in I$ a pro každé okolí U bodu a existuje okolí V bodu $f(a)$ tak, že $f_{-1}(V \cap J) \subset U$, tj. $V \cap J \subset f(U \cap I)$. Je-li a vnitřní bod intervalu I, pak $f(a)$ je vnitřní bod intervalu J, existuje okolí $U' \subset U \cap I$ bodu a, $f(U')$ je otevřený interval obsahující bod $f(a)$, existuje tedy okolí $V \subset f(U') \subset f(U \cap \cap I)$ bodu $f(a)$. Je-li a krajní bod intervalu I, pak $f(a)$ je krajní bod intervalu J, $U \cap I$ je jednostranné okolí bodu a, $f(U \cap I)$ je jednostranné okolí bodu $f(a)$, existuje tedy okolí V bodu $f(a)$ tak, že $f(U \cap I) = V \cap J$.

Neřešené úlohy

1. Dokažte podle definice limity

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+5)=3\,;$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^2+1)=+\infty\,;$ c) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{3x^2+5}{x-1}=+\infty\,;$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+4}=2\,;$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{sign}|\sin x|$ neexistuje.

2. Spočtěte (využijte tvrzení 4.21):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}\,;$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}\,;$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(x+1)}\,.$

3. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+3}\,;$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^4+1}\,;$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2-2x+1}{2x^2+3x-1}\,;$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{x^3+x^2+1}\,;$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}\,;$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+x+3}\,;$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5+x^3+2}{2x^3-1}\,;$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-x^5}{1+x^2}\,.$

4. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x-2}\,;$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}\,;$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}\,;$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2-x-2}\,;$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-4}{x^2-4x+3}\,;$ f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+1}\,;$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right).$

5. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}+2}\,;$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-4}-2}\,;$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2-2}+1}\,;$

d) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}\,;$ e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}\,;$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{x}\,;$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right);$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right);$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right).$

6. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}\,;$ b) $\lim\limits_{x\to +\pi/2}\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}\,;$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,;$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x+\cos x)\,;$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x\sin x}{x+1}\,;$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}(4\,\mathrm{e}^x-\sin x)\,;$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{2x}\cos x\,;$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cos(3x+1)\,.$

7. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^2+3x-5}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to\pi}\ln^2(1+\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{1/x}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; i) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[x-2]{x}$.

8. Spočtěte limity funkce v hraničních bodech definičního oboru:

a) $\dfrac{\cos x}{2^x-1}$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; c) $(\operatorname{tgh} x)^{1/(x-1)}$.

9. Dokažte, že periodická funkce má v nevlastním bodě limitu právě tehdy, když je konstantní.

10. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá:

a) $f(x)=\begin{cases}\sin x\,, & x\in\langle 0,\pi\rangle\,,\\ 0\,, & x\notin\langle 0,\pi\rangle\,;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x\,, & x\in\langle 0,3\pi\rangle\,,\\ 0\,, & x\notin\langle 0,3\pi\rangle\,;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}0\,, & x\le 0\,,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}\,, & x>0\,;\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}x\,, & x\in(0,1\rangle\,,\\ 0\,, & x>1\,.\end{cases}$

11. Dodefinujte funkci f v bodě 0 tak, aby byla spojitá:

a) $f(x)=\ln|x|$; b) $f(x)=\sin x\cdot\cos\frac{1}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$.

12. Dokažte, že *Riemannova funkce*

$$r(x)=\begin{cases}\frac{1}{b}\,, & x\in\mathbb{Q}\,,\quad x=\frac{a}{b}\,,\quad a,b\in\mathbb{Z}\text{ nesoudělná},\quad b>0\,,\\ 0\,, & x\notin\mathbb{Q}\,,\end{cases}$$

je spojitá právě v iracionálních bodech.

13. Dokažte, že každý polynom lichého stupně má alespoň jeden kořen.

Výsledky

2. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\ln 2$.

3. a) 0; b) 0; c) 2; d) 3; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) $+\infty$.

4. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 3; d) neexistuje, $\pm\infty$ v $2\pm$; e) neexistuje, $\mp\infty$ v $3\pm$; f) $+\infty$; g) $-\frac{1}{2}$.

5. a) $+\infty$; b) 3; c) -1; d) $\frac{1}{4}$; e) 2; f) 0; g) 1; h) 0; i) $+\infty$;

6. a) 1; b) $-\infty$; c) nelze počítat, $+\infty$ v $1-$; d) 0; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) neexistuje; h) neexistuje; i) 0.

7. a) $+\infty$; b) nelze počítat, $+\infty$ v $1+$; c) neexistuje; d) 1; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) 3; h) $-\frac{1}{2}\pi$; i) neexistuje, 0 v $2-$, $+\infty$ v $2+$.

8. a) neexistuje v $-\infty$, $\pm\infty$ v $0\pm$, 0 v $+\infty$;

   b) $-\frac{1}{4}\pi$ v $\pm\infty$, $\mp\frac{1}{2}\pi$ v $1\pm$;

   c) $+\infty$ v $0+$ a v $1-$, 0 v $1+$, 1 v $+\infty$.

10. a) spojitá; b) není spojitá v 3π; c) spojitá; d) není spojitá v 1.

11. a) nelze; b) $f(0)=0$; c) $f(0)=2$.

12. Pro $a\in\mathbb{Q}$ je $f(a)>0$, vzor $U\big(f(a),f(a)\big)$ neobsahuje žádné iracionální číslo a tedy ani žádné okolí bodu a. Pro $a\notin\mathbb{Q}$ je $f(a)=0$; pro libovolné okolí $U(0,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ existuje $n\in\mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n}<\varepsilon$; mezi celočíselnými násobky čísel $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n}$ existuje nejbližší k a a tedy i okolí V bodu a, které žádný takový násobek neobsahuje, tedy $f(V)\subset U(0,\varepsilon)$. Platí dokonce $\lim_{x\to a} f(x)=0$ pro každé $a\in\mathbb{R}$.

13. Polynom je spojitý, limity v $\pm\infty$ mají opačná znaménka, použije se věta o mezihodnotě.

Kapitola 5

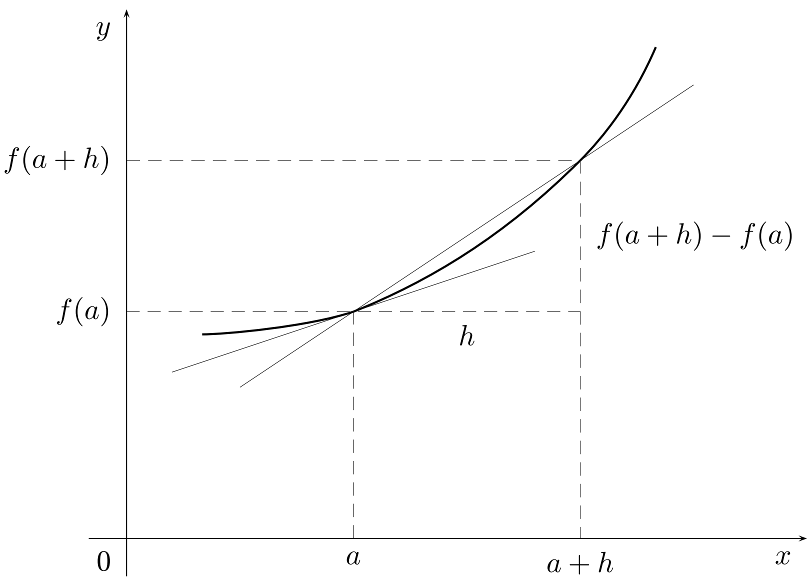
Derivace funkce

□ Derivace funkce je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů. Popisuje okamžitou změnu funkce v některém bodě jejího definičního oboru.

□ Mějme funkci f definovanou na okolí bodu a. Jestliže změníme proměnnou o nějakou hodnotu h, změní se funkční hodnota o $f(a+h)-f(a)$, průměrná změna funkční hodnoty (geometricky směrnice sečny grafu funkce vedené body $[a, f(a)]$ a $[a+h, f(a+h)]$) je pak

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

„Okamžitou“ změnu (směrnici tečny grafu v bodě $[a, f(a)]$) dostaneme jako limitu tohoto výrazu pro $h \to 0$ (pokud existuje).



Obrázek 5.1: Zavedení derivace funkce.

5.1. Definice. Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu a. *Derivace funkce f v bodě a* je

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Pokud uvažujeme jednostranné limity, pak stačí, aby funkce f byla definována na příslušném jednostranném okolí bodu a. V takovém případě mluvíme o *jednostranné derivaci zleva* nebo *zprava*:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,, \qquad f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

5.2. Poznámky.

1) Značení ve tvaru podílu „diferenciálů" $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ se s výhodou používá jako mnemotechnická pomůcka. Ve formulacích některých tvrzení to vypadá, jako bychom s tímto symbolem pracovali formálně stejně jako s podílem, derivování odpovídá násobení diferenciálním operátorem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

2) Pokud označíme $a+h=x$, dostaneme ekvivalentní vyjádření

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

(Podobně pro jednostranné derivace.)

3) Derivace funkce v bodě může být vlastní nebo nevlastní.

4) Funkce má v bodě derivaci právě tehdy, když má obě jednostranné derivace a ty jsou stejné.

5.3. Příklad. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty\,.$$

□ Pokud má funkce derivaci v různých bodech, můžeme uvažovat novou funkci, která každému bodu přiřadí hodnotu derivace v tomto bodě. Budeme mluvit o derivaci funkce (na intervalu) a budeme uvažovat pouze vlastní hodnoty.

5.4. Definice. Nechť funkce f má v každém bodě otevřeného intervalu I vlastní derivaci. *Derivace funkce f* na intervalu I je funkce $f'\colon x \mapsto f'(x)$ pro $x \in I$.

□ Pokud pracujeme na (polo)uzavřeném intervalu, uvažujeme v případných krajních bodech příslušné jednostranné derivace.

5.5. Poznámka. Derivace sudé funkce je lichá funkce:

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{-h\to 0} -\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)\,,$$

derivace liché funkce je sudá:

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{h} = \lim_{-h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x)\,.$$

□ Při výpočtu derivací vycházíme ze známých derivací základních funkcí. Odvodíme některé z nich podle definice.

5.6. Tvrzení.

1)	$(c)' = 0$	$x \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{R}$ je konstanta).
2)	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$x \in \mathbb{R}$ (pro $a \in \mathbb{N}$), $x \neq 0$ (pro $a \in \mathbb{Z}$), $x > 0$ (pro $a \in \mathbb{R}$).
3)	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$x \in \mathbb{R}$.
4)	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$.
5)	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. 1)

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

2) Dokážeme tvrzení pro $a \in \mathbb{Z}$ (pro reálná a viz příklady 5.21). Pro $a = 0$ je to předcházející případ, pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}\,.\\ (x^{-n})' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{hx^n(x+h)^n} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - x^n - nx^{n-1}h - \cdots - h^n}{hx^n(x+h)^n} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-nx^{n-1} - \cdots - h^{n-1}}{x^n(x+h)^n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\,.\end{aligned}$$

3)–5) Využijeme $\lim_{h\to 0}(\mathrm{e}^h - 1)/h = 1$, $\lim_{h\to 0}(\sin h)/h = 1$ (tvrzení 4.21) a vzorce pro rozdíl sinů a kosinů (tvrzení 3.39):

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x\,.\\ (\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \tfrac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \\ &= \cos x \cdot 1 = \cos x\,.\\ (\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\sin\left(x + \tfrac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \\ &= -\sin x \cdot 1 = -\sin x\,.\end{aligned}$$

5.7. Poznámka. Je-li a racionální číslo, které lze vyjádřit jako podíl celých čísel s lichým dělitelem, pak je derivace funkce x^a definována i na intervalu $(-\infty, 0)$. Pro $a > 0$ existuje derivace funkce x^a i v bodě 0 (případně jen zprava): pro $a \in (0,1)$ je rovna $+\infty$, pro $a > 1$ je nulová.

5.8. Příklady.

1) $$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

2) $$(\sqrt[3]{x}\,)' = (x^{1/3})' = \tfrac{1}{3}\,x^{1/3-1} = \tfrac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$ v bodě 0 jsme spočítali už dříve podle definice, dostali jsme $+\infty$, což je $\lim_{x\to 0+}(\sqrt[3]{x}\,)'$. Tato skutečnost není náhodná, jak uvidíme dále (tvrzení 6.7).

□ Vztah mezi derivací a spojitostí funkce dává následující věta, kterou lze formulovat i pro jednostranné případy.

5.9. Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Důkaz. Nechť funkce f má v bodě a vlastní derivaci. Pak je definována v okolí bodu a a stačí ukázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, což dostaneme použitím vět o limitě součtu a součinu:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \xrightarrow{x\to a} f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a)\,.$$

□ V následujících příkladech ukážeme, že podmínka vlastní derivace v předcházející větě je podstatná (existuje nespojitá funkce s derivací, která musí tedy být nevlastní), že ke spojitosti není nutná (existuje spojitá funkce, která má nevlastní derivaci) a že spojitá funkce nemusí mít derivaci.

5.10. Příklady.

1) Funkce $\operatorname{sign} x$ je nespojitá v bodě 0, přitom v něm má derivaci (nutně tedy nevlastní):

$$\operatorname{sign}'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sign} h - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty\,.$$

2) Funkce $\sqrt[3]{x}$ je spojitá v bodě 0, přitom v něm má nevlastní derivaci (příklad 5.3).

3) Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, přitom v něm nemá derivaci (jednostranné derivace jsou různé):

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0-} -1 = -1\,, \qquad f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0+} 1 = 1\,.$$

□ K výpočtu derivací složitějších funkcí používáme různé věty. Začneme větou o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí. (I tuto větu lze formulovat pro jednostranné derivace.)

5.11. Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Jsou-li f, g funkce, které mají vlastní derivace v bodě a, pak platí:*

1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

2) $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$;

3) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Důkaz. Protože funkce f, g mají v bodě a derivaci, jsou definovány v jeho okolí a tedy i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ jsou definovány v okolí bodu a. Protože $f'(a), g'(a)$ jsou vlastní, jsou obě funkce spojité v bodě a. Je-li $g(a) \neq 0$, je funkce g nenulová v okolí bodu a (věta 4.15), a tedy podíl f/g je definován v okolí bodu a. Použitím vět o limitě součtu a součinu a využitím spojitosti funkce g dostaneme po přepsání zlomku z definice derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow{x \to a} \\
&\xrightarrow{x \to a} f'(a) \pm g'(a)\,; \\
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow{x \to a} \\
&\xrightarrow{x \to a} f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,; \\
\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{1}{g(a)\,g(x)} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right] \xrightarrow{x \to a} \\
&\xrightarrow{x \to a} \frac{1}{g(a)^2} \big[f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a) \big]\,.
\end{aligned}$$

5.12. Poznámky.

1) Výše uvedená věta je formulována pro derivaci v bodě, platí ale i pro derivaci funkce (použije se pro jednotlivé body).

2) Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak podle věty o derivaci součinu a s využitím toho, že derivace konstanty je nulová, dostaneme $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$ — „derivace násobku je násobek derivace“.

3) Zobrazení $'\colon\ f \to f'$ je lineární.

4) Opakovaným použitím vět o derivaci součtu a součinu pro dvě funkce dostaneme

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' &= f_1' + f_2' + \cdots + f_n'\,, \\
(f_1 f_2 \cdots f_n)' &= f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'
\end{aligned}$$

(v každém součinu je zderivována právě jedna funkce, sečtou se všechny takové součiny).

5) V případě součtu a rozdílu není nutné předpokládat, že derivace jsou vlastní. Stačí, aby jejich součet (rozdíl) byl definován.

5.13. Příklady.

1) $(x^3 + 3x^2 + 7)' = (x^3)' + 3(x^2)' + (7)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x\,.$

2) $(x \cdot \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x\,.$

3) $$\begin{aligned}(x \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos x)' &= (x)' \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos x + x \cdot (\mathrm{e}^x)' \cdot \cos x + x \cdot \mathrm{e}^x \cdot (\cos x)' = \\ &= \mathrm{e}^x \cos x + x\,\mathrm{e}^x \cos x - x\,\mathrm{e}^x \sin x\,.\end{aligned}$$

4) $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

□ Další důležitou větou je věta o derivaci složené funkce.

5.14. Věta (o derivaci složené funkce). *Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě a, funkce g vlastní derivaci v bodě $f(a) = b$, pak funkce $h = g \circ f$ má v bodě a vlastní derivaci*

$$h'(a) = g'(b) \cdot f'(a)\,.$$

Důkaz. Funkce f je definována v okolí bodu a, funkce g je definována v okolí bodu b. Pomocná funkce

$$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}\,, & y \neq b\,, \\ g'(b)\,, & y = b \end{cases}$$

je definována v okolí bodu b, je spojitá v bodě b a v okolí bodu b platí

$$g(y) - g(b) = t(y)\,(y-b)\,.$$

Protože funkce f je spojitá v bodě a, je funkce h definována v okolí bodu a. Označme $y = f(x)$. Dostaneme

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{g(y)-g(b)}{x-a} = \frac{t(y)\,(y-b)}{x-a} = t(y)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Pro $x \to a$ je $y = f(x) \to f(a) = b$ (funkce f je spojitá v bodě a) a $t(y) \to t(b)$ (funkce t je spojitá v bodě b), tedy

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} t(y)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)\,f'(a)\,.$$

5.15. Poznámka. Schematický zápis pomocí diferenciálního značení je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Větu můžeme použít i pro větší počet do sebe složených funkcí, skládání se derivací mění na násobení (pro příslušné argumenty). Schematicky

$$(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)' = f_n' \cdots f_2' f_1'\,.$$

5.16. Příklady. Spočtěte derivace funkcí

1) e^{ax}; 2) $\sin x^2$; 3) $\sin \mathrm{e}^{x^3}$.

Řešení. 1) Funkce je složením funkce $f(x) = ax$ (vnitřní funkce) a funkce $g(y) = \mathrm{e}^y$ (vnější funkce). Derivace je

$$(\mathrm{e}^{ax})' = g'(y) \cdot f'(x) = \mathrm{e}^y \cdot a = \mathrm{e}^{ax} \cdot a\,.$$

2) Funkce je složením funkcí $f(x) = x^2$ a $g(y) = \sin y$. Derivace je

$$(\sin x^2)' = g'(y) \cdot f'(x) = \cos y \cdot 2x = \cos x^2 \cdot 2x\,.$$

3) Funkce je složením funkcí $f(x) = x^3$, $g(y) = \mathrm{e}^y$ a $h(z) = \sin z$. Derivace je

$$\left(\sin \mathrm{e}^{x^3}\right)' = h'(z) \cdot g'(y) \cdot f'(x) = \cos z \cdot \mathrm{e}^y \cdot 3x^2 = \cos \mathrm{e}^{x^3} \cdot \mathrm{e}^{x^3} \cdot 3x^2 \,.$$

□ Kombinací s větou o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu můžeme odvodit derivace dalších funkcí, například vzorce pro derivování hyperbolických funkcí. Vzorce pro hyperbolický sinus a kosinus jsou podobné vzorcům pro goniometrické funkce, jsou však symetričtější (nedochází ke změně znaménka).

5.17. Tvrzení.

$$(\cosh x)' = \sinh x \,, \quad (\sinh x)' = \cosh x \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

Důkaz.

$$(\cosh x)' = \left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\right)' = \tfrac{1}{2}\left((\mathrm{e}^x)' + (\mathrm{e}^{-x})'\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = \sinh x \,,$$
$$(\sinh x)' = \left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\right)' = \tfrac{1}{2}\left((\mathrm{e}^x)' - (\mathrm{e}^{-x})'\right) = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \cosh x \,.$$

□ Existují-li vlastní derivace funkcí f, f_{-1}, pak podle věty o derivaci složené funkce je

$$1 = (x)' = (f_{-1} \circ f)'(x) = (f_{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \,,$$

tedy

$$(f_{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)} \,.$$

Větu o derivaci inverzní funkce budeme formulovat tak, abychom měli zaručenu existenci derivace inverzní funkce.

5.18. Věta (o derivaci inverzní funkce). *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na otevřeném intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v bodě $a \in I$, pak existuje derivace inverzní funkce f_{-1} v bodě $b = f(a)$ a platí*

$$(f_{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \,.$$

Důkaz. Protože f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I, je $f(I)$ otevřený interval a existuje inverzní funkce f_{-1} k funkci f na intervalu $f(I)$. Funkce f_{-1} je tedy definována na okolí bodu b. Označme $y = f(x)$. Platí

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y - b} = \frac{f_{-1}\big(f(x)\big) - f_{-1}\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \,.$$

Pro $y \to b$ je $x = f_{-1}(y) \to f_{-1}(b) = a$ (funkce f_{-1} je spojitá), takže limitním přechodem a použitím věty o limitě podílu dostaneme

$$(f_{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \,.$$

□ Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověřujeme pro inverzní funkci.

5.19. Příklad. Použitím věty o derivaci inverzní funkce můžeme odvodit derivace funkcí

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (definovaných na $\mathbb{R}$ pro n liché a na $\langle 0, +\infty)$ pro n sudé). Inverzní funkce $f_{-1}(y) = y^n$ je rostoucí na otevřeném intervalu $(0, +\infty)$ (pro liché n i na intervalu $(-\infty, 0)$), derivace $\big(f_{-1}(y)\big)' = (y^n)' = ny^{n-1}$ je na tomto intervalu nenulová, takže

$$f'(x) = \frac{1}{(f_{-1})'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}\,x^{1/n-1}\,,$$

což odpovídá obecnému vzorci (tvrzení 5.6).

□ Z věty o derivaci inverzní funkce vyplývají další důležité derivace.

5.20. Tvrzení.

1) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,,$ $\qquad x > 0\,.$

2) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}\,,$ $\qquad (\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{x^2+1}\,,$ $\qquad x \in \mathbb{R}\,.$

3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$ $\qquad (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$ $\qquad x \in (-1, 1)\,.$

Důkaz. 1) Inverzní funkce k funkci $f(x) = \ln x$ je funkce $f_{-1}(y) = \mathrm{e}^y$ na otevřeném intervalu $(-\infty, +\infty)$, zobrazí tento interval na interval $(0, +\infty)$, je rostoucí a její derivace $(\mathrm{e}^y)' = \mathrm{e}^y$ je nenulová. Je tedy pro $x \in (0, +\infty)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x}\,.$$

2) Inverzní funkce k funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je funkce $f_{-1}(y) = \operatorname{tg} y$ na otevřeném intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, zobrazí tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$, je rostoucí a její derivace $(\operatorname{tg} y)' = \cos^{-2} y$ (příklady 5.13) je nenulová. Je tedy pro $x \in (-\infty, +\infty)$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Důkaz pro funkci $\operatorname{arccotg} x$ je podobný.

3) Inverzní funkce k funkci $f(x) = \arcsin x$ je funkce $f_{-1}(y) = \sin y$ na otevřeném intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, zobrazí tento interval na interval $(-1, 1)$, je rostoucí a její derivace $(\sin y)' = \cos y$ je nenulová. Je tedy pro $x \in (-1, 1)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Důkaz pro funkci $\arccos x$ je podobný.

□ Zvláštním případem derivace složené funkce je derivace funkcí $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$. Můžeme tak dokázat vzorec pro derivování reálné mocniny (tvrzení 5.6).

5.21. Příklady.

1) $$(x^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = ax^{a-1}\,, \qquad x>0\,, \quad (a\in\mathbb{R})\,.$$

2) $$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,, \quad (a>0)\,.$$

5.22. Poznámka. Pro funkce se kromě derivací zavádí i takzvaný *diferenciál funkce*. Diferenciál funkce f v bodě a je lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definované předpisem

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)\cdot h\,, \qquad h\in\mathbb{R}\,.$$

Význam má hlavně pro funkce více proměnných, pro funkci jedné proměnné je jednoduše charakterizován derivací funkce. Místo proměnné h se někdy píše symbol $\mathrm{d}x$, předpis je pak možné psát ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což je jen formálně přenásobená rovnost $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = f'(x)$.

□ Derivací funkce je funkce, kterou můžeme opět derivovat. Dostaneme tak tzv. derivace vyšších řádů. Můžeme je značit tak, že přidáváme další „čárky“ k označení funkce. Pro derivace vyšších řádů nebo pro obecné úvahy to ale není vhodné.

5.23. Definice. *Derivaci řádu* n (n*-tou derivaci*) funkce f značíme $f^{(n)}$ a definujeme rekurentně:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f\,,\\ f^{(n)} &= \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad n\in\mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

5.24. Poznámka. Zavedli jsme i pojem derivace řádu 0 (je to původní funkce), což je pro některé zápisy vhodné. Derivaci prvního řádu značíme stručně jako derivaci. Pro označení derivace řádu $n\in\mathbb{N}$ funkce f se používá i diferenciální označení

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\,,$$

které se formálně odvodí jako „násobení“ diferenciálním operátorem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (n-tá mocnina ve jmenovateli se vztahuje na celý symbol $\mathrm{d}x$), například pro derivaci druhého řádu je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\,.$$

5.25. Příklad. Mějme funkci $f(x) = 1/x = x^{-1}$. Postupně dostáváme

$$f'(x) = (-1)x^{-2}\,,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \big((-1)x^{-2}\big)' = (-1)(-2)x^{-3}\,, \\ f'''(x) &= \big((-1)(-2)x^{-3}\big)' = (-1)(-2)(-3)x^{-4}\,, \\ &\ \vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Obecné vyjádření bychom mohli dokázat matematickou indukcí.

5.26. Poznámky.
1) Derivace řádu n je lineární zobrazení, takže platí

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)^{(n)} = f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \cdots + f_k^{(n)}\,.$$

2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg'\,, \\ (fg)'' &= (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''\,, \\ (fg)''' &= (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\,, \\ &\ \vdots \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}\,. \end{aligned}$$

Obecný výraz (*Leibnizovu formuli*) lze dokázat matematickou indukcí. Je analogií binomické věty pro výpočet mocniny dvojčlenu, koeficienty u součinů derivací (kombinační čísla) jsou definovány takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Neřešené úlohy

1. Spočtěte derivaci funkce:

   a) $3x^2 - 5x + 1\,;$ b) $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\,;$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{2}{x^3}\,;$

   d) $\dfrac{x}{x^3+1}\,;$ e) $(x^2+1)^4\,;$ f) $\sqrt{x^3+1}\,.$

2. Spočtěte derivaci funkce:

   a) $\sqrt[4]{x}\cos x\,;$ b) $\mathrm{e}^x \sin x\,;$ c) $x^2\,\mathrm{e}^x \cos x\,;$

   d) $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x\,;$ e) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x}\,;$ f) $\operatorname{cotg} x\,.$

3. Spočtěte derivaci funkce

a) $\sin(2x+5)$; b) e^{-3x+1}; c) 10^x;

d) $\ln^2 x$; e) $\ln \operatorname{tg} x$; f) $\arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

g) $\sqrt{\ln^2 x + 1}$; h) $\ln \cosh x$; i) $\ln \ln \sin x$.

4. Spočtěte derivaci funkce:

a) x^x; b) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; c) $x^{\sin x}$;

d) x^{x^2}; e) $(x^2+1)^{\cos \pi x}$.

5. Spočtěte derivaci druhého řádu:

a) $x\,\mathrm{e}^{x^2}$; b) $(x^2+1)\operatorname{arctg} x$; c) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

6. Vyjádřete derivaci řádu n:

a) e^{ax}; b) $x\,\mathrm{e}^x$; c) $x \ln x$.

7. Vyšetřete derivaci funkce f:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

8. Dokažte pomocí věty o derivaci složené funkce, že derivací sudé funkce je funkce lichá a že derivací liché funkce je funkce sudá.

Výsledky

1. a) $6x-5$; b) $x^{-1/2}+x^{-2}$; c) $-\frac{3}{5}x^{-8/5}-6x^{-4}$, $x \neq 0$; d) $\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$; e) $8x(x^2+1)^3$; f) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$, $x \neq -1$.

2. a) $\frac{1}{4}x^{-3/4}\cos x - \sqrt[4]{x}\sin x$; b) $\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x$; c) $(x^2+2x)\,\mathrm{e}^x \cos x - x^2\,\mathrm{e}^x \sin x$; d) $(\sin x + x\cos x)\operatorname{arctg} x + \frac{x \sin x}{x^2+1}$; e) $\frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; f) $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

3. a) $2\cos(2x+5)$; b) $-3\,\mathrm{e}^{-3x-1}$; c) $10^x \ln 10$; d) $\frac{2}{x}\ln x$; e) $\frac{1}{\sin x\,\cos x}$; f) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$; g) $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$; h) $\operatorname{tgh} x$; i) funkce není definována pro žádné x.

4. a) $x^x(\ln x + 1)$; b) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1}\right)$; c) $x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$;
   d) $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$; e) $(x^2+1)^{\cos \pi x}\left(-\sin \pi x \cdot \pi \cdot \ln(x^2+1) + \cos \pi x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right)$.
5. a) $2\,\mathrm{e}^{x^2}(2x^3 + 3x)$; b) $\frac{2x}{x^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}\,x$; c) $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.
6. a) $a^n\,\mathrm{e}^{ax}$; b) $\mathrm{e}^x(x+n)$; c) $(-1)^n\,(n-2)!\,x^{1-n}$.
7. a) $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f'(0) = 0$.
8. Například pro sudou funkci f je $f(x) = f(-x)$, zderivováním dostaneme

$$f'(x) = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x)\,.$$

Kapitola 6

Aplikace derivací

□ V této kapitole odvodíme některé aplikace derivací: rovnici tečny a normály grafu funkce, l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit funkcí, Taylorův polynom.

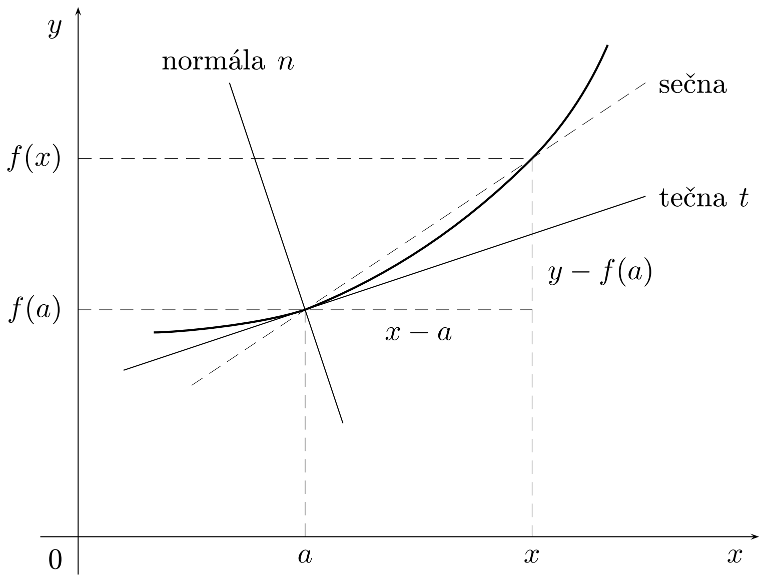
□ Derivaci jsme motivovali geometricky jako limitu směrnic sečen grafu, čímž dostaneme směrnici tečny. Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, pak pro souřadnice bodů tečny t grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ platí

$$t: \quad y - f(a) = f'(a)\,(x - a)\,,$$

rovnice tečny tedy je

$$t: \quad y = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

Směrový vektor tečny grafu v bodě $[a, f(a)]$ je například vektor $\big(1, f'(a)\big)$. Tento vektor je kolmý k normále grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$, jeho souřadnice můžeme použít jako koeficienty u x, y



Obrázek 6.1: Tečna a normála grafu funkce.

pro rovnici normály:

$$n: \quad x + f'(a)\, y = \text{konst.}$$

Konstantu na pravé straně dostaneme dosazením souřadnic bodu $[a, f(a)]$, který na normále leží:

$$n: \quad x + f'(a)\, y = a + f'(a)\, f(a)\,.$$

Pokud je $f'(a) \neq 0$, můžeme tuto rovnici upravit na tvar

$$n: \quad y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a)\,,$$

směrnice normály grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$ je tedy $-1/f'(a)$.

6.1. Poznámka. Rovnice tečny t a normály n grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ můžeme zapsat ve tvaru

$$t: \quad y = f'(a)\, x + \text{konst.}\,, \qquad n: \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{f'(a)}\, x + \text{konst.}\,, & f'(a) \neq 0\,,\\ x = \text{konst.}\,, & f'(a) = 0\,, \end{cases}$$

příslušné konstanty můžeme zjistit po dosazení $[x, y] = [a, f(a)]$.

6.2. Příklad. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $[1, ?]$.

Řešení. Protože $f(1) = \mathrm{e}$, hledáme tečnu a normálu grafu funkce v bodě $[1, \mathrm{e}]$. Spočítáme derivaci funkce f v bodě 1: $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(1) = \mathrm{e}$. Rovnice tečny t a normály n grafu funkce f v bodě $[1, \mathrm{e}]$ jsou

$$t: \quad y = f(1) + f'(1)\,(x - 1)\,, \qquad n: \quad y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}\,(x - 1)\,.$$

Po dosazení a úpravě

$$t: \quad y = \mathrm{e}\, x\,, \qquad n: \quad y = -\frac{1}{\mathrm{e}}\, x + \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}}\,.$$

□ V některých případech musíme tečný bod teprve určit.

6.3. Příklady.

1) Určete rovnici tečny grafu funkce $f(x) = x^2$, která má směrnici 2.
2) Určete rovnici tečny grafu funkce $f(x) = x^2$, která prochází bodem $[2, 3]$.

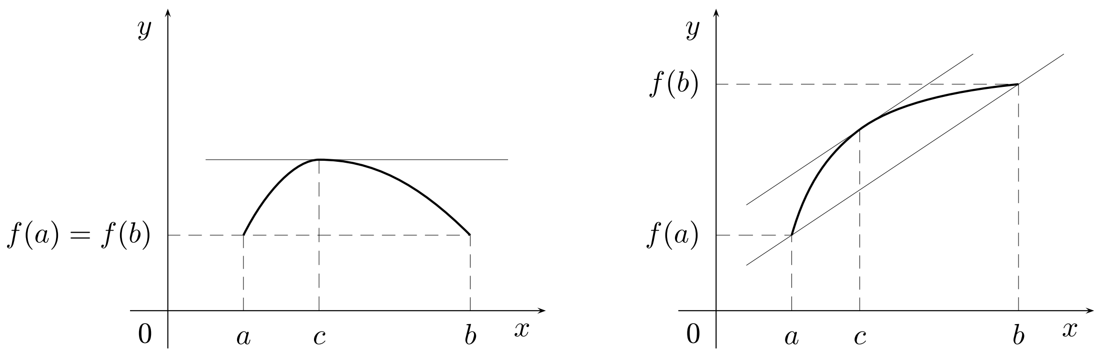
Řešení.

1) Směrnice tečny v bodě $[a, f(a)]$ je $f'(a) = 2a$, rovna 2 je pro $a = 1$. Tečna má rovnici

$$y = f(1) + f'(1)\,(x - 1) = 1 + 2(x - 1)\,, \qquad \text{tj.} \qquad y = 2x - 1\,.$$

2) Rovnice tečny v bodě $[a, f(a)]$ je $y = f(a) + f'(a)\,(x - a) = a^2 + 2a(x - a)$. Bod $[2, 3]$ má ležet na hledané tečně, jeho souřadnice tedy musí vyhovovat rovnici tečny. Dostáváme

$$3 = a^2 + 2a(2 - a)$$



Obrázek 6.2: Ilustrace k Rolleově a Lagrangeově větě (věta 6.4, věta 6.6).

a po úpravě rovnici

$$a^2 - 4a + 3 = 0\,,$$

která má řešení $a \in \{1,3\}$. Existují tedy dvě tečny procházející daným bodem, jedna v bodě $[1,1]$, druhá v bodě $[3,9]$. Jejich rovnice jsou

$$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)\,(x-1) = 1 + 2(x-1)\,, && \text{tj.} && y = 2x - 1\,,\\ y &= f(3) + f'(3)\,(x-3) = 9 + 6(x-3)\,, && \text{tj.} && y = 6x - 9\,. \end{aligned}$$

□ Řada důležitých aplikací vychází z Rolleovy a Lagrangeovy věty.

6.4. Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f definovanou na intervalu $\langle a,b\rangle$ platí*

(1) *f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$,*
(2) *f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b),*
(3) *$f(a) = f(b)$.*

Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že platí $f'(c) = 0$.

Důkaz. (Viz obrázek 6.2.) Funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, nabývá na něm tedy maxima i minima. Pokud nabývá obou těchto hodnot v krajních bodech intervalu $\langle a,b\rangle$, jedná se o konstantní funkci, a tedy $f'(c) = 0$ pro každé $c \in (a,b)$. Ukážeme, že pokud funkce nabývá svého maxima nebo minima v bodě $c \in (a,b)$, pak $f'(c) = 0$. Předpokládejme, že $f(c)$ je maximum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ (důkaz pro minimum je podobný). Pro každé $x \in (a,b)$ je $f(x) - f(c) \le 0$, a tedy

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} &\ge 0\,, && x \in (a,c)\,,\\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} &\le 0\,, && x \in (c,b)\,. \end{aligned}$$

Limitními přechody dostaneme

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0\,,$$

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0\,,$$

tedy $f'(c) = 0$.

□ Jak ukazují následující příklady, žádný z předpokladů Rolleovy věty nelze vypustit.

6.5. Příklady.
1) Funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in \langle 0,1)\,,\\ 0\,, & x = 1\,, \end{cases}$$

nemá v žádném bodě intervalu $(0,1)$ nulovou derivaci ($f'(x) = 1$ na intervalu $(0,1)$), přitom splňuje předpoklady (2) a (3) Rolleovy věty. Nesplňuje předpoklad (1), není spojitá v bodě 1.

2) Funkce $f(x) = |x|$ na intervalu $\langle -1,1\rangle$ nemá v žádném bodě intervalu $(-1,1)$ nulovou derivaci ($f'(x) = -1$ na intervalu $(-1,0)$, $f'(x) = 1$ na intervalu $(0,1)$, $f'(0)$ neexistuje), přitom splňuje předpoklady (1) a (3) Rolleovy věty. Nesplňuje předpoklad (2), nemá derivaci v bodě 0.

3) Funkce $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nemá v žádném bodě intervalu $(0,1)$ nulovou derivaci ($f'(x) = 1$ na intervalu $(0,1)$), přitom splňuje předpoklady (1) a (2) Rolleovy věty. Nesplňuje předpoklad (3), $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$.

□ Rolleovu větu můžeme zobecnit vypuštěním podmínky o rovnosti funkčních hodnot v krajních bodech intervalu a zabudováním této podmínky do tvrzení věty.

6.6. Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b). Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že platí*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)\,.$$

Důkaz. Uvažujme funkci

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

(od funkce f odečteme lineární funkci, která má v bodech a, b stejné funkční hodnoty jako funkce f). Tato funkce je spojitá na $\langle a,b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a,b) a $g(a) = 0 = g(b)$. Splňuje tedy podmínky Rolleovy věty na intervalu $\langle a,b\rangle$, takže existuje bod $c \in (a,b)$, pro který je $g'(c) = 0$, tedy

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0\,,$$

odkud plyne dokazovaná rovnost.

□ Rovnost v Lagrangeově větě můžeme přepsat do tvaru

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

což znamená, že směrnice tečny grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$ je stejná, jako směrnice sečny grafu funkce f vedené body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. V případě Rolleovy věty je tato směrnice nulová — tečna je rovnoběžná s osou x (viz obrázek 6.2).

□ Důsledkem Lagrangeovy věty je tvrzení, že pro spojitou funkci je derivace v limitě rovna limitě derivací. Toto tvrzení zformulujeme pro případ „zprava", ale podobně se dá formulovat „zleva" a „oboustranně".

6.7. Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+) = \lim_{x \to a+} f'(x)$, pak*

$$f'_+(a) = f'(a+) .$$

Důkaz. Pokud existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$, pak funkce f má vlastní derivaci na některém intervalu $(a, a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ a je tedy na tomto intervalu spojitá. Protože funkce f je navíc zprava spojitá v bodě a, je spojitá na intervalu $\langle a, a+\varepsilon)$. Pro každé $x \in (a, a+\varepsilon)$ jsou tak splněny podmínky Lagrangeovy věty na intervalu $\langle a, x\rangle$, a tedy pro každé $x \in (a, a+\varepsilon)$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(x) - f(a) = f'(c)\,(x-a) .$$

Pro $x \to a$ platí $c \to a$, takže dostáváme

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c)\,(x-a)}{x-a} = \lim_{c \to a+} f'(c) = f'(a+) .$$

6.8. Příklady.

1) Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá, pro $x > 0$ je $f(x) = x$ a tedy $f'(x) = 1$, pro $x < 0$ je $f(x) = -x$ a tedy $f'(x) = -1$. Dostáváme tak

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} -1 = -1 ,$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 1 = 1 .$$

2) Funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá, pro $x \neq 0$ je $f'(x) = 1/\big(3\sqrt[3]{x^2}\big)$. Dostáváme tak (viz i příklad 5.3)

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty .$$

3) Funkce $f(x) = \arcsin x$ je spojitá na $\langle -1, 1\rangle$, pro $x \neq \pm 1$ je $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Dostáváme tak

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+} f'(x) = \lim_{x \to -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty ,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty .$$

□ Důležitou aplikací derivací je l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit. K jeho (částečnému) odvození použijeme následující větu.

6.9. Věta (Cauchyova). *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a $g' \neq 0$ v intervalu (a, b). Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Důkaz. Uvažujme funkci

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x)\,.$$

Funkce h je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) (je to kombinace funkcí s těmito vlastnostmi) a platí $h(a) = f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) = h(b)$. Splňuje tedy podmínky Rolleovy věty na intervalu $\langle a, b\rangle$, takže existuje bod $c \in (a, b)$, pro který je $h'(c) = 0$, tedy

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c) = 0\,.$$

Protože $g' \neq 0$ na intervalu (a, b), je $g'(c) \neq 0$ a také $g(b) \neq g(a)$ (jinak by podle Rolleovy věty pro funkci g existoval v intervalu (a, b) bod, ve kterém by derivace funkce g byla nulová). Můžeme tedy rovnost vydělit výrazem $\big(g(b) - g(a)\big)\, g'(c)$, čímž dostaneme rovnost dokazovanou.

6.10. Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro funkce f, g existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$. Jestliže platí jedna z podmínek:*

(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$,
(2) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$,

pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz. Dokážeme větu pro $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$. Protože $\lim_{x\to a+} f'(x)/g'(x)$ existuje, je funkce g' nenulová a funkce f, g mají vlastní derivace na některém intervalu $(a, a+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$). Na tomto intervalu jsou funkce f, g spojité. Dodefinujeme (případně předefinujeme) funkce f, g v bodě a jejich limitami $f(a) = g(a) = 0$, funkce f, g jsou pak spojité na intervalu $\langle a, a+\varepsilon)$. Pro každé $x \in (a, a+\varepsilon)$ splňují funkce f, g podmínky Cauchyovy věty na intervalu $\langle a, x\rangle$, dostáváme tedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

pro vhodné $c \in (a, x)$. Pro $x \to a+$ je $c \to a+$ a tedy

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

6.11. Poznámky.

1) Podobně se l'Hospitalovo pravidlo formuluje pro limitu zleva a pro oboustrannou limitu.

2) Pokud limita podílu derivací neexistuje, nemůžeme l'Hospitalovo pravidlo použít, ale neznamená to, že limita podílu funkcí neexistuje. Například

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\text{omez.}}{+\infty}\right| = 0\,,$$

ale limita podílu derivací $\lim_{x\to+\infty}(\cos x)/1$ neexistuje.

3) Varianta (2) se používá hlavně v případě, kdy čitatel i jmenovatel mají nevlastní limitu.

4) Při používání l'Hospitalova pravidla budeme používat zápis

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

6.12. Příklady.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,.$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty\,.$$

□ L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně — i limitu podílu derivací můžeme počítat pomocí l'Hospitalova pravidla.

6.13. Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty\,.$$

□ V některých případech l'Hospitalovo pravidlo výpočet limity nijak neulehčí.

6.14. Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}\,.$$

Vrátili jsme se k původní limitě. Místo l'Hospitalova pravidla využijeme v tomto příkladu k výpočtu limity „krácení":

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

□ Limitu součinu dvou funkcí, z nichž jedna má limitu rovnou 0 a druhá nevlastní, můžeme počítat pomocí l'Hospitalova pravidla, pokud součin upravíme na podíl (někdy lze dvěma způsoby):

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = |0\cdot(\pm\infty)| = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right|\,,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = |(0\pm)\cdot(\pm\infty)| = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right| .$$

6.15. Příklad.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = |0\cdot(-\infty)| = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0 .$$

□ Limitu rozdílu funkcí se stejnými nevlastními limitami můžeme na limitu podílu převést různými způsoby.

6.16. Příklady.

1) $$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x - x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = (+\infty)\cdot\big((+\infty)) - 1\big) = +\infty .$$

2) $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0 .$$

□ Limity typu $(+\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty}$ se přepisem pomocí exponenciální funkce ($f^g = \mathrm{e}^{g\ln f}$) převedou na výpočet limity typu $0\cdot(\pm\infty)$. Využíváme přitom spojitosti exponenciální funkce, případně hodnoty jejích limit v nevlastních bodech.

6.17. Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $1^{+\infty}$. Funkci upravíme na tvar $(1+1/x)^x = \exp\big(x\ln(1+1/x)\big)$ a spočítáme limitu argumentu exponenciální funkce:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = |+\infty\cdot 0| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1 .$$

Využitím věty o limitě složené funkce dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 1}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} .$$

6.18. Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i pro posloupnosti. Jestliže pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ najdeme funkci f, pro kterou je $f(n) = a_n$ pro každé (dostatečně velké) $n\in\mathbb{N}$ a pro kterou existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, pak platí (viz věta 4.9)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x) .$$

Například pro posloupnost $(\mathrm{e}^n/n)_{n=1}^{\infty}$ najdeme funkci $f(x) = \mathrm{e}^x/x$, která má v $+\infty$ limitu $+\infty$, tedy $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n/n = +\infty$.

□ Další důležitou aplikací je Taylorův polynom.

6.19. Definice. Nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n. *Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a* je polynom

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

6.20. Poznámka. Taylorův polynom necháváme ve výše uvedeném tvaru, mocniny $(x-a)^k$ neroznásobujeme.

6.21. Tvrzení. *Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a je právě ten (jediný) polynom stupně nejvýše n, který má v bodě a stejné derivace až do řádu n (včetně nulté, tj. funkční hodnoty), jako má funkce f.*

Důkaz. Spočítáme-li derivaci řádu k příslušného Taylorova polynomu, pak jeho členy s mocninou $(x-a)$ menší než k vypadnou, členy s mocninou větší než k zůstanou s kladnou mocninou a po dosazení a dají 0, takže po zderivování a dosazení bodu a zůstane k-tý člen $f^{(k)}(a)$. Jednoznačnost takového polynomu plyne z algebraických úvah (jediné řešení soustavy lineárních rovnic pro koeficienty hledaného polynomu), kterými se zde zabývat nebudeme.

6.22. Věta (Taylorova). *Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x\rangle$ a $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě intervalu (a,x). Pak existuje $c \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

6.23. Poznámka. Výraz

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se nazývá *zbytek v Lagrangeově tvaru.*

Důkaz. Označme písmenem T Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a a písmenem M číslo, pro které je

$$f(x) = T(x) + M(x-a)^{n+1}$$

($x \neq a$ je dané číslo, $M = \big(f(x) - T(x)\big)/(x-a)^{n+1}$). Uvažujme funkci

$$g(t) = f(t) - T(t) - M(t-a)^{n+1}, \qquad t \in \langle a, x\rangle .$$

Funkce g má spojité derivace až do řádu n na intervalu $\langle a, x\rangle$ a $g^{(n+1)}$ existuje v (a,b) (od funkce f odečítáme polynom, který má spojité derivace všech řádů). Podle předcházejícího tvrzení je pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$:

$$g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - T^{(k)}(a) - M(n+1)\cdots(n+2-k)(x-a)^{n+1-k} = 0 .$$

Opakovaným použitím Rolleovy věty pro funkce $g, g', \dots, g^{(n)}$ dostáváme existenci

$$\begin{aligned} c_1 &\in (a, x)\,, & &\text{pro které} & g'(c_1) &= 0\,, \\ c_2 &\in (a, c_1)\,, & &\text{pro které} & g''(c_2) &= 0\,, \\ &\vdots \\ c_n &\in (a, c_{n-1})\,, & &\text{pro které} & g^{(n)}(c_n) &= 0\,, \\ c \in (a, c_n) &\subset (a, x)\,, & &\text{pro které} & g^{(n+1)}(c) &= 0\,. \end{aligned}$$

Protože derivace řádu $(n+1)$ polynomu T je nulová, dostaneme po dosazení za funkci g

$$0 = g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)!\,,$$

tedy

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,,$$

což jsme měli dokázat.

6.24. Poznámky.
1) Podobně zleva pro interval $\langle x, a\rangle$.
2) Pro $n = 0$ dostaneme $f(x) = f(a) + f'(c)\,(x - a)$, Lagrangeova věta je tedy speciálním případem Taylorovy věty.
3) Taylorův polynom slouží k aproximaci — místo hodnoty funkce bereme hodnotu Taylorova polynomu (ta je jasně definována a snadno a rychle se počítá).
4) Pro $n = 1$ dostáváme lineární aproximaci, jejím grafem je tečna grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.
5) Zbytek v Lagrangeově tvaru se podobá sčítancům ve vyjádření Taylorova polynomu, jediný rozdíl je v tom, že derivace se nebere v bodě a. Pokud je derivace řádu $(n+1)$ spojitá v bodě a a pokud je bod x blízko bodu a, pak i bod c je blízko bodu a a $f^{(n+1)}(c)$ je blízko $f^{(n+1)}(a)$. Přechodem k Taylorovu polynomu řádu $(n+1)$ se tedy aproximace $f(x)$ v okolí bodu a zpřesní.
6) Je-li funkce f polynom stupně n, pak $T_n = T_{n+1} = \dots = f$.

6.25. Příklad. Určete Taylorovy polynomy funkce $f(x) = x^2 - 1$ v bodě 2.

Řešení. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1\,, & f(2) &= 3\,, & T_0(x) &= 3\,; \\ f'(x) &= 2x\,, & f'(2) &= 4\,, & T_1(x) &= 3 + 4(x-2)\,; \\ f''(x) &= 2\,, & f''(2) &= 2\,, & T_2(x) &= 3 + 4(x-2) + (x-2)^2\,. \end{aligned}$$

Derivace vyšších řádů funkce f jsou nulové, takže $T_2 = T_3 = \cdots$.

6.26. Příklad. Odhadněte $\sqrt{16{,}06}$ pomocí Taylorova polynomu řádu 2.

Řešení. Označme $f(x) = \sqrt{x}$, najdeme Taylorův polynom T řádu 2 funkce f v bodě 16. Spočítáme derivace až do řádu 2:

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad f(16) = 4\,;$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, & f'(16) &= \frac{1}{8}\,;\\
f''(x) &= \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}\,, & f''(16) &= \frac{-1}{256}\,.
\end{aligned}
$$

Dostaneme

$$
T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 = 4 + \frac{1}{8}\,(x-16) - \frac{1}{512}\,(x-16)^2
$$

a po dosazení $x = 16{,}06$

$$
\sqrt{16{,}06} \approx T(16{,}06) = 4 + \frac{0{,}06}{8} - \frac{0{,}06^2}{512} = 4{,}007\,492\,968\,750\,.
$$

Chybu odhadneme pomocí zbytku v Lagrangeově tvaru. Protože $f'''(x) = 3/\bigl(8\sqrt{x^5}\bigr)$ a platí předpoklady věty o Taylorově polynomu, je chyba odhadnuta:

$$
\bigl|\sqrt{16{,}06} - T(16{,}06)\bigr| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}\,(x-a)^3\right| = \frac{0{,}06^3}{16\sqrt{c^5}} \le \frac{0{,}06^3}{16\sqrt{16^5}} = \frac{0{,}06^3}{2^{14}} \doteq 0{,}000\,000\,013\,183\,.
$$

Odhad $\sqrt{16{,}06}$ pomocí Taylorova polynomu řádu 2 je tedy dost přesný, navíc i odhad chyby vychází dost přesně (skutečná chyba je přibližně $13{,}153 \cdot 10^{-9}$).

6.27. Příklad. Spočtěte $\sin\frac{\pi}{6}$ pomocí Taylorova polynomu řádu 3. (Víme, že $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, takže výpočet pomocí Taylorova polynomu nepotřebujeme — příklad je zvolen tak, aby bylo názorně vidět, jaké chyby se dopustíme).

Řešení. Najdeme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin x$ řádu 3 v bodě 0. Spočítáme derivace až do řádu 3:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\,, & f(0) &= 0\,;\\
f'(x) &= \cos x\,, & f'(0) &= 1\,;\\
f''(x) &= -\sin x\,, & f''(0) &= 0\,;\\
f'''(x) &= -\cos x\,, & f'''(0) &= -1\,.
\end{aligned}
$$

Dostaneme

$$
T(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^2 = x + \frac{1}{3}\,x^3
$$

a po dosazení $x = \frac{\pi}{6}$

$$
\sin\tfrac{\pi}{6} \approx T(\tfrac{\pi}{6}) = 0{,}499\,674\ \ldots
$$

Chybu odhadneme pomocí zbytku v Lagrangeově tvaru. Nejprve si všimněme, že $\sin^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$, tedy T je zároveň Taylorovým polynomem řádu 4. Využijeme toho, že $|\cos x| \le 1$:

$$
\bigl|\sin\tfrac{\pi}{6} - T(\tfrac{\pi}{6})\bigr| = \left|\frac{\sin^{(5)}(c)}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5\right| = \left|\frac{\cos c}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5\right| \le \frac{\pi^5}{5!\cdot 6^5} = 0{,}000\,327\ \ldots
$$

Vidíme, že už poměrně jednoduchým polynomem dostaneme poměrně přesný výsledek. Odhad chyby je v tomto případě velice přesný (skutečná chyba je $0{,}000\,326\ \ldots$) — to znamená, že použitím Taylorova polynomu stupně 5 se výsledek značně zpřesní (chyba pak bude přibližně $2 \cdot 10^{-6}$).

6.28. Poznámka. Podobně jako v předcházejícím příkladu lze pomocí Taylorova polynomu dobře počítat hodnoty goniometrických funkcí $\sin x$ a $\cos x$. Pro přesnější výpočet se nejprve pomocí vlastností těchto funkcí převede argument do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4})$: pomocí $f(x) = f(x - 2k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ do intervalu $\langle 0, 2\pi)$, v případě potřeby pomocí $f(x) = -f(x - \pi)$ do intervalu $\langle 0, \pi)$, v případě potřeby pomocí $\sin x = \sin(\pi - x)$ nebo $\cos x = -\cos(\pi - x)$ do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$ a v případě potřeby pomocí $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ nebo $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4})$. Například $\cos \frac{45}{8}\pi = \cos \frac{13}{8}\pi = -\cos \frac{5}{8}\pi = \cos \frac{3}{8}\pi = \sin \frac{\pi}{8}$.

6.29. Příklad. Spočtěte hodnotu čísla e s přesností 0,001 (předpokládejte $\mathrm{e} \leq 3$).

Řešení. Protože derivace všech řádů funkce e^x jsou e^x, je Taylorův polynom řádu n funkce e^x v bodě 0

$$T_n(x) = 1 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}x + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\mathrm{e}^0}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Podle Taylorovy věty existuje $c \in (0, 1)$ takové, že

$$T_n(1) - \mathrm{e}^1 = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}.$$

Protože funkce e^x je rostoucí a $\mathrm{e} \leq 3$, dostáváme

$$|T_n(1) - \mathrm{e}| \leq \frac{\mathrm{e}^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dosahované přesnosti dosáhneme, pokud odhad na pravé straně bude nejvýše 0,001, tedy pokud je $(n+1)! \geq 3000$, což je pro $n \geq 6$. Stačí tedy použít Taylorův polynom řádu 6:

$$\mathrm{e} \doteq T_6(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{6}{6!} = 2{,}718\,05\overline{5}.$$

6.30. Poznámka. Taylorův polynom sudé (resp. liché) funkce v bodě 0 je sudá (resp. lichá) funkce. Derivace lichého (resp. sudého) řádu sudé (resp. liché) funkce jsou funkce liché (viz poznámka 5.5) a tedy v bodě 0 nulové. Například Taylorovy polynomy funkcí kosinus a sinus v bodě 0 jsou

$$\begin{aligned} \cos x:& \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ \sin x:& \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Obecněji, je-li graf funkce f symetrický podle přímky $x = a$, pak Taylorův polynom funkce f v bodě a má pouze sudé mocniny $(x - a)$ (koeficienty u lichých mocnin jsou nulové), je-li graf funkce f symetrický podle bodu $[a, 0]$, pak Taylorův polynom funkce f v bodě a má pouze liché mocniny $(x - a)$ (koeficienty u sudých mocnin jsou nulové).

Neřešené úlohy

1. Spočtěte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\ln x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh 2x}{3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{5x+3}$; i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2}{\mathrm{e}^{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}$.

3. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\, \mathrm{e}^{-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x \quad (a>0)$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-x} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Spočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^x$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$.

5. Vyšetřete derivaci funkce f:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

6. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce f v bodě A:

a) $f(x) = \sin x$, $A = [0, ?]$; b) $f(x) = \ln x$, $A = [1, ?]$;

c) $f(x) = 2x^2 - 1$, $A = [\frac{1}{2}, ?]$.

7. K hyperbole o rovnici $y = \frac{x+9}{x+5}$ určete rovnici tečny procházející počátkem soustavy souřadnic.

8. Určete Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\,, \quad a = 0\,,\ n = 3\,;$ b) $f(x) = \operatorname{arctg} x\,, \quad a = 0\,,\ n = 3\,;$

   c) $f(x) = \ln(1+x)\,, \quad a = 0\,,\ n = 4\,;$ d) $f(x) = \sqrt[k]{1+x} \quad (k \in \mathbb{N})\,,\ a = 0\,,\ n = 1\,;$

   e) $f(x) = \sin x\,, \quad a = \frac{\pi}{4}\,,\ n = 3\,;$ f) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x+1}\,, \quad a = -1\,,\ n = 3\,.$

9. Odhadněte chybu aproximace:

   a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}\,x\,, \quad |x| < 0{,}1\,;$ b) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2\,, \quad |x| < 0{,}1\,;$

   c) $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}\,x^2\,, \quad |x| < 0{,}5\,;$ d) $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}\,x^2\,, \quad |x| < 0{,}05\,.$

10. Určete, pro která x je chyba aproximace menší než ε:

    a) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2\,, \quad \varepsilon = 10^{-6}\,;$

    b) $\sin 2x \approx 2x - \dfrac{8}{3!}\,x^3 + \dfrac{32}{5!}\,x^5\,, \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}\,.$

Výsledky

1. a) $\frac{3}{4}$; b) $-\pi$; c) 2; d) 0; e) neexistuje, $\pm\infty$ v $1\pm$; f) $\frac{2}{3}$; g) 0; h) $+\infty$; i) 0; j) 1; k) $\frac{1}{3}$; l) 0.
2. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) 1; d) 2; e) 0; f) 0; g) nelze počítat, 1 v $0+$.
3. a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{2}{\pi}$; e) 0; f) ∞ pro n sudé, $-\infty$ pro n liché.
4. a) 1; b) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; c) 1; d) $+\infty$; e) $\mathrm{e}^{-1/2}$; f) 1.
5. a) $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ pro $x \neq 0$, $f'(0) = 0$.
6. a) tečna: $y = x$, normála: $y = -x$; b) tečna: $y = x - 1$, normála: $y = -x + 1$; c) tečna: $y = 2x - \frac{3}{2}$, normála: $y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}$.
7. a) $y = -x$, $y = -\frac{1}{25}\,x$.
8. a) $1 + x + x^2 + x^3$; b) $x - \frac{1}{3}\,x^3$; c) $x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4$; d) $1 + \frac{1}{k}\,x$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}\,(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\,(x - \frac{\pi}{4})^3$; f) $1 - (x+1) - \frac{1}{2}\,(x+1)^2 + \frac{1}{6}\,(x+1)^3$.
9. a) přibližně $1{,}5 \cdot 10^{-3}$; b) přibližně $1{,}8 \cdot 10^{-4}$; c) přibližně 0,0026 (aproximujeme polynomem řádu 3); d) přibližně $5 \cdot 10^{-5}$.
10. a) $|x| < 0{,}01$; b) $|x| < 0{,}4$.

Kapitola 7

Průběh funkce

□ Ukážeme využití limit a derivací pro určování monotonie, (lokálních) extrémů, konvexity a konkavity, inflexních bodů a asymptot grafu.

7.1. Věta (o monotonii funkce). *Nechť spojitá funkce f na intervalu I má v každém vnitřním bodě intervalu I derivaci. Je-li $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$, $f' \leq 0$, $f' < 0$) uvnitř intervalu I, pak funkce f je na intervalu I rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající).*

Důkaz. Uvažujme případ $f' > 0$ uvnitř intervalu I (ostatní se dokazují podobně). Máme dokázat, že pro každé $x, y \in I$, $x < y$, je $f(x) < f(y)$. Funkce f splňuje na intervalu $\langle x, y\rangle$ podmínky Lagrangeovy věty, existuje tedy bod $c \in (x, y)$ ležící uvnitř intervalu I takový, že $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x) > 0$, tedy $f(x) < f(y)$.

7.2. Poznámky.

1) Derivace ve výše uvedené větě může být nevlastní. Například funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá a má v každém bodě kladnou derivaci (v bodě 0 nevlastní), je tedy rostoucí.

2) Ryzí monotonii můžeme dostat i pro funkce, které mají v některém bodě intervalu derivaci nulovou. Například pro funkci $f(x) = x^3$ je $f'(0) = 0$. Podle výše uvedené věty je funkce f rostoucí na intervalech $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, +\infty)$, a tedy i na $\mathbb{R}$.

3) Podmínka intervalu je podstatná, například funkce x^{-1} má v celém definičním oboru $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ zápornou derivaci, je tedy klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, ale není klesající (na celém definičním oboru).

4) Je-li $f'(x) = 0$ na intervalu I, pak je funkce f na intervalu I konstantní (je zároveň nerostoucí i neklesající).

5) Mají-li dvě funkce na intervalu stejnou derivaci, pak se liší o konstantu (jejich rozdíl je konstantní, protože má na tomto intervalu nulovou derivaci).

□ Větu o monotonii můžeme použít k důkazům některých identit.

7.3. Příklad. Dokažte:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\,\pi\,, & x \in (-\infty, -1)\,, \\ \frac{1}{4}\,\pi\,, & x \in (-1, +\infty)\,. \end{cases}$$

Řešení. Derivace funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ je

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = 0\,,$$

funkce f je tedy konstantní na každém intervalu svého definičního oboru. Její hodnoty dostaneme například

$$f(x) = f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad x \in (-1, +\infty)\,,$$
$$f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi\,, \qquad x \in (-\infty, -1)\,.$$

□ Pro důkazy některých dalších tvrzení zaveďme pojem monotonie v bodě.

7.4. Definice. Řekneme, že funkce f je *rostoucí* (resp. *klesající*) *v bodě* a, pokud existuje okolí U bodu a takové, že pro každé $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(a) > f(y)$).

7.5. Tvrzení. *Je-li $f'(a) > 0$ (resp. $f'(a) < 0$), pak funkce f je rostoucí (resp. klesající) v bodě a.*

Důkaz. Dokažme případ $f'(a) > 0$ (druhý se dokazuje podobně). Protože

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0\,,$$

existuje prstencové okolí P bodu a takové, že pro každé $x \in P$ je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

(věta 4.15). Pro $x \in P$, $x < a$, je $f(x) < f(a)$, pro $x \in P$, $x > a$, je $f(x) > f(a)$.

7.6. Poznámka. Vlastnost $f'(a) = 0$ o monotonii v bodě a nevypovídá. Například funkce x^2 není v bodě 0 ani rostoucí, ani klesající, funkce x^3 je v bodě 0 rostoucí, funkce $-x^3$ je v bodě a klesající.

□ Jedna z důležitých úloh spočívá v nalezení největší nebo nejmenší hodnoty funkce.

7.7. Definice. *Maximum* (resp. *minimum*, *supremum*, *infimum*) *funkce* na množině $M \subset D(f)$ je maximum (resp. minimum, supremum, infimum) množiny funkčních hodnot

$$f(M) = \{f(x)\colon x \in M\}\,.$$

Používáme označení

$$\max_{x\in M} f(x) = \max f(M)\,, \qquad \max f = \max f\bigl(D(f)\bigr)\,,$$
$$\min_{x\in M} f(x) = \min f(M)\,, \qquad \min f = \min f\bigl(D(f)\bigr)\,,$$

$$\sup_{x\in M} f(x) = \sup f(M)\,, \qquad \sup f = \sup f\big(D(f)\big)\,,$$
$$\inf_{x\in M} f(x) = \inf f(M)\,, \qquad \inf f = \inf f\big(D(f)\big)\,.$$

□ Podívejme se nejprve na situaci, kdy uvažujeme minimum nebo maximum v rámci některého malého okolí bodu.

7.8. Definice. Řekneme, že hodnota $f(a)$ je:

1) *ostré lokální maximum* funkce f, pokud $f < f(a)$ na některém prstencovém okolí bodu a;
2) *ostré lokální minimum* funkce f, pokud $f > f(a)$ na některém prstencovém okolí bodu a;
3) *lokální maximum* funkce f, pokud $f \le f(a)$ na některém okolí bodu a;
4) *lokální minimum* funkce f, pokud $f \ge f(a)$ na některém okolí bodu a.

(*Ostrý*) *lokální extrém funkce* je (ostré) lokální minimum nebo maximum.

□ Pomocí derivace můžeme vytipovat body, ve kterých se lokálního maxima nebo minima nabývá.

7.9. Věta. *Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Je-li $f'(a) > 0$, pak funkce f je rostoucí v bodě a a tedy nemá v bodě a lokální extrém. Je-li $f'(a) < 0$, pak funkce f je klesající v bodě a a tedy nemá v bodě a lokální extrém.

7.10. Definice. Bod a se nazývá *stacionární bod funkce* f, pokud $f'(a) = 0$.

□ Podmínka „$f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$“ je nutná podmínka pro to, aby funkce f měla v bodě a lokální extrém. Postačující podmínkou je vhodná změna monotonie v bodě a: pokud je například funkce f rostoucí na některém intervalu $(c, a\rangle$ a klesající na některém intervalu $\langle a, d)$, pak má v bodě a ostré lokální maximum. Monotonii na intervalech vyšetřujeme pomocí znaménka derivace, v krajních bodech využíváme spojitost funkce (obecněji porovnání funkční hodnoty s jednostrannou limitou).

7.11. Příklad. Funkce $f(x) = |x|$ má v každém bodě $x \ne 0$ nenulovou derivaci, v bodě 0 derivaci nemá. Lokální extrém může tedy nabývat jen v bodě 0. Protože $f(x) > f(0)$ pro každé $x \ne 0$, je $f(0) = 0$ ostré lokální minimum funkce f.

7.12. Příklad. Funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$ má derivaci v každém bodě. Lokální extrém může tedy nabývat jen ve stacionárních bodech. Protože $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$, má funkce f dva stacionární body: ± 1. Protože funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$ a klesající na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ (ze spojitosti f a znaménka f'), je $f(-1) = 3$ ostré lokální maximum funkce f a $f(1) = -1$ ostré lokální minimum funkce f.

7.13. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-|x|}$. Platí

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\,\mathrm{e}^{x}\,, & x \le 0 \\ (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,, & x \ge 0\,, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} (x+3)\,\mathrm{e}^{x}\,, & x < 0 \\ (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

Derivace funkce f v bodě 0 neexistuje, protože $f'_-(0) = f'(0-) = 3$, $f'_+(0) = f'(0+) = -1$. Stacionární body jsou řešením rovnic

$$\begin{aligned} (x+3)\,\mathrm{e}^{x} &= 0\,, & x &< 0\,,\\ (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} &= 0\,, & x &> 0\,. \end{aligned}$$

První rovnice má za řešení stacionární bod $x = -3 < 0$, druhá rovnice má řešení $x = -1 \not> 0$, takže to není stacionární bod funkce f. Lokální extrémy tedy mohu být v bodech $\{-3, 0\}$. Vyšetřením znaménka derivace zjistíme, že funkce f je rostoucí na intervalu $\langle -3, 0\rangle$ a klesající na intervalech $(-\infty, -3\rangle$ a $\langle 0, +\infty)$. Ostré lokální minimum funkce je tedy $f(-3) = -\mathrm{e}^{-3}$, ostré lokální maximum funkce f je $f(0) = 2$.

□ Ověření lokálního extrému ve stacionárním bodě lze provést i pomocí druhé derivace.

7.14. Věta. *Nechť f je funkce definovaná v okolí bodu a a nechť $f'(a) = 0$.*

1) *Je-li $f''(a) > 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální minimum funkce f.*
2) *Je-li $f''(a) < 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální maximum funkce f.*

Důkaz. Dokažme první část (druhá se dokazuje podobně). Je-li $f''(a) > 0$, pak existuje funkce f' v okolí bodu a a je rostoucí v bodě a, tedy $f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$ pro $x < a < y$, x, y v okolí bodu a. Je tedy $f' < 0$ na levém prstencovém okolí bodu a a $f' > 0$ na pravém prstencovém okolí bodu a. Funkce f je tudíž na levém prstencovém okolí bodu a klesající a na pravém prstencovém okolí bodu a rostoucí. Protože je zároveň spojitá v bodě a, má v bodě a ostré lokální minimum.

7.15. Příklad. Funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$ má derivaci $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, stacionární body ± 1. Protože $f''(x) = 6x$, je $f''(-1) = -6 < 0$, $f(-1) = 3$ je tudíž ostré lokální maximum, $f''(1) = 6 > 0$, $f(1) = -1$ je tudíž ostré lokální minimum.

□ Pokud je druhá derivace ve stacionárním bodě nulová, výše uvedená věta o existenci a typu lokálního extrému nerozhodne. V některých případech můžeme použít derivace vyšších řádů. Bez důkazu uveďme následující tvrzení.

7.16. Tvrzení. *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Pak platí:*

1) *Je-li n sudé, pak $f(a)$ není lokální extrém funkce f.*
2) *Je-li n liché a $f^{(n+1)}(a) > 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální minimum funkce f.*
3) *Je-li n liché a $f^{(n+1)}(a) < 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální maximum funkce f.*

7.17. Příklady.

1) Pro funkci $f(x) = x^3$ je $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$, funkce f tedy nemá v bodě 0 lokální extrém.

2) Pro funkci $f(x) = x^4$ je $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, funkce f tedy má v bodě 0 ostré lokální minimum.

7.18. Poznámka. První případ znamená, že v daném bodě je takzvaná inflexe (viz dále).

□ Ukázali jsme (věta 4.58), že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima i minima. Není-li to v krajním bodě intervalu, pak je to zároveň lokální extrém. Platí tedy následující věta.

7.19. Věta. *Spojitá funkce na uzavřením intervalu nabývá maxima (minima) v krajním bodě intervalu nebo v bodě, ve kterém má lokální extrém.*

□ Při hledání extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu stačí najít všechny „podezřelé“ body: krajní body intervalu, stacionární body (kde je derivace nulová) a body, ve kterých funkce nemá derivaci. Stačí pak porovnat hodnoty funkce ve všech těchto bodech.

7.20. Příklad. Určete maximum a minimum funkce $f(x) = x^2 + 2x$ na intervalu $\langle -2, 1\rangle$.

Řešení. Funkce f je spojitá, na uzavřeném intervalu $\langle -2, 1\rangle$ tedy maxima i minima nabývá. Derivace $f'(x) = 2x + 2$ existuje všude uvnitř daného intervalu, nulová je v bodě -1. Protože $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$ a $f(1) = 3$, je $\max f = f(1) = 3$ a $\min f = f(-1) = -1$.

7.21. Poznámka. Při hledání extrémů spojité funkce na (polo)otevřeném intervalu je třeba uvažovat limity funkce v těch krajních bodech, které do intervalu nepatří. Zjistíme tak supremum (infimum) hodnot funkce. Pokud jich funkce nenabývá, pak maximum (minimum) nemá. Extrémy funkce na sjednocení konečně mnoha intervalů vyšetřujeme po jednotlivých intervalech.

7.22. Příklad. Určete maximum a minimum funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $(-1, 2)$.

Řešení. Funkce má v každém bodě derivaci $f'(x) = 2x$, stacionární bod je 0. Porovnáváme hodnoty $f(0) = 0$, $f(-1+) = 1$, $f(2-) = 4$. Nejmenší je $f(0) = 0$, což je minimum funkce f, největší je $f(2-) = 4$, což je supremum funkčních hodnot funkce f, funkce f maxima nenabývá.

□ V některých případech můžeme krajní body intervalu přidat.

7.23. Příklad. Určete rozměry obdélníku s největším obsahem vepsaného do kružnice o poloměru $r > 0$.

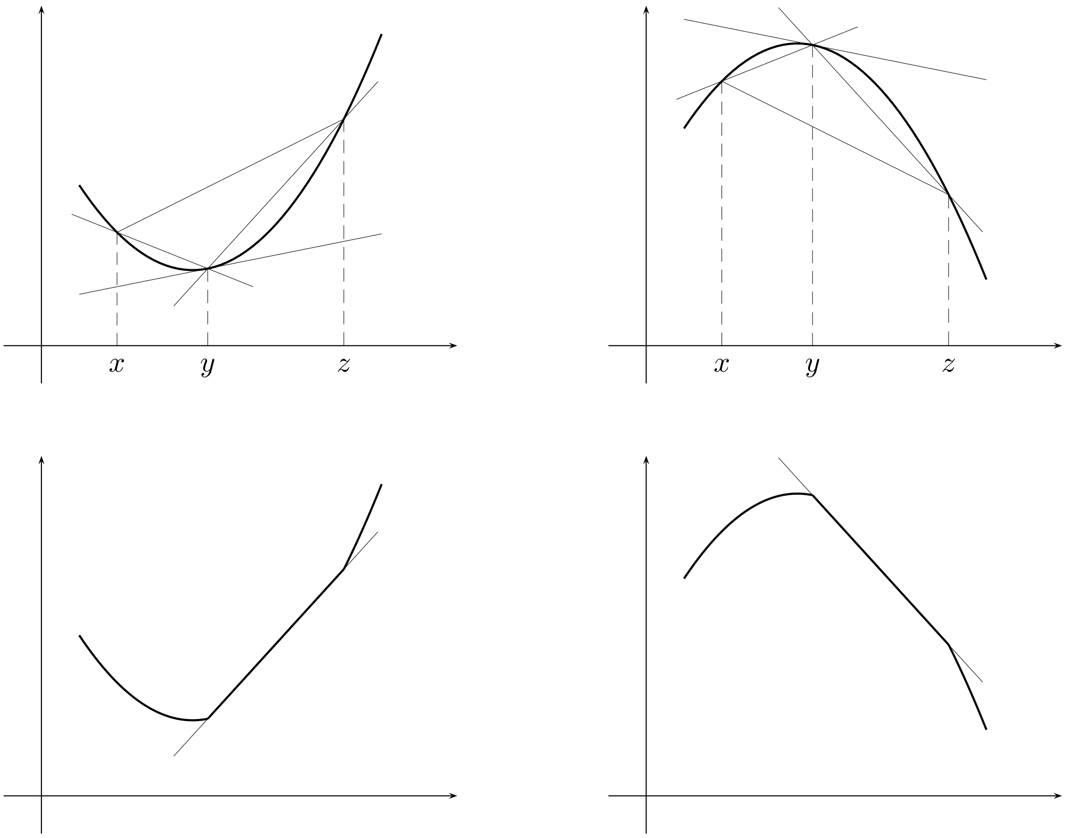
Řešení. Označme a jednu stranu obdélníku vepsaného do kružnice o poloměru r. Z Pythagorovy věty dostaneme velikost druhé strany $b = \sqrt{4r^2 - a^2}$. Obsah obdélníku je

$$P(a) = ab = a\sqrt{4r^2 - a^2}\,.$$

Hledáme maximum funkce P pro přípustné hodnoty $a \in (0, 2r)$. Pokud přidáme krajní body intervalu, dostaneme spojitou funkci P na uzavřeném intervalu $\langle 0, 2r\rangle$, takže maxima nabývá. Není to v krajních bodech, protože $P(0) = P(2r) = 0$ a funkce P je na intervalu $(0, 2r)$ kladná. Protože funkce P má ve všech bodech intervalu $(0, 2r)$ derivaci, nabývá maxima ve stacionárním bodě. Derivace funkce P je

$$P'(a) = \sqrt{4r^2 - a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2(2r^2 - a^2)}{\sqrt{4r^2 - a^2}}\,,$$

jediný stacionární bod v intervalu $(0, 2r)$ je $a = \sqrt{2}\,r = b$. Jedná se tedy o čtverec.



Obrázek 7.1: Ilustrace (ryzí) konvexity a konkavity funkce (definice 7.25, poznámka 7.26).

7.24. Poznámka. Někdy bývá jednodušší místo funkce f vyšetřovat funkci $g \circ f$, kde g je vhodná ryze monotonní funkce. Například v předcházejícím příkladu jsme mohli vyšetřovat funkci

$$f(a) = P^2(a) = a^2(4r^2 - a^2)\,,$$

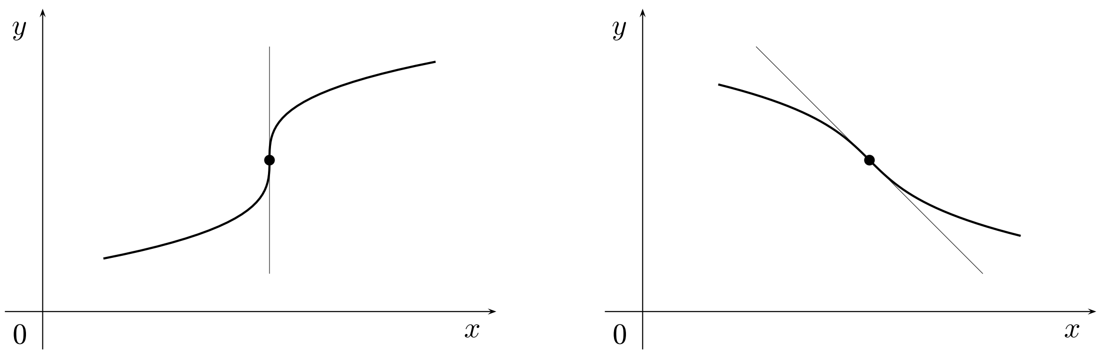
jejíž derivace se počítá snáze.

□ Pomocí první derivace zjišťujeme monotonii funkce (zda a jak rychle funkce roste). Podobně můžeme pomocí druhé derivace zjišťovat, zda a jak rychle roste směrnice tečen grafu. Geometricky to odpovídá tomu, jak moc je graf funkce zakřiven. Protože tečnu máme definovánu jen v případě, že funkce má derivaci, použijeme v definici směrnici sečen (viz obrázek 7.1).

7.25. Definice. Řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, pokud pro každou trojici čísel $x, y, z \in I$, pro kterou je $x < y < z$, platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,.$$

Platí-li opačná nerovnost, mluvíme o funkci *konkávní*, v případě ostré nerovnosti mluvíme o *ryze konvexní* (*ryze konkávní*) funkci.



Obrázek 7.2: Ilustrace inflexních bodů.

7.26. Poznámka. Konvexitu funkce lze definovat i následující podmínkou: úsečka spojující body grafu leží nad grafem funkce nebo na něm (viz obrázek 7.1). Pro funkce, které mají v daném intervalu vlastní derivace, to odpovídá tomu, že graf funkce leží nad tečnou nebo na ní. Ryze konvexní (ryze konkávní) funkce je taková konvexní (konkávní) funkce, jejíž graf neobsahuje žádnou úsečku.

7.27. Věta. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu I, která má v každém vnitřním bodě intervalu I druhou derivaci. Je-li $f'' > 0$ (resp. $f'' \geq 0$, $f'' \leq 0$, $f'' < 0$) uvnitř intervalu I, pak funkce f je na intervalu I ryze konvexní (resp. konvexní, konkávní, ryze konkávní).*

Důkaz. Uvažujme případ $f'' > 0$ (ostatní se dokazují podobně). Mějme $x, y, z \in I$, $x < y < z$. Funkce f' je rostoucí, pro funkci f jsou splněny podmínky Lagrangeovy věty, takže existují body $c \in (x, y)$, $d \in (y, z)$, pro které platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) < f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y} .$$

7.28. Příklad. Pro funkci $f(x) = x^3 - 3x + 1$ je $f''(x) = 6x$. Funkce f je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a ryze konvexní na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

7.29. Poznámka. Ukázali jsme, jak se dá využít znaménka druhé derivace pro vyšetření lokálního extrému ve stacionárním bodě. To souvisí s tím, zda je funkce v okolí bodu konvexní nebo konkávní.

□ Pokud se v některém bodě plynule mění ryzí konvexita v ryzí konkavitu, dostáváme situaci, kdy tečna grafu protíná graf funkce.

7.30. Definice. Řekneme, že bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje $f'(a)$ a pokud funkce f je na některém jednostranném okolí bodu a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí bodu a ryze konkávní.

□ Vyšetřování konvexity je podobné vyšetřování monotonie „o derivaci výše". Také vyšetřování inflexních bodů se podobá vyšetřování lokálních extrémů.

7.31. Věta.
1) *Má-li funkce f v bodě a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, pak funkce f má v bodě a inflexi.*

7.32. Příklad. Pro funkci $x^3 - 3x + 1$ je $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$, funkce f má tedy v bodě 0 inflexi.

7.33. Poznámka. Jestliže pro $n \in \mathbb{N}$ je $f''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$, $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, pak funkce f má v bodě a inflexi.

□ Asymptota křivky je přímka, ke které se křivka přibližuje. V případě grafu funkce máme dvě základní možnosti.

7.34. Definice. *Asymptota* grafu funkce f v nevlastním bodě $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$ taková, že platí
$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x) - (px + q)\bigr) = 0\,.$$
Má-li funkce f ve vlastním bodě $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku o rovnici $x = a$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě a.

7.35. Poznámka. Asymptotě ve vlastním bodě se říká *svislá asymptota*. Svislou asymptotu můžeme mít pouze v hraničních bodech definičního oboru nebo v bodech nespojitosti funkce — ověřujeme v nich jednostranné limity. Pokud má funkce v nevlastním bodě vlastní limitu q, pak v tomto bodě existuje asymptota o rovnici $y = q$, mluvíme o *vodorovné asymptotě*. V ostatních případech (asymptoty v nevlastních bodech s nenulovou směrnicí) mluvíme o *šikmé asymptotě*. Návod k vyšetřování asymptot v nevlastních bodech (hlavně šikmých) dává následující tvrzení.

7.36. Tvrzení. *Funkce f má v nevlastním bodě $a \in \{\pm\infty\}$ asymptotu o rovnici $y = px + q$ právě tehdy, když*
$$p = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}\,, \qquad q = \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - px\bigr)\,.$$

Důkaz. Podle věty o limitě součtu jsou následující rovnosti ekvivalentní:
$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x) - px - q\bigr) = 0\,, \qquad \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - px\bigr) = q\,.$$
Pokud tyto rovnosti platí, pak
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - px}{x} + \lim_{x\to a}\frac{px}{x} = \frac{q}{\pm\infty} + p = p\,.$$

7.37. Příklad. Určete asymptoty grafu funkce $f(x) = x + |x| + 3 + \frac{1}{x-1}$.

Řešení. Funkce f je spojitá, její definiční obor je $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, svislá asymptota může být jedině v bodě 1. Spočítáme příslušné limity:

$$\lim_{x\to 1\pm}\left(x+|x|+3+\frac{1}{x-1}\right)=5+\frac{1}{0\pm}=\pm\infty\,.$$

Svislá asymptota je tedy přímka o rovnici $x=1$. Funkce je definována v okolí $\pm\infty$, můžeme tedy vyšetřovat asymptoty v obou nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x(x-1)}\right)=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-0x\big)=\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{x-1}\right)=3\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x(x-1)}\right)=2\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x-1}\right)=3\,.$$

Asymptota v $-\infty$ má rovnici $y=3$, asymptota v $+\infty$ má rovnici $y=2x+3$. (Asymptotu v $-\infty$ jsme mohli určit výpočtem $\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$.)

7.38. Poznámka. Při výpočtu směrnice asymptoty můžeme někdy použít l'Hospitalovo pravidlo. Pokud existuje limita f' v nevlastním bodě, pak je to jediný kandidát na směrnici asymptoty. Může se ale stát, že asymptota existuje, i když neexistuje limita derivace.

7.39. Příklad. Pro funkci $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$ je $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, asymptota v $+\infty$ má tedy rovnici $y=0$. Přitom

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2\right)=|0\cdot\text{omez.}+\text{neex.}|$$

neexistuje. Graf funkce se tedy „nepřimyká“ ke grafu přímky — protíná ji, navíc pod úhly, které se neblíží nule.

7.40. Příklady. Aby existovala asymptota v nevlastním bodě, musí existovat dvě vlastní limity z tvrzení 7.36. Ukážeme různé možnosti, kdy k tomu nedojde.

1) Pro funkci $f(x)=x\sin x$ neexistuje limita

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sin x\,.$$

2) Pro funkci $f(x)=x^2$ je

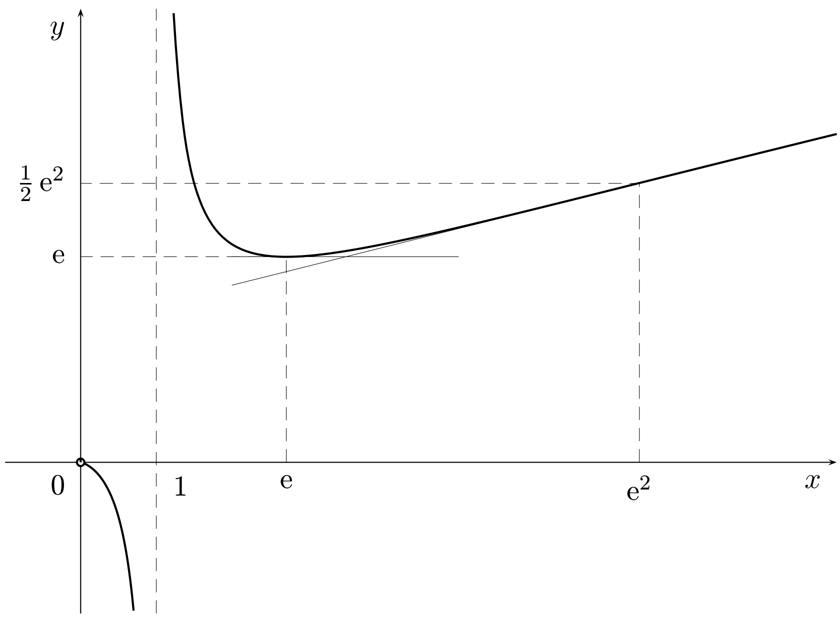
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\,.$$

Funkce roste příliš „rychle“, směrnice tečny a tedy i případné asymptoty roste nade všechny meze.

3) Pro funkci $f(x)=\ln x$ je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-0x\big)=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,.$$

Funkce roste čím dál pomaleji, ale funkční hodnoty rostou nade všechny meze.



Obrázek 7.3: Graf funkce $\frac{x}{\ln x}$ (příklad 7.41).

4) Pro funkci $f(x) = x + \sin x$ je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = \left|1 + \frac{\text{omez.}}{+\infty}\right| = 1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 1x\big) = \lim_{x\to+\infty} \sin x \quad \text{neex.}$$

Graf funkce kmitá kolem přímky o rovnici $y = x$, ale rozkmit se nezmenšuje.

□ Shrňme vše, co se obvykle zjišťuje při vyšetřování průběhu funkce (podle konkrétní potřeby toho může být méně nebo i více). Seřadíme jednotlivé body podle řádu použitých derivací.

1) Definiční obor. Zda je funkce sudá, lichá, periodická, jakou má (základní) periodu. Nulové body, kde je funkce kladná, záporná. Spojitost, limity v bodech nespojitosti a hraničních bodech definičního oboru, asymptoty.
2) Monotonie, lokální extrémy, maximum a minimum funkce, obor hodnot. Derivace a jejich limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech definičního oboru, tečny grafu.
3) Konvexita, konkavita, inflexní body (včetně funkčních hodnot, derivace, případně tečny).

7.41. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Řešení. Argument logaritmu musí být kladný, tedy $x > 0$. Nemůžeme dělit nulou, tedy $\ln x \neq 0$, tj. $x \neq 1$. Definiční obor funkce je $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Funkce je spojitá, není sudá, lichá ani periodická. Na intervalu $(0,1)$ je funkce záporná, na intervalu $(1,+\infty)$ kladná. Vyšetříme limity v hraničních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{x}{\ln x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to0+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} x = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{x}{\ln x} = \left|\frac{1}{0\pm}\right| = \pm\infty\,,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty\,.$$

Odtud máme rovnici asymptoty $x = 1$. V bodě $+\infty$ může být jedině šikmá asymptota, ta ale neexistuje, protože
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0\,.$$
Spočtěme první a druhou derivaci:
$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,, \qquad D(f') = D(f)\,,$$
$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}\,, \qquad D(f'') = D(f)\,.$$

První derivace je záporná na intervalech $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e})$, kladná na intervalu $(\mathrm{e},+\infty)$. Funkce f je tedy klesající na $(0,1)$ a $(1,\mathrm{e}\rangle$, rostoucí na $\langle \mathrm{e},+\infty)$, v bodě e má ostré lokální minimum $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, jiné lokální extrémy nemá. Protože f je spojitá funkce, je obrazem intervalu interval, vzhledem k monotoniím a limitám na jednotlivých intervalech je $f\big((0,1)\big) = (-\infty,0)$, $f\big((1,\mathrm{e}\rangle\big) = \langle \mathrm{e},+\infty)$, $f\big(\langle \mathrm{e},+\infty)\big) = \langle \mathrm{e},+\infty)$, tedy obor hodnot funkce f je $R(f) = (-\infty,0) \cup \cup \langle \mathrm{e},+\infty)$, funkce nenabývá ani minima ani maxima.
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \frac{1}{\ln x}}{\ln x} = \frac{1-0}{-\infty} = 0\,,$$
graf funkce se v bodě $[0,0]$ přimyká k ose x. Druhá derivace je záporná na intervalech $(0,1)$ a $(\mathrm{e}^2,+\infty)$, kladná na intervalu $(1,\mathrm{e}^2)$, funkce f je ryze konkávní na intervalech $(0,1)$ a $\langle \mathrm{e}^2,+\infty)$, ryze konvexní na intervalu $(1,\mathrm{e}^2\rangle$, v bodě e^2 je inflexe. Hodnota a derivace funkce v bodě inflexe jsou
$$f(\mathrm{e}^2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^2\,, \qquad f'(\mathrm{e}^2) = \tfrac{1}{4}\,.$$
Graf funkce je na obrázku 7.3.

Neřešené úlohy

1. Dokažte následující identity:

   a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$ b) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x} = -\pi\,, \quad x < 0\,;$

   c) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$ d) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} = \pi\,, \quad x \geq 1\,.$

2. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce:

   a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}\,;$ b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\,;$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\,;$

d) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$; e) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = x\ln x$;

g) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; h) $f(x) = x - \sin x$; i) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;

j) $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-|x|}$; k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$; l) $f(x) = (x-1)\,|x+3|$;

m) $f(x) = |(x-2)^3 + 1|$.

3. Určete maximum a minimum funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4\,,\quad x \in \langle -3, 3\rangle$; b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1\,,\quad x \in \langle -2, 1\rangle$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3\,,\quad x \in \langle -1, 3\rangle$; d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2\,,\quad x \in \langle -2, 3\rangle$;

e) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}\,,\quad x \in \langle 1, +\infty\rangle$; f) $f(x) = x\ln^2 x\,,\quad x \in (0, 1\rangle$;

g) $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}\,,\quad x \in (-\infty, +\infty)$; h) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}\,,\quad x \in (0, +\infty)$;

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\,,\quad x \in (-1, 1)$; j) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\,,\quad x \in (-\infty, +\infty)$.

4. a) Určete rozměry obdélníku s největším obsahem vepsaného do půlkruhu o poloměru r.

b) Určete rozměry kvádru se čtvercovou podstavou, který má při objemu V nejmenší povrch.

c) Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do koule o poloměru r.

d) Určete rozměry válce s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru r.

e) Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do kuželu s poloměrem podstavy r a výškou v.

f) Určete rozměry válcové nádoby, která má při obsahu povrchu S největší objem.

5. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$; b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$; c) $x^4 + x^2 + \mathrm{e}^x$;

d) $x\,\mathrm{e}^x$; e) $(x^2+1)\,\mathrm{e}^x$; f) $x + \sin x$;

g) $\dfrac{x}{x^2+1}$; h) $\dfrac{|x-1|}{x^2}$; i) $\sqrt[3]{x+3}$;

j) $(\operatorname{sign} x + 1)\cdot x^2$.

6. Určete asymptoty grafu funkce:

a) $\dfrac{2x+1}{3x-1}$; b) $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$; c) $\dfrac{x^2-2x}{x+1}$;

d) $\dfrac{x^3+1}{x-1}$; e) $x+\mathrm{e}^{-x}$; f) $x\ln x$;

g) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; h) $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; i) $\mathrm{e}^x\cos x$;

j) $\ln(3\,\mathrm{e}^{2x}-1)$.

Výsledky

2. a) na $(-\infty,-5)$ a $(-5,+\infty)$ rostoucí, lokální extrémy nemá;

   b) na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -1,0)$ a $(0,1\rangle$ klesající, $f(-1)=-2$ ostré lokální maximum, $f(1)=2$ ostré lokální minimum;

   c) na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,+\infty)$ klesající, na $\langle -1,1\rangle$ rostoucí, $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ostré lokální minimum, $f(1)=\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum;

   d) na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -2,0\rangle$ klesající, $f(-2)=4\mathrm{e}^{-2}$ ostré lokální maximum, $f(0)=0$ ostré lokální minimum;

   e) na $(0,1\rangle$ klesající, na $\langle 1,+\infty)$ rostoucí, $f(1)=1$ ostré lokální minimum;

   f) na $(0,\mathrm{e}^{-1}\rangle$ klesající, na $\langle \mathrm{e}^{-1},+\infty)$ rostoucí, $f(\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$ ostré lokální minimum;

   g) na $(-1,1)$ rostoucí, lokální extrémy nemá;

   h) na $\mathbb{R}$ rostoucí, lokální extrémy nemá;

   i) na $(-\infty,0\rangle$ rostoucí, na $\langle 0,+\infty)$ klesající, $f(0)=1$ ostré lokální maximum;

   j) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle 3,+\infty)$ klesající, na $\langle -3,3\rangle$ rostoucí, $f(-3)=-27\,\mathrm{e}^{-3}$ ostré lokální minimum, $f(3)=27\,\mathrm{e}^{-3}$ ostré lokální maximum;

   k) na $(-\infty,0\rangle$ rostoucí, na $\langle 0,+\infty)$ klesající, $f(0)=1$ ostré lokální maximum;

   l) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle -1,+\infty)$ rostoucí, na $\langle -3,-1)$ klesající, $f(-3)=0$ ostré lokální maximum, $f(-1)=-4$ ostré lokální minimum;

   m) na $(-\infty,1\rangle$ klesající, na $\langle 1,+\infty)$ rostoucí, $f(1)=0$ ostré lokální minimum.

3. a) $\max f=f(-2)=20$, $\min f=f(2)=-12$;

   b) $\max f=f(1)=6$, $\min f=f(-2)=-3$;

   c) $\max f=f(3)=12$, $\min f=f(2)=-13$;

   d) $\max f=f(0)=f(3)=2$, $\min f=f(-2)=-18$;

   e) $\max f$ neexistuje, $\min f=f(1)=0$;

   f) $\max f=f(\mathrm{e}^{-2})=4\mathrm{e}^{-2}$, $\min f=f(1)=0$;

   g) $\max f$ neexistuje, $\min f=f(0)=1$;

   h) $\max f=f(1)=\mathrm{e}^{-1}$, $\min f$ neexistuje;

   i) $\max f$ neexistuje, $\min f$ neexistuje;

   j) $\max f=f(1)=\frac{1}{2}$, $\min f=f(-1)=-\frac{1}{2}$.

4. a) strany $\sqrt{2}\,r$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}\,r$, obsah r^2;

   b) krychle s hranami $\sqrt[3]{V}$, obsah povrchu $6\sqrt[3]{V^2}$;

   c) poloměr podstavy $\sqrt{2/3}\,r$, výška $\frac{2}{\sqrt{3}}\,r$, objem $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,r^3$;

   d) poloměr podstavy $\frac{\sqrt{2}}{2}\,r$, výška $\sqrt{2}\,r$, obsah pláště $2\pi r^2$;

   e) poloměr podstavy $\frac{2}{3}\,r$, výška $\frac{1}{3}\,v$, objem $\frac{4}{27}\,\pi r^2 v$;

   f) poloměr podstavy $\sqrt{S/(3\pi)}$, výška $\sqrt{S/(3\pi)}$, objem $\sqrt{S^3/(27\pi)}$ pro nádobu bez víka, poloměr podstavy $\sqrt{S/(6\pi)}$, výška $\sqrt{2S/(3\pi)}$, objem $\sqrt{S^3/(54\pi)}$ pro nádobu s víkem.

5. a) na $(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$ a $\langle\frac{1}{2},+\infty)$ konvexní, na $\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ konkávní, inflexe v $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$;

   b) na $(-\infty,1\rangle$ konkávní, na $\langle 1,+\infty)$ konvexní, inflexe v 1;

   c) na $\mathbb{R}$ konvexní, body inflexe nemá;

   d) na $(-\infty,-2\rangle$ konkávní, na $\langle-2,+\infty)$ konvexní, inflexe v -2;

   e) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle-1,+\infty)$ konvexní, na $\langle-3,-1\rangle$ konkávní, inflexe v -3 a -1;

   f) na $\langle 0+2k\pi,\pi+2k\pi\rangle$ $(k\in\mathbb{Z})$ konkávní, na $\langle\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi\rangle$ $(k\in\mathbb{Z})$ konvexní, inflexe v $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$;

   g) na $(-\infty,-\sqrt{3}\,\rangle$ a $\langle 0,\sqrt{3}\,\rangle$ konkávní, na $\langle-\sqrt{3},0\rangle$ a $\langle\sqrt{3},+\infty)$ konvexní, inflexe v $\pm\sqrt{3}$ a 0;

   h) na $(-\infty,0)$, $(0,1\rangle$ a $\langle 3,+\infty)$ konvexní, na $\langle 1,3\rangle$ konkávní, inflexe v 3;

   i) na $(-\infty,-3\rangle$ konvexní, na $\langle-3,+\infty)$ konkávní, inflexe v -3;

   j) na $\mathbb{R}$ konvexní, body inflexe nemá.

6. a) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ v $\pm\infty$;

   b) $x=-2$, $y=0$ v $\pm\infty$;

   c) $x=-1$, $y=x-3$ v $\pm\infty$;

   d) $x=1$;

   e) $y=x$ v $+\infty$;

   f) nemá;

   g) $y=\frac{\pi}{4}$ v $\pm\infty$;

   h) $x=\pm 1$;

   i) $y=0$ v $-\infty$;

   j) $x=-\frac{1}{2}\ln 3$, $y=2x+\ln 3$ v $+\infty$.

Kapitola 8

Neurčitý integrál

□ Hledání neurčitého integrálu (primitivní funkce) je opačný proces k určování derivace. Při výpočtu se vychází ze známých integrálů a využívá se linearita, metoda per partes a substituce.

8.1. Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na otevřeném intervalu I, pokud $F' = f$ na intervalu I.

8.2. Příklad. Funkce $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$ na $\mathbb{R}$, protože $(\sin x)' = \cos x$ na $\mathbb{R}$.

8.3. Poznámka. Pojem primitivní funkce se někdy zobecňuje i na (polo)uzavřený interval. Buď tak, že v případných krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace funkce F — k tomu stačí, aby funkce f, F byly spojité (tvrzení 6.7) — nebo tak, že funkce F je v těchto bodech spojitá. Pro jednoduchost budeme hledat primitivní funkce na otevřených intervalech, ale předpoklad o otevřenosti budeme v různých tvrzeních vypouštět.

□ Ne každá funkce má primitivní funkci. To vyplývá z toho, že každá derivace má, podobně jako každá spojitá funkce, vlastnost mezihodnoty.

8.4. Věta. *Nechť funkce f je derivací funkce F na intervalu I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$. Pak existuje bod c mezi a, b tak, že $f(c) = d$.*

Důkaz. Předpokládejme $a < b$ (opačný případ se dokazuje podobně). Funkce $G(x) = F(x) - dx$ má vlastní derivaci $G'(x) = f(x) - d$ na intervalu I, je tedy spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nabývá na něm minima. Protože $G'(a) = f(a) - d < 0$ a $G'(b) = f(b) - d > 0$, je funkce G klesající v bodě a a rostoucí v bodě b, nabývá tedy minima v některém bodě $c \in (a, b)$. V tomto bodě má funkce G nulovou derivaci, tedy $f(c) = d$.

□ Vlastnost mezihodnoty nemají například ty funkce, které mají v některém bodě různé jednostranné limity (případně je mají stejné, ale různé od funkční hodnoty).

8.5. Příklad. Funkce $\operatorname{sign} x$ nemá primitivní funkci — obor hodnot je $\{-1, 0, 1\}$, nesplňuje podmínku mezihodnot.

□ Zatím bez důkazu uveďme důležitou větu o existenci primitivní funkce — k důkazu se vrátíme po zavedení určitého integrálu (důsledek 10.20).

8.6. Věta. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

8.7. Poznámka. Ne vždy se dá primitivní funkce (i ke spojité funkci) vyjádřit pomocí elementárních funkcí — příkladem může být ve statistice důležitá funkce e^{-x^2}.

□ Podívejme se, jak může vypadat množina primitivních funkcí k dané funkci.

8.8. Věta.
1) *Je-li funkce F primitivní funkce k funkci f, $c \in \mathbb{R}$, pak i funkce $F(x)+c$ je primitivní funkce k funkci f.*
2) *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k funkci f na intervalu I, pak funkce $F_1 - F_2$ je konstantní.*

Důkaz. 1) $\bigl(F(x)+c\bigr)' = F'(x) = f(x)$.
2) $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ na intervalu I, podle věty o monotonii (viz poznámky 7.2) je funkce $F_1 - F_2$ konstantní.

□ Na intervalu je tedy množina všech primitivních funkcí (pokud existuje alespoň jedna) nekonečná, je tvořena funkcemi lišícími se o konstantu. Podmínka „na intervalu" je podstatná, funkce se stejnou derivací se mohou na různých intervalech lišit o různé konstanty.

8.9. Příklad. Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$ je definována na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ má funkce

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1\,, & x < 0\,, \\ x + c_2\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

derivaci rovnu f na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8.10. Definice. Pokud existuje alespoň jedna primitivní funkce F k funkci f na intervalu I, nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f *neurčitým integrálem* funkce f na intervalu I, značíme ji

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Funkce f se nazývá *integrand*, hledání neurčitého integrálu nazýváme *integrování*.

8.11. Poznámka. Z charakterizace množiny primitivních funkcí (věta 8.8) dostaneme vyjádření neurčitého integrálu ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c\colon\ c \in \mathbb{R}\}$$

(F je libovolná primitivní funkce k funkci f). Budeme používat běžnější zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,.$$

Konstanta c se nazývá *integrační konstanta*. Pokud se v integrálu nezapisuje funkční předpis, používá se i stručnější označení $\int f$.

□ Podobně jako u derivování i při integrování vycházíme z některých známých integrálů (říká se jim *tabulkové integrály*). Uveďme ty nejdůležitější, které dostaneme přepisem vztahů pro derivaci.

8.12. Tvrzení (základní tabulkové integrály).

$$\begin{aligned}
\int x^a \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, && \textit{interval(y) podle } D(x^a)\,, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln|x| + c\,, && x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, +\infty)\,,\\
\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + c\,, && x \in \mathbb{R}\,,\\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + c\,, && x \in \mathbb{R}\,,\\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + c\,, && x \in \mathbb{R}\,,\\
\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x &= \operatorname{arctg} x + c\,, && x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

8.13. Příklady.

1) $\displaystyle \int x^5 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}\, x^6 + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$

2) $\displaystyle \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \int x^{-2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c\,, \qquad x \in (-\infty, 0)\,, \quad x \in (0, +\infty)\,.$

3) $\displaystyle \int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \int x^{1/2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$

4) $\displaystyle \int \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x = \int x^{1/3} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{4/3}}{4/3} + c = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$

□ Důsledkem linearity derivace je „linearita" integrálu.

8.14. Věta. *Jsou-li $F_1, F_2, \dots, F_n$ po řadě primitivní funkce k funkcím $f_1, f_2, \dots, f_n$ na intervalu I, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1F_1 + c_2F_2 + \dots + c_nF_n$ je primitivní funkce k $c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_nf_n$ na intervalu I.*

Důkaz. $(c_1F_1 + c_2F_2 + \dots + c_nF_n)' = c_1F_1' + c_2F_2' + \dots + c_nF_n' = c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_nf_n\,.$

8.15. Příklad.

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \,\mathrm{d}x = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\, x^2 - 2x + \ln|x| + c\,,$$

$$x \in (-\infty, 0)\,, \quad x \in (0, +\infty)\,.$$

□ Důsledkem věty o derivaci součinu je metoda integrování „per partes“ (po částech).

8.16. Věta (integrování *per partes*). *Nechť na intervalu I existují u', v', $\int u'v$. Pak*

$$\int uv' = uv - \int u'v \qquad \text{na } I\,.$$

Důkaz. $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$.

□ Symetričtější tvar zápisu metody per partes je

$$\int uv' + \int u'v = uv + c\,.$$

Ukažme použití metody per partes v některých typických případech. Nejjednodušší jsou případy, ve kterých jedna z funkcí v součinu je polynom, zatímco druhou umíme opakovaně integrovat — je to exponenciální funkce, sinus nebo kosinus.

8.17. Příklad.

$$\int (x+1)\sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x+1 & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -(x+1)\cos x - \int -\cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -(x+1)\cos x + \sin x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ V některých případech je třeba použít metodu per partes opakovaně.

8.18. Příklad.

$$\int (x^2-2x)\,\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2-2x & v' = \mathrm{e}^{2x} \\ u' = 2x-2 & v = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \end{matrix} \right| = \tfrac{1}{2}\,(x^2-2x)\,\mathrm{e}^{2x} - \int (x-1)\,\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x-1 & v' = \mathrm{e}^{2x} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \end{matrix} \right| = \tfrac{1}{2}\,(x^2-2x)\,\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{2}\,(x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + \int \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{4}\,(2x^2-6x+3)\,\mathrm{e}^{2x} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ V případě součinu exponenciální funkce se sinem nebo kosinem vede dvojí použití metody per partes na rovnici pro příslušný integrál. Nezáleží na tom, zda budeme derivovat exponenciální funkci a integrovat goniometrickou či naopak, v obou krocích je však nutné postupovat stejně.

8.19. Příklad.

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \sin x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \cos x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = \sin x \end{matrix} \right| = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x\,,$$

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x + c\,,$$
$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ V některých případech je vhodné doplnit číslo 1.

8.20. Příklad.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1\cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c\,,$$
$$x \in (0, +\infty)\,.$$

8.21. Poznámka. Podobně (derivováním logaritmu) lze spočítat integrály $\int x^a \ln x \,\mathrm{d}x$, v případě $a = -1$ dojdeme k rovnici pro hledaný integrál (tento případ se lépe řeší substitucí).

□ Další důležitá metoda je *substituce*, kterou lze provádět dvěma způsoby — jednak lze zavést novou proměnnou místo funkce, jednak lze za proměnnou dosadit funkci. Tato metoda vychází z věty o derivaci složené funkce.

8.22. Věta (o substituci v integrálu). *Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce $\varphi\colon I \to J$ má derivaci φ' na intervalu I, funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci F na intervalu J. Pak platí:*

1)
$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) + c\,, \qquad t \in I\,.$$

2) *Jestliže funkce φ je ryze monotonní, $\varphi(I) = J$ a existuje primitivní funkce $G(t)$ k funkci $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ na intervalu I, pak*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c\,, \qquad x \in J\,.$$

Důkaz. 1) Využitím věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\varphi(t)\big) = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,.$$

2) Podle první části je i funkce $F\big(\varphi(t)\big)$ primitivní funkce k funkci $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ na intervalu I, existuje tedy konstanta c taková, že

$$G(t) = F\big(\varphi(t)\big) + c\,, \qquad t \in I\,.$$

Z podmínek vyplývá, že funkce φ má inverzní funkci $\varphi_{-1}\colon J \to I$, dostáváme tedy pro každé $x \in J$

$$G\big(\varphi_{-1}(x)\big) = (F\circ\varphi)\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c = F(x) + c\,, \qquad x \in J\,,$$

a tedy funkce $G\big(\varphi_{-1}(x)\big)$ je primitivní k funkci f na intervalu J.

8.23. Poznámka. Pokud označíme $x = \varphi(t)$ a zapíšeme derivaci funkce φ jako podíl diferenciálů ve tvaru
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)\,,$$
pak formálním vynásobením výrazem $\mathrm{d}t$ dostaneme $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. První substituci lze pak názorně zapsat ve tvaru (po přeznačení proměnných)
$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int f(t)\;\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi(x)\big) + c\,,$$
což zdůvodňuje zavedená značení. Podobně pro druhý typ substituce píšeme
$$\int f(x)\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ \varphi_{-1}(x) = t \end{array}\right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = G(t) + c = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c\,.$$

□ První případ je bezproblémový, je třeba jen vhodně zvolit substituci, která bývá často „vidět“.

8.24. Příklad.
$$\int \sin^3 x\cdot\cos x\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int t^3\;\mathrm{d}t = \tfrac14\,t^4 + c = \tfrac14\sin^4 x + c\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

□ Někdy se v integrované funkci nevyskytuje přímo derivace vnitřní funkce, ale její nenulový násobek. Pak můžeme integrovanou funkci upravit nebo použít úpravu při substituci — substituční rovnice můžeme dělit a násobit nenulovou konstantou:

8.25. Příklad. Na intervalu $\mathbb{R}$ dostáváme:
$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}x = -\frac12\int -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} -x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = -\frac12\int \mathrm{e}^t\;\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^t}{2} + c = -\frac12\,\mathrm{e}^{-x^2} + c\,,$$
$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} -x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = -\frac12\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int -\frac12\,\mathrm{e}^t\;\mathrm{d}t = -\frac12\,\mathrm{e}^t + c = -\frac12\,\mathrm{e}^{-x^2} + c\,.$$

□ V druhém případě je třeba dát pozor na to, na kterém intervalu je příslušná substituce provedena, a musíme najít inverzní funkci.

8.26. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Řešení. Integrál hledáme na intervalu $(-1,1)$, použijeme substituci $x = \sin t$. Funkce $\sin t$ zobrazí interval $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ na interval $(-1,1)$, je na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ rostoucí a má na něm inverzní funkci $\arcsin x$. Při výpočtu využijeme identitu $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ a to, že funkce $\cos t$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kladná.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} \,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{|\cos t|} \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{\cos t}{\cos t} \,\mathrm{d}t = \int 1 \,\mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c\,, \qquad x \in (-1,1)\,.$$

8.27. Poznámka. Používáme-li při substituci ryze monotonní funkci, můžeme postupovat oběma způsoby a podle potřeby mezi nimi přecházet v substitučních rovnicích. Pokud například provádíme substituci za funkci e^x (je prostá), můžeme přejít k inverzní funkci $\ln t$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} = \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{e}^x} = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t \\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)\,t}\,,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t \\ x = \ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)\,t}\,.$$

□ Podívejme se teď na několik případů substitucí obecného charakteru. Nebudeme rozebírat intervaly řešení, které závisí na integrované funkci (obvykle jsou to její maximální intervaly spojitosti). Nejjednodušší je substituce za posunutou proměnnou. Pro $a \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\int f(x+a)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x+a = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(x+a) + c\,.$$

8.28. Příklad.

$$\int (x+1)^5\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x+1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^5\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}\,t^6 + c = \tfrac{1}{6}\,(x+1)^6 + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ Další případ je dosazení za násobek proměnné. Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dostáváme

$$\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} ax = t \\ a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{a}\,F(t) + c = \tfrac{1}{a}\,F(ax) + c\,.$$

Někdy bývají tabulkové integrály přímo uvedeny v příslušném tvaru ($\int \sin ax\,\mathrm{d}x$, ...).

8.29. Příklad.

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\sin 3x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ Spojením obou předcházejících případů dostaneme lineární substituci $ax+b=t$ (pro $a \neq 0$), která se často ani nezapisuje.

8.30. Poznámka. Další důležitý případ je integrování zlomku, který má v čitateli derivaci jmenovatele. Integrály tohoto typu počítáme pomocí substituce za jmenovatel příslušného zlomku.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c\,.$$

Podobně jako u lineární substituce, ani tuto substituci často nezapisujeme a píšeme rovnou výsledek.

8.31. Příklady.

1) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c\,, \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2}+k\pi, \tfrac{\pi}{2}+k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$

(Ve druhém příkladu je výraz x^2+4x+5 vždy kladný, takže absolutní hodnotu v argumentu logaritmu jsme mohli vypustit.)

□ Integrály z cyklometrických funkcí se dají počítat metodou per partes, po které se použije vhodná substituce.

8.32. Příklad.

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u=\operatorname{arctg} x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x^2+1} & v=x \end{array}\right| = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

□ Další příklady vhodných substitucí pro určité typy integrovaných funkcí a problémy s tím spojené ukážeme později v kapitole 9.

Neřešené úlohy

1. Spočtěte (využijte linearitu a tabulkové integrály):

a) $\displaystyle\int (x^3-2x^2+5x-3)\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+4}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^5}\,\mathrm{d}x\,;$ d) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x\,;$

e) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}\,;$

g) $\displaystyle\int (3\,\mathrm{e}^x + 4\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x\,;$ h) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$

2. Spočtěte (využijte lineární substituce):

a) $\displaystyle\int (3x-4)^6 \,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^5}\,;$ d) $\displaystyle\int \sqrt[4]{2-x}\,\mathrm{d}x\,;$

e) $\displaystyle\int (2\cos 3x - 6\sin 2x)\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int \left(3\sin\tfrac{x}{3} - \cos\tfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int (5\,\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\,;$ h) $\displaystyle\int (3^x + 3\cdot 2^{-2x})\,\mathrm{d}x\,;$

i) $\displaystyle\int \sinh ax\,\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)\,;$ j) $\displaystyle\int \cosh ax\,\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)\,.$

3. Spočtěte (využijte vyjádření pomocí dvojnásobného argumentu):

a) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$

4. Spočtěte (využijte metodu per partes):

a) $\displaystyle\int (x-2)\sin 2x\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int (x+1)\cos\tfrac{x}{3}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int (3x-1)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int (x+\sqrt{x}\,)\ln x\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

5. Spočtěte (využijte metodu per partes opakovaně):

a) $\displaystyle\int (x^2-x)\sin\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int (2x^2+3)\cos 2x\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int x\ln^3 x\,\mathrm{d}x\,.$

6. Spočtěte (využijte metodu per partes a řešte rovnici):

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos\tfrac{x}{3}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$

7. Spočtěte pomocí vhodné substituce:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} 2x\,\mathrm{d}x\,.$

8. Spočtěte pomocí vhodné substituce:

a) $\displaystyle\int 2x\,(x^2-1)^4\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int 6x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{4x+4}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int \sin^7 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\,;$ h) $\displaystyle\int \sin x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x\,;$ i) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$

9. Spočtěte (využijte nejprve metodu per partes a pak vhodnou substituci):

   a) $\int \operatorname{arccotg} x \, \mathrm{d}x$; b) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$; c) $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   b) $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - \frac{4}{x} + c,\ x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$;
   c) $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + c,\ x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$;
   d) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c,\ x \in (0, +\infty)$;
   e) $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   f) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c,\ x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$;
   g) $3\,\mathrm{e}^x - 4\cos x - 2\sin x + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   h) $2x + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x \in \mathbb{R}$.
2. a) $\frac{1}{21}(3x-4)^7 + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   b) $\frac{1}{3}\ln|3x-1| + c,\ x \in (-\infty, \frac{1}{3}),\ x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$;
   c) $\frac{-1}{8(2x+1)^4} + c,\ x \in (-\infty, -\frac{1}{2}),\ x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$;
   d) $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{(2-x)^5} + c,\ x \in (-\infty, 2)$;
   e) $\frac{2}{3}\sin 3x + 3\cos 2x + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   f) $-9\cos\frac{x}{3} - 2\sin\frac{x}{2} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   g) $\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{-x} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   h) $\frac{1}{\ln 3}3^x - \frac{3}{2\ln 2}2^{-2x} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   i) $\frac{1}{a}\cosh ax + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   j) $\frac{1}{a}\sinh ax + c,\ x \in \mathbb{R}$.
3. a) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   b) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c,\ x \in \mathbb{R}$.
4. a) $-\frac{1}{2}(x-2)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   b) $3(x+1)\sin\frac{x}{3} + 9\cos\frac{x}{3} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   c) $\frac{1}{3}(3x-2)\,\mathrm{e}^{3x} + c,\ x \in \mathbb{R}$;
   d) $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3})\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c,\ x \in (0, +\infty)$;
   e) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c,\ x \in (0, +\infty)$.

5. a) $-2(x^2-x-8)\cos\frac{x}{2}+4(2x-1)\sin\frac{x}{2}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $(x^2+1)\sin 2x+x\cos 2x+c,\ x\in\mathbb{R};$
   c) $-(x^2+3x+4)\,\mathrm{e}^{-x}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   d) $x\,(\ln^2 x-2\ln x+2)+c,\ x\in(0,+\infty);$
   e) $x^2\,(\frac{1}{2}\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{4}\ln x-\frac{3}{8})+c,\ x\in(0,+\infty).$

6. a) $\frac{3}{37}\,(\sin\frac{x}{3}+6\cos\frac{x}{3})\,\mathrm{e}^{2x}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $-\frac{1}{5}\,(\sin 2x+2\cos 2x)\,\mathrm{e}^{-x}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   c) $\frac{1}{2}\ln^2 x+c,\ x\in(0,+\infty).$

7. a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $\frac{2}{3}\ln|x^3-1|+c,\ x\in(-\infty,1),\ x\in(1,+\infty);$
   c) $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+c,\ x\in(0+k\,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}),\ k\in\mathbb{Z}.$

8. a) $\frac{1}{5}\,(x^2-1)^5+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x^2+1}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   c) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c,\ x\in(-1,1);$
   d) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3}+c,\ x\in(-1,+\infty);$
   e) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+8}+c,\ x\in(-2,+\infty);$
   f) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   g) $\frac{1}{8}\sin^8 x+c,\ x\in\mathbb{R};$
   h) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+c,\ x\in\mathbb{R};$
   i) $\frac{1}{4}\ln^4 x+c,\ x\in(0,+\infty).$

9. a) $x\,\mathrm{arccotg}\,x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in(-1,1);$
   c) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in(-1,1).$

Kapitola 9

Integrace racionálních funkcí a dalších typů funkcí

□ V této kapitole ukážeme integraci racionálních funkcí a dalších typů funkcí, které se dají na integrál z racionální funkce převést vhodnou substitucí.

□ *Racionální* (česky *lomená*) funkce je funkce, která se dá zapsat ve tvaru podílu dvou polynomů. Vydělením příslušných polynomů dostaneme vyjádření racionální funkce ve tvaru součtu polynomu a *ryze lomené* funkce — racionální funkce, ve které je stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Ryze lomenou funkci můžeme dále rozepsat na součet *parciálních zlomků*, což jsou racionální funkce ve tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{A}{(x-a)^n}\,, && A, a \in \mathbb{R}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ &\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,, && A, B, p, q \in \mathbb{R}\,, \quad p^2-4q<0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Podmínka $p^2 - 4q < 0$ znamená, že polynom $x^2 + px + q$ nemá reálný kořen (zlomky druhého typu v komplexním oboru neuvažujeme).

Dá se ukázat, že rozklad racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků je jednoznačný. V rozkladu se použijí všechny parciální zlomky, jejichž jmenovatelé dělí jmenovatele dané racionální funkce (u některých může vyjít nulový čitatel). Koeficienty polynomů v čitatelích lze určit například sestavením soustavy lineárních rovnic (ta má právě jedno řešení).

9.1. Příklad. Rozložte na součet polynomu a parciálních zlomků racionální funkci

$$R(x) = \frac{x^3 - 7x - 24}{x^2 - 2x - 8}\,.$$

Řešení. Provedeme částečné dělení:

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x - 8}{x^2 - 2x - 8}\,.$$

Rozložíme jmenovatel na součin kořenových činitelů a kvadratických polynomů, které nemají reálný kořen:

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x - 8}{(x+2)(x-4)}\,.$$

Rozepíšeme na součet parciálních zlomků s tzv. *neurčitými koeficienty*:

$$R(x) = x + 2 + \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)}\,.$$

Rozepsané zlomky sečteme a porovnáme s rozkládanou ryze lomenou funkcí:

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)} = \frac{A(x-4) + B(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{5x-8}{(x+2)(x-4)}\,.$$

Polynomy v čitatelích musejí být stejné:

$$A(x-4) + B(x+2) = 5x - 8\,,$$

tedy koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné jsou stejné:

$$\begin{aligned} x^1: &\quad A + B = 5\,,\\ x^0: &\quad -4A + 2B = -8\,. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je $A = 3,\ B = 2$, hledaný rozklad tedy je

$$\frac{x^3 - 7x - 24}{x^2 - 2x - 8} = x + 2 + \frac{3}{(x+2)} + \frac{2}{(x-4)}\,.$$

9.2. Poznámka. Existují efektivnější metody na určení koeficientů parciálních zlomků. Při porovnávání polynomů v čitatelích je vhodné dosazovat kořeny jmenovatele rozkládané racionální funkce. V předcházejícím příkladu dostaneme lineární rovnice pro neznámé koeficienty:

$$\begin{aligned} x = -2: &\quad -6A = -18\,,\\ x = 4: &\quad 6B = 12\,. \end{aligned}$$

Tento postup lze formálně zjednodušit a použít takzvané *zakrývací pravidlo*: „zakryjeme“ kořenový činitel a jeho kořen dosadíme do „zbytku“ ryze lomené funkce; dostaneme tak koeficient parciálního zlomku se „zakrytým“ kořenovým činitelem. Například pro rozklad

$$\frac{5x-8}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

dostaneme

$$A = \left.\frac{5x-8}{x-4}\right|_{x=-2} = 3\,, \qquad B = \left.\frac{5x-8}{x+2}\right|_{x=4} = 2\,.$$

Tímto způsobem můžeme rychle spočítat koeficienty pro parciální zlomek, který má ve jmenovateli kořenový činitel jmenovatele racionální funkce v nejvyšší uvažované mocnině (rovné násobnosti tohoto kořene). Zbylé koeficienty můžeme spočítat ze soustavy (ta se dosazením zjednoduší, lze vybrat rovnice, které se snáze sestavují — výhodné bývá porovnávat koeficienty u nejvyšší a u nejnižší mocniny), dosazováním do derivací porovnávaných polynomů nebo použitím zakrývacího pravidla po odečtení už nalezeného parciálního zlomku a po zkrácení příslušným kořenovým činitelem. Pro kvadratické polynomy ve jmenovateli (bez reálného kořene) lze dosazovat komplexní kořeny.

9.3. Příklad. Rozložte na součet parciálních zlomků racionální funkci

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)}\,.$$

Řešení. Funkci rozepíšeme na součet parciálních zlomků s neurčitými koeficienty:

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}\,.$$

Koeficienty A, C spočítáme zakrývacím pravidlem:

$$A = \left.\frac{-2x+5}{x+2}\right|_{x=1} = 1\,, \qquad C = \left.\frac{-2x+5}{(x-1)^2}\right|_{x=-2} = 1\,.$$

Pro určení koeficientu B si ukážeme dvě možnosti.

1) Parciální zlomky sečteme a čitatel porovnáme s čitatelem rozkládané racionální funkce:

$$A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2 = -2x+5\,.$$

Stačí porovnat koeficienty u jedné mocniny proměnné x (u které je B s nenulovým násobkem), například

$$x^2: \quad B + C = 0\,.$$

Po dosazení $C = 1$ spočteme $B = -1$.

2) Odečteme už nalezený parciální zlomek a zkrátíme kořenový činitel

$$\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-3x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}\,.$$

Zakrývacím pravidlem dostaneme

$$B = \left.\frac{-3}{x+2}\right|_{x=1} = -1\,.$$

Hledaný rozklad je

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\,.$$

□ Ukažme příklady rozpisů složitějších ryze lomených funkcí na součty parciálních zlomků.

9.4. Příklady.

1) $$\frac{x^4+2x^3+7x^2-3x}{(x+1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2}\,.$$

2) $$\frac{3}{(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{x^2+4}\,.$$

□ Pro integraci racionální funkce stačí tedy umět integrovat mocniny (to jsou tabulkové integrály) a parciální zlomky a použít linearitu integrálu. Neurčitý integrál dostaneme na každém intervalu, na kterém je racionální funkce spojitá, tedy na intervalech vymezených na reálné ose kořeny jmenovatele.

□ Integrál parciálního zlomku s mocninou lineárního polynomu ve jmenovateli převedeme na integrál mocniny substitucí za tento polynom:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{r} x-a=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \begin{cases} \ln|t| + c = \ln|x-a| + c\,, & n=1\,, \\ \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c\,, & n>1\,, \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, a)\,, \quad x \in (a, +\infty)\,.$$

9.5. Příklad.

$$\int \frac{-x^3+6x^2-4x+1}{x^2(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + c =$$
$$= -\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \ln\frac{|x-1|}{x^2} + c\,,$$
$$x \in (-\infty, 0)\,, \quad x \in (0,1)\,, \quad x \in (1, +\infty)\,.$$

□ Parciální zlomek s kvadratickým polynomem ve jmenovateli má primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Nejprve ho rozložíme na součet dvou zlomků, z nichž jeden má v čitateli násobek derivace tohoto polynomu a druhý konstantu:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\frac{A}{2}\,(2x+p)}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}\,.$$

První zlomek převedeme na integrál mocniny substitucí za kvadratický polynom ve jmenovateli:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t\,.$$

Druhý zlomek upravíme doplněním na čtverec a vytknutím absolutního členu na tvar:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\big((x+p/2)^2 + (q-p^2/4)\big)^n} = \frac{1}{(q-p^2/4)^n} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{(q-p^2/4)}}\right)^2 + 1\right)^n}$$
$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{q-p^2/4}} = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{(q-p^2/4)^{n-1/2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}\,.$$

Zbývá určit integrály
$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}\,.$$
Pro $n = 1$ dostaneme $\operatorname{arctg} t + c$, pro $n > 1$ integrál nejprve upravíme
$$I_n = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = I_{n-1} + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t\,.$$
Druhý integrál spočteme metodou per partes:
$$\begin{aligned}\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t &= \left| \begin{array}{ll} u = t & v' = \frac{-2t}{2(t^2+1)^n} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} = \\ &= \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\, I_{n-1}\end{aligned}$$
(při integraci funkce v' jsme použili substituci za t^2+1). Dostáváme tak rekurentní předpis
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1}\,, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,, \\ I_1 &= \operatorname{arctg} t + c\,. \end{aligned}$$

9.6. Příklad. Spočtěte
$$\int \frac{4x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Kvadratický polynom ve jmenovateli nemá reálný kořen, jedná se tedy o parciální zlomek, integrál bude definován na $\mathbb{R}$. Nejprve rozložíme zlomek na součet dvou zlomků — v prvním do čitatele napíšeme derivaci kvadratického polynomu ze jmenovatele, určíme jeho násobek (abychom dostali správný koeficient u x v čitateli) a dopočítáme koeficient v čitateli druhého zlomku:
$$\frac{4x+1}{x^2-2x+5} = \frac{(2x-2)\cdot 2}{x^2-2x+5} + \frac{5}{x^2-2x+5}\,.$$
V prvním zlomku je v čitateli násobek derivace jmenovatele:
$$\int \frac{(2x-2)\cdot 2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x^2-2x+5| + c = 2\ln(x^2-2x+5) + c\,.$$
Ve druhém zlomku doplníme jmenovatel na čtverec, vytkneme absolutní člen a provedeme lineární substituci:
$$\begin{aligned}\int \frac{5}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= 5\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = t \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c\,.\end{aligned}$$

Sečtením dílčích výsledků dostaneme:

$$\int \frac{4x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

9.7. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2-4x}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Kvadratický polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny, jedná se tedy o parciální zlomek, integrál bude definován na $\mathbb{R}$. V čitateli je násobek derivace tohoto kvadratického polynomu, takže provedeme substituci za tento polynom:

$$\int \frac{2-4x}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2x-1)\cdot(-2)}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x^2-x+3 = t \\ (2x-1)\,\mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{-2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t^2} + c =$$
$$= \frac{1}{(x^2-x+3)^2} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

9.8. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Kvadratický polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny, jedná se tedy o parciální zlomek, integrál bude definován na $\mathbb{R}$. V čitateli je konstanta, provedeme doplnění na čtverec a vytknutí absolutního členu:

$$\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\big((x-3)^2+1\big)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x-3 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pomocí rekurentního předpisu nejprve spočteme

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + c\,.$$

Po dosazení do předcházejícího výpočtu dostaneme

$$\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{t^2+1} + c = \operatorname{arctg}(x-3) + \frac{x-3}{x^2-6x+10} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

9.9. Poznámky.

1) Mohlo by se zdát, že popsanými algoritmy můžeme analyticky integrovat kteroukoliv racionální funkci. To je pravda jen za předpokladu, že známe kořeny jmenovatele této funkce. Už pro polynomy stupně 5 přitom neexistuje analytický předpis, jak z jejich koeficientů tyto kořeny určit.

2) V některých případech je analytické řešení nevhodné nebo dokonce prakticky nepoužitelné. V takových situacích se využívají numerické metody integrace.

□ Uveďme příklady možných substitucí, které vedou na integrály racionálních funkcí. Písmenem R budeme značit racionální funkci.

Substituce za exponenciální a logaritmickou funkci

□ Integrály $\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x$ $(a \neq 0)$ řešíme substitucí za e^{ax}. Tato funkce je prostá (zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0,+\infty)$), takže při substituci můžeme přecházet k inverzní funkci.

$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \mathrm{e}^{ax} = t \\ x = \frac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t\,.$$

Intervaly řešení jsou intervaly spojitosti integrované funkce (vyšetřujeme nulové body jmenovatele), ve druhém integrálu uvažujeme pouze hodnoty $t > 0$.

9.10. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} + 3}{\mathrm{e}^{4x} - 1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Jmenovatel integrované funkce je nulový v bodě $x = 0$, řešení bude na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Všechny exponenty jsou násobky $2x$, použijeme tedy substituci za e^{2x}. (Lze použít i substituci za e^{x}, dostali bychom racionální funkci s většími stupni polynomů v čitateli i jmenovateli.)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} + 3}{\mathrm{e}^{4x} - 1}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{r} \mathrm{e}^{2x} = t \\ x = \frac{1}{2}\ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t^2 + 2t + 3}{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{t^2 + 2t + 3}{t(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{3}{t} + \frac{3}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \\
&= -\tfrac{3}{2}\ln t + \tfrac{3}{2}\ln|t-1| + \tfrac{1}{2}\ln(t+1) + c = \\
&= -3x + \tfrac{3}{2}\ln|\mathrm{e}^{2x} - 1| + \tfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x} + 1) + c = \\
&= -3x + \tfrac{1}{2}\ln\big(|\mathrm{e}^{2x} - 1|^3(\mathrm{e}^{2x} + 1)\big) + c\,, \\
& x \in (-\infty, 0)\,, \quad x \in (0, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

□ Integrály $\int R(\ln x)/x\,\mathrm{d}x$ řešíme substitucí za $\ln x$:

$$\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Intervaly řešení jsou intervaly spojitosti integrované funkce (jsou vymezeny podmínkou $x > 0$ a nulovými body jmenovatele).

9.11. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2}{x\,(4 + \ln^2 x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Logaritmus je definován pro kladná čísla, jmenovatel integrované funkce nemá kladné nulové body, řešení bude na intervalu $(0, +\infty)$.

$$\int \frac{2}{x\,(4+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \operatorname{arctg}\frac{\ln x}{2} + c\,,$$

$$x \in (0, +\infty)\,.$$

Substituce za goniometrické funkce

□ *Racionální funkce více proměnných* je podíl polynomů více proměnných, polynom více proměnných je funkce, kterou dostaneme z jednotlivých proměnných a z reálných čísel operacemi násobení a sčítání. Například

$$R(x,y) = \frac{3xy^3 + x^2y - x}{2y^2 + xy - 3}$$

je racionální funkce dvou proměnných.

□ Při integraci funkcí $R(\sin x, \cos x)$ lze vždy využít substituci za $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Funkce $\sin x$ a $\cos x$ lze totiž vyjádřit pomocí funkce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,, \\ \cos x &= \frac{\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,. \end{aligned}$$

Substituci za $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ můžeme použít na intervalech $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech (přesněji na takových jejich podintervalech, na kterých je integrovaná funkce spojitá) dostaneme:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Po substituci dostaneme integrály ze stejné funkce (to vyplývá už z toho, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ a tedy i $R(\sin x, \cos x)$ mají periodu 2π), integrály se tedy na těchto intervalech mohou lišit jen o konstantu. Intervaly řešení jsou dány nulovými body jmenovatele integrované funkce. Pokud takový interval obsahuje bod $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je třeba „propojit“ substitucí spočtené integrály na levém a pravém okolí tohoto bodu tak, aby výsledný integrál byl v tomto bodě spojitý. Pokud není integrovaná funkce definována v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, můžeme se tomuto spojování vyhnout použitím podobné substituce za $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

9.12. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, hledaný integrál bude na $\mathbb{R}$. Na intervalu $(-\pi,\pi)$ dostáváme

$$\int \frac{2}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{2}{5-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int\frac{2}{4t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \operatorname{arctg} 2t + c = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}) + c\,.$$

Na intervalech posunutých o celočíselný násobek 2π se bude řešení lišit jen o konstantu, která musí být taková, aby se dal integrál spojitě dodefinovat. Na sousedícím intervalu $(\pi, 2\pi)$ bude větší o

$$\lim_{x\to\pi-}\big(\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2})+c\big) - \lim_{x\to-\pi+}\big(\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2})+c\big) = \tfrac{\pi}{2} - \big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = \pi\,.$$

Dostáváme

$$\int\frac{2}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + k\pi\,, & x\in(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,\\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,, & x = \pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.\end{cases}$$

□ Pokud se v racionální funkci vyskytují pouze součiny sudých stupňů (součet exponentů u proměnných v součinech je vždy sudý), lze funkci přepsat pomocí funkce $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,,\\ \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,,\\ \sin x\cdot\cos x &= \frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\end{aligned}$$

a použít substituci za $\operatorname{tg} x$. Postupujeme podobně jako v případě substituce za $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, po substituci dojdeme k racionální funkci s menšími stupni polynomů v čitateli a jmenovateli. Na podintervalech (podle spojitosti integrované funkce) intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, dostaneme:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r}\operatorname{tg} x = t\\ x = \operatorname{arctg} t + k\pi\\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{array}\right| =$$
$$= \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Intervaly řešení jsou dány nulovými body jmenovatele. Pokud takový interval obsahuje bod $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, je třeba „propojit“ substitucí spočtené integrály na levém a pravém okolí tohoto bodu tak, aby výsledný integrál byl v tomto bodě spojitý, případně použít podobnou substituci za $\operatorname{cotg} x$.

9.13. Příklad. Spočtěte

$$\int\frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá, není definována v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Intervaly řešení budou tedy $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Při substituci za $\operatorname{tg} x$ nebudeme muset řešení propojovat.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} \operatorname{tg} x &= t \\ x &= \operatorname{arctg} t + k\pi \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int (t^2+1)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\,t^3 + t + c =$$
$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + c\,, \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□ Jednodušší situace při integraci $R(\sin x, \cos x)$ nastává, pokud je funkce R lichá v jedné proměnné, tj. $R(-x, y) = -R(x, y)$ nebo $R(x, -y) = -R(x, y)$. To znamená, že pokud tuto proměnnou vytkneme, ve zbytku je pouze v sudých mocninách. Funkce $R(x, y)$ je lichá například v první proměnné, pokud $R(x, y) = x \cdot R^*(x^2, y)$ pro některou racionální funkci R^*. Funkce

$$R_1(x,y) = \frac{xy^2 - x^3y^3}{x^2y + y^2 + 3} = x \cdot \frac{y^2 - x^2y^3}{x^2y + y^2 + 3}\,,$$
$$R_2(x,y) = \frac{y^2 - 2}{xy + x^3} = x \cdot \frac{y^2 - 2}{x^2y + x^4}$$

jsou tedy liché v první proměnné. Je-li funkce R lichá v jedné proměnné, lze použít substituci za goniometrickou funkci, kterou dosazujeme za druhou z proměnných, a využít identitu $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Obecně:

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned} \right| = -\int R(1-t^2, t)\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int R(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Intervaly řešení jsou dány nulovými body jmenovatele integrované funkce, $t \in \langle -1, 1\rangle$.

9.14. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá, není definována v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Intervaly řešení budou tedy $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. V posledním kroku rozšíříme argument logaritmu výrazem $1 + \sin x$.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c = \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c\,,$$
$$x \in (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□ Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ polynom, můžeme ji rozepsat na kombinaci výrazů $\sin^n x \cdot \cos^m x$. Je-li alespoň jeden exponent lichý, použijeme předcházející substituci. Jsou-li liché oba, můžeme použít obě, výhodnější bývá za tu goniometrickou funkci, která je ve vyšší mocnině. Jsou-li oba exponenty sudé, přejdeme ke dvojnásobnému argumentu. Využitím identit

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

se exponenty sníží na polovinu. Podle potřeby tento postup opakujeme. Řešení je na $\mathbb{R}$.

9.15. Příklad.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = -\int (1-t^2)\cdot t^4 \,\mathrm{d}t = \int (t^6 - t^4)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{7} t^7 - \tfrac{1}{5} t^5 + c = \tfrac{1}{7}\cos^7 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

9.16. Příklad.

$$\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{8}\int (2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Substituce za odmocninu lineární lomené funkce

□ Integrály typu $\int R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$ pro $ad - bc \neq 0$ (podmínka pro to, aby se výraz pod odmocninou nezkrátil na konstantu) řešíme substitucí za odmocninu. Přepočtením dostaneme x jako racionální funkci nové proměnné:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} \\ \mathrm{d}x = \left(\frac{dt^n - b}{a-ct^n}\right)' \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t\,.$$

Interval řešení je dán definičním oborem funkce (záleží na tom, zda se jedná o odmocninu sudého nebo lichého stupně) a kořeny jmenovatele.

9.17. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá, její definiční obor je interval $\langle 1,+\infty)$, řešení bude na intervalu $(1,+\infty)$. V integrálu se vyskytují dvě různé odmocniny z lineárního polynomu, když zlomek zkrátíme výrazem $\sqrt{x+1}$, můžeme použít substituci za $\sqrt{(x-1)/(x+1)}$:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t \\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}-\frac{4}{(1+t)^3}+\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \cdots =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\,\bigr)+\tfrac{1}{2}\bigl(x^2-1-x\sqrt{x^2-1}\,\bigr)+c\,, \qquad x\in(1,+\infty)\,.$$

□ Pokud se vyskytnou odmocniny různého stupně, vyjádříme je jako celočíselné mocniny „dostatečně velké“ odmocniny.

9.18. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá, její definiční obor je interval $\langle 1,+\infty)$, řešení bude na intervalu $(1,+\infty)$. Můžeme použít substituci za $\sqrt[4]{x-1}$:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sqrt[4]{x-1} = t \\ x = t^4+1 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{4t^4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\left(4t^2-4+\frac{4}{t^2+1}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\,t^3-4t+4\,\mathrm{arctg}\,t+c =$$
$$= \tfrac{4}{3}\,\sqrt[4]{(x-1)^3}-4\sqrt[4]{x-1}+4\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{x-1}+c\,, \qquad x\in(1,+\infty)\,.$$

Odmocniny z kvadratických funkcí

□ Integrály typu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$ pro $a\neq 0$ a $b^2-4ac\neq 0$ (jinak lze odmocnit) se dají řešit různými substitucemi. Pokud má kvadratická funkce pod odmocninou reálný kořen, lze vytknout kořenový činitel a převést tak úlohu na předcházející typ, tj. provést substituci za odmocninu z lineární lomené funkce. Takové substituci se říká *Eulerova*.

9.19. Příklad. Spočtěte (viz též příklad 9.20, příklad 9.22)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$, řešení budou na těchto intervalech. Ukažme výpočet pro interval $(1,+\infty)$. Z kvadratického polynomu vytkneme například $(x-1)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \left| \begin{aligned} \sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}} &= t \\ x &= \tfrac{t^2+1}{t^2-1} \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}-1\right)\cdot t} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{-2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) = \ln\frac{t+1}{t-1} + c = \ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} + c =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) + c\,, \qquad x \in (1,+\infty)\,.$$

(Využili jsme toho, že $t > 1$ a v poslední úpravě jsme zlomek rozšířili čitatelem.) Na intervalu $(-\infty,-1)$ dostaneme podobně

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right| + c\,, \qquad x \in (-\infty,-1)\,.$$

□ V případě, že je koeficient a u druhé mocniny kladný, lze použít další *Eulerovu substituci*: $\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x = t$. Z této rovnice spočítáme x:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= t-\sqrt{a}\,x \\ ax^2+bx+c &= (t-\sqrt{a}\,x)^2 = t^2-2\sqrt{a}\,tx+ax^2 \\ x &= \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b} \end{aligned}$$

vyjádříme druhou odmocninu

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}\,x = t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}$$

a přepočítáme diferenciál

$$\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{a}\,t^2+2bt+2\sqrt{a}\,c}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}$$

9.20. Příklad. Spočtěte (viz též příklad 9.19, příklad 9.22)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$, řešení budou na těchto intervalech. Ukažme výpočet pro interval $(1,+\infty)$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{aligned} \sqrt{x^2-1}+x &= t \\ x &= \tfrac{t^2+1}{2t} \\ \sqrt{x^2-1} &= \tfrac{t^2-1}{2t} \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2t}} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t + c =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)+c\,, \qquad x \in (1,+\infty)\,.$$

(Využili jsme toho, že $t > 1$).

□ Ukážeme využití substitucí pomocí goniometrických a hyperbolických funkcí. Nejprve se metodou doplnění na čtverec zbavíme lineárního členu pod odmocninou a převedeme integrál na některý z typů $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}\,)\,\mathrm{d}x$, $a > 0$, přičemž alespoň jedno znaménko pod odmocninou je kladné (jinak by funkce nebyla nikde definována). Možné substituce:

- $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}\,)\,\mathrm{d}x$: $x = a\sin t$, $x = a\cos t$.
- $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}\,)\,\mathrm{d}x$: $x = \frac{a}{\sin t}$, $x = \frac{a}{\cos t}$, $x = a\cosh t$.
- $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}\,)\,\mathrm{d}x$: $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $x = a\,\mathrm{cotg}\,t$, $x = a\sinh t$.

Je nutno dávat pozor na správnost provedené substituce, při zpětném dosazování bývá zapotřebí spočítat inverzní funkci, někdy je vhodné výraz upravit nebo použít některou identitu.

9.21. Příklad. Spočtěte

$$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá, její definiční obor je $\langle -2, 2\rangle$, řešení bude na intervalu $(-2,2)$. Použijeme substituci $x = 2\sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} x = 2\sin t \\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t \\ \arcsin\frac{x}{2} = t \end{array}\right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \int 4\,|\cos t|\cdot\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int (2+2\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 2t + \sin 2t + c = 2t + 2\sin t\cdot\cos t + c =$$
$$= 2t + 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t} + c = 2\arcsin\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c\,, \qquad x \in (-2,2)\,.$$

9.22. Příklad. Spočtěte (viz též příklad 9.19, příklad 9.20)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$, řešení budou na těchto intervalech. Ukažme výpočet pro interval $(1,+\infty)$. Použijeme substituci $x = \frac{1}{\cos t}$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t}\,,$$

dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{\cos t} \\ \mathrm{d}x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \ln \frac{1+\sin t}{\cos t} + c$$

(viz příklad 9.14). Přepočítáme

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{x}\,, \\ \sin t &= \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,, \end{aligned}$$

takže dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\Bigl(\sqrt{x^2-1}+x\Bigr) + c\,, \qquad x \in (1,+\infty)\,.$$

9.23. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, řešení bude na $\mathbb{R}$. Nejprve se metodou doplnění na čtverec zbavíme lineárního členu:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}} = \left| \begin{array}{r} x+1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2^2}}\,.$$

Použijeme substituci $t = 2\,\mathrm{tg}\,u$ pro $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Protože

$$\sqrt{t^2+4} = \sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\,u+4} = 2\sqrt{\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^2 u}} = \frac{2}{|\cos u|} = \frac{2}{\cos u}\,,$$

dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+4}} = \left| \begin{array}{c} t = 2\,\mathrm{tg}\,u \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\cos u}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln \frac{1+\sin u}{\cos u} + c$$

(viz příklad 9.14). Přepočítáme

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\,, \\ \sin u &= \cos u \cdot \mathrm{tg}\,u = \frac{2}{\sqrt{t^2+4}} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,, \end{aligned}$$

takže dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \ln \frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2} + c = \ln\Bigl(\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\Bigr) + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(Logaritmus podílu jsme upravili jako rozdíl logaritmů, konstanta $-\ln 2$ se zahrnula do konstanty c.)

Neřešené úlohy

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+7x+1}{(x-1)(x^2+x-2)}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+4x+4)}$;

e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^4-x^3}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+11x^2-7x}{(x+1)^3(x^2-4x+4)}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{-5}{(x+4)^4}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{3}{(2x-1)^3}\,\mathrm{d}x$.

2. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-12x+13}$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(x^2+1)}$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$; h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{2x}-2}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{2}{\mathrm{e}^{3x}+2}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}-2\,\mathrm{e}^{2x}+2}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$; e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\,(\ln^2 x-4)}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \sin^6 x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2 x-\sin x+1}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^4\, x\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^2\, x\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$.

5. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x+1}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$; e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

6. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+6x-8}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x}}$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}\,x^2 + x + \ln\frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} + c,\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,2),\ x \in (2,+\infty);$

   b) $\frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-1|}{(x+2)^2} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,-1),\ x \in (-1,1),\ x \in (1,+\infty);$

   c) $-\frac{3}{(x-1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x+2|} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,1),\ x \in (1,+\infty);$

   d) $-\frac{1}{2(x+2)^2} + c,\ x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,+\infty);$

   e) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,1),\ x \in (1,+\infty);$

   f) $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \ln|x-2| + c,\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,2),\ x \in (2,+\infty);$

   g) $\frac{5}{3(x+4)^3} + c,\ x \in (-\infty,-4),\ x \in (-4,+\infty);$

   h) $\frac{-3}{4(2x-1)^2} + c,\ x \in (-\infty,\frac{1}{2}),\ x \in (\frac{1}{2},+\infty).$

2. a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   b) $\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   c) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   d) $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   e) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{2} + c,\ x \in \mathbb{R};$

   f) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,+\infty);$

   g) $-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + c,\ x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,+\infty);$

   h) $-\frac{1}{4(x^2+1)^2} + c,\ x \in \mathbb{R}.$

3. a) $\frac{1}{2}\ln\frac{|\mathrm{e}^{2x}-1|}{\mathrm{e}^{2x}+2} + c,\ x \in (-\infty,0),\ x \in (0,+\infty);$

   b) $x - \frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{3x}+2) + c,\ x \in \mathbb{R};$

   c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1) + c,\ x \in \mathbb{R};$

   d) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + c,\ x \in \mathbb{R};$

   e) $\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x - 4| + c,\ x \in (0,\mathrm{e}^{-2}),\ x \in (\mathrm{e}^{-2},\mathrm{e}^2),\ x \in (\mathrm{e}^2,+\infty);$

   f) $\ln|\ln x| + c,\ x \in (0,1),\ x \in (1,+\infty).$

4. a) $\frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + c,\ x \in \mathbb{R};$

   b) $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + c,\ x \in \mathbb{R};$

   c) $\frac{1}{3}\ln\frac{2+\sin x}{1-\sin x} + c,\ x \in (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

   d) $\frac{1}{1+\cos x} + c,\ x \in (0+k\pi, \pi+k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

   e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c,\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

   f) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}) + c,\ x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

   g) $-\operatorname{cotg} x - x + c,\ x \in (0+k\pi, \pi+k\pi),\ k \in \mathbb{Z};$

   h) $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + c,\ x \in (0+2k\pi, 2\pi+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$

5. a) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x-1)^7}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-1)^4}+c,\ x\in\mathbb{R};$
   b) $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{3}{2}\sqrt{(2x+1)}+c,\ x\in(-\frac{1}{2},+\infty);$
   c) $2\sqrt{x+1}-4\ln\bigl(2+\sqrt{x+1}\,\bigr)+c,\ x\in(-1,+\infty);$
   d) $\ln\frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}+c,\ x\in(-1,0),\ x\in(0,+\infty);$
   e) $2\sqrt{x-4}-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-4}}{2}+c,\ x\in(4,+\infty);$
   f) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\bigl(\sqrt[6]{x}+1\bigr)+c,\ x\in(0,+\infty).$

6. a) $\frac{1}{2}\arcsin(x-3)+\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{-x^2+6x-8}+c,\ x\in(2,4);$
   b) $\ln\bigl|\sqrt{x^2+4x}+x+2\bigr|+c,\ x\in(-\infty,-4),\ x\in(0,+\infty);$
   c) $\ln\bigl(\sqrt{x^2-2x+10}+x-1\bigr)+c,\ x\in\mathbb{R}.$

Kapitola 10

Určitý (Riemannův) integrál

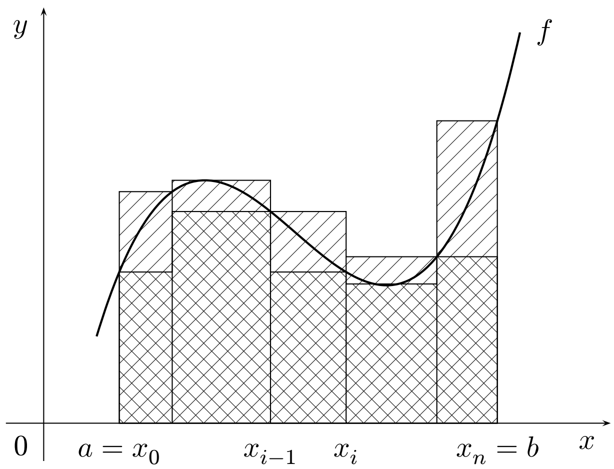
□ Určitý integrál budeme motivovat geometricky — pro nezápornou funkci jako obsah plochy pod grafem funkce. Interval rozdělíme na několik částí, na každé vepíšeme a opíšeme obdélník.

10.1. Definice. *Dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ je konečná množina $D \subset \langle a, b\rangle$ obsahující body a, b. Značíme ji $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

10.2. Definice. Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. *Dolní a horní integrální součet* funkce f pro dělení D jsou:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f\big(\langle x_{i-1}, x_i\rangle\big) \cdot (x_i - x_{i-1})\,,$$

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f\big(\langle x_{i-1}, x_i\rangle\big) \cdot (x_i - x_{i-1})\,.$$



Obrázek 10.1: Definice určitého integrálu.

□ Dolní integrální součet je dolní odhad obsahu plochy pod grafem funkce, horní integrální součet je horní odhad obsahu plochy pod grafem funkce (viz obrázek 10.1). Protože infimum je vždy menší nebo rovno supremu (pro neprázdnou množinu), je $\underline{S}(f,D) \le \bar{S}(f,D)$. Pokud k dělení D přidáme některý další bod $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ (dělení *zjemníme*), pak se interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ rozdělí na intervaly $\langle x_{i-1}, x'\rangle$ a $\langle x', x_i\rangle$. Na těchto intervalech může být infimum větší (ale ne menší) a supremum menší (ale ne větší) než na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, takže dostaneme

$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(f, D\cup\{x'\}) \le \bar{S}(f, D\cup\{x'\}) \le \bar{S}(f,D)\,.$$

Z toho pozorování vyplývá následující tvrzení.

10.3. Tvrzení. *Je-li f omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, D_1, D_2 jsou dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, pak*

$$(b-a)\inf f\bigl(\langle a,b\rangle\bigr) \le \underline{S}(f,D_1) \le \bar{S}(f,D_2) \le (b-a)\sup f\bigl(\langle a,b\rangle\bigr)\,.$$

Důkaz. Nejmenší dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je $\{a,b\}$. Pro jemnější dělení neklesají dolní a nerostou horní integrální součty, dostáváme tedy

$$\begin{aligned}(b-a)\inf f\bigl(\langle a,b\rangle\bigr) &= \underline{S}(f,\{a,b\}) \le \\ &\le \underline{S}(f,D_1) \le \underline{S}(f,D_1\cup D_2) \le \bar{S}(f,D_1\cup D_2) \le \\ &\le \bar{S}(f,D_2) \le \bar{S}(f,\{a,b\}) = \\ &= (b-a)\sup f\bigl(\langle a,b\rangle\bigr)\,.\end{aligned}$$

□ Každý dolní integrální součet je tedy shora omezen každým horním integrálním součtem a naopak. Supremum dolních součtů je tedy omezeno shora infimem horních součtů. Obě tyto hodnoty jsou vlastní a dávají nejlepší dolní a horní odhad obsahu plochy pod grafem funkce. Pokud splývají, je obsah plochy pod grafem funkce jednoznačně určen.

10.4. Definice. Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $\mathscr{D}$ je množina všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pokud

$$\sup\{\underline{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\} = \inf\{\bar{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\}\,,$$

nazýváme tuto hodnotu *určitým* (přesněji *Riemannovým*) *integrálem* funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$, značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nebo stručněji $\int_a^b f$. Hodnoty a,b se nazývají *dolní* a *horní mez integrálu*, funkce f se nazývá *integrand*.

10.5. Poznámka. Nebude-li řečeno jinak, budeme určitým integrálem rozumět Riemannův integrál. Pokud to budeme chtít vyznačit, budeme psát (R)-$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

□ Místo suprema a infima můžeme použít i limit.

10.6. Tvrzení. *Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že*

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty}\bar{S}(f,D_n)$$

($\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *je pak roven těmto limitám*), *tedy právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty}\big(\bar{S}(f,D_n)-\underline{S}(f,D_n)\big)=0\,.$$

Důkaz. Označme $\mathscr{D}$ množinu dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.

$\Rightarrow$: Existují posloupnosti $(D'_n)_{n=1}^{\infty}$, $(D''_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D'_n)=\sup_{D\in\mathscr{D}}\underline{S}(f,D)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\inf_{D\in\mathscr{D}}\bar{S}(f,D)=\lim_{n\to\infty}\bar{S}(f,D''_n)\,.$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ položme $D_n=D'_n\cup D''_n$. Protože

$$\underline{S}(f,D'_n)\le\underline{S}(f,D_n)\le\bar{S}(f,D_n)\le\bar{S}(f,D''_n)\,,$$

je $\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)=\lim_{n\to\infty}\bar{S}(f,D_n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Leftarrow$: Protože

$$\sup\{\underline{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\}\le\inf\{\bar{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\}$$

a přitom podle předpokladu věty

$$\sup\{\underline{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\}\ge\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)=\lim_{n\to\infty}\bar{S}(f,D_n)\ge\inf\{\bar{S}(f,D)\colon\ D\in\mathscr{D}\}\,,$$

určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a rovná se daným limitám.

Ani jedna z uvedených limit není nevlastní, takže se rovnají právě tehdy, když je limita rozdílu nulová.

10.7. Poznámky.

1) Někdy se Riemannův integrál přímo definuje pomocí složitější limity pro zjemňující se dělení — pokud se posloupnost dělení dostatečně dobře zjemňuje (maximum vzdáleností po sobě jdoucích bodů jde k nule), pak se dolní i horní integrální součty blíží k určitému integrálu.

2) Někdy se používají i obecnější *integrální součty* — místo infima nebo suprema hodnot na dílčích intervalech se bere funkční hodnota v některém bodě dílčího intervalu. Pro dělení $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ a množinu $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ takovou, že $c_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$ pro každé $i\in$ $\in\{1,2,\dots,n\}$, pokládáme

$$S(f,D,C)=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\cdot(x_i-x_{i-1})\,.$$

Takové integrální součty leží mezi dolními a horními integrálními součty.

10.8. Příklady.

1) Spočtěme $\int_a^b c\,\mathrm{d}x$ pro $c\in\mathbb{R}$. Pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ je

$$\underline{S}(c,D)=\bar{S}(c,D)=c(b-a)\,,$$

tedy $\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$.

2) Spočtěme $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$. Uvažujme dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ na n stejně dlouhých částí, tedy $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$. Integrovaná funkce je rostoucí, infimum hodnot nabývá v levých a supremum hodnot v pravých krajních bodech intervalů. Platí tedy (využijeme rovnosti $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$):

$$\underline{S}(x, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\,,$$
$$\bar{S}(x, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\,.$$

Podle tvrzení 10.6 je $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

3) Spočtěme $\int_0^1 \operatorname{sign} x \, \mathrm{d}x$. Uvažujme dělení $D_n = \{0, \frac{1}{n}, 1\}$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Platí:

$$\underline{S}(\operatorname{sign} x, D_n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,,$$
$$\bar{S}(\operatorname{sign} x, D_n) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Podle tvrzení 10.6 je $\int_0^1 \operatorname{sign} x \, \mathrm{d}x = 1$.

4) Uvažujme integrál Dirichletovy funkce

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

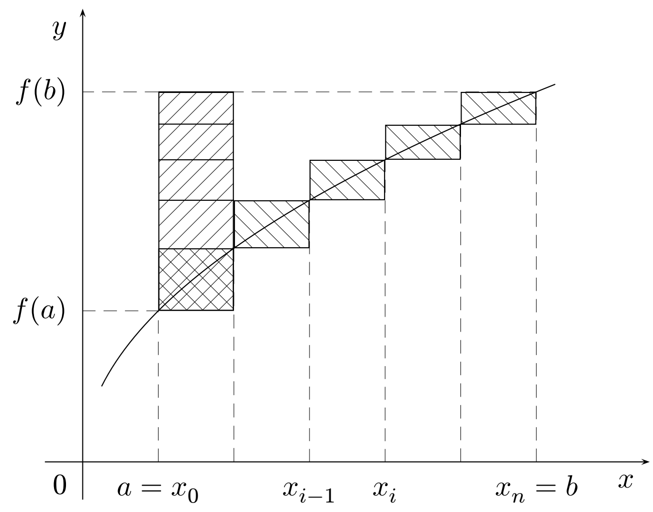
na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Protože v každém intervalu jsou jak racionální tak iracionální čísla (tvrzení 1.20), jsou všechny dolní integrální součty (a tím i jejich supremum) nulové, zatímco všechny horní integrální součty (a tím i jejich infimum) jsou rovny 1. Určitý (Riemannův) integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ tedy neexistuje.

10.9. Poznámky.

1) V předcházejících příkladech jsme ukázali, že $\int_0^1 \operatorname{sign} x \, \mathrm{d}x = 1 = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x$, i když integrované funkce mají různou hodnotu v bodě 0. Dá se ukázat (podobným obratem, jako jsme použili při integraci funkce $\operatorname{sign} x$), že funkce, které se liší hodnotami jen v konečně mnoha bodech, buď obě určitý integrál nemají nebo ho mají stejný. Říkáme, že určitý integrál nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech. Můžeme tedy integrovat i funkci, která není v konečně mnoha bodech (například v mezích integrálu) definována — nezáleží na tom, jak ji dodefinujeme.

2) Jiná definice určitého integrálu (*Lebesgueova*) vychází z dělení v oboru hodnot a pracuje se s velikostí (mírou) vzoru pro danou funkci. Rozdíly jednotlivých metod můžeme přiblížit na úloze spočítat celkovou hodnotu hromádky mincí. Riemannův integrál odpovídá postupu, při kterém sčítáme hodnoty jednotlivých mincí. Lebesgueův integrál odpovídá postupu, při kterém nejprve spočítáme počty kusů od každé hodnoty, ty vynásobíme příslušnou hodnotou a tyto mezivýsledky sečteme. Hodnota Lebesgueova integrálu nezávisí na hodnotách funkce ve spočetně mnoha bodech, takže existuje i pro Dirichletovu funkci:

$$(\mathrm{L})\text{-}\int_0^1 d(x) \, \mathrm{d}x = (\mathrm{L})\text{-}\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0\,.$$



Obrázek 10.2: Ilustrace důkazu existence určitého integrálu pro monotonní funkci (věta 10.10).

□ Ukázali jsme příklady funkcí, které mají určitý integrál i funkci, která určitý integrál nemá. „Pěkné" funkce určitý integrál mají.

10.10. Věta. *Je-li f monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Dokažme větu pro neklesající funkce (pro nerostoucí je důkaz podobný). Uvažujme dělení $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ na n stejně dlouhých částí a vyjádřeme rozdíl horního a dolního integrálního součtu pro dělení D_n. Viz obrázek 10.2 — tento rozdíl vyjadřuje obsah plochy vzniklé sjednocením obdélníčků kolem grafu funkce, jejich přesunutím do jednoho sloupce dostaneme obdélník o šířce $(b-a)/n$ a výšce $\bigl(f(b) - f(a)\bigr)$.

$$\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr) =$$
$$= \frac{b-a}{n} \bigl(f(b) - f(a)\bigr) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Podle tvrzení 10.6 pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

10.11. Věta. *Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je tzv. *stejnoměrně spojitá*: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pro $|x - y| < \delta$ $(x, y \in \langle a, b\rangle)$. (Oproti „obyčejné" spojitosti lze hodnotu δ určit společně pro všechna uvažovaná x.) Zvolíme-li dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby vzdálenosti sousedních bodů byly menší než δ, pak

$$|\,\bar{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)| < \varepsilon(b-a)\,.$$

Volbou D_n pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dostaneme posloupnost dělení takovou, že posloupnosti dolních i horních integrálních součtů mají stejné limity, tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje (tvrzení 10.6).

Stejnoměrná spojitost vyplývá z principu vnořených intervalů. Uvažujme $\varepsilon > 0$. Pro každý bod $x \in \langle a, b\rangle$ je vzorem $U\big(f(x), \varepsilon/2\big)$ průnik některého okolí $U(x, \delta_x)$ s intervalem $\langle a, b\rangle$.

Ukažme nejprve sporem, že interval $\langle a, b\rangle$ lze pokrýt konečně mnoha okolími $U(x, \delta_x)$. Předpokládejme, že tomu tak není. Zvolme bod c uprostřed intervalu $\langle a, b\rangle$. Ten je pokryt $U(c, \delta_c)$ a pokud toto okolí z intervalu $\langle a, b\rangle$ odebereme, dostaneme dva uzavřené intervaly méně než poloviční délky. Omezme se na ten z nich, který nelze pokrýt konečně mnoha okolími $U(x, \delta_x)$ a postup opakujme. Dostaneme posloupnost vnořených intervalů, jejichž délky se blíží k 0 a podle principu vnořených intervalů (věta 1.35) jejich průnik obsahuje jediný bod. Okolí tohoto bodu ale pokryl některý ze sestrojených intervalů, což je spor.

Uvažujme konečně mnoho okolí $U(x, \delta_x)$ pokrývajících interval $\langle a, b\rangle$. Vezměme všechny jejich krajní body v intervalu $\langle a, b\rangle$ a položme δ rovno vzdálenosti nejbližších z takto vybraných bodů. Je-li pro $x, y \in \langle a, b\rangle$ vzdálenost x, y menší než δ, pak leží v některém $U(z, \delta_z)$ a jejich funkční hodnoty se liší o méně než ε.

$\square$ Podívejme se na základní vlastnosti určitého integrálu.

10.12. Věta. *Nechť f, g jsou omezené funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$, integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existují. Pak platí (včetně existence ostatních integrálů):*

1) $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,
2) $\int_a^b c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
3) *je-li* $f \le g$ *na* $\langle a, b\rangle$, *pak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,
4) $\big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Označme $\mathscr{D}$ množinu dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

1) Uvažujme interval $I \subset \langle a, b\rangle$. Protože pro každé $x \in I$ platí

$$\inf f(I) + \inf g(I) \le f(x) + g(x)\,,$$

je

$$\inf f(I) + \inf g(I) \le \inf\{f(x) + g(x) :\ x \in I\}\,,$$

a pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \le \underline{S}(f+g, D)\,.$$

Existuje posloupnost dělení taková, že integrální součty pro obě funkce f, g mají za limitu příslušný integrál, takže

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f+g, D)\,.$$

Podobně se ukáže

$$\inf_{D\in\mathscr{D}} \overline{S}(f+g, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože $\sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f+g, D) \le \inf_{D\in\mathscr{D}} \overline{S}(f+g, D)$, existuje $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ a platí dokazovaná rovnost.

2) Pro $c \geq 0$ je

$$\sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(cf,D) = \sup_{D\in\mathscr{D}} c\,\underline{S}(f,D) = c \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f,D) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\inf_{D\in\mathscr{D}} \bar{S}(cf,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}} c\,\bar{S}(f,D) = c \inf_{D\in\mathscr{D}} \bar{S}(f,D) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pro $c < 0$ je

$$\sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(cf,D) = \sup_{D\in\mathscr{D}} c\,\bar{S}(f,D) = c \inf_{D\in\mathscr{D}} \bar{S}(f,D) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\inf_{D\in\mathscr{D}} \bar{S}(cf,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}} c\,\underline{S}(f,D) = c \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f,D) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3) Pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ je $\underline{S}(f,D) \leq \underline{S}(g,D)$ a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f,D) \leq \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(g,D) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Jestliže existuje $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, pak je dokazovaná nerovnost ekvivalentní dvojici nerovností

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

které vyplývají z části 3), protože $-|f| \leq f \leq |f|$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Ukažme existenci $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Pro funkce

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\}\,,\quad f_-(x) = \min\{f(x),0\}\,,\qquad x\in\langle a,b\rangle\,,$$

je $f = f_+ + f_-$ a $|f| = f_+ - f_- = f_+ - (f - f_+)$. Podle částí 1) a 2) stačí dokázat existenci integrálu funkce f_+. Pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ je

$$0 \leq \bar{S}(f_+,D) - \underline{S}(f_+,D) \leq \bar{S}(f,D) - \underline{S}(f,D)\,.$$

Podle tvrzení 10.6 existuje posloupnost dělení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty}\big(\underline{S}(f,D_n) - \bar{S}(f,D_n)\big) = 0\,,$$

takže

$$\lim_{n\to\infty}\big(\underline{S}(f_+,D_n) - \bar{S}(f_+,D_n)\big) = 0$$

a znovu podle tvrzení 10.6 integrál $\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

10.13. Poznámka. Určitý integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$ je lineární zobrazení na množině $R(a,b)$ integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$:

$$\int_a^b :\ R(a,b)\to\mathbb{R}\,,\quad f\in R(a,b)\mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□ Ukázali jsme aditivitu určitého integrálu vzhledem k integrandu. Platí i aditivita vzhledem k integračnímu oboru.

10.14. Věta. *Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $a<c<b$. Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. V takovém případě platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Každé dvojici dělení D_1 intervalu $\langle a,c\rangle$ a dělení D_2 intervalu $\langle c,b\rangle$ vzájemně jednoznačně odpovídá dělení $D=D_1\cup D_2$ intervalu $\langle a,b\rangle$, které obsahuje bod c. Platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,D_1)+\underline{S}(f,D_2)&=\underline{S}(f,D_1\cup D_2)\,,\\ \bar{S}(f,D_1)+\bar{S}(f,D_2)&=\bar{S}(f,D_1\cup D_2)\,.\end{aligned}$$

Označíme-li $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{D}$ po řadě množiny všech dělení intervalů $\langle a,c\rangle$, $\langle c,b\rangle$, $\langle a,b\rangle$, dostaneme

$$\begin{aligned}\sup_{D_1\in\mathscr{D}_1}\underline{S}(f,D_1)+\sup_{D_2\in\mathscr{D}_2}\underline{S}(f,D_2)&=\sup_{D\in\mathscr{D}}\underline{S}(f,D\cup\{c\})=\sup_{D\in\mathscr{D}}\underline{S}(f,D)\,,\\ \inf_{D_1\in\mathscr{D}_1}\bar{S}(f,D_1)+\inf_{D_2\in\mathscr{D}_2}\bar{S}(f,D_2)&=\inf_{D\in\mathscr{D}}\bar{S}(f,D\cup\{c\})=\inf_{D\in\mathscr{D}}\bar{S}(f,D)\,.\end{aligned}$$

Odtud už přímo vyplývá dokazovaná věta.

□ Pro některé úvahy je vhodné zavést určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i pro $a\ge b$.

10.15. Definice. Pro každou funkci f definovanou v bodě a pokládáme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Jestliže pro funkci f definovanou na intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak pokládáme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

10.16. Poznámka. Pro všechna $a,b,c\in\mathbb{R}$ je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jestliže uvedené integrály existují.

10.17. Poznámka. Spojité funkce na uzavřeném intervalu mají určitý integrál (věta 10.11). Podle výše uvedené věty se tedy dají integrovat některé *po částech spojité funkce* — funkce mající v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti a v nich vlastní jednostranné limity (v krajních bodech příslušné jednostranné). Můžeme postupovat následujícím způsobem: body nespojitosti rozdělí původní interval na dílčí intervaly; původní integrál je součtem integrálů přes tyto dílčí intervaly; na těchto dílčích intervalech je funkce spojitá s výjimkou nejvýše krajních bodů, kde ji můžeme beze změny hodnoty integrálu (poznámky 10.9) předefinovat limitami; dostaneme tak integrály ze spojitých funkcí, které existují. Formálně zapsáno, jestliže dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ obsahuje všechny body nespojitosti po částech spojité funkce f, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}+)\,, & x = x_{i-1}\,, \\ f(x)\,, & x \in (x_{i-1}, x_i)\,, \\ f(x_i-)\,, & x = x_i\,, \end{cases}$$

jsou spojité funkce.

10.18. Příklad.

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \operatorname{sign} x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -1\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

□ V kapitole 8 jsme uvedli větu o existenci primitivní funkce pro spojitou funkci na intervalu (věta 8.6). Nyní tuto větu dokážeme pomocí určitého integrálu.

10.19. Věta. *Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, $c \in \langle a, b\rangle$. Pak pro funkci*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in \langle a, b\rangle\,,$$

platí:

1) *Funkce F je spojitá.*
2) *Je-li funkce f spojitá v bodě x, pak $F'(x) = f(x)$.*

Důkaz. Podle věty o aditivitě integrálu na integračním oboru (věta 10.14, poznámka 10.16) je funkce F na intervalu $\langle a, b\rangle$ definována. Je-li $x, x+h \in \langle a, b\rangle$, platí

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1) Označme $M = \sup\{|f(x)|:\ x \in \langle a, b\rangle\}$. Protože pro $x, x+h \in \langle a, b\rangle$ je

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \operatorname{sign} h \cdot \int_x^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M \cdot |h| \xrightarrow{h\to 0} 0\,,$$

je $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ (v krajních bodech jednostranné limity) a funkce F je tedy spojitá.

2) Pro každé $x, x+h \in \langle a,b \rangle$ platí (viz příklady 10.8, integrál konstantní funkce):

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\ \mathrm{d}t\right| = \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)\ \mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\ \mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Je-li funkce f spojitá v bodě x, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí V bodu x tak, že pro $t \in V$ je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ a tedy pro $x+h \in V$ platí

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon\,.$$

Takže $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech $x \in \langle a,b \rangle$, ve kterých je funkce f spojitá (v krajních bodech jednostranné derivace).

10.20. Důsledek. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

Důkaz. Mějme funkci f spojitou na intervalu I. Zvolme $a \in I$. Funkce

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

je primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

10.21. Poznámka. Volbou bodu a je ovlivněna velikost integrační konstanty pro neurčitý integrál, výše uvedeným způsobem dostaneme funkce, které jsou v některém bodě intervalu nulové (v bodě a). Pro každou primitivní funkci F tedy platí

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

10.22. Poznámka. V bodech nespojitosti funkce f se můžeme omezit na „jednotlivé strany“ takových bodů a dostaneme, že jednostranné derivace funkce F v takových bodech jsou rovny příslušným jednostranným limitám funkce f (pokud existují).

10.23. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = \operatorname{sign} x$. Pro funkci

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = |x|$$

je $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \neq 0$, v bodě 0 je

$$F'_-(0) = -1 = f(0-)\,, \qquad\qquad F'_+(0) = 1 = f(0+)\,.$$

□ Ukázali jsme, že neurčitý integrál (primitivní funkci) lze vyjádřit pomocí určitého integrálu. V konkrétních výpočtech používáme spíše opačný postup — určitý integrál počítáme pomocí primitivní funkce.

10.24. Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a primitivní funkce F k funkci f na intervalu (a,b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) \quad \bigl(= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\bigr)\,.$$

Důkaz. Ukažme nejprve, že existuje limita $F(a+)$ (existence limity $F(b-)$ se dokazuje podobně). Funkce f je omezená, existuje tedy $M\in\mathbb{R}$ tak, že $|f|\le M$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Označme $a_n = a+\frac{1}{n}$ pro $n\in\mathbb{N}$. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro $n\ge n_0$ je $a_n\in\langle a,b\rangle$. Pro $n\ge n_0$ a $x\in(a,a_n)$ dostáváme pomocí Lagrangeovy věty ($c_{n,x}$ je některý bod v intervalu (a,a_n))

$$|F(x)-F(a_n)| = |F'(c_{n,x})\cdot(x-a_n)| = |f(c_{n,x})\cdot(x-a_n)| \le M(a_n-x)\le \frac{M}{n}\,,$$

tedy $F\bigl((a,a_n)\bigr)\subset \bigl\langle f(a_n)-\frac{M}{n}, f(a_n)+\frac{M}{n}\bigr\rangle = I_n$. Zřejmě $I_{n_0}\supset I_{n_0+1}\supset\cdots$ a délky intervalů I_n, tj. $\frac{2M}{n}$, konvergují k 0. Podle principu vnořených intervalů je $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ neprázdný a jednobodový, je tedy roven $\{F(a+)\}$.

Dodefinujme funkci F v bodech a,b jejími (jednostrannými) limitami. Uvažujme libovolné dělení $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\mathscr{D}$. Platí

$$F(b-)-F(a+) = \sum_{i=1}^{n}\bigl(F(x_i)-F(x_{i-1})\bigr)\,.$$

Podle Lagrangeovy věty pro jednotlivé intervaly $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ existují body $c_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$ tak, že

$$F(b-)-F(a+) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\,(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i-x_{i-1})\,.$$

Dostáváme integrální součet, který je zdola omezen dolním integrálním součtem a shora omezen horním integrálním součtem. Pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ je tedy

$$\underline{S}(f,D)\le F(b-)-F(a+)\le \bar{S}(f,D)\,,$$

a tedy ($\mathscr{D}$ je množina všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{D\in\mathscr{D}} \underline{S}(f,D)\le F(b)-F(a)\le \inf_{D\in\mathscr{D}} \bar{S}(f,D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

10.25. Poznámka. Primitivní funkce na intervalu se liší o konstantu, ta se ve výše uvedené větě odečte, můžeme tedy použít kteroukoliv z nich. Při výpočtu používáme zápis

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \bigl[F(x)\bigr]_a^b\,.$$

□ Primitivní funkce obvykle existuje na větším intervalu, než na kterém integrujeme. Nemusíme tedy počítat její limity v krajních bodech intervalu, stačí dosadit hodnoty v těchto bodech (primitivní funkce je spojitá).

10.26. Příklad. Funkce $-\cos x$ je primitivní funkce k funkci $\sin x$ na $\mathbb{R} \supset \langle 0, \pi \rangle$. Je tedy

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2 \,.$$

□ V některých případech se výpočtu limit nevyhneme.

10.27. Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \,.$$

Řešení. Integrovaná funkce $f(x) = x \ln x$ není definována v bodě 0. To nevadí, můžeme ji spojitě dodefinovat $f(0) = f(0+) = 0$, takže $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ existuje. Na intervalu $(0, +\infty)$ dostáváme

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{1}{2}\, x^2 \end{matrix} \right| = \tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}\, x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2 + c \,,$$

takže k funkci f existuje na tomto intervalu primitivní funkce $F(x) = \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{4}\, x^2$. Podle Newtonovy–Leibnizovy formule je

$$\int_0^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x = \big[\tfrac{1}{2}\, x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2\big]_0^{\mathrm{e}} = \big(\tfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{e}^2\big) - \lim_{x \to 0+} \big(x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}\, x^2\big) = \tfrac{1}{4}\, \mathrm{e}^2 \,,$$

protože

$$\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x^2}{2} = 0 \,.$$

□ V některých případech se primitivní funkce popisuje obtížněji, takže je vhodné rozdělit integrační obor na několik částí a použít větu o aditivitě integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 10.14).

10.28. Příklad.

$$\int_{-1}^2 |x| \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 |x| \, \mathrm{d}x + \int_0^2 |x| \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -x \, \mathrm{d}x + \int_0^2 x \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{5}{2} \,.$$

□ Pro výpočet určitého integrálu můžeme použít metody pro výpočet integrálu neurčitého. Při použití metody per partes můžeme průběžně dosazovat.

10.29. Příklad.

$$\int_0^\pi x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{matrix} \right| = \big[-x \cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}x = \pi + \big[\sin x\big]_0^\pi = \pi \,.$$

□ Při použití substituce se přepočítají i meze. V případě substituce „za funkci“ se jednoduše dosadí.

10.30. Příklad.

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{2}\;\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{3}\,t^{3/2}\right]_1^2 = \tfrac{1}{3}\,(\sqrt{8}-1)\,.$$

□ V některých případech mohou nové meze integrálu vyjít stejné, takový integrál je pak nulový.

10.31. Příklad.

$$\int_0^\pi \sin x\cos x\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sin x=t \\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_0^0 t\;\mathrm{d}t = 0\,.$$

□ Při substituci za proměnnou je třeba dávat pozor na správný přepočet mezí podle inverzní funkce.

10.32. Příklad. V následující substituci uvažujeme $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\;\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c} x=\sin t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\;\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos t|\cdot\cos t\;\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\;\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{1}{2}\,(1+\cos 2t)\;\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\;\mathrm{d}t = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-(-\tfrac{\pi}{2})\right) = \tfrac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

10.33. Poznámka. Newtonova–Leibnizova formule ve skutečnosti říká, že pokud existuje Riemannův integrál a zároveň *Newtonův integrál* definovaný předpisem

$$(\mathrm{N})\text{-}\!\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x = F(b-)-F(a+)$$

(F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b)), pak jsou stejné. Existují různé typy určitých integrálů (zmínili jsme se už o Lebesgueově integrálu), které se dají použít na různé typy funkcí. Všechny mají stejné základní vlastnosti (linearita, monotonie, aditivita na integračním oboru) a pokud existují kterékoliv dva z nich (shodné na konstantních funkcích), pak jsou stejné.

□ Riemannův integrál je oproti Newtonovu integrálu definován i pro některé nespojité funkce.

10.34. Příklad. Funkce $\operatorname{sign} x$ nemá na intervalu $(-1,1)$ primitivní funkci (příklad 8.5), takže $(\mathrm{N})\text{-}\!\int_{-1}^1 \operatorname{sign} x\;\mathrm{d}x$ není definován, zatímco $(\mathrm{R})\text{-}\!\int_{-1}^1 \operatorname{sign} x\;\mathrm{d}x = 0$ (příklad 10.18).

10.35. Poznámka. V některých případech jsou definovány oba tyto určité integrály, ale primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Příkladem může být ve statistice důležitá funkce e^{-x^2} (až na násobek hustota normálního rozdělení).

□ Na druhou stranu, Riemannův integrál je definován jen pro omezené funkce na omezeném intervalu.

10.36. Příklad. Pro funkci $f(x) = 1/\sqrt{x}$ je

$$(\mathrm{N})\text{-}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \bigl[2\sqrt{x}\,\bigr]_0^1 = 2\,,$$

přitom (R)-$\int_0^1 1/\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ neexistuje, protože funkce f není omezená.

10.37. Příklad. Pro funkci $f(x) = 1/x^2$ je

$$(\mathrm{N})\text{-}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \bigl[-x^{-1}\bigr]_1^{+\infty} = 1\,,$$

přitom (R)-$\int_1^{+\infty} 1/x^2\,\mathrm{d}x$ neexistuje, protože interval, na kterém integrujeme, není omezený.

Neřešené úlohy

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,;$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x}\,;$

d) $\displaystyle\int_2^6 \frac{\mathrm{d}x}{x}\,;$ e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_{-7}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int_0^\pi \sin 6x\,\mathrm{d}x\,;$ h) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,;$ i) $\displaystyle\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x\,.$

2. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_{-2}^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^{|2x-6|}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int_0^{3\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int_{-1}^4 (x-1)\,\mathrm{sign}\,x\,\mathrm{d}x\,.$

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^\pi (2x+1)\sin\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_0^\pi (4x-1)\cos 2x\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int_{-1}^0 (3x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos x\,\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x\,.$

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\,;$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x\,;$ d) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x\,;$

e) $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{x-2}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}\,.$

5. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{tg}\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x\,.$

6. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln^2 x+1)}\,;$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\,;$ d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x-2\cos x+2}\,\mathrm{d}x\,;$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x+1}}\,.$

7. Dokažte, že pro *Riemannovu funkci*

$$r(x)=\begin{cases}\frac{1}{b}\,, & x\in\mathbb{Q}\,,\ x=\frac{a}{b}\,,\ a,b\in\mathbb{Z}\text{ nesoudělná, } b>0\,,\\ 0\,, & x\notin\mathbb{Q}\,,\end{cases}$$

je $\int_0^1 r(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Výsledky

1. a) 4; b) $\frac12$; c) 1; d) $\ln 3$; e) $\frac{14}{3}$; f) -9; g) 0; h) $2\sqrt{2}$; i) $\frac{2}{\ln 3}$.

2. a) 1; b) $\frac{28}{3}$; c) e^2-1; d) 6; e) $\frac{11}{2}$.

3. a) 10; b) 0; c) $(1+2\mathrm{e}^{-3})/3$; d) -2π; e) $2\mathrm{e}-6$; f) $\frac{\pi}{4}-\frac12$; g) $\frac{\pi}{2}-1$.

4. a) $2\ln\frac43-\frac12$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $7\ln 6$; d) $\ln 3-1$; e) $\frac12\ln 2+\frac{\pi}{8}$; f) $\frac14\operatorname{arctg}\frac32-\frac14\operatorname{arctg}\frac12$.

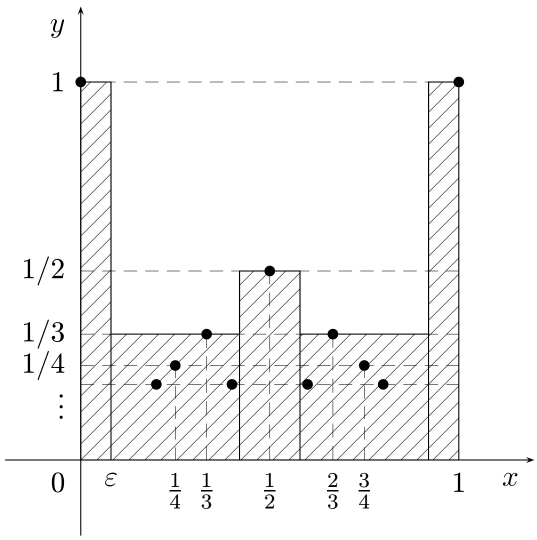
5. a) 3; b) $\frac43$; c) $3\ln 2$.

6. a) $\ln\frac98$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac13$; d) $-\frac14\pi$; e) $2\ln 2-1$; f) $2-\ln 2$.

7. Všechny dolní integrální součty jsou nulové. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je v intervalu $\langle 0,1\rangle$ jen konečně mnoho (označme p_n) bodů, ve kterých je funkční hodnota větší než $\frac{1}{n}$, označme je $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{p_n} = 1$. Pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$ (menší, než polovina vzdálenosti nejbližších takto vybraných bodů) uvažujme dělení $D_{n,\varepsilon} = \{0, \varepsilon, x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon, \dots, 1-\varepsilon, 1\}$ intervalu $\langle 0,1\rangle$ a příslušný horní integrální součet (viz obrázek pro $n = 3$). Na intervalech $\langle x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon\rangle$, $i \in \{1, \dots, p_n - 1\}$, je $r(x) \le \frac{1}{n}$, na ostatních dílčích intervalech dělení $D_{n,\varepsilon}$ použijeme odhad $r(x) \le 1$ (součet délek těchto intervalů je $2(p_n - 1)\varepsilon$). Dostaneme

$$\bar{S}(r, D_{n,\varepsilon}) \le 1 \cdot 2(p_n - 1)\varepsilon + \frac{1}{n} \cdot \big(1 - 2(p_n - 1)\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{n}\,.$$

Infimum horních součtů je tedy nejvýše $\frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je tudíž nulové (všechny horní součty jsou na druhou stranu kladné).



Kapitola 11

Nevlastní integrál

□ V této kapitole rozšíříme pojem určitého (Riemannova) integrálu pro neomezené funkce a neomezené intervaly a připustíme nevlastní čísla $\pm\infty$ pro hodnotu integrálu.

□ Ukázali jsme (příklad 10.36, příklad 10.37), že i pro neomezené funkce nebo na neomezeném intervalu můžeme počítat určitý integrál. Mohli bychom zobecnit Riemannův integrál tak, že bychom v definici integrálních součtů připouštěli i nevlastní čísla $\pm\infty$, to by však v těchto příkladech nestačilo (všechny horní integrální součty by byly $+\infty$). Místo toho využijeme limit stejně, jako tomu je u Newtonova integrálu.

11.1. Definice. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, a nechť pro každý interval $\langle c,d\rangle \subset (a,b)$ je f omezená na $\langle c,d\rangle$ a existuje $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže funkce f není omezená nebo interval (a,b) není omezený, pak definujeme *nevlastní integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud výraz vpravo je definován pro některé $e \in (a,b)$. Je-li vlastní, řekneme, že integrál *konverguje.*

11.2. Poznámka. Pro omezenou funkci na omezeném intervalu za předpokladů výše uvedené věty Riemannův integrál existuje a platí výše uvedená rovnost.

11.3. Poznámka. Nevlastní integrál není definován, pokud alespoň jedna z výše uvedených limit neexistuje nebo pokud jsou obě nevlastní a přitom opačné. Výběr čísla $e \in (a,b)$ není podstatný. Pro libovolný bod $e' \in (a,b)$ je $\int_e^{e'} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ a pro každé $c,d \in (a,b)$ platí

$$\int_c^{e'} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \int_e^{e'} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{e'}^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int_e^{e'} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je tedy

$$\lim_{c\to a+}\int_c^{e'} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_{e'}^d f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

11.4. Příklady.

$$1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \big[\operatorname{arctg} x\big]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \pi \qquad \text{(konverguje)}.$$

$$2)\qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \big[\ln x\big]_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - 0 = +\infty \qquad \text{(existuje)}.$$

$$3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\big]_{-\infty}^{+\infty} = |{+\infty} - \infty| \qquad \text{(neexistuje)}.$$

□ Různé metody výpočtu (per partes, substituce) lze použít i pro nevlastní integrál.

11.5. Příklady.

$$1)\qquad \int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \mathrm{e}^{-x} \\ u' = 1 & v = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{matrix} \right| = \big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\mathrm{e}^x} - 0 + \big[-\,\mathrm{e}^{-x}\big]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1\,.$$

$$2)\qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} -\frac{1}{x} = y \\ \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y = \big[\mathrm{e}^y\big]_{-1}^{0} = 1 - \mathrm{e}^{-1}\,.$$

$$3)\qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \big[\ln x - \ln(x+1)\big]_1^{+\infty} = \left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^{+\infty} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{2} = 0 + \ln 2 = \ln 2\,.$$

□ Při substituci v nevlastních integrálech musíme dávat pozor na to, že dosazujeme příslušné jednostranné limity primitivní funkce. Takže třeba integrál se stejnými mezemi nemusí být nulový.

11.6. Příklad. Integrál

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} 1 - x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{0+}^{0+} -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln t\Big]_{0+}^{0+} = +\infty - (+\infty)$$

není definován.

11.7. Poznámka. Definici integrálu dále zobecňujeme na sjednocení intervalů: pro $-\infty \le a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \le +\infty$ pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud je součet vpravo definován (integrály existují a neobjeví se nevlastní hodnoty opačných znamének). Jednotlivé dílčí integrály mohou být vlastní nebo nevlastní. „Dělicí body“ volíme v bodech nespojitosti funkce f a v bodech, ve kterých se mění funkční předpis (případně v bodech, kde funkce není definována). Lze uvažovat i nekonečně mnoho dílčích intervalů. Pro takto zobecněný integrál zůstanou zachovány základní vlastnosti: linearita, monotonie, odhad integrálem z absolutní hodnoty, aditivita na integračním oboru, $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

11.8. Příklad. Spočtěte $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ \frac{1}{x-1}\,, & x \in (1, 2\rangle\,, \end{cases}$$

Řešení.

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \big[x\big]_0^1 + \big[\ln(x-1)\big]_1^2 = 1 + \infty = +\infty\,.$$

11.9. Příklad. Spočtěte $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci

$$f(x) \begin{cases} 1/\sqrt[3]{x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Řešení.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \big[\tfrac{3}{2}\,x^{2/3}\big]_{-1}^0 + \big[\tfrac{3}{2}\,x^{2/3}\big]_0^1 = \tfrac{3}{2}\,(-1+1) = 0\,.$$

11.10. Příklad. Spočtěte $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Řešení.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \big[\ln|x|\big]_{-1}^0 + \big[\ln x\big]_0^1 = +\infty - \infty \qquad \text{neexistuje}\,.$$

□ Někdy potřebujeme vyšetřit konvergenci integrálu (chceme použít numerickou integraci, pro teoretické úvahy). Bez důkazu uveďme následující věty.

11.11. Tvrzení. *Je-li f nezáporná po částech spojitá funkce na intervalu (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

11.12. Věta.
1) *Jestliže $f\le g$ na intervalu (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, g je po částech spojitá a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, pak $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$.*
2) *Jestliže $|f|\le g$ na intervalu (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, f je po částech spojitá a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.*

□ Pro výše uvedenou větu používáme porovnání s jednoduchými funkcemi, jejichž konvergenci můžeme snadno vyšetřit — například s mocninami.

11.13. Tvrzení.
1) *Integrál $\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a>-1$.*
2) *Integrál $\int_1^{+\infty} x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a<-1$.*

Důkaz. Platí:

$$\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x=\big[\ln x\big]_0^1=0-(-\infty)=+\infty\,,\qquad \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1=\begin{cases}\frac{1}{a+1}\,, & a>-1\,,\\ +\infty\,, & a<-1\,,\end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}x=\big[\ln x\big]_1^{+\infty}=+\infty-0=+\infty\,,\qquad \int_1^{+\infty} x^a\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty\,, & a>-1\,,\\ \frac{-1}{a+1}\,, & a<-1\,.\end{cases}$$

11.14. Poznámka. Ve výše uvedených integrálech není podstatná použitá mez 1, místo ní může být libovolné číslo z intervalu $(0,+\infty)$ — hodnoty integrálu by se lišily o konečnou hodnotu integrálu spojité funkce na uzavřeném intervalu. Případ $a=-1$ je jediný případ, kdy oba integrály tohoto typu nekonvergují, jinak konverguje právě jeden z nich.

□ Použitím věty o konvergenci integrálu dostaneme například následující charakterizaci konvergence integrálu racionální funkce.

11.15. Tvrzení. *Nechť P,Q jsou nenulové polynomy, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. Pak $\int_a^b P(x)/Q(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

(1) *Polynom Q nemá v intervalu (a,b) a ve vlastních krajních bodech tohoto intervalu kořen větší násobnosti než polynom P.*
(2) *Jestliže je alespoň jedna z mezí integrálu nevlastní, pak stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší, než stupeň polynomu P.*

Důkaz. 1) Polynom Q má v uvažovaných bodech jen konečný počet kořenů (nemusí mít žádný). Nechť c je kořen polynomů P,Q s násobnostmi n_P,n_Q, označme $n=n_P-n_Q$. Pak (pro $c\in\{a,b\}$ uvažujeme příslušnou jednostrannou limitu)

$$A=\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)\,(x-c)^n}$$

je vlastní a nenulová (kořenové činitele se zkrátí). Předpokládejme $A > 0$ (případ $A < 0$ se dokazuje podobně). Interval $(\frac{1}{2}\,A, \frac{3}{2}\,A)$ je okolí bodu A, existuje okolí bodu c (pro $c \in \{a, b\}$ jednostranné), na kterém je

$$\tfrac{1}{2}\,A < \frac{P(x)}{Q(x)\,(x-c)^n} < \tfrac{3}{2}\,A\,,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}\,A(x-c)^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \tfrac{3}{2}\,A(x-c)^n\,.$$

Integrál funkce $P(x)/Q(x)$ na příslušném okolí tedy konverguje právě tehdy, když konverguje integrál funkce $(x-c)^n$, což je pro $n > -1$, tedy $n \geq 0$ (n je celé číslo).

2) Označme n rozdíl stupňů polynomů P a Q. Je-li $c \in \{a, b\}$ nevlastní, pak

$$A = \lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)\,x^n}$$

je vlastní a nenulová (nejvyšší mocniny se zkrátí). Předpokládejme $A > 0$ (případ $A < 0$ se dokazuje podobně). Interval $(\frac{1}{2}\,A, \frac{3}{2}\,A)$ je okolí bodu A, existuje okolí bodu c, na kterém je

$$\tfrac{1}{2}\,A < \frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} < \tfrac{3}{2}\,A\,,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}\,Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \tfrac{3}{2}\,Ax^n\,.$$

Integrál funkce $P(x)/Q(x)$ na příslušném okolí tedy konverguje právě tehdy, když konverguje integrál funkce x^n, což je pro $n < -1$, tedy $n \leq 2$ (n je celé číslo).

Ukázali jsme podmínky konvergence integrálu na okolích „kritických“ bodů. V integračním oboru pak zůstane sjednocení konečně mnoha uzavřených intervalů, na kterých je daná racionální funkce spojitá, tedy integrály jsou konvergentní.

□ Podobným způsobem lze vyšetřovat existenci integrálu racionální funkce. Kořeny jmenovatele rozdělí integrační obor na konečně mnoho intervalů, na každém z nich dílčí integrály existují, všechny nekonvergentní musí mít stejná znaménka.

11.16. Příklady.

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+4x+5}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje}\,.$$

2) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = +\infty\,.$$

3) $$\int_{-2}^{+\infty} \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{neexistuje}\,.$$

□ Další důležitou aplikací konvergence integrálu je zavedení Laplaceovy transformace.

11.17. Tvrzení. *Nechť f je po částech spojitá funkce na intervalu $\langle 0,+\infty)$, pro kterou existují čísla $M, a \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \le M\,\mathrm{e}^{at}$ pro každé $t \in (0,+\infty)$. Pak funkce*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

(Laplaceův obraz *funkce f) je definována pro $p > a$.*

Důkaz. Protože $|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| \le M\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-pt} = M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}$ a

$$\int_0^{+\infty} M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\ \mathrm{d}t = \left[M\,\frac{\mathrm{e}^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{M}{p-a},$$

integrál v definici funkce $F(p)$ konverguje.

□ Na závěr ukažme několik vlastností funkce *gama*.

11.18. Tvrzení. *Pro funkci*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

platí

1) Γ *je definována pro $x > 0$ (dokonce i pro necelá záporná čísla),*
2) $\Gamma(1) = 1$,
3) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$,
4) $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro $n \in \mathbb{N}$,*
5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. 1) Uvažujme $x > 0$. Pro každé $t \ge 0$ je $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^{x-1}$ a $\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ konverguje, takže

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{konverguje}.$$

Zvolme přirozené číslo $n \ge x-1$. Pro $t \ge 1$ je $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^n\,\mathrm{e}^{-t}$. Při výpočtu $\int_1^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ použijeme opakovaně metodu per partes, dostaneme polynom P_n stupně n, pro který platí

$$\int_1^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[P_n(t)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_1^{+\infty} = -P_n(1)\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Tedy i integrál

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{konverguje},$$

takže konverguje integrál v definici funkce Γ.

2)

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

3)

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t=\begin{vmatrix} u=t^x & v'=\mathrm{e}^{-t}\\ u'=xt^{x-1} & v=-\,\mathrm{e}^{-t}\end{vmatrix}=$$
$$=\left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t=0+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t=x\,\Gamma(x)\,.$$

4)

$$\Gamma(n)=(n-1)\,\Gamma(n-1)=\cdots=(n-1)(n-2)\cdots1\cdot\Gamma(1)=(n-1)!\,.$$

5)

$$\Gamma(\tfrac12)=\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t=\begin{vmatrix}\sqrt{t}=y\\ \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}=\mathrm{d}y\end{vmatrix}=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\;\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\;\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\,.$$

Poslední integrál je důležitý určitý integrál, který nelze spočítat přechodem k primitivní funkci (tu nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí), dá se spočítat pomocí tzv. dvojného integrálu.

Neřešené úlohy

1. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}\,;$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4}\,;$ c) $\displaystyle\int_{-8}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}\,;$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3}}\,;$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x\;\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\;\mathrm{d}x\,;$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+1}{x^2-4x+5}\;\mathrm{d}x\,.$

2. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-2x}\;\mathrm{d}x\,;$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\;\mathrm{d}x\,;$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^4\,\mathrm{e}^{-x}\;\mathrm{d}x\,;$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}\;\mathrm{d}x\,;$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x\;\mathrm{d}x\,;$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\;\mathrm{d}x\,.$

3. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+3}\,;$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2x+5}{x^2+2x+5}\;\mathrm{d}x\,;$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}\,;$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x+4}{(x+1)(x^2+3x+2)}\;\mathrm{d}x\,.$

4. Spočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^x+3}$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln^2 x+2\ln x+5)}$; d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln^2 x+3\ln x+2)}$;

e) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$; f) $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x+3}}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{3}$; c) -6; d) $+\infty$; e) neexistuje; f) 1; g) neexistuje.
2. a) $\frac{1}{2\mathrm{e}}$; b) 1; c) 24; d) 2; e) $\frac{2}{13}$; f) $\frac{3}{13}$.
3. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi$; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{4}\ln 5$; d) $3-2\ln 2$.
4. a) $\frac{1}{6}\ln 2$; b) $\frac{1}{4}\,\pi$; c) $\frac{3}{8}\,\pi$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{3}\,\pi$; f) $\frac{1}{2}\ln 5$.

Kapitola 12

Aplikace určitého integrálu

☐ Ukážeme různé aplikace určitého integrálu v geometrii a ve fyzice. Začneme s „průměrnou“ hodnotou funkce.

12.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

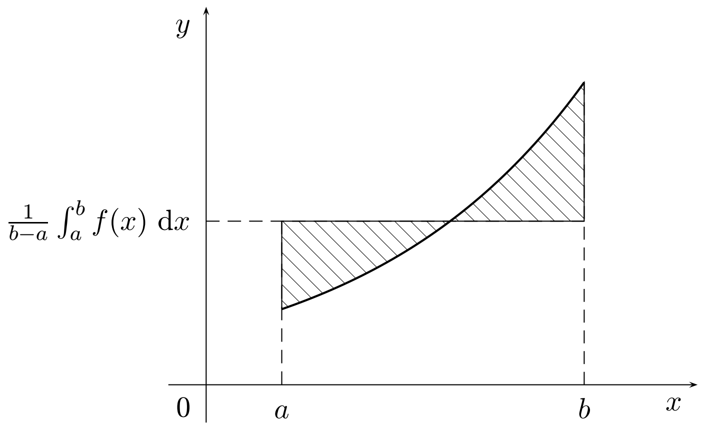
12.2. Příklad. Určete efektivní hodnotu napětí střídavého proudu s amplitudou U_0.

Řešení. Hodnota střídavého napětí u je funkcí času

$$u(t) = U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\,,$$

kde T je perioda. Odpovídající výkon při zapojení spotřebiče o odporu R je

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{U_0^2}{R}\sin^2\frac{2\pi t}{T}\,.$$



Obrázek 12.1: Ilustrace střední hodnoty funkce.

Efektivní hodnota napětí střídavého proudu U_e je takové napětí stejnosměrného proudu, pro které dostaneme stejný průměrný výkon — ten můžeme určit jako střední hodnotu na intervalu délky periody, například na $\langle 0, T\rangle$:

$$\frac{U_\mathrm{e}^2}{R} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_0^2}{R}\sin^2\frac{2\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2RT}\int_0^T \left(1-\cos\frac{4\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2RT}\left[t - \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right]_0^T = \frac{U_0^2}{2R},$$

tedy $U_\mathrm{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_0$.

□ Omezená spojitá funkce nabývá své střední hodnoty.

12.3. Věta (o střední hodnotě). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak existuje číslo $c\in(a,b)$ takové, že $f(c)$ je střední hodnota funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$.*

Důkaz. Větu lze dokázat použitím Lagrangeovy věty na primitivní funkci k funkci f. Ukážeme důkaz využívající jednodušších vlastností. Podle tvrzení 10.3 je

$$(b-a)\inf f\big(\langle a,b\rangle\big) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)\sup f\big(\langle a,b\rangle\big).$$

Vydělením $(b-a)$ dostaneme

$$\inf f\big(\langle a,b\rangle\big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sup f\big(\langle a,b\rangle\big).$$

Je-li f konstantní funkce, pak nabývá své střední hodnoty v každém bodě (tedy i v některém vnitřním bodě intervalu $\langle a,b\rangle$). Pokud funkce f není konstantní, pak obě nerovnosti jsou ostré a podle věty o mezihodnotě (věta 4.60) nabývá své střední hodnoty v některém bodě $c\in(a,b)$.

□ Takřka přímo z definice určitého integrálu plyne výpočet obsahu plochy mezi grafy dvou funkcí.

12.4. Věta. *Nechť funkce f,g jsou po částech spojité na intervalu (a,b), $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $f\le g$. Obsah plochy $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x\in(a,b),\ f(x)\le y\le g(x)\}$ je*

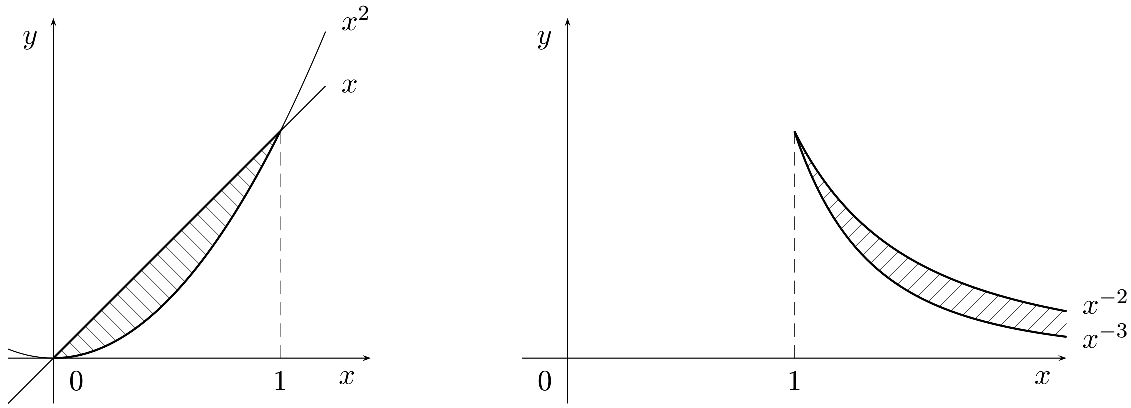
$$\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Ukážeme pro spojitou funkci na $\langle a,b\rangle$ (pro body nespojitosti se pak využije aditivita integrálu, pro krajní body a,b limity). Existuje posloupnost dělení $(D_k)_{k=1}^\infty$ taková, že horní i dolní integrální součty obou funkcí konvergují k jejich integrálům. Označme P obsah dané plochy. Na každém dílčím intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ dělení D_k můžeme dané ploše „opsat“ obdélník o výšce

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} g(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

a „vepsat“ obdélník o výšce (tento výraz může být i záporný)

$$\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} g(x) - \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x).$$



Obrázek 12.2: Ilustrace výpočtů obsahu plochy mezi grafy funkcí (příklad 12.5, příklad 12.6).

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\underline{S}(g, D_k) - \bar{S}(f, D_k) \leq P \leq \bar{S}(g, D_k) - \underline{S}(f, D_k)\,.$$

Limitou pro $k \to \infty$ dostaneme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq P \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

12.5. Příklad. Spočtěte obsah omezeného útvaru, jehož hranici tvoří grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^2$ (viz obrázek 12.2).

Řešení. Obě funkce jsou spojité. Určíme průsečíky grafů obou funkcí. Rovnice $f(x) = g(x)$ má řešení $x \in \{0, 1\}$. Grafy funkcí f, g rozdělí rovinu na 5 částí, omezený útvar je mezi grafy těchto funkcí pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Na tomto intervalu je $g(x) \leq f(x)$, hledaný obsah je tedy

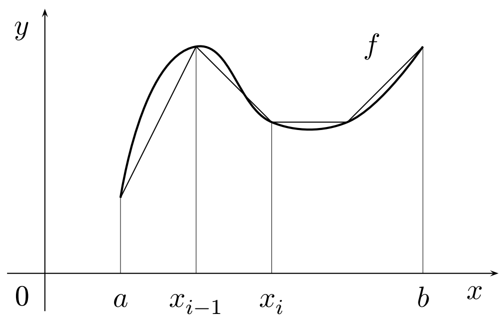
$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(x - x^2\big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

12.6. Příklad. Spočtěte obsah plochy mezi grafy funkcí $f(x) = 1/x^2$ a $g(x) = 1/x^3$ na intervalu $\langle 1, +\infty)$ (viz obrázek 12.2).

Řešení. Obě funkce jsou spojité, na intervalu $\langle 1, +\infty)$ je $g \leq f$, obsah dané plochy je

$$\int_1^{+\infty} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

□ Další aplikací je určení délky křivky, která je grafem funkce. Můžeme ji aproximovat lineárními lomenými čarami (viz obrázek 12.3) a je přirozené definovat její *délku* jako supremum délek takovýchto aproximací.



Obrázek 12.3: Výpočet délky grafu funkce (věta 12.7).

12.7. Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na intervalu (a,b), $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. Délka grafu funkce f je*

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro funkce spojité na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce je supremum délek lineárních lomených aproximací. Každá taková aproximace odpovídá některému dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, existuje tedy posloupnost dělení, pro kterou se délky lomených čar blíží délce křivky. Existuje také posloupnost dělení, pro kterou se dolní i horní integrální součty funkce $\sqrt{1+(f')^2}$ blíží uvedenému integrálu. Protože pro jemnější dělení dostaneme delší (nebo stejně dlouhou) lineární lomenou čáru a menší odchylku integrálních součtů od integrálu, existuje společná posloupnost dělení $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ s těmito vlastnostmi. Délka lineární lomené čáry příslušné dělení $D_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je podle Pythagorovy věty

$$l(D_k) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\,.$$

Podle Lagrangeovy věty existují body $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ takové, že

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Je tedy

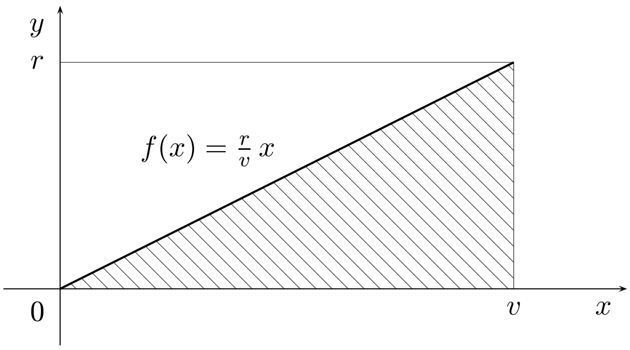
$$l(D_k) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Dostali jsme (obecný) integrální součet funkce $\sqrt{1+(f')^2}$, takže

$$\underline{S}\big(\sqrt{1+(f')^2}\,, D_k\big) \le l(D_k) \le \bar{S}\big(\sqrt{1+(f')^2}\,, D_k\big)\,.$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ a využitím věty o sevření dostaneme dokazovanou rovnost.

12.8. Příklad. Určete délku grafu funkce $f(x) = \cosh x$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.



Obrázek 12.4: Ilustrace k výpočtu objemu kužele (příklad 12.10).

Řešení. Funkce f má spojitou derivaci $f'(x) = \sinh x$ na intervalu $(0,1)$, délka grafu funkce je tedy

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \cosh x\ \mathrm{d}x = \big[\sinh x\big]_0^1 = \sinh 1 = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}}\,.$$

□ Další aplikace se týkají rotačních těles, která vzniknou tak, že plochu pod grafem nezáporné funkce necháme rotovat kolem osy x.

12.9. Věta. *Nechť funkce f je po částech spojitá na intervalu (a,b), $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. Objem (rotačního) tělesa $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x \in (a,b),\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$ je*

$$\pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro funkce spojité na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$. Na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ můžeme do daného tělesa „vepsat“ válec o poloměru $\inf\{f(x)\colon\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ a „opsat“ válec o poloměru $\sup\{f(x)\colon\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$. Pro hledaný objem V tedy platí

$$\underline{S}(\pi f^2, D) = \sum_{i=1}^{n} \pi \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f^2(x) \le V \le \sum_{i=1}^{n} \pi \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f^2(x) = \bar{S}(\pi f^2, D)\,,$$

takže je roven uvedenému integrálu.

12.10. Příklad. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele.

Řešení. Kužel s výškou v a s poloměrem podstavy r dostaneme rotací pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek v, r podél odvěsny s délkou v (viz obrázek 12.4). Můžeme tedy uvažovat funkci $f(x) = rx/v$ splňující předpoklady předcházejícího tvrzení, objem kužele pak je

$$\pi \int_0^v \left(\frac{rx}{v}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v x^2\ \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v\,.$$

□ Odvození vzorce pro obsah pláště rotačního tělesa (množiny, která vznikne rotací grafu funkce kolem osy x) je složitější. Podobně jako při důkazu vzorce pro délku grafu funkce aproximujeme graf funkce lineární lomenou čarou, její rotací dostaneme sjednocení plášťů komolých kuželů. Supremum obsahů těchto útvarů pro všechny lineární lomené aproximace dá hledaný obsah.

Potřebujeme znát vzorec pro obsah pláště komolého kužele. Uvažujme nejprve kužel s výškou v a s poloměrem podstavy r, označme s délku spojnice vrcholu s obvodovou kružnicí podstavy a α úhel, který svírá tato spojnice s osou kužele (platí $\sin\alpha = r/s$). Rozvineme-li plášť kužele, dostaneme kruhovou výseč o poloměru s a délce oblouku $2\pi r$. Její obsah je tedy $(2\pi r)/(2\pi s)$-násobkem obsahu kruhu o poloměru s, tedy

$$\frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2 = \pi r s = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}\,.$$

Obsah pláště komolého kužele s podstavami o poloměrech $r_1 < r_2$ dostaneme jako rozdíl obsahů plášťů kuželů s poloměry r_1, r_2 (označme $s = s_2 - s_1$):

$$\frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\sin\alpha} = 2\pi \cdot \frac{r_2 + r_1}{2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{\sin\alpha} = 2\pi \cdot \frac{r_2 + r_1}{2} \cdot (s_2 - s_1) = 2\pi \cdot \frac{r_2 + r_1}{2} \cdot s\,.$$

Uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Příslušná lineární lomená aproximace dá rotací množinu o obsahu

$$S(D) = \sum_{n=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\,.$$

Je-li funkce f spojitá a má-li derivaci, pak podle věty o mezihodnotě a podle Lagrangeovy věty existují body $c_i, c_i' \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$\begin{aligned} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} &= f(c_i)\,, \\ f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(c_i')\,(x_i - x_{i-1})\,. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

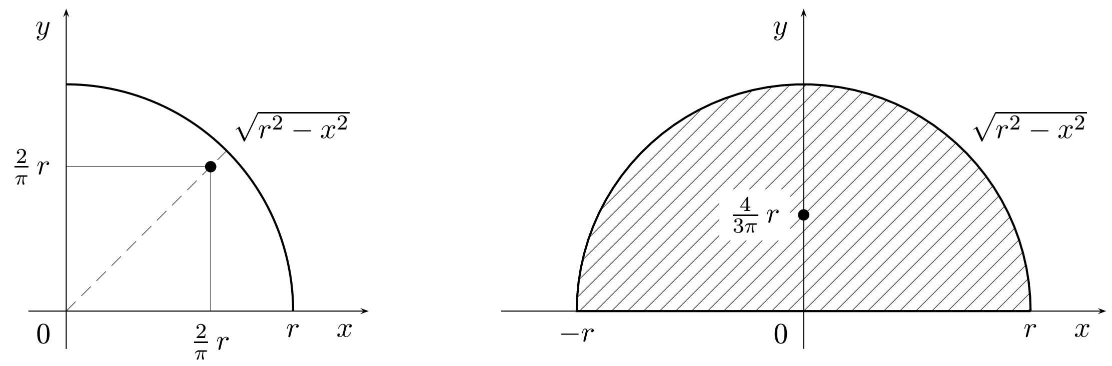
$$S(D) = \sum_{n=1}^{n} 2\pi\, f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i')]^2}\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Výraz připomíná obecný integrální součet funkce $2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, jen se na různých místech dosazují různé body intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Jestliže je derivace funkce f spojitá, dostaneme i v tomto případě v limitě pro vhodně se zjemňující dělení příslušný integrál. Výsledkem je tedy následující tvrzení:

12.11. Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na intervalu (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Obsah množiny $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in (a, b),\ y^2 + z^2 = f^2(x)\}$ (pláště rotačního tělesa) je*

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

12.12. Příklad. Odvoďte vzorec pro obsah povrchu koule.



Obrázek 12.5: Těžiště čtvrtkružnice a půlkruhu (příklad 12.14, příklad 12.16).

Řešení. Povrch koule o poloměru r dostaneme například rotací grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,, \qquad x \in \langle -r, r\rangle$$

kolem osy x. Na intervalu $(-r, r)$ jsou splněny podmínky výše uvedené věty (pro $x \in \{\pm r\}$ dostaneme dva body povrchu koule, které mají nulový „obsah"), obsah povrchu koule je

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, \mathrm{d}x = 4\pi r^2\,.$$

□ Na závěr se podívejme na určování těžiště útvarů v rovině. Souřadnice těžiště se spočítají

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{M_y}{m}\,, \qquad\qquad y_{\mathrm{T}} = \frac{M_x}{m}\,,$$

kde m je hmotnost a M_x, M_y jsou momenty vzhledem k osám x, y. Momenty se pro hmotné body počítají jako součin hmotnosti a vzdálenosti od osy, pro více hmotných bodů se tyto součiny nasčítají, v případě „spojitých" útvarů „naintegrují". Příslušná tvrzení uvedeme bez důkazů.

12.13. Tvrzení. *Pro jednorozměrný útvar („drát") v rovině s lineární hustotou λ, který je popsán grafem funkce se spojitou derivací na intervalu (a, b), platí*

$$m = \lambda \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

$$M_y = \lambda \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

12.14. Příklad. Určete těžiště homogenního drátu, který má tvar čtvrtkružnice.

Řešení. Drát tvaru čtvrtkružnice o poloměru r lze popsat grafem funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $\langle 0, r\rangle$ (viz obrázek 12.5). Ten je souměrný podle přímky o rovnici $y = x$, obě souřadnice těžiště jsou stejné. Označíme-li lineární hustotu drátu λ, pak platí

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\pi\lambda r}{2}\,,\\
M_x &= \lambda \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \lambda \int_0^r r \,\mathrm{d}x = \lambda r^2\,,\\
x_{\mathrm{T}} = y_{\mathrm{T}} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\lambda r^2}{\frac{\pi\lambda r}{2}} = \frac{2}{\pi}\, r\,.
\end{aligned}$$

12.15. Tvrzení. *Pro dvojrozměrný útvar v rovině („desku") s plošnou hustotou σ, který odpovídá ploše mezi osou x a grafem nezáporné spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, platí*

$$\begin{aligned}
m &= \sigma \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\,,\\
M_x &= \frac{\sigma}{2} \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x\,,\\
M_y &= \sigma \int_a^b x\, f(x)\, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

12.16. Příklad. Určete těžiště homogenní desky ve tvaru půlkruhu.

Řešení. Desku ve tvaru půlkruhu o poloměru r můžeme popsat jako útvar pod grafem funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $\langle -r, r\rangle$ (viz obrázek 12.5). Deska je pak symetrická podle osy y, tedy

$$x_{\mathrm{T}} = 0\,.$$

Označíme-li plošnou hustotu desky σ, dostáváme

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\pi\sigma r^2}{2}\,,\\
M_x &= \frac{\sigma}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \sigma \int_0^r (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \sigma\left(r^3 - \frac{1}{3}\, r^3\right) = \frac{2\sigma r^3}{3}\,,\\
y_{\mathrm{T}} &= \frac{\frac{2\sigma r^3}{3}}{\frac{\pi\sigma r^2}{2}} = \frac{4}{3\pi}\, r\,.
\end{aligned}$$

12.17. Poznámka. Pro souřadnici těžiště plochy o obsahu P platí $y_{\mathrm{T}} = \frac{V}{2\pi P}$, kde V je objem tělesa vzniklého rotací dané plochy kolem osy x. V předcházejícím příkladu je obsah půlkruhu $P = \frac{1}{2}\,\pi r^2$, rotací půlkruhu kolem osy x dostaneme kouli o objemu $\frac{4}{3}\,\pi r^3$, tedy

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\,\pi r^2} = \frac{4}{3\pi}\, r\,.$$

Neřešené úlohy

1. Spočtěte střední hodnotu funkce f na daném intervalu:
   a) $f(x) = 3x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$;
   b) $f(x) = x^2,\ x \in \langle 0, 1\rangle$;
   c) $f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in \langle 0, 2\rangle$;
   d) $f(x) = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$.
2. Spočtěte obsahy následujících množin:
   a) $\{[x,y]\colon x \in \langle 0, \pi\rangle,\ 0 \le y \le \sin x\}$ (plocha pod obloukem sinusoidy);
   b) $\{[x,y]\colon x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle,\ 0 \le y \le 1/x\}$;
   c) $\{[x,y]\colon x \in \langle a, b\rangle,\ 0 \le y \le x^2\}$;
   d) $\{[x,y]\colon x \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le \mathrm{e}^{-|x|}\}$;
   e) $\{[x,y]\colon x \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le 1/(x^2+1)\}$.
3. Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí $f,\ g$:
   a) $f(x) = 0,\ g(x) = x^2 - 2x$;
   b) $f(x) = x,\ g(x) = x^4$;
   c) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$.
4. Spočtěte obsah elipsy s poloosami a, b. (Nápověda: rovnice elipsy je $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.)
5. Spočtěte délku grafu funkce f na daném intervalu:
   a) $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ $(a > 0)$, $x \in \langle 0, b\rangle$ $(b > 0)$;
   b) $f(x) = \ln(x^2 - 1),\ x \in \langle 2, 5\rangle$;
   c) $f(x) = \ln \sin x,\ x \in \langle \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\rangle$;
   d) $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle -1, 1\rangle$.
6. Spočtěte délku asteroidy — křivky s rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ pro $a > 0$.
7. Spočtěte objem rotačního elipsoidu, vzniklého rotací elipsy s poloosami a, b kolem její osy délky $2a$. (Nápověda: použijte rovnici elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.)
8. Spočtěte objem rotačního paraboloidu, který má výšku v a poloměr podstavy r.
9. Spočtěte povrch pláště kulového pásu s výškou v v kouli o poloměru r.
10. Spočtěte povrch anuloidu, který vznikne rotací kružnice o poloměru r se středem $[0, R]$ $(R > r)$ kolem osy x.
11. Určete těžiště půlkružnice.
12. Určete těžiště plochy pod jedním obloukem sinusoidy.

Výsledky

1. a) 0; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$; d) $\frac{2}{\pi}$.
2. a) 2; b) 1; c) $(b^3 - a^3)/3$; d) 2; e) π.
3. a) $\frac{4}{3}$ (interval $\langle 0, 2\rangle$); b) $\frac{3}{10}$ (interval $\langle 0, 1\rangle$); c) $\frac{1}{3}$ (interval $\langle 0, 1\rangle$).
4. πab (čtyřikrát obsah pod grafem funkce $b\sqrt{1 - (x/a)^2}$, použije se například substituce $x = a \sin t$).
5. a) $a \sinh \frac{b}{a}$; b) $3 + \ln 2$; c) $\ln 3$; d) 4.
6. 6a (čtyřikrát délka grafu funkce $(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ na intervalu $\langle 0, a\rangle$).
7. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
8. $\frac{1}{2}\pi r^2 v$ (funkce $f(x) = r\sqrt{x/v}$ na intervalu $\langle 0, v\rangle$).
9. $2\pi rv$ (nezávisí na jeho poloze v kouli).
10. $4\pi^2 Rr$ (sečtením integrálů funkcí $R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle -r, r\rangle$ dostaneme $4\pi r \int_{-r}^{r} 1/\sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = 4\pi r R\big[\arcsin \frac{x}{r}\big]_{-r}^{r}$).
11. $[0, \frac{2}{\pi} r]$ pro $\sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $\langle -r, r\rangle$.
12. $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi]$ pro $\sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Kapitola 13

Numerická integrace

□ Dosud jsme při výpočtu určitého integrálu používali „přesné“ (analytické) metody. Ukážeme si základní numerické metody, podrobněji viz například skripta M. Navara, A. Němeček: Numerické metody, ČVUT, Praha, 2005.

□ S přesností analytických metod je to problematické:

- Vstupní data bývají zatížena chybou (hodnoty fyzikálních konstant, naměřené hodnoty).
- Teoretický model, vedoucí k výpočtu integrálu, popisuje realitu jen přibližně (například newtonovská fyzika oproti přesnější relativistické nebo kvantové fyzice).
- Dopouštíme se chyby při dosazování mezí (hodnoty funkcí, matematických konstant).

Často nepotřebujeme (nebo dokonce nemůžeme) zjistit výsledek „absolutně přesně“, stačí nám, pokud ho zjistíme s požadovanou přesností. Numerické („přibližné“) metody lze s výhodou použít v následujících situacích:

- Přesné řešení nelze nalézt. Příkladem může být $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, který umíme „přesně“ spočítat jen pro některé hodnoty mezí — například $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
- Přesné řešení je pracné nebo zdlouhavé. V kapitole 9 jsme ukázali algoritmus pro nalezení primitivní funkce k racionální funkci. Umíme tedy „přesně“ spočítat například $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Nicméně pro velká n je algoritmus zdlouhavý a samotný zápis primitivní funkce může zabrat spoustu místa.
- Dosazením do „přesného“ analytického řešení se dopustíme větší chyby, než kdybychom počítali integrál „přibližně“. Jako příklad by opět mohl sloužit výpočet $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$.
- Hodnoty integrované funkce známe jen v některých bodech. V takovém případě jiné než numerické řešení není možné.

□ Při použití numerických metod se dopouštíme dvou typů chyb. První vychází z nepřesnosti samotné metody, druhý typ chyby je důsledkem nepřesného výpočtu (výpočet funkční hodnoty, zaokrouhlení při různých operacích). Druhým typem chyby se zabývat nebudeme, tyto chyby budeme ignorovat (obvykle jsou o několik řádů menší, lze je ovlivnit volbou přesnosti výpočtu).

☐ Numerické metody můžeme rozdělit do dvou typů:

1. Výpočet na jeden pokus: zjistíme, které hodnoty parametrů numerické metody musíme použít, abychom našli výsledek s požadovanou přesností, a tyto hodnoty použijeme.
2. Iterační postup: spočteme hodnotu pro některé parametry numerické metody, odhadneme chybu, pokud je dostatečně malá, tak skončíme, jinak „zlepšíme“ parametry numerické metody a postup opakujeme.

U prvního typu využíváme odhad chyby, ve kterém vystupují derivace integrované funkce dostatečně velkého řádu — to může být problém zvláště v případě, kdy funkce není zadána analyticky.

☐ Budeme počítat

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a,b \in \mathbb{R}\,.$$

Použijeme vhodný odhad střední hodnoty (vážený průměr funkčních hodnot): pro *uzly* $x_i \in \langle a,b\rangle$ a *váhy* $w_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $w_1 + \cdots + w_k = 1$, aproximujeme střední hodnotu váženým průměrem $w_1 f(x_1) + \cdots + w_k f(x_k)$, takže dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)[w_1 f(x_1) + \cdots + w_k f(x_k)]\,.$$

Uzly volíme vhodným způsobem. Pokud je hodnota funkce známa jen v některých bodech, volíme za uzly právě tyto body, jinak například ekvidistantně. Váhy volíme tak, aby byl co největší *řád* metody, tj. největší přirozené číslo takové, že se integrují přesně všechny polynomy menšího stupně (v odhadech chyb to bude odpovídat exponentu u délky h podintervalu). Váhy jsou určeny tím, že se přesně integruje polynomiální interpolace funkce f v daných uzlech. V odhadech chyb budou vystupovat hodnoty $M_n = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(n)}(x)|$.

Gaussova metoda

☐ U Gaussovy metody jsou uzly voleny optimálně, tj. tak, aby výsledná metoda měla co největší řád, který je pak roven dvojnásobku počtu uzlů. Uzly jsou rozmístěny symetricky podle středu intervalu $\langle a,b\rangle$, váhy v symetrických uzlech jsou stejné. Konkrétní hodnoty se počítají komplikovaně, lze je najít v literatuře. Informace o této metodě jsou pro nejjednodušší případy shrnuty v následující tabulce — hodnoty uzlů jsou pro jednoduchost uvedeny pro interval $\langle -1,1\rangle$, pro interval $\langle a,b\rangle$ se přepočítají lineárně pomocí $x \mapsto a + \frac{b-a}{2}(x+1)$ (připomeňme, že $M_n = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(n)}(x)|$):

uzlů	řád	uzly	váhy	odhad chyby
1	2	0	1	$M_2(b-a)^3/24$
2	4	$\pm\sqrt{1/3}$	1/2	$M_4(b-a)^5/4320$
3	6	0	8/18	$M_6(b-a)^7/(2\,016\,000)$
		$\pm\sqrt{3/5}$	5/18	

Pro jeden uzel se tedy bere hodnota uprostřed intervalu s váhou 1.

Newtonovy–Cotesovy metody

□ U těchto metod jsou uzly pro jednoduchost vybrány ekvidistantně: pro $k \in \mathbb{N}$ zavedeme body $x_i = a + i\,\frac{b-a}{k}$, $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, a buď uvažujeme všechny (*uzavřená Newtonova–Cotesova metoda*) nebo všechny bez krajních bodů a, b (*otevřená Newtonova–Cotesova metoda*, pro $k \geq 2$). Řád metody je nejmenší sudé číslo, které je větší nebo rovno počtu uzlů. Váhy jsou „pěkná“ racionální čísla, v uzlech symetrických podle středu stejná. Ukažme tři nejpoužívanější metody a odhady jejich chyb.

□ Nejjednodušší otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu dostaneme, pokud za uzel vezmeme prostřední bod $(a+b)/2$ intervalu $\langle a, b\rangle$ s váhou 1. Tedy

$$\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Tato metoda integruje přesně lineární polynomy (střední hodnota lineárního polynomu na omezeném intervalu je hodnota v prostředním bodě příslušného intervalu). Kvadratické polynomy už přesně neintegruje, je tedy řádu 2. Je to zároveň Gaussova metoda pro jeden uzel.

13.1. Tvrzení. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x - (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{M_2}{24}\,(b-a)^3\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|\,.$$

Důkaz. Označme $h = b - a$ délku intervalu $\langle a, b\rangle$, $c = (a+b)/2$ jeho střed. Podle Taylorovy věty je

$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c_x)}{2}\,(x-c)^2$$

pro některý bod $c_x \in (a, b)$. Chyba numerické integrace je

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x - (b-a)\cdot f(c)\right| &= \left|\int_a^b \big(f(x) - f(c)\big)\;\mathrm{d}x\right| = \\
&= \left|\int_a^b \left(f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c_x)}{2}\,(x-c)^2\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\begin{aligned} x - c &= t \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}\right| = \\
&= \left|\int_{-h/2}^{h/2} \left(f'(c)\,t + \frac{f''(c_x)}{2}\,t^2\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-h/2}^{h/2} \frac{f''(c_x)}{2}\,t^2\;\mathrm{d}t\right| \leq \\
&\leq \int_{-h/2}^{h/2} \frac{|f''(c_x)|}{2}\,t^2\;\mathrm{d}t \leq \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2} t^2\;\mathrm{d}t = \frac{M_2}{24}\,h^3 = \frac{M_2}{24}\,(b-a)^3\,.
\end{aligned}$$

□ Nejjednodušší uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu dostaneme, pokud za uzly vezmeme krajní body a, b intervalu $\langle a, b\rangle$ s váhou $1/2$. Tedy

$$\int_a^b f(x)\;\mathrm{d}x \approx (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Tato metoda integruje přesně lineární polynomy, zatímco kvadratické už nikoliv, je tedy řádu 2.

□ Před odvozením odhadu chyby se nejprve podívejme na odhad chyby lineární interpolace.

13.2. Tvrzení. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci a P je lineární funkce taková, že $P(a)=f(a)$ a $P(b)=f(b)$. Pak pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ je*

$$|f(x)-P(x)|\le \frac{M_2}{2}\,|(x-a)(x-b)|\,,\qquad M_2=\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f''(x)|\,.$$

Důkaz. Pro $x\in\{a,b\}$ dokazovaná nerovnost platí. Pro $x\in(a,b)$ uvažujme funkci

$$F(t)=f(t)-P(t)-\big(f(x)-P(x)\big)\,\frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}\,.$$

Funkce F má nulové body a,b,x. Podle Rolleovy věty má funkce F' alespoň dva nulové body v intervalu (a,b) a opět podle Rolleovy věty má funkce F'' nulový bod $c_x\in(a,b)$. Je tedy

$$0=F''(c_x)=f''(c_x)-0-\big(f(x)-P(x)\big)\,\frac{2}{(x-a)(x-b)}\,,$$

takže

$$|f(x)-P(x)|=\frac{|f''(c_x)|}{2}\,|(x-a)(x-b)|\le\frac{M_2}{2}\,|(x-a)(x-b)|\,.$$

□ Podobným způsobem bychom dokázali obecnější větu o odhadu chyby polynomiální interpolace:

13.3. Věta. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci řádu $n+1$, P je polynomiální interpolace funkce f stupně nejvýše n v různých bodech $x_0,\dots,x_n\in\langle a,b\rangle$ (tj. $P(x_i)=f(x_i)$ pro $i\in\{0,1,\dots,n\}$). Pak pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ je*

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)\dots(x-x_n)|\,,\qquad M_{n+1}=\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f^{(n+1)}(x)|\,.$$

13.4. Tvrzení. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le\frac{M_2}{12}\,(b-a)^3\,,\qquad M_2=\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f''(x)|\,.$$

Důkaz. Označme $h=b-a$ délku intervalu $\langle a,b\rangle$, $c=(a+b)/2$ jeho střed, P lineární interpolaci funkce f v bodech a,b. Podle tvrzení 13.2 je

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b\big(f(x)-P(x)\big)\,\mathrm{d}x\right|\le$$

$$\le\int_a^b\big|f(x)-P(x)\big|\,\mathrm{d}x\le\frac{M_2}{2}\int_a^b|(x-a)(x-b)|\,\mathrm{d}x=$$

$$= \left| \begin{aligned} x-c&=t \\ \mathrm{d}x&=\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \frac{M_2}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - t^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{M_2}{12}\, h^3 =$$
$$= \frac{M_2}{12}\, (b-a)^3 \,.$$

13.5. Poznámka. Odhad chyby uzavřené Newtonovy–Cotesovy metody se 2 uzly je dvakrát horší než u otevřené Newtonovy–Cotesovy metody s 1 uzlem, přestože se používají lepší polynomy (lineární oproti konstantním). U otevřené Newtonovy–Cotesovy metody s jedním uzlem se totiž využívá hodnota ve středu intervalu, což odpovídá lineární aproximaci tečnou v odpovídajícím bodě, zatímco zde jsme aproximovali sečnou. Horší metodu (řádu 1 s odhadem chyby $\frac{M_1}{2}\,(b-a)^2$ pro $M_1 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x)|$) bychom dostali, pokud bychom aproximovali konstantní funkcí s hodnotou například v levém krajním bodu intervalu.

□ Druhou nejjednodušší uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu dostaneme, pokud za uzly vezmeme body $x_i = a + i\,\frac{b-a}{2}$ pro $i \in \{0,1,2\}$. Potřebujeme zjistit váhy pro jednotlivé uzly, abychom přesně integrovali příslušnou polynomiální (zde kvadratickou) interpolaci.

Interpolační polynom v uzlech $x_0, \ldots x_k$ (tedy stupně nejvýše k) se dá vyjádřit jako kombinace tzv. *Lagrangeových polynomů*, tj. polynomů, které mají právě v jednom uzlu hodnotu 1, v ostatních uzlech hodnotu 0:

$$\begin{aligned} P(t) = f(x_0)\, &\frac{(t-x_1)\cdots(t-x_k)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)} + \\ + f(x_1)\, &\frac{(t-x_0)(t-x_2)\cdots(t-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)} \\ &\vdots \\ + f(x_k)\, &\frac{(t-x_0)\cdots(t-x_{k-1})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})} \,. \end{aligned}$$

Pro kvadratickou interpolaci P uzly x_0, x_1, x_2 dostaneme (označme $h = (b-a)/2$)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} (x-x_1) &= ht \\ \mathrm{d}x &= h\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = h \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= h\left[f(x_0) \int_{-1}^{1} \frac{t(t-1)}{(-1)(-2)}\,\mathrm{d}t + f(x_1) \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)(t-1)}{1(-1)}\,\mathrm{d}t + f(x_2) \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)t}{2\cdot 1}\,\mathrm{d}t \right] \\ &= h\big[\tfrac{1}{3} f(x_0) + \tfrac{4}{3} f(x_1) + \tfrac{1}{3} f(x_2)\big] = (b-a)\cdot \big[\tfrac{1}{6} f(x_0) + \tfrac{4}{6} f(x_1) + \tfrac{1}{6} f(x_2)\big] \,. \end{aligned}$$

Váhy jsou tedy $\frac{1}{6}$ v krajních bodech a $\frac{4}{6}$ v prostředním bodě.

Váhy jsme určili tak, aby se přesně integrovaly kvadratické polynomy. Dá se ukázat, že se budou přesně integrovat i kubické polynomy (polynomy stupně 4 už nikoliv), metoda je tedy řádu 4.

□ Bez důkazu uveďme větu o odhadu chyby.

13.6. Tvrzení. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci. Pak*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\cdot \frac{f(a) + 4\,f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6} \right| \le \frac{M_4}{2880}\,(b-a)^5 \,, \qquad M_4 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)| \,.$$

□ Shrňme do tabulky přehled tří nejpoužívanějších Newtonových–Cotesových metod (připomeňme, že $M_n = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(n)}(x)|$):

otevřené Newtonovy–Cotesovy metody

uzlů	řád	uzly	váhy	odhad chyby
1	2	$(a+b)/2$	1	$M_2(b-a)^3/24$

uzavřené Newtonovy–Cotesovy metody

uzlů	řád	uzly	váhy	odhad chyby
2	2	a, b	$1/2$	$M_2(b-a)^3/12$
3	4	$(a+b)/2$	$4/6$	$M_4(b-a)^5/2880$
		a, b	$1/6$	

Vidíme, že uzavřená Newtonova–Cotesova metoda se 3 uzly má o něco větší odhad chyby než Gaussova metoda se 2 uzly.

Složené metody

□ Při zvětšování počtu uzlů nemusí aproximace spočtené Newtonovou–Cotesovou metodou konvergovat k hodnotě integrálu. Chyba závisí na hodnotách derivace příslušného řádu integrované funkce, ta se může zvětšovat. Konvergenci zajistí *složené* metody: interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na n podintervalů délek $(b-a)/n$ s krajními body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a na každém z nich použijeme zvolenou metodu. Výpočty zlepšujeme zvětšováním n.

Obdélníková metoda

□ Obdélníková metoda používá otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 1 uzel. Rozdělíme tedy interval $\langle a,b\rangle$ na n podintervalů délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dostaneme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \qquad i\in\{1,2,\ldots,n\},$$

a součtem přes všechny podintervaly pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx R(h) = h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

13.7. Věta. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R(h)\right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz. Na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, délky h dostáváme podle tvrzení 13.1 stejný odhad chyby $\frac{M_2}{24}\, h^3$. Chyba na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ bude tedy odhadnuta součtem těchto odhadů

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R(h) \right| \le n \cdot \frac{M_2}{24}\, h^3 = \frac{M_2}{24}\,(b-a)h^2\,.$$

13.8. Poznámka. Pokud by funkce byla zadána tabulkou (neznali bychom hodnoty uvnitř intervalů), pak by bylo možné použít hodnoty například v levých krajních bodech intervalů. Odhad chyby této metody by byl $\frac{M_1}{2}\,(b-a)h$ pro $M_1 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x)|$.

Lichoběžníková metoda

□ Lichoběžníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly. Rozdělíme tedy interval $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dostaneme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}\,,$$

a součtem přes všechny podintervaly pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx T(h) = h\left[\tfrac{1}{2}\, f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\, f(b)\right].$$

13.9. Věta. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(h) \right| \le \frac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|\,.$$

Důkaz. Na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, délky h dostáváme podle tvrzení 13.4 stejný odhad chyby $\frac{M_2}{12}\, h^3$. Chyba na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ bude tedy odhadnuta součtem těchto odhadů

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(h) \right| \le n \cdot \frac{M_2}{12}\, h^3 = \frac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,.$$

13.10. Poznámka. Lichoběžníkovou metodu lze snadno modifikovat i pro neekvidistantní dělení — pokud je například funkce zadána hodnotami v některých bodech (neekvidistantně) nebo pokud chceme zpřesňovat výpočet jemnějším dělením v místech, kde se funkce „více mění“.

Simpsonova metoda

□ Simpsonova metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly. Rozdělíme tedy interval $\langle a,b\rangle$ ekvidistantně na podintervaly a každý z nich na dva stejně dlouhé podintervaly. Pro lepší srovnání s ostatními metodami je zvykem označovat písmenem n **sudý** počet všech takto vzniklých podintervalů délky $(b-a)/n = h$ s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$. Dostaneme

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2h \cdot \frac{f(x_{2i-2}) + 4\,f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{6}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n/2\},$$

a součtem přes všechny podintervaly pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(h) = \tfrac{h}{3}\left[f(a)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3)+\cdots+2\,f(x_{2n-2})+4\,f(x_{2n-1})+f(b)\right].$$

13.11. Věta. *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci. Pak*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(h)\right| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4, \qquad M_4 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Důkaz. Na každém podintervalu $\langle x_{2i-2}, x_{2i}\rangle$, $i \in \{1,2,\dots,n/2\}$, délky $2h$ dostáváme podle tvrzení 13.6 stejný odhad chyby $\frac{M_4}{90}h^5$. Chyba na celém intervalu $\langle a,b\rangle$ bude tedy odhadnuta součtem těchto odhadů

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(h)\right| \le \frac{n}{2}\cdot\frac{M_4}{90}h^5 = \frac{M_4}{180}(b-a)h^4.$$

Richardsonova extrapolace

□ Pro metodu F řádu p konvergující k $F(0)$ je

$$F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q),$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > p$. Symbol $O(h^q)$ označuje funkci, která se v okolí 0 chová nejhůře jako násobek h^q, přesněji její absolutní hodnota je shora odhadnuta výrazem $M|h^q|$ pro vhodnou konstantu M. Zde zahrnuje chyby řádu většího než p. Uvažujme $h > 0$, $k > 1$ a proložme body $[h^p, F(h)]$ a $[(kh)^p, F(kh)]$ přímku — je to graf funkce

$$P(x) = F(h) + \frac{F(kh) - F(h)}{(k^p - 1)h^p}(x - h^p).$$

Richardsonovu extrapolaci metody F dostaneme, pokud přesnou hodnotu $F(0)$ aproximujeme hodnotou $P(0)$, tj. dostaneme

$$F_1(h) = F(h) + \frac{F(h) - F(kh)}{k^p - 1}.$$

13.12. Věta. *Nechť* $F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. *Pak pro Richardsonovu extrapolaci* $F_1(h) = F(h) + \big(F(h) - F(kh)\big)/(k^p - 1)$ *funkce* F *platí* $F_1(h) = F(0) + O(h^q)$.

Důkaz. Využijeme toho, že $O(ch^q) = O(h^q)$ a $c \cdot O(h^q) = O(h^q)$ pro každé $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $O(h^q) \pm O(h^q) = O(h^q)$:

$$\begin{aligned} F_1(h) &= F(h) + \frac{F(h) - F(kh)}{k^p - 1} = \\ &= F(0) + ah^p + O(h^q) + \frac{\big(F(0) + ah^p + O(h^q)\big) - \big(F(0) + ak^p h^p + O(k^q h^q)\big)}{k^p - 1} = \\ &= F(0) + ah^p + O(h^q) + \frac{a(1 - k^p)h^p + O(h^q)}{k^p - 1} = F(0) + O(h^q)\,. \end{aligned}$$

13.13. Příklady. Obdélníková a lichoběžníková metoda je řádu 2, Simpsonova metoda je řádu 4. Všechny tyto metody mají pouze chyby sudých řádů, takže řády jejich Richardsonových extrapolací se zvětší o 2. Pro $k = 2$ dostáváme:

$$\begin{aligned} R_1(h) &= R(h) + \tfrac{1}{3}\big(R(h) - R(2h)\big) && \text{řádu } 4\,, \\ T_1(h) &= T(h) + \tfrac{1}{3}\big(T(h) - T(2h)\big) = S(h) && \text{řádu } 4\,, \\ S_1(h) &= S(h) + \tfrac{1}{15}\big(S(h) - S(2h)\big) && \text{řádu } 6\,. \end{aligned}$$

Protože potřebujeme hodnotu metody v $2h$, potřebujeme pro obdélníkovou a lichoběžníkovou metodu sudá n, pro Simpsonovu metodu n dělitelná 4.

13.14. Poznámky. Richardsonovu extrapolaci lze využít následujícími způsoby:

1) Najdeme metodu vyššího řádu (odstraníme chybu nejnižšího řádu).

2) Přičítanou hodnotu můžeme použít jako (nezaručený) odhad chyby pro iterační postup výpočtu: spočteme pro $n = 1$ (pro Simpsonovu metodu pro $n = 2$); opakovaně zdvojnásobujeme počet podintervalů n (pro obdélníkovou a Simpsonovu metodu stačí počítat hodnoty jen v nových bodech) a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Rombergova metoda

□ Rombergova metoda vychází z lichoběžníkové metody a využívá opakované Richardsonovy extrapolace — spočítáme všechny možné Richardsonovy extrapolace v trojúhelníkovém schematu

$$\begin{array}{lllll} T(h) \\ T(\frac{h}{2}) & T_1(\frac{h}{2}) \\ T(\frac{h}{4}) & T_1(\frac{h}{4}) & T_2(\frac{h}{4}) \\ T(\frac{h}{8}) & T_1(\frac{h}{8}) & T_2(\frac{h}{8}) & T_3(\frac{h}{8}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

a sledujeme výsledky na diagonále (odhady chyb máme pro výsledky na pozicích před diagonálou). V k-tém sloupci je metoda řádu $2k$.

13.15. Příklad. Spočtěte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$. (Integrovaná funkce je tzv. hustota normovaného normálního rozdělení a hraje významnou roli ve statistice. Počítaný integrál odpovídá pravděpodobnosti toho, že náhodná veličina s normálním rozdělením bude nad střední hodnotou ve vzdálenosti nejvýše směrodatné odchylky od ní.)

Řešení. Nejprve použijeme přímé výpočty pro obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu s využitím odhadů chyb. Vyšetříme maxima absolutních hodnot derivací příslušných řádů (to není zcela jednoduché, i když potřebná maxima se nabývají v bodě 0):

$$\begin{aligned}
M_2 &= \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f^{(2)}(x)| = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\\
M_4 &= \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^4-6x^2+3)}{\sqrt{2\pi}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\,.
\end{aligned}$$

V odhadech chyb přepíšeme $h = (b-a)/n_X$ pro $X \in \{R, T, S\}$ podle použité metody, odhad položíme menší než ε a spočteme patřičné n_X (n_S musí být sudé):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2}\,, && n_R > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \doteq 128{,}9\,, && n_R = 129\,,\\
&\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2}\,, && n_T > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \doteq 182{,}3\,, && n_T = 183\,,\\
&\varepsilon > \frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4}\,, && n_S > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \doteq 7{,}2\,, && n_S = 8\,.
\end{aligned}$$

Spočtené hodnoty a skutečné chyby pro nalezené počty dělení jsou (zaokrouhleno na 9 desetinných míst, hodnota integrálu na 9 desetinných míst je 0,341 344 746):

metoda	obdélníková	lichoběžníková	Simpsonova
hodnota	0,341 345 352	0,341 344 144	0,341 345 406
chyba	−0,000 000 606	0,000 000 602	−0,000 000 660

Nyní použijme iterační postup pro obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu s využitím Richardsonovy extrapolace k odhadu chyby (hodnoty jsou opět zaokrouhleny na 9 desetinných míst):

obdélníková metoda

dělení	hodnota	odhad chyby	chyba
1	0,352 065 327		0,020 888 244
2	0,343 902 774	−0,002 720 850	−0,002 558 028
4	0,341 977 187	−0,000 641 863	−0,000 632 441
8	0,341 502 423	−0,000 158 255	−0,000 157 677
16	0,341 384 138	−0,000 039 428	−0,000 039 392
32	0,341 354 592	−0,000 009 849	−0,000 009 846
64	0,341 347 208	−0,000 002 461	−0,000 002 461
128	0,341 345 361	−0,000 000 615	−0,000 000 615

lichoběžníková metoda

dělení	hodnota	odhad chyby	chyba
1	0,320 456 502		0,020 888 244
2	0,336 260 915	0,005 268 137	0,005 083 831
4	0,340 081 845	0,001 273 643	0,001 262 902
8	0,341 029 516	0,000 315 890	0,000 315 230
16	0,341 265 969	0,000 078 818	0,000 078 777
32	0,341 325 054	0,000 019 695	0,000 019 692
64	0,341 339 823	0,000 004 923	0,000 004 923
128	0,341 343 515	0,000 001 231	0,000 001 231
256	0,341 344 438	0,000 000 308	0,000 000 308

Simpsonova metoda

dělení	hodnota	odhad chyby	chyba
2	0,341 529 052		−0,000 184 306
4	0,341 355 488	−0,000 011 571	−0,000 010 742
8	0,341 345 406	−0,000 000 672	−0,000 000 660

Z tabulek je vidět, že odhad chyby pomocí Richardsonovy extrapolace je poměrně přesný a že chyby (i jejich odhady) při přechodu k dvojnásobnému počtu dělení klesají podle řádu metody: pro obdélníkovou a lichoběžníkovou metodu řádů 2 je podíl zhruba $2^2 = 4$, pro Simpsonovu metodu řádu 4 zhruba $2^4 = 16$.

V obou postupech je vidět, že Simpsonova metoda dává podstatně lepší výsledky.

Na závěr se podívejme na Rombergovu metodu (odhad chyby a chyba jsou pro předposlední T_i daného řádku, hodnoty jsou zaokrouhleny na 9 desetinných míst):

dělení	T	T_1	T_2	odhad chyby	chyba
1	0,320 456 502				
2	0,336 260 915	0,341 529 052		0,005 268 137	0,005 083 831
4	0,340 081 845	0,341 355 488	0,341 343 917	−0,000 011 571	−0,000 010 742
8	0,341 029 516	0,341 345 406	0,341 344 734	0,000 000 013	0,000 000 012

U iteračních postupů jsme mohli na konci použít Richardsonovu extrapolaci ke zpřesnění výsledku. Tím bychom dostali chyby přibližně $9 \cdot 10^{-12}$, $-6 \cdot 10^{-13}$, $1 \cdot 10^{-8}$ a $-1 \cdot 10^{-9}$ pro rovnoběžníkovou, lichoběžníkovou, Simpsonovu a Rombergovu metodu.

13.16. Poznámka. Obdélníková metoda je vhodná, pokud se chceme vyhnout výpočtu funkčních hodnot v krajních bodech intervalu. Při použití iteračního postupu nebývá výhodná. Například při zdvojnásobování počtu dělení intervalu (viz příklad 13.15, z numerických důvodů se doporučuje ztrojnásobování) sice potřebujeme poloviční nebo stejný počet dělení intervalu oproti lichoběžníkové metodě, protože ale musíme počítat hodnoty ve všech použitých uzlech (které se navzájem liší), je počet nutných hodnot takřka roven dvojnásobku počtu nutných dělení a tedy takřka stejný nebo takřka dvojnásobný oproti lichoběžníkové metodě. U obdélníkové (i Simpsonovy) metody si totiž můžeme uložit už spočtené funkční hodnoty (dokonce jejich vhodné součty) a pro dvojnásobný počet dělení dopočítáváme hodnoty funkcí jenom v nových uzlech (všechny uzly použité pro některý počet dělení se použijí i pro větší počet dělení), takže počet nutných hodnot je zhruba roven počtu nutných dělení (je o 1 větší).

13.17. Poznámka. Odhady chyb pomocí vzorců bývají poněkud nadsazené, při iteračním postupu se pro počty dělení používají mocniny přirozeného čísla (obvykle 2), v Rombergově metodě je odhad chyby pro čísla před diagonálou. Většinou se tedy počítá zbytečně mnoho funkčních hodnot pro zbytečně velký počet dělení intervalu. Uveďme počty nutných dělení intervalu a funkčních hodnot pro jednotlivé metody (včetně Gaussovy) pro příklad 13.15:

metoda	obdélníková	lichoběžníková	Simpsonova	Rombergova	Gaussova
nutných dělení	101	143	8	4	1
nutných hodnot	101	144	9	5	3

13.18. Příklad. Spočtěte $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ pro funkci f zadanou tabulkou hodnot:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	1	2

Řešení. Dosadíme do vzorců pro lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu. Porovnání výsledků včetně odhadu chyby pomocí Richardsonovy extrapolace a příslušné extrapolace je v následující tabulce:

metoda	$h=2$	$h=1$	odhad chyby	extrapolace
lichoběžníková	7	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$7\frac{2}{3}$
Simpsonova	$7\frac{1}{3}$	$7\frac{2}{3}$	$\frac{1}{45}$	$7\frac{31}{45}$

Rejstřík

Seznam obrázků