B4B01DMA

Jakub Adamec
Domácí úkol č. 7A

18. 11. 2024

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 8.

1. Uvažujme následující relaci na $\mathbb{Z}$:
$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b - a$ je dělitelné dvěma nebo třemi.
Vyšetřete, zda splnňuje základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).
Je to částečné uspořádání?

Poznámka: Při přemýšlení může pomoci alternativní definice:

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 2)$ nebo $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 3)$.

Poznámka: Pro správnou práci s relací je třeba korekktně interpretovat definici. Pro konkrétní dvojici a, b se otázka „jsou spolu v relaci?“ překládá do podoby:

„je pravda, že $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 2)$ nebo $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 3)$?“

Výběr mezi dvojkou a trojkou tedy není nějaký centrální jednou pro vždy, ale dělá se pro každou dvojici a, b znovu, volba je tedy individuální a ptáme se, zda to „nebo“ lze zařídit, ne že si jedno z čísel $2, 3$ vybereme a chceme jej.

2. Na množině konečných řetězců písmen malé latinské abecedy (tedy „slovo“) zavedeme následující relaci: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když řetězec β vznikl tak, že se přidala písmena před řetězec nebo za řetězec α (přičemž připouštíme i možnost přidání žádných písmen).
Například „tema“ je v relaci s „matematika“, nebo „abc“ je v relaci s „abcde“.
a) Nakresleste Hasseův diagram pro množinu {au, auto, automobil, to, mobil} uspořádánou relací $\mathcal{R}$.
b) určete největší prvek, maxima, nejmenší prvek a minima, pokud existují.
c) Najděte nějakou linearizaci.

3. Krátký bonusový příklad pro pilné:
Uvažujme množinu A uspořádáných trojic (r, t, s), kde
r je přirozené číslo $1, 2, ..., 9$ (ročník);
t je přirozené číslo $A, B, C, ...$ (třída);
s je řetězec písmen (přijmení studenta);
V první souřadnici řadíme dle velikosti čísla, v druhé a třetí souřadnici řadíme dle abecedy. Podle teorie je lexikografické uspořádání lineární, a množinu A je tedy možné seřadit do jednoho řetízku.
Ukažte toto seřazení (tedy vlastně Hasseův diagram), pokud se množina A skládá z těchto trojic:
(5,A,Alda), (7,B,Cody), (6,C,Ego), (5,B,Fink), (7,A,Job), (5,A,Klen), (7,B,Mold), (5,A,Nub).

1.

Reflexivita: $\forall a \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}a$. Platí.
Důkaz.

$a \in \mathbb{Z}$ libovolné.
$a - a = 0$.
$0 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$.
a tedy: $a \equiv a (\operatorname{mod} 2) \implies a\mathcal{R}a$. ■

Symetrie: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a)$. Platí.
Důkaz.

$a, b \in \mathbb{Z}$ libovolné.
předpoklad: $a \equiv b (\operatorname{mod} 2) \;\vee\; a \equiv b (\operatorname{mod} 3)$.
$a - b = 2k \;\vee\; a - b = 3l,\;\; k, l \in \mathbb{Z} \qquad / \cdot (-1)$.
$b - a = 2(-k) \;\vee\; b - a = 3(-l),\;\; (-k), (-l) \in \mathbb{Z}$.
tedy: $(b \equiv a (\operatorname{mod} 2) \;\vee\; b \equiv a (\operatorname{mod} 3)) \implies b\mathcal{R}a$. ■

Antisymetrie: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Neplatí.
Důkaz.

p-p:
$a = 1, b = 3$.
$1\mathcal{R}3 \wedge 3\mathcal{R}1$, ale neplatí $1 = 3$. ■

Tranzitivita: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$.
Neplatí.
Důkaz.

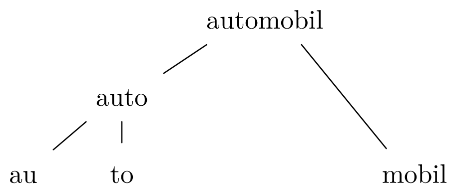
p-p:
$a = 1, b = 5, c = 14$.
$1\mathcal{R}5 \wedge 5\mathcal{R}14$, ale neplatí $1\mathcal{R}14$, protože
$1 \not\equiv 14 (\operatorname{mod} 2)$ ani $1 \not\equiv 14 (\operatorname{mod} 3)$. ■

Aby relace byla částečně uspořádánou, musí být tranzitivní, reflexivní a antisymetrická. Tuto vlastnost $\mathcal{R}$ nesplňuje.

2.

a)

$M = \{\text{au, auto, automobil, to, mobil}\}$



Obrázek 1: Hassův diagram pro množinu M

b)

Největší prvek: automobil

Maximum: automobil

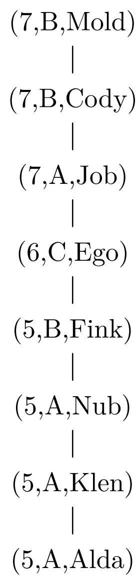
Nejmenší prvek: au, to, mobil

Minimum: au, to, mobil

c)

au $\leq_L$ to $\leq_L$ mobil $\leq_L$ auto $\leq_L$ automobil.

3.



Obrázek 2: Hassův diagram pro množinu A