B4B01DMA

Jakub Adamec
Domácí úkol č. 9A

26. 11. 2024

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 10.

1. Uvažujte funkci zadanou $f(0) = 1, f(1) = 2$ a $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

a) Spočítejte několik prvních hodnot této funkce a odhadněte obecný vzorec pro $f(n)$.
b) Dokažte indukcí, že váš odnadnutý vzorec je správně.

2. Uvažujte funkci zadanou $f(1) = 0$ a $f(n+1) = f(n) + n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Dokažte indukcí, že takto zadaná funkce splňuje nerovnost $f(n) < n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Bonus:
Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte:
Je-li $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Použijte strukturu důkazu, kdy je závěr brán jako cesta.

1.
a) $f(2) = 2 + 2 = 4, f(3) = 4 + 2 \cdot 2 = 8, f(4) = 8 + 2 \cdot 4 = 16, f(5) = 16 + 2 \cdot 8 = 32.$

$$f(n) = 2^n, n \in \mathbb{N}$$

b)

(0) n=0: $2^0 = f(0) = 1$.
(1) $n \geq 0$: IP: $f(n) = 2^n, f(n-1) = 2^{n-1}$.
Pak $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \overset{\text{IP}}{=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ∎

2.
$f(2) = 0 + 1 = 1, f(3) = 1 + 2 = 3, f(4) = 3 + 3 = 6, f(5) = 6 + 4 = 10, f(6) = 10 + 5 = 15$

$$f(n) = \frac{(n-1)n}{2}, n \geq 1$$

(0) n=1: $f(1) = \frac{(1-1)\cdot 1}{2} = 0 < 1^2$.
(1) $n \geq 1$: IP: $f(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.
Pak $f(n+1) < n^2 + 2n + 1 \overset{\text{IP}}{=} \frac{n^2+n}{2} < n^2 + 2n + 1 \to 0 < n^2 + 3n + 2$. ∎

Bonus.

$\forall a, b \in A$.
předpoklad $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$.
$a\mathcal{R}b \iff b\mathcal{R}^{-1}a \ \wedge \ b\mathcal{R}a \iff a\mathcal{R}^{-1}b$.
z předpokladu tedy platí: $(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \Rightarrow a = b$.
což je přesná definice antisymetrie pro $\mathcal{R}^{-1}$. ∎