B4B01DMA

Jakub Adamec

Domácí úkol č. 8A

15. 12. 2024

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 9.

1. Nechť A je množina předmětů vyučovaných katedrou matematiky. Definujeme $\mathcal{R}$ na A takto: Předměty X, Y jsou v relaci, pokud se shodují první písmena jejich oficiálních třípísmenných zkratek.
a) Dokažte, že $\mathcal{R}$ je ekvivalence.
b) Najděte $[\text{DMA12}]_{\mathcal{R}}$ neboli třídu ekvivalence příslušnou předmětu Diskrétní matematika.
Tip: V důkazu se může hodit zavést si indikátor I předmětu p definovaný takto: $I(p)$ je první písmeno oficiální třípísmenné zkratky předmětu p.

2. Dokažte indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.
Poznámka: Může pro vás být jednodušší to vidět jako $\underbrace{0 + 0 + ... + 0}_{n \text{ krát}} = 0$.

Bonus:
Nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou relace na A. Dokažte: Je-li $\mathcal{R}$ reflexivní, tak je i u $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ reflexivní.

1. Například DMA$\mathcal{R}$DRN.

a)

Nechť $I(a)$ je první písmeno třípísmenné zkratky předmětu $a \in A$.

$\mathbb{R}$eflexivita:

$a\mathcal{R}a, a \in A$.
$I(a) = I(a)$ platí vždy $\Longrightarrow a\mathcal{R}a$. ■

$\mathbb{S}$ymetrie:

$a, b \in A$ libovolné.
předpoklad: $a\mathcal{R}b$.
$I(a) = I(b)$.
a tedy $I(b) = I(a) \Longrightarrow b\mathcal{R}a$. ■

$\mathbb{T}$ranzivita:

$a, b, c \in A$ libovolné.
předpoklad: $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c)$.
$I(a) = I(b) \wedge I(b) = I(c)$.
což znamená $I(a) = I(c)$. ■

Protože $\mathcal{R}$ splňuje $\mathbb{R}$eflexivitu, $\mathbb{S}$ymetrii a $\mathbb{T}$ranzivitu, $\mathcal{R}$ je ekvivalence.

b)

Nechť $I(X)$ je první písmeno třípísmenné zkratky předmětu $X \in A$.

$[\text{DMA12}]_{\mathcal{R}} = \{X \in A; \text{DMA12 } \mathcal{R} \ X\} = \{I(X) = D\}$.

2.

(0) $n = 1 : 0 \stackrel{?}{=} 0$ ✓
(1) $n \geq 1$: indukční předpoklad: $\sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.
Pak: $\sum_{k=1}^{n+1}(0) = \sum_{k=1}^{n}(0) + 0 \stackrel{\text{IP}}{=} 0 + 0 = 0$.
■

Bonus.

předpoklad: $\mathcal{R}$ je reflexivní.
pak $\left[{\scriptstyle (a,a) \in \mathcal{R} \vee (a,a) \in \mathcal{S}}\right] \longrightarrow \left[{\scriptstyle (a,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}\right] \longrightarrow \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. ■