

B4B01DMA

Jakub Adamec
Domácí úkol č. 9A

8. 12. 2024

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 10.

1. Uvažujte funkci zadanou $f(0) = 1, f(1) = 2$ a $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

a) Spočítejte několik prvních hodnot této funkce a odhadněte obecný vzorec pro $f(n)$.

b) Dokažte indukcí, že váš odhadnutý vzorec je správně.

2. Uvažujte funkci zadanou $f(1) = 0$ a $f(n+1) = f(n) + n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Dokažte indukcí, že takto zadaná funkce splňuje nerovnost $f(n) \leq n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Bonus:

Nechť \mathcal{R} je relace na A . Dokažte:

Je-li \mathcal{R} antisymetrická, tak je i \mathcal{R}^{-1} antisymetrická.

Použijte strukturu důkazu, kdy je závěr brán jako cesta.

1.

a) $f(2) = 2 + 2 = 4, f(3) = 4 + 2 \cdot 2 = 8, f(4) = 8 + 2 \cdot 4 = 16, f(5) = 16 + 2 \cdot 8 = 32$.

$$f(n) = 2^n, n \in \mathbb{N}$$

b)

(0) $n = 1: 2^1 = 2 = f(1)$.

(1) $n \geq 1$: IP: $f(n) = 2^n, f(n-1) = 2^{n-1}$.

Pak $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \stackrel{\text{IP}}{=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

2.

(0) $n = 1: f(1) = \frac{(1-1) \cdot 1}{2} = 0 \leq 1^2$.

(1) $n \geq 1$: IP: $f(n) \leq n^2$.

Pak $f(n+1) = f(n) + n \stackrel{\text{IP}}{\leq} n^2 + n \underset{[n+1 \geq 0]}{\leq} n^2 + 2n + 1 \leq (n+1)^2$. ■

Bonus.

$\forall a, b \in A$.

předpoklad $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$.

$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a \wedge b\mathcal{R}a \Leftrightarrow a\mathcal{R}^{-1}b$.

z předpokladu tedy platí: $(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \Rightarrow a = b$.

což je přesná definice antisymetrie pro \mathcal{R}^{-1} . ■