

B4B01DMA

Jakub Adamec
Domácí úkol č. 7A

12. 11. 2024

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 8.

1. Uvažujme následující relaci na \mathbb{Z} :

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $b - a$ je dělitelné dvěma nebo třemi.

Vyšetřete, zda splňuje základní čtyři vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita).

Je to částečné uspořádání?

Poznámka: Při přemýšlení může pomoci alternativní definice:

$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a \equiv b \pmod{2}$ nebo $a \equiv b \pmod{3}$.

Poznámka: Pro správnou práci s relací je třeba korektně interpretovat definici. Pro konkrétní dvojici a, b se otázka „jsou spolu v relaci?“ překládá do podoby:

„je pravda, že $a \equiv b \pmod{2}$ nebo $a \equiv b \pmod{3}$?“

Výběr mezi dvojkou a trojkou tedy není nějaký centrální jednou pro vždy, ale dělá se pro každou dvojici a, b znovu, volba je tedy individuální a ptáme se, zda to „nebo“ lze zařídit, ne že si jedno z čísel 2, 3 vybereme a chceme jej.

2. Na množině konečných řetězců písmen malé latinské abecedy (tedy „slovo“) zavedeme následující relaci: $a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když řetězec β vznikl tak, že se přidala písmena před řetězec nebo za řetězec α (přičemž připouštíme i možnost přidání žádných písmen).

Například „tema“ je v relaci s „matematika“, nebo „abc“ je v relaci s „abcde“.

- Nakreslete Hasseův diagram pro množinu {au, auto, automobil, to, mobil} uspořádanou relací \mathcal{R} .
- určete největší prvek, maxima, nejmenší prvek a minima, pokud existují.
- Najděte nějakou linearizaci.

3. Krátký bonusový příklad pro pilné:

Uvažujme množinu A uspořádaných trojic (r, t, s) , kde

r je přirozené číslo 1, 2, ..., 9 (ročník);

t je přirozené číslo A, B, C, \dots (třída);

s je řetězec písmen (příjmení studenta);

V první souřadnici řadíme dle velikosti čísla, v druhé a třetí souřadnici řadíme dle abecedy. Podle teorie je lexikografické uspořádání lineární, a množinu A je tedy možné seřadit do jednoho řetězku.

Ukažte toto seřazení (tedy vlastně Hasseův diagram), pokud se množina A skládá z těchto trojic:

(5,A,Alda), (7,B,Cody), (6,C,Ego), (5,B,Fink), (7,A,Job), (5,A,Klen), (7,B,Mold), (5,A,Nub).

1.

Reflexivita: $\forall a \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}a$. Platí.

Důkaz.

$a \in \mathbb{Z}$ libovolné.

$$a - a = 0.$$

$$0 \equiv 0(\text{mod } 2).$$

a tedy: $a \equiv a(\text{mod } 2) \implies a\mathcal{R}a$. ■

Symetrie: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a)$. Platí.

Důkaz.

$a, b \in \mathbb{Z}$ libovolné.

předpoklad: $a \equiv b(\text{mod } 2) \vee a \equiv b(\text{mod } 3)$.

$$a - b = 2k \vee a - b = 3l, \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad / \cdot (-1).$$

$$b - a = 2(-k) \vee b - a = 3(-l), \quad (-k), (-l) \in \mathbb{Z}.$$

tedy: $(b \equiv a(\text{mod } 2) \vee b \equiv a(\text{mod } 3)) \implies b\mathcal{R}a$. ■

Antisymetrie: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$. Platí.

Důkaz.

$a, b \in \mathbb{Z}$ libovolné.

předpoklad: $(a \equiv b(\text{mod } 2) \vee a \equiv b(\text{mod } 3)) \wedge (b \equiv a(\text{mod } 2) \vee b \equiv a(\text{mod } 3))$.

$$a - b = -(b - a).$$

$$(a - b = 2k \vee a - b = 3l) \wedge (b - a = 2(-k) \vee b - a = 3(-l)), \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$(a - b = 2k \wedge b - a = 2(-k)) \vee (a - b = 2k \wedge b - a = 3(-l)) \vee$$

$$(a - b = 3l \wedge b - a = 2(-k)) \vee (a - b = 3l \wedge b - a = 3(-l)).$$

$$a - b = 0 \implies a = b. \quad \blacksquare$$

Tranzitivita: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \implies a\mathcal{R}c$. Neplatí.

Důkaz.

p-p:

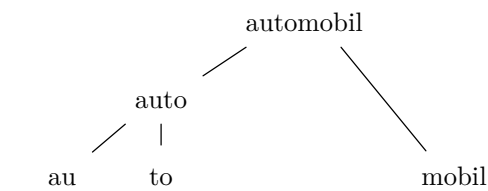
$$a = 1, b = 5, c = 14.$$

$1\mathcal{R}5 \wedge 5\mathcal{R}14$, ale neplatí $1 = 14$. ■

2.

a)

$$M = \{\text{au, auto, automobil, to, mobil}\}$$



Obrázek 1: Hassův diagram pro množinu M

b)

Největší prvek: automobil

Maximum: automobil

Nejmenší prvek: au, to, mobil

Minimum: au, to, mobil

c)

$$\text{au} \leq_L \text{to} \leq_L \text{mobil} \leq_L \text{auto} \leq_L \text{automobil}.$$

3.

(7,B,Mold)

|

(7,B,Cody)

|

(7,A,Job)

|

(6,C,Ego)

|

(5,B,Fink)

|

(5,A,Nub)

|

(5,A,Klen)

|

(5,A,Alda)

Obrázek 2: Hassův diagram pro množinu A