Pátá samostatná práce

Jakub Adamec
B4B01JAG

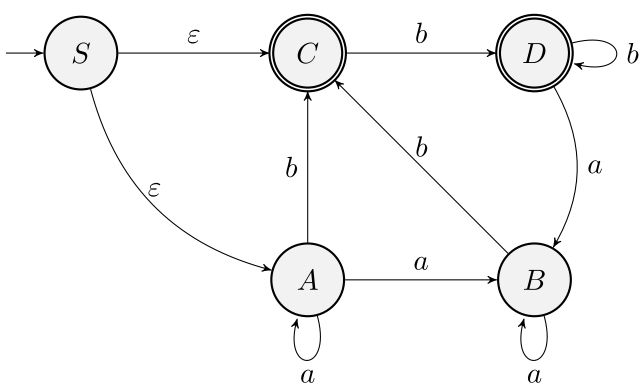
2. prosince 2024

Příklad 8.7. K automatu M zkonstruujte gramatiku typu 3, která generuje jazyk $L(M)$, kde M je dán tabulkou

	a	b
$\rightarrow A$	$\{A, B\}$	$\{C\}$
B	$\{B\}$	$\{C\}$
$\leftrightarrow C$	$\emptyset$	$\{D\}$
$\leftarrow D$	$\{B\}$	$\{D\}$

Protože automat M má dva počátčení stavy, vytvoříme nový automat M' takto:

	ε	a	b
$\rightarrow S$	$\{A, C\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
A	$\emptyset$	$\{A, B\}$	$\{C\}$
B	$\emptyset$	$\{B\}$	$\{C\}$
$\leftarrow C$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{D\}$
$\leftarrow D$	$\emptyset$	$\{B\}$	$\{D\}$



Nyní hledaná gramatika je $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a

$$
\begin{aligned}
P: S &\rightarrow A \mid C \\
A &\rightarrow aA \mid aB \mid bC \\
B &\rightarrow aB \mid bC \\
C &\rightarrow bD \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow aB \mid bD \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Příklad 8.8. Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = \{0^i 1^j; 0 \leq i \leq j\}$. Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

Hledaná gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a $S \to 0S1 \mid S1 \mid \varepsilon$.

zdůvodnění:

1. $L \subseteq L(\mathcal{G})$, tj. každé slovo $0^i 1^j$, $0 \leq i \leq j$, gramatika $\mathcal{G}$ vygeneruje.

   $S \xRightarrow{S \to 0S1}^{(i)} 0^i S 1^i \xRightarrow{S \to S1}^{(j-i)} 0^i S 1^{j-i} 1^i \xRightarrow{S \to \varepsilon} 0^i 1^j$. □

2. $L(\mathcal{G}) \subseteq L$, tj. $\mathcal{G}$ nevygeneruje nic navíc.

   Uvažujme derivaci $S \Rightarrow^\star u$. Pak poslední použité pravidlo musí být $S \to \varepsilon$. Indukcí podle počtu kroků dokážeme, že $S \Rightarrow^{(n)} 0^i S q^j$, kde $i \leq j$.

   Základní krok. $n = 1$, $S \Rightarrow 0S1$ nebo $S \Rightarrow S1$ a $S1 = 0^0 S 1^1$, kde $i \leq j$.
   Indukční krok. předpokládejme, že každá derivace o n krocích vygeneruje $S \Rightarrow^{(n)} 0^i S 1^j$, $i \leq j$.

   Pak derivace o $n+1$ krocích je $\begin{cases} \mathrm{S} \Rightarrow^{(n)} 0^i S 1^j \xRightarrow{S \to 0S1} 0^{i+1} S 1^{j+1} \text{ a } i+1 \leq j+1. \\ \mathrm{S} \Rightarrow^{(n)} 0^i S 1^j \xRightarrow{S \to S1} 0^i S 1^{j+1} \text{ a } i \leq j+1. \end{cases}$

   Tedy z S je možné vygenerovat pouze $0^i S 1^j, 0 \leq i \leq j$, a tedy S $\Rightarrow^\star 0^i S 1^j \xRightarrow{S \to \varepsilon} 0^i 1^j, 0 \leq i \leq j$.

   □