Sbírka řešených příkladů

B4B01JAG

14. ledna 2025

Obsah

1 První cvičení

1.1 Charakterizace jazyka

Jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ je dán induktivně

$$\begin{aligned} \varepsilon &\in L \\ u \in L &\implies aub \in L \\ u \in L &\implies bua \in L \\ u, v \in L &\implies uv \in L \end{aligned}$$

Charakterizujte slova jazyka L, tj. najděte vlastnost $\mathcal{V}$ takovou, že $L = \{u \mid \text{slovo } u \text{ má vlastnost } \mathcal{V}\}$. Své tvrzení dokažte.

$L_1 = \{w \mid w \in \{a, b\}^\star, |w|_a = |w|_b\}$.

Důkaz:

a) $L \subseteq L_1$

1. $|\varepsilon|_a = 0 = |\varepsilon|_b$
2. $|u|_a = |u|_b \Rightarrow |aub|_a = |u|_a + 1 = |aub|_b = |u|_b + 1$

b) $L_1 \subseteq L$

1. $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$, $\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon \in L$.
2. Každé slovo $w \in L_1$ lze rozdělit na následující případy, které umožňují jeho postupné rozdělení až na prázdné slovo ε:

   Možnost 1: w začíná a a končí b,
   Možnost 2: w začíná b a končí a,
   Možnost 3: w začíná a končí tím stejným písmenem (a nebo b).

   Možnost 1: $w = bua$. Rozdělíme slovo w na $w = bua$, kde u je prostřední část slova splňující $|u|_a = |u|_b$. Podle definice pravidel L, pokud $u \in L$, pak $aub \in L$.

   Možnost 2: $w = aub$. Rozdělíme slovo w na $w = aub$, kde u je prostřední část slova splňující $|u|_a = |u|_b$. Podle definice pravidel L, pokud $u \in L$, pak $bua \in L$.

   Možnost 3: $w = axa$**,** $w = bxb$. Předpokládejme, že w začíná i končí znakem a. Procházíme a zleva doprava a hledáme první b, kde počet znaků a od začátku do tohoto b je stejný jako počet znaků b (včetně tohoto b). Toto b rozděluje w na dvě části: $w = uv$, kde u obsahuje první část w (od prvního znaku do tohoto b včetně), kde $|u|_a = |u|_b$, a v obsahuje druhou část slova w, kde $|v|_a = |v|_b$. Podle pravidel L, pokud $u, v \in L$, pak $uv \in L$.
   Analogicky postupujeme pro slovo začínající i končící znakem b.

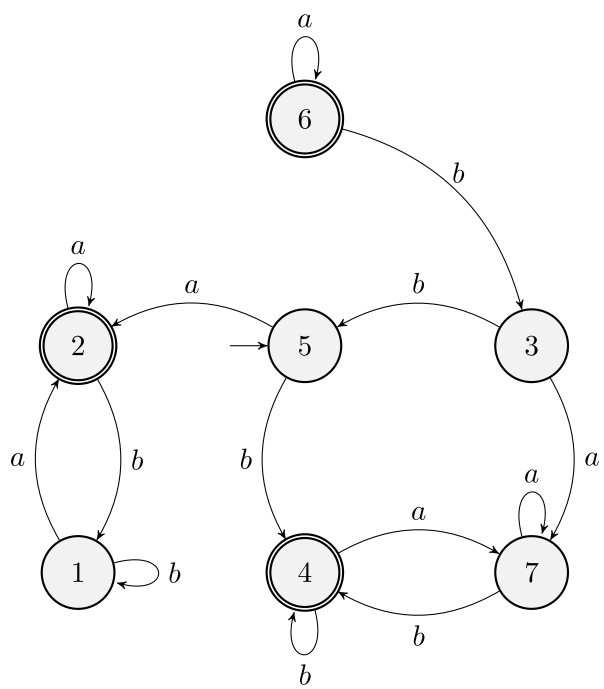
1.2 Práce na konečném automatu

Je dán konečný automat M tabulkou

	a	b
1	2	1
$\leftarrow$ 2	2	1
3	7	5
$\leftarrow$ 4	7	4
$\rightarrow$ 5	2	4
$\leftarrow$ 6	6	3
7	7	4

1. Nakreslete stavový diagram automatu.
2. Simulujte krok po kroku výpočet automatu nad slovem *bbaaab*.
3. Z induktivní definice odvoďte $\delta^\star(2, bab)$.

1.

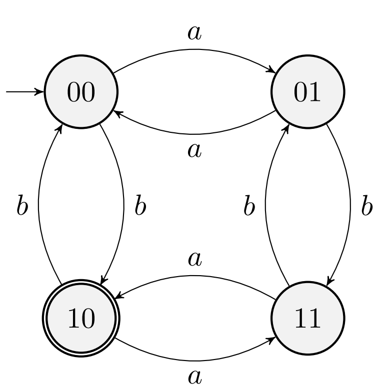


2. $\rightarrow 5 - 4 - 4 - 7 - 7 - 7 - 4 \rightarrow$

3. $\delta^\star(2, bab) = \delta(\delta^\star(2, ba), b) = \delta(\delta(\delta(2, b), a), b)$.

1.3 Posuvný registr

Navrhněte automat modelující posuvný registr, který provádí celočíselné dělení 4 binárně zadaného čísla (číslo se čte od nejvyššího řádu). O jaký typ automatu se jedná?



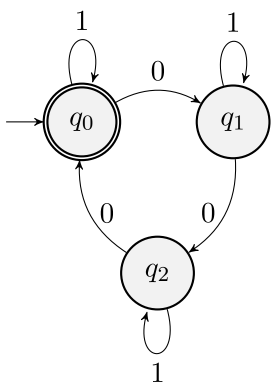
Jedná se o *Mealyho automat*

$$M = (Q, \Sigma, Y, \delta, q_o, \lambda).$$

1.4 Stavové diagramy pro DFA

Pro uvedené automaty nakreslete stavový diagram. Najděte vlastnost $\mathcal{V}$, která charakterizuje slova přijímaná daným automatem. Dokažte, že automat přijímá právě všechna slova s vlastností $\mathcal{V}$.

	0	1
$\leftrightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_1
q_2	q_0	q_2

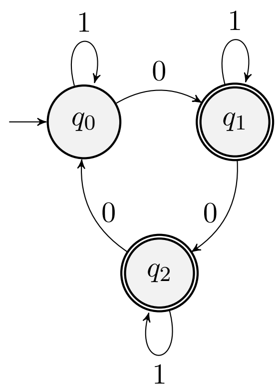


$w \in L$ iff $|w|_0$ je dělitelný 3.

Invarianty:

- q_0: `in`, `out`, $|w|_0 = 3k$,
- q_1: $|w|_0 = 3k + 1$,
- q_2: $|w|_0 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
$\leftarrow q_1$	q_2	q_1
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2

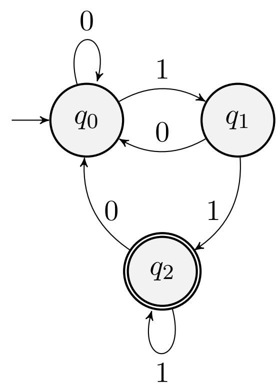


$w \in L$ iff $|w|_0$ není dělitelný 3.

Invarianty:

- q_0: `in`, $|w|_0 = 3k$,
- q_1: `out`, $|w|_0 = 3k + 1$,
- q_2: `out`, $|w|_0 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2



$w \in L$ iff w končí 11.

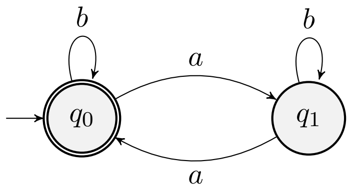
Invarianty:

- q_0: `in`, končí 0,
- q_1: končí 1,
- q_2: `out`, končí 11.

2 Druhé cvičení

2.1 Návrh DFA dle jazyka

Je dán jazyk $L = \{w \mid \text{počet } |w|_a \text{ je sudý}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Navrhněte konečný automat přijímající jazyk L a dokažte, že skutečně tento jazyk přijímá.



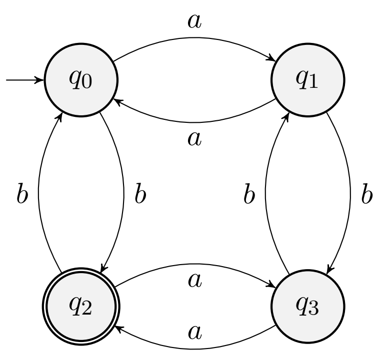
Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: $|w|_a = 2k$, `in`, `out`,
- q_1: $|w|_a = 2k + 1$,

pro $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Návrh DFA dle jazyka

Je dán jazyk $L = \{w \mid \text{počet } |w|_a \text{ je sudý a počet } |w|_b \text{ je lichý}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Navrhněte konečný automat přijímající jazyk L a dokažte, že skutečně tento jazyk přijímá.



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: $|w|_a = 2k$, $|w|_b = 2k$, `in`,
- q_1: $|w|_a = 2k + 1$, $|w|_b = 2k$,
- q_2: $|w|_a = 2k$, $|w|_b = 2k + 1$, `out`,
- q_3: $|w|_a = 2k + 1$ $|w|_b = 2k + 1$,

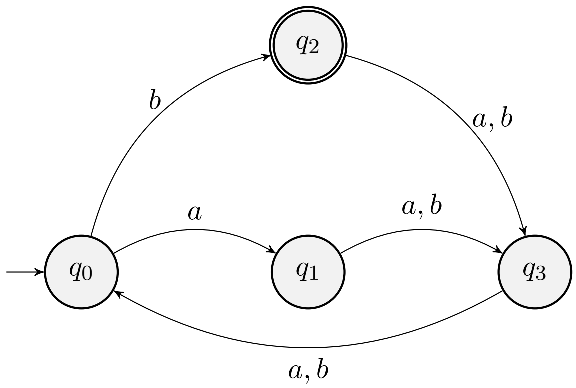
pro $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Návrh DFA dle jazyka

Pro daný jazyk L navrhněte koečný automat, který tento jazyk přijímá. O automatu ukažte, že opravdu přijímá daný jazyk.

a) $\Sigma = \{a, b\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, která končí b a mají délku $3k + 1$.
b) $\Sigma = \{0, 1\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, která obsahují podslovo 0101.
c) $\Sigma = \{0, 1\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, jejichž každé podslovo délky 3 obsahuje znak 0.

a)

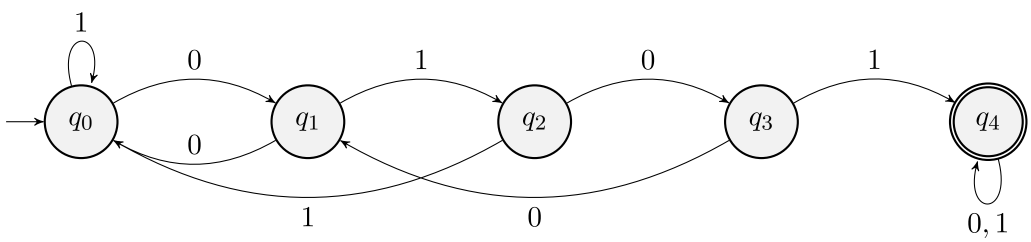


Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: končí a, b, $|w| = 3k$, `in`,
- q_1: končí a, $|w| = 3k + 1$,
- q_2: končí b, $|w| = 3k + 1$, `out`,
- q_3: končí a, b, $|w| = 3k + 2$,

pro $k \in \mathbb{Z}$.

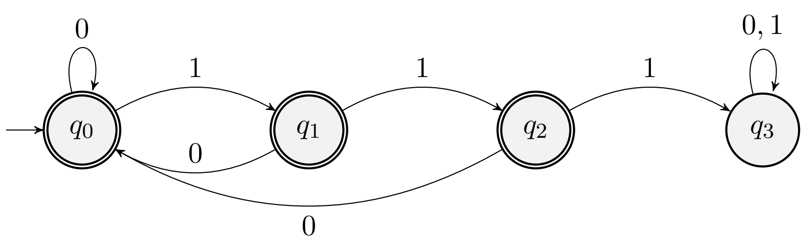
b)



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: neobsahuje 0101, `in`,
- q_1: obsahuje 0,
- q_2: obsahuje 01,
- q_3: obsahuje 010,
- q_4: obsahuje 0101, `out`.

c)



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: končí 0, neobsahuje 111, `in`, `out`,
- q_1: končí 1, neobsahuje 111, `out`,
- q_2: končí 11, neobsahuje 111, `out`,
- q_3: obsahuje 111.

2.4 Nerodova věta a Pumping lemma

Pomocí Nerodovy věty a Pumping lemmatu dokažte, že jazyk $L = \{0^i 1^j 0^k \mid 0 \leq i < j < k\}$ není regulární.

Definice **Pumping lemmatu.** Když L je regulární, tak existuje $n \in L, n \geq 1$, takové, že každé $u \in L$, $|w| > n$ je možné rozložit na 3 slova splňující:

1) $|xw| \leq n$
2) $w \neq \varepsilon$
3) $xw^i y \in L, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Důkaz: Kdyby L byl regulární, tak existuje n s vlastnostmi z Pumping lemma.

Zvolíme $u = 0^n 1^{n+1} 0^{n+2}$.

Pak 1) vlastnost říká, že $xw = 0^l, l \leq n$. Zároveň musí platit 2), tedy $w = 0^k, 1 \leq k \leq l$.

Když teď napumpujeme $xw^i y$, například $i = 2$, dostaneme $xw^2 y = 0^{n+k} 1^{n+1} 0^{n+2} \notin L$.

Tedy L není regulární. ∎

Definice **Nerodovy věty.** L je regulární iff existují ekvivalence T na $\Sigma^\star$ taková, že:

1) L je sjednocení některých tříd T
2) pokud uTv, tak $uwTvw$ pro každé $w \in \Sigma^\star$
3) T má konečný počet tříd

Důkaz: Kdyby existovala T.

$1, 1^2, 1^3, ..., 1^i, ..., 1^n, ... = \{1^j \mid j \geq 1\}$ je nekonečná posloupnost 0 a 1.

T musí mít konečně mnoho tříd, proto musí existovat $i > j, i \neq j \wedge 1^i T 1^j$.

Zvolíme $w = 0^{j+1}$.

Pak podle vlastnosti 2) $\underbrace{1^i 0^{j+1}}_{\substack{i \geq j+1 \\ \notin L}} T \underbrace{1^j 0^{j+1}}_{\substack{j < j+1 \\ \in L}}$.

Tedy L není regulární. ∎

3 Třetí cvičení

3.1 Nerodova věta a Pumping lemma

Pomocí Nerodovy věty a pomocí Pumping lemmatu dokažte, že jazyk $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$ není regulární.

Definice **Nerodovy věty.** L je regulární iff existují ekvivalence T na $\Sigma^\star$ taková, že:

1) L je sjednocení některých tříd T
2) pokud uTv, tak $uwTvw$ pro každé $w \in \Sigma^\star$
3) T má konečný počet tříd

Důkaz: Kdyby existovala T na $\{0,1\}^\star$.

$1, 1^2, 1^3, ..., 1^i, ..., 1^n, ... = \{1^j \mid j \geq 1\}$ je nekonečná posloupnost z $\{0,1\}$.

T má konečně mnoho tříd, tudíž $0^i T 0^j$ pro nějaké $i \neq j, i > j$.

Protože platí 2), tak $0^i w T 0^j w$ pro $w \in \{0,1\}^\star$.

Zvolme $w = 1^{i-1}$. Pak $\underbrace{0^i 1^{i-1}}_{\substack{i \geq i-1 \\ \in L}} T \underbrace{0^j 1^{i-1}}_{\substack{i-1 \geq j \\ \notin L}}$. Tedy L není regulární. ■

Definice **Pumping lemmatu.** Když L je regulární, tak existuje $n \in L, n \geq 1$, takové, že každé $u \in L$, $|w| > n$ je možné rozložit na 3 slova splňující:

1) $|xw| \leq n$
2) $w \neq \varepsilon$
3) $xw^i y \in L, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Důkaz: Kdyby L byl regulární, tak existuje n s vlastnostmi z Pumping lemma.

Zvolíme $u = 0^{n+1} 1^n$.

Kdyby $u = xwy$, tak 1) vlastnost říká, že $xw = 0^l, l \leq n$. Zároveň musí platit 2), tedy $w = 0^k, 1 \leq k \leq l$. Když teď napumpujeme $xw^i y$, například $i = 0$, dostaneme $xw^0 y = 0^{n+1-k} 1^n \notin L$.

Tedy L není regulární. ■

3.2 Nalezení slova rozlišující stavy

Je dán DFA tabulkou:

	a	b
$\leftrightarrow 0$	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

Najděte slovo nejkratší délky, jestliže existuje, které rozliší

a) stavy 3 a 5.
b) stavy 2 a 4.

To, že slovo u rozliší dva stavy znamená, že přechodová funkce při práci nad slovem u převede jeden ze stavů do koncového stavu a druhý do stavu, který není koncový.

a) $\delta(3, a) = 0, \delta(5, a) = 0 \implies \delta^\star(3, au) = \delta^\star(5, au)$. Slovo nezačíná a.

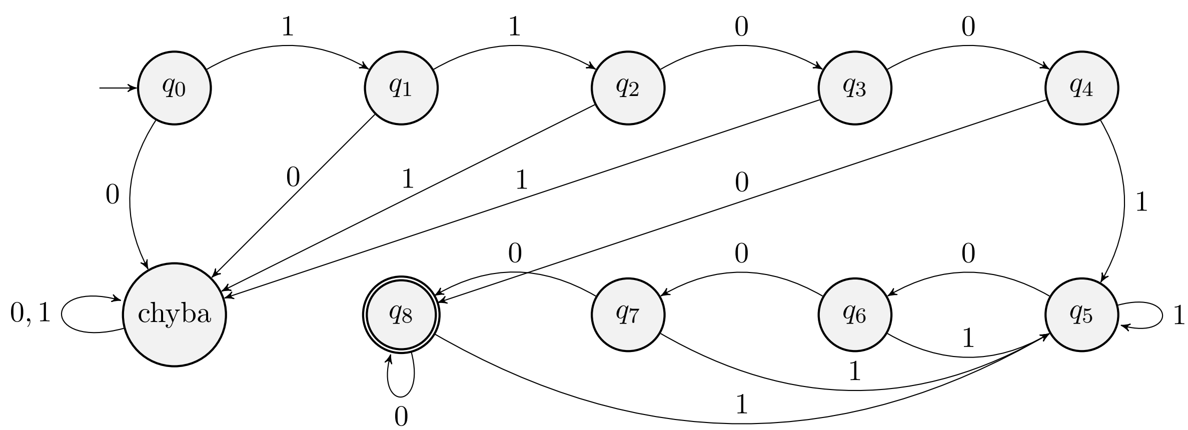
$\delta(3, b) = 2, \delta(5, b) = 3.$

$$\left.\begin{array}{l} \delta^\star(3, ba) = \delta(2, a) = 4 \notin F \\ \delta^\star(5, ba) = \delta(3, a) = 0 \in F \end{array}\right\} \implies u = ba$$

b) $\delta(2, a) = 4, \delta(4, a) = 2$. $\delta(2, b) = 5, \delta(4, b) = 5$. Tyto stavy nelze rozlišit.

3.3 Návrh a redukce DFA podle jazyka

Navrhněte DFA, který přijímá jazyk L skládající se ze všech slov nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$, která začínají 1100 a končí 000. Navržený automat redukujte.



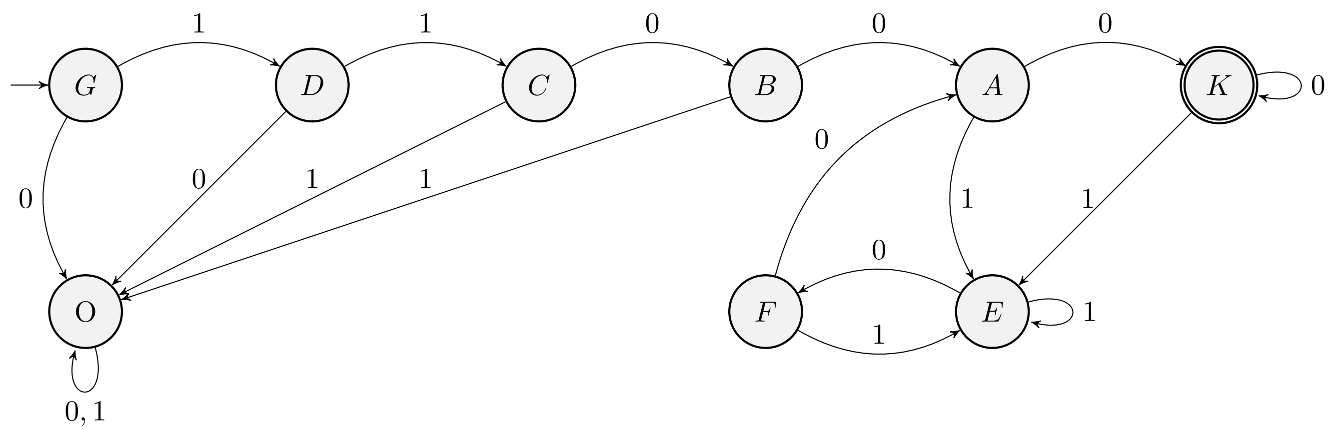
Invarianty:

- q_0: `in`,
- q_1: začíná 1, končí 1,
- q_2: začíná 11, končí 11,
- q_3: začíná 110, končí 110,
- q_4: začíná 1100, končí 1100,
- q_5: začíná 1100, končí 1,
- q_6: začíná 1100, končí 10,
- q_7: začíná 1100, končí 100,
- q_8: začíná 1100, končí 000, `out`,
- chyba: nezačíná 1100.

Redukce podmnožinovou konstrukcí:

	0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$	0	1	$\sim_4$	0	1	$\sim_5$	0	1	$\sim_6$
$\rightarrow q_0$	ch	1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	G	O	D	G
q_1	ch	2	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	D	O	C	D	O	C	D
q_2	3	ch	O	O	O	O	O	O	O	B	O	C	B	O	C	B	O	C	B	O	C
q_3	4	ch	O	O	O	O	A	O	B	A	O	B	A	O	B	A	O	B	A	O	B
q_4	8	5	O	K	O	A	K	O	A	K	O	A	K	C	A	K	E	A	K	E	A
q_5	6	5	O	O	O	O	O	O	O	B	O	C	B	C	E	F	E	E	F	E	E
q_6	7	5	O	O	O	O	A	O	B	A	O	B	A	C	F	A	E	F	A	E	F
q_7	8	5	O	K	O	A	K	O	A	K	O	A	K	C	A	K	E	A	K	E	A
$\leftarrow q_8$	8	5	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	C	K	K	E	K	K	E	K
ch	ch	ch	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Redukovaný automat:



3.4 Srovnání dvou DFA automatů

Jsou dány dva automaty. Rozhodněte, zda jsou ekvivalentní, tj. zda přijímají stejný jazyk.

M_1 :

	a	b
$\leftrightarrow 0$	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
$\leftarrow 4$	6	1
5	5	1
$\leftarrow 6$	4	2
7	7	0

M_2 :

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
$\leftrightarrow G$	G	F
H	A	G

Nejdříve odstraníme nedosažitelné vztahy a pak provedeme redukci.

Odstranění nedosažitelných vztahů:

M_1 :

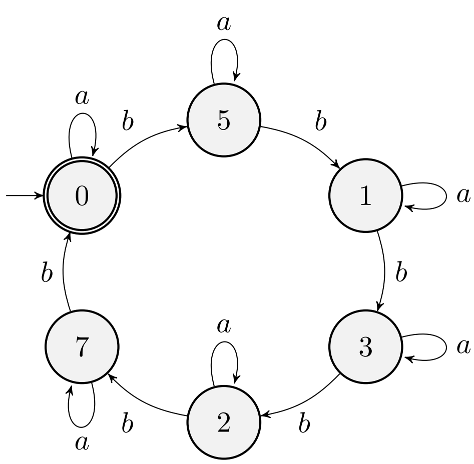
	a	b
$\leftrightarrow 0$	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
5	5	1
7	7	0

M_2 :

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
$\leftrightarrow G$	G	F
H	A	G

A teď zredukovat oba automaty.

M_1:



M_1 je již redukovaný.

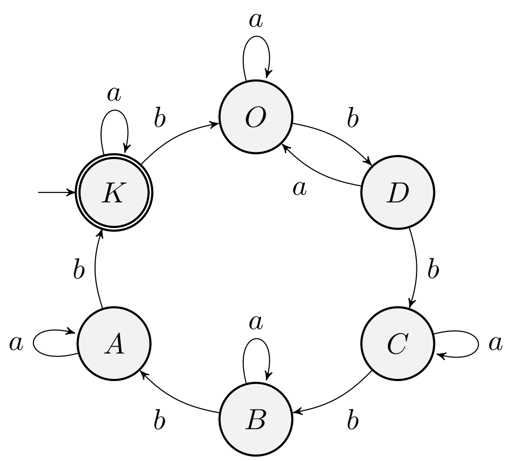
M_2:

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$	a	b	$\sim_5$
A	H	G	O	O	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A
B	B	A	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B
C	E	D	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	O	D	C	E
D	D	B	O	O	O	O	O	O	O	O	B	C	C	B	C	C	B	C
E	C	D	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	D	O	C	D
F	F	E	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	O
$\leftrightarrow G$	G	F	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K
H	A	G	O	O	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A

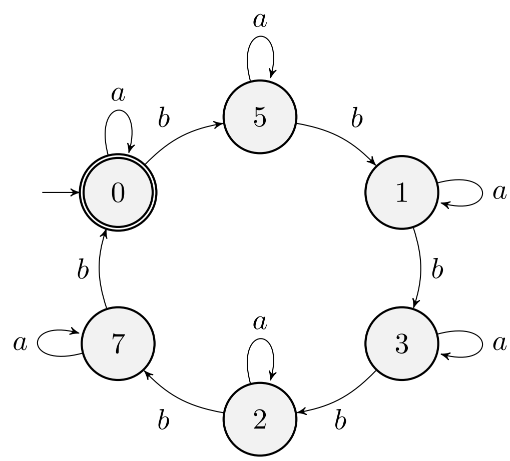
Protože má každý řádek svou vlastní třídu, M_2 je již redukovaný.

Změníme labely M_1 tak, aby odpovídaly redukci M_2.

M_2:



M_1:



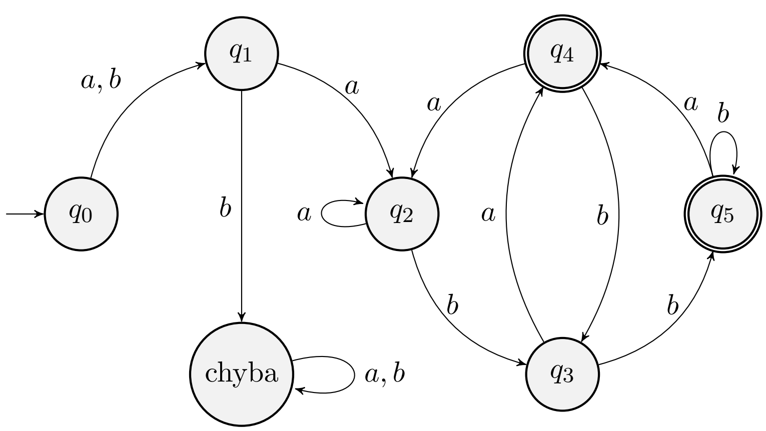
Nejsou ekvivalnetní - M_1 přijme např. slovo *bbabbbb*, které M_2 nepřijme.

3.5 Návrh a redukce DFA podle jazyka

Navrhněte DFA, který přijímá L nad abecedou $\{a, b\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že

- druhý znak slova w je a,
- předposlední znak slova w je b,
- $|w| \geq 3$.

Výsledný DFA redukujte.



Invarianty:

- q_0: $|w| < 3$, `in`,
- chyba: druhý znak je b,
- q_1: $|w| < 3$, druhý znak je ε, předposlední znak je ε,
- q_2: $|w| < 3$, druhý znak je a, předposlední znak je a, b,
- q_3: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je a,
- q_4: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je b, končí ba, `out`,
- q_5: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je b, končí bb, `out`.

Redukce podmnožinovou konstrukcí:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	D	E
	q_1	q_2	Chyba	O	O	O	O	O	O	O	C	O	D	C	O	D
	q_2	q_2	q_3	O	O	O	O	O	A	C	C	A	C	C	A	C
	q_3	q_4	q_5	O	K	K	A	B	K	A	B	K	A	B	K	A
$\leftarrow$	q_4	q_2	q_3	K	O	O	B	O	A	B	C	A	B	C	A	B
$\leftarrow$	q_5	q_4	q_5	K	K	K	K	B	K	K	B	K	K	B	K	K
	Chyba	Chyba	Chyba	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Protože každý řádek má svou vlastní třídu, původní DFA je již redukovaný.

4 Čtvrté cvičení

4.1 Sestrojení DFA z NFA

Pro dané NFA sestrojte podmnožinovou konstrukcí DFA a výsledek redukujte.

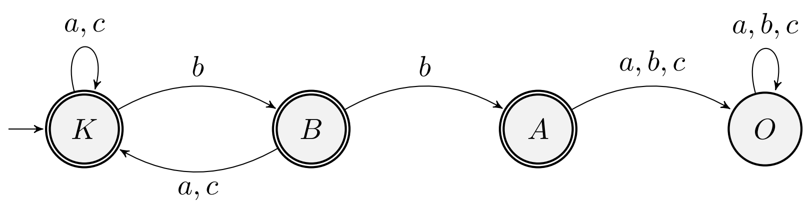
M_1 :

	a	b	c
$\leftrightarrow 1$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
$\leftarrow 2$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$
$\leftarrow 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Všimněte si, že v automatu M_1 jsou všechny stavy koncové. Co z toho lze usoudit o jazyku, které je automatem přijímán?

		a	b	c	$\sim_0$	a	b	c	$\sim_1$	a	b	c	$\sim_2$	a	b	c	$\sim_3$
$\leftrightarrow$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	B	K
$\leftarrow$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	K	K	K	K	K	K	A	K	B	K	A	K	B
$\leftarrow$	$\{3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	K	O	O	O	A	O	O	O	A	O	O	O	A
$\leftarrow$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Automat se redukcí nezmění.



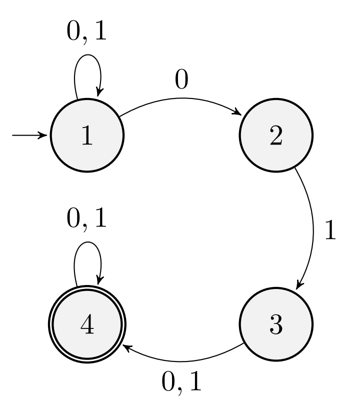
Automat nepřijíme slova začínající sekvencí bb následovanou libovolným dalším znakem.

4.2 Sestrojení DFA z NFA

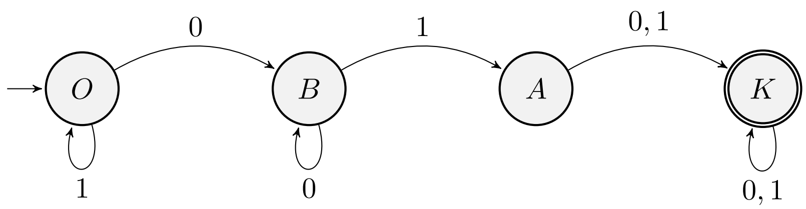
NFA M je dán tabulkou níže. Nakreslete jeho stavový diagram a podmnožinovou konstrukcí sestrojte DFA, který přijímá stejný jazyk. DFA zredukujte.

M :

	0	1
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
2	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\{4\}$	$\{4\}$
$\leftarrow 4$	$\{4\}$	$\{4\}$



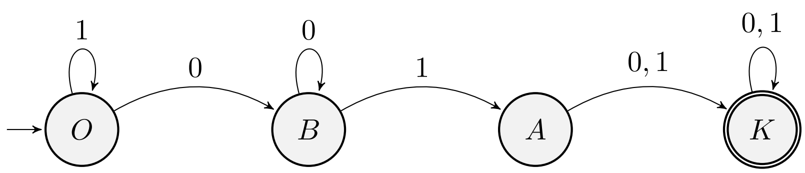
		0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$
$\rightarrow$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	O	O	O	O	K	K	K	K	K	O
	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	O	O	O	O	K	K	K	K	K	B
	$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	O	K	K	A	K	K	A	K	K	A
$\leftarrow$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$	$\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K



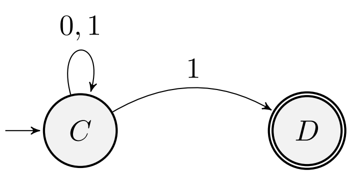
4.3 Návrh NFA dle jazyka a redukovaného DFA

Navrhněte NFA přijímající jazyk $L = L_1 \cup L_2$, kde $L_1 = L(M)$, kde M je automat z 4.2, a $L_2 = \{u \mid u \text{ končí } 1\}$. K tomuto NFA zkonstruujte DFA přijímající stejný jazyk. DFA redukujte.

L_1 :



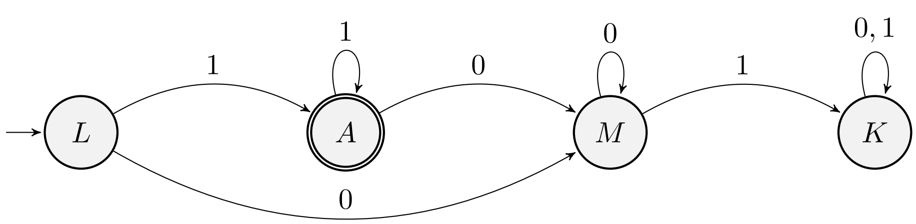
L_2:



Podmnožinová konstrukce:

		0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$
$\rightarrow$	$\{O,C\}$	$\{B,C\}$	$\{O,C,D\}$	O	O	K	O	O	A	L	M	A	L
$\rightarrow$	$\{B,C\}$	$\{B,C\}$	$\{A,C,D\}$	O	O	K	O	O	K	M	M	K	M
	$\{O,C,D\}$	$\{O,C,D\}$	$\{O,C,D\}$	K	O	K	A	O	A	A	M	A	A
$\leftarrow$	$\{A,C,D\}$	$\{K,C\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$	$\{K,C\}$	$\{K,C,D\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$	$\{K,C,D\}$	$\{K,C,D\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

Výsledný redukovaný DFA:



4.4 Srovnání dvou NFA automatů

Jsou dány dva ε-NFA. Rozhodněte, zda přijímají stejný jazyk. Pro oba ε-NFA sestrojte redukované DFA.

M_1 :

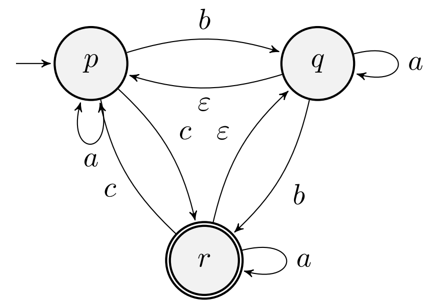
	ε	a	b	c
$\to p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$\leftarrow r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

M_2 :

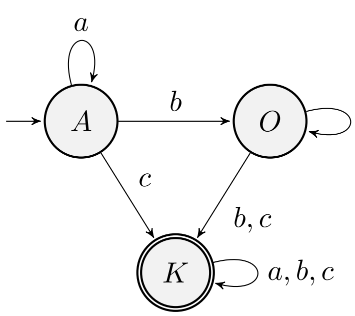
	ε	a	b	c
$\to p$	$\{q,r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{p,q\}$
$\leftarrow r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

M_1:

	ε	a	b	c	ε-uzávěry
$\to p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varepsilon\text{-uz}(p) = \{p\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\varepsilon\text{-uz}(q) = \{p,q\}$
$\leftarrow r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\varepsilon\text{-uz}(r) = \{p,q,r\}$



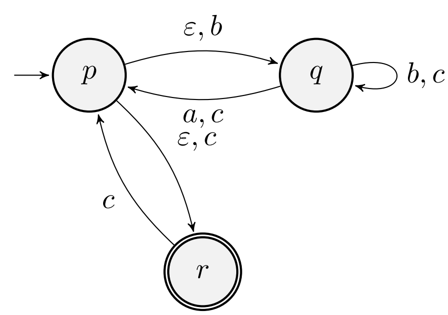
Redukovaný DFA a podmnožinová konstrukce pro M_1:



		a	b	c	$\sim_0$	a	b	c	$\sim_1$
$\to$	$\{p\}$	$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	O	O	O	K	A
	$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	O	O	K	K	O
$\leftarrow$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	K	K	K	K	K

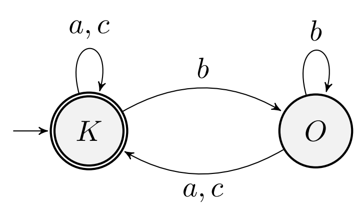
M_2:

	ε	a	b	c	ε-uzávěry
$\to p$	$\{q,r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varepsilon\text{-uz}(p) = \{p,q,r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{p,q\}$	$\varepsilon\text{-uz}(q) = \{q\}$
$\leftarrow r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\varepsilon\text{-uz}(r) = \{r\}$



Redukovaný DFA a podmnožinová konstrukce pro M_2:

		a	b	c	$\sim_0$
$\leftrightarrow$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	K
	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	O



Z redukovaných DFA tabulek je očividné, že M_1 a M_2 nepřijímají stejný jazyk. M_2 například přijme slovo $w = a$, zatímco M_1 takové nepřijme.

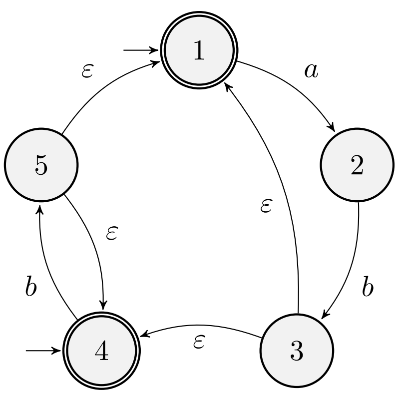
4.5 Konstrukce DFA z ε-NFA

Je dán ε-NFA. Zkonstruujte redukovaný DFA přijímající stejný jazyk jako M.

M :

	ε	a	b
$\leftrightarrow$ 1	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftrightarrow$ 4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{5\}$
5	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

ε-NFA:

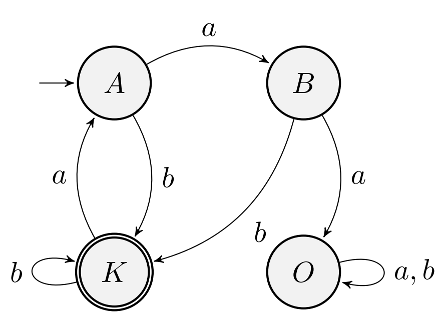


	ε	a	b	ε-uzávěry
$\leftrightarrow$ 1	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	ε-uz$(1) = \{1\}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$	ε-uz$(2) = \{2\}$
3	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	ε-uz$(3) = \{1,3,4\}$
$\leftrightarrow$ 4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{5\}$	ε-uz$(4) = \{4\}$
5	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	ε-uz$(5) = \{1,4,5\}$

Podmnožinová konstrukce:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\rightarrow$	$\{1,4\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	O	O	K	A	A	K	A	B	K	A
	$\{2\}$	$\emptyset$	$\{1,3,4\}$	O	O	K	A	O	K	B	O	K	B
$\leftarrow$	$\{1,4,5\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	K	O	K	K	A	K	K	B	K	K
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	$\{1,3,4\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	K	O	K	K	A	K	K	B	K	K

Výsledný DFA:



5 Páté cvičení

5.1 Důkaz obecné vlastnosti dvou libovolnných jazyků

Dokažte, že pro libovolné jazyky L_1 a L_2 nad stejnou abecedou platí $(L_1 \cup L_2)^\star = (L_1^\star L_2^\star)^\star$.

a) $(L_1 \cup L_2)^\star \subseteq (L_1^\star L_2^\star)$

b) $(L_1^\star L_2^\star) \subseteq (L_1 \cup L_2)^\star$

5.2 Tvorba regulárního výrazu reprezentujícího jazyk

Napište regulární výraz, který reprezentuje jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$, jestliže výraz existuje.

a) L se skládá ze všech slov, které obsahují pouze 0.
b) L se skládá ze všech slov, které obsahují přesně jednu 1.
c) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň jednu 1.
d) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň dvě 1.
e) L se skládá ze všech slov, které obsahují sudý počet 1.
f) L se skládá ze všech slov, které obsahují lichý počet 1.

Odpovědi zdůvodněte.

a) $0^\star$.
b) $0^\star 1 0^\star$.
c) $0^\star 1(0 + 1)^\star$.
d) $0^\star 1 0^\star 1(0 + 1)^\star$.
e) $(0^\star 1 0^\star 1)^\star 0^\star$.
f) $0^\star 1(0^\star 1 0^\star)^\star 0^\star$.

5.3 Hledání slov splňující různé regulární výrazy

Jazyk L_1 je reprezentován regulárním výrazem $r_1 = 0^\star 1^\star 0^\star 1^\star 0^\star$ a jazyk L_2 je reprezentován regulárním výrazem $r_2 = (01 + 10)^\star$.

a) Najděte nejkratší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.
b) Najděte nejdělší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.
c) Najděte nejkratší slovo, které leží v L_1, ale neleží v L_2.
d) Najděte nejkratší slovo, které neleží ve sjednocení $L_1 \cup L_2$.

Odpovědi zdůvodněte.

a) 01 nebo 10.
b) 01100110.
c) 0 nebo 1, protože délka $\notin L_2$.
d) 10101.

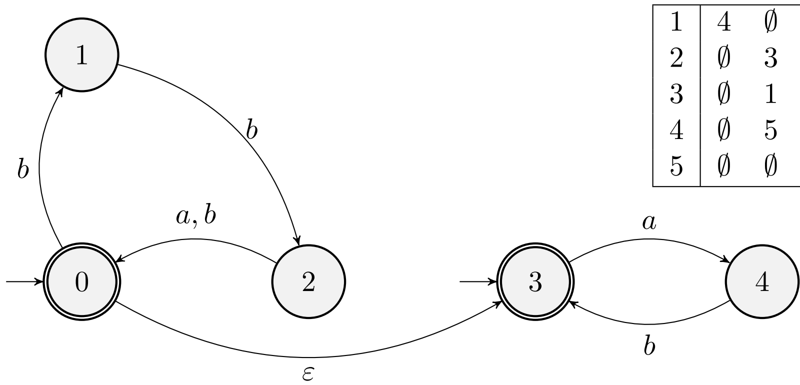
5.4 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $r = (baa + bab)^\star(ab)^\star$. K r zkonstruujte redukovaný DFA, který přijímá jazyk reprezentovaný tímto regulárním výrazem.
(Návod: Postupujte dvěma způsoby; jednak obecným postupem z přednášky, jednak rozdělením na

podvýrazy, pro které je možné najít NFA přímo a pak použitím konstrukcí z důkazů faktu, že třída regulárních jazyků je uzavřena na sjednocení, zřetězení a Kleeneho operátor.)

1. Obecný postup

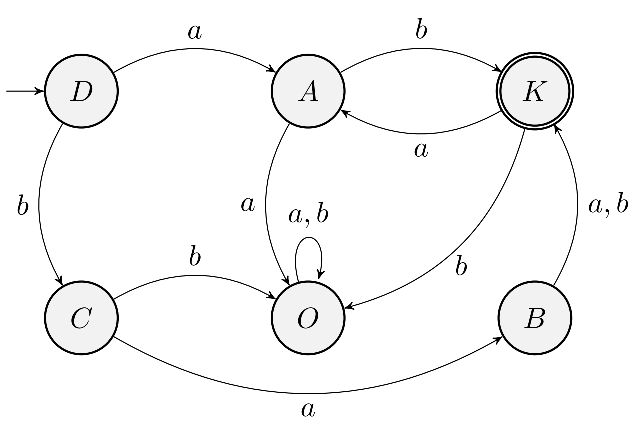
$(baa + bab) \equiv ba(a + b)$



	ε	a	b	ε uzávěry
1	4	$\emptyset$	2	ε-uz$(1) = \{1,4\}$
2	$\emptyset$	3	$\emptyset$	ε-uz$(2) = \{2\}$
3	$\emptyset$	1	1	ε-uz$(3) = \{3\}$
4	$\emptyset$	5	$\emptyset$	ε-uz$(4) = \{4\}$
5	$\emptyset$	$\emptyset$	4	ε-uz$(5) = \{5\}$

Podmnožinová konstrukce:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\leftrightarrow$	$\{1,4\}$	5	2	K	O	O	K	A	O	K	A	C	D
	5	$\emptyset$	4	O	O	K	A	O	K	A	O	K	A
	2	3	$\emptyset$	O	O	O	O	B	O	C	B	O	C
$\leftarrow$	4	5	$\emptyset$	K	O	O	K	A	O	K	A	O	K
	3	$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	O	K	K	B	K	K	B	K	K	B
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O



2. Rozdělení na podvýrazy

I. krok očíslování

$(b_1a_2a_3 + b_4a_5b_6)^\star(a_7b_8)^\star \equiv (b_1a_2(a_3 + b_4))^\star(a_5b_6)^\star$

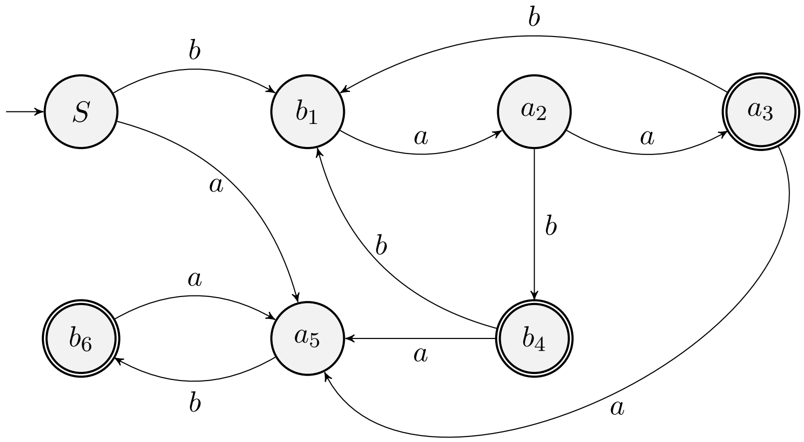
II. krok

Pro jazyk, který je přijímaný regulárním výrazem r platí:

výraz může začínat: b_1, a_5
mohou po sobě následovat: $\boldsymbol{b_1} : a_2$; $\boldsymbol{a_2} : a_3, b_4$; $\boldsymbol{a_3} : b_1, a_5$; $\boldsymbol{b4} : b_1, a_5$; $\boldsymbol{a_5} : b_6$; $\boldsymbol{b_6} : a_5$

výraz může končit: a_3, b_4, b_6
je ε v L? Ano.

III. krok

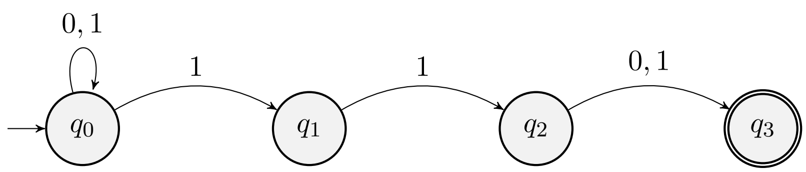


IV. podmnožinová konstrukce DFA + redukce

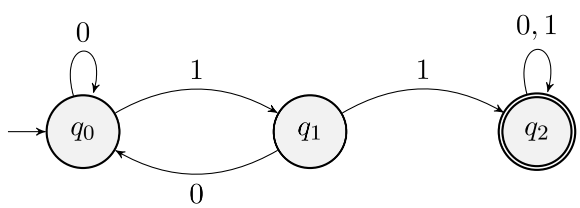
5.5 Tvorba DFA a regulárního výrazu dle jazyka

Je dán jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde $L = \{w \mid w$ neobsahuje 11 jako podslovo$\}$. Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá L. Pro jazyk L najděte regulární výraz, který ho reprezentuje (použijte úpravy grafu z přednášky).

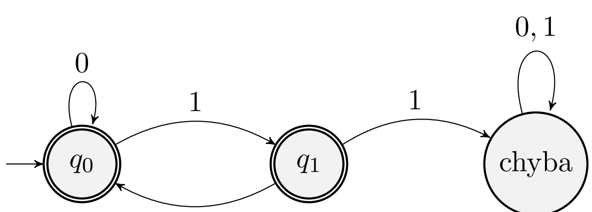
$\mathcal{L} = \{w \mid w$ **obsahuje** 11 jako podslovo$\}$.



$\mathcal{L}$ NFA:



$\mathcal{L}$ DFA:



L DFA:

6 Šesté cvičení

6.1 Návrh NFA a redukovaný DFA

Navrhněte NFA, který přijímá jazyk L nad abecedou $\{a, bc\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že

- druhý znak slova w je a,
- předpolsední znak slova w je b.

K danému NFA (není-li již DFA) sestrojte podmnožinovou konstrukcí DFA přijímající stejný jazyk. Výsledný DFA redukujte.

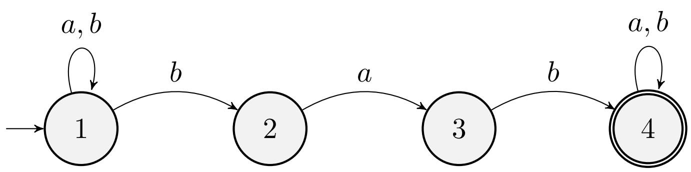
6.2 Návrh NFA a redukovaný DFA

Je dán jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$ takto:

$$L = \{w \mid w = ubabv; u, v \in \{a, b\}^\star\},$$

tj. L se skládá ze všech slov, které obsahují slovo *bab* jako podslovo. Zkonstruujte nejprve NFA N, který přijímá L. Podmnožinovou konstrukcí k N zkonstruujte DFA a ten pak zredukujte.

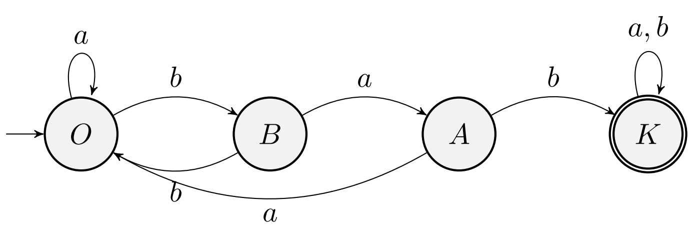
NFA:



Podmnožinová konstrukce:

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\rightarrow$ $\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	O	O	O	O	O	O	O	O	B	O
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1\}$	O	O	O	O	A	O	B	A	O	B
$\leftarrow$ $\{1,3\}$	$\{1\}$	$\{1,4\}$	O	O	K	A	O	K	A	O	K	A
$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

DFA:



6.3 Důkaz minimálního počtu stavů DFA pro jazyk

Zjistěte, jaký je minimální počet stavů DFA, který přijímá jazyk $L_n = \{u1v \mid |v| = n-1\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$. Zdůvodněte. Jak by se změnil výsledek, kdyby bylo $\Sigma = \{0, 1, 2\}$?

6.4 Pumping lemma pro doplněk

Dokažte nebo vyvraťte toto tvrzení (Pumping lemma pro doplněk):

Pro každý regulární jazyk L nad abecedou Σ (tj. jazyk, který je přijímán nějakým DFA) existuje přirozené číslo n s touto vlastností:

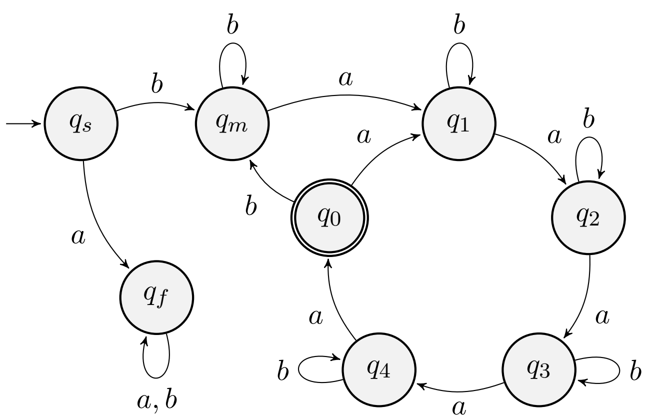
Každé slovo $u \notin L$, které je delší než n (tj. $|u| > n$) lze rozdělit na tři slova $u = xwy$, tak, že

1. $|xw| \leq n$,
2. $w \neq \varepsilon$,
3. pro každé přirozené $i = 0, 1, ...$ platí $xw^iy \notin L$.

6.5 Návrh DFA dle jazyka

Navrhněte deterministický konečný automat (DFA), který přijímá jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že $|w|_a$ je dělitelné 5, w začíná b a končí a.

O navrženém automatu ukažte, že opravdu přijímá daný jazyk.



Důkaz pomocí invariantů:

- q_s: initial
- q_m: $|w|_a = 5k, k \in \mathbb{Z}$, začíná b, končí b
- q_1: $|w|_a = 5k + 1$, začíná b
- q_2: $|w|_a = 5k + 2$, začíná b
- q_3: $|w|_a = 5k + 3$, začíná b
- q_4: $|w|_a = 5k + 4$, začíná b
- q_0: $|w|_a = 5k$, začíná b, končí a
- q_f: začíná a

6.6 Návrh DFA součinovou konstrukcí

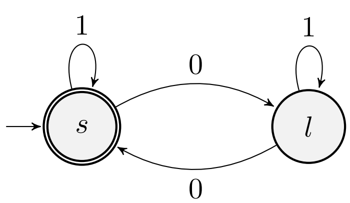
Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde

$$L = \{w \mid |w|_0 \text{ je sudé a za každým symbolem 1 je symbol 0}\}.$$

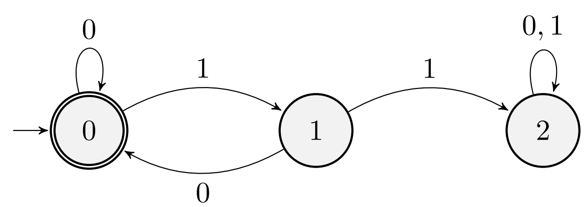
Postupujte buď součinovou konstrukcí nebo přímo. V druhém případě řádně zdůvodněte, proč M opravdu přijímá jazyk L.

Postup součinovou konstrukcí: Vytvoříme dva automaty, jeden pro pravidlo $|w|_0$ je sudé, a druhý pro "za každým symbolem 1 je symbol 0".

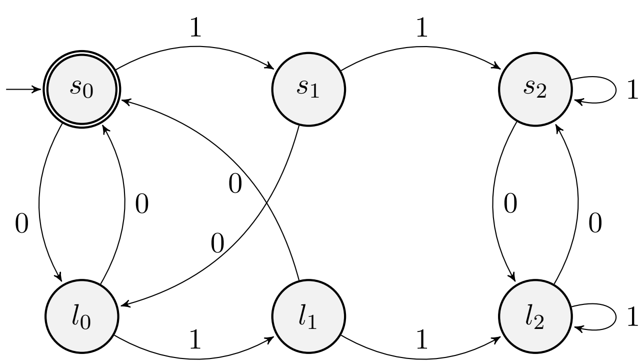
1.



2.



DFA sestavený součinovou konstrukcí dvou výše nakreslených automatů:



6.7 Návrh DFA

Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde

$$L = \{w \mid w \text{ začíná 10 nebo končí 01}\}.$$

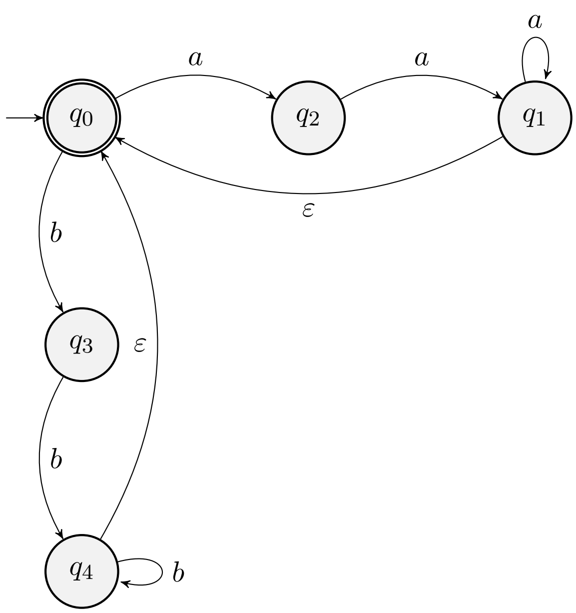
Zdůvodněte, proč M přijímá jazyk L.

7 Sedmé cvičení

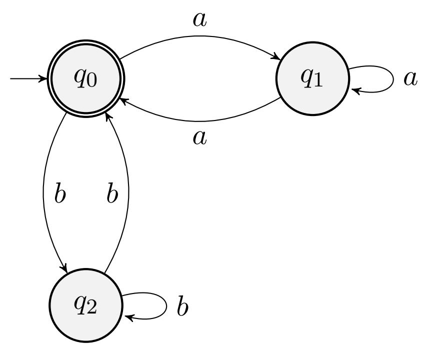
7.1 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $(\mathbf{aaa}^\star + \mathbf{bbb}^\star)^\star$. K danému výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

$(\mathbf{aaa}^\star + \mathbf{bbb}^\star)^\star$



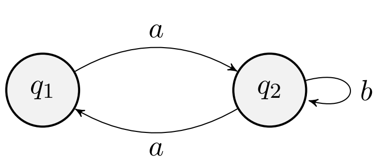
zjednodušení: výraz se dá přepsat jako
$(\mathbf{aa}^\star\mathbf{a} + \mathbf{bb}^\star\mathbf{b})^\star$



7.2 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

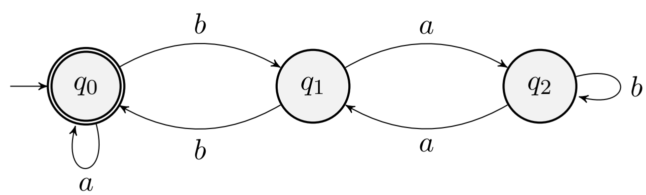
Je dán regulární výraz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star\mathbf{b})^\star$. K danému výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

rozebereme si výraz:
veprostřed máme $(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star$



a nabalujeme zbytek

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star\mathbf{b})^\star$

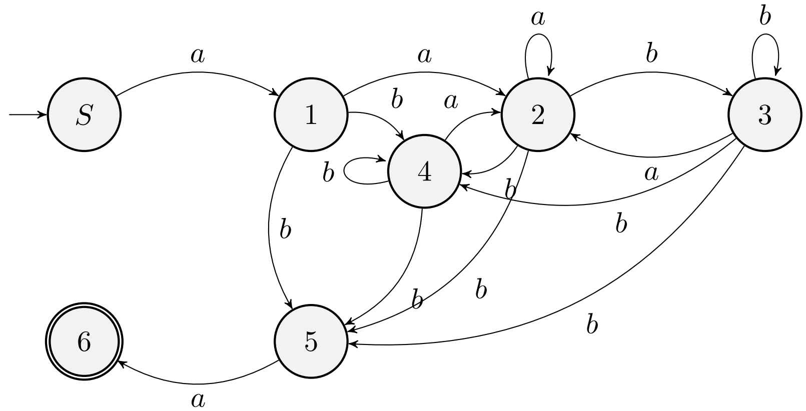


7.3 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $\mathbf{a}(\mathbf{ab}^\star + \mathbf{b})^\star\mathbf{ba}$. K danému regulární výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

$\mathbf{a}(\mathbf{ab}^\star + \mathbf{b})^\star\mathbf{ba}$:
$a_1(a_2b_3^\star + b_4)^\star b_5a_6$

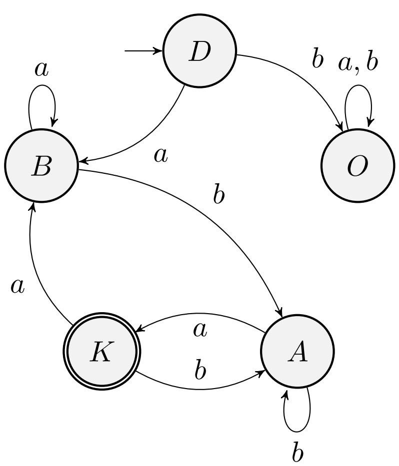
NFA		a	b
$\leftarrow$	S	1	–
	1	2	4, 5
	2	2	3, 4, 5
	3	2	3, 4, 5
	4	2	4, 5
	5	6	–
$\rightarrow$	6	–	–



podmnožinová konstrukce:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$
$\rightarrow$	$\{S\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	B	O	D	B	O	D
	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{4,5\}$	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4,5\}$	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B
	$\{4,5\}$	$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	O	K	O	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A
	$\{3,4,5\}$	$\{2,6\}$	$\{3,4,5\}$	O	K	O	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A
$\leftarrow$	$\{2,6\}$	$\{2\}$	$\{3,4,5\}$	K	O	O	K	O	A	K	B	A	K	B	A	K

DFA:



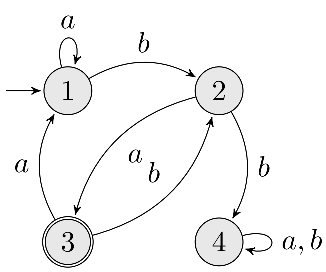
7.4 Tvorba regulárního výrazu z DFA

Pro daný DFA M vytvořte regulární výraz, který reprezentuje jazyk $L(M)$.

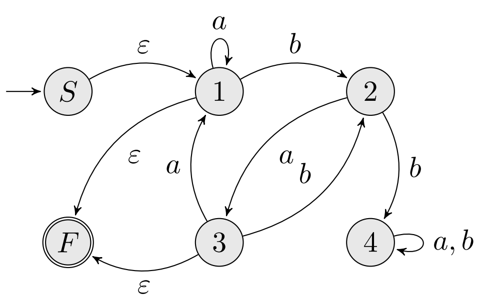
M:

		a	b
$\leftrightarrow$	1	1	2
	2	3	4
$\leftarrow$	3	1	2
	4	4	4

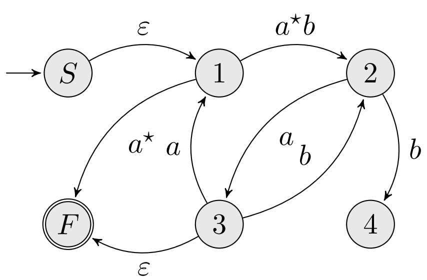
0. DFA:



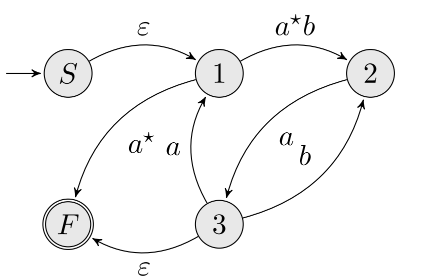
1. zavedu stavy S, F:



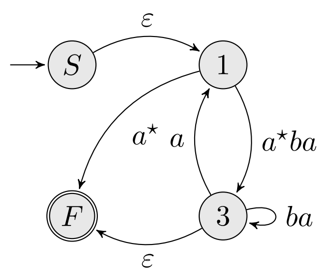
2. odstraňuji smyčky:



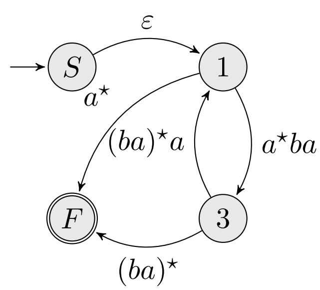
3. odstraňuji vrchol 4:



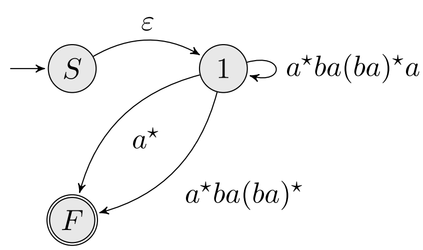
4. odstraňuji vrchol 2:



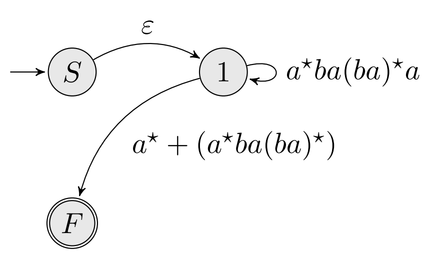
5. odstraňuji smyčky:



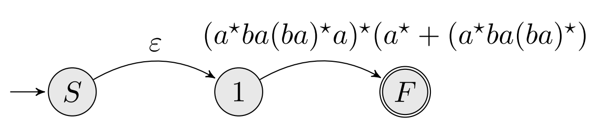
6. odstraňuji vrchol 3:



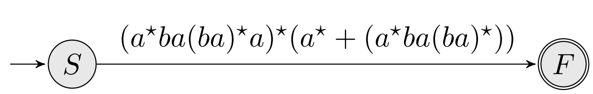
7. odstraňuji paralelní hrany:



8. odstraňuji smyčky:

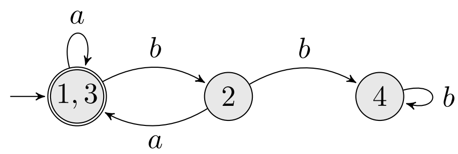


9. odstraňuji vrchol 1:

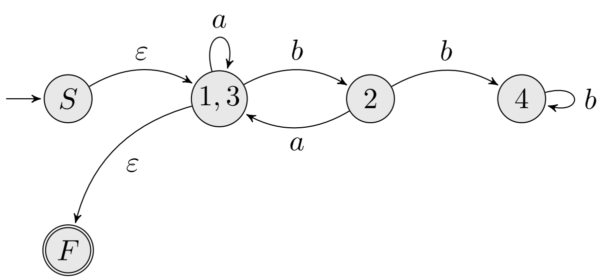


lifehack: dá se redukovat (stavy 1 a 3 jsou ekvivalentní):

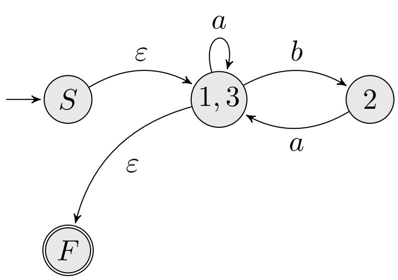
		a	b
$\leftrightarrow$	1	1	2
	2	3	4
$\leftarrow$	3	1	2
	4	4	4



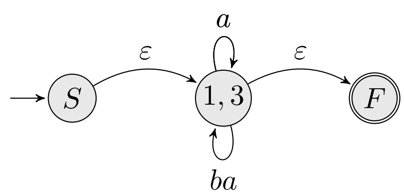
1. přidám S, F:



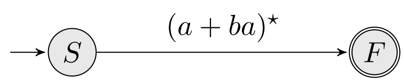
2. zbavím se nodu č. 4:



3. odstraním node č. 2:



4.spojím obsah smyček,
odstraním smyčku a node:



8 Osmé cvičení

8.1 Konstrukce regulární gramatiky k automatu

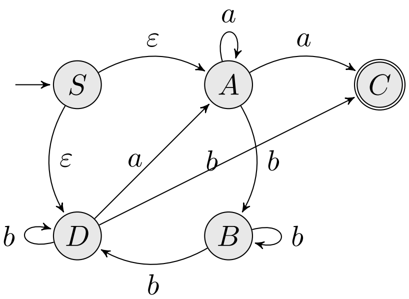
K automatu M, který je dán následující tabulkou, zkostruujte regulární gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = L(M)$.

M:

		a	b
$\leftrightarrow$	A	A, C	B
	B	$\emptyset$	B, D
$\leftarrow$	C	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	D	A	C, D

$\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$
$N = \{S, A, B, C, D\}$
$\Sigma = \{a, b\}$

mám více vstupů $\rightarrow$ přidám si S



$$
\begin{aligned}
P : & S \rightarrow A \mid D \\
& A \rightarrow aA \mid aC \mid bB \mid \varepsilon \\
& B \rightarrow bB \mid bD \\
& C \rightarrow \varepsilon \\
& D \rightarrow aA \mid bD \mid aA
\end{aligned}
$$

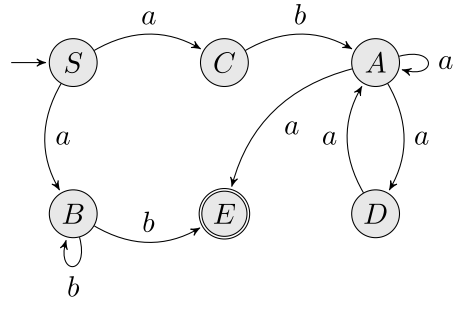
8.2 Tvorba DFA ke gramatice 3. typu

Ke gramatice $\mathcal{G}$ typu 3 zkonstruujte konečný automat, který přijímá jazyk $L(\mathcal{G})$. Gramatika $\mathcal{G} = (N, \{a, b\}, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$ a pravidla jsou

$$
\begin{aligned}
P : \quad & S \rightarrow abA \mid aB \\
& A \rightarrow aA \mid aaA \mid a \\
& B \rightarrow bB \mid b
\end{aligned}
$$

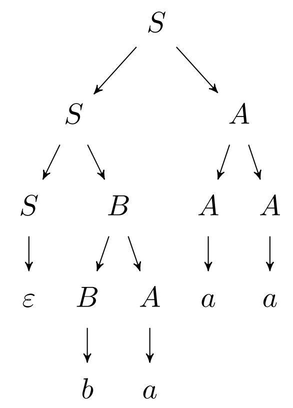
sestavím automat podle nových pravidel

$P:$	$S \rightarrow abA \mid aB$	překáží mi abA
	$C \rightarrow bA$	
	$S \rightarrow aC \mid aB$	nové pravidlo S
	$A \rightarrow aA \mid aaA \mid a$	zase nám vadí aaA
	$D \rightarrow aA$	
	$E \rightarrow \varepsilon$	
	$A \rightarrow aA \mid aD \mid aE$	nové pravidlo A
	$B \rightarrow bB \mid bE$	nové pravidlo B



8.3 Práce s derivačním stromem bezkontextové gramatiky

Je dán derivační strom v bezkontextové gramatice:



a) Napište pravidla minimální CF gramatiky, ve které je to derivační strom.
b) Napište levou derivaci odpovídající tomuto derivačnímu stromu.
c) Rozhodněte, zda je gramatika víceznačná.

a)

$$
\begin{aligned}
P:\quad & S \to SA \mid SB \mid \varepsilon \\
& A \to AA \mid a \\
& B \to BA \mid b
\end{aligned}
$$

c) je víceznačná - už jen kvůli pravidlu $A \to AA$.

b) $S \overset{S\to SA}{\Longrightarrow} SA \overset{S\to SB}{\Longrightarrow} SBA \overset{S\to\varepsilon}{\Longrightarrow} BA \overset{B\to BA}{\Longrightarrow} BAA \overset{B\to b}{\Longrightarrow} bAA \overset{A\to a}{\Longrightarrow} baAA \overset{A\to a}{\Longrightarrow} baaA \overset{A\to a}{\Longrightarrow} baaa.$

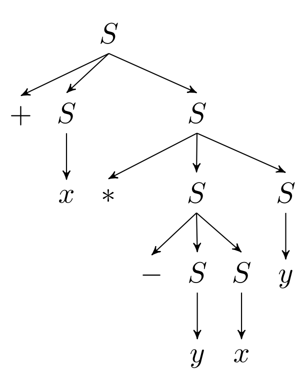
8.4 Tvorba derivačního stromu k bezkontextové gramatice

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S\}$, $\Sigma = \{+, \star, -, x, y\}$, s pravidly

$$S \to +SS \mid \star SS \mid -SS \mid x \mid y$$

- Nakreslete derivační strom, který má za výsledek slovo $w = +x \star -yxy$.
- Zkonstruujte levou derivaci slova w odpovídající derivačnímu stromu z části a).

1.



2.

$$
\begin{aligned}
& S \overset{S\to +SS}{\Longrightarrow} +SS \overset{S\to x}{\Longrightarrow} +xS \overset{S\to\star SS}{\Longrightarrow} +x\star SS \Longrightarrow \\
& \overset{S\to -SS}{\Longrightarrow} +x\star -SSS \overset{S\to y}{\Longrightarrow} +x\star -ySS \Longrightarrow \\
& \overset{S\to x}{\Longrightarrow} +x\star -yxS \overset{S\to y}{\Longrightarrow} +x\star -yxy
\end{aligned}
$$

8.5 Návrh bezkontextové gramatiky pro jazyk

Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = \{0^i j^i 2^j; i, j \geq 0\}$. Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to XY \\ & X \to 0X1 \mid \varepsilon \\ & Y \to Y2 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. $L \subseteq L(\mathcal{G})$ (gramatika vygeneruje vše):

$$S \overset{S \to XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X \to 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \overset{Y \to 2Y(j)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 2^j \overset{X \to \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 2^j \overset{X \to \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i 2^j$$

2. $L(\mathcal{G}) \subseteq L$ (gramatika nevygeneruje nic navíc):

Uvažujme derivaci $S \implies \star w$. Pak poslední použité pravidlo musí být $X \to \varepsilon$ nebo $Y \to \varepsilon$. Proto v derivaci musí být použito pravidlo $S \to XY$. Mezi tím může být použit nějaký počet pravidel $X \to 0X1$ a $Y \to Y2$. Jinak pravidla být použita nemohou. Tedy drivace má tvar $S \overset{S \to XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X \to 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \overset{Y \to 2Y(j)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 2^j \overset{X \to \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 2^j \overset{X \to \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i 2^j$.

8.6 Tvorba nevypouštěcí gramatiky

Ke gramatice $\mathcal{G}$ zkostruujte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$, pro kterou $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$.

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aSbA \mid \varepsilon \\ & A \to aBbA \mid bCB \mid CD \\ & B \to bbBa \mid aS \\ & C \to aAaA \mid \varepsilon \\ & D \to SC \mid aABa \end{aligned}$$

obecný formální zápis u nevypouštěcích gramatik:

$V = \{A \mid A \implies {}^\star\varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\}$
$V_{i+1} = V_i \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_i^\star\}$

příklad:

$V = \{A \mid A \implies {}^\star\varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$
$V_1 = \{S, D\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\}$
$V_2 = V_1 \cup \{C\} = \{S, D, C\}$
$V_3 = v_2 \cup \{A\} = \{S, D, A, C\}$

$\mathcal{G}_1$:

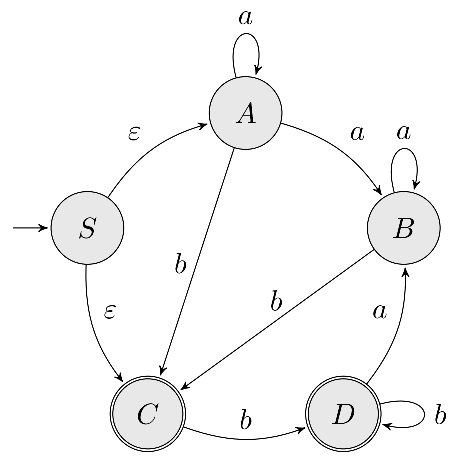
$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aSbA \mid abA \mid aSb \mid ab \\ & A \to aBbA \mid aBb \mid bCB \mid bB \mid CD \mid C \mid D \\ & B \to bbBa \mid aS \mid a \\ & C \to aAaA \mid aAa \mid aaA \mid aa \\ & D \to SC \mid S \mid C \mid aABa \mid aBa \end{aligned}$$

8.7 Konstrukce gramatiky 3. typu k automatu

K automatu M zkonstruujte gramatiku typu 3 která generuje jazyk $L(M)$, kde M je dán tabulkou

M:

		a	b
$\rightarrow$	A	$\{A, B\}$	$\{C\}$
	B	$\{B\}$	$\{C\}$
$\leftrightarrow$	C	$\emptyset$	$\{D\}$
$\leftarrow$	D	$\{B\}$	$\{D\}$



$\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$

$N = \{S, A, B, C, D\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

P :$S \rightarrow A \mid C$
$A \rightarrow aA \mid aB \mid bC$
$B \rightarrow aB \mid bC$
$C \rightarrow bD \mid \varepsilon$
$D \rightarrow aB \mid bD \mid \varepsilon$

8.8 Návrh bezkontextové gramatiky

Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = \{0^i 1^j; 0 \leq i \leq j\}$. Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

$S \rightarrow XY$
$X \rightarrow 0X1 \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow Y1 \mid \varepsilon$

Zdůvodnění:

1.

Dvě možnosti: $i = j$, a $i < j$, kde $j = i + n$, $n > 0$.

$$S \overset{S \rightarrow XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X \rightarrow 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \Longrightarrow \begin{cases} i < j: & 0^i X 1^i Y \overset{Y \rightarrow Y1(n)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 1^n \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 1^n \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^{i+n=j} \\ i = j: & 0^i X 1^i Y \overset{Y \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i \end{cases}$$

2. (fancy důkaz, doslova opsáno z autorského řešení pí. Demlové)

Uvažujme derivaci $S \Rightarrow^* w$. Poslední pravidlo musí být $S \rightarrow \varepsilon$.

Provedeme indukci podle počtu kroků derivace n:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j, \quad \text{kde } i \leq j.$$

Základní krok ($n = 1$): Pro $n = 1$:

$$S \to 0S1 \quad \text{nebo} \quad S \to S1, \quad \text{a tedy } 0^i S 1^j, \text{ kde } i \leq j.$$

Indukční krok: Předpokládejme, že každá derivace o n krocích generuje:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j, \quad i \leq j.$$

Pak derivace o $n + 1$ krocích bude:

$$S \to 0S1 \Rightarrow^n 0^{i+1} S 1^{j+1}, \quad \text{a tedy } i + 1 \leq j + 1.$$

Nebo:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j \Rightarrow 0^i 1^j.$$

Závěr: Z S je možné odvodit právě slova $0^i 1^j$, kde $0 \leq i \leq j$, a nic jiného.

9 Deváté cvičení

9.1 Návrh bezkontextové gramatiky

Navrhněte bezkontextové gramatiky generující následující jazyky

a) $L_1 = \{0^{m+n}1^n0^m \mid 0 \leq n, m\}$.
b) $L_2 = \{0^i1^j \mid 0 \leq i < j\}$.

Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

a)

$$\begin{aligned} P :& S \to 0S0 \mid A \\ & A \to 0A1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) $S \overset{S \to 0S0(m)}{\Longrightarrow} 0^m S 0^m \overset{S \to A}{\Longrightarrow} 0^m A 0^m \overset{A \to 0A1(n)}{\Longrightarrow} 0^m 0^n A 1^n 0^m \overset{A \to \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^m 1^m 0^n 1^n 0^m = 0^{m+n}1^n0^m$
(b) $S \Rightarrow^* w$, $S \Rightarrow 0^iS0^i$, $S \Rightarrow A$, $A \Rightarrow^* 0^j1^j$, $0^i0^j1^j0^i \in L(\mathcal{G})$

b)

$P : S \to 0S1 \mid S1 \mid 1$

Důkazy mě těžce nebaví, všude jsou cca stejný.

9.2 Konstrukce nevypouštěcí gramatiky

Ke gramatice $\mathcal{G}$ zkonstruujte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$, pro kterou $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$. Gramatiku $\mathcal{G}_1$ zredukujte.

$$\begin{aligned} P :\quad & S \to AB \mid \varepsilon \\ & A \to aAAb \mid bS \mid CA \\ & B \to BbA \mid CaC \mid \varepsilon \\ & C \to aBB \mid bS \end{aligned}$$

$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$
$V_1 = \{S, B\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\}$
$V_2 = V_1 \cup \emptyset = \{S, B\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 :& S \to AB \mid A \\ & A \to aAAb \mid bS \mid b \mid CA \\ & B \to BbA \mid bA \mid CaC \\ & C \to aBB \mid aB \mid a \mid bS \mid b \end{aligned}$$

Gramatika $\mathcal{G}_1$ už je redukovaná.

Obecný postup pro redukci

$V = \{A \mid A \in N, A \implies^{\star}_{\mathcal{G}} w, w \in \Sigma^{\star}\}$
$V_1 = \{A \mid A \implies {}^{\star}w \in P, w \in \Sigma^{\star}\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \rightarrow \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup V_1)^{\star}\}$
$U = \{A \mid A \in V, \exists \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^{\star}$ tak, že $S \implies^{\star}_{\mathcal{G}} \quad \alpha A \beta\}$

Jazyk není prázdný právě tehdy, kdy $S \in V$.

9.3 Redukce gramatiky

Zredukujte gramatiku $\mathcal{G}$, která je dána pravidly

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow SA \mid SB \mid \varepsilon \\ & A \rightarrow bSA \mid baS \\ & B \rightarrow aB \mid Ba \mid DA \\ & C \rightarrow aCB \mid bA \\ & D \rightarrow AB \end{aligned}$$

redukce tldr:
$V_1 \ldots$ to, co se promítne na ε nebo na terminály
$V_2 \ldots$ to, co se promítne na terminály a na to, co už je ve V_1
$U_0 \ldots \{S\}$
$U_1 \ldots$ neterminály, do kterých se dostanu z S, pak z U_1 atd.

$V_1 = \{S\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$
$V_3 = V_2 \cup \{C\} = \{S, A, C\}$
$V_4 = V_3 \cup \emptyset = \{S, A, C\}$

a tady v tom nechám jenom neterminály z V, a z pravé strany vyškrtám pravidla obsahující neterminály $\notin V$.

$$\begin{aligned} P: & S \rightarrow SA \mid \varepsilon \\ & A \rightarrow bSA \mid baS \\ & C \rightarrow \mid bA \end{aligned}$$

sem přidávám neterminály, do kterých se dostanu z počátečního stavu S, pak ze stavů v odpovídajícím U_i.

$U_0 = \{S\}$
$U_1 = U_0 \cup \{A\} = \{S, A\}$
$U_2 = U_1 \cup \emptyset = \{S, A\}$.

a ponechám jen pravidla, která nám zbyla v U.

$$\begin{aligned} P: & S \rightarrow SA \mid \varepsilon \\ & A \rightarrow bSA \mid baS \end{aligned}$$

9.4 Důkaz, že gramatika generuje alespoň jedno slovo

Rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje aspoň jedno slovo, tj. zda $L(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, kde $\mathcal{G}$ je dána pravidly

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aS \mid AB \mid CD \\ & A \to aDb \mid AD \mid BC \\ & B \to bSb \mid BB \\ & C \to BA \mid ASb \\ & D \to ABCD \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$V_1 = \{D\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A\} = \{D, A\}$
$V_3 = V_2 \cup \emptyset = \{D, A\} = V$

$S \notin V \quad \to \quad L(\mathcal{G}) = \emptyset$

Polopatě

Chomského normální tvar: Všechna pravidla na pravé straně mají buď přesně 2 neterminály nebo přesně 1 terminál.

9.5 Převod gramatiky do Chomského normálního tvaru

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a P je

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to A \mid 0SA \mid \varepsilon \\ & A \to 1A \mid B1 \mid 1 \\ & B \to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

Převeďte $\mathcal{G}$ do Chomského normálního tvaru.

1. Uděláme z toho nevypouštěcí gramatiku.

$V = \{S\}$

$$\begin{aligned} P: & S \to A \mid 0SA \mid 0A \\ & A \to 1A \mid B1 \mid 1 \\ & B \to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

2. Zbavíme se toho, kdy 1 neterminál přepisujeme na 1 neterminál.

tady: $S \to A$, máme zde $A \to 1A \mid B1 \mid 1$

$$\begin{aligned} P: & S \to 1A \mid B1 \mid 1 \mid 0SA \mid 0A \\ & A \to 1A \mid B1 \mid 1 \\ & B \to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

vytvořím pomocná pravidla pro terminály, které "nezůstaly samy"

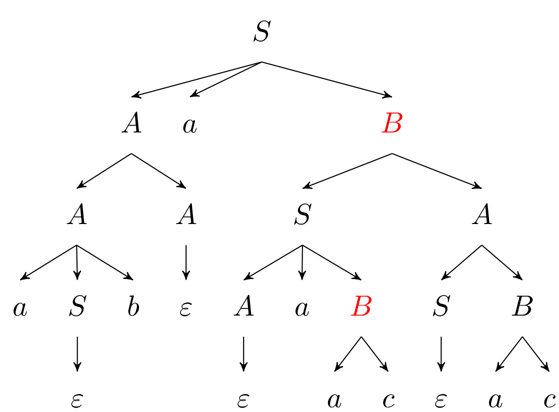
$$\begin{aligned} P : &S \rightarrow X_1A \mid BX_1 \mid 1 \mid X_0SA \mid X_0A \\ &A \rightarrow X_1A \mid BX_1 \mid 1 \\ &B \rightarrow X_0B \mid 0 \\ &X_0 \rightarrow 0 \\ &X_1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

3. Zbavím se dlouhých slov (≥ 3) (opět vytvořím pomocná pravidla).

$$\begin{aligned} P : &S \rightarrow X_1A \mid BX_1 \mid 1 \mid X_0Y \mid X_0A \\ &Y \rightarrow SA \\ &A \rightarrow X_1A \mid BX_1 \mid 1 \\ &B \rightarrow X_0B \mid 0 \\ &X_0 \rightarrow 0 \\ &X_1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

9.6 Práce s derivačním stromem bezkontextové gramatiky

Je dán derivační strom v bezkontextové gramatice:



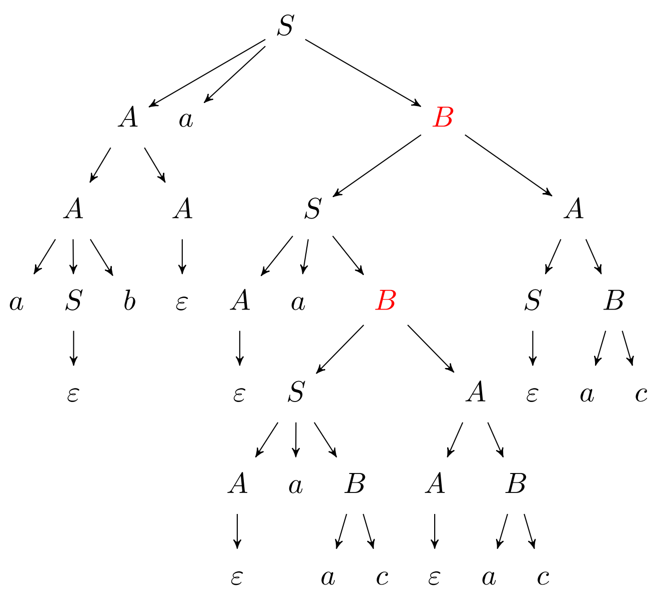
a) Napiště pravidla minimální CF gramatiky, ve které je to derivační strom.
b) Napiště levou derivaci odpovídající tomuto derivačnímu stromu.
c) Rozlože výsledek derivačního stromu w na pět částí $w = w_1w_2w_3w_4w_5$ tak, že $w_2w_4 \neq \varepsilon$ a slovo $w_1w_2^2w_3w_4^2w_5$ je také generované gramatikou z bodu a).
d) Rozhodněte, zda je gramatika víceznačná.

a)

$$\begin{aligned} P : & S \to AaB \mid \varepsilon \\ & A \to AA \mid SB \mid aSb \mid \varepsilon \\ & B \to SA \mid ac \end{aligned}$$

b) $S \xRightarrow{S \to AaB} AaB \xRightarrow{A \to AA} AAaB \xRightarrow{A \to aSb} aSbAaB \xRightarrow{S \to \varepsilon} abAaB \xRightarrow{A \to \varepsilon} abaB \xRightarrow{B \to SA} abaSA \xRightarrow{A \to Aab} abaAaBA \xRightarrow{A \to \varepsilon} abaaBA \xRightarrow{B \to ac} abaaacA \xRightarrow{A \to SB} abaaacSB \xRightarrow{S \to \varepsilon} abaaacB \xRightarrow{B \to ac} abaaacac.$

c) basically pumping lemma pro gramatiky, snad by to v testech ani zkoušce chtít neměla.
$w_1 = aba$, $w_2 = a$, $w_3 = ac$, $w_4 = ac$, $w5 = \varepsilon$.



(jak toho docílím: jdu odspoda stromu a najdu dva stejné neterminály (různě v grafu) a v podstatě ten strom nafouknu (zkopíruju nějaký podstrom z vyššího do nižšího neterminálu, v ukázce červený node B v nejvýš vpravo kopíruju do červeného Bčka vlevo od něj).)

d) je víceznačná, přepisujeme $A \to AA$.

10 Desáté cvičení

10.1 Algoritmus CYK

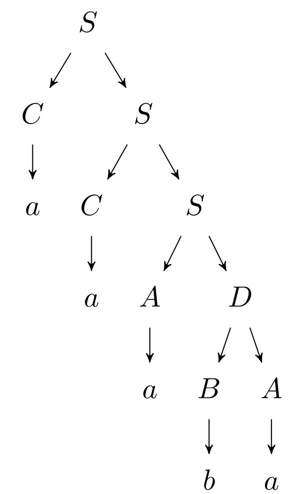
Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a pravidla P jsou dána:

$$
\begin{array}{rl}
P: & S \to AB \mid CS \mid AD \\
 & A \to AC \mid AD \mid a \\
 & B \to BC \mid b \\
 & C \to DS \mid SC \mid a \\
 & D \to BA \mid b
\end{array}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje slova w_1 a w_2, kde $w_1 = aaaba$ a $w_2 = abbaa$. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište jemu odpovídající levou derivaci.

slovo w_1:

$$
\begin{array}{ccl}
AB & \leftarrow & S \\
AC & \leftarrow & A \\
AD & \leftarrow & S, A \\
BA & \leftarrow & D \\
BC & \leftarrow & B \\
CS & \leftarrow & S \\
DS & \leftarrow & C \\
SC & \leftarrow & C
\end{array}
$$

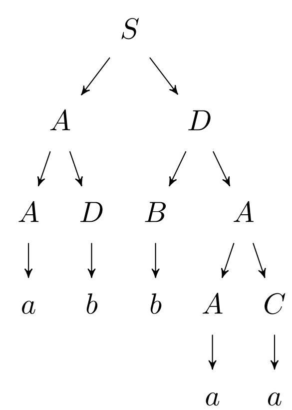


C, A, S				
S, A	C, A, S			
A	S, A	S, A, C		
A	A	S, A	D, B	
A, C	A, C	A, C	B, D	A, C
a	a	a	b	a

$$S \xRightarrow{S \to CS} CS \xRightarrow{C \to a} aS \xRightarrow{S \to CS} aCS \xRightarrow{C \to a} aaS \xRightarrow{S \to AD} aaAD \xRightarrow{A \to a} aaaD \xRightarrow{D \to BA} aaaBA \xRightarrow{B \to b} aaabA \xRightarrow{A \to a} aaaba$$

slovo w_2:

C, A, S				
C, A, S	$-$			
S, A	$-$	D, B		
S, A	$-$	D, B	A	
A, C	B, D	B, D	A, C	A, C
a	b	b	a	a



$S \xRightarrow{S\to AD} AD \xRightarrow{A\to AD} ADD \xRightarrow{A\to a} aDD \xRightarrow{D\to b} abD \xRightarrow{D\to BA} abBA \xRightarrow{B\to b} abbA \xRightarrow{A\to AC} abbAC \xRightarrow{A\to a} abbaC \xRightarrow{C\to a} abbaa$

10.2 Algoritmus CYK

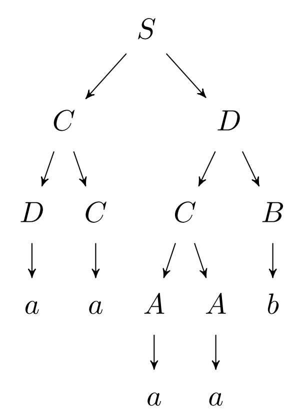
Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a pravidla P jsou dána:

$$
\begin{aligned}
P:\quad & S \to AB \mid AC \mid BC \\
& A \to AD \mid a \\
& B \to BD \mid b \\
& C \to AB \mid BB \\
& D \to a \mid b
\end{aligned}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda slovo $w_1 = abaab$ je touto gramatikou generováno. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište levou derivaci.

$w_1 = abaab$:

D, C, B, S				
D, C, A, S	S, D, C, B			
A, S, C	C	D, B, C		
D, C	S, A	C, S	D, C	
A, D	B, C	A, D	A, D	B, C
a	b	a	a	b



$S \xRightarrow{S\to CD} CD \xRightarrow{C\to DC} DCD \xRightarrow{D\to a} aCD \xRightarrow{C\to b} abD \xRightarrow{D\to CB} abCB \xRightarrow{C\to AA} abAAB \xRightarrow{A\to a} abaAB \Longrightarrow$
$\xRightarrow{A\to a} abaaB \xRightarrow{B\to b} abaab$

10.3 Bezkontextové Pumping lemma

Tento důkaz se neobjeví u písemné ani ústní zkoušky

S využitím Pumping Lemmatu ukažte, že následující jazyk není bezkontextový, kde

$$L = \{ww; w \in \{a, b\}^\star\}$$

Pumping Lemma. Pro každý CF jazyk L existuje přirozené číslo $m \geq 1$ takové, že každé slovo $z \in L$ délky alespoň m lze rozdělit na pět částí $z = uvwxy$ tak, že:

- $|vwx| \leq m$, (tj. prostřední část není příliš dlouhá),
- $vx \neq \varepsilon$ (tj. alespoň jedno ze slov v, x není prázdné),

- pro všechna $i \geq 0$ platí $uv^iwx^iy \in L$, (tj. v a x se dají do slova „napumpovat" a stále dostaneme slovo z jazyka L).

spoiler alert: nedoděláno

Zvolíme $z = a^m b^m a^m b^m \in L$, $|z| = 4m > m$.
...
...
...

Máme 7 možností: Takže to dělat nebudeme.

10.4 Důkaz generování slova matematickou indukcí

Je dána CF gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je:

$$P: \begin{array}{l} S \to SA \mid aSb \mid Cb \\ A \to SC \mid \varepsilon \\ B \to bAB \mid bS \mid AA \\ C \to CB \mid bA \mid a \end{array}$$

Pomocí matematické indukce dokažte, že:

$$A \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} S^i A C^i$$

pro všechna $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že $(ab)^{i+1}(ab^3)^i$ jsou generována gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i \geq 0$.

1) Základní krok: $i = 0$

Pro $i = 0$, platí:

$$A \overset{A \to \varepsilon}{\Longrightarrow} A$$

což odpovídá:

$$S^0 A C^0 = A \quad \checkmark$$

2) Indukční krok:

předp. $A \Longrightarrow {}^{\star} S^n a C^n$, chceme dokázat $A \Longrightarrow {}^{\star} S^{n+1} A C^{n+1}$.

$A \overset{A \to SC}{\Longrightarrow} SC \overset{S \to SA}{\Longrightarrow} SAC \overset{I.P.\,\star}{\Longrightarrow} SS^n A C^n C$

nebo

$A \overset{I.P.}{\Longrightarrow} S^n A C^n \overset{A \to SC}{\Longrightarrow} S^n S C C^n \overset{S \to SA}{\Longrightarrow} S^n S A C C^n$.

10.5 Algoritmus CYK

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ a pravidla P jsou dána

$$
\begin{aligned}
P:\quad & S \rightarrow AB \mid CD \mid AC \\
& A \rightarrow AC \mid a \\
& B \rightarrow BD \mid b \\
& C \rightarrow AD \mid a \\
& D \rightarrow BA \mid b
\end{aligned}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje slova w_1 a w_2, kde $w_1 = baaba$ a $w_2 = abaaa$. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište jemu odpovídající levou derivaci.

$$
\begin{aligned}
AB &\leftarrow S \\
AC &\leftarrow S, A \\
AD &\leftarrow C \\
BA &\leftarrow D \\
BD &\leftarrow B \\
CD &\leftarrow S
\end{aligned}
$$

slovo $w_1 = baaba$:

D				
D	S, A, C			
D	S, C, A	C, S		
D	S, A	S, C	D	
B, D	A, C	A, C	B, D	A, C
b	a	a	b	a

Gramatika $\mathcal{G}$ negeneruje slovo w_1.

slovo $w_2 = abaaa$:

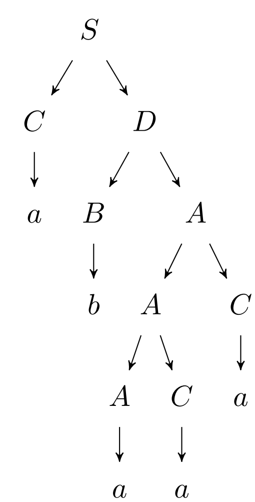
C, S				
C, S	D			
C, S	D	S, A		
S, C	D	S, A	S, A	
A, C	B, D	A, C	A, C	A, C
a	b	a	a	a

Gramatika $\mathcal{G}$ generuje slovo w_2.

Levá derivace:

$$
S \xRightarrow{S\rightarrow CD} CD \xRightarrow{C\rightarrow a} aD \xRightarrow{D\rightarrow BA} aBA \xRightarrow{B\rightarrow b} abA \Longrightarrow
$$
$$
\xRightarrow{A\rightarrow AC} abAC \xRightarrow{A\rightarrow AC} abACC \xRightarrow{A\rightarrow a} abaCC \Longrightarrow
$$
$$
\xRightarrow{C\rightarrow a} abaaC \xRightarrow{C\rightarrow a} abaaa
$$

Derivační strom pro slovo w_2:



11 Jedenácté cvičení

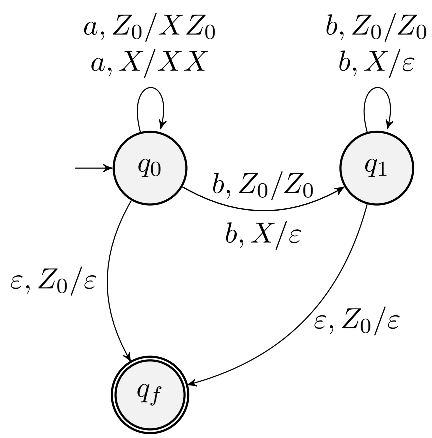
11.1 Stavový diagram zásobníkového automatu, práce na automatu

Je dán zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde jednotlivé části jsou $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, X\}$ a přechodová funkce je daná tabulkou

	(a, Z_0)	(a, X)	(b, Z_0)	(b, X)	(ε, Z_0)	(ε, X)
$\rightarrow q_0$	(q_0, XZ_0)	(q_0, XX)	(q_1, Z_0)	(q_1, ε)	(q_f, ε)	–
q_1	–	–	(q_1, Z_0)	(q_1, ε)	(q_f, ε)	–
$\leftarrow q_2$	–	–	–	–	–	–

a) Nakreslete stavový diagram zásobníkového automatu A.
b) Ukažte práci zásobníkového automatu nad slovem *aabba* a slovem *abbbb*.
c) Charakterizujte jazyk L, který tento zásobníkový automat přijímá. Tvrzení zdůvodněte.

Stavový diagram automatu A.



Práce nad slovem $w_1 = aabba$.

$(q_0, aabba, Z_0) \vdash (q_0, abba, XZ_0) \vdash (q_0, bba, XXZ_0) \vdash (q_1, ba, XZ_0) \vdash (q_1, a, Z_0)$. Konec, neúspěch.

Práce nad slovem $w_2 = abbbb$.

$(q_0, abbbb, Z_0) \vdash (q_0, bbbb, XZ_0) \vdash (q_1, bbb, Z_0) \vdash (q_1, bb, Z_0) \vdash (q_1, b, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$. Konec, úspěch.

$$L(A) \stackrel{?}{=} \overbrace{\{a^i b^j \mid 0 \leq i, i \leq j\}}^{L}$$

Důkaz.

a) $L \subseteq L(A)$

- $i = j = 0$: $(q_0, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$
- $0 = i < j$: $(q_0, b^j, Z_0) \vdash (q_1, b^{j-1}, Z_0) \vdash^{(j-1)} (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$
- $0 < i \leq j$: $(q_0, a^i b^j, Z_0) \vdash^i (q_0, b^{i+k}, X^i Z_0) \vdash (q_0, b^{i+k-1}, X^{i-1} Z_0) \vdash^{(i-1)} (q_1, b^k, Z_0) \vdash^k (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$, $i + k = j, k = j - i \geq 0$.

b) $L(A) = N(A) \subseteq L$

$w \in L(A)$

12 Dvanácté cvičení

12.1 Tvorba zásobníkového automatu podle jazyka

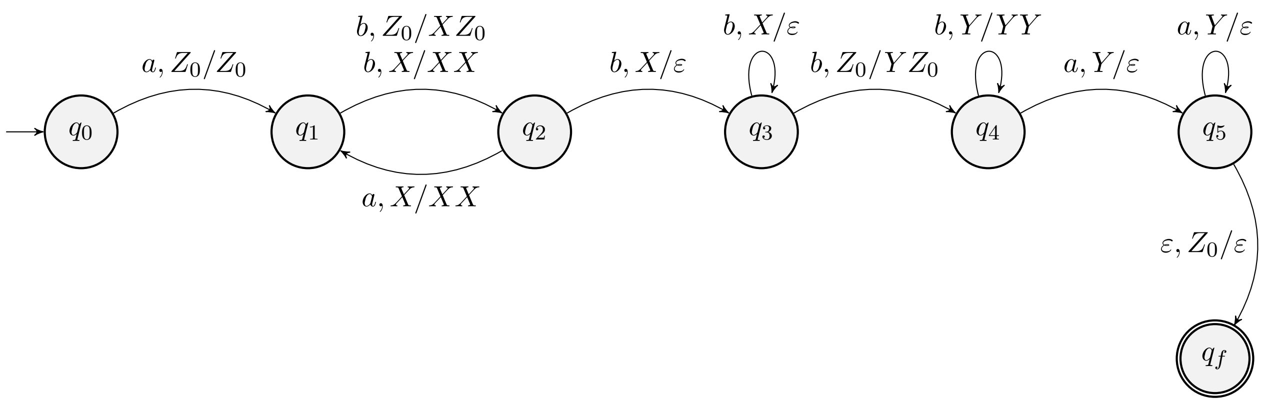
Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \{(ab)^i b^j a^{j-i} \mid 0 < i < j\}.$$

$$\implies L = \{(ab)^i b^{i+k} a^k \mid i > 0, k > 0\} \implies N(A) = \underbrace{\{(ab)^i b^i \mid k > 0\}}_{X}, L(B) = \underbrace{\{b^k a^k \mid k > 0\}}_{Y}.$$

Dva způsoby řešení:

a) Přímo.



b) Přes gramatiku.

$\mathcal{G} : S \to AB$
$\quad A \to abAb \mid abb$
$\quad B \to bBa \mid ba$

1. $L \subseteq L(G)$

$S \xRightarrow{S\to AB} AB \xRightarrow{A\to abAb}^{(i-1)} (ab)^{i-1}Ab^{i-1}B \xRightarrow{A\to abb}$
$(ab)^i b^i B \xRightarrow{B\to bBa}^{(k-1)} (ab)^i b^i b^{k-1} B a^{k-1} \xRightarrow{B\to ba}$
$(ab)^i b^i b^k a^k$.

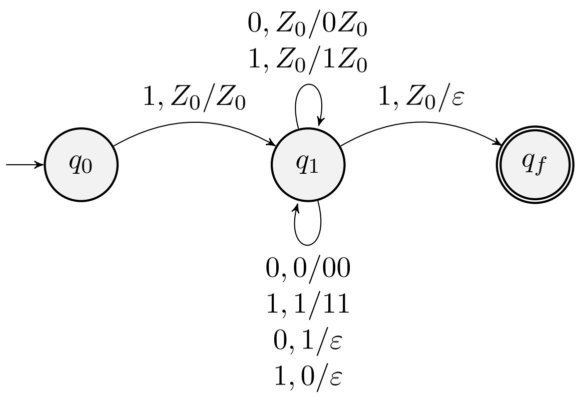
2. $L(G) \subseteq L$
$S \to^\star w$
$S \to AB$
$A \xRightarrow{A\to abAb}^{j} (ab)^j A b^j \xRightarrow{A\to abb} (ab)^j abb^j$

12.2 Tvorba zásobníkového automatu podle jazyka

Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = N(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \{w \mid w \text{ začíná a končí symbolem 1 a obsahuje o dvě 1 více než 0}\}.$$

$L = \{1u1 \mid |u|_0 = |u|_1\}, i = |u|_0$



1) $L \subseteq N(A)$
$(q_0, 1u1, Z_0) \vdash (q_1, u1, Z_0) \vdash^\star (q_1, 1, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$.

2) $L(B) \subseteq L$

.

12.3 Důkaz bezkontextovosti jazyka

Je dán jazyk $L = \{0^n 1^m; 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$. Rozhodněte, zda jazyk L je bezkontextový.
V případě, že je bezkontextový, najděte buď bezkontextovou gramatiku, která ho generuje, nebo zásobníkový automat, který ho přijímá.
V případě, že není bezkontextový, tvrzení dokažte.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 : S &\to 0SA1 \mid \varepsilon \\ A &\to 1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_2 : S \to 0S11 \mid 0S1 \mid \varepsilon$$

Důkaz $\mathcal{G}_2$.

1) $L \subseteq L(\mathcal{G}_2)$
$0 < n \leq m \leq 2n \to k = 2n - m \geq 0$
$S \overset{S\to 0S1}{\Longrightarrow}{}^{(k)} 0^k S 1^k \overset{S\to 0S11}{\Longrightarrow}{}^{(n-k)} 0^k 0^{n-1} S 1^{n-1} 1^{n-1} 1^k \overset{S\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^n 1^{2n-k} = 0^n 1^{2n-2n+m} = 0^n 1^m.$

2) $L(\mathcal{G}_2) \subseteq L$

13 Třináctté cvičení

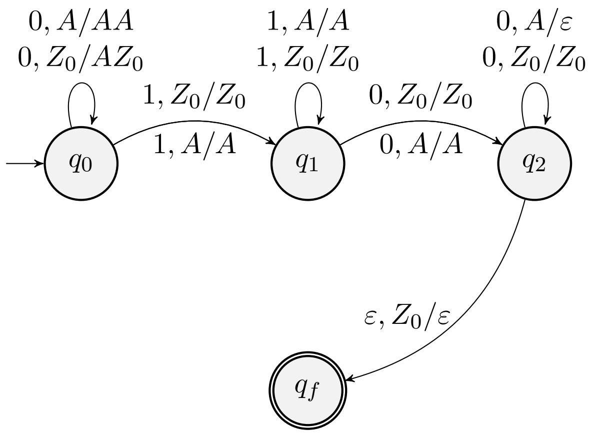
13.1 Tvorba a práce zásobníkového automatu podle jazyka

Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \{0^i 1^j 0^k \mid 0 \leq i < k, j > 0\}.$$

Ukažte práci jednoho ze zásobníkových automatů nad slovem 011000 a nad slovem 001110.

Přímou metodou:



Práce nad slovem $w_1 = 011000$.

$(q_0, 011000, Z_0) \vdash (q_0, 11000, AZ_0) \vdash (q_1, 1000, AZ_0)$
$\vdash (q_1, 000, AZ_0) \vdash (q_2, 00, AZ_0) \vdash (q_f, 0, AZ_0)$✗
$\vdash (q_2, 0, Z_0)$
$(q_2, 0, Z_0) \vdash (q_f, 0, Z_0)$✗
$\vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$✓

Práce nad slovem $w_2 = 001110$.

$(q_0, 001110, Z_0) \vdash^{(2)} (q_0, 1110, AAZ_0) \vdash$
$(q_1, 110, AAZ_0) \vdash^{(2)} (q_1, 0, AAZ_0) \vdash (q_2, \varepsilon, AAZ_0)$✗

Přes gramatiku:
$\mathcal{G} : S \to S0 \mid 0S0 \mid A0$
$\quad A \to 1A \mid 1$

Důkaz.

1) $L \subseteq L(\mathcal{G})$

$S \Rightarrow^{\star} 0^i S 0^k \xRightarrow{S \to A0} 0^i A 0^{k+1} \xRightarrow{A \to 1A}{}^{(j)} 0^i 1^j A 0^{k+1} \xRightarrow{A \to 1} 0^i 1^{j+1} 0^{k+1}$, $i \leq k, j > 0$.

2) $L(\mathcal{G}) \subseteq L$

13.2 Tvorba nevypouštěcí gramatiky

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{0, 1\}$ a P je dáno

$$S \to SA \mid 0$$
$$A \to BAB \mid 1$$
$$B \to CB \mid \varepsilon$$
$$C \to AS \mid 0 \mid \varepsilon$$

Ke gramatice $\mathcal{G}$ vytvořte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$. V gramatice $\mathcal{G}_1$ odstraňte levou rekurzi.

1. krok Vytvoření nevypouštěcí gramatiky $\mathcal{G}_1$.
$V = \{x \mid x \Rightarrow^\star \varepsilon\}$

$V_1 = \{x \mid x \to \varepsilon \in P\} = \{B, C\}$

$V_2 = V_1 \cup \{x \mid x \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^+\} = V_1 \cup \emptyset = V_1 = V.$

2. krok odstranění levé rekurze. (postup shora dolů)
$S \to 0 \mid 0S^{'}$

$S^{'} \to A \mid AS^{'}$

$A \to BAB \mid BA \mid 1 \mid BABA^{'} \mid BAA^{'} \mid 1A^{'}$

$A^{'} \to B \mid BA^{'}$

$B \to CB \mid C$

$C \to AS \mid 0$

13.3 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převeďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, E, F\}$, $\Sigma = \{a, *, +,), (\}$ a P je dáno

$$S \to (E)$$
$$E \to F * F \mid F + F$$
$$F \to a \mid S$$

1. krok oindexování neterminálů.

$A_1 = S$
$A_2 = E$
$A_3 = F$

2. krok odstranění levých rekurzí. Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)
$S \to (E)$

$E \to F * F \mid F + F$

$F \to a \mid (E)$

3. krok nahrazení prvních neterminálů pravých stran, které neterminálem začínají, pravidly. (postup zespoda nahoru)
$S \to (E)$

$E \to a * F \mid a + F \mid (E) * F \mid (E) + F$

$F \to a \mid (E)$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály.
$S \to (EX$

$E \to aYF \mid aZF \mid (EXYF \mid (EXZF$

$F \to a \mid (EX$

$X \to)$

$Y \to *$

$Z \to +$

13.4 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převěďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ a P je dáno

$$S \to Ab \mid B$$
$$A \to Aba \mid Bcc$$
$$B \to Sa \mid b$$

1. krok oindexování neterminálů.

$A_1 = S$
$A_2 = A$
$A_3 = B$

2. krok odstranění levých rekurzí. Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)

$S \to Ab \mid B$

$A \to Ba \mid BaA^{'}$

$A^{'} \to ba \mid baA^{'}$

$B \to Aba \mid Ba \mid b$

$B \to Baba \mid BaA^{'}ba \mid Ba \mid b$

$B \to b \mid bB^{'}$

$B^{'} \to aba \mid aA^{'}ba \mid a \mid abaB^{'} \mid aA^{'}baB^{'} \mid aB^{'}$

3. krok nahrazení prvních neterminálů pravých stran, které neterminálem začínají, pravidly. (postup zespoda nahoru)

$S \to Bab \mid BaA^{'} \mid b \mid bB^{'}$

$A \to ba \mid bB^{'}a \mid baA^{'} \mid bB^{'}aA^{'}$

$A^{'} \to ba \mid baA^{'}$

$B \to b \mid bB^{'}$

$B^{'} \to aba \mid aA^{'}ba \mid a \mid abaB^{'} \mid aA^{'}baB^{'} \mid aB^{'}$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály.

$S \to BaY \mid BaA^{'} \mid b \mid bB^{'}$

$A \to bX \mid bB^{'}X \mid bXA^{'} \mid bB^{'}aA^{'}$

$A^{'} \to bX \mid bXA^{'}$

$B \to b \mid bB^{'}$

$B^{'} \to aXY \mid aA^{'}YX \mid a \mid aYXB^{'} \mid aA^{'}YXB^{'} \mid aB^{'}$

$X \to a$

$Y \to b$

14 Čtrnácté cvičení

14.1 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převeďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a P je dáno

$$S \to SA \mid 0$$
$$A \to AS \mid 1$$

1. krok oindexování neterminálů.

$X_1 = S$
$X_2 = A$
$X_3 = S^{'}$
$X_4 = A^{'}$

2. krok odstranění levých rekurzí.
$S \to 0 \mid 0S^{'}$

$S^{'} \to A \mid AS^{'}$

$A \to 1 \mid 1A^{'}$

$A^{'} \to S \mid SA^{'}$

3. krok Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)
$S \to 0 \mid 0S^{'}$

$A \to 1 \mid 1A^{'}$

$S^{'} \to 1 \mid 1A^{'} \mid 1S^{'} \mid 1A^{'}S^{'}$

$A^{'} \to 0 \mid 0S^{'} \mid 0A^{'} \mid 0S^{'}A^{'}$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály. ✓

14.2 Zkoušková ukázka práce na bezkontextové gramatice

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je dáno

$$S \to Sa \mid Sb \mid bC$$
$$A \to CBA \mid BC \mid b$$
$$B \to aB \mid \varepsilon$$
$$C \to AA \mid bBb \mid \varepsilon$$

1. Ke gramatice $\mathcal{G}$ najděte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$. Kroky převodu popište.
2. Ke gramatice $\mathcal{G}_1$ najděte gramatiku $\mathcal{G}_2$ v Chomského normálním tvaru, která generuje stejný jazyk jako gramatika $\mathcal{G}_1$. Jednotlivé kroky popište, gramatiku v Chomského normálním tvaru definujte.
3. Pomocí matematické indukce dokažte, že platí $A \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} A^iC(BA)^{i+1}$ pro každé $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že $b^{i+2}(ab)^{i+1}$ je generováno gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i \geq 0$.
4. Je gramatika $\mathcal{G}$ víceznačná? Víceznačnou gramatiku definujte.
5. V gramatice $\mathcal{G}_1$ odstraňte levou rekurzi u symbolu S. Postup popište.

1. Nevypouštěcí gramatika $\mathcal{G}_1$.

$V = \{A \mid A \Rightarrow^\star \varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\} = \{B, C\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\} = V_1 \cup \{A\} = \{A, B, C\}$
$V_3 = V_2 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_2^\star\} = V_2 \cup \varepsilon = V_2 = V$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 : S &\to Sa \mid Sb \mid bC \mid b \\ A &\to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid b \\ B &\to aB \mid a \\ C &\to AA \mid A \mid bBb \mid bb \end{aligned}$$

2. Chomského normální tvar gramatiky $\mathcal{G}_1$.

1. krok nahrazení samostatných terminálů pravidly. (pokud nastane např. $A \to A$, tak vynechat.)

$S \to Sa \mid Sb \mid bC \mid b$

$A \to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid \underbrace{aB \mid a}_{B} \mid \underbrace{AA \mid bBb \mid bb}_{C} \mid b$

$B \to aB \mid a$

$C \to AA \mid \underbrace{CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid b}_{A} \mid bBb \mid bb$

2. krok nahrazení terminálů neterminály pokud nejsou samotné.

$S \to SX_1 \mid SX_2 \mid X_2C \mid b$

$A \to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid X_1B \mid X_1 \mid AA \mid X_2BX_2 \mid X_2X_2 \mid X_2$

$B \to X_1B \mid X_1$

$C \to AA \mid CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid X_2 \mid X_2BX_2 \mid X_2X_2$

$X_1 \to a$

$X_2 \to b$

3. krok nahrazení pravých stran, která mají délku ≥ 3.

$S \to SX_1 \mid SX_2 \mid X_2C \mid b$

$A \to Y \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid X_1B \mid X_1 \mid AA \mid Z \mid X_2X_2 \mid X_2$

$Y \to CBA$

$Z \to X_2BX_2$

$B \to X_1B \mid X_1$

$C \to AA \mid Y \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid X_2 \mid Z \mid X_2X_2$

$X_1 \to a$

$X_2 \to b$

3. Důkaz.

$A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star A^iC(BA)^{i+1}$

Základní krok: $i = 0$: $A^0C(BA)^1 = CBA$ ✓ $A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star CBA$.

Indukční krok: $i \geq 0$: indukční předpoklad: $A \Rightarrow^\star A^iC(BA)^{i+1}$.

$A \xRightarrow{A\to CBA} CBA \xRightarrow{C\to AA} A\underline{A}_{IP}(BA) \xRightarrow{IP}^{\star} AA^iC(BA)^{i+1}(BA) = A^{i+1}C(BA)^{i+2}$. ✓

A tedy, $b^{i+2}(ab)^{i+1} \in L(\mathcal{G})$?

$S \xRightarrow{S\to bC} bC \xRightarrow{C\to AA} bAA \xRightarrow{A\to b} b^2A \Rightarrow$ |dle důkazu výše| $\Rightarrow^{\star} b^2A^iC(BA)^{i+1} \xRightarrow{A\to b} b^{i+2}C(BA)^{i+1} \xRightarrow{C\to\varepsilon}$
$b^{i+2}(BA)^{i+1} \xRightarrow{B\to aB} b^{i+2}(aBA)^{i+1} \xRightarrow{B\to\varepsilon} b^{i+2}(aA)^{i+1} \xRightarrow{A\to b} b^{i+2}(ab)^{i+1}$. ✓

4. Je gramatika $\mathcal{G}$ víceznačná?

Víceznačnost = existují alespoň 2 derivační stromy / 2 levé derivace pro jedno libovolné slovo z $\mathcal{G}$.

Například mějme slovo $w = bbb$.

První způsob vygenerování slova w: $S \xRightarrow{S\to bC} bC \xRightarrow{C\to AA} bAA \xRightarrow{A\to b}^{2} bbb$.

Druhý způsob vygenerování slova w: $S \xRightarrow{S\to bC} bC \xRightarrow{C\to bBb} bbBb \xRightarrow{B\to\varepsilon} bbb$.

A tedy gramatika $\mathcal{G}$ je víceznačná.

5. Odstranění levých rekurzí.

Levá rekurze se vyskytuje pouze v pravidlu $S \to Sa \mid Sb \mid bC \mid b$.

Je potřeba přidat pouze jeden neterminál. Pokud by se jich přidalo více, nová gramatika by generovala méně slov, než původní.
$S \to bC \mid bCS' \mid b \mid S'$
$S' \to a \mid aS' \mid b \mid bS'$