České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka řešených příkladů

Jazyky, automaty a gramatiky

Praha, 2025

https://github.com/knedl1k/B4B01JAG

Obsah

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autoři velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budeme rádi za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte nám také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/B4B01JAG`.

Poděkování. Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Automaty byly nakresleny pomocí maker Ti*k*Z Tilla Tantaua a derivační stromy pomocí maker `forest` Sašo Živanoviće.

1 První cvičení

1.1 Příklad z přednášky - hledání v textu

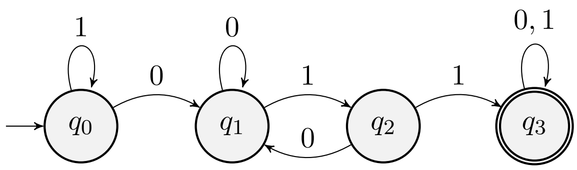
Úkol: Zjistit, zda se v binárním slovu w vyskytuje podslovo 001.

$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

tabulkou:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
$\leftarrow q_3$	q_3	q_3

stavovým diagramem:



Automat přijme pouze slova obsahující podslovo 011.

1.2 Charakterizace jazyka

Jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ je dán induktivně

$$
\begin{gathered}
\varepsilon \in L \\
u \in L \implies aub \in L \\
u \in L \implies bua \in L \\
u, v \in L \implies uv \in L
\end{gathered}
$$

Charakterizujte slova jazyka L, tj. najděte vlastnost $\mathcal{V}$ takovou, že $L = \{u \mid \text{slovo } u \text{ má vlastnost } \mathcal{V}\}$. Své tvrzení dokažte.

$L_1 = \{w \mid w \in \{a, b\}^\star, |w|_a = |w|_b\}$.

Důkaz:

a) $L \subseteq L_1$

1. $|\varepsilon|_a = 0 = |\varepsilon|_b$
2. $|u|_a = |u|_b \Rightarrow |aub|_a = |u|_a + 1 = |aub|_b = |u|_b + 1$

b) $L_1 \subseteq L$

1. $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$, $\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon \in L$.
2. Každé slovo $w \in L_1$ lze rozdělit na následující případy, které umožňují jeho postupné rozdělení až na prázdné slovo ε:

   Možnost 1: w začíná a a končí b,
   Možnost 2: w začíná b a končí a,
   Možnost 3: w začíná a končí tím stejným písmenem (a nebo b).

   Možnost 1: $w = bua$. Rozdělíme slovo w na $w = bua$, kde u je prostřední část slova splňující $|u|_a = |u|_b$. Podle definice pravidel L, pokud $u \in L$, pak $aub \in L$.

Možnost 2: $w = aub$. Rozdělíme slovo w na $w = aub$, kde u je prostřední část slova splňující $|u|_a = |u|_b$. Podle definice pravidel L, pokud $u \in L$, pak $bua \in L$.

Možnost 3: $w = axa$**,** $w = bxb$. Předpokládejme, že w začíná i končí znakem a. Procházíme a zleva doprava a hledáme první b, kde počet znaků a od začátku do tohoto b je stejný jako počet znaků b (včetně tohoto b). Toto b rozděluje w na dvě části: $w = uv$, kde u obsahuje první část w (od prvního znaku do tohoto b včetně), kde $|u|_a = |u|_b$, a v obsahuje druhou část slova w, kde $|v|_a = |v|_b$. Podle pravidel L, pokud $u, v \in L$, pak $uv \in L$.
Analogicky postupujume pro slovo začínající i končící znakem b.

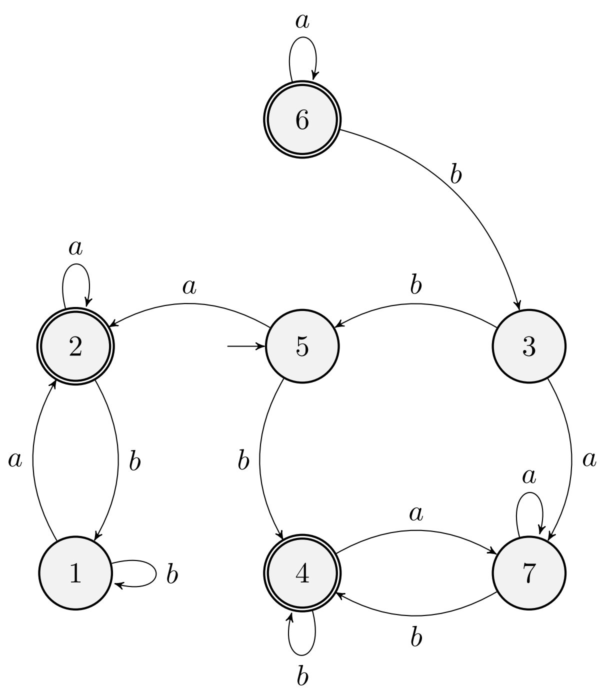
1.3 Práce na konečném automatu

Je dán konečný automat M tabulkou

	a	b
1	2	1
$\leftarrow$ 2	2	1
3	7	5
$\leftarrow$ 4	7	4
$\rightarrow$ 5	2	4
$\leftarrow$ 6	6	3
7	7	4

1. Nakreslete stavový diagram automatu.
2. Simulujte krok po kroku výpočet automatu nad slovem $bbaaab$.
3. Z induktivní definice odvoďte $\delta^\star(2, bab)$.

1.

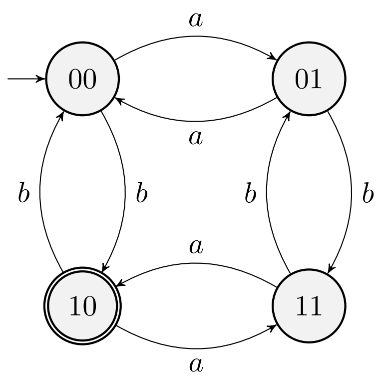


2. $\rightarrow 5 - 4 - 4 - 7 - 7 - 7 - 4 \rightarrow$

3. $\delta^\star(2, bab) = \delta(\delta^\star(2, ba), b) = \delta(\delta(\delta(2, b), a), b)$.

1.4 Posuvný registr

Navrhněte automat modelující posuvný registr, který provádí celočíselné dělení 4 binárně zadaného čísla (číslo se čte od nejvyššího řádu). O jaký typ automatu se jedná?



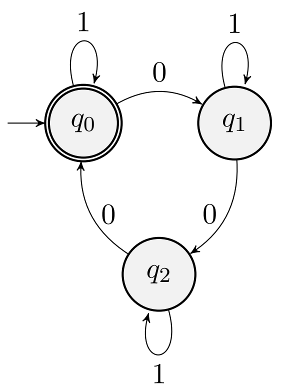
Jedná se o *Mealyho automat*

$$M = (Q, \Sigma, Y, \delta, q_o, \lambda).$$

1.5 Stavové diagramy pro DFA

Pro uvedené automaty nakreslete stavový diagram. Najděte vlastnost $\mathcal{V}$, která charakterizuje slova přijímaná daným automatem. Dokažte, že automat přijímá právě všechna slova s vlastností $\mathcal{V}$.

	0	1
$\leftrightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_1
q_2	q_0	q_2

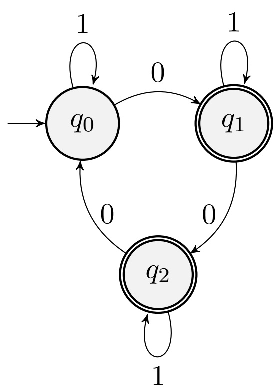


$w \in L$ iff $|w|_0$ je dělitelný 3.

Invarianty:

- q_0: `in`, `out`, $|w|_0 = 3k$,
- q_1: $|w|_0 = 3k + 1$,
- q_2: $|w|_0 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
$\leftarrow q_1$	q_2	q_1
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2

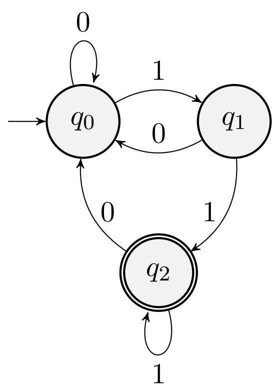


$w \in L$ iff $|w|_0$ není dělitelný 3.

Invarianty:

- q_0: `in`, $|w|_0 = 3k$,
- q_1: `out`, $|w|_0 = 3k + 1$,
- q_2: `out`, $|w|_0 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2



$w \in L$ iff w končí 11.

Invarianty:

- q_0: `in`, končí 0,
- q_1: nekončí 11, končí 1,
- q_2: `out`, končí 11.

2 Druhé cvičení

2.1 Příklad z přednášky - Pumping Lemma, Nerodova věta

Úvod: Pumping lemma nelze použít, chceme-li dokázat, že jazyk je regulární. Nerodova věta dává nutnou a postačující podmínku pro to, aby byl jazyk regulární.

Dokažte že, jazyk $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ není regulární.

Pumping lemma: Když L je regulární, tak existuje $n \geq 0$ takové, že každé $u \in L$, $|u| > n$, je možné rozložit na 3 slova $u = xwy$ splňující:

1) $|xw| \leq n$,
2) $w \neq \varepsilon$,
3) $xw^i y \in L, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Důkaz sporem :

Vezmeme libovolné $n \in \mathbb{N}$, zvolíme $u = 0^n 1^n \in L$.
Kdyby $0^n 1^n = xwy$ a $|xw| \leq n$, implikuje nám to $xw = 0^k, k \leq n$, $w \neq \varepsilon$, tj. $w = 0^l, l \geq 1, l \leq k$, a $xw^2 y = 0^{n+l} 1^n$, a $n + l > n$, takže $n \notin L$.
L není regulární.

Nerodova věta: Jazyk L nad abecedou Σ je regulární právě tehdy, když existuje ekvivalence T na množině všech slov $\Sigma^\star$ taková, že

1) L je sjednocení některých tříd ekvivalence T.
2) Jestliže pro nějaké $u, v \in \Sigma^\star$ platí $u\,T\,v$, pak pro každé slovo $w \in \Sigma^\star$ platí také $uw\,T\,vw$.
3) T má pouze konečně mnoho tříd ekvivalence.

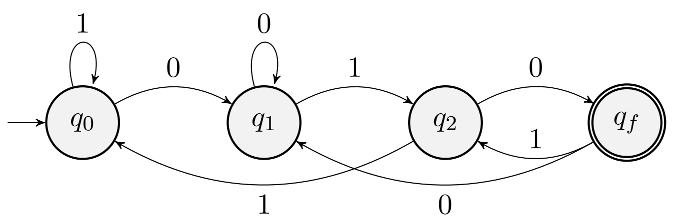
Důkaz sporem:

Zvolíme $0, 0^2, 0^3, \ldots, 0^n, \ldots, 0^i$, $i > 0$.
Protože T má konečně mnoho tříd, tak existuje $i \neq j$, že $0^i\,T\,0^j$.
Potom vezmeme $w = 1^i$; pak dle (2) $0^i 1^i\,T\,0^j 1^i$, a $0^i 1^i \in L$, ale $0^i 1^j \notin L$.
Tedy neplatí (1).

2.2 Příklad z přednášky - Konstrukce DFA dle jazyka

Pro jazyk L, který se skládá ze všech binárních slov, která končí 010, zkonstruujte DFA, který ho přijímá.

$L = \{u \mid u = w010, w \in \{0, 1\}^\star\}$

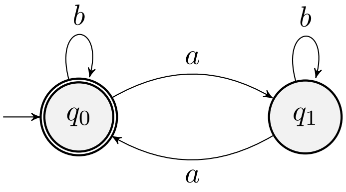


Důkaz pomocí invariantů (invarianty navzájem disjunktní):

- $\delta^\star(q_0, 1) = q_0$: ε, 1, nebo končí 11,
- $\delta^\star(q_0, u) = q_1$: končí 0, nekončí 010,
- $\delta^\star(q_0, u) = q_2$: končí 01,
- $\delta^\star(q_0, u) = q_f$: končí 010.

2.3 Návrh DFA dle jazyka

Je dán jazyk $L = \{w \mid \text{počet } |w|_a \text{ je sudý}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Navrhněte konečný automat přijímající jazyk L a dokažte, že skutečně tento jazyk přijímá.

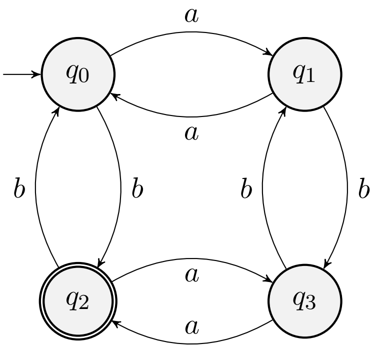


Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: $|w|_a = 2k$, `in`, `out`,
- q_1: $|w|_a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.4 Návrh DFA dle jazyka

Je dán jazyk $L = \{w \mid \text{počet } |w|_a \text{ je sudý a počet } |w|_b \text{ je lichý}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Navrhněte konečný automat přijímající jazyk L a dokažte, že skutečně tento jazyk přijímá.



Důkaz pomocí invariantů:

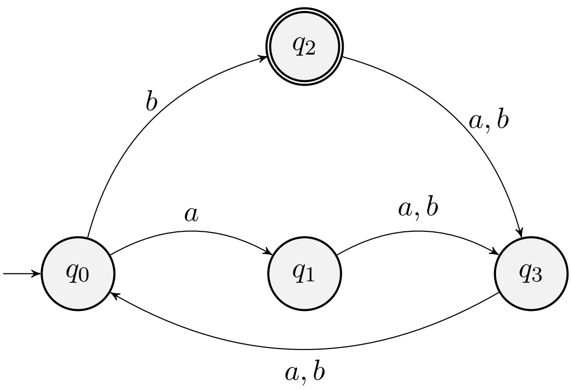
- q_0: $|w|_a = 2k$, $|w|_b = 2k$, `in`,
- q_1: $|w|_a = 2k + 1$, $|w|_b = 2k$,
- q_2: $|w|_a = 2k$, $|w|_b = 2k + 1$, `out`,
- q_3: $|w|_a = 2k + 1$ $|w|_b = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.5 Návrh DFA dle jazyka

Pro daný jazyk L navrhněte konečný automat, který tento jazyk přijímá. O automatu ukažte, že opravdu přijímá daný jazyk.

a) $\Sigma = \{a, b\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, která končí b a mají délku $3k + 1$.
b) $\Sigma = \{0, 1\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, která obsahují podslovo 0101.
c) $\Sigma = \{0, 1\}$, jazyk L obsahuje právě všechna slova, jejichž každé podslovo délky 3 obsahuje znak 0.

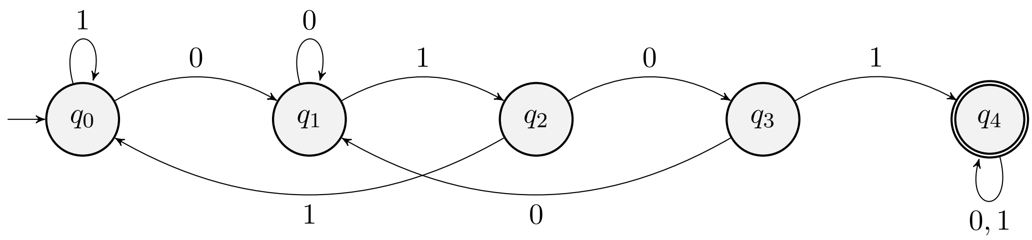
a)



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: končí a, b, $|w| = 3k$, `in`,
- q_1: končí a, $|w| = 3k + 1$,
- q_2: končí b, $|w| = 3k + 1$, `out`,
- q_3: končí a, b, $|w| = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

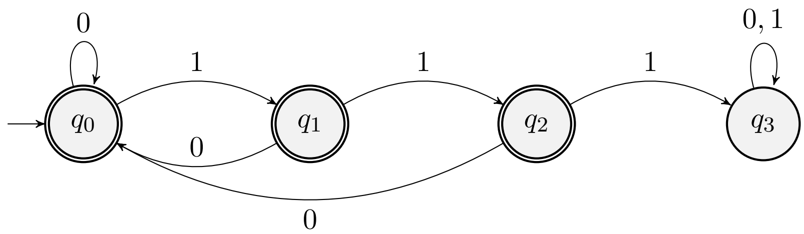
b)



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: ε, končí 1, nekončí 01, neobsahuje 010, `in`,
- q_1: končí 0, nekončí 010, neobsahuje 0101,
- q_2: končí 01, neobsahuje 0101,
- q_3: končí 010, neobsahuje 0101,
- q_4: obsahuje 0101, `out`.

c) řešíme doplňkem, tedy jazyk $\mathcal{L}$ obsahuje právě všechna slova, jejichž každé podslovo délky 3 **neobsahuje** znak 0. Následně všechny stavy, které nebyly výstupní, se stanou výstupními a stavy, které byly výstupní, se stanou nevýstupními.



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: končí 0, neobsahuje 111, `in`, `out`,
- q_1: končí 1, neobsahuje 111, `out`,
- q_2: končí 11, neobsahuje 111, `out`,
- q_3: obsahuje 111.

2.6 Nerodova věta a Pumping lemma

Pomocí Nerodovy věty a Pumping lemmatu dokažte, že jazyk $L = \left\{0^i 1^j 0^k \mid 0 \leq i < j < k\right\}$ není regulární.

Definice **Pumping lemmatu.** Když L je regulární, tak existuje $n \geq 0$ takové, že každé $u \in L$, $|u| > n$, je možné rozložit na 3 slova $u = xwy$ splňující:

1) $|xw| \leq n$
2) $w \neq \varepsilon$
3) $xw^iy \in L, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Důkaz sporem: Kdyby L byl regulární, tak existuje n s vlastnostmi z Pumping lemma.

Zvolíme $u = 0^n 1^{n+1} 0^{n+2}$.

Pak 1) vlastnost říká, že $xw = 0^l, l \leq n$. Zároveň musí platit 2), tedy $w = 0^k, 1 \leq k \leq l$.

Když teď napumpujeme xw^iy, například $i = 2$, dostaneme $xw^2y = 0^{n+k}1^{n+1}0^{n+2} \notin L$.

Tedy L není regulární. ■

Definice **Nerodovy věty.** L je regulární iff existuje ekvivalence T na $\Sigma^\star$ taková, že:

1) L je sjednocení některých tříd T
2) pokud uTv, tak $uwTvw$ pro každé $w \in \Sigma^\star$
3) T má konečný počet tříd

Důkaz sporem: Kdyby existovala T.

$1, 1^2, 1^3, ..., 1^i, ..., 1^n, ... = \left\{1^j \mid j \geq 1\right\}$ je nekonečná posloupnost 0 a 1.

T musí mít konečně mnoho tříd, proto musí existovat $i > j, i \neq j \wedge 1^i T 1^j$.

Zvolíme $w = 0^{j+1}$.

Pak podle vlastnosti 2) $\underbrace{1^i 0^{j+1}}_{\substack{i \geq j+1 \\ \notin L}} T \underbrace{1^j 0^{j+1}}_{\substack{j < j+1 \\ \in L}}$.

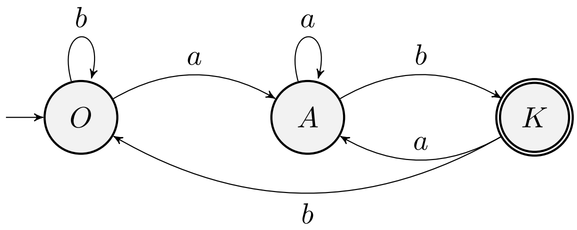
Tedy L není regulární. ■

3 Třetí cvičení

3.1 Příklad z přednášky - nalezení ekvivalencí pro DFA

Nalezněte ekvivalenci $\sim$ pro konečný automat M, který je dán tabulkou:

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$
$\rightarrow 1$	2	1	O	O	O	O	A	O	O
2	2	3	O	O	K	A	A	K	A
$\leftarrow 3$	4	5	K	O	O	K	A	O	K
4	4	3	O	O	K	A	A	K	A
5	4	5	O	O	O	O	A	O	O



3.2 Nerodova věta a Pumping lemma

Pomocí Nerodovy věty a pomocí Pumping lemmatu dokažte, že jazyk $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$ není regulární.

Definice **Nerodovy věty.** L je regulární iff existují ekvivalence T na $\Sigma^\star$ taková, že:

1) L je sjednocení některých tříd T
2) pokud uTv, tak $uwTvw$ pro každé $w \in \Sigma^\star$
3) T má konečný počet tříd

Důkaz sporem: Kdyby existovala T na $\{0,1\}^\star$.

$1, 1^2, 1^3, ..., 1^i, ..., 1^n, ... = \left\{1^j \mid j \geq 1\right\}$ je nekonečná posloupnost z $\{0,1\}$.

T má konečně mnoho tříd, tudíž $0^i T 0^j$ pro nějaké $i \neq j, i > j$.

Protože platí 2), tak $0^i w T 0^j w$ pro $w \in \{0,1\}^\star$.

Zvolme $w = 1^{i-1}$. Pak $\underbrace{0^i 1^{i-1}}_{\substack{i \geq i-1 \\ \in L}} T \underbrace{0^j 1^{i-1}}_{\substack{i-1 \geq j \\ \notin L}}$. Tedy L není regulární. ∎

Definice **Pumping lemmatu.** Když L je regulární, tak existuje $n \in L, n \geq 1$, takové, že každé $u \in L, |u| > n$ je možné rozložit na 3 slova $u = xwy$ splňující:

1) $|xw| \leq n$
2) $w \neq \varepsilon$
3) $xw^i y \in L, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Důkaz sporem: Kdyby L byl regulární, tak existuje n s vlastnostmi z Pumping lemma.

Zvolíme $u = 0^{n+1} 1^n$.

Kdyby $u = xwy$, tak 1) vlastnost říká, že $xw = 0^l, l \leq n$. Zároveň musí platit 2), tedy $w = 0^k, 1 \leq k \leq l$. Když teď napumpujeme $xw^i y$, například $i = 0$, dostaneme $xw^0 y = 0^{n+1-k} 1^n \notin L$.

Tedy L není regulární. ∎

3.3 Nalezení slova rozlišujícího stavy

Je dán DFA tabulkou:

	a	b
$\leftrightarrow 0$	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

Najděte slovo nejkratší délky, jestliže existuje, které rozliší

a) stavy 3 a 5.
b) stavy 2 a 4.

To, že slovo u rozliší dva stavy znamená, že přechodová funkce při práci nad slovem u převede jeden ze stavů do koncového stavu a druhý do stavu, který není koncový.

a) $\delta(3,a) = 0, \delta(5,a) = 0 \implies \delta^\star(3,au) = \delta^\star(5,au)$. Slovo nezačíná a.

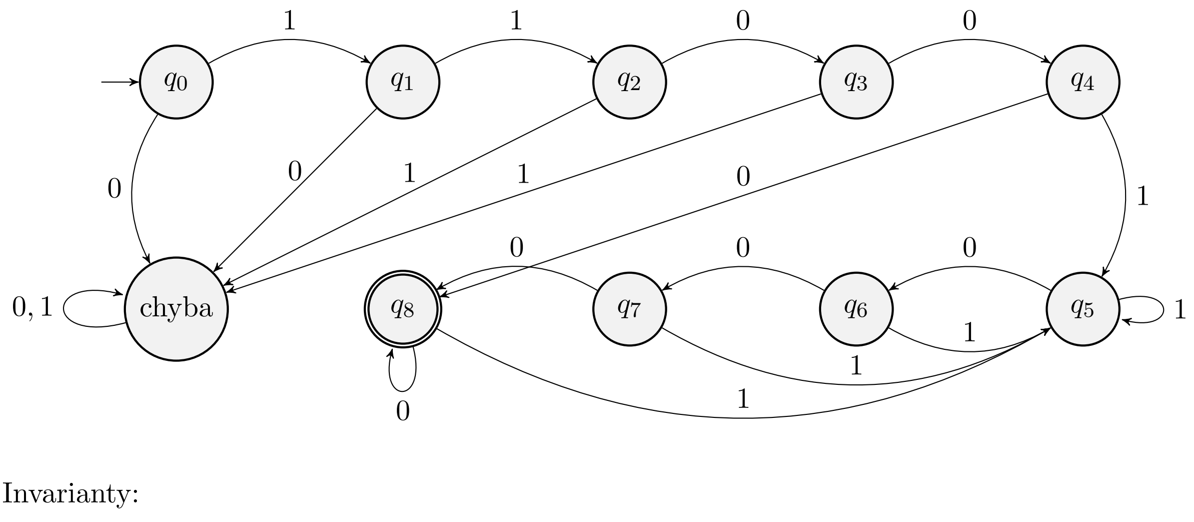
$\delta(3,b) = 2, \delta(5,b) = 3$.

$$\left.\begin{aligned} \delta^\star(3,ba) = \delta(2,a) = 4 \notin F \\ \delta^\star(5,ba) = \delta(3,a) = 0 \in F \end{aligned}\right\} \implies u = ba$$

b) $\delta(2,a) = 4, \delta(4,a) = 2$. $\delta(2,b) = 5, \delta(4,b) = 5$. Tyto stavy nelze rozlišit.

3.4 Návrh a redukce DFA podle jazyka

Navrhněte DFA, který přijímá jazyk L skládající se ze všech slov nad abecedou $\Sigma = \{0,1\}$, která začínají 1100 a končí 000. Navržený automat redukujte.



Invarianty:

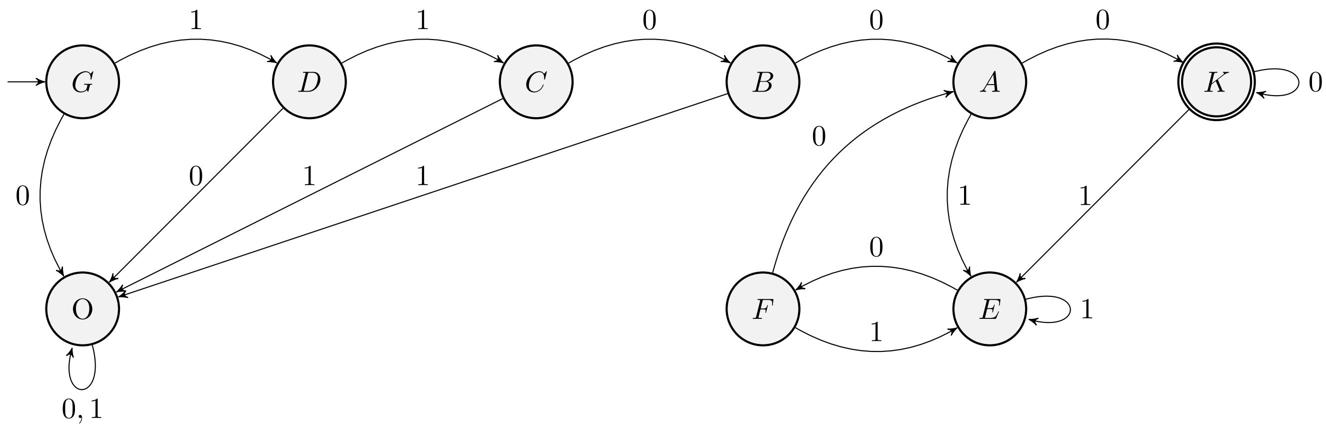
- q_0: `in`,
- q_1: začíná 1, končí 1,
- q_2: začíná 11, končí 11,
- q_3: začíná 110, končí 110,
- q_4: začíná 1100, končí 1100,
- q_5: začíná 1100, končí 1,
- q_6: začíná 1100, končí 10,

- q_7: začíná 1100, končí 100,
- q_8: začíná 1100, končí 000, `out`,
- chyba: nezačíná 1100.

Redukce podmnožinovou konstrukcí:

	0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$	0	1	$\sim_4$	0	1	$\sim_5$	0	1	$\sim_6$
$\rightarrow q_0$	ch	1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	G	O	D	G
q_1	ch	2	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	D	O	C	D	O	C	D
q_2	3	ch	O	O	O	O	O	O	O	B	O	C	B	O	C	B	O	C	B	O	C
q_3	4	ch	O	O	O	O	A	O	B	A	O	B	A	O	B	A	O	B	A	O	B
q_4	8	5	O	K	O	A	K	O	A	K	O	A	K	C	A	K	E	A	K	E	A
q_5	6	5	O	O	O	O	O	O	O	B	O	C	B	C	E	F	E	E	F	E	E
q_6	7	5	O	O	O	O	A	O	B	A	O	B	A	C	F	A	E	F	A	E	F
q_7	8	5	O	K	O	A	K	O	A	K	O	A	K	C	A	K	E	A	K	E	A
$\leftarrow q_8$	8	5	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	C	K	K	E	K	K	E	K
ch	ch	ch	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Redukovaný automat:



3.5 Srovnání dvou DFA automatů

Jsou dány dva automaty. Rozhodněte, zda jsou ekvivalentní, tj. zda přijímají stejný jazyk.

M_1:

	a	b
$\leftrightarrow 0$	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
$\leftarrow 4$	6	1
5	5	1
$\leftarrow 6$	4	2
7	7	0

M_2:

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
$\leftrightarrow G$	G	F
H	A	G

Nejdříve odstraníme nedosažitelné vztahy a pak provedeme redukci.

Odstranění nedosažitelných vztahů:

M_1 :

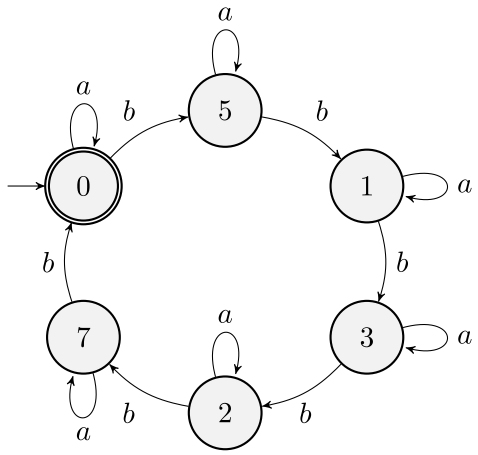
	a	b
$\leftrightarrow 0$	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
5	5	1
7	7	0

M_2 :

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
$\leftrightarrow G$	G	F
H	A	G

A teď zredukovat oba automaty.

M_1:



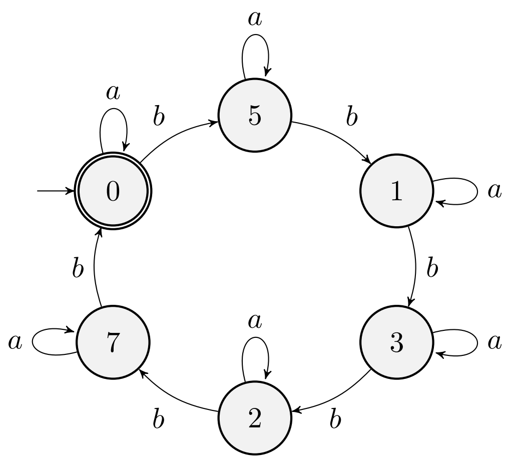
M_1 je již redukovaný.

M_2:

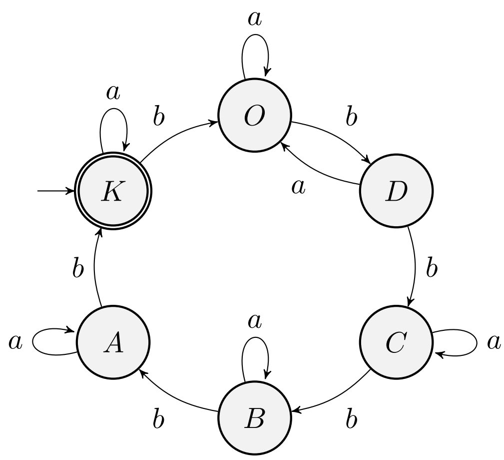
		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$	a	b	$\sim_5$
	A	H	G	O	O	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A
	B	B	A	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B
	C	E	D	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	O	D	C	E
	D	D	B	O	O	O	O	O	O	O	O	B	C	C	B	C	C	B	C
	E	C	D	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	D	O	C	D
	F	F	E	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	O
$\leftrightarrow$	G	G	F	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K	K	O	K
	H	A	G	O	O	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A	K	A

Protože má každý řádek svou vlastní třídu, M_2 je již redukovaný.

M_1:



M_2:



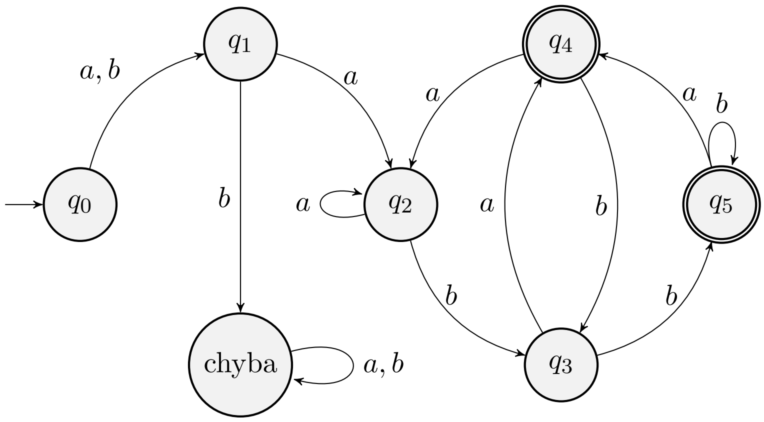
Nejsou ekvivalnetní - M_1 přijme např. slovo *bbabbbb*, které M_2 nepřijme.

3.6 Návrh a redukce DFA podle jazyka

Navrhněte DFA, který přijímá L nad abecedou $\{a, b\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že

- druhý znak slova w je a,
- předposlední znak slova w je b,
- $|w| \geq 3$.

Výsledný DFA redukujte.



Invarianty:

- q_0: $|w| < 3$, `in`,
- chyba: druhý znak je b,
- q_1: $|w| < 3$, druhý znak je ε, předposlední znak je ε,
- q_2: $|w| < 3$, druhý znak je a, předposlední znak je a, b,
- q_3: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je a,
- q_4: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je b, končí ba, `out`,
- q_5: $|w| \geq 3$, druhý znak je a, předposlední znak je b, končí bb, `out`.

Redukce podmnožinovou konstrukcí:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	D	D	E
	q_1	q_2	Chyba	O	O	O	O	O	O	O	C	O	D	C	O	D
	q_2	q_2	q_3	O	O	O	O	O	A	C	C	A	C	C	A	C
	q_3	q_4	q_5	O	K	K	A	B	K	A	B	K	A	B	K	A
$\leftarrow$	q_4	q_2	q_3	K	O	O	B	O	A	B	C	A	B	C	A	B
$\leftarrow$	q_5	q_4	q_5	K	K	K	K	B	K	K	B	K	K	B	K	K
	Chyba	Chyba	Chyba	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Protože každý řádek má svou vlastní třídu, původní DFA je již redukovaný.

4 Čtvrté cvičení

4.1 Sestrojení DFA z NFA

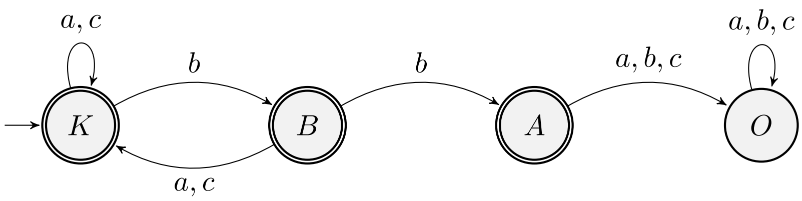
Pro dané NFA sestrojte podmnožinovou konstrukcí DFA a výsledek redukujte.

M_1 :		a	b	c
	$\leftrightarrow 1$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
	$\leftarrow 2$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$
	$\leftarrow 3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Všimněte si, že v automatu M_1 jsou všechny stavy koncové. Co z toho lze usoudit o jazyku, které je automatem přijímán?

	a	b	c	$\sim_0$	a	b	c	$\sim_1$	a	b	c	$\sim_2$	a	b	c	$\sim_3$
$\leftrightarrow \{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	B	K
$\leftarrow \{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	K	K	K	K	K	K	A	K	B	K	A	K	B
$\leftarrow \{3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	K	O	O	O	A	O	O	O	A	O	O	O	A
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Automat se redukcí nezmění.

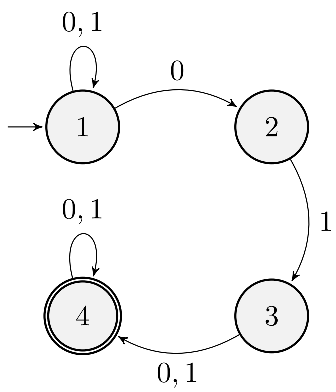


Automat nepřijíme slova obsahující sekvenci bb následovanou libovolným dalším znakem.

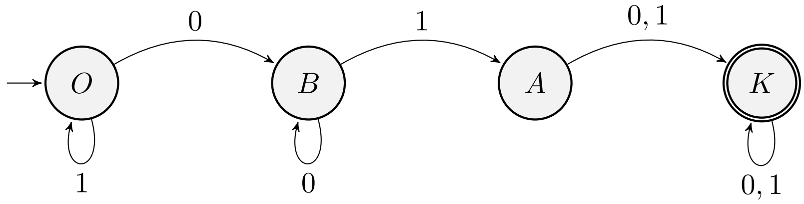
4.2 Sestrojení DFA z NFA

NFA M je dán tabulkou níže. Nakreslete jeho stavový diagram a podmnožinovou konstrukcí sestrojte DFA, který přijímá stejný jazyk. DFA zredukujte.

M :		0	1
	$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
	2	$\emptyset$	$\{3\}$
	3	$\{4\}$	$\{4\}$
	$\leftarrow 4$	$\{4\}$	$\{4\}$

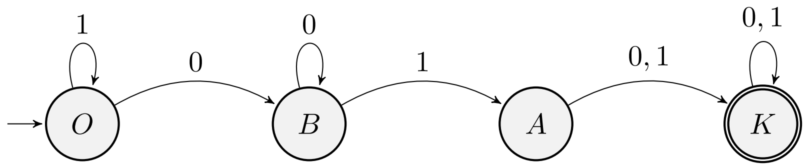


	0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$
$\rightarrow$ $\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	O	O	O	O	K	K	K	K	K	O
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	O	O	O	O	K	K	K	K	K	B
$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	O	K	K	A	K	K	A	K	K	A
$\leftarrow$ $\{1,2,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

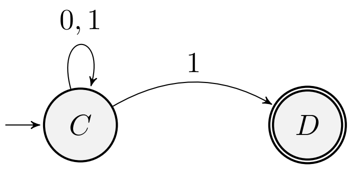


4.3 Návrh NFA dle sjednocení jazyků a redukované DFA

Navrhněte NFA přijímající jazyk $L = L_1 \cup L_2$, kde $L_1 = L(M)$, kde M je automat z 4.2, a $L_2 = \{u \mid u \text{ končí } 1\}$. K tomuto NFA zkonstruujte DFA přijímající stejný jazyk. DFA redukujte.



L_1 :

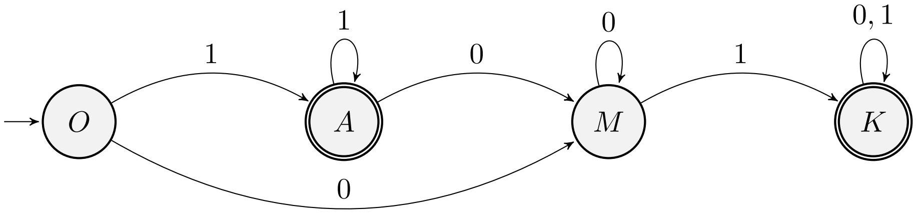


L_2:

Podmnožinová konstrukce:

	0	1	$\sim_0$	0	1	$\sim_1$	0	1	$\sim_2$	0	1	$\sim_3$
$\rightarrow$ $\{O,C\}$	$\{B,C\}$	$\{O,C,D\}$	O	O	K	O	O	A	O	M	A	O
$\{B,C\}$	$\{B,C\}$	$\{A,C,D\}$	O	O	K	O	O	K	M	M	K	M
$\leftarrow$ $\{O,C,D\}$	$\{B,C\}$	$\{O,C,D\}$	K	O	K	A	O	A	A	M	A	A
$\leftarrow$ $\{A,C,D\}$	$\{K,C\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{K,C\}$	$\{K,C\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{K,C,D\}$	$\{K,C\}$	$\{K,C,D\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

Výsledný redukovaný DFA:



4.4 Srovnání dvou NFA automatů

Jsou dány dva ε-NFA. Rozhodněte, zda přijímají stejný jazyk. Pro oba ε-NFA sestrojte redukované DFA.

M_1 :

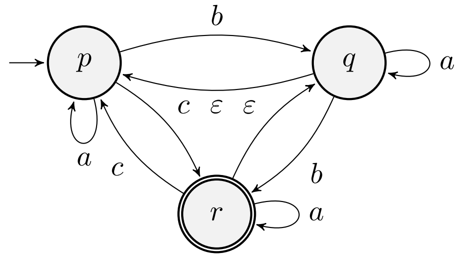
	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$\leftarrow r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

M_2 :

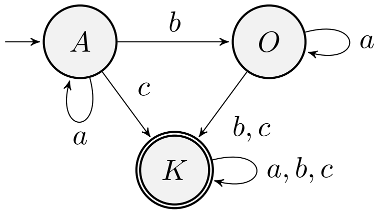
	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\{q,r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{p,q\}$
$\leftarrow r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

M_1:

	ε	a	b	c	ε-uzávěry
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varepsilon\text{-uz}(p) = \{p\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\varepsilon\text{-uz}(q) = \{p,q\}$
$\leftarrow r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\varepsilon\text{-uz}(r) = \{p,q,r\}$



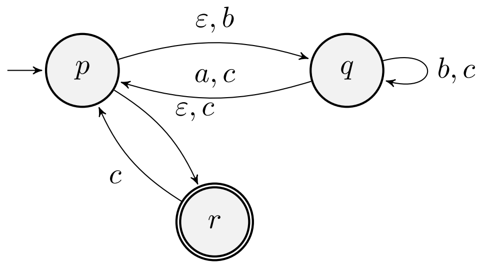
Redukovaný DFA a podmnožinová konstrukce pro M_1:



		a	b	c	$\sim_0$	a	b	c	$\sim_1$
$\rightarrow$	$\{p\}$	$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	O	O	O	K	A
	$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	O	O	K	K	O
$\leftarrow$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	K	K	K	K	K

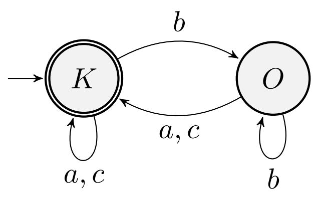
M_2:

	ε	a	b	c	ε-uzávěry
$\rightarrow p$	$\{q,r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varepsilon\text{-uz}(p) = \{p,q,r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{p,q\}$	$\varepsilon\text{-uz}(q) = \{q\}$
$\leftarrow r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\varepsilon\text{-uz}(r) = \{r\}$



Redukovaný DFA a podmnožinová konstrukce pro M_2:

		a	b	c	$\sim_0$
$\leftrightarrow$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	K
	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{q\}$	$\{p,q,r\}$	O



Z redukovaných DFA tabulek je očividné, že M_1 a M_2 nepřijímají stejný jazyk. M_2 například přijme slovo $w = a$, zatímco M_1 takové nepřijme.

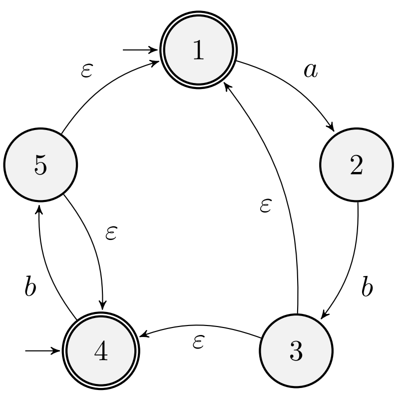
4.5 Konstrukce DFA z ε-NFA

Je dán ε-NFA. Zkonstruujte redukovaný DFA přijímající stejný jazyk jako M.

M :

	ε	a	b
$\leftrightarrow 1$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftrightarrow 4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{5\}$
5	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

ε-NFA:

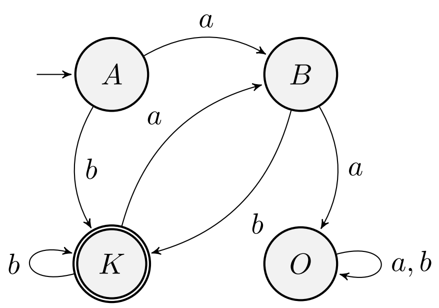


	ε	a	b	ε-uzávěry
$\leftrightarrow 1$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	ε-uz$(1) = \{1\}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$	ε-uz$(2) = \{2\}$
3	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	ε-uz$(3) = \{1,3,4\}$
$\leftrightarrow 4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{5\}$	ε-uz$(4) = \{4\}$
5	$\{1,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	ε-uz$(5) = \{1,4,5\}$

Podmnožinová konstrukce:

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\rightarrow \{1,4\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	O	O	K	A	A	K	A	B	K	A
$\{2\}$	$\emptyset$	$\{1,3,4\}$	O	O	K	A	O	K	B	O	K	B
$\leftarrow \{1,4,5\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	K	O	K	K	A	K	K	B	K	K
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow \{1,3,4\}$	$\{2\}$	$\{1,4,5\}$	K	O	K	K	A	K	K	B	K	K

Výsledný DFA:



5 Páté cvičení

5.1 Důkaz obecné vlastnosti dvou libovolných jazyků

Dokažte, že pro libovolné jazyky L_1 a L_2 nad stejnou abecedou platí $(L_1 \cup L_2)^\star = (L_1^\star L_2^\star)^\star$.

a) $(L_1 \cup L_2)^\star \subseteq (L_1^\star L_2^\star)^\star$

Nechť $w \in (L_1 \cup L_2)^\star$. Tedy $w = x_1 x_2 \dots x_k, x_i \in (L_1 \cup L_2)$.

Protože každý x_i patří buď do L_1 nebo do L_2, můžeme každé takové w chápat jako zřetězení slov, která střídavě patří do $L_1^\star$ nebo $L_2^\star$. Tedy slova z $(L_1 \cup L_2)$ lze seskupit do bloků tak, že tyto bloky patří buď do $L_1^\star$ nebo $L_2^\star$.

Například: $w = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_m v_m$, kde $u_i \in L_1^\star, v_i \in L_2^\star$.

To znamená, že $w \in (L_1^\star \cup L_2^\star)$. Jelikož w je libovolné slovo z $(L_1^\star L_2^\star)^\star$ platí $(L_1 \cup L_2)^\star \subseteq (L_1^\star L_2^\star)^\star$.

b) $(L_1^\star L_2^\star)^\star \subseteq (L_1 \cup L_2)^\star$

Nechť $w \in (L_1^\star L_2^\star)^\star$. Tedy $w = y_1 y_2 \dots y_k, y_i \in L_1^\star L_2^\star$.

Každé $y_i \in L_1^\star L_2^\star$ lze dále rozepsat jako zřetězení slov $u_1 v_1 \dots u_m v_m$, kde $u_j \in L_1^\star, v_j \in L_2^\star$.

Tedy každé slovo y_i je posloupnost slov z L_1 a L_2, což znamená, že všechny y_i jsou tvořeny prvky z $L_1 \cup L_2$. Proto celé w lze vyjádřit jako zřetězení slov z $L_1 \cup L_2$, což znamená, že $w \in (L_1 \cup L_2)^\star$. A tedy platí $(L_1^\star L_2^\star)^\star \subseteq (L_1 \cup L_2)^\star$.

5.2 Tvorba regulárního výrazu reprezentujícího jazyk

Napište regulární výraz, který reprezentuje jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$, jestliže výraz existuje.

a) L se skládá ze všech slov, které obsahují pouze 0.
b) L se skládá ze všech slov, které obsahují přesně jednu 1.
c) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň jednu 1.
d) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň dvě 1.
e) L se skládá ze všech slov, které obsahují sudý počet 1.
f) L se skládá ze všech slov, které obsahují lichý počet 1.

Odpovědi zdůvodněte.

a) $0^\star 0 0^\star$.
b) $0^\star 1 0^\star$.
c) $0^\star 1 (0+1)^\star$.
d) $0^\star 1 0^\star 1 (0+1)^\star$.
e) $(0^\star 1 0^\star 1)^\star 0^\star$.
f) $0^\star 1 (0^\star 1 0^\star 1)^\star 0^\star$.

Zdůvodnění:

a) Vynutíme si alespoň jednu nulu, protože prázdné slovo neobsahuje 0. Zároveň umožníme pomocí Kleenyho operátoru libovolný počet 0 na obou stranách slova. Žádnou 1 nepovolíme.
b) Před první 1 povolíme libovolný počet 0. Po první 1 následně povolíme pouze libovolný počet 0.
c) Před první 1 povolíme libovolný počet 0. Po první 1 následně povolíme všechny znaky abecedy Σ v libovolném počtu.
d) Dovolíme libovolný počet 0, po kterých následuje právě jedna 1. Následovat může následovat libovolný počet 0. Po té zas vynutíme právě jednu 1. Po této sekvenci může následovat libovolný počet znaků abecedy Σ.

e) Zde mohou nastat dva případy: slovo neobsahuje žádnou 1, nebo jich obsahuje sudý počet. Pokud neobsahuje žádnou 1, můžeme celou závorku přeskočit díky Kleenyho operátoru, pak přijmeme pouze libovolný počet 0. Pokud obsahuje jedničku, závorka nám zaručí, že jich bude nutně sudý počet. Mezi nimi na všech stranách může být libovolný počet 0.
f) Zde vynutíme alespoň jednu 1 a pokud by se mělo ve slově vyskytovat více 1, tak závorka zaručí, že vždy přijmeme dvojici 1. Tím bude v celém slově stále lichý počet již zpracovaných 1. Znovu z obou stran obklopeny libovolným počtem 0.

5.3 Hledání slov splňující různé regulární výrazy

Jazyk L_1 je reprezentován regulárním výrazem $r_1 = 0^\star 1^\star 0^\star 1^\star 0^\star$ a jazyk L_2 je reprezentován regulárním výrazem $r_2 = (01 + 10)^\star$.

a) Najděte nejkratší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.
b) Najděte nejdelší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.
c) Najděte nejkratší slovo, které leží v L_1, ale neleží v L_2.
d) Najděte nejkratší slovo, které neleží ve sjednocení $L_1 \cup L_2$.

Odpovědi zdůvodněte.

a) 01 nebo 10.
b) 01100110.
c) 0 nebo 1, protože délka $\notin L_2$.
d) 10101.

Zdůvodnění:

a) Silnější restrikci do průniku vnáší L_2. L_2 vynucuje vybrání si jedné z dvojic 10 nebo 01. L_1 nám obě varianty povoluje.
b) Teď naopak využijeme flexibility L_1. Jedinou povinností je používat vždy dvojice, kvůli L_2. Pro visualizaci: $01^2 0^2 1^2 0$. To má přesně tvar jako r_1.
c) Protože L_2 vyžaduje dvojice, zaměříme se na slova s menší délkou: 0, 1. Obě varianty L_1 přijme.
d) Musíme porušit dvojice z L_2 a zároveň pravidelné střídání 0 a 1 z L_1. Stačí tedy prohodit pořadí střídání a aby slovo mělo lichou délku. Také je potřeba, aby délka byla alespoň $|r_1|$, kvůli L_1.

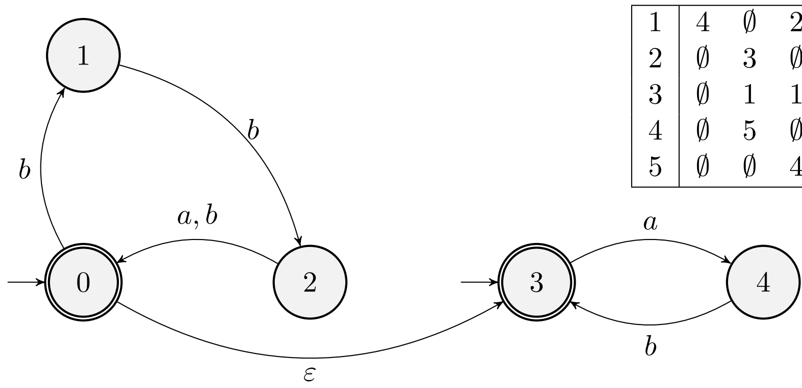
5.4 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $r = (baa + bab)^\star(ab)^\star$. K r zkonstruujte redukovaný DFA, který přijímá jazyk reprezentovaný tímto regulárním výrazem.
(Návod: Postupujte dvěma způsoby; jednak obecným postupem z přednášky, jednak rozdělením na podvýrazy, pro které je možné najít NFA přímo a pak použitím konstrukcí z důkazů faktu, že třída regulárních jazyků je uzavřena na sjednocení, zřetězení a Kleeneho operátor.)

1. Obecný postup

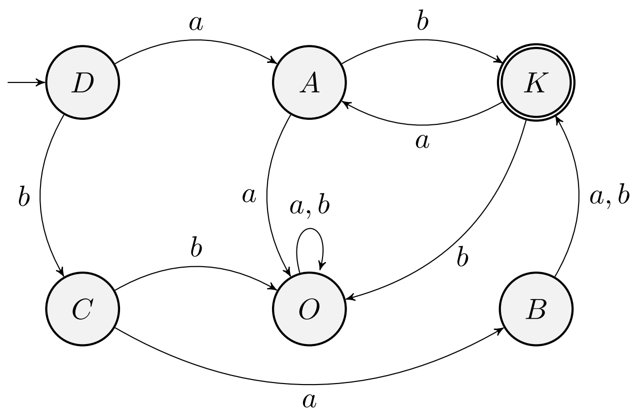
$(baa + bab)^\star \equiv (ba(a+b))^\star$

	ε	a	b	ε uzávěry
1	4	$\emptyset$	2	ε-uz(1) $= \{1,4\}$
2	$\emptyset$	3	$\emptyset$	ε-uz(2) $= \{2\}$
3	$\emptyset$	1	1	ε-uz(3) $= \{3\}$
4	$\emptyset$	5	$\emptyset$	ε-uz(4) $= \{4\}$
5	$\emptyset$	$\emptyset$	4	ε-uz(5) $= \{5\}$



Podmnožinová konstrukce:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\leftrightarrow$	$\{1,4\}$	5	2	K	O	O	K	A	O	K	A	C	D
	5	$\emptyset$	4	O	O	K	A	O	K	A	O	K	A
	2	3	$\emptyset$	O	O	O	O	B	O	C	B	O	C
$\leftarrow$	4	5	$\emptyset$	K	O	O	K	A	O	K	A	O	K
	3	$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	O	K	K	B	K	K	B	K	K	B
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O



2. postup Rozdělením na podvýrazy

I. krok očíslování

$(b_1a_2a_3 + b_4a_5b_6)^\star(a_7b_8)^\star \equiv (b_1a_2(a_3+b_4))^\star(a_5b_6)^\star$

II. krok

Pro jazyk, který je přijímaný regulárním výrazem r platí:

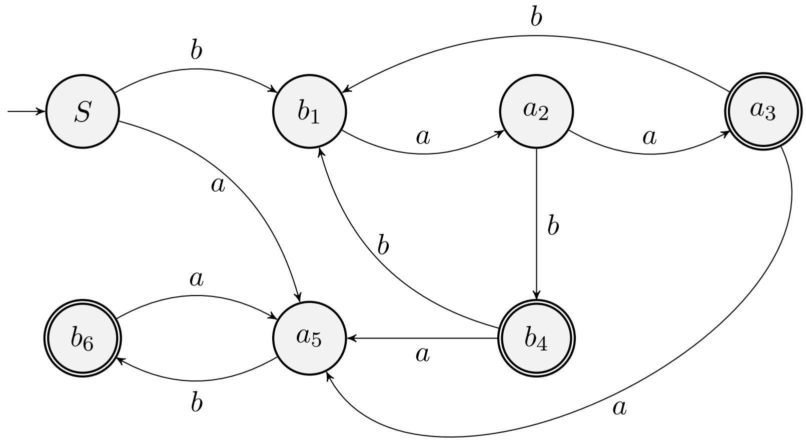
výraz může začínat: b_1, a_5

mohou po sobě následovat: $\boldsymbol{b_1}$: a_2; $\boldsymbol{a_2}$: a_3, b_4; $\boldsymbol{a_3}$: b_1, a_5; $\boldsymbol{b_4}$: b_1, a_5; $\boldsymbol{a_5}$: b_6; $\boldsymbol{b_6}$: a_5

výraz může končit: a_3, b_4, b_6

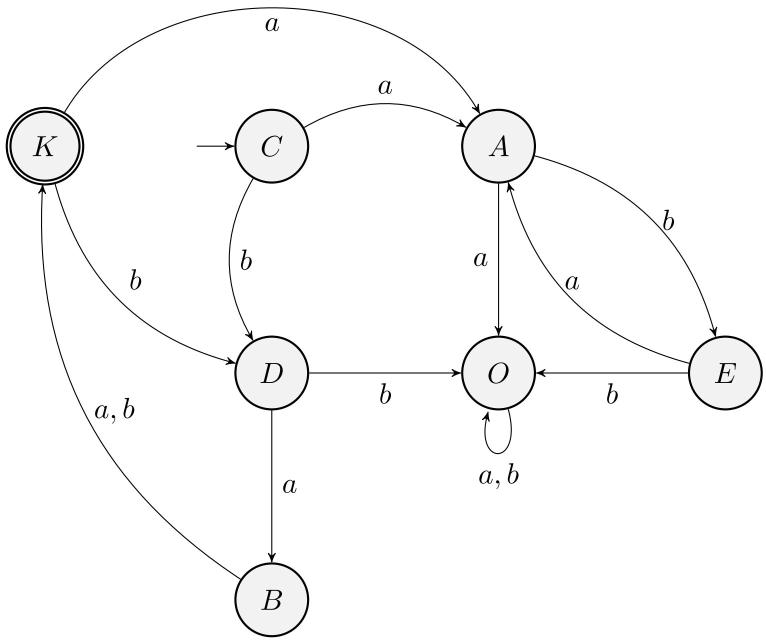
je ε v L? Ano.

III. krok



IV. podmnožinová konstrukce DFA + redukce

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\rightarrow$	S	5	1	O	O	O	O	A	O	C	A	D	C
	5	$\emptyset$	6	O	O	K	A	O	K	A	O	E	A
	1	2	$\emptyset$	O	O	O	O	B	O	D	B	O	D
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	6	5	$\emptyset$	K	O	O	K	A	O	E	A	O	E
	2	3	4	O	K	K	B	K	K	B	K	K	B
$\leftarrow$	3	5	1	K	O	O	K	A	O	K	A	D	K
$\leftarrow$	4	5	1	K	O	O	K	A	O	K	A	D	K

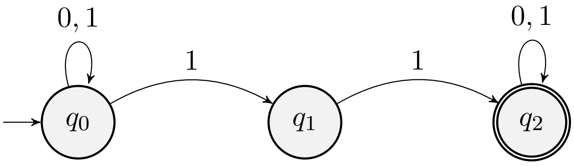


5.5 Tvorba DFA a regulárního výrazu dle jazyka

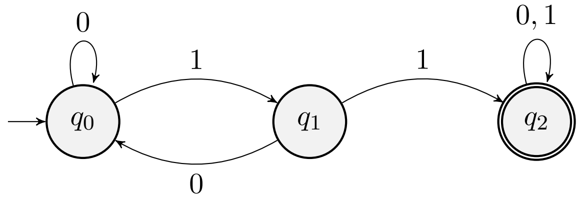
Je dán jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde $L = \{w \mid w \text{ neobsahuje } 11 \text{ jako podslovo}\}$. Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá L. Pro jazyk L najděte regulární výraz, který ho reprezentuje (použijte úpravy grafu z přednášky).

$\mathcal{L} = \{w \mid w \textbf{ obsahuje } 11 \text{ jako podslovo}\}$.

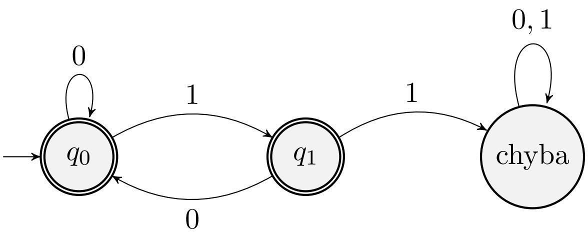
$\mathcal{L}$ NFA:



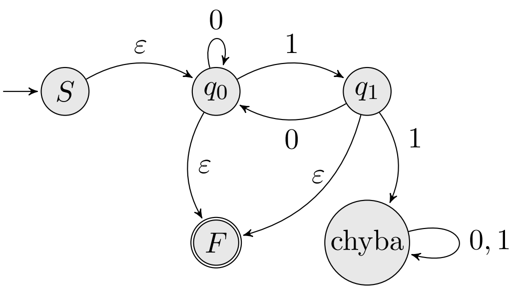
$\mathcal{L}$ DFA:



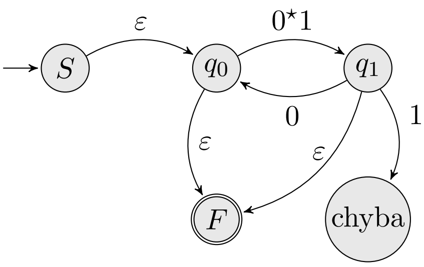
L DFA:



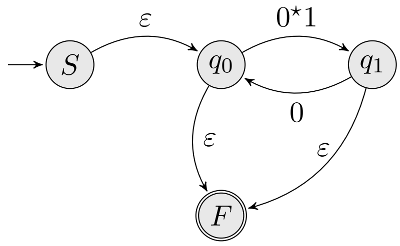
1. zavedu stavy S, F:



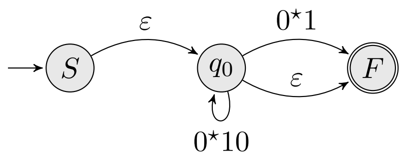
2. odstraňuji smyčky:



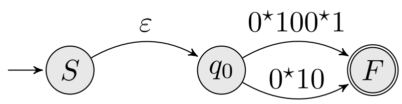
3. odstraňuji vrchol *chyba*:



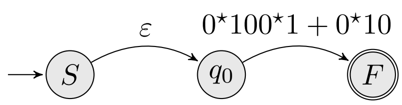
4. odstraňuji vrchol q_1:



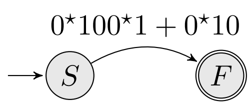
5. odstraňuji smyčky:



6. odstraňuji paralelní hrany:



7. odstraňuji vrchol A:



Finální regulární výraz pro L: $r = 0^\star 100^\star 1 + 0^\star 10$.

6 Šesté cvičení

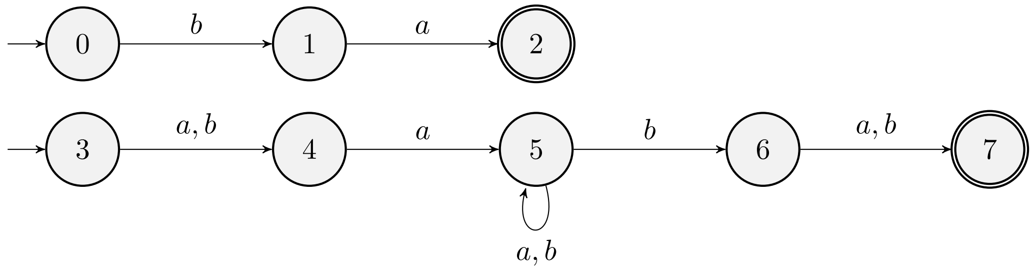
6.1 Návrh NFA a redukovaný DFA

Navrhněte NFA, který přijímá jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že

- druhý znak slova w je a,
- předposlední znak slova w je b.

K danému NFA (není-li již DFA) sestrojte podmnožinovou konstrukcí DFA přijímající stejný jazyk. Výsledný DFA redukujte.

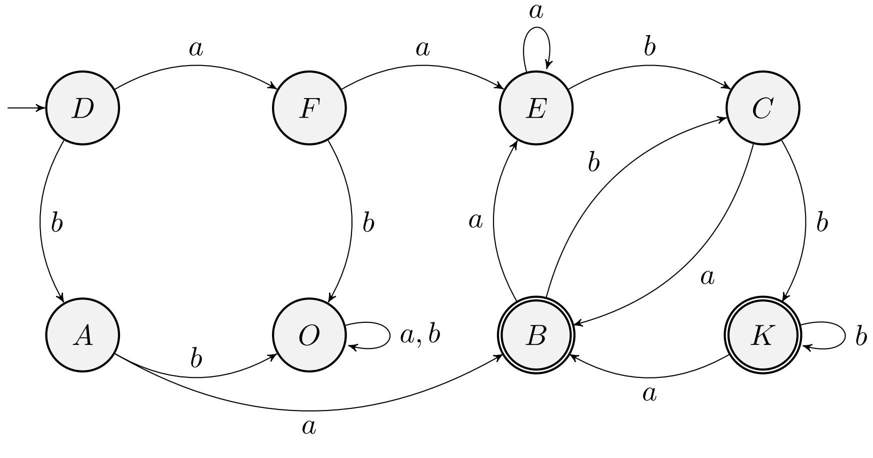
NFA:



Podmnožinová konstrukce:

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$
$\rightarrow$	$\{0,3\}$	$\{4\}$	$\{1,4\}$	O	O	O	O	O	A	D	O	A	D	F	A	D
	$\{4\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	E	O	F	E	O	F
	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$	$\emptyset$	O	K	O	A	B	O	A	B	O	A	B	O	A
	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5,6\}$	O	O	O	O	O	C	E	E	C	E	E	C	E
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	$\{2,5\}$	$\{5\}$	$\{5,6\}$	K	O	O	B	O	C	B	E	C	B	E	C	B
	$\{5,6\}$	$\{5,7\}$	$\{5,6,7\}$	O	K	K	C	B	K	C	B	K	C	B	K	C
$\leftarrow$	$\{5,7\}$	$\{5\}$	$\{5,6\}$	K	O	O	B	O	C	B	E	C	B	E	C	B
$\leftarrow$	$\{5,6,7\}$	$\{5,7\}$	$\{5,6,7\}$	K	K	K	K	B	K	K	B	K	K	B	K	K

DFA:



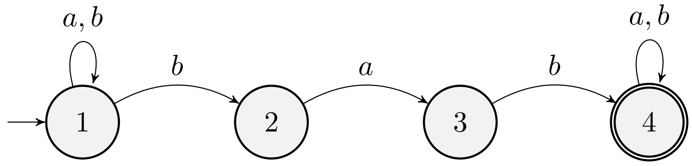
6.2 Návrh NFA a redukovaný DFA

Je dán jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$ takto:

$$L = \{w \mid w = ubabv; u, v \in \{a, b\}^\star\},$$

tj. L se skládá ze všech slov, které obsahují slovo bab jako podslovo. Zkonstruujte nejprve NFA N, který přijímá L. Podmnožinovou konstrukcí k N zkonstruujte DFA a ten pak zredukujte.

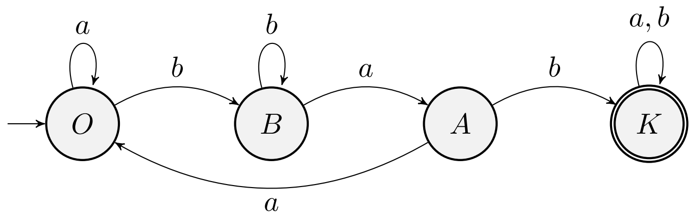
NFA:



Podmnožinová konstrukce:

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\rightarrow$ $\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	O	O	O	O	O	O	O	O	B	O
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	O	O	O	O	A	O	B	A	B	B
$\{1,3\}$	$\{1\}$	$\{1,2,4\}$	O	O	K	A	O	K	A	O	K	A
$\leftarrow$ $\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{1,3,4\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
$\leftarrow$ $\{1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

DFA:



6.3 Důkaz minimálního počtu stavů DFA pro jazyk

Zjistěte, jaký je minimální počet stavů DFA, který přijímá jazyk $L_n = \{u1v \mid |v| = n - 1\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$. Zdůvodněte. Jak by se změnil výsledek, kdyby bylo $\Sigma = \{0, 1, 2\}$?

Jazyk L obsahuje všechny slova nad abecedou Σ takové, že slovo končí znakem 1 a za ním následuje přesně $n - 1$ libovolných znaků z Σ. Automat tedy musí rozeznat, zda poslední symbol 1 padne přesně n pozic před koncem slova.

Tedy potřebujeme stav pro každý možný počet znaků přečtených od posledního 1, tj. od 0 do n. Pokud přečteme více než n znaků od posledního 1, můžeme tento stav sloučit do jednoho.

Proto minimální počet stavů pro abecedu $\Sigma = \{0, 1\}$ je $n + 1$.

Rozšíření abecedy nemění zásadní strukturu automatu. DFA nad větší abecedou musí stále sledovat jen vzdálenost od posledního výskytu symbolu 1. Přítomnost dalších symbolů nemá vliv na logiku počítání.

Takže minimální počet stavů pro abecedu $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ je také $n + 1$.

6.4 Pumping lemma pro doplněk

Dokažte nebo vyvraťte toto tvrzení (Pumping lemma pro doplněk):

Pro každý regulární jazyk L nad abecedou Σ (tj. jazyk, který je přijímán nějakým DFA) existuje přirozené číslo n s touto vlastností:

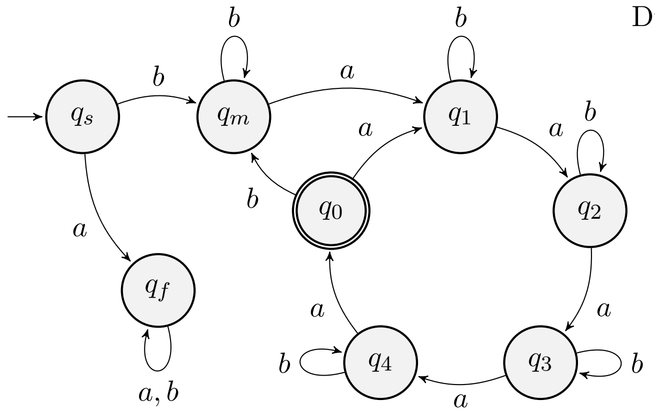
Každé slovo $u \notin L$, které je delší než n (tj. $|u| > n$) lze rozdělit na tři slova $u = xwy$, tak, že

1. $|xw| \leq n$,
2. $w \neq \varepsilon$,
3. pro každé přirozené $i = 0, 1, ...$ platí $xw^iy \notin L$.

6.5 Návrh DFA dle jazyka

Navrhněte deterministický konečný automat (DFA), který přijímá jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$, kde L obsahuje právě všechna slova w taková, že $|w|_a$ je dělitelné 5, w začíná b a končí a.

O navrženém automatu ukažte, že opravdu přijímá daný jazyk.



Důkaz pomocí invariantů:

- q_s: `in`,
- q_m: $|w|_a = 5k, k \in \mathbb{Z}$, začíná b, končí b,
- q_1: $|w|_a = 5k + 1$, začíná b,
- q_2: $|w|_a = 5k + 2$, začíná b,
- q_3: $|w|_a = 5k + 3$, začíná b,
- q_4: $|w|_a = 5k + 4$, začíná b,
- q_0: $|w|_a = 5k$, začíná b, končí a, `out`,
- q_f: začíná a.

6.6 Návrh DFA součinovou konstrukcí

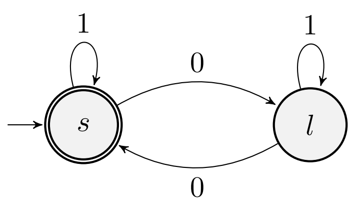
Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde

$$L = \{w \mid |w|_0 \text{ je sudé a za každým symbolem 1 je symbol 0}\} .$$

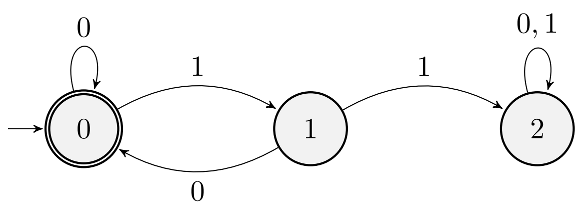
Postupujte buď součinovou konstrukcí nebo přímo. V druhém případě řádně zdůvodněte, proč M opravdu přijímá jazyk L.

Postup součinovou konstrukcí: Vytvoříme dva automaty, jeden pro pravidlo $|w|_0$ je sudé, a druhý pro "za každým symbolem 1 je symbol 0".

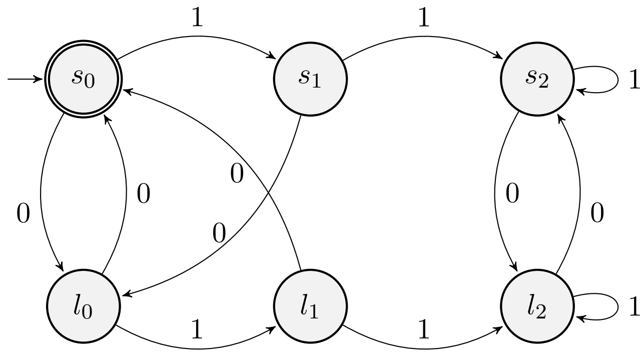
1.



2.



DFA sestavený součinovou konstrukcí dvou výše nakreslených automatů:

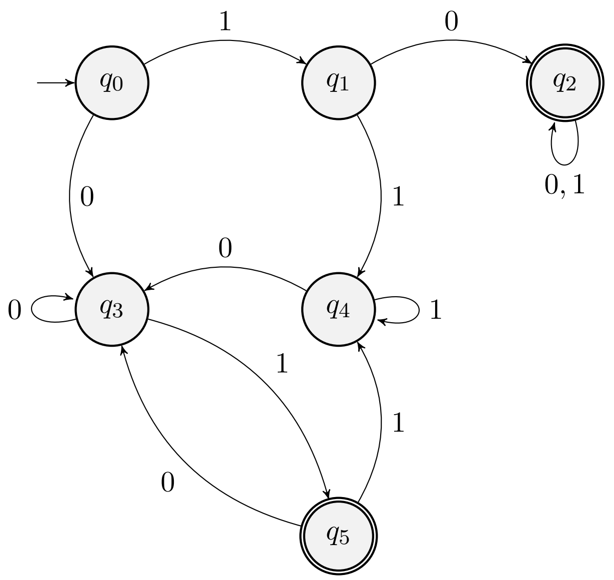


6.7 Návrh DFA

Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde

$$L = \{w \mid w \text{ začíná 10 nebo končí 01}\}\,.$$

Zdůvodněte, proč M přijímá jazyk L.



Důkaz pomocí invariantů:

- q_0: `in`,
- q_1: začíná 1,
- q_2: začíná 10, `out`,
- q_3: nezačíná 10, končí 0,
- q_4: nezačíná 10, končí 1,
- q_5: nezačíná 10, končí 01, `out`.

Podmnožinová konstrukce:

		0	1	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$
$\rightarrow$	q_0	q_3	q_1	O	O	O	O	B	A	D
	q_1	q_2	q_4	O	K	O	A	K	O	A
$\leftarrow$	q_2	q_2	q_2	K	K	K	K	K	K	K
	q_3	q_3	q_5	O	O	K	B	B	C	B
	q_4	q_3	q_4	O	O	O	O	B	O	O
$\leftarrow$	q_5	q_3	q_4	K	O	O	C	B	O	C

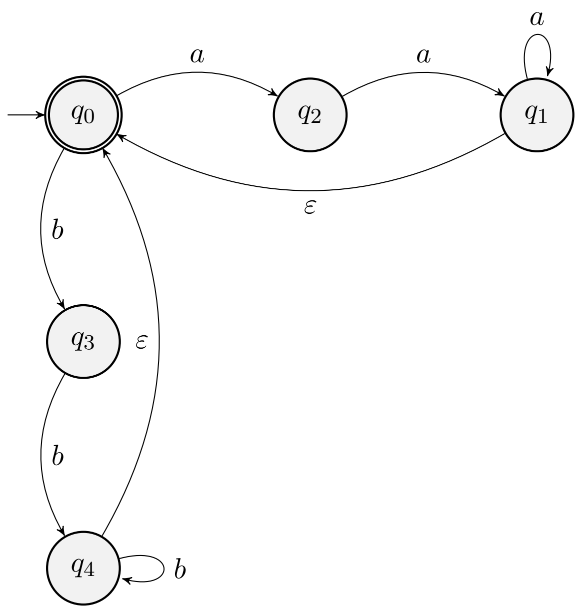
Protože má každý stav svou vlastní třídu, původní automat je již redukovaný.

7 Sedmé cvičení

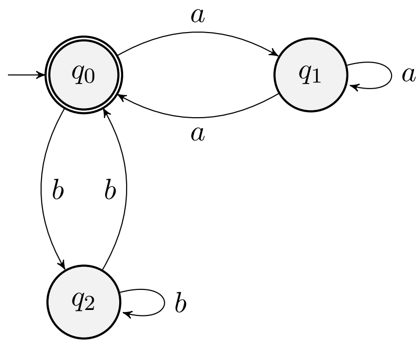
7.1 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $(\mathbf{aaa}^\star + \mathbf{bbb}^\star)^\star$. K danému výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

I. $(\mathbf{aaa}^\star + \mathbf{bbb}^\star)^\star$



zjednodušení: výraz se dá přepsat jako
II. $(\mathbf{aa}^\star\mathbf{a} + \mathbf{bb}^\star\mathbf{b})^\star$



NFA:

		a	b
$\leftrightarrow$	q_0	q_1	q_2
	q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
	q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$

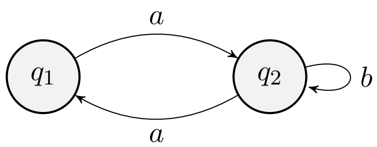
Podmnožinová konstrukce pro II.

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$
$\leftrightarrow$	q_0	q_1	q_2	K	O	O	A	B	C	A
	q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	O	K	O	B	K	O	B
$\leftarrow$	q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$	O	O	K	C	O	D	C
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_2	K	K	O	K	K	C	K
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	$\{q_0, q_2\}$	q_1	$\{q_0, q_2\}$	K	O	K	D	B	D	D

7.2 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

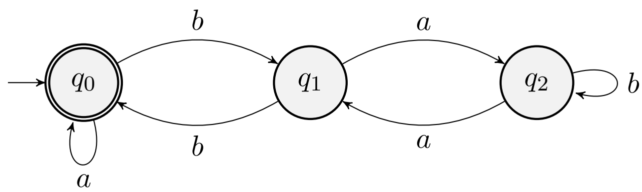
Je dán regulární výraz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star\mathbf{b})^\star$. K danému výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

rozebereme si výraz:
veprostřed máme $(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star$



a nabalujeme zbytek

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{ab}^\star\mathbf{a})^\star\mathbf{b})^\star$



Podmnožinová konstrukce.

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$
$\leftrightarrow$	q_0	q_0	q_1	K	K	O	K
	q_1	q_2	q_0	O	O	K	A
	q_2	q_1	q_2	O	O	O	O

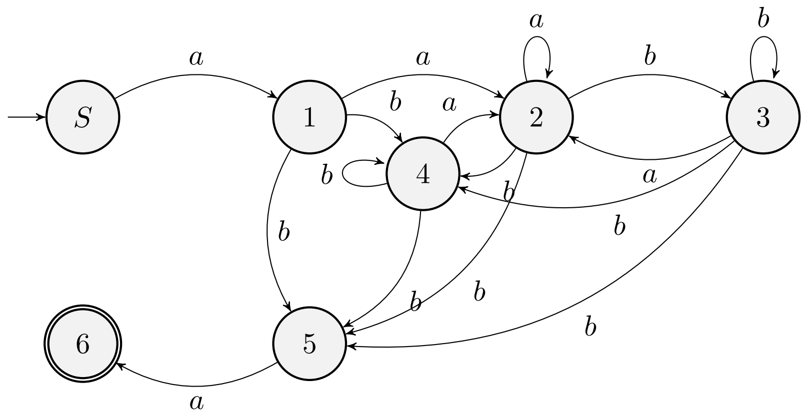
Protože každý řádek má svou třídu, automat je již redukovaný.

7.3 Konstrukce redukovaného DFA k regulárnímu výrazu

Je dán regulární výraz $\mathbf{a}(\mathbf{ab}^\star + \mathbf{b})^\star\mathbf{ba}$. K danému regulární výrazu sestrojte redukovaný DFA M, který přijímá jazyk reprezentovaný regulárním výrazem.

$\mathbf{a}(\mathbf{ab}^\star + \mathbf{b})^\star\mathbf{ba}$:
$a_1(a_2b_3^\star + b_4)^\star b_5a_6$

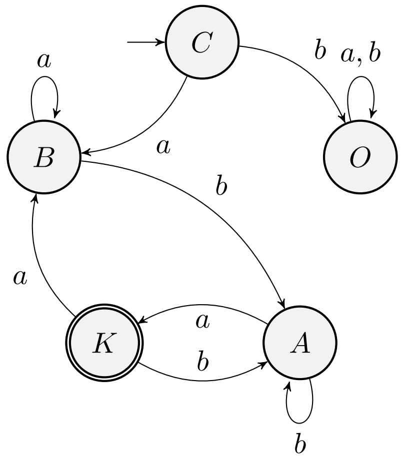
NFA		a	b
$\rightarrow$	S	1	$-$
	1	2	$4,5$
	2	2	$3,4,5$
	3	2	$3,4,5$
	4	2	$4,5$
	5	6	$-$
$\leftarrow$	6	$-$	$-$



Podmnožinová konstrukce.

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$
$\rightarrow$	$\{S\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	B	O	C	B	O	C
	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{4,5\}$	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4,5\}$	O	O	O	O	O	A	B	B	A	B	B	A	B
	$\{4,5\}$	$\{2,6\}$	$\{4,5\}$	O	K	O	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A
	$\{3,4,5\}$	$\{2,6\}$	$\{3,4,5\}$	O	K	O	A	K	A	A	K	A	A	K	A	A
$\leftarrow$	$\{2,6\}$	$\{2\}$	$\{3,4,5\}$	K	O	O	K	O	A	K	B	A	K	B	A	K

DFA:



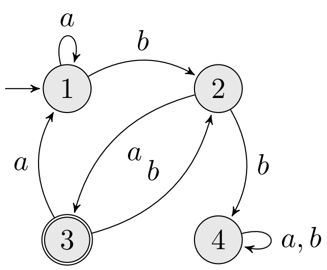
7.4 Tvorba regulárního výrazu z DFA

Pro daný DFA M vytvořte regulární výraz, který reprezentuje jazyk $L(M)$.

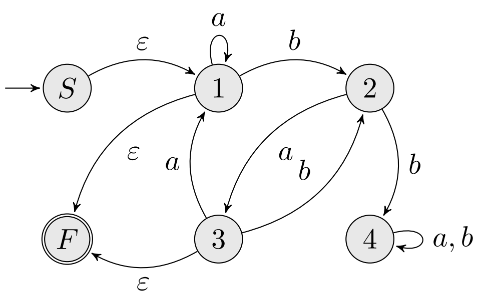
M:

		a	b
$\leftrightarrow$	1	1	2
	2	3	4
$\leftarrow$	3	1	2
	4	4	4

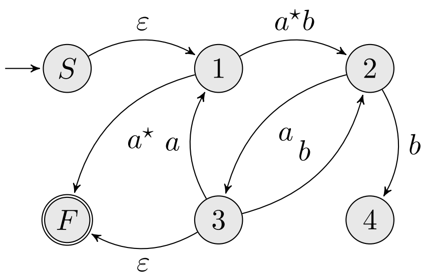
0. DFA:



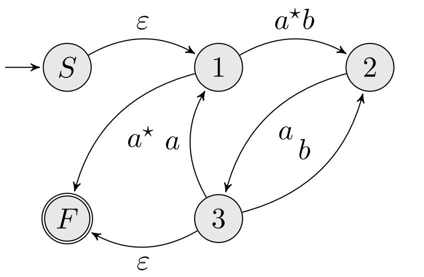
1. zavedu stavy S, F:



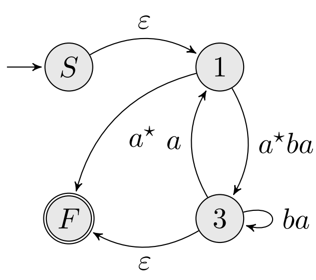
2. odstraňuji smyčky:



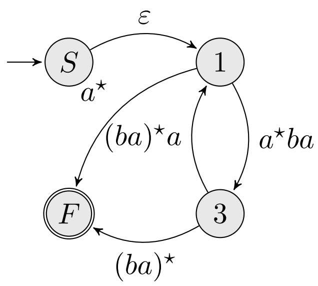
3. odstraňuji vrchol 4:



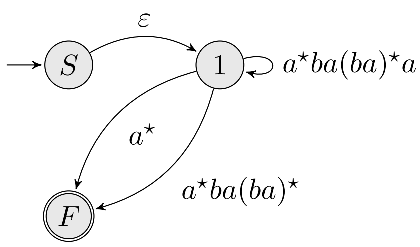
4. odstraňuji vrchol 2:



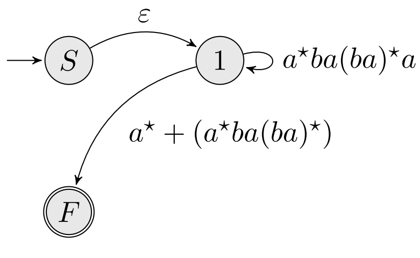
5. odstraňuji smyčky:



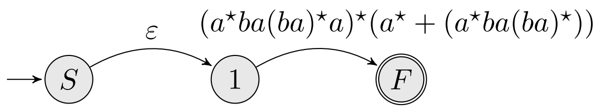
6. odstraňuji vrchol 3:



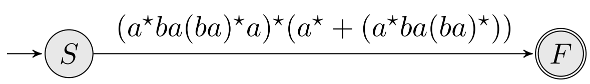
7. odstraňuji paralelní hrany:



8. odstraňuji smyčky:

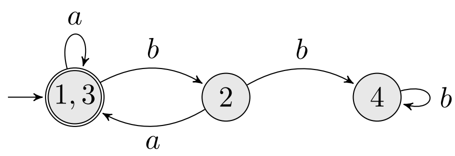


9. odstraňuji vrchol 1:

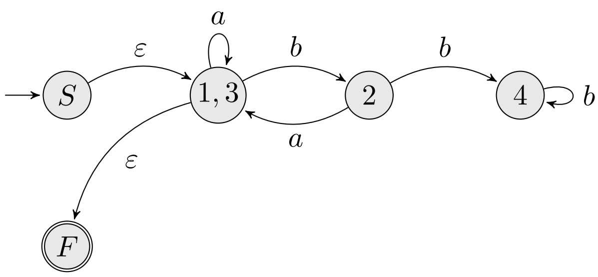


lifehack: dá se redukovat (stavy 1 a 3 jsou ekvivalentní):

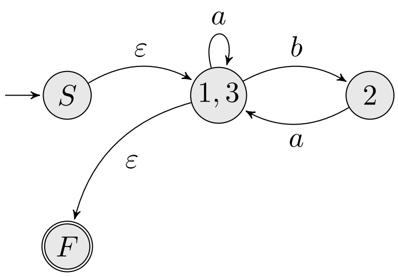
	a	b
$\leftrightarrow$ 1	1	2
2	3	4
$\leftarrow$ 3	1	2
4	4	4



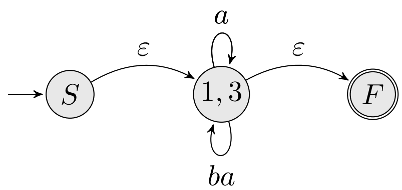
1. přidám S, F:



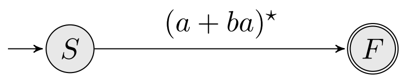
2. zbavím se nodu č. 4:



3. odstraním node č. 2:



4.spojím obsah smyček, odstraním smyčku a node:



8 Osmé cvičení

8.1 Konstrukce regulární gramatiky k automatu

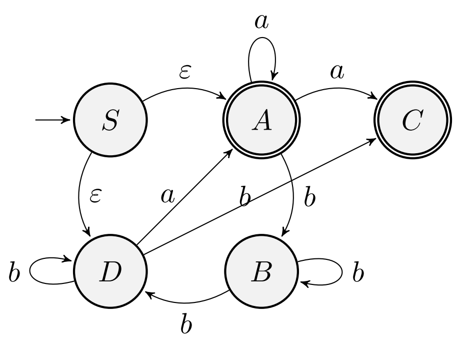
K automatu M, který je dán následující tabulkou, zkostruujte regulární gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = L(M)$.

M:

	a	b
$\leftrightarrow$ A	A, C	B
B	$\emptyset$	B, D
$\leftarrow$ C	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$ D	A	C, D

$\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$
$N = \{S, A, B, C, D\}$
$\Sigma = \{a, b\}$

mám více vstupů $\rightarrow$ přidám si S



$$
\begin{aligned}
P: S &\rightarrow A \mid D \\
A &\rightarrow aA \mid aC \mid bB \mid \varepsilon \\
B &\rightarrow bB \mid bD \\
C &\rightarrow \varepsilon \\
D &\rightarrow aA \mid bC \mid bD
\end{aligned}
$$

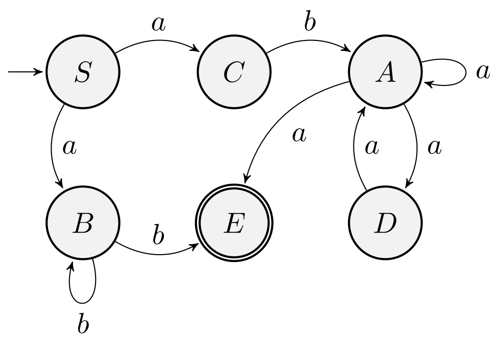
8.2 Tvorba DFA ke gramatice 3. typu

Ke gramatice $\mathcal{G}$ typu 3 zkonstruujte konečný automat, který přijímá jazyk $L(\mathcal{G})$. Gramatika $\mathcal{G} = (N, \{a, b\}, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$ a pravidla jsou

$$
\begin{aligned}
P\colon S &\rightarrow abA \mid aB \\
A &\rightarrow aA \mid aaA \mid a \\
B &\rightarrow bB \mid b
\end{aligned}
$$

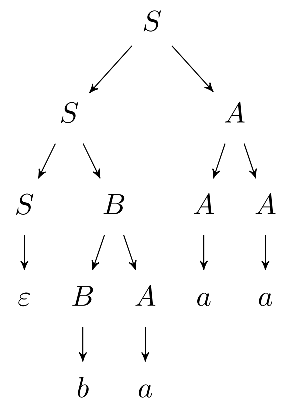
$P:$	$S \rightarrow abA \mid aB$	překáží mi abA
	$C \rightarrow bA$	
	$S \rightarrow aC \mid aB$	nové pravidlo S
	$A \rightarrow aA \mid aaA \mid a$	zase nám vadí aaA
	$D \rightarrow aA$	
	$E \rightarrow \varepsilon$	
	$A \rightarrow aA \mid aD \mid aE$	nové pravidlo A
	$B \rightarrow bB \mid bE$	nové pravidlo B

sestavím automat podle nových pravidel



8.3 Práce s derivačním stromem bezkontextové gramatiky

Je dán derivační strom v bezkontextové gramatice:



a) Napište pravidla minimální CF gramatiky, ve které je to derivační strom.
b) Napište levou derivaci odpovídající tomuto derivačnímu stromu.
c) Rozhodněte, zda je gramatika víceznačná.

a)

$$
\begin{aligned}
P:\quad & S \to SA \mid SB \mid \varepsilon \\
& A \to AA \mid a \\
& B \to BA \mid b
\end{aligned}
$$

c) je víceznačná - tj. je možné alespoň jedno slovo vygenerovat dvěma způsoby. Například díky pravidlu $A \to AA$.

b) $S \overset{S\to SA}{\Longrightarrow} SA \overset{S\to SB}{\Longrightarrow} SBA \overset{S\to\varepsilon}{\Longrightarrow} BA \overset{B\to BA}{\Longrightarrow} BAA \overset{B\to b}{\Longrightarrow} bAA \overset{A\to a}{\Longrightarrow} baA \overset{A\to AA}{\Longrightarrow} baAA \overset{A\to a^{(2)}}{\Longrightarrow} baaa.$

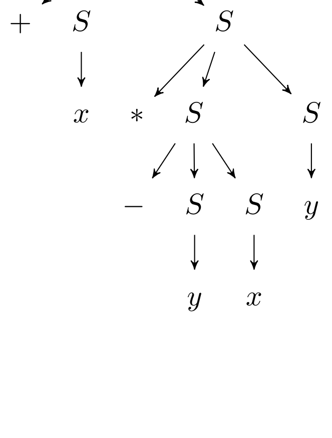
8.4 Tvorba derivačního stromu k bezkontextové gramatice

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S\}$, $\Sigma = \{+, \star, -, x, y\}$, s pravidly

$$S \to +SS \mid \star SS \mid -SS \mid x \mid y$$

- Nakreslete derivační strom, který má za výsledek slovo $w = +x \star -yxy$.
- Zkonstruujte levou derivaci slova w odpovídající derivačnímu stromu z části a).

1.



2.

$$
\begin{aligned}
& S \overset{S\to +SS}{\Longrightarrow} +SS \overset{S\to x}{\Longrightarrow} +xS \overset{S\to\star SS}{\Longrightarrow} +x\star SS \Longrightarrow \\
& \overset{S\to -SS}{\Longrightarrow} +x\star -SSS \overset{S\to y}{\Longrightarrow} +x\star -ySS \Longrightarrow \\
& \overset{S\to x}{\Longrightarrow} +x\star -yxS \overset{S\to y}{\Longrightarrow} +x\star -yxy
\end{aligned}
$$

8.5 Návrh bezkontextové gramatiky pro jazyk

Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = \{0^i 1^i 2^j; i, j \geq 0\}$. Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

$$\begin{aligned} P\colon S &\to XY \\ X &\to 0X1 \mid \varepsilon \\ Y &\to Y2 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. $L \subseteq L(\mathcal{G})$ (gramatika vygeneruje vše):

$$S \overset{S\to XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X\to 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \overset{Y\to 2Y(j)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 2^j \overset{X\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 2^j \overset{Y\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i 2^j.$$

2. $L(\mathcal{G}) \subseteq L$ (gramatika nevygeneruje nic navíc):

Uvažujme derivaci $S \implies \star w$. Pak poslední použité pravidlo musí být $X \to \varepsilon$ nebo $Y \to \varepsilon$. Proto v derivaci musí být použito pravidlo $S \to XY$. Mezi tím může být použit nějaký počet pravidel $X \to 0X1$ a $Y \to Y2$. Jinak pravidla být použita nemohou. Tedy drivace má tvar $S \overset{S\to XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X\to 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \overset{Y\to 2Y(j)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 2^j \overset{X\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 2^j \overset{X\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i 2^j$.

8.6 Tvorba nevypouštěcí gramatiky

Ke gramatice $\mathcal{G}$ zkostruujte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$, pro kterou $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$.

$$\begin{aligned} P\colon S &\to aSbA \mid \varepsilon \\ A &\to aBbA \mid bCB \mid CD \\ B &\to bbBa \mid aS \\ C &\to aAaA \mid \varepsilon \\ D &\to SC \mid aABa \end{aligned}$$

obecný formální zápis u nevypouštěcích gramatik:

$V = \{A \mid A \implies {}^\star\varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\}$
$V_{i+1} = V_i \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_i^\star\}$

příklad:

$V = \{A \mid A \implies {}^\star\varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\} = \{S, C\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\} = V_1 \cup \{D\} = \{S, C, D\}$
$V_3 = V_2 \cup \{A\} = \{S, A, C, D\}$

$\mathcal{G}_1$:

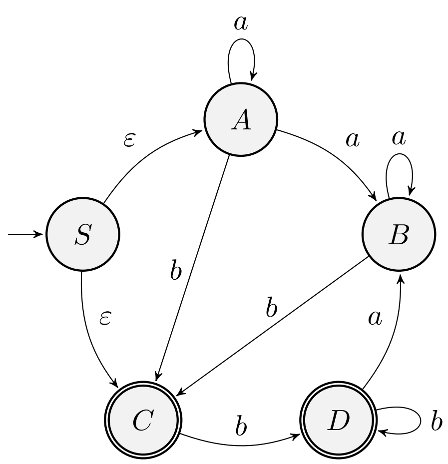
$$\begin{aligned} P\colon S &\to aSbA \mid abA \mid aSb \mid ab \\ A &\to aBbA \mid aBb \mid bCB \mid bB \mid CD \mid C \mid D \\ B &\to bbBa \mid aS \mid a \\ C &\to aAaA \mid aAa \mid aaA \mid aa \\ D &\to SC \mid S \mid C \mid aABa \mid aBa \end{aligned}$$

8.7 Konstrukce gramatiky 3. typu k automatu

K automatu M zkonstruujte gramatiku typu 3, která generuje jazyk $L(M)$, kde M je dán tabulkou

M:

		a	b
$\rightarrow$	A	$\{A, B\}$	$\{C\}$
	B	$\{B\}$	$\{C\}$
$\leftrightarrow$	C	$\emptyset$	$\{D\}$
$\leftarrow$	D	$\{B\}$	$\{D\}$



$\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$
$N = \{S, A, B, C, D\}$
$\Sigma = \{a, b\}$

$P: S \rightarrow A \mid C$

$A \rightarrow aA \mid aB \mid bC$

$B \rightarrow aB \mid bC$

$C \rightarrow bD \mid \varepsilon$

$D \rightarrow aB \mid bD \mid \varepsilon$

8.8 Návrh bezkontextové gramatiky

Navrhněte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk $L = \left\{0^i 1^j; 0 \leq i \leq j\right\}$. Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

$S \rightarrow XY$

$X \rightarrow 0X1 \mid \varepsilon$

$Y \rightarrow Y1 \mid \varepsilon$

Zdůvodnění:

1. Dvě možnosti: $i = j$, a $i < j$, kde $j = i + n$, $n > 0$.

$$S \overset{S \rightarrow XY}{\Longrightarrow} XY \overset{X \rightarrow 0X1(i)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y \Longrightarrow \begin{cases} i < j: & 0^i X 1^i Y \overset{Y \rightarrow Y1(n)}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i Y 1^n \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i Y 1^n \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^{i+n=j} \\ i = j: & 0^i X 1^i Y \overset{Y \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i X 1^i \overset{X \rightarrow \varepsilon}{\Longrightarrow} 0^i 1^i \end{cases}$$

2. (fancy důkaz, doslova převzato z autorského řešení paní doc. Demlové)

Uvažujme derivaci $S \Rightarrow^* w$. Poslední pravidlo musí být $S \rightarrow \varepsilon$.

Provedeme indukci podle počtu kroků derivace n:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j, \quad \text{kde } i \leq j.$$

Základní krok ($n = 1$): Pro $n = 1$:

$$S \rightarrow 0S1 \quad \text{nebo} \quad S \rightarrow S1, \quad \text{a tedy } 0^i S 1^j, \text{ kde } i \leq j.$$

Indukční krok: Předpokládejme, že každá derivace o n krocích generuje:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j, \quad i \leq j.$$

Pak derivace o $n + 1$ krocích bude:

$$S \rightarrow 0S1 \Rightarrow^n 0^{i+1} S 1^{j+1}, \quad \text{a tedy } i + 1 \leq j + 1.$$

Nebo:

$$S \Rightarrow^n 0^i S 1^j \Rightarrow 0^i 1^j.$$

Závěr: Z S je možné odvodit právě slova $0^i 1^j$, kde $0 \leq i \leq j$, a nic jiného.

9 Deváté cvičení

9.1 Návrh bezkontextové gramatiky

Navrhněte bezkontextové gramatiky generující následující jazyky

a) $L_1 = \{0^{m+n}1^n0^m \mid 0 \leq n, m\}$.
b) $L_2 = \left\{0^i1^j \mid 0 \leq i < j\right\}$.

Zdůvodněte, proč gramatika $\mathcal{G}$ jazyk L generuje.

a)

$$\begin{aligned} P\colon S &\to 0S0 \mid A \\ A &\to 0A1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) $S \overset{S\to 0S0(m)}{\Longrightarrow} 0^mS0^m \overset{S\to A}{\Longrightarrow} 0^mA0^m \overset{A\to 0A1(n)}{\Longrightarrow} 0^m0^nA1^n0^m \overset{A\to\varepsilon}{\Longrightarrow} 0^m1^m0^n1^n0^m = 0^{m+n}1^n0^m$
(b) $S \Rightarrow^* w$, $S \Rightarrow 0^iS0^i$, $S \Rightarrow A$, $A \Rightarrow^* 0^j1^j$, $0^i0^j1^j0^i \in L(\mathcal{G})$

b)

$$P\colon S \to 0S1 \mid S1 \mid 1$$

Důkazy mě těžce nebaví, všude jsou cca stejný.

9.2 Konstrukce nevypouštěcí gramatiky

Ke gramatice $\mathcal{G}$ zkonstruujte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$, pro kterou $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}) - \{\varepsilon\}$. Gramatiku $\mathcal{G}_1$ zredukujte.

$$\begin{aligned} P\colon S &\to AB \mid \varepsilon \\ A &\to aAAb \mid bS \mid CA \\ B &\to BbA \mid CaC \mid \varepsilon \\ C &\to aBB \mid bS \end{aligned}$$

$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\} = \{S, B\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\} = V_1 \cup \emptyset = \{S, B\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1\colon S &\to AB \mid A \\ A &\to aAAb \mid bS \mid b \mid CA \\ B &\to BbA \mid bA \mid CaC \\ C &\to aBB \mid aB \mid a \mid bS \mid b \end{aligned}$$

Gramatika $\mathcal{G}_1$ už je redukovaná.

Obecný postup pro redukci

$V = \left\{A \mid A \in N, A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star w, w \in \Sigma^\star\right\}$
$V_1 = \{A \mid A \Rightarrow_\star w \in P, w \in \Sigma^\star\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup V_1)^\star\}$
$U = \left\{A \mid A \in V, \exists \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star \text{ tak, že } S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star \alpha A\beta\right\}$

Jazyk není prázdný právě tehdy, kdy $S \in V$.

9.3 Redukce gramatiky

Zredukujte gramatiku $\mathcal{G}$, která je dána pravidly

$$\begin{aligned} P\colon S &\to SA \mid SB \mid \varepsilon \\ A &\to bSA \mid baS \\ B &\to aB \mid Ba \mid DA \\ C &\to aCB \mid bA \\ D &\to AB \end{aligned}$$

redukce tldr:
$V_1 \dots$ to, co se promítne na ε nebo na terminály
$V_2 \dots$ to, co se promítne na terminály a na to, co už je ve V_1
$U_0 \dots \{S\}$
$U_1 \dots$ neterminály, do kterých se dostanu z S, pak z U_1 atd.

$V_1 = \{S\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A\} = \{S, A\}$
$V_3 = V_2 \cup \{C\} = \{S, A, C\}$
$V_4 = V_3 \cup \emptyset = \{S, A, C\}$

Zde nechám jenom neterminály z V a z pravé strany vyškrtám pravidla obsahující neterminály $\notin V$:

$$\begin{aligned} P\colon S &\to SA \mid \varepsilon \\ A &\to bSA \mid baS \\ C &\to bA \end{aligned}$$

Sem přidávám neterminály, do kterých se dostanu z počátečního stavu S, pak ze stavů v odpovídajícím U_i:

$U_0 = \{S\}$
$U_{i+1} = U_i \cup \left\{A \mid \text{existují } B \in U_i, \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star \text{ tak, že } B \to \alpha A \beta \in P'\right\}$
$U_1 = U_0 \cup \{A\} = \{S, A\}$
$U_2 = U_1 \cup \emptyset = \{S, A\}$

A ponechám jen pravidla, která nám zbyla v U:

$$\begin{aligned} P\colon S &\to SA \mid \varepsilon \\ A &\to bSA \mid baS \end{aligned}$$

9.4 Důkaz, že gramatika generuje alespoň jedno slovo

Rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje alespoň jedno slovo, tj. zda $L(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, kde $\mathcal{G}$ je dána pravidly

$$\begin{aligned} P\colon S &\to aS \mid AB \mid CD \\ A &\to aDb \mid AD \mid BC \\ B &\to bSb \mid BB \\ C &\to BA \mid ASb \\ D &\to ABCD \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$V_1 = \{D\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A\} = \{D, A\}$
$V_3 = V_2 \cup \emptyset = \{D, A\} = V$
$S \notin V \quad \to \quad L(\mathcal{G}) = \emptyset$. Tedy gramatika $\mathcal{G}$ negeneruje ani jedno slovo.

Chomského normální tvar polopatě

Všechna pravidla na pravé straně mají buď přesně 2 neterminály nebo přesně 1 terminál.

9.5 Převod gramatiky do Chomského normálního tvaru

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a P je

$$\begin{aligned} P\colon S &\to A \mid 0SA \mid \varepsilon \\ A &\to 1A \mid B1 \mid 1 \\ B &\to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

Převeďte $\mathcal{G}$ do Chomského normálního tvaru.

1. krok Vytvořit nevypouštěcí gramatiku.

$V = \{S\}$

$$\begin{aligned} P\colon S &\to A \mid 0SA \mid 0A \\ A &\to 1A \mid B1 \mid 1 \\ B &\to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

2. krok Nahrazení právě jednoho neterminálu pravých stran jeho pravidly.

zde: $S \to A$, máme zde $A \to 1A \mid B1 \mid 1$

$$\begin{aligned} P\colon S &\to 1A \mid B1 \mid 1 \mid 0SA \mid 0A \\ A &\to 1A \mid B1 \mid 1 \\ B &\to 0B \mid 0 \end{aligned}$$

vytvořím pomocná pravidla pro terminály, které "nezůstaly samy"

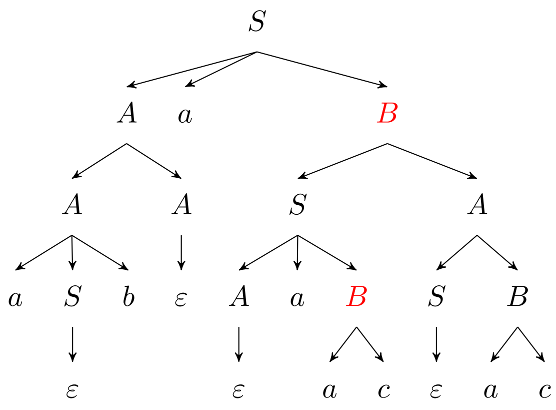
$$\begin{aligned} P\colon S &\to X_1A \mid BX_1 \mid 1 \mid X_0SA \mid X_0A \\ A &\to X_1A \mid BX_1 \mid 1 \\ B &\to X_0B \mid 0 \\ X_0 &\to 0 \\ X_1 &\to 1 \end{aligned}$$

3. krok Zbavím se dlouhých slov (≥ 3) (opět vytvořím pomocná pravidla).

$$\begin{aligned} P\colon S &\to X_1A \mid BX_1 \mid 1 \mid X_0Y \mid X_0A \\ Y &\to SA \\ A &\to X_1A \mid BX_1 \mid 1 \\ B &\to X_0B \mid 0 \\ X_0 &\to 0 \\ X_1 &\to 1 \end{aligned}$$

9.6 Práce s derivačním stromem bezkontextové gramatiky

Je dán derivační strom v bezkontextové gramatice:

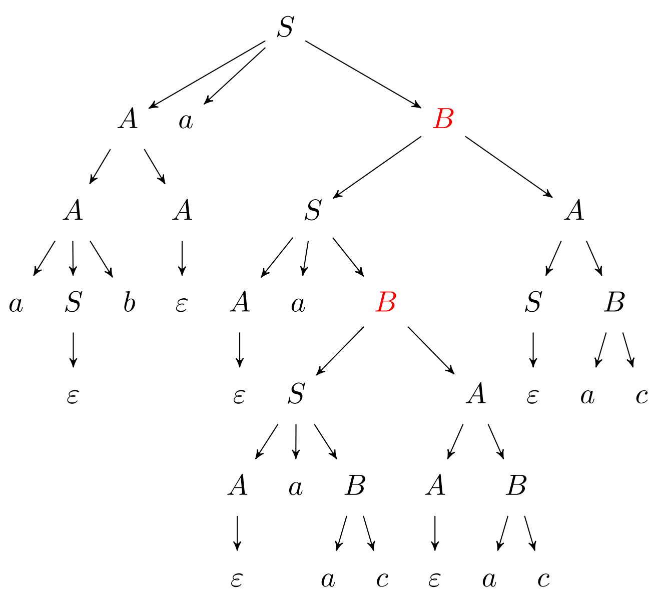


a) Napiště pravidla minimální CF gramatiky, ve které je to derivační strom.
b) Napiště levou derivaci odpovídající tomuto derivačnímu stromu.
c) Rozlože výsledek derivačního stromu w na pět částí $w = w_1w_2w_3w_4w_5$ tak, že $w_2w_4 \neq \varepsilon$ a slovo $w_1w_2^2w_3w_4^2w_5$ je také generované gramatikou z bodu a).
d) Rozhodněte, zda je gramatika víceznačná.

a)P: $S \to AaB \mid \varepsilon$
$A \to AA \mid SB \mid aSb \mid \varepsilon$
$B \to SA \mid ac$

b) $S \xRightarrow{S\to AaB} AaB \xRightarrow{A\to AA} AAaB \xRightarrow{A\to aSb} aSbAaB \xRightarrow{S\to\varepsilon} abAaB \xRightarrow{A\to\varepsilon} abaB \xRightarrow{B\to SA} abaSA \xRightarrow{A\to Aab} abaAaBA \xRightarrow{A\to\varepsilon} abaaBA \xRightarrow{B\to ac} abaaacA \xRightarrow{A\to SB} abaaacSB \xRightarrow{S\to\varepsilon} abaaacB \xRightarrow{B\to ac} abaaacac.$

c) basically pumping lemma pro gramatiky
$w_1 = aba$, $w_2 = a$, $w_3 = ac$, $w_4 = ac$, $w_5 = \varepsilon$.



Jak toho docílím: jdu odspoda stromu a najdu dva stejné neterminály (různě v grafu) a v podstatě ten strom nafouknu (zkopíruju nějaký podstrom z vyššího do nižšího neterminálu, v ukázce červený node B v nejvýš vpravo kopíruju do červeného Bčka vlevo od něj).

d) je víceznačná, přepisujeme $A \to AA$.

10 Desáté cvičení

10.1 Algoritmus CYK

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a pravidla P jsou dána:

Přepis pravidel:

$$\begin{aligned} AB &\leftarrow S \\ AC &\leftarrow A \\ AD &\leftarrow S, A \\ BA &\leftarrow D \\ BC &\leftarrow B \\ CS &\leftarrow S \\ DS &\leftarrow C \\ SC &\leftarrow C \end{aligned}$$

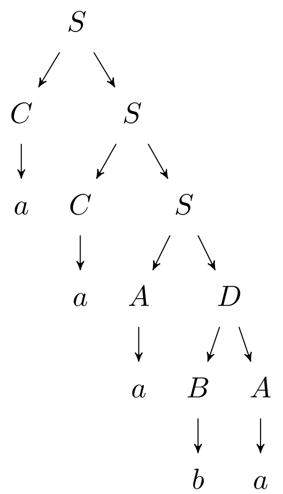
$$\begin{aligned} P\colon S &\to AB \mid CS \mid AD \\ A &\to AC \mid AD \mid a \\ B &\to BC \mid b \\ C &\to DS \mid SC \mid a \\ D &\to BA \mid b \end{aligned}$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje slova w_1 a w_2, kde $w_1 = aaaba$ a $w_2 = abbaa$. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište jemu odpovídající levou derivaci.

slovo w_1:

C, A, S				
S, A	C, A, S			
A	S, A	S, A, C		
A	A	S, A	D, B	
A, C	A, C	A, C	B, D	A, C
a	a	a	b	a

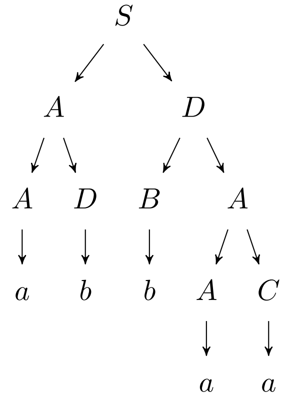
$S \overset{S\to CS}{\Longrightarrow} CS \overset{C\to a}{\Longrightarrow} aS \overset{S\to CS}{\Longrightarrow} aCS \overset{C\to a}{\Longrightarrow} aaS \overset{S\to AD}{\Longrightarrow} aaAD \overset{A\to a}{\Longrightarrow} aaaD \overset{D\to BA}{\Longrightarrow} aaaBA \overset{B\to b}{\Longrightarrow} aaabA \overset{A\to a}{\Longrightarrow} aaaba.$



slovo w_2:

C, A, S				
C, A, S	$-$			
S, A	$-$	D, B		
S, A	$-$	D, B	A	
A, C	B, D	B, D	A, C	A, C
a	b	b	a	a

$S \overset{S\to AD}{\Longrightarrow} AD \overset{A\to AD}{\Longrightarrow} ADD \overset{A\to a}{\Longrightarrow} aDD \overset{D\to b}{\Longrightarrow} abD \overset{D\to BA}{\Longrightarrow} abBA \overset{B\to b}{\Longrightarrow} abbA \overset{A\to AC}{\Longrightarrow} abbAC \overset{A\to a}{\Longrightarrow} abbaC \overset{C\to a}{\Longrightarrow} abbaa.$



10.2 Algoritmus CYK

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a pravidla P jsou dána:

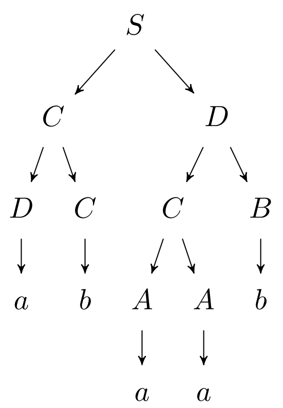
$$
\begin{aligned}
P\colon S &\to BD \mid CD \mid DA \\
A &\to CA \mid a \\
B &\to CB \mid b \\
C &\to AA \mid BC \mid DC \mid b \\
D &\to AC \mid BB \mid CB \mid a
\end{aligned}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda slovo $w_1 = abaab$ je touto gramatikou generováno. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište levou derivaci.

$w_1 = abaab$:

D, C, B, S				
D, C, A, S	S, D, C, B			
A, S, C	C	D, B, C		
D, C	S, A	C, S	D, C	
A, D	B, C	A, D	A, D	B, C
a	b	a	a	b

$S \overset{S\to CD}{\Longrightarrow} CD \overset{C\to DC}{\Longrightarrow} DCD \overset{D\to a}{\Longrightarrow} aCD \overset{C\to b}{\Longrightarrow}$
$abD \overset{D\to CB}{\Longrightarrow} abCB \overset{C\to AA}{\Longrightarrow} abAAB \overset{A\to a}{\Longrightarrow}$
$abaAB \Longrightarrow\overset{A\to a}{\Longrightarrow} abaaB \overset{B\to b}{\Longrightarrow} abaab.$



10.3 Bezkontextové Pumping lemma

Tento důkaz se neobjeví u písemné ani ústní zkoušky

S využitím Pumping Lemmatu ukažte, že následující jazyk není bezkontextový, kde

$$L = \{ww; w \in \{a, b\}^\star\}$$

Pumping Lemma. Pro každý CF jazyk L existuje přirozené číslo $m \geq 1$ takové, že každé slovo $z \in L$ délky alespoň m lze rozdělit na pět částí $z = uvwxy$ tak, že:

- $|vwx| \leq m$, (tj. prostřední část není příliš dlouhá),
- $vx \neq \varepsilon$ (tj. alespoň jedno ze slov v, x není prázdné),
- pro všechna $i \geq 0$ platí $uv^iwx^iy \in L$, (tj. v a x se dají do slova „napumpovat" a stále dostaneme slovo z jazyka L).

spoiler alert: nedoděláno

Zvolíme $z = a^m b^m a^m b^m \in L$, $|z| = 4m > m$.

...
...
...

Máme 7 možností: Takže to dělat nebudeme.

10.4 Důkaz generování slova matematickou indukcí

Je dána CF gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je:

$$\begin{aligned} P\colon S &\to SA \mid aSb \mid Cb \\ A &\to SC \mid \varepsilon \\ B &\to bAB \mid bS \mid AA \\ C &\to CB \mid bA \mid a \end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce dokažte, že:

$$A \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} S^i A C^i$$

pro všechna $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že $(ab)^{i+1}(ab^3)^i$ jsou generována gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i \geq 0$.

1) Základní krok: $i = 0$

Pro $i = 0$ platí:

$$A \Longrightarrow^{\star} A$$

což odpovídá:

$$S^0 A C^0 = A \quad \checkmark$$

2) Indukční krok:

předp. $A \Longrightarrow {}^{\star} S^n A C^n$, chceme dokázat $A \Longrightarrow {}^{\star} S^{n+1} A C^{n+1}$.

$A \overset{A\to SC}{\Longrightarrow} SC \overset{S\to SA}{\Longrightarrow} SAC \overset{I.P.}{\Longrightarrow}{}^{\star} SS^n A C^n C$

nebo

$A \overset{I.P.}{\Longrightarrow} S^n A C^n \overset{A\to SC}{\Longrightarrow} S^n SCC^n \overset{S\to SA}{\Longrightarrow} S^n SACC^n$.

10.5 Algoritmus CYK

Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ a pravidla P jsou dána

$$
\begin{aligned}
P\colon S &\to AB \mid CD \mid AC \\
A &\to AC \mid a \\
B &\to BD \mid b \\
C &\to AD \mid a \\
D &\to BA \mid b
\end{aligned}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje slova w_1 a w_2, kde $w_1 = baaba$ a $w_2 = abaaa$. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište jemu odpovídající levou derivaci.

$$
\begin{aligned}
AB &\leftarrow S \\
AC &\leftarrow S, A \\
AD &\leftarrow C \\
BA &\leftarrow D \\
BD &\leftarrow B \\
CD &\leftarrow S
\end{aligned}
$$

slovo $w_1 = baaba$:

D				
D	S, A, C			
D	S, C, A	C, S		
D	S, A	S, C	D	
B, D	A, C	A, C	B, D	A, C
b	a	a	b	a

Gramatika $\mathcal{G}$ negeneruje slovo w_1.

slovo $w_2 = abaaa$:

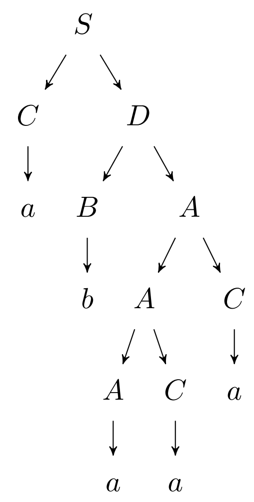
C, S				
C, S	D			
C, S	D	S, A		
S, C	D	S, A	S, A	
A, C	B, D	A, C	A, C	A, C
a	b	a	a	a

Gramatika $\mathcal{G}$ generuje slovo w_2.

Levá derivace:

$$
S \xRightarrow{S\to CD} CD \xRightarrow{C\to a} aD \xRightarrow{D\to BA} aBA \xRightarrow{B\to b} abA \Longrightarrow \\
\xRightarrow{A\to AC} abAC \xRightarrow{A\to AC} abACC \xRightarrow{A\to a} abaCC \Longrightarrow \\
\xRightarrow{C\to a} abaaC \xRightarrow{C\to a} abaaa
$$

Derivační strom pro slovo w_2:



11 Jedenácté cvičení

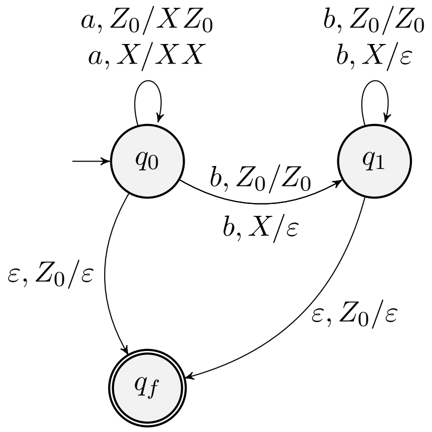
11.1 Stavový diagram zásobníkového automatu, práce na automatu

Je dán zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde jednotlivé části jsou $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, X\}$ a přechodová funkce je daná tabulkou

	(a, Z_0)	(a, X)	(b, Z_0)	(b, X)	(ε, Z_0)	(ε, X)
$\to q_0$	(q_0, XZ_0)	(q_0, XX)	(q_1, Z_0)	(q_1, ε)	(q_f, ε)	$-$
q_1	$-$	$-$	(q_1, Z_0)	(q_1, ε)	(q_f, ε)	$-$
$\leftarrow q_f$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

a) Nakreslete stavový diagram zásobníkového automatu A.
b) Ukažte práci zásobníkového automatu nad slovem *aabba* a slovem *abbbb*.
c) Charakterizujte jazyk L, který tento zásobníkový automat přijímá. Tvrzení zdůvodněte.

Stavový diagram automatu A.



Práce nad slovem $w_1 = aabba$.

$(q_0, aabba, Z_0) \vdash (q_0, abba, XZ_0) \vdash (q_0, bba, XXZ_0) \vdash (q_1, ba, XZ_0) \vdash (q_1, a, Z_0)$. Konec, neúspěch.

Práce nad slovem $w_2 = abbbb$.

$(q_0, abbbb, Z_0) \vdash (q_0, bbbb, XZ_0) \vdash (q_1, bbb, Z_0) \vdash (q_1, bb, Z_0) \vdash (q_1, b, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$. Konec, úspěch.

$L(A) \stackrel{?}{=} \overbrace{\{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}}^{L}$

Důkaz.

a) $L \subseteq L(A)$

- $i = j = 0$: $(q_0, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$
- $0 = i < j$: $(q_0, b^j, Z_0) \vdash (q_1, b^{j-1}, Z_0) \vdash^{(j-1)} (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$
- $0 < i \leq j$: $(q_0, a^i b^j, Z_0) \vdash^i (q_0, b^{i+k}, X^i Z_0) \vdash (q_0, b^{i+k-1}, X^{i-1} Z_0) \vdash^{(i-1)} (q_1, b^k, Z_0) \vdash^k (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$, $i + k = j, k = j - i \geq 0$.

b) $L(A) = N(A) \subseteq L$

Dokazujeme, že pokud $w \in L(A)$, pak w má tvar $a^i b^j$, kde $0 \leq i \leq j$. Pro $w \in L(A)$ musí zásobníkový automat A skončit ve stavu q_f s prázdným vstupním řetězcem i zásobníkem.

- Přidávání a: Každý symbol a způsobí, že do zásobníku přidáme jeden symbol X. Zásobník tak obsahuje i symbolů X po zpracování a^i.
- Zpracování b: Každý symbol b odstraní jeden symbol X ze zásobníku, pokud je tam ještě přítomen. Pokud už jsou všechny X odstraněny, symbol b pouze projde automatem, aniž by zásobník změnil svůj stav.

- Prázdný zásobník: Stav q_f je přístupný pouze tehdy, když je zásobník prázdný. To znamená, že každý přidaný X odpovídá odstraněnému X, což nastane právě tehdy, když $i \leq j$.

Z toho plyne, že $w = a^i b^j$ s $0 \leq i \leq j$.

12 Dvanácté cvičení

12.1 Tvorba zásobníkového automatu podle jazyka

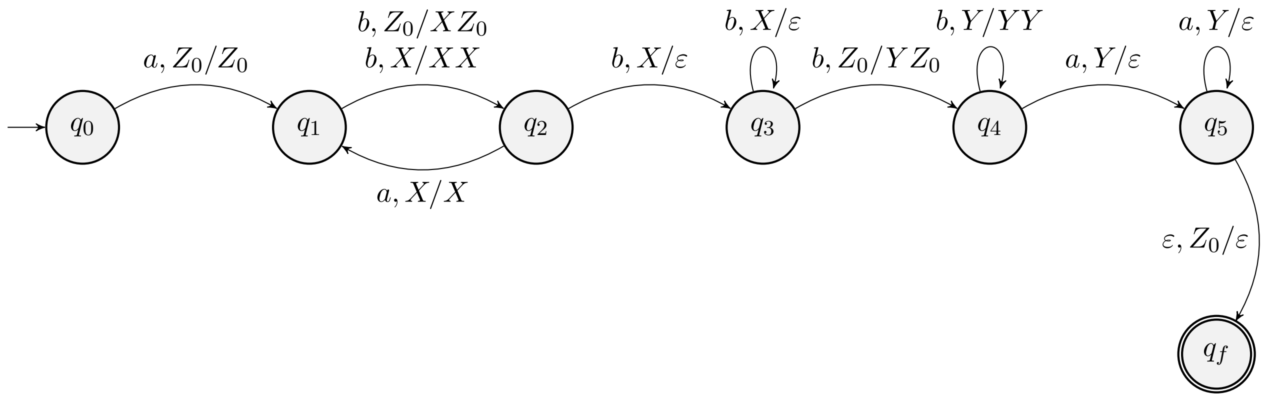
Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \left\{ (ab)^i b^j a^{j-i} \mid 0 < i < j \right\}.$$

$$\implies L = \left\{ (ab)^i b^{i+k} a^k \mid i > 0, k > 0 \right\} \implies N(A) = \underbrace{\left\{ (ab)^i b^i \mid k > 0 \right\}}_{X}, L(B) = \underbrace{\left\{ b^k a^k \mid k > 0 \right\}}_{Y}.$$

Dva způsoby řešení:

a) Přímo.



b) Přes gramatiku.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S &\to AB \\ A &\to abAb \mid abb \\ B &\to bBa \mid ba \end{aligned}$$

Prázdným zásobníkem:

$$\begin{aligned} &\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, AB)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, abAb), (q, abb)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, bBa), (q, ba)\} \\ &\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\} \\ &\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

Koncovým stavem:

$$\begin{aligned} &\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q, SZ_0)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, AB)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, abAb), (q, abb)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, bBa), (q, ba)\} \\ &\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\} \\ &\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\} \\ &\delta(q, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

1. $L \subseteq L(G)$
$S \xRightarrow{S \to AB} AB \xRightarrow{A \to abAb}{}^{(i-1)} (ab)^{i-1} A b^{i-1} B \xRightarrow{A \to abb} (ab)^i b^i B \xRightarrow{B \to bBa}{}^{(k-1)} (ab)^i b^i b^{k-1} B a^{k-1} \xRightarrow{B \to ba}$
$(ab)^i b^i b^k a^k$.

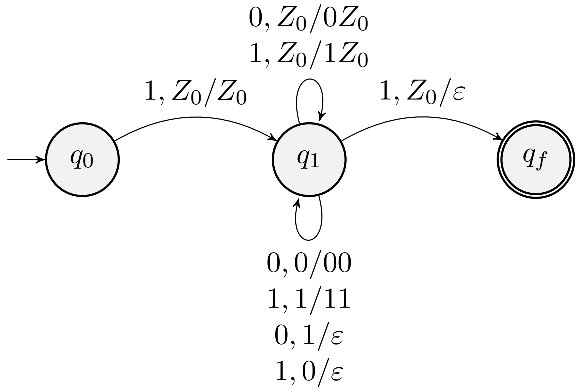
2. $L(G) \subseteq L$
$S \to^\star w$
$S \to AB$
$A \xRightarrow{A \to abAb}{}^{j} (ab)^j A b^j \xRightarrow{A \to abb} (ab)^j abb b^j$

12.2 Tvorba zásobníkového automatu podle jazyka

Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \{w \mid w \text{ začíná a končí symbolem 1 a obsahuje o dvě 1 více než 0}\}.$$

$L = \{1u1 \mid |u|_0 = |u|_1\}, i = |u|_0$



1) $L \subseteq N(A)$

$(q_0, 1u1, Z_0) \vdash (q_1, u1, Z_0) \vdash^\star (q_1, 1, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$.

2) $L(B) \subseteq L$

Musíme ukázat, že pokud zásobníkový automat B přijme slovo w, pak $w \in L$. To znamená, že w začíná a končí symbolem 1 a obsahuje o dvě více symbolů 1 než 0.

Vlastnosti přechodů:

1. Automat přechází z počátečního stavu q_0 do q_1, pokud první symbol je 1. Tuto 1 nezapočítáme.
2. Ve stavu q_1 se zásobníkem automat udržuje informaci o rozdílu mezi počtem symbolů 1 a 0:
   - Při čtení symbolů 0 a 1 přidává, respektive odstraní (pokud existuje) odpovídající značku do zásobníku, což udržuje informaci o tom, zda je stejný počet obou znaků.
3. Pokud zpracování skončí symbolem 1 a zásobník je prázdný, automat přejde do koncového stavu q_f, což zajišťuje, že rozdíl mezi počtem symbolů 1 a 0 je přesně dvě.

Každé slovo přijaté automatem B splňuje podmínky:

- Začíná symbolem 1 (nutný přechod z q_0 do q_1).
- Končí symbolem 1 (nutný přechod z q_1 do q_f).
- Obsahuje přesně o dvě více symbolů 1 než 0 (zásobník na konci zajišťuje prázdný stav).

Z toho plyne, že $L(B) \subseteq L$.

12.3 Tvorba zásobníkového automatu podle jazyka

Je dán jazyk L. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \left\{a^i b^i c^{i+j}\right\}$$

Ukažte práci nad slovem $w = abcc$.

Konstrukce pomocí gramatiky:

$S \to aSc \mid A$

$A \to bAc \mid \varepsilon$

Prázdným zásobníkem:

$$\begin{aligned}
&\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, aSc), (q, A)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, bAc), (q, \varepsilon)\}\\
&\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}\\
&\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}\\
&\delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Práce nad slovem $w = abcc$:

$(q, abbc, S) \vdash (q, abcc, aSc) \vdash (q, bcc, Sc) \vdash$
$(q, bcc, Ac) \vdash (q, bcc, bAcc) \vdash (q, cc, Acc) \vdash$
$(q, cc, cc) \vdash (q, c, c) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

Koncovým stavem:

$$\begin{aligned}
&\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q, SZ_0)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, AB)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, abAb), (q, abb)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, bBa), (q, ba)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, a) = \{(q, \varepsilon)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, b) = \{(q, \varepsilon)\}\\
&\delta(q, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Práce nad slovem $w = abcc$:

$(q_0, abc, Z_0) \vdash (q, abbc, SZ_0) \vdash (q, abcc, aScZ_0) \vdash$
$(q, bcc, SZ_0c) \vdash (q, bcc, AcZ_0) \vdash (q, bcc, bAccZ_0) \vdash$
$(q, cc, AccZ_0) \vdash (q, cc, ccZ_0) \vdash (q, c, cZ_0) \vdash$
$(q, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$

12.4 Důkaz bezkontextovosti jazyka

Je dán jazyk $L = \{0^n1^m; 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$. Rozhodněte, zda jazyk L je bezkontextový.
V případě, že je bezkontextový, najděte buď bezkontextovou gramatiku, která ho generuje, nebo zásobníkový automat, který ho přijímá.
V případě, že není bezkontextový, tvrzení dokažte.

Například $\mathcal{G}$ s pravidly P:

$$S \to 0S11 \mid 0S1 \mid \varepsilon$$

Důkaz.

1) $L \subseteq L(\mathcal{G})$ – $\mathcal{G}$ generuje celé L

- $0 < n \leq m \leq 2n \to k = 2n - m \geq 0$:
  $S \xRightarrow{S\to 0S1}{}^{(k)} 0^kS1^k \xRightarrow{S\to 0S11}{}^{(n-k)} 0^k0^{n-1}S1^{n-1}1^{n-1}1^k \xRightarrow{S\to\varepsilon} 0^n1^{2n-k} = 0^n1^{2n-2n+m} = 0^n1^m.$
- $0 = n = m$: $0^01^0 = \varepsilon \in L$.

2) $L(\mathcal{G}) \subseteq L$ – $\mathcal{G}$ negeneruje nic navíc

Nechť $w \in L(\mathcal{G})$, kde $w = 0^n1^m$. Sledujeme pravidla gramatiky $\mathcal{G}$:

(0) základní krok: Pokud $S \to \varepsilon$, pak $w = \varepsilon = 0^01^0$. Zřejmě $\varepsilon \in L$.

(1) indukční krok:

- Pokud $S \to 0S1$, přidáváme jeden symbol 0 na začátek a jeden symbol 1 na konec. Po aplikaci tohoto pravidla se počet 0 zvýší o jeden a počet 1 o jedna, tedy platí $n \leq m \leq 2n$.
- Pokud $S \to 0S11$, přidáváme jeden symbol 0 na začátek a dva symboly 1 na konec. Po aplikaci tohoto pravidla se počet 0 zvýší o jeden a počet 1 o dva, tedy stále platí $n \leq m \leq 2n$.

13 Třinácté cvičení

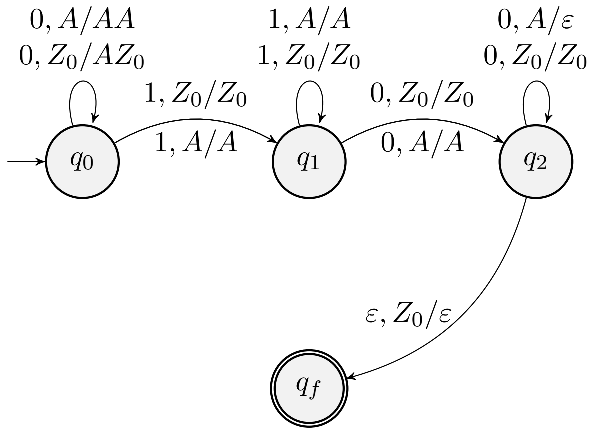
13.1 Tvorba a práce zásobníkového automatu podle jazyka

Je dán jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$. Sestrojte zásobníkové automaty A, B tak, že $L = N(A)$ a $L = L(B)$ (tj. A přijímá L prázdným zásobníkem, B přijímá L koncovým stavem), kde

$$L = \left\{0^i 1^j 0^k \mid 0 \leq i < k, j > 0\right\}.$$

Ukažte práci jednoho ze zásobníkových automatů nad slovem 011000 a nad slovem 001110.

Přímou metodou:



Práce nad slovem $w_1 = 011000$.

$(q_0, 011000, Z_0) \vdash (q_0, 11000, AZ_0) \vdash (q_1, 1000, AZ_0)$
$\vdash (q_1, 000, AZ_0) \vdash (q_2, 00, AZ_0) \vdash (q_f, 0, AZ_0)$✗
$\vdash (q_2, 0, Z_0)$
$(q_2, 0, Z_0) \vdash (q_f, 0, Z_0)$✗
$\vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$✓ Konec, úspěch.

Práce nad slovem $w_2 = 001110$.

$(q_0, 001110, Z_0) \vdash^{(2)} (q_0, 1110, AAZ_0) \vdash (q_1, 110, AAZ_0)$
$\vdash^{(2)} (q_1, 0, AAZ_0) \vdash (q_2, \varepsilon, AAZ_0)$✗ Konec, neúspěch.

Přes gramatiku:
$\mathcal{G}$: $S \to S0 \mid 0S0 \mid A0$
$A \to 1A \mid 1$

Důkaz.

1) $L \subseteq L(\mathcal{G})$

$$S \Rightarrow^\star 0^i S 0^k \xRightarrow{S \to A0} 0^i A 0^{k+1} \xRightarrow{A \to 1A}{}^{(j)}\ 0^i 1^j A 0^{k+1} \xRightarrow{A \to 1} 0^i 1^{j+1} 0^{k+1},\ i \leq k, j > 0.$$

2) $L(\mathcal{G}) \subseteq L$

13.2 Tvorba nevypouštěcí gramatiky

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{0, 1\}$ a P je dáno

$$S \to SA \mid 0$$
$$A \to BAB \mid 1$$
$$B \to CB \mid \varepsilon$$
$$C \to AS \mid 0 \mid \varepsilon$$

Ke gramatice $\mathcal{G}$ vytvořte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$. V gramatice $\mathcal{G}_1$ odstraňte levou rekurzi.

1. krok Vytvoření nevypouštěcí gramatiky $\mathcal{G}_1$.

$V = \{x \mid x \Rightarrow^\star \varepsilon\}$
$V_1 = \{x \mid x \to \varepsilon \in P\} = \{B, C\}$
$V_2 = V_1 \cup \left\{x \mid x \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^+\right\} = V_1 \cup \emptyset = V_1 = V.$

P': $S \to SA \mid 0$
$A \to BAB \mid AB \mid BA \mid A \mid 1$
$B \to CB \mid C$
$C \to AS \mid 0$

2. krok odstranění levé rekurze. (postup shora dolů)

$S \to 0 \mid 0S'$

$S' \to A \mid AS'$

$A \to BAB \mid BA \mid 1 \mid BABA' \mid BAA' \mid 1A'$

$A' \to B \mid BA'$

$B \to CB \mid C$

$C \to AS \mid 0$

13.3 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převeďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, E, F\}$, $\Sigma = \{a, *, +,), (\}$ a P je dáno

$$S \to (E)$$
$$E \to F * F \mid F + F$$
$$F \to a \mid S$$

1. krok oindexování neterminálů.
$A_1 = S$
$A_2 = E$
$A_3 = F$

2. krok odstranění levých rekurzí. Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)

$S \to (E)$

$E \to F * F \mid F + F$

$F \to a \mid (E)$

3. krok nahrazení prvních neterminálů pravých stran, které neterminálem začínají, pravidly. (postup zespoda nahoru)

$S \to (E)$

$E \to a * F \mid a + F \mid (E) * F \mid (E) + F$

$F \to a \mid (E)$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály.

$S \to (EX$

$E \to aYF \mid aZF \mid (EXYF \mid (EXZF$

$F \to a \mid (EX$

$X \to)$

$Y \to *$

$Z \to +$

13.4 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převěďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ a P je dáno

$$S \to Ab \mid B$$
$$A \to Aba \mid Bcc$$
$$B \to Sa \mid b$$

1. krok oindexování neterminálů.
$A_1 = S$
$A_2 = A$
$A_3 = B$

2. krok odstranění levých rekurzí. Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)

$S \to Ab \mid B$

$A \to Ba \mid BaA'$

$A' \to ba \mid baA'$

$B \to Aba \mid Ba \mid b$

$B \to Baba \mid BaA'ba \mid Ba \mid b$

$B \to b \mid bB'$

$B' \to aba \mid aA'ba \mid a \mid abaB' \mid aA'baB' \mid aB'$

3. krok nahrazení prvních neterminálů pravých stran, které neterminálem začínají, pravidly. (postup zespoda nahoru)

$S \to Bab \mid BaA' \mid b \mid bB'$

$A \to ba \mid bB'a \mid baA' \mid bB'aA'$

$A' \to ba \mid baA'$

$B \to b \mid bB'$

$B' \to aba \mid aA'ba \mid a \mid abaB' \mid aA'baB' \mid aB'$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály.

$S \to BaY \mid BaA' \mid b \mid bB'$

$A \to bX \mid bB'X \mid bXA' \mid bB'aA'$

$A' \to bX \mid bXA'$

$B \to b \mid bB'$

$B' \to aXY \mid aA'YX \mid a \mid aYXB' \mid aA'YXB' \mid aB'$

$X \to a$

$Y \to b$

14 Čtrnácté cvičení

14.1 Převod gramatiky do Greibachové normální formy

Do Greibachové normální formy převeďte gramatiku $\mathcal{G}$, kde $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a P je dáno

$$S \to SA \mid 0$$
$$A \to AS \mid 1$$

1. krok oindexování neterminálů.

$X_1 = S$
$X_2 = A$
$X_3 = S^{'}$
$X_4 = A^{'}$

2. krok odstranění levých rekurzí.
$S \ \to 0 \mid 0S^{'}$

$S^{'} \to A \mid AS^{'}$

$A \ \to 1 \mid 1A^{'}$

$A^{'} \to S \mid SA^{'}$

3. krok Kontrola správného pořadí indexů (na pravé straně vždy neterminál s větším indexem), jinak sloučit pravidla. (postup shora dolů)
$S \ \to 0 \mid 0S^{'}$

$A \ \to 1 \mid 1A^{'}$

$S^{'} \to 1 \mid 1A^{'} \mid 1S^{'} \mid 1A^{'}S^{'}$

$A^{'} \to 0 \mid 0S^{'} \mid 0A^{'} \mid 0S^{'}A^{'}$

4. krok za prvním terminálem pravé strany vždy následují pouze neterminály. ✓

14.2 Zkoušková ukázka práce na bezkontextové gramatice

Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je dáno

$$S \to Sa \mid Sb \mid bC$$
$$A \to CBA \mid BC \mid b$$
$$B \to aB \mid \varepsilon$$
$$C \to AA \mid bBb \mid \varepsilon$$

1. Ke gramatice $\mathcal{G}$ najděte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$. Kroky převodu popište.
2. Ke gramatice $\mathcal{G}_1$ najděte gramatiku $\mathcal{G}_2$ v Chomského normálním tvaru, která generuje stejný jazyk jako gramatika $\mathcal{G}_1$. Jednotlivé kroky popište, gramatiku v Chomského normálním tvaru definujte.
3. Pomocí matematické indukce dokažte, že platí $A \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} A^iC(BA)^{i+1}$ pro každé $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že $b^{i+2}(ab)^{i+1}$ je generováno gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i \geq 0$.
4. Je gramatika $\mathcal{G}$ víceznačná? Víceznačnou gramatiku definujte.
5. V gramatice $\mathcal{G}_1$ odstraňte levou rekurzi u symbolu S. Postup popište.

1. Nevypouštěcí gramatika $\mathcal{G}_1$.

$V = \{A \mid A \Rightarrow^\star \varepsilon\}$
$V_1 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\} = \{B, C\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1^\star\} = V_1 \cup \{A\} = \{A, B, C\}$
$V_3 = V_2 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_2^\star\} = V_2 \cup \varepsilon = V_2 = V$

$\mathcal{G}_1 : S \to Sa \mid Sb \mid bC \mid b$
$A \to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid b$
$B \to aB \mid a$
$C \to AA \mid A \mid bBb \mid bb$

2. Chomského normální tvar gramatiky $\mathcal{G}_1$.

1. krok nahrazení samostatných terminálů pravidly. (pokud nastane např. $A \to A$, tak vynechat.)
$S \to Sa \mid Sb \mid bC \mid b$
$A \to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid \underbrace{aB \mid a}_{B} \mid \underbrace{AA \mid bBb \mid bb}_{C} \mid b$
$B \to aB \mid a$
$C \to AA \mid \underbrace{CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid b}_{A} \mid bBb \mid bb$

2. krok nahrazení terminálů neterminály pokud nejsou samotné.
$S \to SX_1 \mid SX_2 \mid X_2C \mid b$
$A \to CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid X_1B \mid X_1 \mid AA \mid X_2BX_2 \mid X_2X_2 \mid X_2$
$B \to X_1B \mid X_1$
$C \to AA \mid CBA \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid X_2 \mid X_2BX_2 \mid X_2X_2$
$X_1 \to a$
$X_2 \to b$

3. krok nahrazení pravých stran, která mají délku ≥ 3.
$S \to SX_1 \mid SX_2 \mid X_2C \mid b$
$A \to Y \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid X_1B \mid X_1 \mid AA \mid Z \mid X_2X_2 \mid X_2$
$Y \to CBA$
$Z \to X_2BX_2$
$B \to X_1B \mid X_1$
$C \to AA \mid Y \mid CA \mid CB \mid BA \mid BC \mid B \mid C \mid X_2 \mid Z \mid X_2X_2$
$X_1 \to a$
$X_2 \to b$

3. Důkaz.

$A \Rightarrow^\star_{\mathcal{G}} A^iC(BA)^{i+1}$

Základní krok: $i = 0$: $A^0C(BA)^1 = CBA$ ✓ $A \Rightarrow^\star_{\mathcal{G}} CBA$.

Indukční krok: $i \geq 0$: indukční předpoklad: $A \Rightarrow^\star A^iC(BA)^{i+1}$.

$A \xRightarrow{A \to CBA} CBA \xRightarrow{C \to AA} A\underline{A}_{IP}(BA) \xRightarrow{IP}^\star AA^iC(BA)^{i+1}(BA) = A^{i+1}C(BA)^{i+2}$. ✓

A tedy, $b^{i+2}(ab)^{i+1} \in L(\mathcal{G})$?

$S \xRightarrow{S \to bC} bC \xRightarrow{C \to AA} bAA \xRightarrow{A \to b} b^2A \Rightarrow$ |dle důkazu výše| $\Rightarrow^\star b^2A^iC(BA)^{i+1} \xRightarrow{A \to b} b^{i+2}C(BA)^{i+1} \xRightarrow{C \to \varepsilon}$

$b^{i+2}(BA)^{i+1} \xrightarrow{B\to aB} b^{i+2}(aBA)^{i+1} \xrightarrow{B\to \varepsilon} b^{i+2}(aA)^{i+1} \xrightarrow{A\to b} b^{i+2}(ab)^{i+1}$. ✓

4. Je gramatika $\mathcal{G}$ víceznačná?

Víceznačnost = existují alespoň 2 derivační stromy / 2 levé derivace pro jedno libovolné slovo z $\mathcal{G}$.

Například mějme slovo $w = bbb$.

První způsob vygenerování slova w: $S \xrightarrow{S\to bC} bC \xrightarrow{C\to AA} bAA \xrightarrow{A\to b}{}^2 bbb$.

Druhý způsob vygenerování slova w: $S \xrightarrow{S\to bC} bC \xrightarrow{C\to bBb} bbBb \xrightarrow{B\to \varepsilon} bbb$.

A tedy gramatika $\mathcal{G}$ je víceznačná.

5. Odstranění levých rekurzí.

Levá rekurze se vyskytuje pouze v pravidlu $S \to Sa \mid Sb \mid bC \mid b$.

Je potřeba přidat pouze jeden neterminál. Pokud by se jich přidalo více, nová gramatika by generovala méně slov, než původní.
$S \ \to bC \mid bCS' \mid b \mid S'$

$S' \to a \mid aS' \mid b \mid bS'$