Šestá samostatná práce

Jakub Adamec
B4B01JAG

2. prosince 2024

Příklad 9.9.

Navrhněte bezkontextovou gramatiku generující následující jazyk $L = \{a^n b^m a^n \mid m, n \geq 0\}$. Zdůvodněte, proč zkonstruovaná gramatika jazyk L generuje.

Gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A\}$ a
$P : S \to aSa \mid b$
$\quad A \to bA \mid \varepsilon$

Důkaz:

1. $a^n n^m a^n \in L(y)$.
$S \xRightarrow{S \to aSa}^{(n)} a^n S a^n \xRightarrow{S \to A} a^n A a^n \xRightarrow{A \to bA}^{(m)} a^n b^m A a^n \xRightarrow{A \to \varepsilon} a^n b^m a^n, m, n \geq 0.$

2. $\mathcal{G}$ nevygeneruje nic navíc.

Předpokládejme, že $S \Rightarrow^\star u, u \in \Sigma^\star$. Pak poslední pravidlo derivace musí být $A \to \varepsilon$. Proto v derivaci musí být použito pravidlo $S \to A$. Mezi použitím pravidel $S \to A$ a $A \to \varepsilon$ může být použito několik (nebo žádné) pravidel $S \to bA$. Protože derivace začíná S, před použitím pravidla $S \to A$ může být použito několik (nebo žádné) pravidel $S \to aSa$. Jinak pravidla být použita nemohou. Tedy derivace má tvar $S \xRightarrow{S \to aSa}^{(k)} a^k S a^k \xRightarrow{S \to A} a^k A a^k \xRightarrow{A \to bA}^{(l)} a^k b^l A a^k \xRightarrow{A \to \varepsilon} a^k b^l a^k, k, l \geq 0.$

Příklad 9.10.

Zredukujte gramatiku $\mathcal{G}$, která je dána pravidly:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}: S &\to aA \mid bB \mid aSa \mid bSb \mid \varepsilon\\ A &\to bCD \mid Dba\\ B &\to Bb \mid AC\\ C &\to aA \mid a\\ D &\to DE\\ E &\to \varepsilon\end{aligned}$$

Mějme CF gramatiku $\mathcal{G} = \{N, \Sigma, S, P\}$.

1. krok

$V = \{A \mid A \in N, A \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} w, w \in \Sigma^{\star}\}$
$V_1 = \{A \mid A \to w \in P, w \in \Sigma^{\star}\} = \{S, C, E\}$
$V_2 = V_1 \cup \{A \mid \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup V_1)^{\star}\} = \{S, C, E\} \cup \emptyset = V_1$

2. krok

$$\begin{aligned}\mathcal{G}': S &\to aSa \mid bSb \mid \varepsilon\\ C &\to a\\ E &\to \varepsilon\end{aligned}$$

Pro novou gramatiku $\mathcal{G}' = \{V, \Sigma, S, P'\}$ sestrojíme indukcí množinu
$U = \{A \mid A \in V, \exists \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^{\star}$ tak, že $S \Rightarrow^{\star}_{\mathcal{G}} \alpha A \beta\}$.
$U_0 = \{S\}$, $S \Rightarrow^{\star} S$
$U_1 = U_0 \cup \{X \mid X$ se vyskytuje v α pro pravidlo $Y \to \alpha \in P, Y \in U_0\} = \{S\} \cup \emptyset$

Redukovaná gramatika je $\mathcal{G}'' : S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$.