

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

# Sbírka teorie a příkladů

Teorie grafů

Jakub Adamec  
Praha, 2026



# Obsah

	Strana
<b>1 Neorientované grafy</b>	<b>2</b>
1.1 Základní pojmy a definice . . . . .	2
1.1.1 Základní typy grafů . . . . .	2
1.1.2 Sled, tah, cesta . . . . .	2
1.1.3 Kružnice a cyklus . . . . .	2
1.1.4 Stupně vrcholů . . . . .	3
1.2 Skóre . . . . .	3
1.3 Hledání grafu ke skóre . . . . .	4
1.4 Příklad hledání grafu pro skóre . . . . .	5
1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů . . . . .	5
1.6 Tvrzení o podgrafech . . . . .	5
1.7 Souvislý graf . . . . .	6
1.8 Pojmy založené na vzdálenosti . . . . .	6
1.8.1 Vzdálenost . . . . .	6
1.8.2 Průměr . . . . .	6
1.8.3 Excentricita . . . . .	6
1.8.4 Centrum . . . . .	6
1.8.5 Poloměr . . . . .	7
<b>2 Souvislé grafy</b>	<b>8</b>
2.1 $k$ -souvislost . . . . .	8
2.2 Souvislost v grafu . . . . .	8
2.3 Vrcholový řez . . . . .	8
2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu . . . . .	8
2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti . . . . .	8
2.5.1 Pomocné lemma 1 . . . . .	9
2.5.2 Pomocné lemma 2 . . . . .	9
2.6 Artikulace . . . . .	11
2.7 Operace nad 2-souvislými grafy . . . . .	11
2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích . . . . .	11
2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici . . . . .	11
2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci . . . . .	12
2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu . . . . .	13

2.12	Příklad sestrojení 2-souvislého grafu . . . . .	13
2.13	Komponenty 2-souvislosti - blok . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Hranově souvislé grafy</b>	<b>15</b>
3.1	Hranový řez . . . . .	15
3.2	Hranová souvislost . . . . .	15
3.3	Most . . . . .	15
3.4	Souvislost krajních vrcholů a mostů . . . . .	15
3.5	Základní vlastnosti hranově souvislých grafů . . . . .	15
3.6	Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti . . . . .	16
3.6.1	Pomocné lemma 1 . . . . .	16
3.6.2	Pomocné lemma 2 . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Extremální teorie</b>	<b>17</b>
4.1	Věta o souvislosti vrcholů a hran . . . . .	17
4.2	Věta o souvislosti hran a úplném grafu . . . . .	17
4.3	Turánovy grafy . . . . .	18
4.4	Tvrzení počtu hran a Turánově grafu . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Orientované grafy</b>	<b>20</b>
5.1	Minimálně silně souvislý graf . . . . .	20
5.2	Věta o minimálně silně souvislému grafu a jeho vrcholech . . . . .	20
5.3	Algoritmus pro nalezení topologického očíslování . . . . .	21
5.4	Tranzitivní uzávěr . . . . .	21
5.5	Reflexivní a tranzitivní uzávěr . . . . .	21
5.6	Tranzitivní redukce . . . . .	21
5.7	Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Hamiltonovské grafy</b>	<b>22</b>
6.1	Cesta, kružnice, cyklus . . . . .	22
6.2	(Ne)orientovaný graf . . . . .	22
6.3	Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu . . . . .	22
6.4	Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici . . . . .	23
6.5	Turnaj . . . . .	23
6.6	Vztah hamiltonovských cyklů a silné souvislosti . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Toky v sítích</b>	<b>25</b>
7.1	Síť . . . . .	25

7.2	Tok v síti . . . . .	25
7.3	Omezení toku . . . . .	25
7.4	Různé vlastnosti sítí a toků . . . . .	25
7.5	Řez oddělující zdroj od spotřebiče . . . . .	25
7.6	Tvrzení o tocích a řezech . . . . .	26
7.7	Tvrzení o přípustných tocích a řezech . . . . .	27
7.8	Zlepšující cesta vůči toku $f$ . . . . .	27
7.9	Změna toku $f$ . . . . .	27
7.10	Změna toku podle zlepšující cesty je přípustný tok . . . . .	27
7.11	Značkovací procedura . . . . .	28
7.12	Tvrzení o výsledku značkovací procedury . . . . .	28
7.13	Věta o přípustném toku a maximálním přípustném toku . . . . .	28
7.14	Přírůstková síť vzhledem k toku . . . . .	28
7.15	Vrstvená síť . . . . .	29
7.16	Cirkulace . . . . .	29
7.17	Kapacita řezu . . . . .	29
7.18	Souvislost přípustné cirkulace a řezu . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Párování</b> . . . . .	<b>30</b>
8.1	Definice . . . . .	30
8.2	Vrchol nasycený a volný v párování . . . . .	30
8.3	Perfektní párování . . . . .	30
8.4	Maximální párování . . . . .	30
8.5	Střídavá cesta vůči párování $P$ . . . . .	30
8.6	Zlepšující cesta vůči párování $P$ . . . . .	31
8.7	Tvrzení o střídavé cestě . . . . .	31
8.8	Věta o vrcholově disjunktních zlepšujících cestách . . . . .	31
8.9	Souvislost perfektního párování a počtu komponent . . . . .	32
8.10	Párování v bipartitních grafech . . . . .	33
8.11	Věta o maximálním párování . . . . .	34
8.12	Věta o nasycujícím párování . . . . .	34
8.13	Tvrzení o vztahu stupňů vrcholů a nasycujícího párování . . . . .	35
8.14	Tvrzení o existenci nasycujícího párování všech vrcholů . . . . .	36
<b>9</b>	<b>Pokryvání</b> . . . . .	<b>37</b>
9.1	Nezávislé množiny, nezávislost . . . . .	37
9.2	Vrcholové pokrytí . . . . .	37

9.3	Věta o vztahu vrcholového pokrytí a nezávislosti . . . . .	37
9.4	Hranové pokrytí . . . . .	38
9.5	Věta o vztahu hranového pokrytí a maximálního párování . . . . .	38
<b>10</b>	<b>Barvení</b>	<b>39</b>
10.1	Hranové obarvení . . . . .	39
10.2	Hranová barevnost . . . . .	39
10.3	Věta o souvislosti hranové barevnosti a maximálním stupni grafu . . . . .	39
10.4	Vrcholové obarvení . . . . .	39
10.5	Barevnost grafu . . . . .	39
10.6	Tvrzení o dvoubarevném grafu . . . . .	39
10.7	Tvrzení o vztahu barevnosti grafu a nezávislosti grafu . . . . .	40
10.8	Tvrzení o největším stupni vrcholu a barevnosti grafu . . . . .	41
10.9	Příklad použití algoritmu sekvenčního barvení . . . . .	41
10.10	Věta o souvislosti největšího stupně vrcholu a barevnosti grafu . . . . .	42
<b>11</b>	<b>Grafy a vektorové prostory</b>	<b>44</b>
11.1	Těleso $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	44
11.2	Symetrická diference . . . . .	44
11.3	Charakteristická funkce očíslování . . . . .	44
11.4	Tvrzení o isomorfnosti $W_G$ . . . . .	45
<b>12</b>	<b>Kružnice a řezy</b>	<b>46</b>
12.1	Řez . . . . .	46
12.2	Věta o dvou různých řezech . . . . .	46
12.3	Prostor řezů . . . . .	47
12.4	Cutset . . . . .	47
12.5	Tvrzení o souvislosti cutsetů . . . . .	47
12.6	Tvrzení o řezu a kostrách . . . . .	47
12.7	Prostor kružnic . . . . .	48
12.8	Věta o prostoru kružnic a sudých stupních . . . . .	48
12.9	Fundamentální systém kružnic . . . . .	49
12.10	Tvrzení o nezávislosti fundamentálního systému kružnic . . . . .	49
12.11	Fundamentální systém řezů . . . . .	49
12.12	Tvrzení o nezávislosti fundamentálního systému řezů . . . . .	49
12.13	Tvrzení o generování fundamentálních systémů grafu . . . . .	49
12.14	Věta o sudém počtu společných hran a prostorech kružnic nebo řezů . . . . .	50

# Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autor velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/XP01TGR>.

**Poděkování.** Rád bych poděkoval profesorce Marii Demlové nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Teorie grafů.

Text je vysázen makrem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Leslieho Lamporta s využitím balíků `hyperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Grafy byly nakresleny pomocí maker `TikZ` Tilli Tantaua.

## Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

# 1 Neorientované grafy

## 1.1 Základní pojmy a definice

Graf je soubor vrcholů, hran a vztahů incidence. Zapíšeme jako  $G = (V, E, \varepsilon)$ , kde  $V$  je neprázdná množina vrcholů,  $E$  množina hran a  $\varepsilon$  říká „co hrany představují“, respektive

$$\varepsilon : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}. \quad (1.1)$$

Jestliže pro dvě hrany  $e_1, e_2 \in E$  platí, že  $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$ , pak se hrany  $e_1, e_2$  nazývají *paralelní*. Pokud graf nemá paralelní hrany, nazýváme jej *prostý*. V takovém případě také stačí chápout graf jako dvojici  $G = (V, E)$ , kde hrany jsou neprázdné maximálně dvouprvkové podmnožiny  $V$ .

*Smyčkou* nazveme takovou hranu, která je  $e \in E$  a pro  $\varepsilon(e) = \{u, v\}$  platí  $u = v$ .

$\mathcal{S} \dots$  je množina všech neorientovaných prostých grafů bez smyček.

### 1.1.1 Základní typy grafů

Rozlišujeme 2 základní typy grafů, orientované a neorientované.

- (a) Orientovaný graf:  $\varepsilon : E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V\}; u \in P_V(\varepsilon), v \in K_V(\varepsilon)$
- (b) Neorientovaný graf:  $\varepsilon : E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V\}; u, v$  jsou krajiní vrcholy  $\varepsilon$

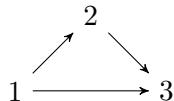
### 1.1.2 Sled, tah, cesta

- (a) Sled je taková posloupnost, která začíná a končí vrcholem a kde po každém vrcholu následuje hrana, tedy  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k$ .  
V orientovaném případě vždy platí  $P_V(e_1) = v_i, K_V(e_i) = v_{i+1}$ . Neorientovaný pouze říká, že  $v_i$  a  $v_{i+1}$  jsou krajiní vrcholy.
- (b) Tah je sled, ve kterém se nesmí opakovat hrany.
- (c) Cesta je sled, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy, s výjimkou počátečního, ve kterém cesta může končit.

### 1.1.3 Kružnice a cyklus

*Kružnice* je uzavřená neorientovaná cesta v grafu, *cyklus* uzavřená orientovaná cesta.

Příklad kružnice:

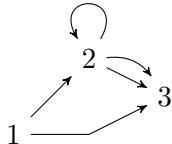


#### 1.1.4 Stupně vrcholů

Pokud  $G = (V, E, \varepsilon)$ , pak

- vstupní stupeň v  $d^-(v) = \|\{e \mid K_V(e) = v\}\|$
- výstupní stupeň v  $d^+(v) = \|\{e \mid P_V(e) = V\}\|$
- stupeň v  $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Příklad



$$\begin{aligned}d^-(2) &= 2 \\d^+(2) &= 3 \\d(2) &= 5\end{aligned}$$

Pro  $G = (V, E)$  je pouze  $d(v) = \|\{e \mid v \text{ je krajní vrchol } e, \text{ smyčku počítáme } 2\times\}\|$ .

Z toho máme důsledek

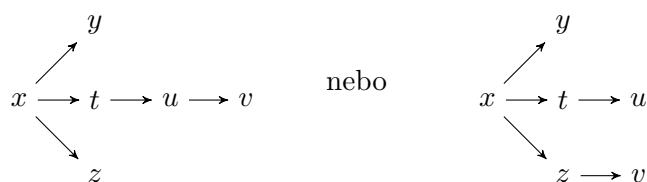
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\|E\| \quad (1.2)$$

Tedy každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

#### 1.2 Skóre

Skóre grafu ( $G \in \mathcal{S}$ ) je  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , kde  $d_i$  je stupeň vrcholu  $v_i$ .  
 $\begin{matrix} G=(V,E) \\ \|V\|=d \end{matrix}$

Mějme příklad skóre  $(1,1,1,2,2,3)$ . Jak by mohl vypadat graf s takovým skórem?



Jak vidíme, skóre jednoznačně neurčuje graf. Můžeme ze skóre ale říct, jestli je takové skóre validním skórem nějakého grafu?

### 1.3 Hledání grafu ke skóre

Máme  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ .

Pak  $D$  je skóre některého grafu  $G = (V, E)$  právě tehdy, když  $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$  definovaná tak, že

$$d_i = \begin{cases} d_i & \text{pokud } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pokud } i \geq n - d_n \end{cases} \quad (1.3)$$

je skóre nějakého  $G' \in \mathcal{S}$ .

DŮKAZ.

$\Leftarrow$ : Existuje  $G'$  pro  $D'$ .  $G$  vytvoříme tak, že k  $G'$  přidáme vrchol  $v_n$  a spojíme se všemi vrcholy  $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \dots, v_{n-1}$ . Pak  $G$  má skóre  $D$ .

$\Rightarrow$ : Máme  $G$  s  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , kde  $d_1$  je stupeň  $v_1$ ,  $d_2$  je stupeň  $v_2$  a tak dále.

Mějme  $\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ má } D\} \neq \emptyset$ .

Cíl: Chceme dokázat, že mezi všemi grafy  $\mathcal{G}$  existuje jeden, který má vlastnost, že poslední vrchol je spojen hranami s  $d_n$  předcházejícími vrcholy.

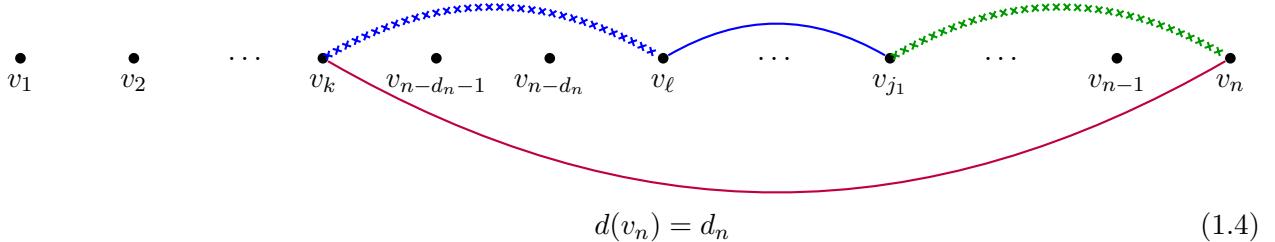
$\forall G \in \mathcal{G}$  mějme  $j_G$ , což bude největší index vrcholu, tak že  $\{v_{j_G}, v_n\} \notin E$ , tedy není mezi nimi hrana. To znamená, že pro ideální  $G$  chceme docílit  $j_G = n - d_n - 1$ .

Jako  $G_1$  označíme ten  $G_1 \in \mathcal{G}$ , že  $j_{G_1}$  je nejmenší. (Může být  $j_{G_1}$  menší jak  $n - d_n - 1$ ? Ne.  $v_n$  má stupeň  $d_n$ , a kdyby bylo  $j_{G_1}$  menší, tak by bylo vrcholů více, tzn. ne všechny by měly hranu s  $v_n$ .)

Označme  $j_1 = j_{G_1}$ .

Víme  $j_1 \geq n - d_n - 1$ . Ted nás ale zajímá, jestli  $j_1 = n - d_n - 1$ . Dokažme sporem.

Kdyby  $j_1 > n - d_n - 1$ , tak



Protože mezi  $d_n$  předcházejícími vrcholy je nějaký, který není spojen hranou s  $v_n$ , v našem případě  $v_{j_1}$ , nutně to znamená, že  $v_n$  musí mít hranu s nějakým vrcholem, řekněme  $v_k$ , který má ještě nižší index.

$$\textcolor{red}{d(v_k)} \leq \textcolor{green}{d(v_{j_1})} \quad (1.5)$$

$v_k$  je v pořadí dříve, než  $v_{j_1}$ , tudíž musí mít nutně menší roven stupeň. To ale nutně znamená, že  $v_{j_1}$  musí být spojen s alespoň jedním vrcholem, označme si ho  $v_\ell$ , se kterým není spojen  $v_k$ , protože  $v_k$  je spojen s  $v_n$ , zatímco  $v_{j_1}$  není.

Vytvořme

$$G_0 = (V_0, E_0)$$

$$V_0 = V_1 = V$$

$$E_0 = (E_1 \setminus \{\{v_n, v_k\}, \{v_\ell, v_{j_1}\}\}) \cup \{\{v_k, v_\ell\}, \{v_n, v_{j_1}\}\}$$

$G_0$  má skóre  $D$  a zároveň  $j_{G_0} < j_1$ . To ale znamená, že  $G_1$  nebyl graf s nejmenším  $j_G$ , což je spor. A proto nejmenší  $j_G$  je  $j_{G_0} = n - d_n - 1$ .

Ověřili jsme, že takový graf určitě existuje, takže  $G'$  dostaneme z  $G_0$  odstraněním  $v_n$ .  $G'$  pak má skóre  $D'$ .

■

## 1.4 Příklad hledání grafu pro skóre

Mějme  $D = (1, 1, 2, 3, 3)$ ;  $n = 5, d_n = 3; n - d_n = 2$ .

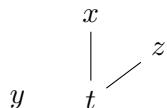
$$D_1 = (1, 0, 1, 2) \xrightarrow{\text{uspo.}} (0, 1, 1, 2); n_1 = 4, d_{n_1} = 2; n_1 - d_{n_1} = 2.$$

$D_2 = (0, 0, 0) \dots$  tento graf je určitě existuje, jedná se o diskrétní graf.

Kresleme postupně, začněme u  $D_2$ .

$x \quad y \quad z$

Pak přidejme vrchol a hrany tak, aby skóre odpovídalo  $D_1$ .



A nakonec tak, aby odpovídalo  $D$ .



## 1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů

Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček. Pak definujme

- $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$  je minimální stupeň grafu G.
- $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$  je maximální stupeň grafu G.
- $d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$  je průměrný stupeň grafu G.
- $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2}d(G)$  je poměr počtu hran ku počtu vrcholů.

Označme  $n = |V|$  a  $m = |E|$ . Pak  $d(G) = \frac{2m}{n}$  a  $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$ .

Zřejmě platí  $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ .

## 1.6 Tvrzení o podgrafech

Pro každý  $G \in \mathcal{S}$  s  $|E| \geq 1$  existuje podgraf  $H$  takový, že  $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .

DŮKAZ. Máme dvě situace

1. Buď  $\delta(G) > \varepsilon(G)$ , pak  $H = G$ .
2. Nebo  $\delta(G) \leq \varepsilon(G)$ , tj.  $v_1 \in V, d(v_1) = \delta(G) \leq \frac{m}{n}$ .

Dokažme tedy ještě platnost pro 2.

Označme  $G_1 := G \setminus v_1$ . A tedy  $m_1 = m - \delta(G)$  a  $n_1 = n - 1$ .

$$\text{Chceme } \underbrace{\frac{m_1}{n_1}}_{\varepsilon(G_1)} \geq \underbrace{\frac{m}{n}}_{\varepsilon(G)}.$$

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{m - \delta(G)}{n - 1} - \frac{m}{n} = \frac{nm - n\delta(G) - nm + m}{(n - 1)n} = \frac{m - n\delta(G)}{(n - 1)n}, \delta(G) \leq \frac{m}{n}, m \geq n\delta(G) \quad (1.6)$$

A tedy

$$m - n\delta(G) \geq 0 \quad (1.7)$$

$$n(n - 1) \geq 0 \quad (1.8)$$

Což dává

$$m \geq n\delta(G), \text{ tj. } \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G) \quad (1.9)$$

Algoritmus dále pokračuje:

$$\text{Pokud } \begin{cases} \delta(G_1) > \varepsilon(G_1), & \text{tak } H := G_1, \\ \delta(G_1) \leq \varepsilon(G_1), & \text{tak } v_2 \in V \setminus \{v_1\}, d_{G_1}(v_2) = \delta(G_1). \end{cases} \quad (1.10)$$

A tedy  $G_2 := G_1 \setminus v_2$ ,  $\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1)$ . A takto postupně dále. Algoritmus končí a nikdy nedostaneme prázdný graf, díky předpokladu, že  $G$  mělo alespoň jednu hranu, tedy  $\varepsilon(G) > 0$ . ■

## 1.7 Souvislý graf

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

## 1.8 Pojmy založené na vzdálenosti

### 1.8.1 Vzdálenost

Mějme  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$ ,  $x, y \in V$ . Vzdálenost  $x, y$  je  $d_G(x, y)$ , což značí počet hran v nejméně početné cestě z  $x$  do  $y$ , když existuje cesta. Jinak  $d_G(x, y) = \infty$ .

### 1.8.2 Průměr

Ať  $G$  je souvislý. Průměr  $G$  je  $\text{diam}(G) = \max \{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$ .

### 1.8.3 Excentricita

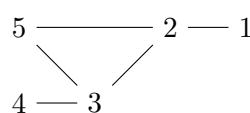
Ať  $G$  je souvislý. Excentricita vrcholu  $v \in V$  je  $\text{ex}(V) = \max \{d_G(v, x) \mid x \in V\}$ .

### 1.8.4 Centrum

Ať  $v \in V$  je centrální  $\rightarrow \text{ex}(v)$  je nejmenší mezi  $\text{ex}(x), x \in V$ . Centrum (staře *střed*) grafu je  $C(G) = \{v \mid v \text{ je centrální}\}$ .

Uvedme si příklad.

Zde  $C(G) = \{2, 3, 5\}$ .



### 1.8.5 Poloměr

Poloměr  $G$  je  $\text{rad}(G) = \text{ex}(v), v \in C(G)$ .

Platí  $\text{rad}(G) \leq \underbrace{\text{diam}(G)}_{\star} \leq 2 \text{ rad}(G)$ .

Zdůvodnění  $\star$ . Chceme  $d_G(x, y) \leq 2 \text{ rad}(G) \forall x, y \in V$ .

$$x \xrightarrow{P_1} v \xrightarrow{P_2} y$$

$P_1, P_2$  sled z  $x$  do  $y$  o  $\leq 2 \text{ rad}(G)$ .

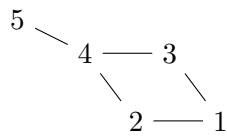
$P_1, P_2$  obsahuje cestu  $P$  z  $x$  do  $y$  o  $\leq P_1, P_2 \leq 2 \text{ rad}(G)$ .

## 2 Souvislé grafy

### 2.1 $k$ -souvislost

$G = (V, E) \in \mathcal{S}$ . Řekněme, že  $G$  je  $k$ -souvislý, pokud  $|V| > k$  a pro každou  $X \subseteq V$ ,  $|X| = k - 1$  je  $G \setminus X$  souvislý.

Mějme



Je souvislý, ale ne 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

Každý graf je 0-souvislý, i nesouvislý graf je 0-souvislý.

1-souvislý je každý souvislý graf.

### 2.2 Souvislost v grafu

Souvislost v grafu  $G$  je největší  $k$  takové, že  $G$  je  $k$ -souvislý. Značíme  $\kappa(G)$ .

Úplný graf má  $\kappa(G) = |V| - 1$ .

### 2.3 Vrcholový řez

Vrcholový řez grafu  $G \in \mathcal{S}$  je množina vrcholů  $X \subsetneq V$ , že  $G \setminus X$  je nesouvislý.

### 2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu

Je-li  $G \in S$ ,  $G$  není úplný, pak  $\kappa(G) = k$  právě tehdy, když nemá vrcholový řez o  $k - 1$  vrcholech a má **vrcholový řez** o  $k$  vrcholech.

### 2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti

Mějme  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$ , splňující  $d(G) \geq 4k$ . Pak  $G$  obsahuje podgraf, který je  **$k$ -souvislý**.

DŮKAZ.

- Pro  $k = 0$  triviální. Všechny grafy jsou 0-souvislé.
- Pro  $k = 1$ : Pokud  $\frac{2m}{n} \geq 4k$ , tedy  $m \geq 1$  (takže má hranu), tak sama hrana je 1-souvislý podgraf.
- Pro  $k \geq 2$ : tj.  $\frac{2m}{n} \geq 4k$

$$2m \geq 4kn \tag{2.1}$$

$$m \geq 2kn \tag{2.2}$$

$$m \geq 4n \text{ (dosazeno } k \geq 2\text{)} \tag{2.3}$$

Průběh důkazu  $d(G) \geq 4k, k \geq 2 \xrightarrow{\text{Lemma 1}} \text{(i), (ii)} \xrightarrow{\text{Lemma 2}} G \text{ má } k\text{-souvislost.}$

### 2.5.1 Pomocné lemma 1

Pokud  $k \geq 2$  a  $d(G) \geq 4k$ , pak

- (i)  $n \geq 2k - 1$
- (ii)  $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$

DŮKAZ. (i) Kdyby ne, tak  $n < 2k - 1$ .

$$n + 1 < 2k \quad (2.4)$$

$$\frac{n + 1}{2} < k \quad (2.5)$$

Ted použijme předpoklad  $m \geq 2kn > (n + 1)n$ . A to nejde, protože úplný neorientovaný graf bez smyček má  $\frac{n(n-1)}{2}$  hran.

(ii) Mějme

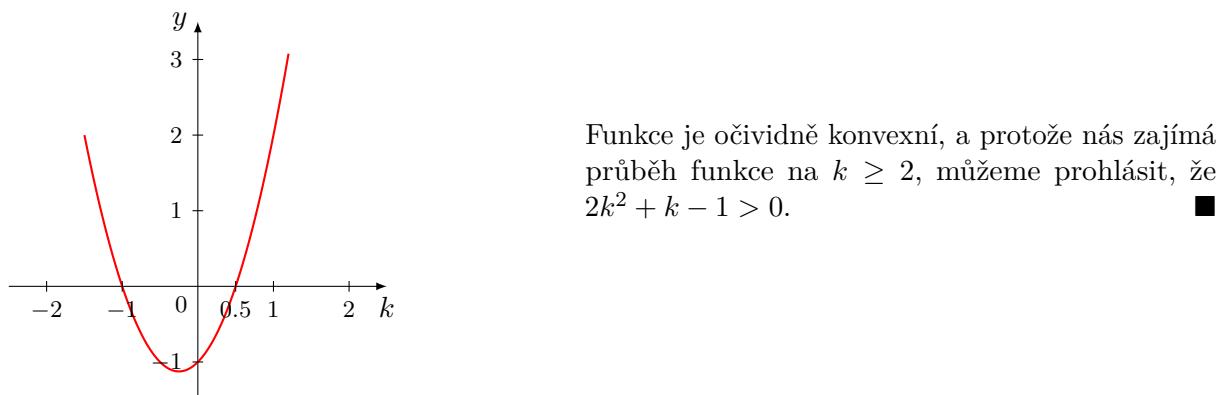
$$m \geq 2kn - ((2k - 3)(n - k + 1) + 1) = 2kn - (2kn - 2k^2 + 2k - 3n + 3k - 3 + 1) \quad (2.6)$$

$$= 2k^2 - 5k + 3n + 2 \quad (2.7)$$

Ted aplikujme již dokázané (i):

$$2k^2 - 5k + 3n + 2 \geq 2k^2 - 5k + 6k - 3 + 2 = 2k^2 + k - 1 \quad (2.8)$$

Vyšetřeme průběh funkce



### 2.5.2 Pomocné lemma 2

Pokud  $G$  splňuje (i) a (ii), tak  $G$  má  **$k$ -souvislý** podgraf.

DŮKAZ.  $G$  není  **$k$ -souvislý**.

Indukcí podle  $|V| = n$ .

Základní krok: n  $\stackrel{(i)}{\geq} 2k - 1$ ,  $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$ .

Dosadíme  $k = \frac{n+1}{2}$ :

$$m \geq (n + 1 - 3) \left( n - \frac{n + 1}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2} + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (2.9)$$

A tedy graf je úplný na  $n$  vrcholech. Ted potřebujeme  $n > k$ .

$$n = 2k - 1 = k + \underbrace{k - 1}_{\geq 1} \geq k + 1 \quad (2.10)$$

Indukční krok: Každý graf  $G'$  splňující (i) a (ii) s méně než  $n$  vrcholy (s alespoň  $2k - 1$  vrcholy) má  $k$ -souvislý podgraf.

Vezmeme  $G$  splňující (i) a (ii) s  $n$  vrcholy.

(a) Kdyby  $\delta(G) \leq 2k - 3$ , tak  $v \in V$  s  $d_G(v) \leq 2k - 3$ .

$$G \setminus v = G_1, n_1 = n - 1,$$

$$m_1 \geq m - (2k - 3) \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1 - (2k - 3) = (2k - 3)(\underbrace{n - 1}_{n_1} - k + 1) + 1 \quad (2.11)$$

Tudíž  $G_1$  má  $k$ -souvislý podgraf, tedy i ho má  $G$ .

(b) At  $\delta(G) > 2k - 3$ ,  $\delta(G) \geq 2k - 2$ ;  $\forall v \in G, d_G(v) \geq 2k - 2$ .

$G$  není  $k$ -souvislý, tj.  $X \subseteq V, |X| = k - 1$  a  $X$  je vrcholový řez.



$G \setminus X$  je nesouvislý. Všechn je  $(k - 1) + (k - 1) + 1$ .  $d_G(x) \geq 2k - 2$ .

$G_1$  graf indukovaný  $C_1$  v  $X$  má alespoň  $2k - 1$  vrcholů.

Kdyby  $G_1$  i  $G_2$  nesplňovaly (ii),  $G_i$  má  $n_i$  vrcholů a  $m_i$  hran,  $i = 1, 2$ .

$$m_i \not\geq (2k - 3)(n_i - k + 1) + 1, \quad \text{tj. } m_i \leq (2k - 3)(n_i - k + 1) \quad (2.12)$$

$m_1 + m_2 \geq m$  víme.  $n_1 + n_2 = n + (k - 1)$ , počítali jsme vrcholy v  $X$  dvakrát.

$$m \leq n_1 + n_2 \leq (2k - 3)(n_1 - k + 1) + (2k - 3)(n_2 - k + 1) = (2k - 3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \quad (2.13)$$

$$= (2k - 3)(n + (k - 1) - 2k + 2) \quad (2.14)$$

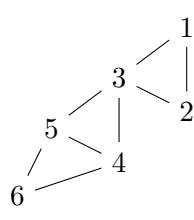
$$= (2k - 3)(n - k + 1) \quad (2.15)$$

Tedy spor s (ii). ■

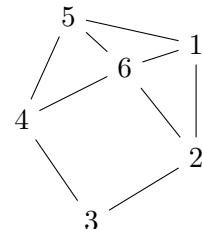
## 2.6 Artikulace

Vrchol  $v$  grafu  $G$  se nazývá artikulace, jestliže  $G \setminus v$  má více komponent souvislosti, než  $G$ .

**Platí.**  $G \in \mathcal{S}$  s alespoň 3 vrcholy je **2-souvislý**  $\iff$  je 1-souvislý a nemá artikulaci.



Není 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

## 2.7 Operace nad 2-souvislými grafy

Mějme operace

- (a)  $G \in \mathcal{S}$  a  $e \in \{u, v\}; u, v \in V(G)$ ,  $e \notin E(G)$ , pak  $G + e$  je graf s  $V(G)$  a  $E(G) \cup \{e\}$ .  
Je-li  $G$  **2-souvislý**, tak  $G + e$  je 2-souvislý.
- (b)  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$ ,  $e \in E$ , pak  $G \% e = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$ .  
„Do hrany  $e$  vložíme vrchol se stupněm 2.“

## 2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích

Každý **2-souvislý** graf obsahuje **kružnici**.

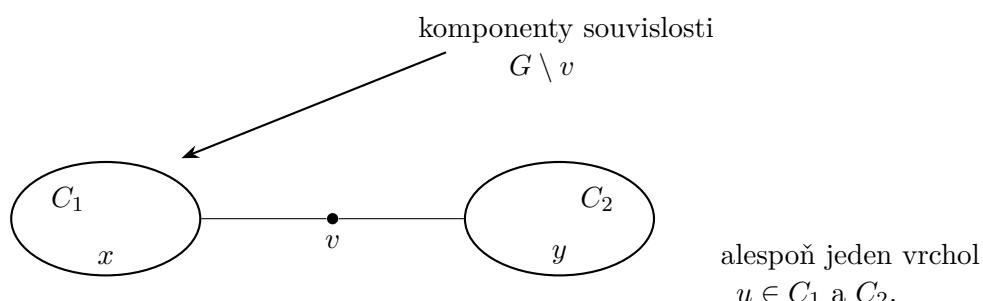
**DŮKAZ.** Každý 2-souvislý graf je **souvislý**. Kdyby souvislý neobsahoval kružnici, jedná se o strom. A každý strom s alespoň 3 vrcholy má **artikulaci**. Protože stromy nemohou být 2-souvislé, a zároveň všechny ostatní souvislé grafy obsahují kružnici, i každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici. ■

## 2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici

$G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$  je **2-souvislý** právě tehdy, když každé 2 vrcholy  $u \neq v$  leží na společné **kružnici**.

**DŮKAZ.**

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že pro každé  $u \neq v$  existuje kružnice  $K$ , která je obsahuje. To znamená, že graf je **souvislý**. Musíme ještě dokázat, že v něm neexistuje **artikulace**. Kdyby graf měl artikulaci  $v$ :



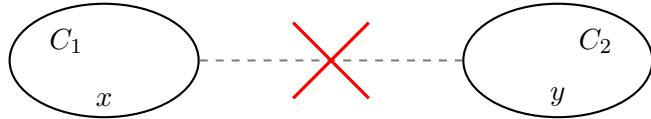
Znamenalo by to, že v jedné komponentě souvislosti by ležely alespoň 2 vrcholy (protože máme minimálně 3 vrcholy). Zároveň ale vrchol  $x \in C_1$  a  $y \in C_2$  rozhodně neleží na společné kružnici, tudíž graf nemůže mít artikulaci, takže  $G$  je 2-souvislý.

$\Rightarrow$ : Předpokládejme, že  $G$  je **2-souvislý**. Dokažme indukcí podle vzdálenosti  $d(u, v)$ .

(a) Základní krok:  $u, v$  s  $d(u, v) = 1$ .

Budeme se snažit ukázat, že když zrušíme hranu, souvislost zůstane.

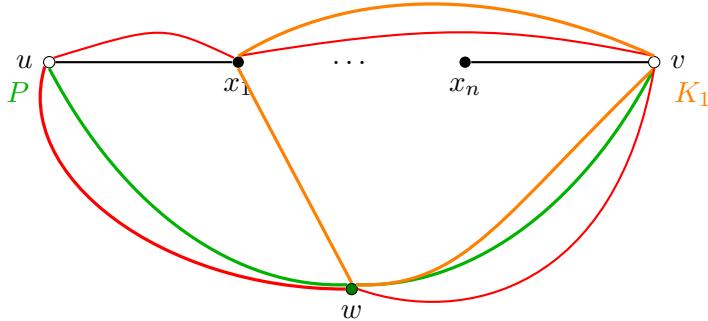
(1)  $G \setminus e$  je souvislý. Kdyby ne, tak



Přitom  $G$  má alespoň 3 vrcholy, tedy v jedné komponentě leží alespoň 2 vrcholy. **BÚNO** existuje  $x \in C_1$ ,  $x \neq u$ , tj.  $u$  je artikulace. Což je spor. Takže  $G \setminus e$  je souvislý. Tedy existuje cesta  $P$  z  $u$  do  $v$ . Pak  $P$  je kružnice obsahující  $u, v$ .

(b) Indukční předpoklad: Pro každé  $x, y$  s  $d(x, y) = n \geq 1$  existuje kružnice obsahující  $x, y$ .

(c) Indukční krok: Vezměme libovolné  $u, v$  s  $d(u, v) = n + 1$ . Vyberme nejkratší cestu:



Použijme I.P.: tj. existuje kružnice  $K_1$  obsahující  $x_1, v$ .  $x_1$  není **artikulace**, tj. existuje cesta  $P$  z  $u$  do  $v$  neobsahující  $x_1$ .  $w$  je prvním vrcholem cesty  $P$ , který leží na  $K_1$ . Použijeme **cestu**  $P$ , abychom se dostali z  $u$  do  $w$ , následně se přes  $K_1$  dostaneme do  $v$ . Dále po kružnici do  $x_1$ , kde si musíme vybrat trasu, která nevede do  $w$ , tj. směrem do  $u$ . A tím uzavřeme **kružnici** obsahující  $u$  a  $v$ .

■

## 2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci

$G \in \mathcal{S}$  je **2-souvislý** právě tehdy, když  $G \% e$ ,  $e \in E(G)$  je 2-souvislý.

DŮKAZ.

$\Rightarrow$ : Předpokládejme, že  $G$  je 2-souvislý, tj. souvislý a nemá **artikulaci**.

Vrchol  $w$ , který vložíme do hrany  $e$ , není artikulace. A žádný jiný se nemohl stát artikulací, to by už musely být artikulací předtím, a tedy by se v prvé řadě nejednalo o 2-souvislý.

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že  $G \setminus e$  je **2-souvislý**, tj. každé 2 vrcholy leží na společné **kružnici**.

$$x, y \in V(G) \dots \text{existuje } K \text{ v } G \setminus e \text{ obsahující } x, y \left\{ \begin{array}{ll} K \text{ neobsahuje } e_1, e_2 & K \text{ je kružnice } G. \\ K \text{ obsahuje } e_1, e_2 & \text{odstraníme } e_1, e_2 \\ & z K, \text{ nahradíme } e \\ & a máme K'. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$K'$  je kružnice v  $G$ . ■

## 2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu

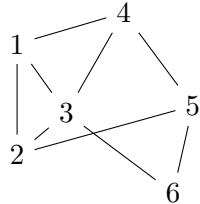
Každý 2-souvislý graf  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$  je možné sestrojit postupem:

$$G_0 := K \text{ je nějaká kružnice} \quad (2.17)$$

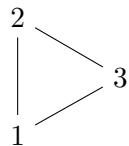
Máme-li  $G_i$ , že  $G_i \neq G$ , tak  $G_{i+1}$  je  $G_i$ , ke kterému přidáme **cestu**  $P$  (v  $G$ ), která vede mezi 2 vrcholy z  $G_i$  a zároveň všechny vrcholy této cesty nejsou v  $G_i$ .

## 2.12 Příklad sestrojení 2-souvislého grafu

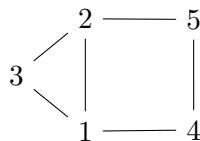
Mějme **2-souvislý** graf, tj. bez **artikulace**:



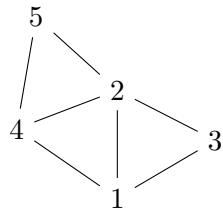
Začněme  $G_0$ :



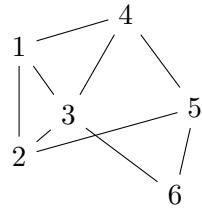
Přidáme cestu z 1 do 2, tedy  $G_1$ :



Ted přidáme cestu z 3 do 4,  $G_2$ :



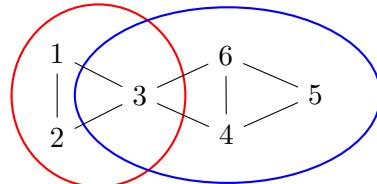
A posledně z 3 do 5,  $G_3 = G$ :



### 2.13 Komponenty 2-souvislosti - blok

Mějme  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$ , pak  $A \subseteq V(G)$  se nazývá *blok*, jestliže je maximální podmnožina taková, že jí indukovaný podgraf je **2-souvislý**.

*Pozn. maximální v tomto kontextu neznamená nejpočetnější, nýbrž, že do takové podmnožiny již nelze přidat další vrchol.*



Když nejsou jednotlivé bloky vzájemně disjunktní, tak jejich průnik je **artikulace**.

## 3 Hranově souvislé grafy

### 3.1 Hranový řez

Množině  $F \subseteq E$ , že  $G \setminus F$  je nesouvislá, se říká hranový řez.

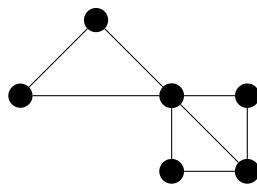
### 3.2 Hranová souvislost

Máme  $G \in \mathcal{S}$ ,  $G = (V, E)$ , pak  $G$  je  $k$ -hranově souvislý, jestliže neexistuje  $F \subseteq E$ ,  $|F| \leq k - 1$ , taková, že  $G \setminus F$  je nesouvislá.

Hranová souvislost grafu  $G$ , značíme  $\lambda(G)$ , je největší  $k$ , že  $G$  je  $k$ -hranově souvislý.

Pozn. největší znamená, že nemá hranový řez s  $\lambda(G) - 1$  hranami, ale má s  $\lambda(G)$  hranami.

Mějme 2-hranově souvislý graf:



### 3.3 Most

Nazveme most hranu  $e \in E(G)$ , že  $\{e\}$  je hranový řez.

### 3.4 Souvislost krajních vrcholů a mostů

Každý most má alespoň jeden krajní vrchol, který je artikulace.

DŮKAZ. Necht  $e = \{u, v\}$  je most v souvislém grafu  $G$ , kde  $|V(G)| \geq 3$ . Dle definice mostu platí, že graf  $G \setminus e$  není souvislý a skládá se ze dvou komponent souvislosti. Označme  $K_u$  komponentu obsahující vrchol  $u$  a  $K_v$  komponentu obsahující vrchol  $v$ .

Protože má graf  $G$  alespoň 3 vrcholy, musí alespoň jedna z komponent  $K_u$  nebo  $K_v$  obsahovat více než jeden vrchol. BÚNO předpokládejme, že  $|V(K_u)| \geq 2$ .

To znamená, že ve komponentě  $K_u$  existuje vrchol  $w$  různý od  $u$  (tj.  $w \in V(K_u), w \neq u$ ). Protože  $e$  je most, jediná cesta v grafu  $G$  z vrcholu  $w$  do vrcholu  $v$  vede přes hranu  $e$ , a tedy nutně prochází vrcholem  $u$ .

Pokud z grafu  $G$  odstraníme vrchol  $u$ , neexistuje žádná cesta mezi  $w$  a  $v$ , protože jediná spojnica byla přerušena. Graf  $G \setminus u$  tedy není souvislý (vrcholy  $w$  a  $v$  leží v různých komponentách).

Z toho plyne, že vrchol  $u$  je artikulace. ■

### 3.5 Základní vlastnosti hranově souvislých grafů

$G$  je 0-hranově souvislý pro každé  $G$ .

$G$  je 1-hranově souvislý  $\iff G$  je souvislý.

$G$  je 2-hranově souvislý  $\iff G$  je souvislý a nemá most.

### 3.6 Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti

Platí, že  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

DŮKAZ.

#### 3.6.1 Pomocné lemma 1

Pro každý prostý graf  $G$  bez smyček a jeho libovolnou hranu  $e$  platí

$$\alpha(G) - 1 \leq \alpha(G \setminus e) \leq \alpha(G). \quad (3.1)$$

DŮKAZ. Jestliže hrana  $e$  leží v některém neméně početném hranovém řezu  $F$ , pak  $F \setminus \{e\}$  je hranový řez grafu  $G \setminus e$ . V opačném případě mají grafy  $G$  a  $G \setminus e$  stejnou hranovou souvislost.

#### 3.6.2 Pomocné lemma 2

Pro každý prostý graf  $G$  bez smyček a jeho libovolnou hranu  $e$  platí

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G \setminus e) \leq \kappa(G). \quad (3.2)$$

DŮKAZ. Stačí dokázat trošku jiné tvrzení: Pro každý prostý graf  $H$  bez smyček platí

$$\kappa(H + e) \leq \kappa(H) + 1. \quad (3.3)$$

(Graf  $H + e$  má stejnou množinou vrcholů a jednu hranu  $e$  navíc)

Uvažujme některý nejméně početný vrcholový řez  $A$  grafu  $H$ ; tj.  $H \setminus A$  je nesouvislý; označme jeho komponenty souvislosti  $C_1, C_2, \dots, C_r$ . Navíc  $\kappa(H) = |A|$ .

Pak v následujících případech platí  $\kappa(H + e) = \kappa(H)$ :

- hrana  $e$  má alespoň jeden krajní vrchol v množině  $A$ ;
- hrana  $e$  leží uvnitř některé z komponent souvislosti  $C_1, C_2, \dots, C_r$ ;
- hrana  $e$  spojuje dvě komponenty souvislosti a  $r > 2$ .

Uvažujme případ  $r = 2$  a alespoň jedna komponenta  $C_1$  a  $C_2$  je alespoň dvouprvková. Označme  $x$  vrchol incidentní s hranou  $e$ , který leží v komponentě s alespoň 2 vrcholy. Pak  $A' = A \cup \{x\}$  je vrcholový řez grafu  $H + e$  a  $\kappa(H + e) \leq \kappa(H) + 1$ .

Zbývá případ, kdy  $H \setminus A$  obsahuje dvě komponenty, obě jsou jednoprvkové a hrana  $e$  je spojuje. Pak ale platí

$$\kappa(H + e) \leq |V| - 1 = |V| - 2 + 1 = |A| + 1 = \kappa(H) + 1. \quad (3.4)$$

Nyní se vratíme k důkazu 3.6.

Indukcí podle  $m = |E(G)|$ : Jestliže  $m < |V(G)| - 1$ , je  $G$  nesouvislý graf a  $\kappa(G) = 0 = \lambda(G)$ .

Předpokládejme, že  $\lambda(G) > 0$  a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy s méně než  $m$  hranami. Zvolme  $F$  některou nejméně početnou množinu hran takovou, že  $G \setminus F$  je nesouvislý graf. Dále vyberme hranu  $e$  z  $F$ . Pak  $G \setminus e$  má méně hran, proto splňuje nerovnost  $\kappa(G \setminus e) \leq \lambda(G \setminus e)$ . Odtud

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G \setminus e) \leq \lambda(G \setminus e) = \lambda(G) - 1. \quad (3.5)$$

■

## 4 Extremální teorie

### 4.1 Věta o souvislosti vrcholů a hran

*Mantel.* Máme  $G \in \mathcal{S}$  s  $n$  vrcholy,  $m$  hranami, který nemá  $K_3$ . Pak  $m \leq \frac{n^2}{4}$ .

DŮKAZ.

*Pomocná definice.* Množina  $A$  je nezávislá  $A \subseteq V(G)$  pokud pro každou  $e = \{u, v\}$ , jestliže  $u \in A$ , platí  $v \notin e$ . Množina  $A$  je nezávislá právě tehdy, když v ní žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.

At  $A$  je nejpočetnější nezávislá množina a  $B = V \setminus A$ .  $G$  nemá  $K_3$ : každá množina sousedů vrcholů  $v \in V$  je nezávislá množina.

$$m \leq \sum_{N \in B} d(v) \leq \underbrace{(n - k)}_{|B|} \cdot \underbrace{k}_{|A|} \quad (4.1)$$

Každá hrana má alespoň 1 krajní vrchol v  $B$ . Pro které  $k$  je  $(n - k)k$  největší?

$$f(x) = (n - x)x \quad (4.2)$$

$$f'(x) = n - 2x \implies f'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{2} \quad (4.3)$$

$$f''(x) = -2 \quad (4.4)$$

Protože jsme v  $\mathbb{N}$ , tak  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \leq \frac{n^2}{4}$ . ■

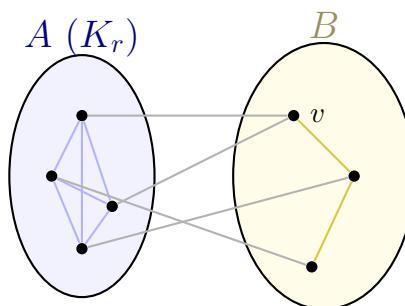
### 4.2 Věta o souvislosti hran a úplném grafu

Máme  $G \in \mathcal{S}$ , který neobsahuje  $K_{r+1}$  (úplný graf na  $r + 1$  vrcholech),  $r \geq 2$ . Pak

$$m \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (4.5)$$

DŮKAZ. Vezměme graf  $G$  bez  $K_{r+1}$  s nejméně hranami (přidáním hrany by vznikl  $K_{r+1}$ ). Tedy  $G$  má  $K_r$ . At  $A$  je množina vrcholů  $K_r$  a  $B$  je  $V(G) \setminus A$ ,  $|B| = n - r$ . Každý vrchol  $v \in B$  má max  $r - 1$  sousedů v  $A$  (jinak by  $A \cup \{v\}$  tvořil  $K_{r+1}$ ).

$m$  rozdělíme na hrany v  $A$  (hrany úplného grafu), hrany mezi  $A$  a  $B$  a hrany v  $B$ :



$$m = m_A + m_{A-B} + m_B \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + m_B \quad (4.6)$$

a graf indukovaný  $B$  neobsahuje  $K_{r+1}$  a má maximální počet hran.

$$m_B < m \quad (4.7)$$

$$n - r = |B| < n \quad (4.8)$$

Použijme tedy silnou indukci, dle počtu vrcholů  $n = |V(G)|$ .

- Základní krok.  $n = 1, 2, \dots, r$ .

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad (4.9)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \stackrel{?}{\leq} \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} \quad (4.10)$$

$$\frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} \left( n \frac{r-1}{r} - (n-1) \right) \quad (4.11)$$

$$= \frac{n}{2} \frac{nr - n - nr + r}{r} = \frac{n}{2} \underbrace{\frac{r-n}{r}}_{\geq 0} \stackrel{\geq 0}{\geq} 0. \quad (4.12)$$

- Když budeme mít indukční předpoklad pro  $G_B$ , pak:

$$m \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + \frac{r-1}{n} \frac{(n-r)^2}{2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left( \frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{(n-r)^2}{2} \right) \quad (4.14)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left( \frac{r^2 + 2rn + n^2 - 2nr + r^2}{2} \right) = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (4.15)$$

■

### 4.3 Turánovy grafy

Pro  $n, r < n$ .  $T(n, r)$  je  $r$ -partitní úplný graf. Označíme-li strany  $S_1, \dots, S_r$ , pak  $|S_i - S_j| \leq 1$ ,  $|S_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  nebo  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ . Takový graf má potom

$$\frac{r(r-1)}{2} \left( \frac{n}{r} \right)^2 = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}, \quad n = k \cdot r, \quad (4.16)$$

hran.

### 4.4 Tvrzení počtu hran a Turánově grafu

Každý  $G = (v, E) \in \mathcal{S}$  bez  $K_{r+1}$  s největším počtem hran je  $T(n, r)$ .

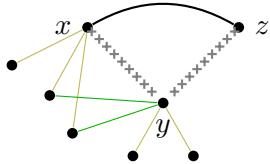
DŮKAZ. Na  $V$  definujme  $\mathcal{R}$ :  $u\mathcal{R}v \iff \{u, v\} \notin E$ .

$\mathcal{R}$  je reflexivní, protože nemáme smyčky.  $\mathcal{R}$  je symetrické, protože se jedná o neorientovaný graf. Ted'

je potřeba ověřit tranzitivitu, tj.  $(\{x, y\} \notin E, \{y, z\} \notin E) \implies \{x, z\} \notin E$ .

Dokažme sporem. Kdyby  $\{x, y\} \notin E$  a  $\{y, z\} \notin E$  a  $\{x, z\} \in E$ .

1)  $d(y) \geq d(x)$  (obdobně  $d(y) \geq d(z)$ ). Sporem. Kdyby  $d(y) < d(x)$ .

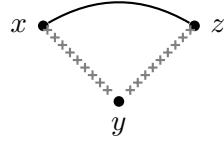


Neighbourhood  $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$ .

Z  $G$  odstraníme hrany  $\{y, t\}, t \in N(y)$  a přidáme  $\{y, u\}, u \in N(x)$ . Tím dostaneme  $G'$ , to má více hran jak  $G$ .

$G'$  nemá  $K_{r+1}$ , protože ani původní graf nebyl  $K_{r+1}$ . Což je spor. ■

2)  $G'' = G \setminus \{x, y, z\}$ .  $m(G) \leq m(G') + d(x) + d(y) + d(z) - 1$  ( $-1$  za hranu  $\{x, z\}$ ).



$G'''$  z  $G$  odstraníme hrany  $\{x, t\}, t \in N(x)$  a  $\{z, v\}, v \in N(z)$  a přidáme hrany  $\{x, u\}, u \in N(y)$  a  $\{z, u\}, u \in N(y)$ .

$$m(G''') = m(G'') + 3d(y) > m(G'') + d(x) + d(y) + d(z) - 1 \geq m(G) \quad (4.17)$$

$G''$  nemá  $K_{r+1}$ , což je spor. ■

$\mathcal{R}$  je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence  $\mathcal{R}$  jsou maximální množiny, že graf jimi indukovaný nemá hranu.  $G$  má nejvíce hran, tj.  $G$  má  $K_r$ , stran má  $r$ , je tedy úplný  $r$ -partitní graf.

Potřebujeme  $\|S_i| - |S_j\| \leq 1$ . Dokažme sporem. Kdyby ne, tak  $|S_1| \geq |S_2| + 2$ . Označme  $|S_1| = n_1$  a  $|S_2| = n_2$ .

Graf měl původně  $n_1 \cdot n_2$  hran. Nově má

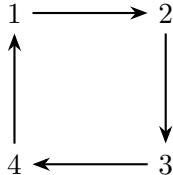
$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 n_2 \underbrace{- n_2 + n_1}_{\geq 2} \underbrace{- 1}_{\geq 1}. \quad (4.18)$$

A to je **Turánův** graf. ■

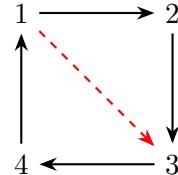
## 5 Orientované grafy

### 5.1 Minimálně silně souvislý graf

Silně **souvislý** graf se nazývá minimálně silně souvislý, jestliže  $G \setminus \{e\}$  není silně souvislý pro každou hranu  $e \in E(G)$ .



Minimálně silně souvislý  
(odebráním libovolné hrany se poruší)



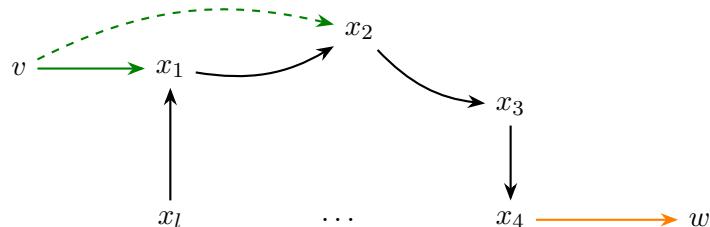
Není minimální  
(bez červené hrany je stále silně souvislý)

### 5.2 Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech

Každý minimálně silně souvislý graf  $G$  s alespoň 2 vrcholy má 2 vrcholy stupně 2.

DŮKAZ. Indukcí podle rozdílu  $k = m - n$ , kde  $m$  je počet hran a  $n$  počet vrcholů.

- Základní krok.  $k = 0$ , tj.  $m = n$ . Takže se jedná o **cyklus**. Všechny vrcholy cyklu mají stupeň 2.
- Indukční krok. Každý graf  $G$  (minimálně silně souvislý s  $m(G) - n(G) < k$ ) má 2 vrcholy stupně 2.  
Uvažujme  $G$  minimálně silně souvislý s  $m - n = k > 0$ . V  $G$  si vybereme cyklus  $C$  s největším počtem hran (tedy vrcholů).  $C$  má  $l$  vrcholů:



$\forall v \notin C$  existuje maximálně 1 hrana  $(v, x_i), x_i \in C$ .

$\forall w \notin C$  existuje maximálně 1 hrana  $(x_j, w), x_j \in C$ .

Vytvořme  $G'$ , což bude  $G$ , ve kterém nahradíme cyklus  $C$  vrcholem  $v_C$ .

$$m(G') - n(G') = m - l - (n - l + 1) = m - n - 1 = k - 1 \quad (5.1)$$

■

$G'$  má alespoň 2 vrcholy stupně 2, není-li ani jeden z nich  $v_C$ , jsou to vrcholy  $G$  stupně 2. Když  $G'$  bude mít pouze 2 vrcholy,  $v_C$  a  $x$ , stupně 2, tak musíme řešit 2 případy:

- 1) Když má cyklus alespoň 3 vrcholy ( $l \geq 3$ ), pak v  $C$  existuje vrchol stupně 2.
- 2) Když  $C$  má jen 2 vrcholy, když se zkombinují orientované hrany do neorientovaných, tak se jedná o strom. A každý strom s alespoň 2 vrcholy má 2 listy, tj. vrcholy stupně 1. A to jsou přesně ty 2 vrcholy stupně 2, které hledáme.

■

### 5.3 Algoritmus pro nalezení topologického očíslování

Algoritmus pro nalezení topologického očíslování v acyklickém grafu.

*Pozn.: Každý acyklický graf má alespoň 1 vrchol se stupněm 0.*

- 1) Spočítáme vstupní stupně vrcholů. Do množiny  $M$  vložíme všechny  $v$  s  $d^-(v) = 0$ ,  $i = 1$ .
- 2) Vybereme  $v_i \in M$  a odstraníme. Pro každé  $(v_i, w) \in E$ :  $d^-(w) := d^-(w) - 1$ , if  $d^-(w) = 0$ , pak  $M := M \cup \{w\}$ .  $i++$ .
- 3) Algoritmus končí pokud  $M = \emptyset$  a zároveň existuje alespoň jeden vrchol  $u$  s  $d^-(u) > 0$ , pak topologické očíslování neexistuje, nebo jsou všechny vrcholy topologicky očíslované.

### 5.4 Tranzitivní uzávěr

Mějme orientovaný graf  $G$ .  $G^t$  je tranzitivní uzávěr, když  $G = (V, E)$ , tak  $G^t = (V, E^t)$ , kde  $(u, v) \in E^t$ , právě tehdy, když existuje netriviální orientovaná cesta z  $u$  do  $v$ .

Platí, že  $G$  je silně souvislý  $\iff G^t$  je úplný orientovaný graf se všemi smyčkami.

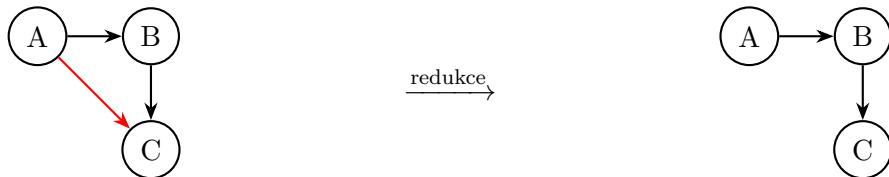
### 5.5 Reflexivní a tranzitivní uzávěr

$G^*$  je reflexivní a tranzitivní uzávěr  $G^* = (V, E^*)$ ,  $E^* = E^t \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$ .

*Lze také říct, že platí to samé, jako pro tranzitivní uzávěr, jen vyškrtneme netriviální.*

### 5.6 Tranzitivní redukce

$G = (V, E)$  je orientovaný graf. Jeho podgraf  $G' = (V, E')$  je tranzitivní redukce  $G$  pokud  $G^t = (G')^t$ , a žádný vlastní podgraf této redukce  $G''$  již nemá tuto vlastnost.



### 5.7 Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce

Je-li  $G \in \mathcal{S}$  acyklický, pak má jedinou tranzitivní redukci.

**DŮKAZ.** Sporem. Mějme  $G$  acyklický, tedy má topologické očíslování vrcholů  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ .

Kdyby  $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$  byly 2 různé tranzitivní redukce, tak

$$(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \neq \emptyset. \quad (5.2)$$

Vyberme z  $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$  hranu  $e = (v_i, v_j)$ ,  $i < j$ , která má nejmenší rozdíl  $j - i$ . **BÚNO:**  $e \in (E_1 \setminus E_2)$ , tedy  $e \notin E_2$ , ale  $e \in E_2^t$ . Tj. musí existovat v  $G_2$  cesta z  $v_i$  do  $v_j$ , která má alespoň 2 hrany.

$$v_i, e_1, e_2, \dots, e_k, v_j, k \geq 2. \quad (5.3)$$

$G_1$  tam je z redukce, tak alespoň  $e_a$ ,  $a = 1, \dots, k$  není v  $E_1$ .

$$e_a = (v_a, v_b), a < b. \quad (5.4)$$

$$i \leq a < b \leq j \quad (5.5)$$

Alespoň jedna z  $\leq$  je ve skutečnosti  $<$ , tedy  $b - a < j - i$ . Což je spor. ■

## 6 Hamiltonovské grafy

### 6.1 Cesta, kružnice, cyklus

Cesta (kružnice, cyklus) je hamiltonovská (ský), jestliže prochází všemi vrcholy.

### 6.2 (Ne)orientovaný graf

(Ne)orientovaný graf je Hamiltonovský, jestliže obsahuje hamiltonovský (skou) cyklus (kružnici).

### 6.3 Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu

Máme  $G \in \mathcal{S}$ ,  $n \geq 3$ , se skóre  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ ,  $n = |V|$ . Jestliže pro nějaké  $k < \frac{n}{2}$  platí  $d_k \leq k$ , a pak  $d_{n-k} \geq n - k$ , tak  $G$  je Hamiltonovský.

DŮKAZ. Sporem. Předpokládejme, že existuje  $G \in \mathcal{S}$ ,  $n \geq 3$ ,  $G$  splňuje  $k < \frac{n}{2}$  platí  $d_k \leq k$ , a pak  $d_{n-k} \geq n - k$  a  $G$  není Hamiltonovský.

Když ke  $G$  splňující Chvátalovu větu přidáme hranu, která v  $G$  není, tak nový graf stále splňuje Chvátalovu větu.

Zvolíme  $G$  s Chvátalovou podmínkou maximální bez hamiltonovské kružnice. Zvolme  $x, y : \{x, y\} \notin E$ ,  $d(x) + d(y)$  je největší mezi  $\{u, v\} \notin E$ ,  $d(x) \leq d(y)$ . V  $G$  existuje Hamiltonovská cesta z  $x$  do  $y$ . Označme

$$S := \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E\} \in 1, \quad (6.1)$$

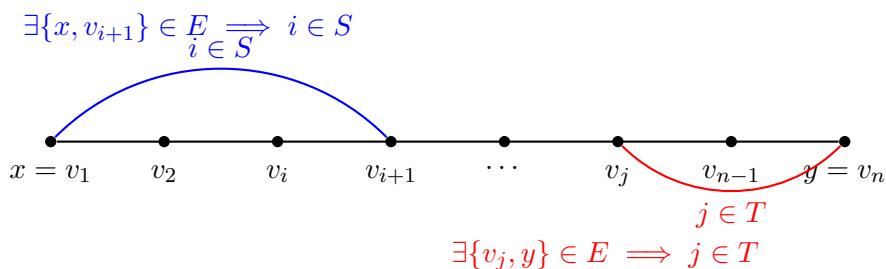
$$T := \{j \mid \{v_j, y\} \in E\} \ni n - 1, \quad (6.2)$$

kde  $n \notin S$ ,  $n \notin T$ .

$$S \cup T \subset \{1, \dots, n - 1\} \quad (6.3)$$

$$|S| = d(x) \quad (6.4)$$

$$|T| = d(y) \quad (6.5)$$



Pomocný důkaz. Platí  $S \cap T = \emptyset$ .

DŮKAZ. Kdyby  $i \in S \cap T$ , tak se jedná o hamiltonovskou kružnici. Spor s velkým předpokladem. ■  
Takže

$$|S \cup T| = |S| + |T| = d(x) + d(y) \leq n - 1. \quad (6.6)$$

Položme

$$k := d(x) \quad d(x) \leq d(y) \quad (6.7)$$

$$k < \frac{n}{2} \quad 2d(x) \leq d(x) + d(y) \leq n - 1 \quad (6.8)$$

A tedy  $d(x) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$ .

Máme  $d(x)$  vrcholů  $u$ , že  $\{x, y\} \in E$ .

$$u = v_l \quad (6.9)$$

$$\{v_{l-1}, y\} \notin E \quad (6.10)$$

$$d(v_{l-1}) + d(y) \leq d(x) + d(y) \quad (6.11)$$

$$d(v_{l-1}) \leq d(x) = k \quad (6.12)$$

Tj. máme  $k$  vrcholů  $v_{l-1}$  s  $d(v_{l-1}) \leq k$ . Platí  $d_k \leq k$ , protože máme alespoň  $k$  vrcholů stupně  $\leq k$ . Z Chvátalovy věty víme, že  $d_{n-k} \geq n - k$ , tj. existuje  $k + 1$  vrcholů  $w$  s  $d(w) \geq n - k$ . Ale  $x$  má  $d(x) = k$ . Tedy existuje  $w$  s  $d(w) = n - k$ , že  $\{x, w\} \notin E$ .

$d(x) + d(w) = k + n - k = n$ , což je spor s volbou  $x$  a  $y$ , protože  $d(x) + d(y) \leq n - 1$ . ■

## 6.4 Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici

Jestliže posloupnost čísel

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \text{ nesplňuje Chvátalovu větu,} \quad (6.13)$$

tak existuje

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n, a_i \leq d_i, \quad (6.14)$$

tak, že je skóre grafu, který nemá hamiltonovskou kružnici.

DŮKAZ. Jestliže posloupnost nesplňuje Chvátalovu větu, pak existuje číslo  $k$  tak, že  $k \leq \frac{n}{2}$ ,  $d_k \leq k$  a přitom  $d_{n-k} \leq n - k - 1$ .

Utvořme graf s množinou vrcholů  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  takto:  $\{v_i, v_j\}$  je hrana  $G$  právě tehdy, když

- buď  $1 \leq i \leq k$  a  $n - k + 1 \leq j \leq n$ ,
- nebo  $i \neq j$  a  $k + 1 \leq i, j \leq n$ .

Jinými slovy  $G$  se skládá z úplného bipartitního grafu se stranami  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$  a  $Y = \{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}$  a úplného grafu na množině vrcholů  $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ .

Graf  $G$  má tedy

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{n-k} \leq a_{n-k+1} \leq \cdots \leq a_n \quad (6.15)$$

$$\underbrace{d_1}_k \leq \underbrace{d_2}_k \leq \cdots \leq \underbrace{d_k}_k \leq \underbrace{d_{k+1}}_{n-k+1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_{n-k}}_{n-k+1} \leq \underbrace{d_{n-k+1}}_{n-1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_n}_{n-1} \quad (6.16)$$

a tedy majorizuje  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Není těžké nahlédnout, že v  $G$  neexistuje hamiltonovská kružnice. ■

## 6.5 Turnaj

Prostý orientovaný graf  $G$  bez smyček nazveme *turnajem*, jestliže pro každé dva různé vrcholy  $u, v$  buď  $(u, v)$  je hrana grafu  $G$ , nebo  $(v, u)$  je hrana  $G$ ; nikdy ale ne oboje.

Jinými slovy, zapomeneme-li na orientaci hran v grafu  $G$ , dostaneme úplný graf.

## 6.6 Vztah hamiltonovských cyklů a silné souvislosti

Je dán turnaj  $G$  s  $n \geq 3$  vrcholy. Pak v  $G$  existuje hamiltonovský cyklus právě tehdy, když je  $G$  silně souvislý.

DŮKAZ.

$\Rightarrow$ : Nechť v  $G$  existuje hamiltonovský cyklus  $C$ . Pro libovolné dva vrcholy  $u, v$  existuje cesta z  $u$  do  $v$  vedená po hranách cyklu  $C$ . Graf  $G$  je tedy silně souvislý.

$\Leftarrow$ : Nechť  $G = (V, E)$  je turnaj, který je silně souvislý. Ukážeme, že v  $G$  existuje cyklus délky  $k$  pro každé  $3 \leq k \leq n$ . Tím bude pro  $k = n$  dokázáno, že je  $G$  hamiltonovský. Důkaz vedeme indukcí podle  $k$ .

- 1) *Základní krok*  $k = 3$ . Vezměme libovolný vrchol  $v \in V$ . Označme  $N^+ = \{x \in V \mid \{v, x\} \in E\}$  a  $N^- = \{y \in V \mid \{y, v\} \in E\}$ . Protože je  $G$  silně souvislý, jsou obě množiny  $N^+$  a  $N^-$  neprázdné. Navíc musí existovat hrana vedoucí z  $N^+$  do  $N^-$ , tj. vrcholy  $x \in N^+$  a  $y \in N^-$  takové, že  $\{x, y\} \in E$ . (Kdyby taková hrana neexistovala, neexistovala by žádná cesta z  $N^+$  do  $v$ , což by byl spor se silnou souvislostí). Trojice  $\{v, x\}, \{x, y\}, \{y, v\}$  pak tvoří hledaný cyklus délky 3.
- 2) *Indukční předpoklad*. Předpokládejme, že máme zkonstruován cyklus  $C$  s vrcholy  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , pro  $3 \leq k < n$ .
- 3) *Indukční krok*. Pro rozšíření cyklu definujme množiny:

$$S^+ = \{w \notin C \mid \exists i, \{u_i, w\} \in E\} \quad \text{a} \quad S^- = \{w \notin C \mid \exists j, \{w, u_j\} \in E\}. \quad (6.17)$$

Protože  $G$  je silně souvislý a  $k < n$ , jsou obě množiny neprázdné (vrcholy mimo cyklus nemohou být izolované od cyklu). Rozlišme dva případy:

*Případ A:*  $S^+ \cap S^- \neq \emptyset$ . Existuje vrchol  $w$  mimo cyklus, do kterého vede hrana z cyklu a z něhož vede hrana do cyklu. Tedy existují  $i, j$  tak, že  $\{u_i, w\} \in E$  a  $\{w, u_j\} \in E$ .

- Pokud  $j = i + 1$  (vrcholy jsou na cyklu sousední), vložíme  $w$  mezi ně a máme cyklus  $u_i \rightarrow w \rightarrow u_{i+1}$ , jehož délka je  $k + 1$ .
- Pokud  $u_i$  a  $u_j$  nejsou sousední, uvažujme vrchol  $u_{i+1}$ . V turnaji musí existovat hrana mezi  $w$  a  $u_{i+1}$ .
  - \* Je-li  $\{w, u_{i+1}\} \in E$ , našli jsme sousední dvojici  $u_i, u_{i+1}$ , mezi kterou vložíme  $w$  (nahradíme hranci  $\{u_i, u_{i+1}\}$  cestou  $u_i \rightarrow w \rightarrow u_{i+1}$ ).
  - \* Je-li  $\{u_{i+1}, w\} \in E$ , pak máme novou dvojici  $\{u_{i+1}, w\}$  a  $\{w, u_j\}$ , kde se vzdálenost indexů na cyklu zmenšíla.

Opakováním tohoto postupu v konečně mnoha krocích nalezneme sousední vrcholy na cyklu, mezi které lze  $w$  vložit, a získáme cyklus délky  $k + 1$ .

*Případ B:*  $S^+ \cap S^- = \emptyset$ . Množiny jsou disjunktní. To v turnaji znamená, že pro každé  $z \in S^+$  platí  $\{u, z\} \in E$  pro všechny  $u \in C$  (jinak by existovala hrana  $\{z, u\}$ , což by znamenalo  $z \in S^-$ ). Analogicky pro  $t \in S^-$  platí  $\{t, u\} \in E$  pro všechny  $u \in C$ .

Protože je  $G$  silně souvislý, musí existovat hrana z množiny  $S^+$  do množiny  $S^-$  (jinak by nebyla cesta z  $S^+$  do  $S^-$ ). Nechť tedy existují  $z \in S^+$  a  $t \in S^-$  takové, že  $\{z, t\} \in E$ .

Vybereme na cyklu  $C$  tři po sobě jdoucí vrcholy, řekněme  $u_1, u_2, u_3$  (kde  $u_3$  následuje  $u_2$  a  $u_2$  následuje  $u_1$ ). Víme, že existují hrany  $\{u_1, z\}$  (protože  $z \in S^+$ ) a  $\{t, u_3\}$  (protože  $t \in S^-$ ). V původním cyklu  $C$  nahradíme cestu délky 2 ( $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3$ ) cestou délky 3 ( $u_1 \rightarrow z \rightarrow t \rightarrow u_3$ ).

Tím jsme do cyklu přidali dva vrcholy  $(z, t)$  a jeden odebrali  $(u_2)$ . Výsledný cyklus má délku  $k - 1 + 2 = k + 1$ .



## 7 Toky v sítích

### 7.1 Síť

Síť je prostý orientovaný graf bez smyček  $G = (V, E)$ . Máme zdroj  $s$  (source) a spotřebič  $t$  (target). Zapisujeme síť  $(G, l, c, s, t)$ .

### 7.2 Tok v síti

Tok v síti je  $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$ , že pro každý  $v \neq s, t$  platí

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \quad (\text{Kirchhoffův zákon}) \quad (7.1)$$

### 7.3 Omezení toku

Mějme  $l, c : E \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $l(e) \leq c(e)$ ; kde  $l$  je dolní omezení toku a  $c$  horní omezení (kapacita).

### 7.4 Různé vlastnosti sítí a toků

**Tok**  $f$  je přípustný pokud pro každou hranu  $e \in E$  je  $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$ . Přípustný tok obecně nemusí existovat; stačí například aby do některého vrcholu mohlo celkově přitéci méně, než z něho musí odtéci. Jestliže ale je **dolní omezení** v každé hraně nulové, tak přípustný tok vždy existuje.

Síť je *transparentní* pokud  $f(e) = 0 \ \forall e \in E$ .

*Velikost* přípustného toku od  $s$  do  $t$  je

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e). \quad (7.2)$$

Přípustný tok  $f$  se nazývá *maximální tok*, jestliže má největší velikost mezi všemi přípustnými toky.

### 7.5 Řez oddělující zdroj od spotřebiče

Je dána síť  $G = (V, E)$  se zdrojem  $z$ , spotřebičem  $s$ , a **omezeními**  $l, c$ . Množinu vrcholů  $A \subseteq V$  takovou, že  $z \in A$ ,  $s \notin A$  nazýváme *množina oddělující zdroj od spotřebiče*. Dále definujme  $W^+(A)$  jako množinu hran vycházejících z množiny  $A$ , a  $W^-(A)$  jako množinu hran vcházejících do množiny  $A$ . Přesněji

$$W^+(A) = \{e \mid P_V(e) \in A, K_V(e) \notin A\}, \quad (7.3)$$

$$W^-(A) = \{e \mid P_V(e) \notin A, K_V(e) \in A\}. \quad (7.4)$$

Množina

$$W(A) = W^+(A) \cup W^-(A) \quad (7.5)$$

se nazývá *řez určený množinou  $A$* .

*Maximální řez* je řez  $W(A)$  s nejmenší možnou hodnotou  $\text{cap}(W(A))$ .

## 7.6 Tvrzení o tocích a řezech

Pro každý řez  $W(A)$  a každý tok  $f$  platí

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e). \quad (7.6)$$

DŮKAZ.

- 1) *Základní krok.* Nechť  $k = 1$ . Protože  $s \in A$ , musí platit, že  $A = \{s\}$ . V tomto případě je množina  $W^+(A)$  tvořena všemi hranami vycházejícimi ze zdroje  $s$  a množina  $W^-(A)$  všemi hranami vcházejícimi do zdroje  $s$ . Podle definice velikosti toku  $\text{vel}(f)$  platí

$$\text{vel}(f) = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s). \quad (7.7)$$

Což přesně odpovídá definici:

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(\{s\})} f(e) - \sum_{e \in W^-(\{s\})} f(e) \quad (7.8)$$

Tvrzení tedy pro  $k = 1$  platí.

- 2) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolnou množinu  $A$  velikosti  $k$  obsahující  $s$  a neobsahující  $t$ .
- 3) *Indukční krok.* Mějme množinu  $A'$  velikosti  $k + 1$ , která obsahuje  $s$  a neobsahuje  $t$ . Zvolme libovolný vrchol  $v \in A'$  takový, že  $v \neq s$ . Takový vrchol jistě existuje, protože  $|A'| \geq 2$ . Položme  $A = A' \setminus \{v\}$ . Množina  $A$  má velikost  $k$ , obsahuje  $s$  a neobsahuje  $t$ , proto pro ni dle indukčního předpokladu platí vztah (7.6).

Nyní zkoumejme rozdíl mezi toky přes řezy určené množinami  $A$  a  $A'$ . Přidáním vrcholu  $v$  do množiny  $A$  se změní sumy následovně:

- Hrany z  $A$  do  $v$ , které byly původně v  $W^+(A)$ , se stanou vnitřními hranami  $A'$ , tedy ze sumy zmizí (odečteme tok vtékající do  $v$  z  $A$ ).
- Hrany z  $v$  do  $A$ , které byly původně v  $W^-(A)$ , se stanou vnitřními, tedy ze sumy zmizí (přičteme tok vytékající z  $v$  do  $A$ , protože v  $W^-$  byl s minusem).
- Hrany z  $v$  do  $V \setminus A'$ , které dříve nebyly v řezu, se stanou součástí  $W^+(A')$  (přičteme tok vytékající z  $v$  ven).
- Hrany z  $V \setminus A'$  do  $v$ , které dříve nebyly v řezu, se stanou součástí  $W^-(A')$  (odečteme tok vtékající do  $v$  zvenčí).

Matematicky vyjádřeno:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in W^+(A')} f(e) - \sum_{e \in W^-(A')} f(e) &= \left( \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{u \in A} f(u, v) + \sum_{w \notin A'} f(v, w) \right) \\ &\quad - \left( \sum_{e \in W^-(A)} f(e) - \sum_{u \in A} f(v, u) + \sum_{w \notin A'} f(w, v) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Seskupíme-li členy odpovídající původnímu toku a členy týkající se vrcholu  $v$ , dostáváme:

$$\text{Tok}(A') = \text{vel}(f) + \underbrace{\left( \sum_{u \in A} f(v, u) + \sum_{w \notin A'} f(v, w) \right)}_{\text{celkový tok z } v} - \underbrace{\left( \sum_{u \in A} f(u, v) + \sum_{w \notin A'} f(w, v) \right)}_{\text{celkový tok do } v} \quad (7.10)$$

Jelikož  $v \neq s$  a  $v \neq t$  (protože  $t \notin A'$ ), platí pro vrchol  $v$  Kirchhoffův zákon zachování toku:

$$\sum_{z \in V} f(v, z) - \sum_{z \in V} f(z, v) = 0. \quad (7.11)$$

Členy v závorkách výše pokrývají všechny hrany incidentní s  $v$  (bud vedou z/do  $A$ , anebo z/do  $V \setminus A'$ ). Rozdíl v závorce je tedy roven nule. Proto platí:

$$\sum_{e \in W^+(A')} f(e) - \sum_{e \in W^-(A')} f(e) = \text{vel}(f). \quad (7.12)$$

■

## 7.7 Tvrzení o přípustných tocích a řezech

Pro každý **přípustný tok**  $f$  a **řez**  $W(A)$  platí  $\text{vel}(f) \leq \text{cap}(W(A))$ .

DŮKAZ.

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) = \text{cap}(W(A)) \quad (7.13)$$

Navíc každý přípustný tok splňuje  $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$ . ■

## 7.8 Zlepšující cesta vůči toku $f$

Je dán **přípustný tok**  $f$ . Neorientovaná cesta v grafu  $G$  od zdroje  $z$  ke spotřebiči  $s$  se nazývá **zlepšující cesta vůči  $f$** , jestliže

$$f(e) < c(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vpřed}, \quad (7.14)$$

$$l(e) < f(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vzad}. \quad (7.15)$$

*Kapacita zlepšující cesty* je

$$\text{cap}(C) = \min (\{c(e) - f(e) \mid e \in C \text{ vpřed}\} \cup \{f(e) - c(e) \mid e \in C \text{ vzad}\}) \quad (7.16)$$

## 7.9 Změna toku $f$

Změna toku  $f$  podél **zlepšující cesty**  $C$  s kapacitou  $d$  je tok  $f'$  definovaný

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vpřed} \\ f(e) - d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vzad} \\ f(e) & \text{pro hrany } e \text{ neležící na cestě} \end{cases} \quad (7.17)$$

## 7.10 Změna toku podle zlepšující cesty je přípustný tok

Je-li  $C$  **zlepšující cesta** kapacity  $d$  vzhledem k **přípustnému toku**  $f$ , pak zlepšující tok  $f'$  je také přípustným tokem a  $\text{vel}(f') = \text{vel}(f) + d$ .

DŮKAZ.  $f'$  je tok,  $v \in C$ ,  $v \neq s, t$ .

## 7.11 Značkovací procedura

**Vstup:** přípustný tok  $f$ .

**Výstup:** zlepšující cesta  $C$  vůči  $f$ , nebo odpověď „ne“ a množina označovaných vrcholů  $A$ .

- 1) *Incializace.* Označkujeme zdroj  $s$ , ostatní vrcholy jsou bez značky.
- 2) *Test nalezení zlepšující cesty.* Jestliže byl označkován  $t$ , zpětným postupem zkonstruujeme zlepšující cestu, kterou vrátíme.
- 3) *Značkování dopředu.* Jestliže existuje hrana  $e$  taková, že  $P_V(e)$  má značku,  $K_V(e)$  nemá značku a  $f(e) < c(e)$ , označkujeme  $K_V(e)$ ; pro  $K_V(e)$  si zapamatujeme  $e$ . **goto 2**)
- 4) *Značkování dozadu.* Jestliže existuje hrana  $e$  taková, že  $K_V(e)$  má značku,  $P_V(e)$  nemá značku a  $l(e) < f(e)$ , označkujeme  $P_V(e)$ ; pro  $P_V(e)$  si zapamatujeme  $e$ . **goto 2**)
- 5) *Neexistuje zlepšující cesta.* Nemůžeme-li již značkovat a nebyl označkován  $t$ , vrátíme odpověď „ne“ a množinu označovaných vrcholů  $A$ .

## 7.12 Tvrzení o výsledku značkovací procedury

Jestliže značkovací procedura skončila odpovědí „ne“ a vrátila množinu označovaných vrcholů  $A$ , pak

$$\text{vel}(f) = \text{cap}(W(A)). \quad (7.18)$$

To znamená, že tok  $f$  má maximální velikost a řez určený množinou  $A$  má nejmenší kapacitu.

DŮKAZ. Mějme množinu označovaných vrcholů  $A$ .  $s \in A$  a  $t \notin A$ .

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \quad (7.19)$$

$$\vdots \quad (7.20)$$

$$\sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) = \text{cap}(W(A)) \quad (7.21)$$

## 7.13 Věta o přípustném toku a maximálním přípustném toku

*Ford-Fulkersonova věta.* Jestliže v síti  $G = (V, E)$ , s omezeními  $l, c$ , zdrojem  $s$  a spotřebičem  $t$  existuje přípustný tok, pak existuje maximální přípustný tok  $f_{\max}$  a jeho velikost je rovna kapacitě minimálního řezu.

## 7.14 Přírůstková síť vzhledem k toku

Mějme přípustný tok  $f$  v  $G = (V, E)$ , s omezeními  $l, c$ , zdrojem  $s$  a spotřebičem  $t$ . Pak síť  $G_f = (V, E_f)$  je přírůstková síť toku  $f$ , se zdrojem  $s$ , spotřebičem  $t$ , nulovým dolním omezením a kapacitou  $c_f$ , kde

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = c(e) - f(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } f(e) < c(e). \quad (7.22)$$

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = f(e) - l(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } l(e) < f(e). \quad (7.23)$$

Každá zlepšující cesta od zdroje  $s$  ke spotřebiči  $t$  je zlepšující cestou v  $G_f$  s tím, že všechny hrany cesty jsou hranami vpřed; tj. jedná se o orientovanou cestu v  $G_f$ .

## 7.15 Vrstvená síť

Mějme **přírůstkovou síť**  $G_f$ . Pak její podgraf, který obsahuje všechny hrany některé nejkratší (na počet hran v cestě) **zlepšující cesty** od  $s$  k  $t$  se nazývá **vrstvená síť**.

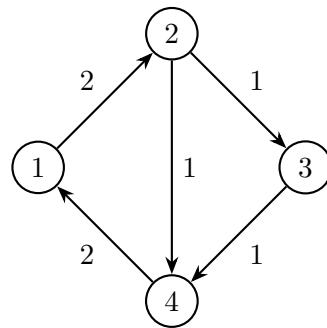
Sestrojit k dané přírůstkové síti vrstvenou síť je možné v čase úměrném počtu hran přírůstkového grafu  $G_f$ , a tudíž i původního grafu  $G$ .

*Uvědomme si, že  $G_f$  má nejvýše dvakrát tolik hran jako  $G$ .*

## 7.16 Cirkulace

Je dán orientovaný graf  $G = (V, E)$  a omezení  $l, c$ . Zobrazení  $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$  se nazývá **cirkulace**, jestliže Kirchhoffův zákon platí pro všechny vrcholy  $v \in V$ .

Cirkulace se nazývá **přípustná**, jestliže navíc pro každou hranu  $e \in E$  platí  $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$ .



## 7.17 Kapacita řezu

Mějme síť  $G = (V, E)$  s ohodnoceními  $l, c$ . Uvažujme neprázdnou množinu vrcholů  $A \subset V$  takovou, že  $A \neq V$ . Pak kapacita řezu  $W(A)$  je definovaná jako

$$\text{cap}(W(A)) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e). \quad (7.24)$$

## 7.18 Souvislost přípustné cirkulace a řezu

V síti  $G = (V, E)$  s ohodnoceními  $l, c$  existuje **přípustná cirkulace** právě tehdy, když neexistuje **řez záporné kapacity**.

*Přípustná cirkulace tedy existuje právě tehdy, když každá množina vrcholů  $A$  má tu vlastnost, že **tok**, který do ní povinně musí vtéci kvůli dolnímu omezení  $l$  na hranách z  $W^-(A)$ , může z této množiny také odtéci díky hornímu omezení  $c$  na hranách z  $W^+(A)$ .*

DŮKAZ. Existuje-li přípustná cirkulace  $f$ , pak pro každý řez platí

$$C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) \geq \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) = 0. \quad (7.25)$$

Jestliže naopak přípustná cirkulace neexistuje, pak existence řezu se zápornou kapacitou vyplýne z algoritmu pro hledání přípustné cirkulace.

## 8 Párování

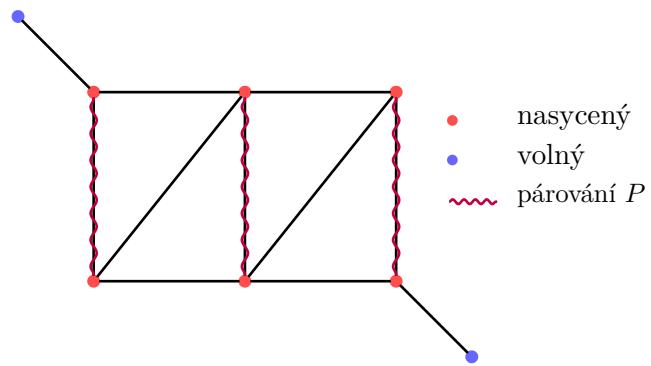
### 8.1 Definice

Je dán neorientovaný graf  $G = (V, E, \varepsilon)$ . Podmnožina hran  $P \subseteq E$  se nazývá *párování*, jestliže v  $P$  neexistují 2 různé hrany se společným krajním vrcholem (takže vrchol má stupeň max. 1).

### 8.2 Vrchol nasycený a volný v párování

Mějme *párování*  $P$ . Vrchol  $v$  grafu nazveme *nasycený* v  $P$ , pokud existuje hrana  $e \in P$  incidentní s  $v$ .

V opačném případě říkáme, že vrchol  $v$  je *volný* v  $P$ .



### 8.3 Perfektní párování

*Párování*  $P$  v grafu  $G$  nazveme *perfektní párování*, jestliže každý vrchol grafu je *nasycen* v  $P$ . To znamená, že  $P$  má  $\frac{n}{2}$  hran, kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $G$ .

### 8.4 Maximální párování

*Párování*  $P$  v grafu  $G$  nazveme *maximální párování*, jestliže je nejpočetnější mezi všemi párováními v grafu  $G$ .

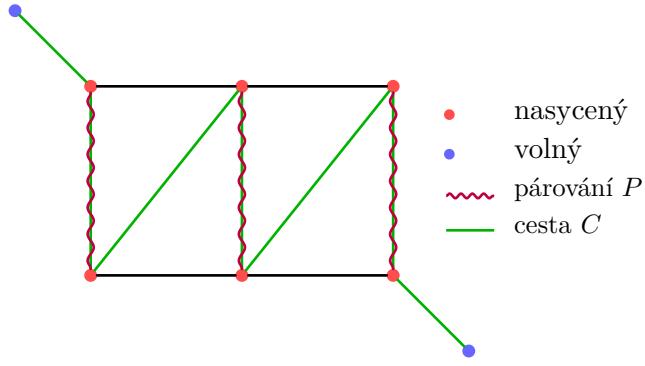
*Perfektní párování* je jistě maximální. Naopak to neplatí. Existují grafy, které perfektní párování nemají — stačí uvažovat grafy s lichým počtem vrcholů. Ovšem ani grafy se sudým počtem vrcholů nemusí perfektní párování obsahovat.

V každém grafu existuje maximální párování.

### 8.5 Střídavá cesta vůči párování $P$

Je dáno *párování*  $P$  v grafu  $G$ . *Cesta*  $C = e_1, e_2, \dots, e_k$  v grafu  $G$  se nazývá *střídavá cesta vůči  $P$* , jestliže platí následující dvě podmínky:

- 1) hrany z cesty  $C$  střídavě leží a neleží v párování  $P$ ,
- 2) jestliže krajní vrchol  $v$  cesty  $C$  je *nasycen* v  $P$ , pak  $C$  obsahuje i hranu párování  $P$ , která vrchol  $v$  nasycuje.



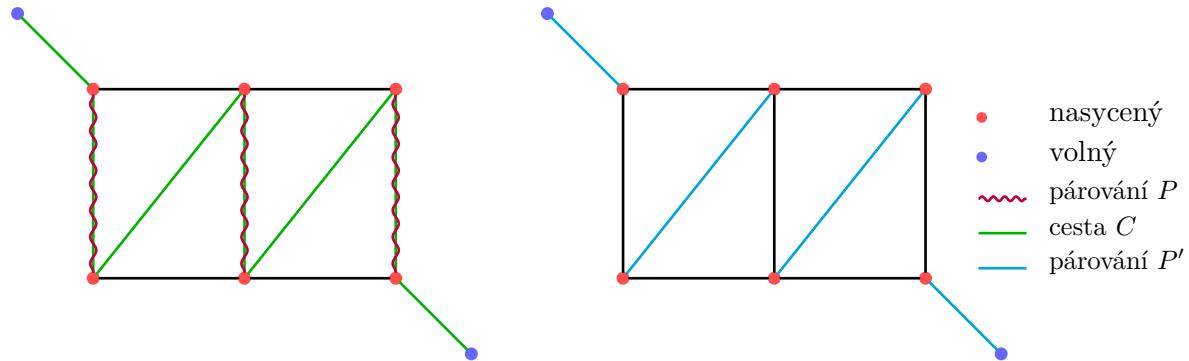
## 8.6 Zlepšující cesta vůči párování $P$

**Střídavá cesta** mezi volnými vrcholy se nazývá *zlepšující cesta vůči  $P$* .

## 8.7 Tvrzení o střídavé cestě

Jestliže  $C$  je **střídavá cesta** vůči **párování**  $P$ , pak množina hran  $P' = C \oplus P$  je také párování v  $G$ . *Připomeňme, že symetrická differenční  $A \oplus B$  dvou množin  $A, B$  je množina*

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (8.1)$$



A pokud je navíc  $C$  **zlepšující cesta**, tj. cesta mezi volnými vrcholy v  $P$ , pak  $|P'| = |P| + 1$ .

## 8.8 Věta o vrcholově disjunktních zlepšujících cestách

*Berge.* Je dáno **párování**  $P$  v grafu  $G$ . Označme  $P_{\max}$  **maximální párování** v  $G$  (o kterém víme, že existuje). Jestliže

$$|P_{\max}| = |P| + k, \quad (8.2)$$

pak v  $G$  existuje  $k$  vrcholově disjunktních **zlepšujících cest** vůči  $P$ .

Přitom alespoň jedna z těchto **cest** je kratší než  $\frac{n}{k}$ , kde  $n$  je počet vrcholů.

**DŮKAZ.** Utvořme symetrickou differenci hran obou párování, tj.  $H = P \oplus P_{\max} = (P \setminus P_{\max}) \cup (P_{\max} \setminus P)$ . Uvažujme graf, který obsahuje všechny vrcholy grafu  $G$  a hrany  $H$ . V tomto grafu má každý vrchol stupeň nejvýše 2. Mějme libovolný vrchol  $v$ . Pak nastane některé z následujících možností:

- (a) není **nasycen** ani v  $P$  ani v  $P_{\max}$ , pak  $d_H(v) = 0$ ;
- (b) je nasycen buď v  $P$ , nebo v  $P_{\max}$ , pak  $d_H(v) = 1$ ;
- (c) je nasycen v obou párováních, pak  $d_n(v) = 0$ , jestliže stejnou hranou, nebo  $d_H(v) = 2$ .

Komponenty souvislosti grafu  $(V, H)$  jsou buď isolované vrcholy (stupeň 0), nebo **kružnice**, nebo cesty. Jak v kružnicích, tak v cestách se střídají hrany z  $P$  a  $P_{\max}$ . Proto jsou kružnice sudé délky, cesty pak sudé či liché délky.

Mezi komponentami souvislosti nemůže existovat **cesta** liché délky, která by měla více hran z  $P$  než z  $P_{\max}$  (byla by to totiž **zlepšující cesta** vůči  $P_{\max}$  a ta neexistuje). Každá cesta liché délky je proto zlepšující cestou vzhledem k párování  $P$ . Víme, že každá kružnice i každá cesta sudé délky má stejný počet hran z  $P$  a  $P_{\max}$ . Ukážeme-li tedy, že  $H$  obsahuje o  $k$  více hran z  $P_{\max}$  než z  $P$ , budeme mít dokázáno, že existuje  $k$  komponent grafu  $H$ , které jsou zlepšujícími cestami vůči  $P$ .

Máme

$$H = (P_{\max} \setminus P) \cup (P \setminus P_{\max}). \quad (8.3)$$

Platí

$$|P_{\max} \setminus P| = |P_{\max}| - |P \cap P_{\max}| = |P| + k - |P \cap P_{\max}| = |P \setminus P_{\max}| + k. \quad (8.4)$$

■

## 8.9 Souvislost perfektního párování a počtu komponent

*Tutte.* Je dán prostý graf  $G = (V, E)$  bez smyček s alespoň třemi vrcholy. V grafu  $G$  existuje **perfektní párování** právě tehdy, když pro každou podmnožinu  $S \subseteq V$  platí

$$g(G \setminus S) \leq |S|, \quad (8.5)$$

kde  $g(G \setminus S)$  je počet komponent souvislosti grafu  $G \setminus S$ , které mají lichý počet vrcholů.

DŮKAZ.

$\Rightarrow$ : Předpokládejme, že v grafu  $G$  existuje perfektní párování (tj. párování **nasycující** všechny vrcholy grafu  $G$ ). Vezměme libovolnou  $S \subseteq V$ . Protože v každé liché komponentě souvislosti grafu  $G \setminus S$  je alespoň jeden vrchol, který není spárován uvnitř komponenty, musí být v perfektním párování spárován s nějakým vrcholem  $S$ . Proto nemůže být  $|S|$  menší než počet lichých komponent.

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že graf  $G$  splňuje  $g(G \setminus S) \leq |S|$  pro každou  $S \subseteq V$ .

Nejprve si uvědomme, že pro  $S = \emptyset$  podmínka zaručuje, že graf  $G$  má sudý počet vrcholů.

Dále si uvědomme, že splňuje-li  $G$  podmítku (8.5) a přidáme-li k němu hranu  $e$  mezi stávajícími vrcholy, pak graf  $G + e$  také splňuje podmítku (8.5). Ano, graf  $(G + e) \setminus S$  má buď stejně lichých komponent jako  $G \setminus S$ , nebo o dvě méně.

Předpokládejme, že by existoval graf  $G$  splňující (8.5), který nemá perfektní párování, tak vybereme jako  $G$  ten z nich, který nemá perfektní párování, ale přidáním libovolné hrany už **perfektní párování** mít bude.

Označme  $T$  množinu všech vrcholů stupně  $n - 1$ , kde  $n = |V|$ . Platí  $T \subseteq V$  a proto pro ni musí platit podmínka (8.5). Nejprve dokážeme, že každá komponenta souvislosti grafu  $G \setminus T$  je úplný graf.

Kdyby existovala komponenta souvislosti  $C$  grafu  $G \setminus T$ , která není úplným grafem, pak by v  $C$  existovaly vrcholy  $x, y, z$  takové, že  $\{x, y\}, \{y, z\} \in E$  a  $\{x, z\} \notin E$ . Navíc vrchol  $z$  neleží v  $T$ , proto existuje vrchol  $w \notin T$  takový, že  $\{z, w\} \notin E$ .

Označme  $P_1$  perfektní párování v grafu  $G + \{x, y\}$  a  $P_2$  perfektní párování v grafu  $G + \{z, w\}$ . Dále označme  $H$  symetrickou diferenci párování  $P_1 \oplus P_2$ . Platí  $\{x, y\}, \{z, w\} \in H$ . Rozebereme nyní dva případy:

- (a) Hrany  $\{x, y\}, \{z, w\}$  leží v různých komponentách souvislosti  $A, B$  v  $H$ ,  $\{x, y\} \in A$ ,  $\{z, w\} \in B$ . Pak párování  $P$ , které obsahuje hrany  $P_2$  komponenty  $A$  jinak hrany  $P_1$ , je perfektní párování v grafu  $G$ . Což je spor s faktom, že  $G$  nemá perfektní párování.
- (b) Hrany  $\{x, y\}, \{z, w\}$  leží ve stejné komponentě souvislosti  $A$  grafu  $H$ . Komponenta  $A$  je **kružnice** sudé délky, která střídavě obsahuje hrany z  $P_1$  a  $P_2$ . Označme  $K_1$  tu část  $A$ , která začíná ve vrcholu  $z$ , pokračuje z  $P_1$  a po hraně z  $P_2$  poprvé navštíví jeden z vrcholů  $x, y$ . **BÚNO** předpokládejme, že je to vrchol  $y$ . Dále označme  $K_2$  zbylou část kružnice  $A$ , ze které jsme odstranili hranu  $\{x, y\}$ . Definujme  $P$  takto:  $P$  obsahuje
- $K_1 \cap P_2$ ,
  - $K_2 \cap P_1$ ,
  - $\{x, z\}$ .

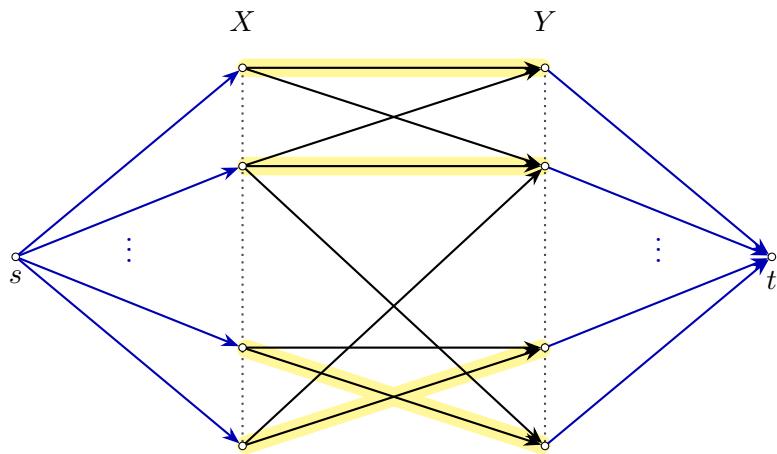
Tím jsme získali perfektní párování v grafu  $G$ ; opět spor.

Víme tedy, že všechny komponenty souvislosti grafu  $G \setminus T$  jsou úplné grafy. Definujme **párování**  $P$  takto: *V každé komponentě souvislosti grafu  $G \setminus T$  o sudém počtu vrcholů vybereme libovolné perfektní párování; v komponentě souvislosti  $G \setminus T$  o lichém počtu vrcholů spárujeme libovolně všechny vrcholy až na jeden, který spárujeme s některým vrcholem  $T$ .* Protože lichých komponent  $G \setminus T$  je nejvýše tolik jako  $|T|$ , můžeme to udělat. Navíc je počet vrcholů sudý, takže nám z množiny  $T$  zbyde sudý počet nespárovaných vrcholů, jedná se ovšem o vrcholy, které jsou spojeny s každým vrcholem grafu, můžeme proto zbylé vrcholy mezi sebou libovolně spárovat. Zase jsme ukázali, že v  $G$  existuje perfektní párování.

■

## 8.10 Párování v bipartitních grafech

Je dán bipartitní graf  $G$  se stranami  $X$  a  $Y$ . K němu je možné vytvořit síť takovou, že každému párování  $P$  v grafu  $G$  odpovídá přípustný tok  $f$ , a naopak každému přípustnému toku  $f$  v síti odpovídá párování  $P$  v  $G$ ; a to tak, že  $\text{vel}(f) = |P|$ .



Vytvořme síť  $G'$  s omezeními  $l, c$ , zdrojem  $s$ , spotřebičem  $t$  a hranami

$$E' : (s, x) \forall x \in X \quad (8.6)$$

$$(y, t) \forall y \in Y. \quad (8.7)$$

A dále zorientujme:  $\forall \{x, y\} \in E(G), x \in X, y \in Y \ E'$  obsahuje  $(x, y)$ . Pak omezení takové síťe  $l(e) = 0, c(e) = 1, \forall e \in E'$ .

Pro párování uděláme přípustný tok  $f_p$ , že

$$\{x, y\} \in P : f_P((x, y)) = 1. \quad (8.8)$$

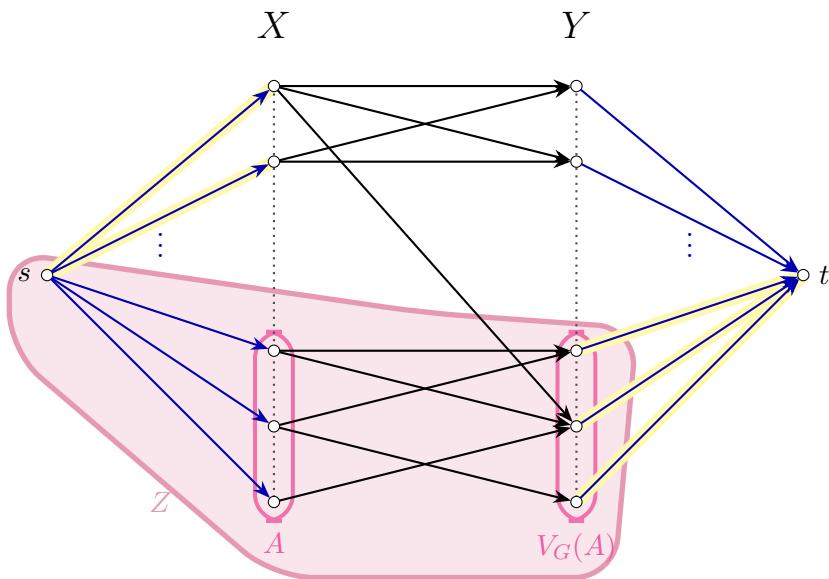
Takže  $|P| = \text{vel}(f_P)$ ; „projde tolik jedniček, kolik je hran párování“.

No a  $\{x, y\} \in P_f$  právě tehdy, když  $f((x, y)) = 1$ . Tedy  $\text{vel}(f) = |P_f|$ .

## 8.11 Věta o maximálním párování

*König.* Je dán bipartitní graf  $G$  se stranami  $X$  a  $Y$ . Označme  $P_{\max}$  maximální párování v  $G$ . Pak platí

$$|P_{\max}| = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|). \quad (8.9)$$



$$Z = \{s\} \cup A \cup V_G(A), t \notin Z.$$

$$W^+(Z) = \{(s, x) \mid x \notin A\} \cup \{(y, t) \mid y \in V_G(A)\} = |\{(s, x) \mid x \notin A\}| + |\{(y, t) \mid y \in V_G(A)\}| \quad (8.10)$$

$$\text{cap}(W(Z)) = \sum_{e \in W^+(Z)} c(e) \quad (8.11)$$

A určuje řez  $W(Z)$  s  $\text{cap}(W(Z)) = |X - A| + |V_G(A)|$ .

Minimální řez má tvar  $Z_0 = \{s\} \cup A_0 \cup V_G(A_0)$  pro vhodné  $A_0 \subseteq X$ , kde  $Z_0$  je množina označovaných vrcholů a  $A_0 = Z_0 \cap X$ .

Musíme ukázat, že  $Z_0 \cap Y = V_G(A_0)$ .

$$Z_0 \cup Y \subseteq V_G(A_0) \quad (8.12)$$

$$Z_0 \cup Y \supseteq V_G(A_0) \quad (8.13)$$

## 8.12 Věta o nasycujícím párování

*Hall.* Je dán bipartitní graf  $G$  se stranami  $X$  a  $Y$ . Pak v  $G$  existuje párování nasycující stranu  $X$  právě tehdy, když pro každou množinu  $A \subseteq X$  platí

$$|A| \leq |V_G(A)| = \{y \mid y \in Y \wedge \{x, y\} \in E\}. \quad (8.14)$$

DŮKAZ.

$\Leftarrow$ : Víme, že  $|P_{\max}| = |X \setminus A_0| + |V_G(A)|$  pro nějakou  $A_0 \subseteq X$  (z **Königovy věty**).

Sporem. Kdyby  $P_{\max}$  nenasycovalo  $X$ . Tak  $|P_{\max}| < |X|$ . Takže

$$|X \setminus A_0| + |V_G(A)| < |X| \quad (8.15)$$

$$|X| - |A_0| + |V_G(A)| < |X| \quad (8.16)$$

$$|V_G(A)| < |A_0| \quad (8.17)$$

Což je spor.

$\Rightarrow$ : Jestliže v grafu  $G$  existuje párování nasycující stranu  $X$ , pak  $G$  podmínu věty splňuje (párování každému vrcholu z množiny  $A$  „přiřazuje“ vrchol z  $V_G(A)$ , a tudíž vrcholů v  $V_G(A)$  musí být alespoň kolik je vrcholů v  $A$ .)

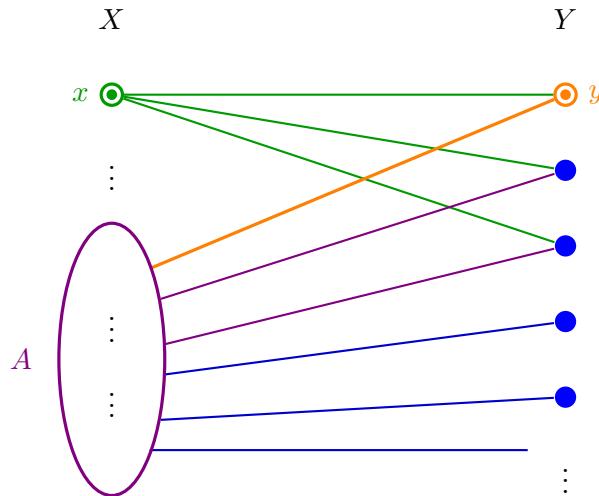
■

### 8.13 Tvrzení o vztahu stupňů vrcholů a nasycujícího párování

Je dán bipartitní graf  $G$  se stranami  $X$  a  $Y$ . Jestliže pro každý vrchol  $x \in X$  a každý vrchol  $y \in Y$  platí

$$d(x) \geq d(y), \quad (8.18)$$

pak v  $G$  existuje párování nasycující stranu  $X$ .



DŮKAZ. Označme  $d_X = \min \{d(x) \mid x \in X\}$  a  $d_Y = \max \{d(y) \mid y \in Y\}$ . Z předpokladu víme

$$d_X \geq d_Y. \quad (8.19)$$

Použijme **Hallovu větu**. Vezměme libovolnou množinu  $A \subseteq X$ .

$$W(A) \subseteq W(V_G(A)) \quad (8.20)$$

$$\text{a } |W(A)| \geq d_X |A|, |W(V_G(A))| \leq d_Y |V_G(A)| \quad (8.21)$$

Takže

$$d_X |A| \leq |W(A)| \leq |W(V_G(A))| \leq d_Y |V_G(A)| \quad (8.22)$$

a současně  $d_X \geq d_Y$ .

Může být  $|A| > |V_G(A)|$ ? Kdyby ano, tak

$$d_X |A| > d_Y |V_G(A)|. \quad (8.23)$$

Což neplatí, takže

$$|A| \leq |V_G(A)|. \quad (8.24)$$

A tedy **Hallová věta** říká, že existuje párování nasycující  $X$ .

■

### 8.14 Tvrzení o existenci nasycujícího párování všech vrcholů

Je dán bipartitní graf  $G$  se stranami  $X$  a  $Y$ . Pak existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy nejvyššího stupně.

DŮSLEDEK. Je dán bipartitní graf  $G = (V, E)$  se stranami  $X$  a  $Y$ . Označme  $\Delta(G)$  nejvyšší stupeň, který některý vrchol grafu má. Pak množinu hran  $E$  je možno rozdělit na  $\Delta(G)$  hranově disjunktních párování.

DŮKAZ. Vytvořme  $G'$ , že k němu přidáme hrany a vrchol tak, aby

$$\Delta(G) = d_{G'}(x) = d_{G'}(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (8.25)$$

V novém grafu  $G'$ , protože

$$d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \quad (8.26)$$

existuje párování nasycující  $X$ .

Vybrali jsme maximální párování  $P_{\max}$ . Odstraníme všechny hrany neležící v  $G$ .

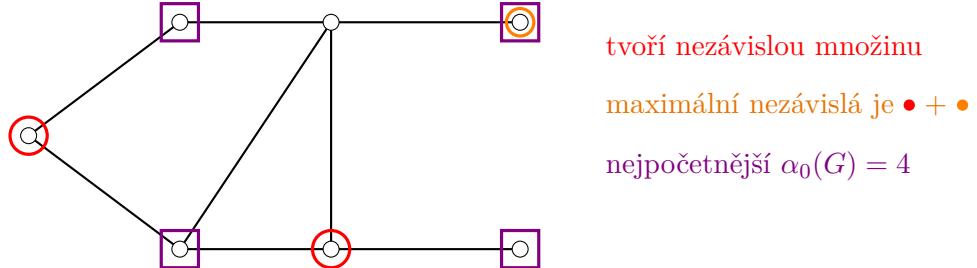
Musí zůstat nasyceny ty vrcholy, které měly největší stupeň. Tím dostaneme párování  $P$  nasycující vrcholy nejvyššího stupně. ■

## 9 Pokrývání

### 9.1 Nezávislé množiny, nezávislost

Mějme graf  $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ . Množinu vrcholů  $A \subseteq V$  nazveme *nezávislou množinou*, jestliže v grafu neexistuje hrana s oběma krajními vrcholy v  $A$ .

*Nezávislost grafu*, značíme ji  $\alpha_0(G)$ , je rovna počtu vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině v  $G$ .

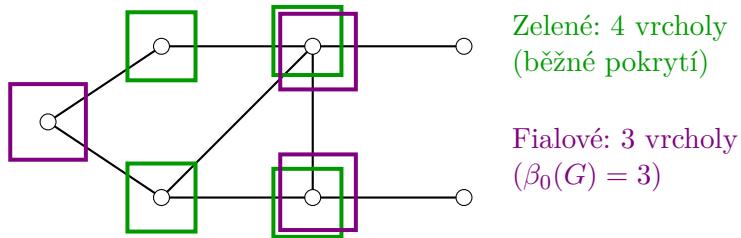


### 9.2 Vrcholové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný  $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ . Množina vrcholů  $K \subseteq V$  se nazývá *vrcholové pokrytí*, jestliže každá hrana  $e \in E$  má alespoň jeden krajní vrchol v  $K$ .

Počet vrcholů v nejméně početném vrcholovém pokrytí v grafu  $G$  značíme  $\beta_0(G)$ .

Jestliže  $K$  je vrcholové pokrytí a  $K \subseteq K'$ , tak  $K'$  je také vrcholové pokrytí.



### 9.3 Věta o vztahu vrcholového pokrytí a nezávislosti

Je dán prostý neorientovaný graf  $G = (V, E)$  bez smyček s  $n$  vrcholy. Platí

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n. \quad (9.1)$$

DŮKAZ. Máme  $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ .  $|V| = n$ .

„ $\geq$ “: Uvažujme  $N$  nezávislou,  $|N| = \alpha_0(G)$ . Pak  $V \setminus N$  je **vrcholové pokrytí**. Což znamená

$$|V \setminus N| = n - \alpha_0(G) \geq \beta_0(G). \quad (9.2)$$

Takže

$$n \geq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.3)$$

„ $\leq$ “: Uvažujme vrcholové pokrytí  $K$  s  $|K| = \beta_0(K)$ . Pak  $V \setminus K$  je **nezávislá množina**. A

$$|V \setminus K| = n - \beta_0(G) \leq \alpha_0(G). \quad (9.4)$$

Tudíž

$$n \leq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.5)$$

Dostáváme tedy

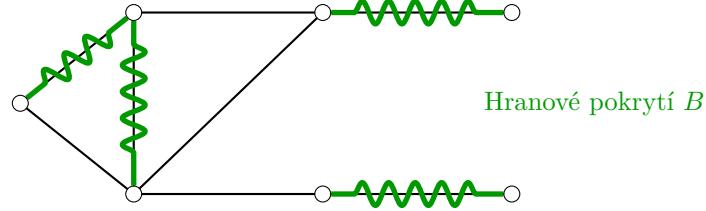
$$n = \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.6)$$

■

## 9.4 Hranové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný graf  $G = (V, E)$  bez smyček a izolovaných vrcholů. Množina hran  $B \subseteq E$  se nazývá *hranové pokrytí*, jestliže každý vrchol je krajním vrcholem alespoň jedné hrany z  $B$ .

Definujme  $\beta_1(G)$  jako počet hran v nejméně početném hranovém pokrytí.



## 9.5 Věta o vztahu hranového pokrytí a maximálního párování

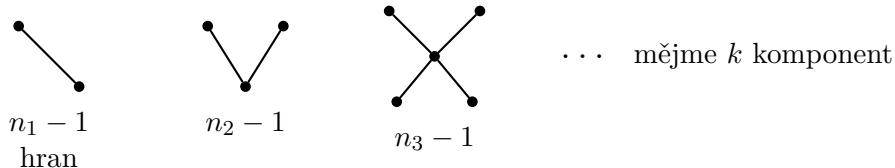
Je dán prostý neorientovaný graf  $G = (V, E) \in \mathcal{S}$  bez izolovaných vrcholů s  $n$  vrcholy. Pak platí

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n, \quad (9.7)$$

kde  $\alpha_1$  je počet hran v maximálním párování grafu  $G$  (tj.  $\alpha_1(G) = P_{\max}$ ).

DŮKAZ.

„ $\leq$ “ Vezmeme nejméně početné *hranové pokrytí*  $B \subseteq E$ . Jaké jsou komponenty souvislosti  $(U, B)$ ?



Takže

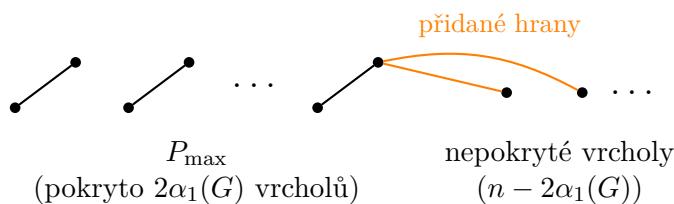
$$\beta_1 = |B| = \underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_k}_n - k = n - k. \quad (9.8)$$

Mějme párování  $P$ , kde z každé komponenty souvislosti vezmeme jednu libovolnou hranu, takže  $|P| = k$ . Tedy máme  $b_1(G) = n - k$  a  $|P| = k \leq \alpha_1(G)$ .

$$n = \beta_1(G) + k \leq \beta_1(G) + \alpha_1(G) \quad (9.9)$$

$$n \leq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \quad (9.10)$$

„ $\geq$ “: Mějme  $P_{\max}$ , párování s  $|P_{\max}| = \alpha_1(G)$ .



$$B = P_{\max} \cup \{e \mid e \text{ je přidaná}\}.$$

$$|B| = \alpha_1(G) + n - 2\alpha_1(G) = n - \alpha_1(G) \geq \beta_1(G) \quad (9.11)$$

$$n \geq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \quad (9.12)$$

Dostáváme tedy

$$n = \alpha_1(G) + \beta_1(G). \quad (9.13)$$

■

## 10 Barvení

### 10.1 Hranové obarvení

Je dán graf bez smyček  $G = (V, E, \varepsilon)$  a konečná množina  $C$  tzv. barev. *Hranové obarvení*  $G$  je přiřazení  $c : E \rightarrow C$ , že žádné dvě hrany se společným krajním vrcholem nemají stejnou barvu.

Lze také říci, že se snažíme graf pokrýt vzájemně disjunktními **párováními**.

### 10.2 Hranová barevnost

Hranová barevnost, též *chromatický index*, grafu  $G$  je nejmenší počet barev, kterými lze **hranově obarvit** graf  $G$ , značíme ji  $\chi'(G)$ .

Nutně platí, že

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \quad (10.1)$$

### 10.3 Věta o souvislosti hranové barevnosti a maximálním stupni grafu

*Vizing.* Je dán graf bez smyček  $G = (V, E, \varepsilon)$ . Pak

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (10.2)$$

Bez důkazu.

### 10.4 Vrcholové obarvení

Je dán prostý neorientovaný graf  $G = (V, E)$  bez smyček a konečná množina  $B$  (nazývaná též množina barev). *Obarvení vrcholů* grafu (též *vrcholové obarvení* grafu) je  $b : V \rightarrow B$ , že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu.

$G$  nazveme  $k$ -barevný, jestliže se dá obarvit  $k$  barvami.

### 10.5 Barevnost grafu

Barevnost grafu  $G$ , též *chromatické číslo* grafu  $G$ , je nejmenší  $k$  takové, že  $G$  je  $k$ -barevný, značíme ji  $\chi(G)$ .

### 10.6 Tvrzení o dvoubarevném grafu

Graf  $G$  je dvoubarevný právě tehdy, když  $G$  neobsahuje **kružnice** liché délky, tedy  $G$  je bipartitní.

DŮKAZ. At  $G = (V, E)$ ,  $V = A \cup B$ , tak, že:

$$\begin{aligned} v \in A &\iff \text{má barvu 1} \\ v \in B &\iff \text{má barvu 2} \end{aligned}$$

Stačí ukázat, že nemá-li  $G$  kružnice liché délky, dá se obarvit 2 barvami.

Dokažme algoritmem barvení. Vyberme si počáteční vrchol  $v$ . Následně aplikujme algoritmus BFS (breadth-first-search), kterým graf rozdělíme do několika úrovní. Každé úrovni přiřadíme barvu tak,

že

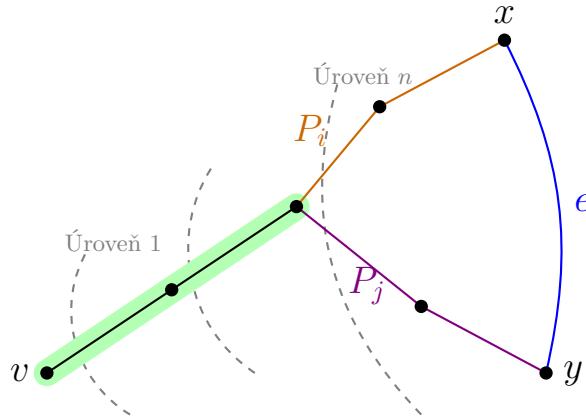
$$b(v) = \begin{cases} 1 & \iff v \in H_{2i}, \\ 2 & \iff v \in H_{2i+1}, \text{ pro } i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10.3)$$

Kdyby  $b$  nebylo obarvení; existuje  $\{x, y\} \in E$ , kde  $x \in H_i$  a  $y \in H_j$  tak, že  $i + j = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

V našem grafu existuje cesta  $P_i$  z  $v$  do  $x$  o  $i$  hranách, a zároveň existuje cesta  $P_j$  z  $v$  do  $y$  o  $j$  hranách.

Když vezmeme  $P_i$ ,  $\{x, y\}$ ,  $P_j$  (pozpátku), jedná se o uzavřený sled o  $i + j + 1 = 2k + 1$  hranách.

Dále máme kružnici o  $i + j + 1 - 2\ell$  hranách, kde  $\ell$  je počet hran ve společném úseku  $P_i, P_j$ .



■

## 10.7 Tvrzení o vztahu barevnosti grafu a nezávislosti grafu

Pro každý neorientovaný graf  $G$  bez smyček o  $n$  vrcholech a  $m$  hranách platí

$$(a) \alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1;$$

$$(b) \chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n;$$

$$(c) \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}};$$

kde  $\alpha_0(G)$  je počet  $|N|$  tak, že  $N$  je nejpočetnější nezávislá.

DŮKAZ.

(a) At  $b$  je optimální obarvení. To rozděluje  $G$  na nezávislé množiny dle barev. A všech vrcholů v množině je nejvýše  $\alpha_0(G)$ , protože to je ta nejpočetnější. Sjednocením těchto množin pak dostaneme  $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n$ . ■

(b) At

$$v \in N \dots b(n) = 1, \quad (10.4)$$

$$\left. \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-\alpha_0(G)} \end{array} \right\} b(x_i) = i + 1. \quad (10.5)$$

Má tedy  $1 + n - \alpha_0(G)$  barev. Upravme

$$1 + n - \alpha_0(G) \geq \chi(G) \quad (10.6)$$

$$\alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1 \quad (10.7)$$

■

- (c) Ať  $b$  je optimální obarvení. Mějme množiny  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , kde  $k = \chi(G)$ . Mezi každými 2 množinami je alepoň jedna hrana, tj.

$$m \geq \frac{k(k-1)}{2}. \quad (10.8)$$

Upravme:

$$2m \geq k^2 - k \quad (10.9)$$

$$0 \geq 2k^2 - k - 2m \quad (10.10)$$

Určeme kvadratické kořeny:

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2m} \quad (10.11)$$

A po analýze funkce víme, že

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}. \quad (10.12)$$

■

## 10.8 Tvrzení o největším stupni vrcholu a barevnosti grafu

Označme  $\Delta$  největší stupeň vrcholu grafu  $G \in \mathcal{S}$ . Pak

$$\chi(G) \leq \Delta + 1. \quad (10.13)$$

DŮKAZ. Algoritmem sekvenčního barvení.

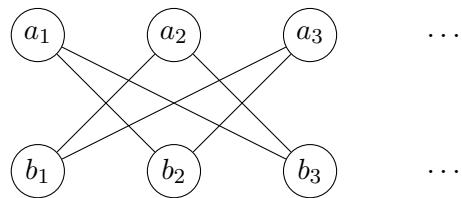
Označme  $B = \{1, 2, \dots, \Delta, \Delta + 1\}$ . Iterujme:

- 1) Očíslovujeme vrcholy grafu  $G$ , tj.  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
- 2) Barvíme vrcholy v tomto pořadí, že  $b(v_i) = j \iff j$  je nejmenší barva, kterou nemá žádný z již obarvených sousedů.

■

## 10.9 Příklad použití algoritmu sekvenčního barvení

**Příklad.** Mějme graf na  $2m$  vrcholech, kde  $\{a_i, b_j\} \in E \iff i \neq j$ .



Pokud zvolíme nepříjemné uspořádání vrcholů „na střídačku“

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n$$

dostaneme obarvení:

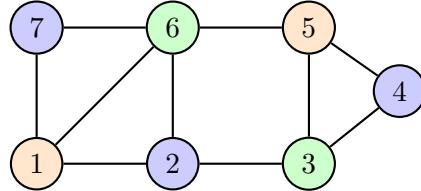
- $a_1$  nemá obarvené sousedy  $\rightarrow$  barva 1
- $b_1$  není spojen s  $a_1$  (jediný obarvený), nemá jiné sousedy  $\rightarrow$  barva 1
- $a_2$  spojen s  $b_1$  (barva 1)  $\rightarrow$  barva 2
- $b_2$  spojen s  $a_1$  (barva 1), není spojen s  $a_2 \rightarrow$  barva 2
- $\vdots$
- $a_k, b_k$  vidí barvy  $1, \dots, k-1$  na předchozích vrcholech  $\rightarrow$  barva  $k$

Spotřebujeme tedy  $n$  barev (pro  $2n$  vrcholů), ačkoliv graf je bipartitní a  $\chi(G) = 2$ .

To se nám oprávněně může zdát jako mnoho. V praxi se osvědčilo, pokud nám vyjde zbytečně mnoho barev, vrcholy *náhodně přeházet* a spustit algoritmus znovu. Toto stačí provést např.  $3\times$  a obvykle dostaneme velmi rozumný počet barev.

**Příklad.** Mějme graf o 7 vrcholech a zvolme uspořádání 6, 1, 2, 3, 5, 7, 4.

Postupně barvěme



Konkrétní postup barvení:

Vrchol	Sousedé (již obarvení)	Barva
6	–	1
1	6 (1)	2
2	1 (2), 6 (1)	3
3	2 (3)	1
5	6 (1), 3 (1)	2
7	6 (1), 1 (2)	3
4	3 (1), 5 (2)	3

Výsledkem je platné obarvení pomocí 3 barev.

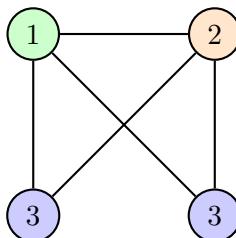
### 10.10 Věta o souvislosti největšího stupně vrcholu a barevnosti grafu

*Brooks.* Nechť  $G$  je prostý **souvislý** graf bez smyček, který není ani úplný ani **kružnice** liché délky. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta(G). \quad (10.14)$$

DŮKAZ. Omezme se na  $\Delta(G) \geq 3$ . Indukcí podle  $|V| = n$ .

(a) *Základní krok,  $n = 4$ .*



- (b) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že každý souvislý  $G' \in \mathcal{S}$ ,  $|V'| = n$ , který není  $K_n$  a má  $\Delta(G') \geq 3$  se dá obarvit  $\Delta(G')$  barvami.
- (c) *Indukční krok.*  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n + 1$ . Zvolme  $u_0 \in V$ , pak  $G \setminus u_0 = H$  je graf o  $n$  vrcholech. Protože  $H$  má  $n$  vrcholů a zřejmě  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , podle indukčního předpokladu existuje obarvení  $b$  grafu  $H$  pomocí  $\Delta(G)$  barev. Nyní se pokusíme rozšířit toto obarvení na vrchol  $u_0$ . Předpokládejme pro spor, že rozšíření obarvení není možné, tzn. že  $G$  vyžaduje  $\Delta(G) + 1$  barev.
- 1) Vrchol  $u_0$  musí mít v grafu  $G$  právě  $\Delta(G)$  sousedů. Kdyby měl méně, zbylo by v sadě  $\Delta(G)$  barev alespoň jedno volné místo pro  $u_0$ . Označme sousedy  $u_0$  jako  $v_1, v_2, \dots, v_\Delta$ , kde  $\Delta = \Delta(G)$ .
  - 2) Všichni sousedé  $v_1, \dots, v_\Delta$  musí mít v obarvení  $b$  navzájem různé barvy. Pokud by dva sousedé měli stejnou barvu, uvolnila by se jedna barva pro  $u_0$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $v_i$  má barvu  $i$  (pro  $i = 1, \dots, \Delta$ ).
  - 3) Označme  $H_{i,j}$  podgraf grafu  $H$  indukovaný vrcholy s barvami  $i$  a  $j$ . Vrcholy  $v_i$  a  $v_j$  musí ležet ve stejné komponentě souvislosti grafu  $H_{i,j}$ .

*Důvod:* Kdyby ležely v různých komponentách, mohli bychom v komponentě obsahující  $v_i$  prohodit barvy  $i$  a  $j$ . Tím by  $v_i$  získal barvu  $j$ , soused  $v_j$  by zůstal  $j$ , a pro  $u_0$  by se uvolnila barva  $i$ , což je spor.

Označme tuto komponentu (cestu) spojující  $v_i$  a  $v_j$  jako  $C_{i,j}$ .

- 4) Komponenty  $C_{i,j}$  jsou jednoduché cesty mezi  $v_i$  a  $v_j$ . Vrcholy uvnitř těchto cest nemohou mít v  $H_{i,j}$  stupeň větší než 2 (jinak bychom našli vrchol, který můžeme přebarvit třetí barvou a narušit souvislost nutnou pro spor).
- 5) Dvě cesty  $C_{i,k}$  a  $C_{k,j}$  (kde  $i, j, k$  jsou různé barvy) mají společný pouze vrchol  $v_k$ .
- 6) **Závěrečný spor:** Protože  $G$  není úplný graf, existují dva sousedé vrcholu  $u_0$ , kteří nejsou spojeni hranou. Necht jsou to  $v_1$  a  $v_2$ . Cesta  $C_{1,2}$  (z bodu 3) tedy musí mít délku alespoň 2 (vede přes další vrcholy). Označme  $y$  souseda vrcholu  $v_1$  na cestě  $C_{1,2}$ . Vrchol  $y$  má nutně barvu 2. Nyní provedeme výměnu barev 1 a 3 na cestě  $C_{1,3}$ . Tím vznikne nové platné obarvení  $b'$  grafu  $H$ . V tomto novém obarvení:

- $v_1$  má barvu 3.
- $y$  má stálou barvu 2 (neleží na  $C_{1,3}$ , viz bod 5).
- $v_2$  má stálou barvu 2.

Vrchol  $u_0$  má nyní sousedy  $v_1$  (barva 3) a  $v_2$  (barva 2). Podle bodu 3 musí existovat cesta  $C'_{2,3}$  spojující  $v_1$  a  $v_2$  tvořená pouze barvami 2 a 3. Protože  $y$  je soused  $v_1$  s barvou 2, musí tato cesta vést přes  $y$ . To ale znamená, že  $y$  leží na cestě  $C_{1,2}$  (původní) a po přebarvení se stává součástí cesty barev 2 a 3 vycházející z  $v_1$ . To je ve sporu se strukturálními vlastnostmi (bod 5, Brooksův teorém detailněji rozebírá, že se  $y$  stane uzlovým bodem pro cesty, což nelze).

Tím jsme došli ke sporu s předpokladem, že  $G$  nelze obarvit. Graf  $G$  tedy lze obarvit  $\Delta(G)$  barvami. ■

# 11 Grafy a vektorové prostory

## 11.1 Těleso $\mathbb{Z}_2$

$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$  se skládá ze dvou prvků, tj.  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , a na této množině jsou definovány dvě operace:

$$\begin{array}{c} \text{sčítání} + \\ \hline \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{násobení} \cdot \\ \hline \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

## 11.2 Symetrická differenční operace

Mějme neorientovaný graf  $G = (V, E, \varepsilon)$ ,  $W_G = P(E) = \{x \mid x \subseteq E\}$  je množina všech podmnožin množiny hran  $E$  ( $P$  je potenční množina). Na  $W_G$  definujme *symetrickou diferenční operaci*, značíme  $\oplus$ , tak, že

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y). \quad (11.1)$$

Platí

- (a) *Komutativita.*  $X \oplus Y = Y \oplus X$ .
- (b) *Inverz.*  $X \oplus X = \emptyset$ . Každý prvek je inverz sám k sobě.
- (c) *Neutrálnost.*  $X \oplus \emptyset = X$ .
- (d) *Asociativita.*  $X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$

Když  $(W_G, \oplus, \emptyset)$ , pak se jedná o *komutativní grupu* s neutrálním prvkem  $\emptyset$ , kde  $X \oplus X = \emptyset$ , tj. prvek  $X$  je opačný sám k sobě.

Definujme násobení  $\star$  prvků z  $W_G$  skaláry 0 a 1 takto

$$1 \star X = X, \quad 0 \star X = \emptyset. \quad (11.2)$$

$(W_G, \emptyset, \star)$  tvorí vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{Z}_2$ .

## 11.3 Charakteristická funkce očíslování

Zvolme libovolné (pevné) očíslování hran  $E$  grafu  $G$ , že  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Pak každá podmnožina  $X \subseteq E$  odpovídá své charakteristické funkci, tj. funkci  $\chi_X : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$  definované

$$\chi_X(i) = \begin{cases} 0, & e_i \notin X \\ 1, & e_i \in X \end{cases} \quad (11.3)$$

Funkci  $f_X$  si můžeme představit jako  $m$ -členný vektor

$$(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Přiřazení, které každé podmnožině  $X \subseteq E$  přiřazuje charakteristickou funkci  $\chi_X$  je vzájemně jednoznačné. Navíc platí

$$\emptyset \rightsquigarrow (0, 0, \dots, 0) \quad (11.4)$$

$$E \rightsquigarrow (1, 1, \dots, 1) \quad (11.5)$$

$$Y \rightsquigarrow (b_1, b_2, \dots, b_m) \quad (11.6)$$

$$X \oplus Y \rightsquigarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m), \text{ kde } + \text{ je z } \mathbb{Z}_2 \quad (11.7)$$

#### 11.4 Tvrzení o isomorfnosti $W_G$

$(W_G, \oplus, \cdot)$  je isomorfní s  $\mathbb{Z}_2^m$ , kde  $m$  je počet hran grafu  $G$ .

DŮKAZ. Tvrzení nám říká

$$(W_G, \oplus, \cdot) \rightsquigarrow (\mathbb{Z}_2^m, +, \cdot). \quad (11.8)$$

A z charakteristické funkce očíslování víme, že to znamená

$$(a_1, \dots, a_m) + (b_1, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m). \quad (11.9)$$

■

## 12 Kružnice a řezy

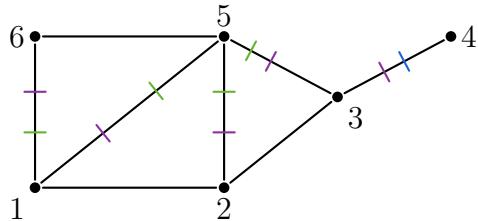
### 12.1 Řez

Ať  $G$  je **souvislý** graf. Množina hran  $S \subseteq E$  je **řez**, jestliže existuje rozklad  $V$  na dvě neprázdné množiny  $V_1, V_2$  takové, že

$$S = \{e \mid e = \{u, v\}, u \in V_1, v \in V_2\}. \quad (12.1)$$

$S$  značíme  $\langle V_1, V_2 \rangle$ .

Příklady řezů v grafu

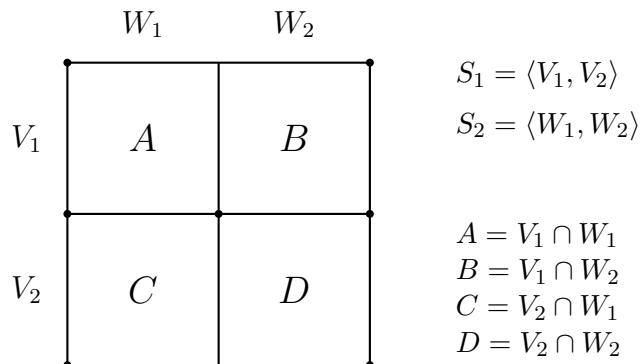


$$\begin{aligned} &\langle \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\} \rangle \\ &\langle \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\} \rangle \\ &\langle \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{4\} \rangle \end{aligned}$$

### 12.2 Věta o dvou různých řezech

Jsou dány dva různé **řezy**  $S_1 = \langle V_1, V_2 \rangle$ ,  $S_2 = \langle W_1, W_2 \rangle$  **souvislého** neorientovaného grafu  $G$ . Pak  $S_1 \oplus S_2$  je také řez grafu  $G$ .

DŮKAZ.



A víme

$$A \cup B \neq \emptyset \quad (12.2)$$

$$A \cup C \neq \emptyset \quad (12.3)$$

$$B \cup D \neq \emptyset \quad (12.4)$$

$$C \cup D \neq \emptyset \quad (12.5)$$

Označme:  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ .  $[X, Y] = \{e = \{u, v\} \mid u \in X, v \in Y\}$ .

$$\langle V_1, V_2 \rangle = [A, C] \cup [A, D] \cup [B, C] \cup [B, D] \quad (12.6)$$

A protože jsou disjunktní, namísto  $\cup$  můžeme psát  $\oplus$ .

$$\langle W_1, W_2 \rangle = [A, B] \oplus [A, D] \oplus [C, B] \oplus [C, D] \quad (12.7)$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle W_1, W_2 \rangle = [A, B] \oplus [A, C] \oplus [B, D] \oplus [C, D] \quad (12.8)$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle W_1, W_2 \rangle = \langle A \cup D, B \cup C \rangle \quad (12.9)$$

Ověřme  $A \cup D \neq \emptyset \neq B \cup C$ . To by muselo platit  $V_1 = W_2$  a  $V_2 = W_1$ , což neplatí. ■

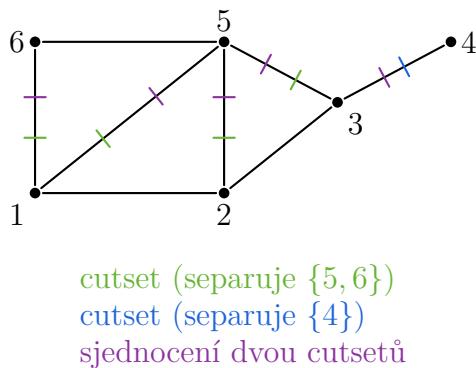
### 12.3 Prostor řezů

Je dán souvislý graf  $G = (V, E)$ . Prostor řezů je vektorový podprostor generovaný množinou všech řezů grafu  $G$ . Značíme ho  $(W_R, \oplus, \emptyset, \cdot)$ .

Jinými slovy  $W_R = \{S \mid S \text{ je řez}\} \cup \{\emptyset\}$ .

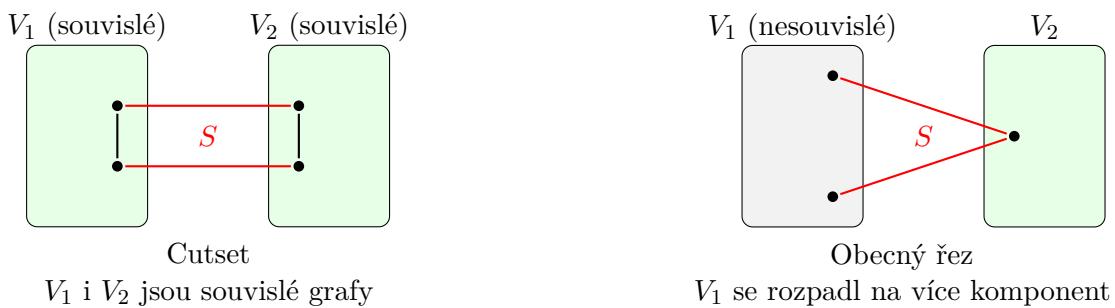
### 12.4 Cutset

Je dán souvislý graf  $G = (V, E)$ . Cutset (min-řez) je minimální (ne nejmenší, ale minimální) množina  $S \subseteq E$  taková, že  $G \setminus S$  je nesouvislý graf.



### 12.5 Tvrzení o souvislosti cutsetů

Je dán řez  $S = \langle V_1, V_2 \rangle$  souvislého neorientovaného grafu  $G$ . Pak  $S$  je cutsetem právě tehdy, když podgrafy indukované množinami  $V_1$  a  $V_2$  jsou souvislé.



### 12.6 Tvrzení o řezu a kostrách

Množina hran  $S \subseteq E$  je řez právě tehdy, když má s každou kostrou  $T$  grafu  $G$  neprázdný průnik, tj.  $S \cap T \neq \emptyset$ .

DŮKAZ.

$\Rightarrow$ :  $S \subseteq E$  je řez. Tzn.  $G \setminus S$  je nesouvislý. Mějme libovolnou kostru  $T$ . Kdyby  $T \cap S = \emptyset$ , tak v  $G \setminus S$  existují hrany  $T$ . Tj.  $G \setminus S$  je souvislý. Což je spor.

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že  $T \cap S \neq \emptyset \forall T$ .

Kdyby  $G \setminus S$  bylo souvislé, tak existuje kostra  $T_1$  grafu  $G \setminus S$ . Vrcholy jsou stejné, takže  $T_1$  je kostra  $G$ . To ale znamená  $S \cap T_1 = \emptyset$ . Takže  $G \setminus S$  musí být nesouvislé. Což je spor.

■

## 12.7 Prostor kružnic

Je dán souvislý graf  $G = (V, E)$ . Prostor kružnic je vektorový prostor generovaný množinou všech kružnic grafu  $G$ . Značíme ho  $(W_K, \oplus, \emptyset, \cdot)$ .

## 12.8 Věta o prostoru kružnic a sudých stupních

Podmnožina  $K \subseteq E$  patří do prostoru kružnic  $W_K$  právě tehdy, když v grafu  $(V, K)$  má každý vrchol sudý stupeň.

DŮKAZ.

$\Rightarrow$ : Podmnožina  $K \subseteq E$  patří do prostoru kružnic  $W_K$ . Pokud  $K$  je kružnice, pak v grafu  $(V, K)$  má každý vrchol sudý stupeň.

Ukažme, že pokud  $A, B$  splňují podmínku sudosti stupňů, tj. každý vrchol má sudý stupeň, tak  $A \oplus B$  také splňuje podmínku.

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (12.10)$$

Vyberme libovolný vrchol  $v \in V$ . Spočítejme  $d_{A \oplus B}(v)$ . Hrany, které zbydou v  $A \oplus B$  jsou hrany  $(A' \setminus B') \cup B' \setminus A') = K_v$ .

$$|K'_v| = |(A' \cup B') \setminus (A' \cap B')| = ((|A'| + |B'|) - |A' \cap B'| - |A' \cap B'|) \quad (12.11)$$

$$= \underbrace{|A'|}_{d_A(v)} + \underbrace{|B'|}_{d_B(v)} - 2 \underbrace{|A' \cap B'|}_l \quad (12.12)$$

Máme tedy

$$d_{A \oplus B}(v) = d_A(v) + d_B(v) - 2, \quad (12.13)$$

kde  $l$  je počet hran incidentních s  $v$ , které leží jak v  $A$ , tak v  $B$ , tedy opět sudé číslo. Rozdíl sudých čísel je také sudé číslo.

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že množina hran  $A$  splňuje podmínku sudosti stupňů; tj.  $d_A(v)$  je sudé pro každý vrchol  $v \in V$ .

Jestliže každý vrchol  $v$  má v  $A$  nulový stupeň, pak  $A = \emptyset$  a  $A$  leží v prostoru kružnic  $W_K$ ; ano,  $\emptyset = 0 \cdot K$  pro libovolnou kružnici  $K$ .

Předpokládejme, že některý vrchol  $v$  má stupeň větší než 0. Pak  $d_A(v) \geq 2$ . Generujme náhodně tah z vrcholu  $v$ . Protože každý vrchol, do kterého se dostaneme má vždy ještě alespoň jednu nepoužitou hranu, jednou se vrátíme do vrcholu, ve kterém tah již byl. Tím jsme uzavřeli kružnici, označme ji  $K_1$ . Vytvoříme  $A \oplus K_1 = A \setminus K_1$ . Protože každý vrchol měl v kružnici  $K_1$  sudý stupeň, má sudý stupeň i v  $A \setminus K_1$ . Nyní bud  $A_1 = A \setminus K_1$  je prázdná množina, nebo postup opakujeme pro množinu  $A \setminus K_1$ . Po konečně mnoha krocích dostaneme kružnice  $K_1, K_2, \dots, K_l$  takové, že

$$(\dots (A \setminus K_1) \dots K_l) = \emptyset, \text{ proto } A = K_1 \cup \dots \cup K_l = K_1 \oplus \dots \oplus K_l. \quad (12.14)$$

Tedy  $A \in W_K$ .

■

## 12.9 Fundamentální systém kružnic

Je dán souvislý graf  $G$  a jeho kostra  $T$ . Označme  $T = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  a  $E \setminus T = \{c_1, \dots, c_{m-n+1}\}$  (pozn.  $b$  jako branches,  $c$  jako chords).

Fundamentální systém kružnic je  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_{m-n+1}}$  vzhledem ke kostře  $T$ .

$T \cup \{c_i\}$  obsahuje přesně jednu kružnici  $K_{c_i}$ .

## 12.10 Tvrzení o nezávislosti fundamentálního systému kružnic

Fundamentální systém kružnic  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_{m-n+1}}$  (vzhledem k pevně zvolené kostře) je lineárně nezávislá množina vektorového prostoru  $(W_K, \oplus, \star)$ .

DŮKAZ. Každá z kružnic  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_{m-n+1}}$  obsahuje vždy jednu hranu neležící v kostře (to je hrana  $c_i$  pro kružnici  $K_{c_i}$ ) a hrany z kostry  $T$ . Proto žádnou kružnici  $K_{c_i}$  nemůžeme dostat jako lineární kombinaci ostatních. ■

## 12.11 Fundamentální systém řezů

Je dán souvislý neorientovaný graf  $G$  a jeho kostra  $T$ . Označme opět  $T = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$  a množinu  $E \setminus T = \{c_1, c_2, \dots, c_{m-n+1}\}$ .

Odstaníme-li libovolnou hranu  $b_j$  z kostry  $T$ , rozpadne se nám graf  $(V, T)$  na dvě komponenty souvislosti. Označme je  $V_1^j$  a  $V_2^j$ . Dále označme  $S_{b_j}$  řez  $\langle V_1^j, V_2^j \rangle$  grafu  $G$ . Řezy  $S_{b_1}, S_{b_2}, \dots, S_{b_{n-1}}$  tvoří fundamentální systém řezů vzhledem ke kostře  $T$ .

## 12.12 Tvrzení o nezávislosti fundamentálního systému řezů

Fundamentální systém řezů  $S_{b_1}, S_{b_2}, \dots, S_{b_{n-1}}$  (vzhledem k pevně zvolené kostře) je lineárně nezávislá množina vektorového prostoru  $(W_R, \oplus, \star)$ .

DŮKAZ. Každý z řezů  $S_{b_1}, S_{b_2}, \dots, S_{b_{n-1}}$  obsahuje vždy jednu hranu ležící v kostře (to je hrana  $b_j$  pro řez  $S_{b_j}$ ) a hrany neležící v kostře  $T$ . Proto žádný řez  $S_{b_j}$  nemůžeme dostat jako lineární kombinaci ostatních řezů z fundamentálního systému řezů. ■

## 12.13 Tvrzení o generování fundamentálních systémů grafu

Je dán souvislý neorientovaný graf  $G$  a jeho kostra  $T$ . Pak

- prostor kružnic  $(W_K, \oplus, \star)$  je generován množinou fundamentálních kružnic (vzhledem k  $T$ );
- prostor řezů  $(W_R, \oplus, \star)$  je generován množinou fundamentálních řezů (vzhledem k  $T$ ).

DŮKAZ. Dokažme první tvrzení, druhé se dokáže analogicky. Víme, že prostor kružnic  $W_K$  je generován množinou všech kružnic grafu  $G$ . Stačí proto dokázat, že každá kružnice  $K$  v  $G$  je součtem některých fundamentálních kružnic.

Uvažujme libovolnou kostru  $T$  a kružnici  $K$ . Pak  $K$  není podmnožinou kostry  $T$ . Označme  $c_1, c_2, \dots, c_r$  všechny hrany kružnice  $K$ , které neleží v  $T$ . Označme  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_r}$  fundamentální kružnice odpovídající hranám  $c_1, c_2, \dots, c_r$ . Utvoříme

$$C = K_{c_1} \oplus K_{c_2} \oplus \cdots \oplus K_{c_r}. \quad (12.15)$$

Množina  $K \oplus C$  leží v prostoru kružnic a je proto součtem hranově disjunktních kružnic. Navíc platí, že  $K \oplus C \subseteq T$ . To je ale možné pouze pro  $K \oplus C = \emptyset$ . Takže dostáváme  $K = C$ , tudíž  $K$  je součtem fundamentálních kružnic  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_r}$ . ■

## 12.14 Věta o sudém počtu společných hran a prostorech kružnic nebo řezů

Je dán souvislý neorientovaný graf  $G$  s množinou hran  $E$ . Pak platí

- 1)  $A \subseteq E$  je prvek prostoru **kružnic** grafu  $G$  právě tehdy, když má sudý počet společných hran s libovolným **řezem**  $S$  grafu  $G$ .
- 2)  $B \subseteq E$  je prvek prostoru řezů grafu  $G$  právě tehdy, když má sudý počet společných hran s libovolným prvkem prostoru kružnic  $W_K$  grafu  $G$ .

DŮKAZ. Dokažme pouze pro 1). Pro 2) je důkaz analogický.

„ $\Rightarrow$ “: Até  $K$  je kružnice.  $S = \langle V_1, V_2 \rangle$ . Pak mohou nastat tři možnosti

- (a)  $K \not\subseteq E$  (tj. graf indukovaný  $V_1$ ). To znamená  $S \cap K = \emptyset$
- (b)  $K \subseteq E$  (tj. graf indukovaný  $V_2$ ). To znamená  $S \cap K = \emptyset$
- (c)  $e \in K, e = \{x, y\}, x \in V_1, y \in V_2$ . Pak musí  $|S \cap K|$  být sudý.

Označme  $K_1, K_2$  a máme pro všechna  $S$  řez  $|K_1 \cap S| = 2a, |K_2 \cap S| = 2b, a, b \in \mathbb{N}_0$ . Rozepišme

$$|(K_1 \oplus K_2) \cap S| = |(K_1 \cap S) \oplus (K_2 \cap S)| \quad (12.16)$$

$$= |(K_1 \cap S) \cup (K_2 \cap S)| - |(K_1 \cap S) \cap (K_2 \cap S)| \quad (12.17)$$

$$= \underbrace{|K_1 \cap S|}_{2a} + \underbrace{|K_2 \cap S|}_{2b} - \underbrace{2|(K_1 \cap S) \cap (K_2 \cap S)|}_{2\dots} \quad (12.18)$$

Výsledek musí být očividně sudý.

„ $\Leftarrow$ “: Mějme množinu hran  $A \subseteq E$ , která má s každým řezem sudý počet společných hran. Je-li  $A$  prázdná množina, tak  $A$  patří do prostoru kružnic. Předpokládejme, že  $A \neq \emptyset$ . Ukážeme, že v tomto případě je množina  $A$  součtem **fundamentálních kružnic**, a proto prvkem prostoru kružnic  $W_K$ , dle 12.10.

Nechť  $T$  je některá kostra grafu  $G$ , označme  $T = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}, E \setminus T = \{c_1, c_2, \dots, c_{m-n+1}\}$ . Dále nechť  $K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_{m-n+1}}$  je **systém fundamentálních kružnic** vzhledem ke kostře  $T$ . Uvažujeme všechny hrany množiny  $A \cap (E \setminus T)$ . BÚNO můžeme předpokládat, že to jsou hrany  $c_1, \dots, c_r$ . Množina

$$C = K_{c_1} \oplus K_{c_2} \oplus \dots \oplus K_{c_r}$$

je prvek prostoru **kružnic** a má proto s každým **řezem** sudý počet společných hran. Utvořme množinu  $A \oplus C$ . Protože  $A$  i  $C$  měly sudý počet hran s libovolným řezem, má tuto vlastnost i množina hran  $A \oplus C$ . Navíc, množina  $A \oplus C$  neobsahuje hrany mimo kostru, proto  $A \oplus C \subseteq T$ .

Sporem ukážeme, že  $A \oplus C = \emptyset$ . Kdyby pro nějaké  $b_i \in T$  platilo  $b_i \in A \oplus C$ , pak by průnik množiny  $A \oplus C$  s **fundamentálním řezem**  $S_b$  byl tvořen jedinou hranou, a to  $b_i$ , což je ve sporu s faktrem, že průnik  $A \oplus C$  s libovolným řezem má sudý počet hran. ■