Domácí úkol 1

Jakub Adamec
XP01TGR

22. listopadu 2025

Příklad 1.1. *Dokažte, nebo vyvraťte: Je dán neorientovaný graf G. Pak:*

1. *Každy uzavřený sled v G liché délky obsahuje alespoň jednu kružnici liché délky.*
2. *Každý uzavřený sled v G sudé délky obsahuje alespoň jednu kružnici.*

Tj. buď jednotlivá tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 1.1.

1. Důkaz matematickou indukcí podle délky k daného sledu W.

   (a) Základní krok
   Nejmenší možná lichá délka uzavřeného sledu je $k = 1$. Takový sled má tvar v_0, e_1, v_0, tedy smyčka, která je z definice kružnicí délky 1.
   Pro grafy bez smyček je nejkratší uzavřený sled liché délky $k = 3$ ve tvaru $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_0$, ten je kružnicí délky 3. Pro obě tyto situace tvrzení platí.

   (b) Indukční předpoklad
   Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny uzavřené sledy liché délky menší než k, kde k je liché.

   (c) Indukční krok
   Mějme uzavřený sled $W = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, kde $v_0 = v_k$. Musíme ukázat, že W obsahuje kružnici liché délky. Rozlišme dva případy:

   - Sled W je kružnice. Pokud se ve sledu W žádný vrchol (mimo $v_0 = v_k$) neopakuje, pak je W z definice kružnicí, která má lichou délku k.
   - Sled W není kružnice. To tedy znamená, že se v něm nějaký vrchol musí opakovat, takže existují indexy i a j takové, že $0 \leq i < j < k$ a $v_i = v_j$. Rozdělme sled W na dvě částí:

     (1) Uzavřený sled $W_1 = (v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j)$. Délka tohoto sledu je $l_1 = j - i$.
     (2) Uzavřený sled $W_2 = (v_0, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_k, v_k)$. Délka tohoto sledu je $l_2 = k - (j - i) = k - l_1$.

     Součet délek těchto dvou sledu je $l_1 + l_2 = k$. Víme, že k je liché. Součet dvou celých čísel je lichý iff je jedno z nich liché a druhé sudé. Máme tedy dvě možnosti:

     (1) Délka l_1 je lichá. Sled W_1 je uzavřený sled liché délky. Protože $l_1 = j - i > 0$ a zároveň $j < k$, platí $0 < l_1 < k$. Našli jsme kratší uzavřený sled liché délky. Podle *indukčního předpokladu* musí sled W_1 obsahovat kružnici liché délky. Jelikož všechny hrany sledu W_1 jsou zároveň hranami původního sledu W, pak i W obsahuje tuto lichou kružnici.
     (2) Délka l_2 je lichá. Sled W_2 je uzavřený sled liché délky. Protože $l_1 = j - i \geq 1$, platí $l_2 = k - l_1 < k$. Opět jsme našli kratší uzavřený sled liché délky. Podle *indukčního předpokladu* musí sled W_2 obsahovat kružnici liché délky. Jelikož všechny hrany sledu W_2 jsou zároveň hranami původního sledu W, pak i W obsahuje tuto lichou kružnici.

V obou případech jsme ukázali, že pokud sled W není sám o sobě lichou kružnicí, lze v něm nalézt kratší uzavřený sled liché délky, který podle indukčního předpokladu obsahuje lichou kružnici.

■

2. Mějme graf $G = (V, E)$, $V = \{A, B, C\}$ a $E = \{v_1 = \{A, B\}, v_2 = \{B, C\}\}$:

   $$A — B — C$$

   Vezměme si sled $A, v_1, B, v_2, C, v_2, B, v_1, A$. Určitě se jedná o uzavřený sled, protože začíná a končí ve stejném vrcholu, zároveň jeho počet hran je sudý, jedná se tedy i o sudý sled. Kružnice je uzavřená cesta, tedy nesmí se v ní opakovat vrcholy. V našem sledu ale 2× vejdeme do vrcholu B. Takže se nejedná o kružnici. Našli jsme protipříklad, při kterém tvrzení neplatí. ■

Příklad 1.2. *Ukažte, že pro každá dvě kladná přirozená čísla n, m splňující*

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{1.1}$$

existuje prostý neorientovaný graf bez smyček s n vrcholy a m hranami. (To znamená, že popíšete způsob, jak byste takový graf zkonstruovali.)

Řešení 1.2. Mějme tedy $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
V prostém neorientovaném grafu s n vrcholy je maximální možný počet hran roven počtu všech možných dvojic vrcholů. Taková situace odpovídá úplnému grafu a jeho počet hran je

$$|E_{\max}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{1.2}$$

Pro vytvoření $G \in \mathcal{S}$ stačí vybrat libovolných m různých hran. Protože z předpokladu (1.1) máme zaručeno, že m není větší, než celkový počet možných hran, tento výběr je vždy proveditelný.

Výsledný graf $G = (V, E)$, kde E je námi vybraná množina m hran, má zjevně n vrcholů a přesně m hran. Protože jsme hrany vybírali jako páry různých vrcholů z úplného grafu, je výsledný graf z definice prostý (tj. každou dvojici vrcholů spojuje nejvýše jedna hrana) a bez smyček (hrany spojují vždy dva různé vrcholy).

Příklad 1.3. *Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Definujme jeho doplňovký graf $G^{dopl} = (V, E^{dopl})$ takto: pro $u \neq v$ je*

$$\{u, v\} \in E^{dopl} \quad \textit{právě tehdy, když} \quad \{u, v\} \notin E. \tag{1.3}$$

Existuje prostý neorientovaný graf G bez smyček takový, že G a G^{dopl} jsou isomorfní (tj. liší se pouze pojmenováním vrcholů)? Jestliže takový graf existuje, uveďte příklad takového grafu; jestliže takový graf neexistuje, zdůvodněte to.

Řešení 1.3. Mějme graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a $E = \{\{1, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 4\}\}$:

$$1 — 3 — 2 — 4$$

Když ke grafu zkonstruujme doplňkový, tj. $G^{dopl} = (V, E^{dopl})$, $E^{dopl} = \{\{2, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}\}$:

$$2 — 1 — 4 — 3$$

Je očividné, že se jedná o grafy vzájemně isomorfní.