

Domácí úkol 2

Jakub Adamec
XP01TGR

21. října 2025

Příklad 2.1. Je dán prostý neorientovaný souvislý graf $G = (V, E)$, který má most $e = \{u, v\}$. Určete zda alespoň jeden z vrcholů u, v musí být artiklace anebo oba vrcholy u, v musí být artiklace.

Odpověď pečlivě zdůvodněte.

Řešení 2.1. Pomocné lemma. Vrchol u není artiklace $\iff d(u) = 1$.

Důkaz. Vrchol u není artiklace, pokud graf $G \setminus u$ zůstane souvislý. Graf $G \setminus u$ vytvoříme tak, že z G odstraníme vrchol u a všechny hrany, které z něj vycházejí (včetně mostu $e = \{u, v\}$). Graf $G \setminus u$ se bude skládat ze dvou (potenciálně prázdných) částí:

- (1) Zbytek komponenty C_u po odstranění u , tj. $C_u \setminus \{u\}$.
- (2) Celá komponenta C_v .

Mezi těmito dvěma částmi nevede žádná hrana, protože jediná hrana, která je spojovala, most e , byla odstraněna spolu s vrcholem u . Aby byl graf $G \setminus u$ souvislý, musí být jedna z těchto dvou částí prázdná. Část C_v nemůže být prázdná, protože obsahuje alespoň vrchol v . Tedy část $C_u \setminus \{u\}$ musí být nutně prázdná. A to platí právě tehdy, když komponenta C_u obsahovala pouze vrchol u . To znamená, že vrchol u neměl v G žádného jiného souseda, než v . Tedy u není artiklace $\iff d(u) = 1$. ■

Najdeme protipříklad. Hledejme souvislý graf G s mostem $e = \{u, v\}$, kde $d(u) = d(v) = 1$. Jediný takový graf je graf se dvěma vrcholy (u, v) a jedinou hranou ($e = \{u, v\}$). Ověřme, že tento graf má všechny námi požadované vlastnosti:

- (a) Je graf prostý, neorientovaný, souvislý? Ano.
- (b) Je $e = \{u, v\}$ most? Ano. G je souvislý a $G \setminus e$ sestává ze dvou izolovaných vrcholů u, v , takže má 2 komponenty souvislosti. Počet komponent se zvýšil.
- (c) Je u artiklace? Ne. $d(u) = 1$. Graf $G \setminus u$ je pouze vrchol v . Počet komponent se nezvýšil.
- (d) Je v artiklace? Ne. Obdobná situace jako pro u .

Našli jsme tedy graf G , která má most $e = \{u, v\}$, ale ani jeden z vrcholů u, v není artiklace. Takže ani jeden vrchol nemusí být artiklace. ■

Příklad 2.2. Dokažte nebo vyvráťte: Každý prostý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy, které nejsou artiklacemi.

Řešení 2.2. Musíme problém rozdělit na dva případy, když graf G je (ne)souvislý.

- (a) Graf G je souvislý. Máme $|V| \geq 2$. Hledáme dva vrcholy u, v takové, že $G \setminus u$ a $G \setminus v$ budou mít právě jednu komponentu souvislosti.

- (a) Protože G je souvislý a má $|V| \geq 2$ vrcholů, můžeme v něm sestavit kostru T . T je strom a má stejný počet vrcholů jako G .
- (b) Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy. Vyberme si dva různé listy kostry T a nazvěme je u a v . Teď stačí dokázat, že u , respektive v , není artiklace. Tedy, že $G \setminus u$ bude souvislý.

Příklad 2.3. *Dokažte nebo vyvrátte: Prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma hranami je 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany grafu G leží na společné kružnici.*

Řešení 2.3.