

Domácí úkol 4

Jakub Adamec
XP01TGR

27. ledna 2026

Příklad 4.1. Najděte příklad orientovaného grafu se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran, který má nejmenší počet vrcholů.

Řešení 4.1. Aby graf měl více než jednu tranzitivní redukci, musí obsahovat cykly, protože tranzitivní redukce orientovaného acyklického grafu je unikátní. Zaměříme se na silně souvislé komponenty.

- Pro $n = 1$ nebo $n = 2$: Jediné silně souvislé grafy jsou triviální vrchol nebo cyklus $a \leftrightarrow b$. V obou případech je redukce unikátní (samotný cyklus).
- Pro $n = 3$: Uvažujme silně souvislý graf na 3 vrcholech. Aby byl graf tranzitivní redukcí, nesmí obsahovat hranu, která je „zkratkou“ pro cestu z jiných hran. Na 3 vrcholech je jediným minimálním silně souvislým grafem *cyklus délky 3*. Jakýkoliv graf se 4 a více hranami na 3 vrcholech obsahuje „tětivu“, kterou lze vynechat, aniž by se porušila souvislost (a tedy tranzitivní uzávěr). Ať už má graf G jakékoliv hrany, jeho tranzitivní redukce budou vždy cykly délky 3. Všechny redukce tedy mají stejný počet hran $|E| = 3$. Podmínka zadání není splněna.
- Pro $n = 4$: Zkonstruujeme graf G , jehož tranzitivní uzávěr je úplný graf K_4 . Hledáme minimální silně souvislé podgrafy na 4 vrcholech. Zkusme dva strukturálně odlišné případy:

1) *Hamiltonovský cyklus*: Graf tvořený jedním cyklem procházejícím všemi vrcholy.

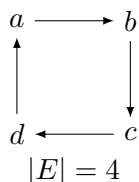
$$R_1 : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$$

Tento graf je minimální a má 4 hrany.

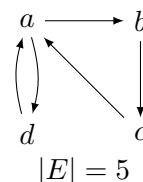
2) *Dva cykly sdílející vrchol*: Graf tvořený cyklem délky 3 (a, b, c) a cyklem délky 2 (a, d), které sdílejí vrchol a .

$$R_2 : (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a) \cup (a \leftrightarrow d)$$

Tento graf je silně souvislý a je minimální, má $3 + 2 = 5$ hran.



Redukce R_1



Redukce R_2

Pokud zvolíme G jako sjednocení $R_1 \cup R_2$, pak R_1 i R_2 jsou jeho tranzitivními redukcemi. Protože $4 \neq 5$, našli jsme hledaný příklad. Jelikož pro $n < 4$ takový graf neexistuje, je $n = 4$ nejmenší možný počet vrcholů. ■

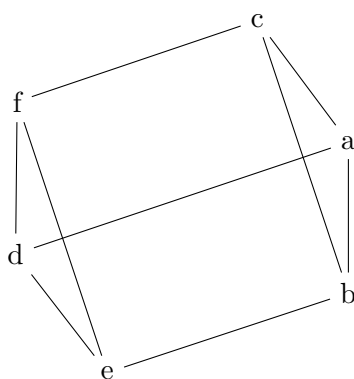
Příklad 4.2. Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy, kde n je sudé. Dokažte, nebo vyvrátte:

Jestliže každý vrchol grafu G má stupeň $d = \frac{n}{2}$, pak G je úplný bipartitní graf se stranami o $\frac{n}{2}$ vrcholech.

Řešení 4.2. Ověříme situaci pro $n = 6$. Počet vrcholů je sudý. Požadovaný stupeň každého vrcholu $d = 3$, tedy hledáme 3-regulární graf na 6 vrcholech.

Tvrzení říká, že každo takový graf musí být $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, takže v tomto případě $K_{3,3}$. Zkusme najít 3-regulární graf na 6 vrcholech, který *není* $K_{3,3}$.

Ať $G = (V, E)$, kde $V = \{a, b, \dots, f\}$ a $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, a\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$.



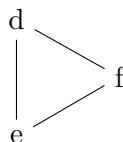
Ověříme, že graf G splňuje podmínky.

- 1) Nemá smyčky ani paralelní hrany.
- 2) Má sudý počet vrcholů, $n = 6$.
- 3) Ověříme stupně jednotlivých vrcholů:

- $d(a) = 3$
- $d(b) = 3$
- $d(c) = 3$
- $d(d) = 3$
- $d(e) = 3$
- $d(f) = 3$

Každý vrchol má stupeň $d = 3 = \frac{6}{2}$.

Pak by G měl být $K_{3,3}$, ověříme. Z definice bipartitního grafu víme, že *nesmí* obsahovat kružnici liché délky. Náš graf G obsahuje dokonce dvě kružnice délky tři, například



Takže G není bipartitní, tudíž nemůže být ani úplným bipartitním grafem $K_{3,3}$. ■

Příklad 4.3. Je dán prostý souvislý graf $G = (V, E)$ bez smyček s $n \geq 3$ vrcholy. Necht x a y jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj. $\{x, y\} \notin E$) a takové, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$. Dokažte, nebo vyvráťte:

V G existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když v $G + \{x, y\}$ existuje hamiltonovská kružnice.

(Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů jako G a množinu hran rovnou $E \cup \{\{x, y\}\}$.)

Řešení 4.3.

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že $G = (V, E)$ má hamiltonovskou kružnici H .

Hamiltonovská kružnice H je podgraf G , který obsahuje všechny vrcholy V a cyklus tvořený hranami z E . Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů V a množinu hran $E' = E \cup \{\{x, y\}\}$. Takže každá hrana kružnice H , která je v E , je také v E' . A proto H je také hamiltonovskou kružnicí v grafu $G + \{x, y\}$.

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že $G + \{x, y\}$ má hamiltonovskou kružnici H' .

Rozdělme na dvě situace.

- 1) Kružnice H' neobsahuje hranu $\{x, y\}$. Pak všechny její hrany musí pocházet z původní množiny E . A protože H' obsahuje všechny vrcholy V , je H' hamiltonovskou kružnicí i v grafu G .
- 2) Kružnice H' obsahuje hranu $\{x, y\}$. V takovém případě, když hranu $\{x, y\}$ z H' odebereme, dostaneme hamiltonovskou cestu P v grafu G . Tato cesta vede z x do y , respektive naopak, a navštíví všechny vrcholy G . Označme vrcholy na této cestě $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, kde $v_1 = x$ a $v_n = y$. Všechny hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$, pro $i = 1, \dots, n-1$, leží v E .

Definujme množiny indexů sousedů x a y v G :

$$S = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_1, v_{i+1}\} \in E\} \quad (4.1)$$

$$T = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_i, v_n\} \in E\} \quad (4.2)$$

Takže velikost S je počet sousedů v_1 . Protože $\{v_1, v_n\} \notin E$, v_n , tak všichni sousedé x musí být na cestě P . Počet takových sousedů je $|S| = d_G(x)$. Obdobně platí, že velikost T je počet sousedů v_n , a protože $\{v_n, v_1\} \notin E$, tak $|T| = d_G(y)$.

S i T jsou podmnožinami množiny indexů $\{1, 2, \dots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Hledáme i takové, že $i \in S$ a také $i \in T$, tj. $i \in S \cap T$.

Předpokládejme spor, takže $S \cap T = \emptyset$. Víme, že platí

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|. \quad (4.3)$$

Dosazením získáme

$$|S \cup T| = d_G(x) + d_G(y) - 0 = d_G(x) + d_G(y). \quad (4.4)$$

Ze zadání víme, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$, z čehož plyne $|S \cup T| \geq n$. Což je nutně spor, protože $S \cup T$ je podmnožinou množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Tudíž nutně platí $S \cap T \neq \emptyset$. Existuje tedy alespoň jeden index i , který je v obou množinách. Díky tomuto indexu i jsme našli způsob, jak „překřížit“ a spojit konce hamiltonovské cesty P pomocí hran, které zaručeně leží v G , čímž jsme vytvořili kružnici H .

Obě dvě strany ekvivalence jsou pravdivé, a tedy tvrzení je také pravdivé. ■