

Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

28. ledna 2026

Příklad 3.1. Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má průměr $\text{diam}(G)$ roven 2 a má $2n - 5$ hran?

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověříme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\text{diam}(C_5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujeme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů v_1, v_2, \dots, v_5 a spojíme je do kružnice C_5 . Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy u_1, u_2, \dots, u_k . Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5 . Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3 . Pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3) .

Ověříme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

1) **Počet hran.** Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.

2) **2-souvislost.** Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověříme tedy indukci: Odeberme u_i ; graf G_{n-1} , který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1 , který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

Zkusme odebrat v_1 : Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5 . Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3 . Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3 .

Anebo odeberme v_2, v_4 , nebo v_5 . BÚNO vyberme v_2 . Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3 . Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3 . Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

3) **Průměr** $\text{diam}(G) = 2$. Vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

Jestliže oba vrcholy leží na C_5 , tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\text{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i , pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3 , tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i , pak:

- je jeden z vrcholů v_1 , respektive v_3 , pak jsou sousedé, $d = 1$.
- je jeden z vrcholů v_2 , pak mají společné sousedy v_1 a v_3 , $d(v_2, u_i) = 2$.
- je jeden z vrcholů v_4 , pak mají společného souseda v_3 , $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5 .

Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. *Dokažte nebo vyvráťte:*

Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako indukovaný podgraf úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G , ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y , nejen hranu s krajními vrcholy x a y .)

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2. Dokažme sporem. Předpokládejme, že existuje graf G splňující zadání ($n \geq 4$, souvislý, bez indukovaného $K_{1,3}$), ve kterém pro každou hranu $\{u, v\} \in E(G)$ platí, že graf $G \setminus \{u, v\}$ je nesouvislý.

Mezi všemi hranami grafu vyberme takovou hranu $\{x, y\}$, pro kterou má graf $G \setminus \{x, y\}$ komponentu souvislosti C s minimálním počtem vrcholů.

Nechť z je vrchol v komponentě C , který je sousedem množiny $\{x, y\}$ (takový vrchol musí existovat, protože G je souvislý). Rozlišme dvě možnosti:

- a) *Vrchol z je spojen pouze s jedním vrcholem z dvojice $\{x, y\}$ (BÚNO s x).*

Pak x sousedí s y , se z a nutně i s nějakým vrcholem w v jiné komponentě grafu $G \setminus \{x, y\}$ (jinak by y bylo izolované nebo by graf nebyl souvislý). Protože z a w jsou v různých komponentách $G \setminus \{x, y\}$, nejsou spojeny hranou. Zároveň dle předpokladu vrchol z není spojen s y . Pokud by y nebylo spojeno s w , pak vrcholy $\{x, y, z, w\}$ tvoří indukovaný podgraf $K_{1,3}$, což je zakázáno. Tedy y musí být spojeno s w .

Nyní uvažujme odebrání dvojice $\{x, z\}$. Původní komponenta C byla minimální. Pokud $C = \{z\}$, pak po odebrání z zbývá y a zbytek grafu. Protože jsme ukázali, že y musí být spojeno s w (což je zástupce „zbytku“ grafu), zůstal by graf souvislý, což je spor s hlavním předpokladem.

- b) *Vrchol z je spojen s oběma vrcholy x i y .*

Pak $\{x, y, z\}$ tvoří trojúhelník. Uvažujme nyní odebrání dvojice $\{x, z\}$. Podle předpokladu musí být $G \setminus \{x, z\}$ nesouvislý. Všimněme si, co se stane s komponentou C .

- Pokud $C = \{z\}$, pak v grafu $G \setminus \{x, z\}$ zůstává vrchol y a ostatní komponenty původního $G \setminus \{x, y\}$. Aby byl G souvislý, y musí mít souseda v ostatních částech grafu (jinak by x bylo artikulací, což u $K_{1,3}$ -free grafů vede ke sporu analogicky jako v bodě 1). Tedy y propojuje zbytek grafu a $G \setminus \{x, z\}$ by byl souvislý. Spor.
- Pokud $|C| > 1$, pak $G \setminus \{x, z\}$ obsahuje množinu vrcholů $C \setminus \{z\}$. Protože C byla nejmenší komponenta, množina $C \setminus \{z\}$ nemůže tvořit samostatnou komponentu v novém rozkladu (spor s minimalitou C). Pomocí y zůstane připojeno se zbytkem grafu. Graf tedy zůstal souvislý, což je spor.

V obou případech vede předpoklad, že graf se vždy rozpadne, ke sporu. Tvrzení je pravdivé. ■

Příklad 3.3. Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvrátte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2. \quad (3.1)$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3. Dokažme jednotlivé meze.

- 1) *Dolní mez* $m \geq n - 1$. To již plyne z toho, že G je souvislý, respektive, že G' , který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran G , je souvislý. Graf G' má stejný počet vrcholů a hran jako graf G . A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran.
- 2) *Horní mez* $m \leq (n - 1)^2$. Využijme toho, že G není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy V lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní podmnožiny, nazvěme je A a B , takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z B do A* . Chceme najít maximální možný počet hran m takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z B do A . Nechť $|A| = p$ a $|B| = q$, kde $p + q = n$ a $p, q \geq 1$.

Maximální počet hran je součtem:

- *Hran uvnitř A* : V G nejsou smyčky, maximální počet hran v A je $p(p - 1)$.
- *Hran uvnitř B* : Obdobně jako pro $A \rightarrow q(q - 1)$.
- *Hran z A do B* : Maximální počet hran je $p \cdot q$.
- *Hran z B do A* : Podle našeho předpokladu 0.

Celkový maximální počet hran m_{\max} pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

$$m \leq p(p - 1) + q(q - 1) + pq \quad (3.2)$$

Upravme dosazením $q = n - p$:

$$m \leq p(p - 1) + (n - p)(n - p - 1) + p(n - p) \quad (3.3)$$

$$m \leq p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 \quad (3.4)$$

$$m \leq (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n \quad (3.5)$$

$$m \leq p^2 - np + n^2 - n \quad (3.6)$$

Protože maximalizujeme funkci $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$ pro $p \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

- *Pro $p = 1$* :

$$m \leq 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.7)$$

- *Pro $p = n - 1$* :

$$m \leq (n - 1)^2 - n(n - 1) + (n^2 - n)m \quad (3.8)$$

$$\leq (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m \quad (3.9)$$

$$\leq n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.10)$$

Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je $(n - 1)^2$. Z toho plyne, že $m \geq (n - 1)^2$.

■