

# Domácí úkol 7

Jakub Adamec  
XP01TGR

3. února 2026

## Příklad 7.1. Dokažte:

*Každý řez souvislého neorientovaného grafu je disjunktivním sjednocením cutsetů.*

**Řešení 7.1.** Necht  $G = (V, E)$  je souvislý neorientovaný graf. Víme, že symetrická difference dvou různých řezů je opět řez. Důkaz provedeme indukcí dle velikosti řezu  $|K|$ . Necht  $K$  je libovolný řez.

- 1) *Základní krok.* Je-li  $K$  minimální (vzhledem k inkluzi), pak je  $K$  z definice cutset a tvrzení triviálně platí (sjednocení jedné množiny).
- 2) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že  $K$  není minimální. Pak existuje vlastní podmnožina  $C \subset K$ , která je cutsetem.
- 3) *Indukční krok.* Protože  $C \subset K$ , platí  $K \setminus C = K \oplus C$ . Jelikož symetrická difference dvou řezů je řez, je i  $K'$  řezem.

Uvažujme množinu  $K' = K \setminus C$ . Protože  $C \subset K$ , platí  $K \setminus C = K \oplus C$ . Jelikož  $K$  i  $C$  jsou řezy a symetrická difference řezů je řez, je i  $K'$  řezem.

Získali jsme rozklad  $K = C \cup K'$ , kde  $C$  a  $K'$  jsou disjunktní. Protože  $|K'| < |K|$ , můžeme na  $K'$  aplikovat indukční předpoklad. Tedy  $K'$  lze rozložit na sjednocení cutsetů  $C_2 \cup \dots \cup C_k$ .

Celkově pak  $K = C \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ , což je disjunktivní sjednocení cutsetů. ■

## Příklad 7.2. Dokažte, nebo vyvratte:

*Množina  $K \subseteq E$  souvislého grafu  $G$  s množinou hran  $E$  je kružnice právě tehdy, když je to minimální množina hran, pro kterou platí*

$$K \cap (E \setminus T) \neq \emptyset \quad (7.1)$$

*pro každou kostu  $T$  grafu  $G$ .*

## Řešení 7.2.

$\Rightarrow$ : Předpokládejme, že množina  $K \subseteq E$  souvislého grafu  $G$  s množinou hran  $E$  je kružnice.

Kostra  $T$  je z definice strom, což znamená, že je grafem bez kružnice. Protože  $K$  je kružnice, nemůže být podmnožinou žádné kostry. Tím pádem musí platit, že  $K$  má s doplňkem kostry  $(E \setminus T)$  neprázdný průnik. Dále víme, že kružnice bez jedné hrany tvoří cestu (případně les), což je acyklický graf. Každý acyklický podgraf v souvislém grafu lze doplnit na kostru. Existuje tedy kostra  $T'$ , která obsahuje celou množinu  $K' = K \setminus \{e\}$ , kde  $e$  je libovolná hrana (tj.  $K' \subseteq T'$ ). To znamená, že  $K' \cap (E \setminus T') = \emptyset$ . Takže množina  $K'$  podmínku nesplňuje,  $K$  je proto minimální.

$\Leftarrow$ : Předpokládejme, že  $K$  je minimální a splňuje podmínku  $K \not\subseteq T$  pro každou kostru  $T$ .

Víme, že množina hran  $E$  je podmnožinou nějaké kostry právě tehdy, když  $E$  neobsahuje kružnici. Jelikož  $K$  není podmnožinou žádné kostry, musí  $K$  obsahovat alespoň jednu kružnici  $C$ . Jinak by totiž šla doplnit na kostru, což by byl spor s podmínkou. Takže  $C \subseteq K$ . A protože  $C$  je kružnice, podle první části důkazu víme, že  $C$  sama o sobě splňuje podmínku (průnik s doplňkem každé kostry je neprázdný). Kdyby  $K$  obsahovala kromě kružnice  $C$  ještě nějaké další hrany, nebyla by minimální, protože už její vlastní podmnožina  $C$  podmínku splňuje. My ale předpokládáme minimální  $K$ , tudíž  $K = C$ .

Množina  $K$  je skutečně kružnicí právě tehdy, když je minimální množinou, která má neprázdný průnik s doplňkem každé kostry grafu  $G$ . ■