Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

30. ledna 2026

Příklad 3.1. *Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má průměr $\operatorname{diam}(G)$ roven 2 a má $2n-5$ hran?*

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověřme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\operatorname{diam}(C_5) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_5$ a spojíme je do kružnice C_5. Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5. Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3. Pak pro $i = 1, 2, \ldots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3).

Ověřme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

- *Počet hran.* Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n-5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.

- *2-souvislost.* Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověřme tedy indukcí: Odeberme u_i; graf G_{n-1}, který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1, který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

  Zkusme odebrat v_1: Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5. Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3. Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3.

  Anebo odeberme v_2, v_4, nebo v_5. *BÚNO* vyberme v_2. Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3. Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3. Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

  Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

- *Průměr* $\operatorname{diam}(G) = 2$. Vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

  Jestliže oba vrcholy leží na C_5, tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\operatorname{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i, pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3, tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i, pak:
  - je jeden z vrcholů v_1, respektive v_3, pak jsou sousedé, $d = 1$.
  - je jeden z vrcholů v_2, pak mají společné sousedy v_1 a v_3, $d(v_2, u_i) = 2$.
  - je jeden z vrcholů v_4, pak mají společného souseda v_3, $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5.

  Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. *Dokažte nebo vyvraťe:*
Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako ***indukovaný podgraf*** *úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G, ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y, nejen hranu s krajními vrcholy x a y.)*

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2. Mějme v grafu G nejdelší možnou cestu P. Její vrcholy označme jako $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$, kde v_k je konec cesty. Dále uvažme hranu na samém konci cesty $\{v_{k-1}, v_k\}$. Chceme dokázat, že po odstranění této dvojice zůstane graf souvislý.

Sporem. Předpokládejme, že po odstranění $\{v_{k-1}, v_k\}$ se graf stane nesouvislým. To znamená, že v grafu existuje nějaký vrchol (případně skupina vrcholů) w, který ztratil spojení se zbytkem grafu. Vrchol w tedy musel být připojen *pouze* k odstraněným vrcholům v_{k-1} nebo v_k a k ničemu jinému ze zbytku grafu.

Vrchol w nemůže být součástí původní cesty P, protože v_{k-2} a dřívější vrcholu v grafu zůstaly, takže pokud by w byl na cestě, zůstal by připojen. w je tedy „nový" vrchol mimo cestu. Vyšetřeme situace, kam může být w připojen:

a) w je spojen s koncovým vrcholem v_k. Pokud vede hrana $\{v_k, w\}$, můžeme nejdelší cestu P jednoduše prodloužit

$$v_1 \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } v_k \text{ ——— } w$$

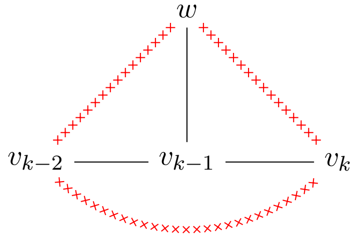
To je ale spor s tím, že P byla nejdelší cesta, takže situace nemůže nastat.

b) w je spojen s předposledním vrcholem v_{k-1}. Zde využijeme vlastnost, že graf neobsahuje $K_{1,3}$. Zaměřme se na sousedy vrcholu v_{k-1}. Má minimálně 3 sousedy:

   1) v_{k-2}, předchozí vrchol na cestejně, který v komponentě zůstal,
   2) v_k,
   3) w, vrchol, který se má odpojit.

   Aby tyto vrcholy netvořily zakázaný $K_{1,3}$ se středem v v_{k-1}, musí být některé z vrcholů $\{v_{k-2}, v_k, w\}$ navzájem propojeny hranou. Zkoumejme, které to mohu být:

   - Kdyby existovala hrana $\{w, v_{k-2}\}$, pak by po odstranění dvojice $\{v_{k-1}, v_k\}$ vrchol w nezůstal izolovaný, protože by byl spojen s v_{k-2}, což je spor s naším předpokladem, že se graf rozpadl.
   - Jediná možnost, která nevede na $K_{1,3}$, je hrana $\{v_k, w\}$, Ale pokud existuje hrana $\{v_k, w\}$, jsme ve stejné situaci, jako v a). Cestu lze prodloužit o w. A to je opět spor s tím, že cesta P je nejdelší.



Takže neexistuje žádný vrchol w, který by se odstraněním koncové hrany $\{v_{k-1}, v_k\}$ odpojil. Zbytek grafu tedy zůstává souvislý. ■

Příklad 3.3. *Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvraťte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí*

$$n - 1 \le m \le (n-1)^2. \tag{3.1}$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3. Dokažme jednotlivé meze.

1) *Dolní mez $m \ge n - 1$.* To již plyne z toho, že G je souvislý, respektive, že G', který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran G, je souvislý. Graf G' má stejný počet vrcholů a hran jako graf G. A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran.

2) *Horní mez $m \ge (n-1)^2$.* Využijme toho, že G není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy V lze rozdělit na dvě neprázdné, disjuktní podmnožiny, nazvěme je A a B, takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z B do A*. Chceme najít maximální možný počet hran m takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z B do A. Nechť $|A| = p$ a $|B| = q$, kde $p + q = n$ a $p, q \ge 1$.

   Maximální počet hran je součtem:

   - *Hran uvnitř A*: V G nejsou smyčky, maximální počet hran v A je $p(p-1)$.
   - *Hran uvnitř B*: Obdobně jako pro $A \to q(q-1)$.
   - *Hran z A do B*: Maximální počet hran je $p \cdot q$.
   - *Hran z B do A*: Podle našeho předpokladu 0.

   Celkový maximální počet hran $m_{\max}$ pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

   $$m \le p(p-1) + q(q-1) + pq \tag{3.2}$$

   Upravme dosazením $q = n - p$:

   $$\begin{aligned} m &\le p(p-1) + (n-p)(n-p-1) + p(n-p) && (3.3)\\ m &\le p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 && (3.4)\\ m &\le (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n && (3.5)\\ m &\le p^2 - np + n^2 - n && (3.6)\end{aligned}$$

   Protože maximalizujeme funkci $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$ pro $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

   - *Pro $p = 1$:*

     $$m \le 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \tag{3.7}$$

   - *Pro $p = n - 1$:*

     $$\begin{aligned} m &\le (n-1)^2 - n(n-1) + (n^2 - n)m && (3.8)\\ &\le (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m && (3.9)\\ &\le n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 && (3.10)\end{aligned}$$

   Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je $(n-1)^2$. Z toho plyne, že $m \ge (n-1)^2$.

■