

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka teorie a příkladů

Teorie grafů

Jakub Adamec
Praha, 2025



Obsah

	Strana
1 Neorientované grafy	2
1.1 Základní pojmy a definice	2
1.1.1 Základní typy grafů	2
1.1.2 Sled, tah, cesta	2
1.1.3 Kružnice a cyklus	2
1.1.4 Stupně vrcholů	3
1.2 Skóre	3
1.3 Hledání grafu ke skóre	4
1.4 Příklad hledání grafu pro skóre	5
1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů	5
1.6 Tvrzení o podgrafech	5
1.7 Souislý graf	6
1.8 Pojmy založené na vzdálenosti	6
1.8.1 Vzdálenost	6
1.8.2 Průměr	6
1.8.3 Excentricita	6
1.8.4 Centrum	6
1.8.5 Poloměr	7
2 Souvislé grafy	8
2.1 k -souvislost	8
2.2 Souvislost v grafu	8
2.3 Vrcholový řez	8
2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu	8
2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti	8
2.5.1 Pomocné lemma 1	9
2.5.2 Pomocné lemma 2	9
2.6 Artikulace	11
2.7 Operace nad 2-souvislými grafy	11
2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích	11
2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici	11
2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a $\%$ operaci	12
2.11 Algoritmus sestavení 2-souvislého grafu	13

2.12	Příklad sestrojení 2-souvislého grafu	13
2.13	Komponenty 2-souvislosti - blok	14
3	Hranově souvislé grafy	15
3.1	Hranový řez	15
3.2	Hranová souvislost	15
3.3	Most	15
3.4	Souvislost krajních vrcholů a mostů	15
3.5	Základní vlastnosti hranově souvislých grafů	15
3.6	Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti	15
4	Extremální teorie	16
4.1	Věta o souvislosti vrcholů a hran (Mantel)	16
4.2	Věta o souvislosti hran a úplném grafu	16
4.3	Turánovy grafy	17
4.4	Tvrzení počtu hran a Turánově grafu	17
5	Orientované grafy	19
5.1	Minimálně silně souvislý graf	19
5.2	Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech	19
5.3	Algoritmus pro nalezení topologického očíslování	19
5.4	Tranzitivní uzávěr	20
5.5	Reflexivní a tranzitivní uzávěr	20
5.6	Tranzitivní redukce	20
5.7	Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce	20
6	Hamiltonovské grafy	21
6.1	Cesta, kružnice, cyklus	21
6.2	(Ne)orientovaný graf	21
6.3	Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu	21
6.4	Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici	22

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficiálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autor velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/kned11k/XP01TGR>.

Poděkování. Rád bych poděkoval profesorce Marii Demlové nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Teorie grafů.

Text je vysázen makrem \LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hyperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Grafy byly nakresleny pomocí maker `TikZ` Tilla Tantaua.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 Neorientované grafy

1.1 Základní pojmy a definice

Graf je soubor vrcholů, hran a vztahů incidence. Zapišeme jako $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je neprázdná množina vrcholů, E množina hran a ε říká „co hrany představují“, respektive

$$\varepsilon : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}. \quad (1)$$

Jestliže pro dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ platí, že $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, pak se hrany e_1, e_2 nazývají **paralelní**. Pokud graf nemá paralelní hrany, nazýváme jej **prostý**. V takovém případě také stačí chápat graf jako dvojici $G = (V, E)$, kde hrany jsou neprázdné maximálně dvouprvkové podmnožiny V .

Smyčkou nazveme takovou hranu, která je $e \in E$ a pro $\varepsilon(e) = \{u, v\}$ platí $u = v$.

$\mathcal{S} \dots$ je množina všech neorientovaných prostých grafů bez smyček.

1.1.1 Základní typy grafů

Rozlišujeme 2 základní typy grafů, orientované a neorientované.

- (a) Orientovaný graf: $\varepsilon : E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V\}$; $u \in P_V(\varepsilon), v \in K_V(\varepsilon)$
- (b) Neorientovaný graf: $\varepsilon : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$; u, v jsou krajní vrcholy ε

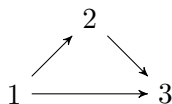
1.1.2 Sled, tah, cesta

- (a) Sled je taková posloupnost, která začíná a končí vrcholem a kde po každém vrcholu následuje hrana, tedy $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k$.
V orientovaném případě vždy platí $P_V(e_1) = v_i, K_V(e_i) = v_{i+1}$. Neorientovaný pouze říká, že v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy.
- (b) Tah je sled, ve kterém se nesmí opakovat hrany.
- (c) Cesta je sled, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy, s výjimkou počátečního, ve kterém cesta může končit.

1.1.3 Kružnice a cyklus

Kružnice je uzavřená neorientovaná cesta v grafu, **cyklus** uzavřená orientovaná cesta.

Příklad kružnice:

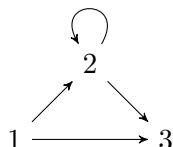


1.1.4 Stupně vrcholů

Pokud $G = (V, E, \varepsilon)$, pak

- vstupní stupeň v $d^-(v) = \|\{e \mid K_V(e) = v\}\|$
- výstupní stupeň v $d^+(v) = \|\{e \mid P_V(e) = v\}\|$
- stupeň v $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Příklad



$$d^-(2) = 2$$

$$d^+(2) = 3$$

$$d(2) = 5$$

Pro $G = (V, E)$ je pouze $d(v) = \|\{e \mid v \text{ je krajní vrchol } e, \text{ smyčku počítáme } 2 \times\}\|$.

Z toho máme důsledek

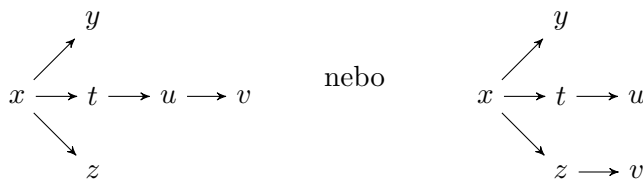
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\|E\| \quad (2)$$

Tedy každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

1.2 Skóre

Skóre grafu $(G \in \mathcal{S})$ je $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_i je stupeň vrcholu v_i .
 $G=(V,E)$
 $\|V\|=d$

Mějme příklad skóre (1,1,1,2,2,3). Jak by mohl vypadat graf s takovým skóre?



Jak vidíme, skóre jednoznačně neurčuje graf. Můžeme ze skóre ale říct, jestli je takové skóre validním skóre nějakého grafu?

1.3 Hledání grafu ke skóre

Tvrzení. Máme $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

Pak D je skóre některého grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ definovaná tak, že

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pokud } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pokud } i \geq n - d_n \end{cases}$$

je skóre nějakého $G' \in \mathcal{S}$.

Důkaz.

„ \Leftarrow “: Existuje G' pro D' . G vytvoříme tak, že k G' přidáme vrchol v_n a spojíme se všemi vrcholy $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \dots, v_{n-1}$. Pak G má skóre D . ■

„ \Rightarrow “: Máme G s $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_1 je stupeň v_1 , d_2 je stupeň v_2 a tak dále.

Mějme $\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ má } D\} \neq \emptyset$.

Cíl: Chceme dokázat, že mezi všemi grafy \mathcal{G} existuje jeden, který má vlastnost, že poslední vrchol je spojen hranami s d_n předcházejícími vrcholy.

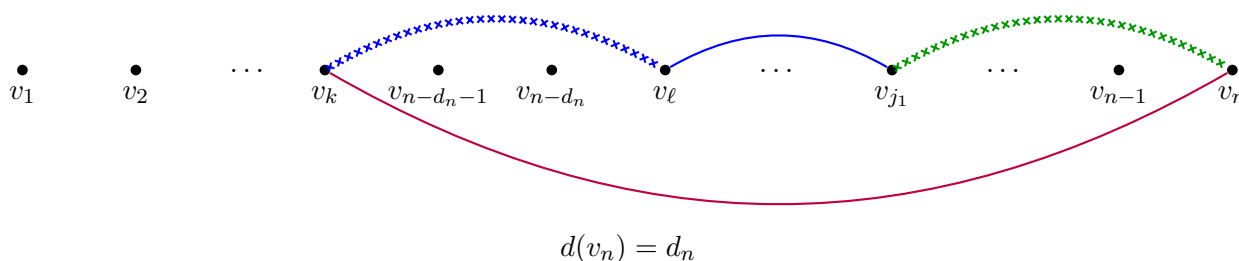
$\forall G \in \mathcal{G}$ mějme j_G , což bude největší index vrcholu, tak že $\{v_{j_G}, v_n\} \notin E$, tedy není mezi nimi hrana. To znamená, že pro ideální G chceme docílit $j_G = n - d_n - 1$.

Jako G_1 označíme ten $G_1 \in \mathcal{G}$, že j_{G_1} je nejmenší. (Může být j_{G_1} menší jak $n - d_n - 1$? Ne. v_n má stupeň d_n , a kdyby bylo j_{G_1} menší, tak by bylo vrcholů více, tzn. ne všechny by měly hranu s v_n .)

Označme $j_1 = j_{G_1}$.

Víme $j_1 \geq n - d_n - 1$. Teď nás ale zajímá, jestli $j_1 = n - d_n - 1$. Dokažme sporem.

Kdyby $j_1 > n - d_n - 1$, tak



Protože mezi d_n předcházejícími vrcholy je nějaký, který není spojen hranou s v_n , v našem případě v_{j_1} , nutně to znamená, že v_n musí mít hranu s nějakým vrcholem, řekněme v_k , který má ještě nižší index.

$$d(v_k) \leq d(v_{j_1})$$

v_k je v pořadí dříve, než v_{j_1} , tudíž musí mít nutně menší roven stupeň. To ale nutně znamená, že v_{j_1} musí být spojen s alespoň jedním vrcholem, označme si ho v_ℓ , se kterým není spojen v_k , protože v_k je spojen s v_n , zatímco v_{j_1} není.

Vytvoříme

$$G_0 = (V_0, E_0)$$

$$V_0 = V_1 = V$$

$$E_0 = (E_1 \setminus \{\{v_n, v_k\}, \{v_\ell, v_{j_1}\}\}) \cup \{\{v_k, v_\ell\}, \{v_n, v_{j_1}\}\}$$

G_0 má skóre D a zároveň $j_{G_0} < j_1$. To ale znamená, že G_1 nebyl graf s nejmenším j_G , což je spor. A proto nejmenší j_G je $j_{G_0} = n - d_n - 1$.

Ověřili jsme, že takový graf určitě existuje, takže G' dostaneme z G_0 odstraněním v_n . G' pak má skóre D' . ■

1.4 Příklad hledání grafu pro skóre

Mějme $D = (1, 1, 2, 3, 3)$; $n = 5, d_n = 3; n - d_n = 2$.

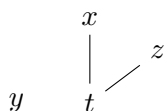
$D_1 = (1, 0, 1, 2) \xrightarrow{\text{uspo.}} (0, 1, 1, 2)$; $n_1 = 4, d_{n_1} = 2; n_1 - d_{n_1} = 2$.

$D_2 = (0, 0, 0) \dots$ tento graf je určitě existuje, jedná se o diskretní graf.

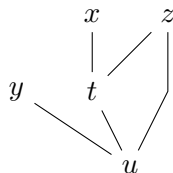
Kresleme postupně, začneme u D_2 .

$x \quad y \quad z$

Pak přidejme vrchol a hrany tak, aby skóre odpovídalo D_1 .



A nakonec tak, aby odpovídalo D .



1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů

Definice. Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček. Pak definujeme

- $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$ je minimální stupeň grafu G .
- $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$ je maximální stupeň grafu G .
- $d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$ je průměrný stupeň grafu G .
- $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2}d(G)$ je poměr počtu hran ku počtu vrcholů.

Označme $n = |V|$ a $m = |E|$. Pak $d(G) = \frac{2m}{n}$ a $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$.

Zřejmě platí $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

1.6 Tvzení o podgrafech

Tvrzení. Pro každý $G \in \mathcal{S}$ s $|E| \geq 1$ existuje podgraf H takový, že $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Důkaz. Máme dvě situace

1. Buď $\delta(G) > \varepsilon(G)$, pak $H = G$.
2. Nebo $\delta(G) \leq \varepsilon(G)$, tj. $v_1 \in V, d(v_1) = \delta(G) \leq \frac{m}{n}$.

Dokažme tedy ještě platnost pro 2.

Označme $G_1 := G \setminus v_1$. A tedy $m_1 = m - \delta(G)$ a $n_1 = n - 1$.

Chceme $\underbrace{\frac{m_1}{n_1}}_{\varepsilon(G_1)} \geq \underbrace{\frac{m}{n}}_{\varepsilon(G)}$.

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{m - \delta(G)}{n - 1} - \frac{m}{n} = \frac{nm - n\delta(G) - nm + m}{(n - 1)n} = \frac{m - n\delta(G)}{(n - 1)n}, \delta(G) \leq \frac{m}{n}, m \geq n\delta(G) \quad (3)$$

A tedy

$$\begin{aligned} m - n\delta(G) &\geq 0 \\ n(n - 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Což dává

$$m \geq n\delta(G), \text{ tj. } \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G)$$

Algoritmus dále pokračuje:

$$\text{Pokud } \begin{cases} \delta(G_1) > \varepsilon(G_1), & \text{tak } H := G_1, \\ \delta(G_1) \leq \varepsilon(G_1), & \text{tak } v_2 \in V \setminus \{v_1\}, d_{G_1}(v_2) = \delta(G_1). \end{cases}$$

A tedy $G_2 := G_1 \setminus v_2$, $\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1)$. A takto postupně dále. Algoritmus končí a nikdy nedostaneme prázdný graf, díky předpokladu, že G mělo alespoň jednu hranu, tedy $\varepsilon(G) > 0$. ■

1.7 Souvislý graf

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

1.8 Pojmy založené na vzdálenosti

1.8.1 Vzdálenost

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $x, y \in V$. Vzdálenost x, y je $d_G(x, y)$, což značí počet hran v nejmenší početné cestě z x do y , když existuje cesta. Jinak $d_G(x, y) = \infty$.

1.8.2 Průměr

Ať G je **souvislý**. Průměr G je $\text{diam}(G) = \max \{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$.

1.8.3 Excentricita

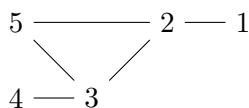
Ať G je **souvislý**. Excentricita vrcholu $v \in V$ je $\text{ex}(v) = \max \{d_G(v, x) \mid x \in V\}$.

1.8.4 Centrum

Ať $v \in V$ je centrální $\rightarrow \text{ex}(v)$ je nejmenší mezi $\text{ex}(x), x \in V$. Centrum (staře *střed*) grafu je $C(G) = \{v \mid v \text{ je centrální}\}$.

Uveďme si příklad.

Zde $C(G) = \{2, 3, 5\}$.



1.8.5 Poloměr

Poloměr G je $\text{rad}(G) = \max\{d_G(v, u) \mid v, u \in V(G)\}$.

Platí $\text{rad}(G) \leq \underbrace{\text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G)}_{\star}$.

Zdůvodnění \star . Chceme $d_G(x, y) \leq 2 \text{rad}(G) \forall x, y \in V$.

$$x \xrightarrow{P_1} v \xrightarrow{P_2} y$$

P_1, P_2 sled z x do y o $\leq 2 \text{rad}(G)$.

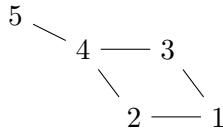
P_1, P_2 obsahuje cestu P z x do y o $\leq P_1, P_2 \leq 2 \text{rad}(G)$.

2 Souvislé grafy

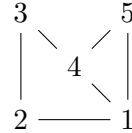
2.1 k -souvislost

$G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Řekněme, že G je k -souvislý, pokud $|V| > k$ a pro každou $X \subseteq V$, $|X| = k - 1$ je $G \setminus X$ souvislý.

Mějme



Je souvislý, ale ne 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

Každý graf je 0-souvislý, i nesouvislý graf je 0-souvislý.

1-souvislý je každý souvislý graf.

2.2 Souvislost v grafu

Souvislost v grafu G je největší k takové, že G je k -souvislý. Značíme $\kappa(G)$.

Úplný graf má $\kappa(G) = |V| - 1$.

2.3 Vrcholový řez

Vrcholový řez grafu $G \in \mathcal{S}$ je množina vrcholů $X \subsetneq V$, že $G \setminus X$ je nesouvislý.

2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu

Je-li $G \in \mathcal{S}$, G není úplný, pak $\kappa(G) = k$ právě tehdy, když nemá vrcholový řez o $k - 1$ vrcholech a má vrcholový řez o k vrcholech.

2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, splňující $d(G) \geq 4k$. Pak G obsahuje podgraf, který je k -souvislý.

Důkaz.

- Pro $k = 0$ triviální. Všechny grafy jsou 0-souvislé.
- Pro $k = 1$: Pokud $\frac{2m}{n} \geq 4k$, tedy $m \geq 1$ (takže má hranu), tak sama hrana je 1-souvislý podgraf.
- Pro $k \geq 2$: tj. $\frac{2m}{n} \geq 4k$

$$2m \geq 4kn$$

$$m \geq 2kn$$

$$m \geq 4n \text{ (dosazeno } k \geq 2)$$

Průběh důkazu $d(G) \geq 4k, k \geq 2 \xrightarrow{\text{Lemma 1}} \text{(i), (ii)} \xrightarrow{\text{Lemma 2}} G \text{ má } k\text{-souvislost.}$

2.5.1 Pomocné lemma 1

Pokud $k \geq 2$ a $d(G) \geq 4k$, pak

- (i) $n \geq 2k - 1$
- (ii) $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$

Důkaz. (i) Kdyby ne, tak $n < 2k - 1$.

$$\begin{aligned} n + 1 &< 2k \\ \frac{n + 1}{2} &< k \end{aligned}$$

Teď použijme předpoklad $m \geq 2kn > (n + 1)n$. A to nejde, protože úplný neorientovaný graf bez smyček má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

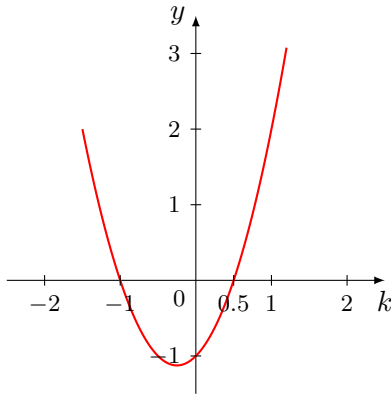
(ii) Mějme

$$\begin{aligned} m &\geq 2kn - ((2k - 3)(n - k + 1) + 1) = 2kn - (2kn - 2k^2 + 2k - 3n + 3k - 3 + 1) \\ &= 2k^2 - 5k + 3n + 2 \end{aligned}$$

Teď aplikujme již dokázané (i):

$$2k^2 - 5k + 3n + 2 \geq 2k^2 - 5k + 6k - 3 + 2 = 2k^2 + k - 1$$

Vyšetřeme průběh funkce



Funkce je očividně konvexní, a protože nás zajímá průběh funkce na $k \geq 2$, můžeme prohlásit, že $2k^2 + k - 1 > 0$. ■

2.5.2 Pomocné lemma 2

Pokud G splňuje (i) a (ii), tak G má k -souvislý podgraf.

Důkaz. G není k -souvislý.

Indukcí podle $|V| = n$.

Základní krok: $n \stackrel{(i)}{=} 2k - 1$, $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$.

Dosaďme $k = \frac{n+1}{2}$:

$$m \geq (n + 1 - 3) \left(n - \frac{n + 1}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2} + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (4)$$

A tedy graf je úplný na n vrcholech. Teď potřebujeme $n > k$.

$$n = 2k - 1 = k + \underbrace{k - 1}_{\geq 1} \geq k + 1 \quad (5)$$

Indukční krok: Každý graf G' splňující (i) a (ii) s méně než n vrcholy (s alespoň $2k - 1$ vrcholy) má k -souvislý podgraf.

Vezmeme G splňující (i) a (ii) s n vrcholy.

(a) Kdyby $\delta(G) \leq 2k - 3$, tak $v \in V$ s $d_G(v) \leq 2k - 3$.

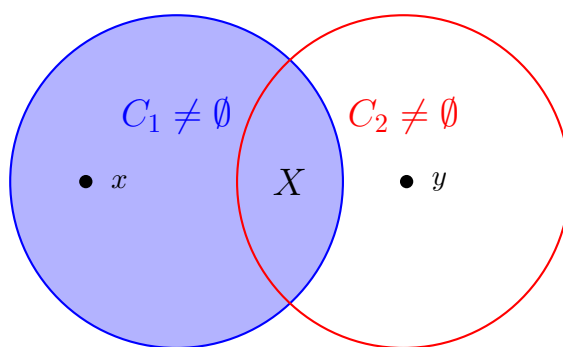
$$G \setminus v = G_1, n_1 = n - 1,$$

$$m_1 \geq m - (2k - 3) \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1 - (2k - 3) = (2k - 3)(\underbrace{n - 1}_{n_1} - k + 1) + 1$$

Tudíž G_1 má k -souvislý podgraf, tedy i ho má G .

(b) Ať $\delta(G) > 2k - 3$, $\delta(G) \geq 2k - 2$; $\forall v \in G, d_G(v) \geq 2k - 2$.

G není k -souvislý, tj. $X \subseteq V$, $|X| = k - 1$ a X je **vrcholový řez**.



$G \setminus X$ je nesouvislý. Všechny je $(k - 1) + (k - 1) + 1$. $d_G(x) \geq 2k - 2$.

G_1 graf indukovaný C_1 v X má alespoň $2k - 1$ vrcholů.

Kdyby G_1 i G_2 nesplňovaly (ii), G_i má n_i vrcholů a m_i hran, $i = 1, 2$.

$$m_i \not\geq (2k - 3)(n_i - k + 1) + 1, \quad \text{tj. } m_i \leq (2k - 3)(n_i - k + 1) \quad (6)$$

$m_1 + m_2 \geq m$ víme. $n_1 + n_2 = n + (k - 1)$, počítali jsme vrcholy v X dvakrát.

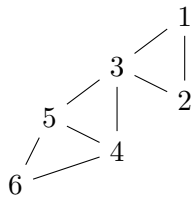
$$\begin{aligned} m &\leq n_1 + n_2 \leq (2k - 3)(n_1 - k + 1) + (2k - 3)(n_2 - k + 1) = (2k - 3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \\ &= (2k - 3)(n + (k - 1) - 2k + 2) \\ &= (2k - 3)(n - k + 1) \end{aligned}$$

Tedy spor s (ii). ■

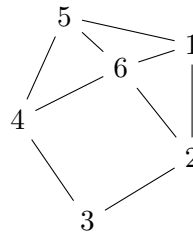
2.6 Artikulace

Vrchol v grafu G se nazývá artikulace, jestliže $G \setminus v$ má více komponent souvislosti, než G .

Platí. $G \in \mathcal{S}$ s alespoň 3 vrcholy je 2-souvislý \iff je 1-souvislý a nemá artikulaci.



Není 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

2.7 Operace nad 2-souvislými grafy

Mějme operace

- (a) $G \in \mathcal{S}$ a $e \in \{u, v\}$; $u, v \in V(G)$, $e \notin E(G)$, pak $G + e$ je graf s $V(G)$ a $E(G) \cup \{e\}$.
Je-li G 2-souvislý, tak $G + e$ je 2-souvislý.
- (b) $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $e \in E$, pak $G \% e = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$.
„Do hrany e vložíme vrchol se stupněm 2.“

2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích

Každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici.

Důkaz. Každý 2-souvislý graf je souvislý. Kdyby souvislý neobsahoval kružnici, jedná se o strom. A každý strom s alespoň 3 vrcholy má artikulaci. Protože stromy nemohou být 2-souvislé, a zároveň všechny ostatní souvislé grafy obsahují kružnici, i každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici. ■

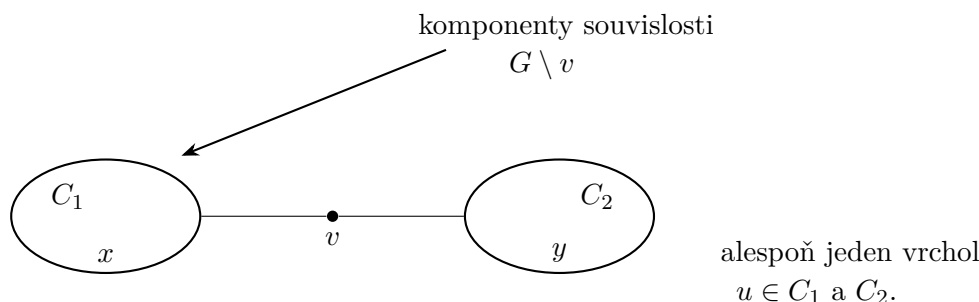
2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici

$G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je 2-souvislý právě tehdy, když každé 2 vrcholy $u \neq v$ leží na společné kružnici.

Důkaz.

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že pro každé $u \neq v$ existuje kružnice K , která je obsahuje.

To znamená, že graf je souvislý. Musíme ještě dokázat, že v něm neexistuje artikulace. Kdyby graf měl artikulaci v :



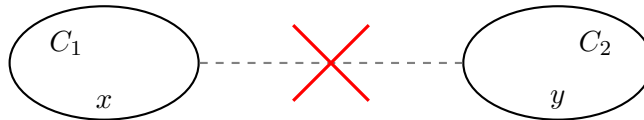
Znamenalo by to, že v jedné komponentě souvislosti by ležely alespoň 2 vrcholy (protože máme minimálně 3 vrcholy). Zároveň ale vrchol $x \in C_1$ a $y \in C_2$ rozhodně neleží na společné kružnici, tudíž graf nemůže mít artikulaci, takže G je 2-souvislý. ■

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že G je 2-souvislý. Dokažme indukcí podle vzdálenosti $d(u, v)$.

(a) Základní krok: u, v s $d(u, v) = 1$.

Budeme se snažit ukázat, že když zrušíme hranu, souvislost zůstane.

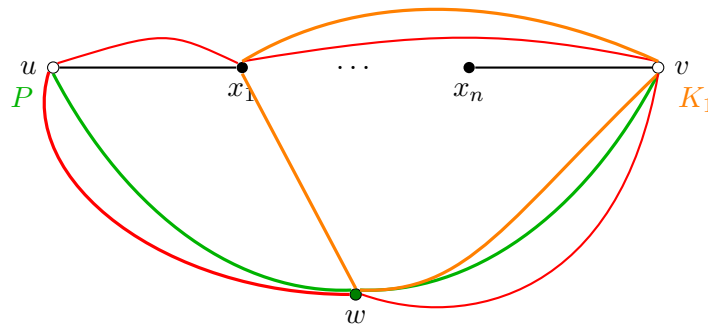
(1) $G \setminus e$ je souvislý. Kdyby ne, tak



Přitom G má alespoň 3 vrcholy, tedy v jedné komponentě leží alespoň 2 vrcholy. *BÚNO* existuje $x \in C_1$, $x \neq u$, tj. u je **artikulace**. Což je spor. Takže $G \setminus e$ je souvislý. Tedy existuje cesta P z u do v . Pak P je kružnice obsahující u, v .

(b) Indukční předpoklad: Pro každé x, y s $d(x, y) = n \geq 1$ existuje kružnice obsahující x, y .

(c) Indukční krok: Vezměme libovolné u, v s $d(u, v) = n + 1$. Vyberme nejkratší cestu:



Použijme I.P.: tj. existuje kružnice K_1 obsahující x_1, v . x_1 není **artikulace**, tj. existuje cesta P z u do v neobsahující x_1 . w je prvním vrcholem cesty P , který leží na K_1 . Použijeme cestu P , abychom se dostali z u do w , následně se přes K_1 dostaneme do v . Dále po kružnici do x_1 , kde si musíme vybrat trasu, která nevede do w , tj. směrem do u . A tím uzavřeme **kružnici** obsahující u a v . ■

2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci

$G \in \mathcal{S}$ je 2-souvislý právě tehdy, když $G \% e$, $e \in E(G)$ je 2-souvislý.

Důkaz.

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že G je 2-souvislý, tj. souvislý a nemá **artikulaci**.

Vrchol w , který vložíme do hrany e , není artikulace. A žádný jiný se nemohl stát artikulací, to by už musely být artikulací předtím, a tedy by se v prvé řadě nejednalo o 2-souvislý. ■

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že $G \setminus e$ je 2-souvislý, tj. každé 2 vrcholy leží na společné kružnici.

$$x, y \in V(G) \dots \text{existuje } K \text{ v } G \setminus e \text{ obsahující } x, y \begin{cases} K \text{ neobsahuje } e_1, e_2 & K \text{ je kružnice } G. \\ K \text{ obsahuje } e_1, e_2 & \text{z } K \text{ odstraníme } e_1, e_2, \\ & \text{nahradíme } e \text{ a máme } K'. \end{cases}$$

K' je kružnice v G . ■

2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu

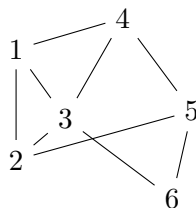
Každý 2-souvislý graf $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je možné sestrojit postupem:

$$G_0 := K \text{ je nějaká kružnice}$$

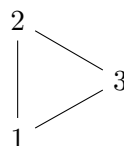
Máme-li G_i , že $G_i \neq G$, tak G_{i+1} je G_i , ke kterému přidáme cestu P (v G), která vede mezi 2 vrcholy z G_i a zároveň všechny vrcholy této cesty nejsou v G_i .

2.12 Příklad sestrojení 2-souvislého grafu

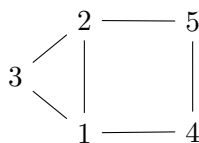
Mějme 2-souvislý graf, tj. bez artiklace:



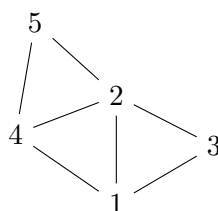
Začneme G_0 :



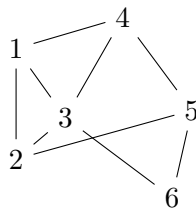
Přidáme cestu z 1 do 2, tedy G_1 :



Teď přidáme cestu z 3 do 4, G_2 :



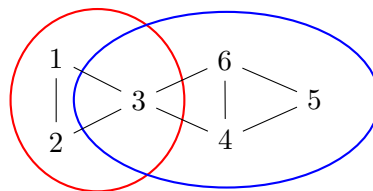
A posleďně z 3 do 5, $G_3 = G$:



2.13 Komponenty 2-souvislosti - blok

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak $A \subseteq V(G)$ se nazývá **blok**, jestliže je maximální podmnožina taková, že jí indukovaný podgraf je 2-souvislý.

Pozn. maximální v tomto kontextu neznamena nejpočetnější, nýbrž, že do takové podmnožiny již nelze přidat další vrchol.



Když nejsou jednotlivé bloky vzájemně disjunktní, tak jejich průnik je **artikulace**.

3 Hranově souvislé grafy

3.1 Hranový řez

Množině $F \subseteq E$, že $G \setminus F$ je nespojislá, se říká hranový řez.

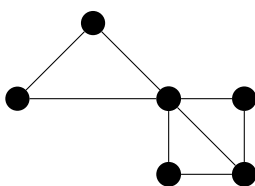
3.2 Hranová souvislost

Máme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak G je k -hranově souvislý, jestliže neexistuje $F \subseteq E$, $|F| \leq k - 1$, taková, že $G \setminus F$ je nespojislý.

Hranová souvislost grafu G , značíme $\lambda(G)$, je největší k , že G je k -hranově souvislý.

Pozn. největší znamená, že nemá hranový řez s $\lambda(G) - 1$ hranami, ale má s $\lambda(G)$ hranami.

Mějme 2-hranově souvislý graf:



3.3 Most

Nazvěme most hranu $e \in E(G)$, že $\{e\}$ je hranový řez.

3.4 Souvislost krajních vrcholů a mostů

Každý most má alespoň jeden krajní vrchol, který je **artikulace**.

3.5 Základní vlastnosti hranově souvislých grafů

G je 0-hranově souvislý pro každé G .

G je 1-hranově souvislý $\iff G$ je souvislý.

G je 2-hranově souvislý $\iff G$ je souvislý a nemá most.

3.6 Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti

Platí, že $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

4 Extremální teorie

4.1 Věta o souvislosti vrcholů a hran (Mantel)

Máme $G \in \mathcal{S}$ s n vrcholy, m hranami, který nemá K_3 . Pak $m \leq \frac{n^2}{4}$.

Důkaz.

Definice. Množina A je nezávislá $A \subseteq V(G)$ pokud pro každou $e = \{u, v\}$, jestliže $u \in A$, platí $v \notin A$. Množina A je nezávislá právě tehdy, když v ní žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.

Ať A je nejpočetnější nezávislá množina a $B = V \setminus A$. G nemá K_3 : každá množina sousedů vrcholů $v \in V$ je nezávislá množina.

$$m \leq \sum_{N \in B} d(v) \leq \underbrace{(n-k)}_{|B|} \cdot \underbrace{k}_{|A|} \quad (7)$$

Každá hrana má alespoň 1 krajní vrchol v B . Pro které k je $(n-k)k$ největší?

$$\begin{aligned} f(x) &= (n-x)x \\ f'(x) &= n-2x \implies f'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{2} \\ f''(x) &= -2 \end{aligned}$$

Protože jsme v \mathbb{N} , tak $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \leq \frac{n^2}{4}$. ■

4.2 Věta o souvislosti hran a úplném grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, který neobsahuje K_{r+1} (úplný graf na $r+1$ vrcholech), $r \geq 2$. Pak

$$m \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (8)$$

Důkaz. Vezměme graf G bez K_{r+1} s nejméně hranami (přidáním hrany by vznikl K_{r+1}). Tedy G má K_r . Ať A je množina vrcholů K_r a B je $V(G) \setminus A$, $|B| = n-r$. Každý vrchol $v \in B$ má max $r-1$ sousedů v A (jinak by $A \cup \{v\}$ tvořil K_{r+1}).

m rozdělíme na hrany v A (hrany úplného grafu), hrany mezi A a B a hrany v B .

$$m = m_A + m_{A-B} + m_B \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + m_B \quad (9)$$

a graf indukovaný B neobsahuje K_{r+1} a má maximální počet hran.

$$\begin{aligned} m_B &< m \\ n-r &= |B| < n \end{aligned}$$

Použijme tedy silnou indukci, dle počtu vrcholů $n = |V(G)|$.

- Základní krok. $n = 1, 2, \dots, r$.

$$\begin{aligned}
m &\leq \frac{n(n-1)}{2} \\
\frac{n(n-1)}{2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} \\
\frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{n}{2} \left(n \frac{r-1}{r} - (n-1) \right) \\
&= \frac{n}{2} \frac{nr - n - nr + r}{r} = \frac{n}{2} \frac{\overbrace{r-n}^{\geq 0}}{\underbrace{r}_{\geq 0}} \geq 0.
\end{aligned}$$

- Když budeme mít indukční předpoklad pro G_B , pak:

$$m \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + \frac{r-1}{n} \frac{(n-r)^2}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left(\frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{(n-r)^2}{2} \right) \quad (11)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left(\frac{r^2 + 2rn + n^2 - 2nr + r^2}{2} \right) = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (12)$$

■

4.3 Turánovy grafy

Pro $n, r < n$. $T(n, r)$ je r -partitní úplný graf. Označíme-li strany S_1, \dots, S_r , pak $|S_i - S_j| \leq 1$, $|S_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Takový graf má potom

$$\frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{n}{r} \right)^2 = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}, \quad n = k \cdot r,$$

hran.

4.4 Tvrzení počtu hran a Turánově grafu

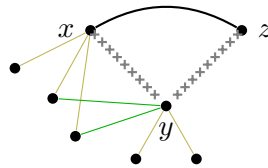
Každý $G = (v, E) \in \mathcal{S}$ bez K_{r+1} s největším počtem hran je $T(n, r)$.

Důkaz. Na V definujme \mathcal{R} : $u\mathcal{R}v \iff \{u, v\} \notin E$.

\mathcal{R} je reflexivní, protože nemáme smyčky. \mathcal{R} je symetrické, protože se jedná o neorientovaný graf. Ted je potřeba ověřit tranzitivitu, tj. $(\{x, y\} \notin E, \{y, z\} \notin E) \implies \{x, z\} \notin E$.

Dokažme sporem. Kdyby $\{x, y\} \notin E$ a $\{y, z\} \notin E$ a $\{x, z\} \in E$.

- 1) $d(y) \geq d(x)$ (obdobně $d(y) \geq d(z)$). Sporem. Kdyby $d(y) < d(x)$.

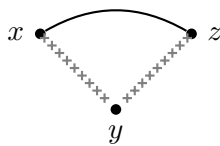


Neighbourhood $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$.

Z G odstraníme hrany $\{y, t\}, t \in N(y)$ a přidáme $\{y, u\}, u \in N(x)$. Tím dostaneme G' , to má více hran jak G .

G' nemá K_{r+1} , protože ani původní graf nebyl K_{r+1} . Což je spor. ■

2) $G'' = G \setminus \{x, y, z\}$. $m(G) \leq m(G') + d(x) + d(y) + d(z) - 1$ (-1 za hranu $\{x, z\}$).



G''' z G odstraníme hrany $\{x, t\}, t \in N(x)$ a $\{z, v\}, v \in N(z)$ a přidáme hrany $\{x, u\}, u \in N(y)$ a $\{z, u\}, u \in N(y)$.

$$m(G''') = m(G'') + 3d(y) > m(G'') + d(x) + d(y) + d(z) - 1 \geq m(G)$$

G'' nemá K_{r+1} , což je spor. ■

\mathcal{R} je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence \mathcal{R} jsou maximální množiny, že graf jimi indukovaný nemá hranu. G má nejvíce hran, tj. G má K_r , stran má r , je tedy úplný r -partitní graf.

Potřebujeme $||S_i| - |S_j|| \leq 1$. Dokažme sporem. Kdyby ne, tak $|S_1| \geq |S_2| + 2$. Označme $|S_1| = n_1$ a $|S_2| = n_2$.

Graf měl původně $n_1 \cdot n_2$ hran. Nově má

$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 n_2 \underbrace{-n_2 + n_1}_{\geq 2} - 1.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 1}$

A to je **Turánův** graf. ■

5 Orientované grafy

5.1 Minimálně silně souvislý graf

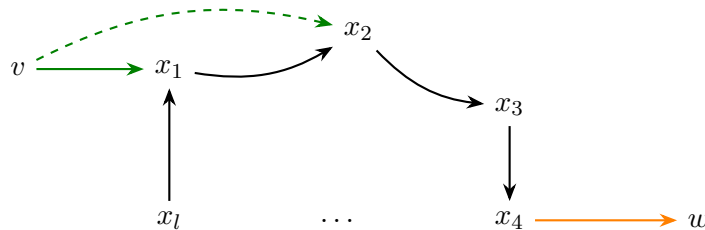
Silně souvislý graf se nazývá minimálně silně souvislý, jestliže $G \setminus \{e\}$ není silně souvislý pro každou hranu $e \in E(G)$.

5.2 Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech

Každý minimálně silně souvislý graf G s alespoň 2 vrcholy má 2 vrcholy stupně 2.

Důkaz. Indukcí podle rozdílu $k = m - n$, kde m je počet hran a n počet vrcholů.

- Základní krok. $k = 0$, tj. $m = n$. Takže se jedná o cyklus. Všechny vrcholy cyklu mají stupeň 2.
- Indukční krok. Každý graf G (minimálně silně souvislý s $m(G) - n(G) < k$) má 2 vrcholy stupně 2.
Uvažujme G minimálně silně souvislý s $m - n = k > 0$. V G si vybereme cyklus C s největším počtem hran (tedy vrcholů). C má l vrcholů:



$\forall v \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(v, x_i), x_i \in C$.

$\forall w \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(x_j, w), x_j \in C$.

Vytvoříme G' , což bude G , ve kterém nahradíme cyklus C vrcholem v_C .

$$m(G') - n(G') = m - l - (n - l + 1) = m - n - 1 = k - 1$$

G' má alespoň 2 vrcholy stupně 2, není-li ani jeden z nich v_C , jsou to vrcholy G stupně 2. Když G' bude mít pouze 2 vrcholy, v_C a x , stupně 2, tak musíme řešit 2 případy:

- 1) Když má cyklus alespoň 3 vrcholy ($l \geq 3$), pak v C existuje vrchol stupně 2.
- 2) Když C má jen 2 vrcholy, když se zkombinují orientované hrany do neorientovaných, tak se jedná o strom. A každý strom s alespoň 2 vrcholy má 2 listy, tj. vrcholy stupně 1. A to jsou přesně ty 2 vrcholy stupně 2, které hledáme.

5.3 Algoritmus pro nalezení topologického očíslování

Algoritmus pro nalezení topologického očíslování v acyklickém grafu.

Pozn.: Každý acyklický graf má alespoň 1 vrchol se stupněm 0.

- 1) Spočítáme vstupní stupně vrcholů. Do množiny M vložíme všechny v s $d^-(v) = 0$, $i = 1$.
- 2) Vybereme $v_i \in M$ a odstraníme. Pro každé $(v_i, w) \in E$: $d^-(w) := d^-(w) - 1$, if $d^-(w) = 0$, pak $M := M \cup \{w\}$. $i++$.
- 3) Algoritmus končí pokud $M = \emptyset$ a zároveň existuje alespoň jeden vrchol u s $d^-(u) > 0$, pak topologické očíslování neexistuje, nebo jsou všechny vrcholy topologicky očíslovány.

5.4 Tranzitivní uzávěr

Mějme orientovaný graf G . G^t je tranzitivní uzávěr, když $G = (V, E)$, tak $G^t = (V, E^t)$, kde $(u, v) \in E^t$, právě tehdy, když existuje netriviální orientovaná cesta z u do v .

Platí, že G je silně souvislý $\iff G^t$ je úplný orientovaný graf se všemi smyčkami.

5.5 Reflexivní a tranzitivní uzávěr

G^* je reflexivní a tranzitivní uzávěr $G^* = (V, E^*)$, $E^* = E^t \cup \{(u, u) \mid u \in V\}$.

*Lze také říct, že platí to samé, jako pro tranzitivní uzávěr, jen vyškrtneme **netriviální**.*

5.6 Tranzitivní redukce

$G = (V, E)$ je orientovaný graf. Jeho podgraf $G' = (V, E')$ je tranzitivní redukce G pokud $G^t = (G')^t$, a žádný vlastní podgraf této redukce G'' již nemá tuto vlastnost.

5.7 Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce

Je-li $G \in \mathcal{S}$ acyklický, pak má jedinou tranzitivní redukci.

Důkaz. Sporem. Mějme G acyklický, tedy má **topologické očíslování** vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$.

Kdyby $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ byly 2 různé tranzitivní redukce, tak

$$(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \neq \emptyset.$$

Vyberme z $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ hranu $e = (v_i, v_j)$, $i < j$, která má nejmenší rozdíl $j - i$.

BÚNO: $e \in (E_1 \setminus E_2)$, tedy $e \notin E_2$, ale $e \in E_2^t$. Tj. musí existovat v G_2 cesta z v_i do v_j , která má alespoň 2 hrany.

$$v_i, e_1, e_2, \dots, e_k, v_j, k \geq 2.$$

G_1 tam je z redukce, tak alespoň e_a , $a = 1, \dots, k$ není v E_1 .

$$e_a = (v_a, v_b), a < b.$$

$$i \leq a < b \leq j$$

Alespoň jedna z \leq je ve skutečnosti $<$, tedy $b - a < j - i$. Což je spor. ■

6 Hamiltonovské grafy

6.1 Cesta, kružnice, cyklus

Cesta (kružnice, cyklus) je hamiltonovská(ský), jestliže prochází všemi vrcholy.

6.2 (Ne)orientovaný graf

(Ne)orientovaný graf je Hamiltonovský, jestliže obsahuje hamiltonovský(skou) cyklus (kružnici).

6.3 Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, se skóre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $n = |V|$. Jestliže pro nějaké $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$, tak G je Hamiltonovský.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že existuje $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, G splňuje $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$ a G není Hamiltonovský.

Když ke G splňující Chvátalovu podmínku přidáme hranu, která v G není, tak nový graf stále splňuje Chvátalovu podmínku.

Zvolíme G s Chvátalovou podmínkou maximální bez Hamiltonovské kružnice. Zvolme $x, y : \{x, y\} \notin E$, $d(x) + d(y)$ je největší mezi $\{u, v\} \notin E$, $d(x) \leq d(y)$. V G existuje Hamiltonovská cesta z x do y . Označme

$$S := \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E\} \in 1,$$

$$T := \{j \mid \{v_j, y\} \in E\} \ni n - 1,$$

kde $n \notin S$, $n \notin T$.

$$S \cup T \subset \{1, \dots, n - 1\}$$

$$|S| = d(x)$$

$$|T| = d(y)$$

Pomocný důkaz. Platí $S \cap T = \emptyset$.

Důkaz. Kdyby $i \in S \cap T$, tak se jedná o hamiltonovskou kružnici. Spor s velkým předpokladem. ■
Takže

$$|S \cup T| = |S| + |T| = d(x) + d(y) \leq n - 1.$$

Položme

$$k := d(x) \quad d(x) \leq d(y)$$

$$k < \frac{n}{2} \quad 2d(x) \leq d(x) + d(y) \leq n - 1$$

A tedy $d(x) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.

Máme $d(x)$ vrcholů u , že $\{x, y\} \in E$.

$$u = v_l$$

$$\{v_{l-1}, y\} \notin E$$

$$d(v_{l-1}) + d(y) \leq d(x) + d(y)$$

$$d(v_{l-1}) \leq d(x) = k$$

Tj. máme k vrcholů v_{l-1} s $d(v_{l-1}) \leq k$. Platí $d_k \leq k$, protože máme alespoň k vrcholů stupně $\leq k$. Z Chvátalovy podmínky víme, že $d_{n-k} \geq n - k$, tj. existuje $k + 1$ vrcholů w s $d(w) \geq n - k$. Ale x má $d(x) = k$. Tedy existuje w s $d(w) = n - k$, že $\{x, w\} \notin E$.

$d(x) + d(w) = k + n - k = n$, což je spor s volbou x a y , protože $d(x) + d(y) \leq n - 1$. ■

6.4 Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici

Jestliže posloupnost čísel

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \text{ nesplňuje Chvátalovu podmínku,}$$

tak existuje

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n, a_i \leq d_i,$$

tak, že je skóre grafu, který nemá hamiltonovskou kružnici.