

Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

3. února 2026

Příklad 3.1. Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má průměr $\text{diam}(G)$ roven 2 a má $2n - 5$ hran?

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověříme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\text{diam}(C_5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujeme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů v_1, v_2, \dots, v_5 a spojíme je do kružnice C_5 . Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy u_1, u_2, \dots, u_k . Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5 . Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3 . Pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3) .

Ověříme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

- *Počet hran.* Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.
- *2-souvislost.* Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověříme tedy indukci: Odeberme u_i ; graf G_{n-1} , který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1 , který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

Zkusme odebrat v_1 : Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5 . Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3 . Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3 .

Anebo odeberme v_2, v_4 , nebo v_5 . *BÚNO* vyberme v_2 . Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3 . Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3 . Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

- *Průměr $\text{diam}(G) = 2$.* Vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda. Jestliže oba vrcholy leží na C_5 , tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\text{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i , pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3 , tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i , pak:
 - je jeden z vrcholů v_1 , respektive v_3 , pak jsou sousedé, $d = 1$.
 - je jeden z vrcholů v_2 , pak mají společné sousedy v_1 a v_3 , $d(v_2, u_i) = 2$.
 - je jeden z vrcholů v_4 , pak mají společného souseda v_3 , $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5 .

Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. Dokažte nebo vyvráťte:

Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako **indukovaný podgraf** úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G , ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y , nejen hranu s krajními vrcholy x a y .)

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2. Mějme v grafu G nejdelší možnou cestu P . Její vrcholy označme jako $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$, kde v_k je konec cesty. Dále uvažme hranu na samém konci cesty $\{v_{k-1}, v_k\}$. Chceme dokázat, že po odstranění této dvojice zůstane graf souvislý.

Sporem. Předpokládejme, že po odstranění $\{v_{k-1}, v_k\}$ se graf stane nesouvislým. To znamená, že v grafu existuje nějaký vrchol (případně skupina vrcholů) w , který ztratil spojení se zbytkem grafu. Vrchol w tedy musel být připojen *pouze* k odstraněným vrcholům v_{k-1} nebo v_k a k ničemu jinému ze zbytku grafu.

Vrchol w nemůže být součástí původní cesty P , protože v_{k-2} a dřívější vrcholy v grafu zůstaly, takže pokud by w byl na cestě, zůstal by připojen. w je tedy „nový“ vrchol mimo cestu. Vyšetřeme situace, kam může být w připojen:

- a) w je spojen s koncovým vrcholem v_k . Pokud vede hrana $\{v_k, w\}$, můžeme nejdelší cestu P jednoduše prodloužit

$$v_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{k-1} \text{ --- } v_k \text{ --- } w$$

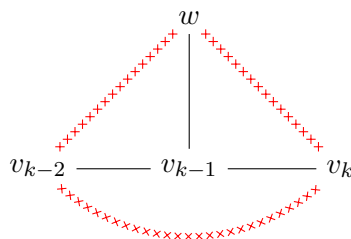
To je ale spor s tím, že P byla nejdelší cesta, takže situace nemůže nastat.

- b) w je spojen s předposledním vrcholem v_{k-1} . Zde využijeme vlastnost, že graf neobsahuje $K_{1,3}$. Zaměříme se na sousedy vrcholu v_{k-1} . Má minimálně 3 sousedy:

- 1) v_{k-2} , předchozí vrchol je na cestě, který v komponentě zůstal,
- 2) v_k ,
- 3) w , vrchol, který se má odpojit.

Aby tyto vrcholy netvořily zakázaný $K_{1,3}$ se středem v v_{k-1} , musí být některé z vrcholů $\{v_{k-2}, v_k, w\}$ navzájem propojeny hranou. Zkoumejme, které to mohou být:

- Kdyby existovala hrana $\{w, v_{k-2}\}$, pak by po odstranění dvojice $\{v_{k-1}, v_k\}$ vrchol w nezůstal izolovaný, protože by byl spojen s v_{k-2} , což je spor s naším předpokladem, že se graf rozpadl.
- Jediná možnost, která nevede na $K_{1,3}$, je hrana $\{v_k, w\}$. Ale pokud existuje hrana $\{v_k, w\}$, jsme ve stejné situaci, jako v a). Cestu lze prodloužit o w . A to je opět spor s tím, že cesta P je nejdelší.



Takže neexistuje žádný vrchol w , který by se odstraněním koncové hrany $\{v_{k-1}, v_k\}$ odpojil. Zbytek grafu tedy zůstává souvislý. ■

Příklad 3.3. Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvrátte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2. \quad (3.1)$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3. Dokažme jednotlivé meze.

- 1) *Dolní mez* $m \geq n - 1$. To již plyne z toho, že G je souvislý, respektive, že G' , který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran G , je souvislý. Graf G' má stejný počet vrcholů a hran jako graf G . A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran.
- 2) *Horní mez* $m \leq (n - 1)^2$. Využijme toho, že G není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy V lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní podmnožiny, nazvěme je A a B , takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z B do A* . Chceme najít maximální možný počet hran m takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z B do A . Nechť $|A| = p$ a $|B| = q$, kde $p + q = n$ a $p, q \geq 1$.

Maximální počet hran je součtem:

- *Hran uvnitř A* : V G nejsou smyčky, maximální počet hran v A je $p(p - 1)$.
- *Hran uvnitř B* : Obdobně jako pro $A \rightarrow q(q - 1)$.
- *Hran z A do B* : Maximální počet hran je $p \cdot q$.
- *Hran z B do A* : Podle našeho předpokladu 0.

Celkový maximální počet hran m_{\max} pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

$$m \leq p(p - 1) + q(q - 1) + pq \quad (3.2)$$

Upravme dosazením $q = n - p$:

$$m \leq p(p - 1) + (n - p)(n - p - 1) + p(n - p) \quad (3.3)$$

$$m \leq p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 \quad (3.4)$$

$$m \leq (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n \quad (3.5)$$

$$m \leq p^2 - np + n^2 - n \quad (3.6)$$

Protože maximalizujeme funkci $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$ pro $p \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

- *Pro $p = 1$* :

$$m \leq 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.7)$$

- *Pro $p = n - 1$* :

$$m \leq (n - 1)^2 - n(n - 1) + (n^2 - n)m \quad (3.8)$$

$$\leq (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m \quad (3.9)$$

$$\leq n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.10)$$

Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je $(n - 1)^2$. Z toho plyne, že $m \geq (n - 1)^2$.

■