

Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

6. listopadu 2025

Příklad 3.1. Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má

- průměr $\text{diam}(G)$ roven 2,
- a má $2n - 5$ hran?

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověříme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\text{diam}(C_5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujeme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů v_1, v_2, \dots, v_5 a spojíme je do kružnice C_5 . Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy u_1, u_2, \dots, u_k . Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5 . Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3 . Pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3) . Teď máme n vrcholů a $5 + 2k$ hran.

Ověříme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

- 1) **Počet hran.** Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.
- 2) **2-souvislost.** Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověříme tedy indukci: Odeberme u_i ; graf G_{n-1} , který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1 , který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.
Zkusme odebrat v_1 : Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5 . Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3 . Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3 .
Anebo odeberme v_2, v_4 , nebo v_5 . BÚNO vyberme v_2 . Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3 . Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3 . Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.
Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.
- 3) **Průměr** $\text{diam}(G) = 2$. Dva vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

Jestliže oba vrcholy leží na C_5 , tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\text{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i , pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3 , tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i , pak:

- je jeden z vrcholů v_1 , respektive v_3 , pak jsou sousedé, $d = 1$.
- je jeden z vrcholů v_2 , pak mají společné sousedy v_1 a v_3 , $d(v_2, u_i) = 2$.
- je jeden z vrcholů v_4 , pak mají společného souseda v_3 , $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5 .

Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. Dokažte nebo vyvráťte:

Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako indukovaný podgraf úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G , ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y , nejen hranu s krajními vrcholy x a y .)

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2. Sporem. Ať existuje graf G , který je prostý, souvislý, neorientovaný, $n \geq 4$ a neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$, pro který platí, že pro každou dvojici sousedních vrcholů u, v je graf $G \setminus \{u, v\}$ nesouvislý.

Ať (x, y) je libovolná hrana v G . Dle našeho předpokladu je $G \setminus \{x, y\}$ nesouvislý. To znamená, že množinu vrcholů $V \setminus \{x, y\}$ lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní množiny A a B tak, že mezi A a B nevedou žádné hrany. Zaměříme se na situaci, kdy existuje nějaká hrana *uvnitř* A nebo B . Předpokládejme, že v A existuje hrana (a_1, a_2) . Dle našeho hlavního předpokladu musí platit, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je také nesouvislý. Graf $G \setminus \{a_1, a_2\}$ ale obsahuje vrcholy x, y , které jsou spojeny hranou, a celou neprázdnou množinu B . Protože původní graf G byl souvislý, každý vrchol $b \in B$ musel být v G spojen s $\{x, y\}$, protože nemohl být spojen s A . Stejně tak každý vrchol $a \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ musí být spojen s $\{x, y\}$. (x, y) je tedy most. To znamená, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je souvislý. Což je spor s hlavním předpokladem, takže pro libovolnou hranu $(x, y) \in E(G)$ musí platit, že $G \setminus \{x, y\}$ je nezávislá množina.

Teď ověříme, že tento důsledek může koexistovat s našimi podmínkami $n \geq 4$ a že G neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$. Protože G je souvislý a $n \geq 4$, musí nutně obsahovat alespoň jeden vrchol x se stupněm $\deg(x) \geq 2$. Vyberme dva různé sousedy x , označme y a z . Mějme hrany (x, y) a (x, z) . Co když hrana (y, z) (ne)existuje?

- 1) Hrana neexistuje. Protože $n \geq 4$, musí existovat alespoň jeden další vrchol $w \neq x, y, z$. Dle prvního důkazu již víme, že $(z, w) \notin E$ a $(y, w) \notin E$. Protože G je souvislý, w musí mít alespoň jednoho souseda. Jeho jediný možný soused je x , tedy $(x, w) \in E$. To ale znamená, že máme indukovaný $K_{1,3}$ graf s centrem x , což je spor s předpokladem, že G je bez $K_{1,3}$. Hrana tedy musí existovat.
- 2) Hrana existuje. Již víme, že toto je pravda. Zároveň víme, že $G \setminus \{y, z\}$ musí být nezávislá množina. Protože $n \geq 4$, musí existovat 4. vrchol w . A protože G je souvislý, musí w být spojen s nějakým z vrcholů x, y, z . Pokud je w spojen s y nebo z , je $G \setminus \{y, z\}$ stále souvislý (přes x). Předpokládejme tedy, že w je spojen *pouze* s x . Ale vrcholy x i w jsou obsaženy v $G \setminus \{y, z\}$, hrana (x, w) je tedy hrana v $G \setminus \{y, z\}$, a to je spor s tím, že $G \setminus \{y, z\}$ musí být nezávislá množina.

Ve všech případech jsme došli ke sporu. Náš původní předpoklad, že tvrzení neplatí, musí být nepravdivý. ■

Příklad 3.3. Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvráťte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2.$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3.