

Domácí úkol 1

Jakub Adamec
XP01TGR

23. září 2025

1.1 Dokažte, nebo vyvráťte: *Je dán neorientovaný graf G . Pak:*

1. *Každý uzavřený sled v G liché délky obsahuje alespoň jednu kružnici liché délky.*
2. *Každý uzavřený sled v G sudé délky obsahuje alespoň jednu kružnici.*

Tj. buď jednotlivá tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

1.2 Ukažte, že pro každá dvě kladná přirozená čísla n, m splňující

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{1}$$

existuje prostý neorientovaný graf bez smyček s n vrcholy a m hranami. (To znamená, že popíšete způsob, jak byste takový graf zkonstruovali.)

1.3 Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Definujme jeho doplňkový graf $G^{dopl} = (V, E^{dopl})$ takto: pro $u \neq v$ je

$$\{u, v\} \in E^{dopl} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \{u, v\} \notin E.$$

Existuje prostý neorientovaný graf G bez smyček takový, že G a G^{dopl} jsou isomorfní (tj. liší se pouze pojmenováním vrcholů)? Jestliže takový graf existuje, uveďte příklad takového grafu; jestliže takový graf neexistuje, zdůvodněte to.