

# Domácí úkol 3

Jakub Adamec  
XP01TGR

22. listopadu 2025

**Příklad 3.1.** Je dáno číslo  $n \geq 5$ . Je možné pro každé takové  $n$  zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf  $G$  bez smyček, který má průměr  $\text{diam}(G)$  roven 2 a má  $2n - 5$  hran?

Jestliže ano, pro každé  $n$  takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

**Řešení 3.1.** Nejdříve ověřme, že tvrzení platí pro  $n = 5$ . Zvolme  $C_5$  jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá  $2 \cdot 5 - 5 = 5$  počtu hran. Průměr  $\text{diam}(C_5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$  také sedí zadání.

Pro  $n \geq 6$  zkonstruujeme graf  $G_n$  tak, že vezmeme 5 vrcholů  $v_1, v_2, \dots, v_5$  a spojíme je do kružnice  $C_5$ . Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako  $k = n - 5$ . Přidejme zbývající vrcholy  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . Každý z těchto  $k$  vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na  $C_5$ . Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici  $v_1$  a  $v_3$ . Pak pro  $i = 1, 2, \dots, k$  přidáme hrany  $(u_i, v_1)$  a  $(u_i, v_3)$ .

Ověřme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

1) **Počet hran.** Máme  $5 + 2k$  hran, tedy  $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$  hran, to jsme přesně chtěli.

2) **2-souvislost.** Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověřme tedy indukci: Odeberme  $u_i$ ; graf  $G_{n-1}$ , který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k  $n = 6$ , to nám zbyde původní  $C_5$  s jedním  $u_1$ , který je očividně souvislý. Odebrání  $u_i$  tedy graf nerozpojí.

Zkusme odebrat  $v_1$ : Zbytek  $C_5$  je cesta  $v_2, v_3, v_4, v_5$ . Všechny vrcholy  $u_i$  jsou stále připojeny k  $v_3$ . Celý zbytek grafu  $G_n \setminus v_1$  je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro  $v_3$ .

Anebo odeberme  $v_2, v_4$ , nebo  $v_5$ . BÚNO vyberme  $v_2$ . Graf  $G_n \setminus v_2$  je cesta  $v_1, v_5, v_4, v_3$ . Všechny vrcholy  $u_i$  jsou připojeny k  $v_1$  i  $v_3$ . Tedy  $G_n \setminus v_2$  je souvislý.

Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

3) **Průměr**  $\text{diam}(G) = 2$ . Vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

Jestliže oba vrcholy leží na  $C_5$ , tak jsme již v případě  $n = 5$  dokázali, že  $\text{diam}(C_5) = 2$ . Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů  $u_i$ , pak mají zaručeně společné sousedy  $v_1$  a  $v_3$ , tedy  $d(u_i, u_j) = 2$ , pro  $i \neq j$ . Pokud je jeden z  $C_5$  a druhý z  $u_i$ , pak:

- je jeden z vrcholů  $v_1$ , respektive  $v_3$ , pak jsou sousedé,  $d = 1$ .
- je jeden z vrcholů  $v_2$ , pak mají společné sousedy  $v_1$  a  $v_3$ ,  $d(v_2, u_i) = 2$ .
- je jeden z vrcholů  $v_4$ , pak mají společného souseda  $v_3$ ,  $d(v_4, u_i) = 2$ . Obdobně pro  $v_5$ .

Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé  $n \geq 5$  je možné takový graf zkonstruovat. ■

**Příklad 3.2.** *Dokažte nebo vyvráťte:*

*Je dán prostý souvislý neorientovaný graf  $G$  bez smyček s  $n \geq 4$  vrcholy, který neobsahuje jako indukovaný podgraf úplný bipartitní graf  $K_{1,3}$ . Pak v  $G$  existují dva sousední vrcholy  $x, y$  takové, že graf  $G \setminus \{x, y\}$  je také souvislý. (Graf  $G \setminus \{x, y\}$  je podgraf  $G$ , ze kterého jsme odstranili vrcholy  $x$  a  $y$ , nejen hranu s krajními vrcholy  $x$  a  $y$ .)*

*( $K_{1,3}$  je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)*

**Řešení 3.2.** Sporem. Ať existuje graf  $G$ , který je prostý, souvislý, neorientovaný,  $n \geq 4$  a neobsahuje indukovaný  $K_{1,3}$ , pro který platí, že pro každou dvojici sousedních vrcholů  $u, v$  je graf  $G \setminus \{u, v\}$  nesouvislý.

Ať  $(x, y)$  je libovolná hrana v  $G$ . Dle našeho předpokladu je  $G \setminus \{x, y\}$  nesouvislý. To znamená, že množinu vrcholů  $V \setminus \{x, y\}$  lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní množiny  $A$  a  $B$  tak, že mezi  $A$  a  $B$  nevedou žádné hrany. Zaměříme se na situaci, kdy existuje nějaká hrana *uvnitř*  $A$  nebo  $B$ . Předpokládejme, že v  $A$  existuje hrana  $(a_1, a_2)$ . Dle našeho hlavního předpokladu musí platit, že  $G \setminus \{a_1, a_2\}$  je také souvislý. Graf  $G \setminus \{a_1, a_2\}$  ale obsahuje vrcholy  $x, y$ , které jsou spojeny hranou, a celou neprázdnou množinu  $B$ . Protože původní graf  $G$  byl souvislý, každý vrchol  $b \in B$  musel být v  $G$  spojen s  $\{x, y\}$ , protože nemohl být spojen s  $A$ . Stejně tak každý vrchol  $a \in A \setminus \{a_1, a_2\}$  musí být spojen s  $\{x, y\}$ .  $(x, y)$  je tedy most. To znamená, že  $G \setminus \{a_1, a_2\}$  je souvislý. Což je spor s hlavním předpokladem, takže pro libovolnou hranu  $(x, y) \in E(G)$  musí platit, že  $G \setminus \{x, y\}$  je nezávislá množina.

Teď ověříme, že tento důsledek může koexistovat s našimi podmínkami  $n \geq 4$  a že  $G$  neobsahuje indukovaný  $K_{1,3}$ . Protože  $G$  je souvislý a  $n \geq 4$ , musí nutně obsahovat alespoň jeden vrchol  $x$  se stupněm  $\deg(x) \geq 2$ . Vyberme dva různé sousedy  $x$ , označme  $y$  a  $z$ . Mějme hrany  $(x, y)$  a  $(x, z)$ . Co když hrana  $(y, z)$  (ne)existuje?

- 1) Hrana neexistuje. Protože  $n \geq 4$ , musí existovat alespoň jeden další vrchol  $w \neq x, y, z$ . Dle prvního důkazu již víme, že  $(z, w) \notin E$  a  $(y, w) \notin E$ . Protože  $G$  je souvislý,  $w$  musí mít alespoň jednoho souseda. Jeho jediný možný soused je  $x$ , tedy  $(x, w) \in E$ . To ale znamená, že máme indukovaný  $K_{1,3}$  graf s centrem  $x$ , což je spor s předpokladem, že  $G$  je bez  $K_{1,3}$ . Hrana tedy musí existovat.
- 2) Hrana existuje. Již víme, že toto je pravda. Zároveň víme, že  $G \setminus \{y, z\}$  musí být nezávislá množina. Protože  $n \geq 4$ , musí existovat 4. vrchol  $w$ . A protože  $G$  je souvislý, musí  $w$  být spojen s nějakým z vrcholů  $x, y, z$ . Pokud je  $w$  spojen s  $y$  nebo  $z$ , je  $G \setminus \{y, z\}$  stále souvislý (přes  $x$ ). Předpokládejme tedy, že  $w$  je spojen *pouze* s  $x$ . Ale vrcholy  $x$  i  $w$  jsou obsaženy v  $G \setminus \{y, z\}$ , hrana  $(x, w)$  je tedy hrana v  $G \setminus \{y, z\}$ , a to je spor s tím, že  $G \setminus \{y, z\}$  musí být nezávislá množina.

Ve všech případech jsme došli ke sporu. Náš původní předpoklad, že tvrzení neplatí, musí být nepravdivý. ■

**Příklad 3.3.** Je dán prostý orientovaný graf  $G$  bez smyček s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami. Dokažte nebo vyvrátte: Je-li  $G$  souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2. \quad (3.1)$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

**Řešení 3.3.** Dokažme jednotlivé meze.

- 1) *Dolní mez*  $m \geq n - 1$ . To již plyne z toho, že  $G$  je souvislý, respektive, že  $G'$ , který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran  $G$ , je souvislý. Graf  $G'$  má stejný počet vrcholů a hran jako graf  $G$ . A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s  $n$  vrcholy musí mít alespoň  $n - 1$  hran.
- 2) *Horní mez*  $m \leq (n - 1)^2$ . Využijme toho, že  $G$  není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy  $V$  lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní podmnožiny, nazvěme je  $A$  a  $B$ , takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z  $B$  do  $A$* . Chceme najít maximální možný počet hran  $m$  takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z  $B$  do  $A$ . Nechť  $|A| = p$  a  $|B| = q$ , kde  $p + q = n$  a  $p, q \geq 1$ .

Maximální počet hran je součtem:

- *Hran uvnitř  $A$* : V  $G$  nejsou smyčky, maximální počet hran v  $A$  je  $p(p - 1)$ .
- *Hran uvnitř  $B$* : Obdobně jako pro  $A \rightarrow q(q - 1)$ .
- *Hran z  $A$  do  $B$* : Maximální počet hran je  $p \cdot q$ .
- *Hran z  $B$  do  $A$* : Podle našeho předpokladu 0.

Celkový maximální počet hran  $m_{\max}$  pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

$$m \leq p(p - 1) + q(q - 1) + pq \quad (3.2)$$

Upravme dosazením  $q = n - p$ :

$$m \leq p(p - 1) + (n - p)(n - p - 1) + p(n - p) \quad (3.3)$$

$$m \leq p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 \quad (3.4)$$

$$m \leq (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n \quad (3.5)$$

$$m \leq p^2 - np + n^2 - n \quad (3.6)$$

Protože maximalizujeme funkci  $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$  pro  $p \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

- *Pro  $p = 1$* :

$$m \leq 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.7)$$

- *Pro  $p = n - 1$* :

$$m \leq (n - 1)^2 - n(n - 1) + (n^2 - n)m \quad (3.8)$$

$$\leq (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m \quad (3.9)$$

$$\leq n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.10)$$

Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je  $(n - 1)^2$ . Z toho plyne, že  $m \geq (n - 1)^2$ .

■