

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Sbírka teorie a příkladů

Teorie grafů

Jakub Adamec
Praha, 2025



Obsah

	Strana
1 Neorientované grafy	2
1.1 Základní pojmy a definice	2
1.1.1 Základní typy grafů	2
1.1.2 Sled, tah, cesta	2
1.1.3 Kružnice a cyklus	2
1.1.4 Stupně vrcholů	3
1.2 Skóre	3
1.3 Hledání grafu ke skóre	4
1.4 Příklad hledání grafu pro skóre	5
1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů	5
1.6 Tvrzení o podgrafech	5
1.7 Souislý graf	6
1.8 Pojmy založené na vzdálenosti	6
1.8.1 Vzdálenost	6
1.8.2 Průměr	6
1.8.3 Excentricita	6
1.8.4 Centrum	6
1.8.5 Poloměr	7
2 Souvislé grafy	8
2.1 k -souvislost	8
2.2 Souvislost v grafu	8
2.3 Vrcholový řez	8
2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu	8
2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti	8
2.5.1 Pomocné lemma 1	9
2.5.2 Pomocné lemma 2	9
2.6 Artikulace	11
2.7 Operace nad 2-souvislými grafy	11
2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích	11
2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici	11
2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci	12
2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu	13

2.12	Příklad sestrojení 2-souvislého grafu	13
2.13	Komponenty 2-souvislosti - blok	14
3	Hranově souvislé grafy	15
3.1	Hranový řez	15
3.2	Hranová souvislost	15
3.3	Most	15
3.4	Souvislost krajních vrcholů a mostů	15
3.5	Základní vlastnosti hranově souvislých grafů	15
3.6	Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti	16
4	Extremální teorie	17
4.1	Věta o souvislosti vrcholů a hran	17
4.2	Věta o souvislosti hran a úplném grafu	17
4.3	Turánovy grafy	18
4.4	Tvrzení počtu hran a Turánově grafu	18
5	Orientované grafy	20
5.1	Minimálně silně souvislý graf	20
5.2	Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech	20
5.3	Algoritmus pro nalezení topologického očíslování	20
5.4	Tranzitivní uzávěr	21
5.5	Reflexivní a tranzitivní uzávěr	21
5.6	Tranzitivní redukce	21
5.7	Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce	21
6	Hamiltonovské grafy	22
6.1	Cesta, kružnice, cyklus	22
6.2	(Ne)orientovaný graf	22
6.3	Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu	22
6.4	Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici	23
6.5	Turnaj	23
6.6	Vztah hamiltonovských cyklů a silné souvislosti	23
7	Toky v sítích	24
7.1	Síť	24
7.2	Tok v síti	24
7.3	Omezení toku	24

7.4	Různé vlastnosti sítí a toků	24
7.5	Řez oddělující zdroj od spotřebiče	24
7.6	Tvrzení o tocích a řezech	25
7.7	Tvrzení o přípustných tocích a řezech	25
7.8	Zlepšující cesta vůči toku f	25
7.9	Změna toku f	25
7.10	Změna toku podle zlepšující cesty je přípustný tok	25
7.11	Značkovací procedura	25
7.12	Tvrzení o výsledku značkovací procedury	26
7.13	Věta o přípustném toku a maximálním přípustném toku	26
7.14	Přírůstková síť vzhledem k toku	26
7.15	Vrstvená síť	26
7.16	Cirkulace	27
7.17	Kapacita řezu	27
7.18	Souvislost přípustné cirkulace a řezu	27
8	Párování	28
8.1	Definice	28
8.2	Vrchol nasycený a volný v párování	28
8.3	Perfektní párování	28
8.4	Maximální párování	28
8.5	Střídavá cesta vůči párování P	28
8.6	Zlepšující cesta vůči párování P	29
8.7	Tvrzení o střídavé cestě	29
8.8	Věta o vrcholově disjunktních zlepšujících cestách	29
8.9	Souvislost perfektního párování a počtu komponent	30
8.10	Párování v bipartitních grafech	31
8.11	Věta o maximálním párování	32
8.12	Věta o nasycujícím párování	32
8.13	Tvrzení o vztahu stupňů vrcholů a nasycujícího párování	33
8.14	Tvrzení o existenci nasycujícího párování všech vrcholů	34
9	Pokryvání	35
9.1	Nezávislé množiny, nezávislost	35
9.2	Vrcholové pokrytí	35
9.3	Věta o vztahu vrcholového pokrytí a nezávislosti	35
9.4	Hranové pokrytí	36

9.5 Věta o vztahu hranového pokrytí a maximálního párování	36
10 Barvení	37
10.1 Hranové obarvení	37
10.2 Hranová barevnost	37
10.3 Věta o souvislosti hranové barevnosti a maximálním stupni grafu	37
10.4 Vrcholové obarevní	37
10.5 Barevnost grafu	37
10.6 Tvrzení o dvoubarevném grafu	37
10.7 Tvrzení o vztahu barevnosti grafu a nezávislosti grafu	38
10.8 Tvrzení o největším stupni vrcholu a barevnosti grafu	39
10.9 Příklad použití algoritmu sekvenčního barvení	39
10.10 Věta o souvislosti největšího stupně vrcholu a barevnosti grafu	39

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autor velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verze textu bude na stránce <https://github.com/knedl1k/XP01TGR>.

Poděkování. Rád bych poděkoval profesorce Marii Demlové nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Teorie grafů.

Text je vysázen makrem L^AT_EX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hyperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Grafy byly nakresleny pomocí maker `TikZ` Tilli Tantaua.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 Neorientované grafy

1.1 Základní pojmy a definice

Graf je soubor vrcholů, hran a vztahů incidence. Zapíšeme jako $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je neprázdná množina vrcholů, E množina hran a ε říká „co hrany představují“, respektive

$$\varepsilon : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}. \quad (1.1)$$

Jestliže pro dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ platí, že $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, pak se hrany e_1, e_2 nazývají *paralelní*. Pokud graf nemá paralelní hrany, nazýváme jej *prostý*. V takovém případě také stačí chápout graf jako dvojici $G = (V, E)$, kde hrany jsou neprázdné maximálně dvouprvkové podmnožiny V .

Smyčkou nazveme takovou hranu, která je $e \in E$ a pro $\varepsilon(e) = \{u, v\}$ platí $u = v$.

$\mathcal{S} \dots$ je množina všech neorientovaných prostých grafů bez smyček.

1.1.1 Základní typy grafů

Rozlišujeme 2 základní typy grafů, orientované a neorientované.

- (a) Orientovaný graf: $\varepsilon : E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V\}; u \in P_V(\varepsilon), v \in K_V(\varepsilon)$
- (b) Neorientovaný graf: $\varepsilon : E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V\}; u, v$ jsou krajní vrcholy ε

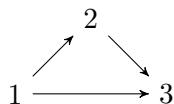
1.1.2 Sled, tah, cesta

- (a) Sled je taková posloupnost, která začíná a končí vrcholem a kde po každém vrcholu následuje hrana, tedy $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k$.
V orientovaném případě vždy platí $P_V(e_1) = v_i, K_V(e_i) = v_{i+1}$. Neorientovaný pouze říká, že v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy.
- (b) Tah je sled, ve kterém se nesmí opakovat hrany.
- (c) Cesta je sled, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy, s výjimkou počátečního, ve kterém cesta může končit.

1.1.3 Kružnice a cyklus

Kružnice je uzavřená neorientovaná cesta v grafu, *cyklus* uzavřená orientovaná cesta.

Příklad kružnice:

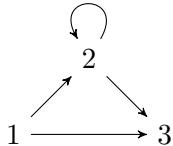


1.1.4 Stupně vrcholů

Pokud $G = (V, E, \varepsilon)$, pak

- vstupní stupeň v $d^-(v) = \|\{e \mid K_V(e) = v\}\|$
- výstupní stupeň v $d^+(v) = \|\{e \mid P_V(e) = V\}\|$
- stupeň v $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Příklad



$$\begin{aligned}d^-(2) &= 2 \\d^+(2) &= 3 \\d(2) &= 5\end{aligned}$$

Pro $G = (V, E)$ je pouze $d(v) = \|\{e \mid v \text{ je krajní vrchol } e, \text{ smyčku počítáme } 2 \times\}\|$.

Z toho máme důsledek

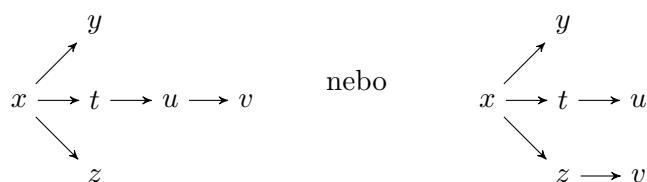
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\|E\| \quad (1.2)$$

Tedy každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

1.2 Skóre

Skóre grafu ($G \in \mathcal{S}$) je $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_i je stupeň vrcholu v_i .
 $\begin{matrix} G = (V, E) \\ \|V\| = d \end{matrix}$

Mějme příklad skóre $(1,1,1,2,2,3)$. Jak by mohl vypadat graf s takovým skórem?



Jak vidíme, skóre jednoznačně neurčuje graf. Můžeme ze skóre ale říct, jestli je takové skóre validním skórem nějakého grafu?

1.3 Hledání grafu ke skóre

Máme $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

Pak D je skóre některého grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ definovaná tak, že

$$d_i = \begin{cases} d_i & \text{pokud } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pokud } i \geq n - d_n \end{cases} \quad (1.3)$$

je skóre nějakého $G' \in \mathcal{S}$.

DŮKAZ.

„ \Leftarrow “: Existuje G' pro D' . G vytvoříme tak, že k G' přidáme vrchol v_n a spojíme se všemi vrcholy $v_{n-d_n}, v_{n-d_1+1}, \dots, v_{n-1}$. Pak G má skóre D . ■

„ \Rightarrow “: Máme G s $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_1 je stupeň v_1 , d_2 je stupeň v_2 a tak dále.

Mějme $\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ má } D\} \neq \emptyset$.

Cíl: Chceme dokázat, že mezi všemi grafy \mathcal{G} existuje jeden, který má vlastnost, že poslední vrchol je spojen hranami s d_n předcházejícími vrcholy.

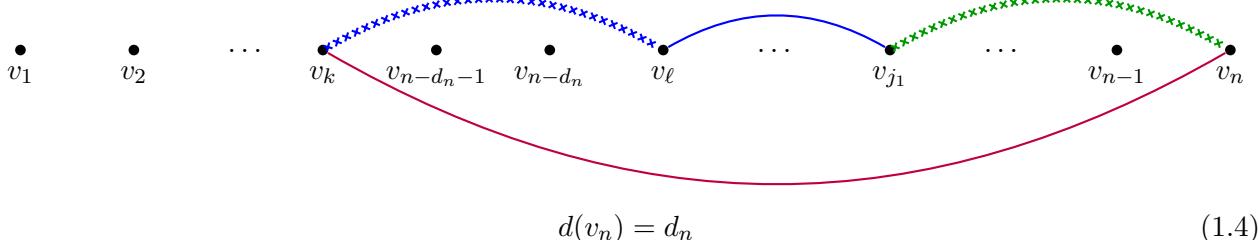
$\forall G \in \mathcal{G}$ mějme j_G , což bude největší index vrcholu, tak že $\{v_{j_G}, v_n\} \notin E$, tedy není mezi nimi hrana. To znamená, že pro ideální G chceme docílit $j_G = n - d_n - 1$.

Jako G_1 označíme ten $G_1 \in \mathcal{G}$, že j_{G_1} je nejmenší. (Může být j_{G_1} menší jak $n - d_n - 1$? Ne. v_n má stupeň d_n , a kdyby bylo j_{G_1} menší, tak by bylo vrcholů více, tzn. ne všechny by měly hranu s v_n .)

Označme $j_1 = j_{G_1}$.

Víme $j_1 \geq n - d_n - 1$. Ted nás ale zajímá, jestli $j_1 = n - d_n - 1$. Dokažme sporem.

Kdyby $j_1 > n - d_n - 1$, tak



$$d(v_n) = d_n \quad (1.4)$$

Protože mezi d_n předcházejícími vrcholy je nějaký, který není spojen hranou s v_n , v našem případě v_{j_1} , nutně to znamená, že v_n musí mít hranu s nějakým vrcholem, řekněme v_k , který má ještě nižší index.

$$d(v_k) \leq d(v_{j_1}) \quad (1.5)$$

v_k je v pořadí dříve, než v_{j_1} , tudíž musí mít nutně menší roven stupeň. To ale nutně znamená, že v_{j_1} musí být spojen s alespoň jedním vrcholem, označme si ho v_ℓ , se kterým není spojen v_k , protože v_k je spojen s v_n , zatímco v_{j_1} není.

Vytvořme

$$G_0 = (V_0, E_0)$$

$$V_0 = V_1 = V$$

$$E_0 = (E_1 \setminus \{\{v_n, v_k\}, \{v_\ell, v_{j_1}\}\}) \cup \{\{v_k, v_\ell\}, \{v_n, v_{j_1}\}\}$$

G_0 má skóre D a zároveň $j_{G_0} < j_1$. To ale znamená, že G_1 nebyl graf s nejmenším j_G , což je spor. A proto nejmenší j_G je $j_{G_0} = n - d_n - 1$.

Ověřili jsme, že takový graf určitě existuje, takže G' dostaneme z G_0 odstraněním v_n . G' pak má skóre D' . ■

1.4 Příklad hledání grafu pro skóre

Mějme $D = (1, 1, 2, 3, 3)$; $n = 5, d_n = 3; n - d_n = 2$.

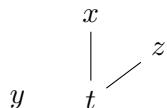
$$D_1 = (1, 0, 1, 2) \xrightarrow{\text{uspo.}} (0, 1, 1, 2); n_1 = 4, d_{n_1} = 2; n_1 - d_{n_1} = 2.$$

$D_2 = (0, 0, 0) \dots$ tento graf je určitě existuje, jedná se o diskrétní graf.

Kresleme postupně, začněme u D_2 .

$x \quad y \quad z$

Pak přidejme vrchol a hrany tak, aby skóre odpovídalo D_1 .



A nakonec tak, aby odpovídalo D .



1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů

Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček. Pak definujme

- $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$ je minimální stupeň grafu G.
- $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$ je maximální stupeň grafu G.
- $d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$ je průměrný stupeň grafu G.
- $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2}d(G)$ je poměr počtu hran ku počtu vrcholů.

Označme $n = |V|$ a $m = |E|$. Pak $d(G) = \frac{2m}{n}$ a $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$.

Zřejmě platí $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

1.6 Tvrzení o podgrafech

Pro každý $G \in \mathcal{S}$ s $|E| \geq 1$ existuje podgraf H takový, že $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

DŮKAZ. Máme dvě situace

1. Buď $\delta(G) > \varepsilon(G)$, pak $H = G$.
2. Nebo $\delta(G) \leq \varepsilon(G)$, tj. $v_1 \in V, d(v_1) = \delta(G) \leq \frac{m}{n}$.

Dokažme tedy ještě platnost pro 2.

Označme $G_1 := G \setminus v_1$. A tedy $m_1 = m - \delta(G)$ a $n_1 = n - 1$.

$$\text{Chceme } \underbrace{\frac{m_1}{n_1}}_{\varepsilon(G_1)} \geq \underbrace{\frac{m}{n}}_{\varepsilon(G)}.$$

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{m - \delta(G)}{n - 1} - \frac{m}{n} = \frac{nm - n\delta(G) - nm + m}{(n - 1)n} = \frac{m - n\delta(G)}{(n - 1)n}, \delta(G) \leq \frac{m}{n}, m \geq n\delta(G) \quad (1.6)$$

A tedy

$$m - n\delta(G) \geq 0 \quad (1.7)$$

$$n(n - 1) \geq 0 \quad (1.8)$$

Což dává

$$m \geq n\delta(G), \text{ tj. } \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G) \quad (1.9)$$

Algoritmus dále pokračuje:

$$\text{Pokud } \begin{cases} \delta(G_1) > \varepsilon(G_1), & \text{tak } H := G_1, \\ \delta(G_1) \leq \varepsilon(G_1), & \text{tak } v_2 \in V \setminus \{v_1\}, d_{G_1}(v_2) = \delta(G_1). \end{cases} \quad (1.10)$$

A tedy $G_2 := G_1 \setminus v_2$, $\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1)$. A takto postupně dále. Algoritmus končí a nikdy nedostaneme prázdný graf, díky předpokladu, že G mělo alespoň jednu hranu, tedy $\varepsilon(G) > 0$. ■

1.7 Souvislý graf

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

1.8 Pojmy založené na vzdálenosti

1.8.1 Vzdálenost

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $x, y \in V$. Vzdálenost x, y je $d_G(x, y)$, což značí počet hran v nejméně početné cestě z x do y , když existuje cesta. Jinak $d_G(x, y) = \infty$.

1.8.2 Průměr

Ať G je souvislý. Průměr G je $\text{diam}(G) = \max \{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$.

1.8.3 Excentricita

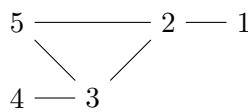
Ať G je souvislý. Excentricita vrcholu $v \in V$ je $\text{ex}(V) = \max \{d_G(v, x) \mid x \in V\}$.

1.8.4 Centrum

Ať $v \in V$ je centrální $\rightarrow \text{ex}(v)$ je nejmenší mezi $\text{ex}(x), x \in V$. Centrum (staře *střed*) grafu je $C(G) = \{v \mid v \text{ je centrální}\}$.

Uvedme si příklad.

Zde $C(G) = \{2, 3, 5\}$.



1.8.5 Poloměr

Poloměr G je $\text{rad}(G) = \text{ex}(v), v \in C(G)$.

Platí $\text{rad}(G) \leq \underbrace{\text{diam}(G)}_{\star} \leq 2 \text{ rad}(G)$.

Zdůvodnění \star . Chceme $d_G(x, y) \leq 2 \text{ rad}(G) \forall x, y \in V$.

$$x \xrightarrow{P_1} v \xrightarrow{P_2} y$$

P_1, P_2 sled z x do y o $\leq 2 \text{ rad}(G)$.

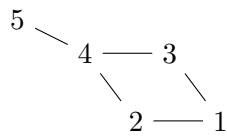
P_1, P_2 obsahuje cestu P z x do y o $\leq P_1, P_2 \leq 2 \text{ rad}(G)$.

2 Souvislé grafy

2.1 k -souvislost

$G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Řekněme, že G je k -souvislý, pokud $|V| > k$ a pro každou $X \subseteq V$, $|X| = k - 1$ je $G \setminus X$ souvislý.

Máme



Je souvislý, ale ne 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

Každý graf je 0-souvislý, i nesouvislý graf je 0-souvislý.

1-souvislý je každý souvislý graf.

2.2 Souvislost v grafu

Souvislost v grafu G je největší k takové, že G je k -souvislý. Značíme $\kappa(G)$.

Úplný graf má $\kappa(G) = |V| - 1$.

2.3 Vrcholový řez

Vrcholový řez grafu $G \in \mathcal{S}$ je množina vrcholů $X \subsetneq V$, že $G \setminus X$ je nesouvislý.

2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu

Je-li $G \in S$, G není úplný, pak $\kappa(G) = k$ právě tehdy, když nemá vrcholový řez o $k - 1$ vrcholech a má vrcholový řez o k vrcholech.

2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti

Máme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, splňující $d(G) \geq 4k$. Pak G obsahuje podgraf, který je k -souvislý.

DŮKAZ.

- Pro $k = 0$ triviální. Všechny grafy jsou 0-souvislé.
- Pro $k = 1$: Pokud $\frac{2m}{n} \geq 4k$, tedy $m \geq 1$ (takže má hranu), tak sama hrana je 1-souvislý podgraf.
- Pro $k \geq 2$: tj. $\frac{2m}{n} \geq 4k$

$$2m \geq 4kn \tag{2.1}$$

$$m \geq 2kn \tag{2.2}$$

$$m \geq 4n \text{ (dosazeno } k \geq 2\text{)} \tag{2.3}$$

Průběh důkazu $d(G) \geq 4k, k \geq 2 \xrightarrow{\text{Lemma 1}} \text{(i), (ii)} \xrightarrow{\text{Lemma 2}} G \text{ má } k\text{-souvislost.}$

2.5.1 Pomocné lemma 1

Pokud $k \geq 2$ a $d(G) \geq 4k$, pak

- (i) $n \geq 2k - 1$
- (ii) $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$

DŮKAZ. (i) Kdyby ne, tak $n < 2k - 1$.

$$n + 1 < 2k \quad (2.4)$$

$$\frac{n + 1}{2} < k \quad (2.5)$$

Ted použijme předpoklad $m \geq 2kn > (n + 1)n$. A to nejde, protože úplný neorientovaný graf bez smyček má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

(ii) Mějme

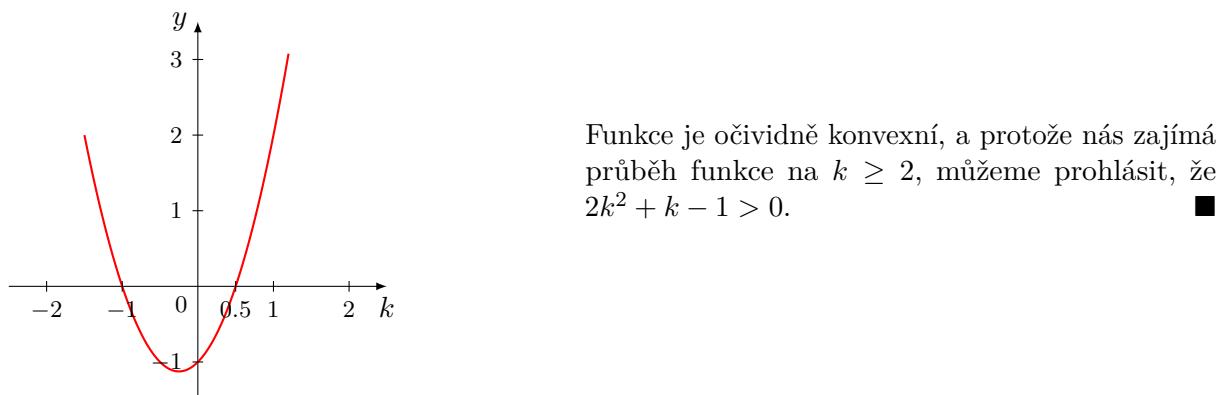
$$m \geq 2kn - ((2k - 3)(n - k + 1) + 1) = 2kn - (2kn - 2k^2 + 2k - 3n + 3k - 3 + 1) \quad (2.6)$$

$$= 2k^2 - 5k + 3n + 2 \quad (2.7)$$

Ted aplikujme již dokázané (i):

$$2k^2 - 5k + 3n + 2 \geq 2k^2 - 5k + 6k - 3 + 2 = 2k^2 + k - 1 \quad (2.8)$$

Vyšetřeme průběh funkce



2.5.2 Pomocné lemma 2

Pokud G splňuje (i) a (ii), tak G má **k -souvislý** podgraf.

DŮKAZ. G není **k -souvislý**.

Indukcí podle $|V| = n$.

Základní krok: n $\stackrel{(i)}{\geq} 2k - 1$, $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$.

Dosadíme $k = \frac{n+1}{2}$:

$$m \geq (n + 1 - 3) \left(n - \frac{n + 1}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2} + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (2.9)$$

A tedy graf je úplný na n vrcholech. Ted potřebujeme $n > k$.

$$n = 2k - 1 = k + \underbrace{k - 1}_{\geq 1} \geq k + 1 \quad (2.10)$$

Indukční krok: Každý graf G' splňující (i) a (ii) s méně než n vrcholy (s alespoň $2k - 1$ vrcholy) má k -souvislý podgraf.

Vezmeme G splňující (i) a (ii) s n vrcholy.

(a) Kdyby $\delta(G) \leq 2k - 3$, tak $v \in V$ s $d_G(v) \leq 2k - 3$.

$$G \setminus v = G_1, n_1 = n - 1,$$

$$m_1 \geq m - (2k - 3) \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1 - (2k - 3) = (2k - 3)(\underbrace{n - 1}_{n_1} - k + 1) + 1 \quad (2.11)$$

Tudíž G_1 má k -souvislý podgraf, tedy i ho má G .

(b) At $\delta(G) > 2k - 3$, $\delta(G) \geq 2k - 2$; $\forall v \in G, d_G(v) \geq 2k - 2$.

G není k -souvislý, tj. $X \subseteq V, |X| = k - 1$ a X je vrcholový řez.



$G \setminus X$ je nesouvislý. Všechn je $(k - 1) + (k - 1) + 1$. $d_G(x) \geq 2k - 2$.

G_1 graf indukovaný C_1 v X má alespoň $2k - 1$ vrcholů.

Kdyby G_1 i G_2 nesplňovaly (ii), G_i má n_i vrcholů a m_i hran, $i = 1, 2$.

$$m_i \not\geq (2k - 3)(n_i - k + 1) + 1, \quad \text{tj. } m_i \leq (2k - 3)(n_i - k + 1) \quad (2.12)$$

$m_1 + m_2 \geq m$ víme. $n_1 + n_2 = n + (k - 1)$, počítali jsme vrcholy v X dvakrát.

$$m \leq n_1 + n_2 \leq (2k - 3)(n_1 - k + 1) + (2k - 3)(n_2 - k + 1) = (2k - 3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \quad (2.13)$$

$$= (2k - 3)(n + (k - 1) - 2k + 2) \quad (2.14)$$

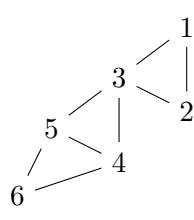
$$= (2k - 3)(n - k + 1) \quad (2.15)$$

Tedy spor s (ii). ■

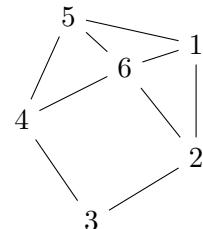
2.6 Artikulace

Vrchol v grafu G se nazývá artikulace, jestliže $G \setminus v$ má více komponent souvislosti, než G .

Platí. $G \in \mathcal{S}$ s alespoň 3 vrcholy je **2-souvislý** \iff je 1-souvislý a nemá artikulaci.



Není 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

2.7 Operace nad 2-souvislými grafy

Mějme operace

- (a) $G \in \mathcal{S}$ a $e \in \{u, v\}; u, v \in V(G), e \notin E(G)$, pak $G + e$ je graf s $V(G)$ a $E(G) \cup \{e\}$.
Je-li G **2-souvislý**, tak $G + e$ je 2-souvislý.
- (b) $G \in \mathcal{S}, G = (V, E), e \in E$, pak $G \% e = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$.
„Do hrany e vložíme vrchol se stupněm 2.“

2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích

Každý **2-souvislý** graf obsahuje **kružnici**.

DŮKAZ. Každý 2-souvislý graf je **souvislý**. Kdyby souvislý neobsahoval kružnici, jedná se o strom. A každý strom s alespoň 3 vrcholy má **artikulaci**. Protože stromy nemohou být 2-souvislé, a zároveň všechny ostatní souvislé grafy obsahují kružnici, i každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici. ■

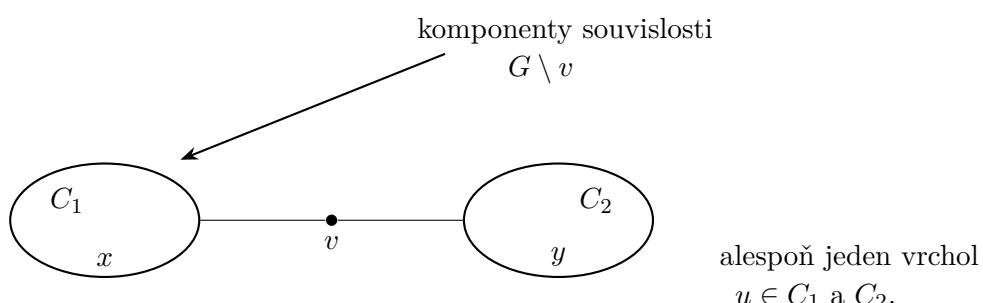
2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici

$G \in \mathcal{S}, G = (V, E)$ je **2-souvislý** právě tehdy, když každé 2 vrcholy $u \neq v$ leží na společné **kružnici**.

DŮKAZ.

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že pro každé $u \neq v$ existuje kružnice K , která je obsahuje.

To znamená, že graf je **souvislý**. Musíme ještě dokázat, že v něm neexistuje **artikulace**. Kdyby graf měl artikulaci v :



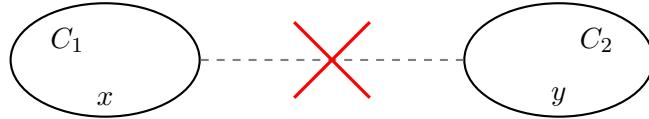
Znamenalo by to, že v jedné komponentě souvislosti by ležely alespoň 2 vrcholy (protože máme minimálně 3 vrcholy). Zároveň ale vrchol $x \in C_1$ a $y \in C_2$ rozhodně neleží na společné kružnici, tudíž graf nemůže mít artikulaci, takže G je 2-souvislý. ■

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že G je **2-souvislý**. Dokažme indukcí podle vzdálenosti $d(u, v)$.

(a) Základní krok: u, v s $d(u, v) = 1$.

Budeme se snažit ukázat, že když zrušíme hranu, souvislost zůstane.

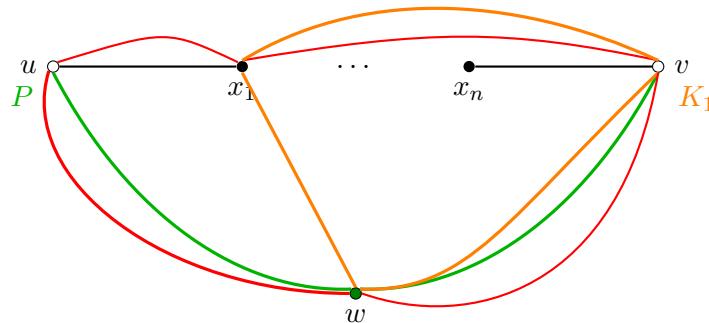
(1) $G \setminus e$ je souvislý. Kdyby ne, tak



Přitom G má alespoň 3 vrcholy, tedy v jedné komponentě leží alespoň 2 vrcholy. **BÚNO** exsisteuje $x \in C_1$, $x \neq u$, tj. u je artikulace. Což je spor. Takže $G \setminus e$ je souvislý. Tedy existuje cesta P z u do v . Pak P je kružnice obsahující u, v .

(b) Indukční předpoklad: Pro každé x, y s $d(x, y) = n \geq 1$ existuje kružnice obsahující x, y .

(c) Indukční krok: Vezměme libovolné u, v s $d(u, v) = n + 1$. Vyberme nejkratší cestu:



Použijme I.P.: tj. existuje kružnice K_1 obsahující x_1, v . x_1 není **artikulace**, tj. existuje cesta P z u do v neobsahující x_1 . w je prvním vrcholem cesty P , který leží na K_1 . Použijeme **cestu** P , abychom se dostali z u do w , následně se přes K_1 dostaneme do v . Dále po kružnici do x_1 , kde si musíme vybrat trasu, která nevede do w , tj. směrem do u . A tím uzavřeme **kružnici** obsahující u a v . ■

2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci

$G \in \mathcal{S}$ je **2-souvislý** právě tehdy, když $G\%e$, $e \in E(G)$ je 2-souvislý.

DŮKAZ.

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že G je 2-souvislý, tj. souvislý a nemá **artikulaci**.

Vrchol w , který vložíme do hrany e , není artikulace. A žádný jiný se nemohl stát artikulací, to by už musely být artikulací předtím, a tedy by se v prvé řadě nejednalo o 2-souvislý. ■

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že $G \setminus e$ je **2-souvislý**, tj. každé 2 vrcholy leží na společné kružnici.

$$x, y \in V(G) \dots \text{existuje } K \text{ v } G \setminus e \text{ obsahující } x, y \begin{cases} K \text{ neobsahuje } e_1, e_2 & K \text{ je kružnice } G. \\ K \text{ obsahuje } e_1, e_2 & \text{z } K \text{ odstraníme } e_1, e_2, \\ & \text{nahradíme } e \text{ a máme } K'. \end{cases} \quad (2.16)$$

K' je kružnice v G . ■

2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu

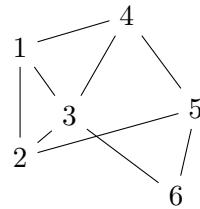
Každý 2-souvislý graf $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je možné sestrojit postupem:

$$G_0 := K \text{ je nějaká kružnice} \quad (2.17)$$

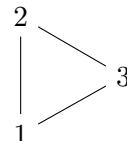
Máme-li G_i , že $G_i \neq G$, tak G_{i+1} je G_i , ke kterému přidáme **cestu** P (v G), která vede mezi 2 vrcholy z G_i a zároveň všechny vrcholy této cesty nejsou v G_i .

2.12 Příklad sestrojení 2-souvislého grafu

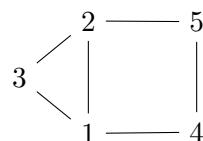
Mějme **2-souvislý** graf, tj. bez **artikulace**:



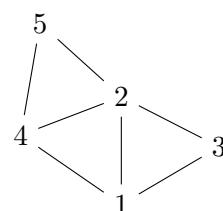
Začněme G_0 :



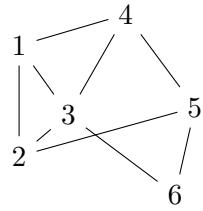
Přidáme cestu z 1 do 2, tedy G_1 :



Ted přidáme cestu z 3 do 4, G_2 :



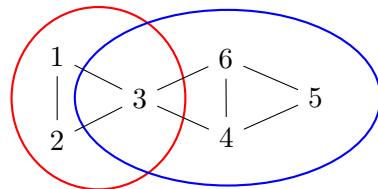
A posledně z 3 do 5, $G_3 = G$:



2.13 Komponenty 2-souvislosti - blok

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak $A \subseteq V(G)$ se nazývá *blok*, jestliže je maximální podmnožina taková, že jí indukovaný podgraf je **2-souvislý**.

Pozn. maximální v tomto kontextu neznamená nejpočetnější, nýbrž, že do takové podmnožiny již nelze přidat další vrchol.



Když nejsou jednotlivé bloky vzájemně disjunktní, tak jejich průnik je **artikulace**.

3 Hranově souvislé grafy

3.1 Hranový řez

Množině $F \subseteq E$, že $G \setminus F$ je nesouvislá, se říká hranový řez.

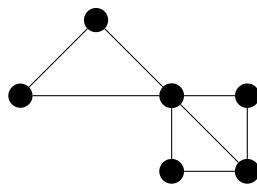
3.2 Hranová souvislost

Máme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak G je k -hranově souvislý, jestliže neexistuje $F \subseteq E$, $|F| \leq k - 1$, taková, že $G \setminus F$ je nesouvislá.

Hranová souvislost grafu G , značíme $\lambda(G)$, je největší k , že G je k -hranově souvislý.

Pozn. největší znamená, že nemá hranový řez s $\lambda(G) - 1$ hranami, ale má s $\lambda(G)$ hranami.

Mějme 2-hranově souvislý graf:



3.3 Most

Nazveme most hranu $e \in E(G)$, že $\{e\}$ je hranový řez.

3.4 Souvislost krajních vrcholů a mostů

Každý most má alespoň jeden krajní vrchol, který je artikulace.

DŮKAZ. Necht $e = \{u, v\}$ je most v souvislém grafu G , kde $|V(G)| \geq 3$. Dle definice mostu platí, že graf $G \setminus e$ není souvislý a skládá se ze dvou komponent souvislosti. Označme K_u komponentu obsahující vrchol u a K_v komponentu obsahující vrchol v .

Protože má graf G alespoň 3 vrcholy, musí alespoň jedna z komponent K_u nebo K_v obsahovat více než jeden vrchol. BÚNO předpokládejme, že $|V(K_u)| \geq 2$.

To znamená, že ve komponentě K_u existuje vrchol w různý od u (tj. $w \in V(K_u), w \neq u$). Protože e je most, jediná cesta v grafu G z vrcholu w do vrcholu v vede přes hranu e , a tedy nutně prochází vrcholem u .

Pokud z grafu G odstraníme vrchol u , neexistuje žádná cesta mezi w a v , protože jediná spojnica byla přerušena. Graf $G \setminus u$ tedy není souvislý (vrcholy w a v leží v různých komponentách).

Z toho plyne, že vrchol u je artikulace. ■

3.5 Základní vlastnosti hranově souvislých grafů

G je 0-hranově souvislý pro každé G .

G je 1-hranově souvislý $\iff G$ je souvislý.

G je 2-hranově souvislý $\iff G$ je souvislý a nemá most.

3.6 Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti

Platí, že $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

4 Extremální teorie

4.1 Věta o souvislosti vrcholů a hran

Mantel. Máme $G \in \mathcal{S}$ s n vrcholy, m hranami, který nemá K_3 . Pak $m \leq \frac{n^2}{4}$.

DŮKAZ.

Pomocná definice. Množina A je nezávislá $A \subseteq V(G)$ pokud pro každou $e = \{u, v\}$, jestliže $u \in A$, platí $v \notin e$. Množina A je nezávislá právě tehdy, když v ní žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.

At A je nejpočetnější nezávislá množina a $B = V \setminus A$. G nemá K_3 : každá množina sousedů vrcholů $v \in V$ je nezávislá množina.

$$m \leq \sum_{N \in B} d(v) \leq \underbrace{(n - k)}_{|B|} \cdot \underbrace{k}_{|A|} \quad (4.1)$$

Každá hrana má alespoň 1 krajní vrchol v B . Pro které k je $(n - k)k$ největší?

$$f(x) = (n - x)x \quad (4.2)$$

$$f'(x) = n - 2x \implies f'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{2} \quad (4.3)$$

$$f''(x) = -2 \quad (4.4)$$

Protože jsme v \mathbb{N} , tak $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \leq \frac{n^2}{4}$. ■

4.2 Věta o souvislosti hran a úplném grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, který neobsahuje K_{r+1} (úplný graf na $r + 1$ vrcholech), $r \geq 2$. Pak

$$m \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (4.5)$$

DŮKAZ. Vezměme graf G bez K_{r+1} s nejméně hranami (přidáním hrany by vznikl K_{r+1}). Tedy G má K_r . At A je množina vrcholů K_r a B je $V(G) \setminus A$, $|B| = n - r$. Každý vrchol $v \in B$ má max $r - 1$ sousedů v A (jinak by $A \cup \{u\}$ tvořil K_{r+1}).

m rozdělíme na hrany v A (hrany úplného grafu), hrany mezi A a B a hrany v B .

$$m = m_A + m_{A-B} + m_B \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + m_B \quad (4.6)$$

a graf indukovaný B neobsahuje K_{r+1} a má maximální počet hran.

$$m_B < m \quad (4.7)$$

$$n - r = |B| < n \quad (4.8)$$

Použijme tedy silnou indukci, dle počtu vrcholů $n = |V(G)|$.

- Základní krok. $n = 1, 2, \dots, r$.

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad (4.9)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \stackrel{?}{\leq} \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} \quad (4.10)$$

$$\frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} \left(n \frac{r-1}{r} - (n-1) \right) \quad (4.11)$$

$$= \frac{n}{2} \frac{nr - n - nr + r}{r} = \frac{n}{2} \underbrace{\frac{r-n}{r}}_{\geq 0} \geq 0. \quad (4.12)$$

- Když budeme mít indukční předpoklad pro G_B , pak:

$$m \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + \frac{r-1}{n} \frac{(n-r)^2}{2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left(\frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{(n-r)^2}{2} \right) \quad (4.14)$$

$$= \frac{r-1}{r} \left(\frac{r^2 + 2rn + n^2 - 2nr + r^2}{2} \right) = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \quad (4.15)$$

■

4.3 Turánovy grafy

Pro $n, r < n$. $T(n, r)$ je r -partitní úplný graf. Označíme-li strany S_1, \dots, S_r , pak $|S_i - S_j| \leq 1$, $|S_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Takový graf má potom

$$\frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{n}{r} \right)^2 = \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}, \quad n = k \cdot r, \quad (4.16)$$

hran.

4.4 Tvrzení počtu hran a Turánově grafu

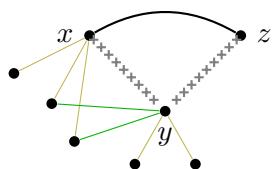
Každý $G = (v, E) \in \mathcal{S}$ bez K_{r+1} s největším počtem hran je $T(n, r)$.

DŮKAZ. Na V definujme \mathcal{R} : $u\mathcal{R}v \iff \{u, v\} \notin E$.

\mathcal{R} je reflexivní, protože nemáme smyčky. \mathcal{R} je symetrické, protože se jedná o neorientovaný graf. Ted je potřeba ověřit tranzitivitu, tj. $(\{x, y\} \notin E, \{y, z\} \notin E) \implies \{x, z\} \notin E$.

Dokažme sporem. Kdyby $\{x, y\} \notin E$ a $\{y, z\} \notin E$ a $\{x, z\} \in E$.

1) $d(y) \geq d(x)$ (obdobně $d(y) \geq d(z)$). Sporem. Kdyby $d(y) < d(x)$.

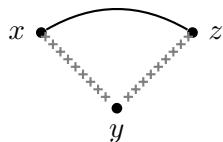


Neighbourhood $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$.

Z G odstraníme hrany $\{y, t\}, t \in N(y)$ a přidáme $\{y, u\}, u \in N(x)$. Tím dostaneme G' , to má více hran jak G .

G' nemá K_{r+1} , protože ani původní graf nebyl K_{r+1} . Což je spor. ■

2) $G'' = G \setminus \{x, y, z\}$. $m(G) \leq m(G') + d(x) + d(y) + d(z) - 1$ (-1 za hranu $\{x, z\}$).



G''' z G odstraníme hrany $\{x, t\}, t \in N(x)$ a $\{z, v\}, v \in N(z)$ a přidáme hrany $\{x, u\}, u \in N(y)$ a $\{z, u\}, u \in N(y)$.

$$m(G''') = m(G'') + 3d(y) > m(G'') + d(x) + d(y) + d(z) - 1 \geq m(G) \quad (4.17)$$

G'' nemá K_{r+1} , což je spor. ■

\mathcal{R} je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence \mathcal{R} jsou maximální množiny, že graf jimi indukováný nemá hranu. G má nejvíce hran, tj. G má K_r , stran má r , je tedy úplný r -partitní graf.

Potřebujeme $||S_i| - |S_j|| \leq 1$. Dokažme sporem. Kdyby ne, tak $|S_1| \geq |S_2| + 2$. Označme $|S_1| = n_1$ a $|S_2| = n_2$.

Graf měl původně $n_1 \cdot n_2$ hran. Nově má

$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 n_2 \underbrace{- n_2 + n_1 - 1}_{\begin{array}{c} \geq 2 \\ \geq 1 \end{array}}. \quad (4.18)$$

A to je **Turánův** graf. ■

5 Orientované grafy

5.1 Minimálně silně souvislý graf

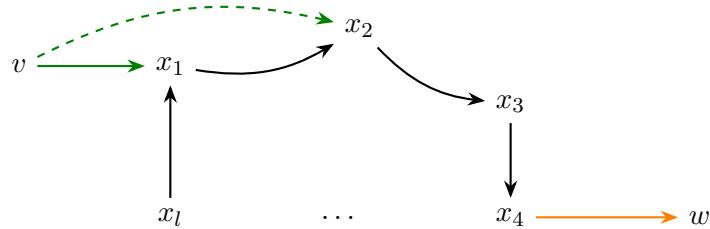
Silně souvislý graf se nazývá minimálně silně souvislý, jestliže $G \setminus \{e\}$ není silně souvislý pro každou hranu $e \in E(G)$.

5.2 Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech

Každý minimálně silně souvislý graf G s alespoň 2 vrcholy má 2 vrcholy stupně 2.

DŮKAZ. Indukcí podle rozdílu $k = m - n$, kde m je počet hran a n počet vrcholů.

- Základní krok. $k = 0$, tj. $m = n$. Takže se jedná o **cyklus**. Všechny vrcholy cyklu mají stupeň 2.
- Indukční krok. Každý graf G (minimálně silně souvislý s $m(G) - n(G) < k$) má 2 vrcholy stupně 2. Uvažujme G minimálně silně souvislý s $m - n = k > 0$. V G si vybereme cyklus C s největším počtem hran (tedy vrcholů). C má l vrcholů:



$\forall v \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(v, x_i), x_i \in C$.

$\forall w \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(x_j, w), x_j \in C$.

Vytvořme G' , což bude G , ve kterém nahradíme cyklus C vrcholem v_C .

$$m(G') - n(G') = m - l - (n - l + 1) = m - n - 1 = k - 1 \quad (5.1)$$

■

G' má alespoň 2 vrcholy stupně 2, není-li ani jeden z nich v_C , jsou to vrcholy G stupně 2. Když G' bude mít pouze 2 vrcholy, v_C a x , stupně 2, tak musíme řešit 2 případy:

- 1) Když má cyklus alespoň 3 vrcholy ($l \geq 3$), pak v C existuje vrchol stupně 2.
- 2) Když C má jen 2 vrcholy, když se zkombinují orientované hrany do neorientovaných, tak se jedná o strom. A každý strom s alespoň 2 vrcholy má 2 listy, tj. vrcholy stupně 1. A to jsou přesně ty 2 vrcholy stupně 2, které hledáme.

■

5.3 Algoritmus pro nalezení topologického očíslování

Algoritmus pro nalezení topologického očíslování v acyklickém grafu.

Pozn.: Každý acyklický graf má alespoň 1 vrchol se stupněm 0.

- 1) Spočítáme vstupní stupně vrcholů. Do množiny M vložíme všechny v s $d^-(v) = 0$, $i = 1$.
- 2) Vybereme $v_i \in M$ a odstraníme. Pro každé $(v_i, w) \in E$: $d^-(w) := d^-(w) - 1$, if $d^-(w) = 0$, pak $M := M \cup \{w\}$. $i++$.
- 3) Algoritmus končí pokud $M = \emptyset$ a zároveň existuje alespoň jeden vrchol u s $d^-(u) > 0$, pak topologické očíslování neexistuje, nebo jsou všechny vrcholy topologicky očíslované.

5.4 Tranzitivní uzávěr

Mějme orientovaný graf G . G^t je tranzitivní uzávěr, když $G = (V, E)$, tak $G^t = (V, E^t)$, kde $(u, v) \in E^t$, právě tehdy, když existuje netriviální orientovaná cesta z u do v .

Platí, že G je silně souvislý $\iff G^t$ je úplný orientovaný graf se všemi smyčkami.

5.5 Reflexivní a tranzitivní uzávěr

G^* je reflexivní a tranzitivní uzávěr $G^* = (V, E^*)$, $E^* = E^t \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$.

Lze také říct, že platí to samé, jako pro tranzitivní uzávěr, jen vyskrtneme netriviální.

5.6 Tranzitivní redukce

$G = (V, E)$ je orientovaný graf. Jeho podgraf $G' = (V, E')$ je transitivní redukce G pokud $G^t = (G')^t$, a žádny vlastní podgraf této redukce G'' již nemá tuto vlastnost.

5.7 Souvislost acyklických grafů a tranzitivní redukce

Je-li $G \in \mathcal{S}$ acyklický, pak má jedinou tranzitivní redukci.

DŮKAZ. Sporem. Mějme G acyklický, tedy má topologické očíslování vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$.

Kdyby $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ byly 2 různé tranzitivní redukce, tak

$$(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \neq \emptyset. \quad (5.2)$$

Vyberme z $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ hranu $e = (v_i, v_j)$, $i < j$, která má nejmenší rozdíl $j - i$.

BÚNO: $e \in (E_1 \setminus E_2)$, tedy $e \notin E_2$, ale $e \in E_2^t$. Tj. musí existovat v G_2 cesta z v_i do v_j , která má alespoň 2 hrany.

$$v_i, e_1, e_2, \dots, e_k, v_j, k \geq 2. \quad (5.3)$$

G_1 tam je z redukce, tak alespoň e_a , $a = 1, \dots, k$ není v E_1 .

$$e_a = (v_a, v_b), a < b. \quad (5.4)$$

$$i \leq a < b \leq j \quad (5.5)$$

Alespoň jedna z \leq je ve skutečnosti $<$, tedy $b - a < j - i$. Což je spor. ■

6 Hamiltonovské grafy

6.1 Cesta, kružnice, cyklus

Cesta (kružnice, cyklus) je hamiltonovská (ský), jestliže prochází všemi vrcholy.

6.2 (Ne)orientovaný graf

(Ne)orientovaný graf je Hamiltonovský, jestliže obsahuje hamiltonovský (skou) cyklus (kružnici).

6.3 Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, se skóre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $n = |V|$. Jestliže pro nějaké $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$, tak G je Hamiltonovský.

DŮKAZ. Sporem. Předpokládejme, že existuje $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, G splňuje $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$ a G není Hamiltonovský.

Když ke G splňující Chvátalovu podmínu přidáme hranu, která v G není, tak nový graf stále splňuje Chvátalovu podmínu.

Zvolíme G s Chvátalovou podmínkou maximální bez hamiltonovské kružnice. Zvolme $x, y : \{x, y\} \notin E$, $d(x) + d(y)$ je největší mezi $\{u, v\} \notin E$, $d(x) \leq d(y)$. V G existuje Hamiltonovská cesta z x do y . Označme

$$S := \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E\} \in 1, \quad (6.1)$$

$$T := \{j \mid \{v_j, y\} \in E\} \ni n - 1, \quad (6.2)$$

kde $n \notin S$, $n \notin T$.

$$S \cup T \subset \{1, \dots, n - 1\} \quad (6.3)$$

$$|S| = d(x) \quad (6.4)$$

$$|T| = d(y) \quad (6.5)$$

Pomocný důkaz. Platí $S \cap T = \emptyset$.

DŮKAZ. Kdyby $i \in S \cap T$, tak se jedná o hamiltonovskou kružnici. Spor s velkým předpokladem. ■
Takže

$$|S \cup T| = |S| + |T| = d(x) + d(y) \leq n - 1. \quad (6.6)$$

Položme

$$k := d(x) \quad d(x) \leq d(y) \quad (6.7)$$

$$k < \frac{n}{2} \quad 2d(x) \leq d(x) + d(y) \leq n - 1 \quad (6.8)$$

A tedy $d(x) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.

Máme $d(x)$ vrcholů u , že $\{x, y\} \in E$.

$$u = v_l \quad (6.9)$$

$$\{v_{l-1}, y\} \notin E \quad (6.10)$$

$$d(v_{l-1}) + d(y) \leq d(x) + d(y) \quad (6.11)$$

$$d(v_{l-1}) \leq d(x) = k \quad (6.12)$$

Tj. máme k vrcholů v_{l-1} s $d(v_{l-1}) \leq k$. Platí $d_k \leq k$, protože máme alespoň k vrcholů stupně $\leq k$. Z Chvátalovy podmínky víme, že $d_{n-k} \geq n - k$, tj. existuje $k + 1$ vrcholů w s $d(w) \geq n - k$. Ale x má $d(x) = k$. Tedy existuje w s $d(w) = n - k$, že $\{x, w\} \notin E$.

$d(x) + d(w) = k + n - k = n$, což je spor s volbou x a y , protože $d(x) + d(y) \leq n - 1$. ■

6.4 Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici

Jestliže posloupnost čísel

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \text{ nesplňuje Chvátalovu podmínku,} \quad (6.13)$$

tak existuje

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n, a_i \leq d_i, \quad (6.14)$$

tak, že je skóre grafu, který nemá hamiltonovskou kružnici.

DŮKAZ. Jestliže posloupnost nesplňuje Chvátalovu podmínku, pak existuje číslo k tak, že $k \leq \frac{n}{2}$, $d_k \leq k$ a přitom $d_{n-k} \leq n - k - 1$.

Utvořme graf s množinou vrcholů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takto: $\{v_i, v_j\}$ je hrana G právě tehdy, když

- buď $1 \leq i \leq k$ a $n - k + 1 \leq j \leq n$,
- nebo $i \neq j$ a $k + 1 \leq i, j \leq n$.

Jinými slovy G se skládá z úplného bipartitního grafu se stranami $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ a $Y = \{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}$ a úplného grafu na množině vrcholů $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$.

Graf G má tedy

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{n-k} \leq a_{n-k+1} \leq \cdots \leq a_n \quad (6.15)$$

$$\underbrace{d_1}_k \leq \underbrace{d_2}_k \leq \cdots \leq \underbrace{d_k}_k \leq \underbrace{d_{k+1}}_{n-k+1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_{n-k}}_{n-k+1} \leq \underbrace{d_{n-k+1}}_{n-1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_n}_{n-1} \quad (6.16)$$

a tedy majorizuje a_1, a_2, \dots, a_n . Není těžké nahlédnout, že v G neexistuje hamiltonovská kružnice. ■

6.5 Turnaj

Prostý orientovaný graf G bez smyček nazveme *turnajem*, jestliže pro každé dva různé vrcholy u, v bud (u, v) je hrana grafu G , nebo (v, u) je hrana G ; nikdy ale ne oboje.

Jinými slovy, zapomeneme-li na orientaci hran v grafu G , dostaneme úplný graf.

6.6 Vztah hamiltonovských cyklů a silné souvislosti

Je dán turnaj G s $n \geq 3$ vrcholy. Pak v G existuje hamiltonovský cyklus právě tehdy, když je G silně souvislý.

DŮKAZ.

- „ \Rightarrow “: triviální.
- „ \Leftarrow “: Nechť $G = (V, E)$ je turnaj, který je silně souvislý.

7 Toky v sítích

7.1 Síť

Síť je prostý orientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Máme zdroj s (source) a spotřebič t (target). Zapisujeme síť (G, l, c, s, t) .

7.2 Tok v síti

Tok v síti je $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$, že pro každý $v \neq s, t$ platí

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \quad (\text{Kirchhoffův zákon}) \quad (7.1)$$

7.3 Omezení toku

Mějme $l, c : E \rightarrow \mathbb{Z}$, $l(e) \leq c(e)$; kde l je dolní omezení toku a c horní omezení (kapacita).

7.4 Různé vlastnosti sítí a toků

Tok f je přípustný pokud pro každou hranu $e \in E$ je $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$. Přípustný tok obecně nemusí existovat; stačí například aby do některého vrcholu mohlo celkově přitéci méně, než z něho musí odtéci. Jestliže ale je **dolní omezení** v každé hraně nulové, tak přípustný tok vždy existuje.

Síť je *transparentní* pokud $f(e) = 0 \forall e \in E$.

Velikost přípustného toku od s do t je

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e). \quad (7.2)$$

Přípustný tok f se nazývá *maximální tok*, jestliže má největší velikost mezi všemi přípustnými toky.

7.5 Řez oddělující zdroj od spotřebiče

Je dána síť $G = (V, E)$ se zdrojem z , spotřebičem s , a **omezeními** l, c . Množinu vrcholů $A \subseteq V$ takovou, že $z \in A$, $s \notin A$ nazýváme *množina oddělující zdroj od spotřebiče*. Dále definujme $W^+(A)$ jako množinu hran vycházejících z množiny A , a $W^-(A)$ jako množinu hran vcházejících do množiny A . Přesněji

$$W^+(A) = \{e \mid P_V(e) \in A, K_V(e) \notin A\}, \quad (7.3)$$

$$W^-(A) = \{e \mid P_V(e) \notin A, K_V(e) \in A\}. \quad (7.4)$$

Množina

$$W(A) = W^+(A) \cup W^-(A) \quad (7.5)$$

se nazývá *řez určený množinou A* .

Maximální řez je řez $W(A)$ s nejmenší možnou hodnotou $\text{cap}(W(A))$.

7.6 Tvrzení o tocích a řezech

Pro každý řez $W(A)$ a každý tok f platí

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e). \quad (7.6)$$

DŮKAZ.

7.7 Tvrzení o přípustných tocích a řezech

Pro každý přípustný tok f a řez $W(A)$ platí $\text{vel}(f) \leq \text{cap}(W(A))$.

DŮKAZ.

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) = \text{cap}(W(A)) \quad (7.7)$$

Navíc každý přípustný tok splňuje $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$. ■

7.8 Zlepšující cesta vůči toku f

Je dán přípustný tok f . Neorientovaná cesta v grafu G od zdroje z ke spotřebiči s se nazývá *zlepšující cesta vůči f* , jestliže

$$f(e) < c(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vpřed}, \quad (7.8)$$

$$l(e) < f(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vzad}. \quad (7.9)$$

Kapacita zlepšující cesty je

$$\text{cap}(C) = \min (\{c(e) - f(e) \mid e \in C \text{ vpřed}\} \cup \{f(e) - c(e) \mid e \in C \text{ vzad}\}) \quad (7.10)$$

7.9 Změna toku f

Změna toku f podél zlepšující cesty C s kapacitou d je tok f' definovaný

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vpřed} \\ f(e) - d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vzad} \\ f(e) & \text{pro hrany } e \text{ neležící na cestě} \end{cases} \quad (7.11)$$

7.10 Změna toku podle zlepšující cesty je přípustný tok

Je-li C zlepšující cesta kapacity d vzhledem k přípustnému toku f , pak zlepšující tok f' je také přípustným tokem a $\text{vel}(f') = \text{vel}(f) + d$.

DŮKAZ. f' je tok, $v \in C$, $v \neq s, t$.

7.11 Značkovací procedura

Vstup: přípustný tok f .

Výstup: zlepšující cesta C vůči f , nebo odpověď „ne“ a množina označovaných vrcholů A .

- 1) *Incializace.* Označujeme zdroj s , ostatní vrcholy jsou bez značky.
- 2) *Test nalezení zlepšující cesty.* Jestliže byl označován t , zpětným postupem zkonstruujeme zlepšující cestu, kterou vrátíme.
- 3) *Značkování dopředu.* Jestliže existuje hrana e taková, že $P_V(e)$ má značku, $K_V(e)$ nemá značku a $f(e) < c(e)$, označujeme $K_V(e)$; pro $K_V(e)$ si zapatujeme e . **goto 2**)
- 4) *Značkování dozadu.* Jestliže existuje hrana e taokvá, že $K_V(e)$ má značku, $P_V(e)$ nemá značku a $l(e) < f(e)$, označujeme $P_V(e)$; pro $P_V(e)$ so zapatujeme e . **goto 2**)
- 5) *Neexistuje zlepšující cesta.* Nemůžeme-li již značkovat a nebyl označován t , vrátíme odpověď „ne“ a množinu označovaných vrcholů A .

7.12 Tvrzení o výsledku značkovací procedury

Jestliže značkovací procedura skončila odpovědí „ne“ a vrátila množinu označovaných vrcholů A , pak

$$\text{vel}(f) = \text{cap}(W(A)). \quad (7.12)$$

To znamená, že tok f má maximální velikost a řez určený množinou A má nejmenší kapacitu.

DŮKAZ. Mějme množinu označovaných vrcholů A . $s \in A$ a $t \notin A$.

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \quad (7.13)$$

$$\vdots \quad (7.14)$$

$$\sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) = \text{cap}(W(A)) \quad (7.15)$$

7.13 Věta o přípustném toku a maximálním přípustném toku

Ford-Fulkersonova věta. Jestliže v síti $G = (V, E)$, s omezeními l, c , zdrojem s a spotřebičem t existuje přípustný tok, pak existuje maximální přípustný tok f_{\max} a jeho vleikost je rovna kapacitě minimálního řezu.

7.14 Přírůstková síť vzhledem k toku

Mějme přípustný tok f v $G = (V, E)$, s omezeními l, c , zdrojem s a spotřebičem t . Pak síť $G = (V, E_f)$ je přírůstková síť toku f , se zdrojem s , spotřebičem t , nulovým dolním omezením a kapacitou c_f , kde

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = c(e) - f(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } f(e) < c(e). \quad (7.16)$$

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = f(e) - l(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } l(e) < f(e). \quad (7.17)$$

Každá zlepšující cesta od zdroje s ke spotřebiči t je zlepšující cestou v G_f s tím, že všechny hrany cesty jsou hranami vpřed; tj. jedná se o orientovanou cestu v G_f .

7.15 Vrstvená síť

Mějme přírůstkovou síť G_f . Pak její podgraf, který obsahuje všechny hrany některé nejkratší (na počet hran v cestě) zlepšující cesty od s k t se nazývá vrstvená síť.

Sestrojit k dané přírůstkové síti vrstvenou síť je možné v čase úměrném počtu hran přírůstkového grafu G_f , a tudíž i původního grafu G .

Uvědomme si, že G_f má nejvýše dvakrát tolik hran jako G .

7.16 Cirkulace

Je dán orientovaný graf $G = (V, E)$ a omezení l, c . Zobrazení $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$ se nazývá *cirkulace*, jestliže Kirchhoffův zákon platí pro všechny vrcholy $v \in V$.

Cirkulace se nazývá *přípustná*, jestliže navíc pro každou hranu $e \in E$ platí $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

7.17 Kapacita řezu

Mějme síť $G = (V, E)$ s ohodnoceními l, c . Uvažujme neprázdnou množinu vrcholů $A \subset V$ takovou, že $A \neq V$. Pak kapacita řezu $W(A)$ je definovaná jako

$$\text{cap}(W(A)) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e). \quad (7.18)$$

7.18 Souvislost přípustné cirkulace a řezu

V síti $G = (V, E)$ s ohodnoceními l, c existuje *přípustná cirkulace* právě tehdy, když neexistuje *řez záporné kapacity*.

*Přípustná cirkulace tedy existuje právě tehdy, když každá množina vrcholů A má tu vlastnost, že *tok*, který do ní povinně musí vtéci kvůli dolnímu omezení l na hranách z $W^-(A)$, může z této množiny také odtéci díky hornímu omezení c na hranách z $W^+(A)$.*

DŮKAZ. Existuje-li přípustná cirkulace f , pak pro každý řez platí

$$C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) \geq \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) = 0. \quad (7.19)$$

Jestliže naopak přípustná cirkulace neexistuje, pak existence řezu se zápornou kapacitou vyplne z algoritmu pro hledání přípustné cirkulace.

8 Párování

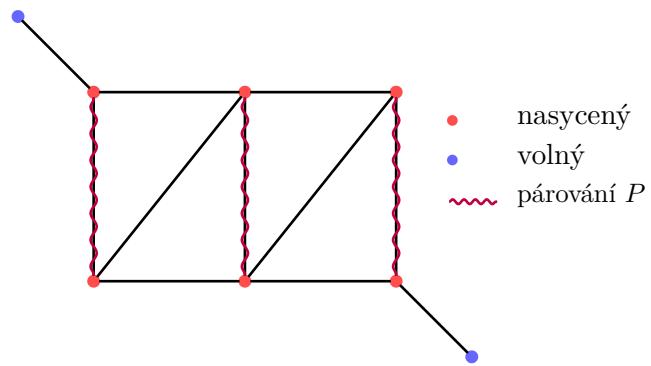
8.1 Definice

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. Podmnožina hran $P \subseteq E$ se nazývá *párování*, jestliže v P neexistují 2 různé hrany se společným krajním vrcholem (takže vrchol má stupeň max. 1).

8.2 Vrchol nasycený a volný v párování

Mějme *párování* P . Vrchol v grafu nazveme *nasycený* v P , pokud existuje hrana $e \in P$ incidentní s v .

V opačném případě říkáme, že vrchol v je *volný* v P .



8.3 Perfektní párování

Párování P v grafu G nazveme *perfektní párování*, jestliže každý vrchol grafu je *nasycen* v P . To znamená, že P má $\frac{n}{2}$ hran, kde n je počet vrcholů grafu G .

8.4 Maximální párování

Párování P v grafu G nazveme *maximální párování*, jestliže je nejpočetnější mezi všemi párováními v grafu G .

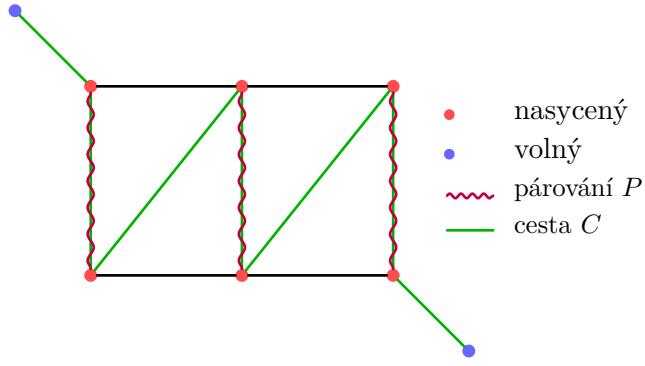
Perfektní párování je jistě maximální. Naopak to neplatí. Existují grafy, které perfektní párování nemají — stačí uvažovat grafy s lichým počtem vrcholů. Ovšem ani grafy se sudým počtem vrcholů nemusí perfektní párování obsahovat.

V každém grafu existuje maximální párování.

8.5 Střídavá cesta vůči párování P

Je dáno *párování* P v grafu G . *Cesta* $C = e_1, e_2, \dots, e_k$ v grafu G se nazývá *střídavá cesta vůči P* , jestliže platí následující dvě podmínky:

- 1) hrany z cesty C střídavě leží a neleží v párování P ,
- 2) jestliže krajní vrchol v cesty C je *nasycen* v P , pak C obsahuje i hranu párování P , která vrchol v nasycuje.



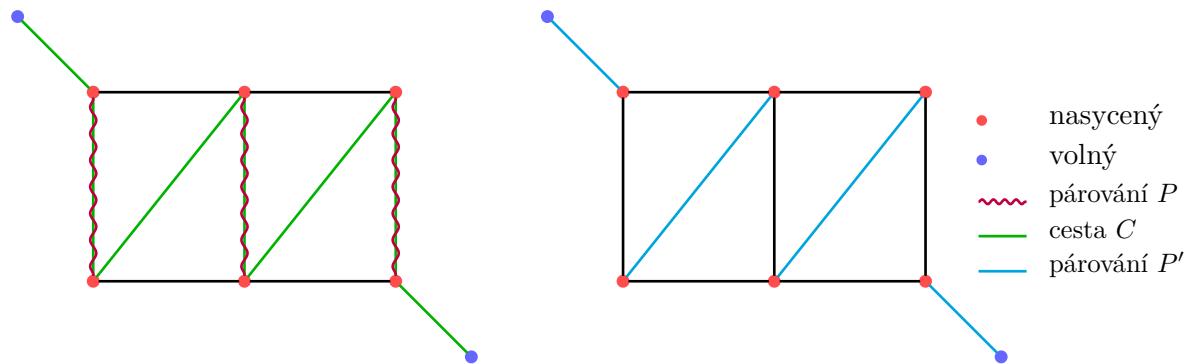
8.6 Zlepšující cesta vůči párování P

Střídavá cesta mezi volnými vrcholy se nazývá *zlepšující cesta vůči P* .

8.7 Tvrzení o střídavé cestě

Jestliže C je **střídavá cesta** vůči **párování** P , pak množina hran $P' = C \oplus P$ je také párování v G . *Připomeňme, že symetrická differenční $A \oplus B$ dvou množin A, B je množina*

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (8.1)$$



A pokud je navíc C **zlepšující cesta**, tj. cesta mezi volnými vrcholy v P , pak $|P'| = |P| + 1$.

8.8 Věta o vrcholově disjunktních zlepšujících cestách

Berge. Je dáno **párování** P v grafu G . Označme P_{\max} **maximální párování** v G (o kterém víme, že existuje). Jestliže

$$|P_{\max}| = |P| + k, \quad (8.2)$$

pak v G existuje k vrcholově disjunktních **zlepšujících cest** vůči P .

Přitom alespoň jedna z těchto **cest** je kratší než $\frac{n}{k}$, kde n je počet vrcholů.

DŮKAZ. Utvořme symetrickou differenci hran obou párování, tj. $H = P \oplus P_{\max} = (P \setminus P_{\max}) \cup (P_{\max} \setminus P)$. Uvažujme graf, který obsahuje všechny vrcholy grafu G a hrany H . V tomto grafu má každý vrchol stupeň nejvýše 2. Mějme libovolný vrchol v . Pak nastane některé z následujících možností:

- (a) není **nasycen** ani v P ani v P_{\max} , pak $d_H(v) = 0$;
- (b) je **nasycen** buď v P , nebo v P_{\max} , pak $d_H(v) = 1$;
- (c) je **nasycen** v obou párováních, pak $d_n(v) = 0$, jestliže stejnou hranou, nebo $d_H(v) = 2$.

Komponenty souvislosti grafu (V, H) jsou buď isolované vrcholy (stupeň 0), nebo **kružnice**, nebo cesty. Jak v křuznicích, tak v cestách se střídají hrany z P a P_{\max} . Proto jsou kružnice sudé délky, cesty pak sudé či liché délky.

Mezi komponentami souvislosti nemůže existovat **cesta** liché délky, která by měla více hran z P než z P_{\max} (byla by to totiž **zlepšující cesta** vůči P_{\max} a ta neexistuje). Každá cesta liché délky je proto zlepšující cestou vzhledem k párování P . Víme, že každá kružnice i každá cesta sudé délky má stejný počet hran z P a P_{\max} . Ukážeme-li tedy, že H obsahuje o k více hran z P_{\max} než z P , budeme mít dokázáno, že existuje k komponent grafu H , které jsou zlepšujícími cestami vůči P .

Máme

$$H = (P_{\max} \setminus P) \cup (P \setminus P_{\max}). \quad (8.3)$$

Platí

$$|P_{\max} \setminus P| = |P_{\max}| - |P \cap P_{\max}| = |P| + k - |P \cap P_{\max}| = |P \setminus P_{\max}| + k. \quad (8.4)$$

■

8.9 Souvislost perfektního párování a počtu komponent

Tutte. Je dán prostý graf $G = (V, E)$ bez smyček s alespoň třemi vrcholy. V grafu G existuje **perfektní párování** právě tehdy, když pro každou podmnožinu $S \subseteq V$ platí

$$g(G \setminus S) \leq |S|, \quad (8.5)$$

kde $g(G \setminus S)$ je počet komponent souvislosti grafu $G \setminus S$, které mají lichý počet vrcholů.

DŮKAZ.

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že v grafu G existuje perfektní párování (tj. párování **nasycující** všechny vrcholy grafu G). Vezměme libovolnou $S \subseteq V$. Protože v každé liché komponentě souvislosti grafu $G \setminus S$ je alespoň jeden vrchol, který není spárován uvnitř komponenty, musí být v perfektním párování spárován s nějakým vrcholem S . Proto nemůže být $|S|$ menší než počet lichých komponent.

„ \Leftarrow “: Předpokládejme, že graf G splňuje $g(G \setminus S) \leq |S|$ pro každou $S \subseteq V$.

Nejprve si uvědomme, že pro $S = \emptyset$ podmínka zaručuje, že graf G má sudý počet vrcholů.

Dále si uvědomme, že splňuje-li G podmínu (8.5) a přidáme-li k němu hranu e mezi stávajícimi vrcholy, pak graf $G + e$ také splňuje podmínu (8.5). Ano, graf $(G + e) \setminus S$ má buď stejně lichých komponent jako $G \setminus S$, nebo o dvě méně.

Předpokládejme, že by existoval graf G splňující (8.5), který nemá perfektní párování, tak vybereme jako G ten z nich, který nemá perfektní párování, ale přidáním libovolné hrany už **perfektní párování** mít bude.

Označme T množinu všech vrcholů stupně $n - 1$, kde $n = |V|$. Platí $T \subseteq V$ a proto pro ni musí platit podmína (8.5). Nejprve dokážeme, že každá komponenta souvislosti grafu $G \setminus T$ je úplný graf.

Kdyby existovala komponenta souvislosti C grafu $G \setminus T$, která není úplným grafem, pak by v C existovaly vrcholy x, y, z takové, že $\{x, y\}, \{y, z\} \in E$ a $\{x, z\} \notin E$. Navíc vrchol z neleží v T , proto existuje vrchol $w \notin T$ takový, že $\{z, w\} \notin E$.

Označme P_1 perfektní párování v grafu $G + \{x, y\}$ a P_2 perfektní párování v grafu $G + \{z, w\}$. Dále označme H symetrickou differenci párování $P_1 \oplus P_2$. Platí $\{x, y\}, \{z, w\} \in H$. Rozebereme nyní dva případy:

- (a) Hrany $\{x, y\}, \{z, w\}$ leží v různých komponentách souvislosti A, B v H , $\{x, y\} \in A, \{z, w\} \in B$. Pak párování P , které obsahuje hrany P_2 komponenty A jinak hrany P_1 , je perfektní párování v grafu G . Což je spor s faktom, že G nemá perfektní párování.

- (b) Hrany $\{x, y\}, \{z, w\}$ leží ve stejné komponentě souvislosti A grafu H . Komponenta A je **kružnice sudé délky**, která střídavě obsahuje hrany z P_1 a P_2 . Označme K_1 tu část A , která začíná ve vrcholu z , pokračuje z P_1 a po hraně z P_2 poprvé navštíví jeden z vrcholů x, y . **BÚNO** předpokládejme, že je to vrchol y . Dále označme K_2 zbylou část kružnice A , ze které jsme odstranili hranu $\{x, y\}$. Definujme P takto: P obsahuje

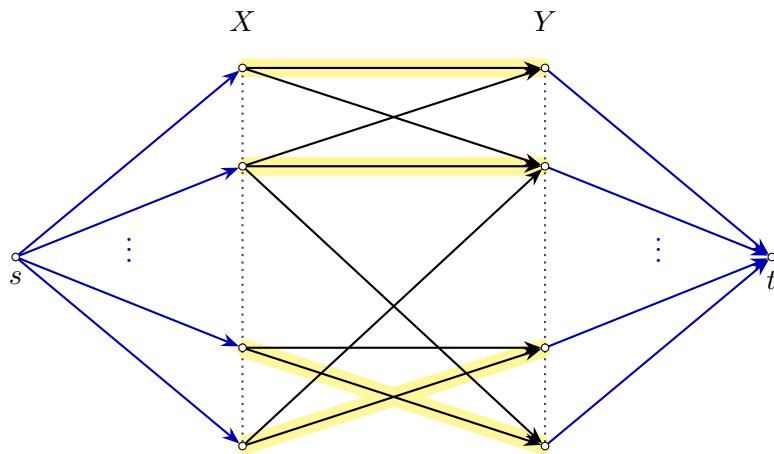
- $K_1 \cap P_2$,
- $K_2 \cap P_1$,
- $\{x, z\}$.

Tím jsme získali perfektní párování v grafu G ; opět spor.

Víme tedy, že všechny komponenty souvislosti grafu $G \setminus T$ jsou úplné grafy. Definujme **párování** P takto: *V každé komponentě souvislosti grafu $G \setminus T$ o sudém počtu vrcholů vybereme libovolné perfektní párování; v komponentě souvislosti $G \setminus T$ o lichém počtu vrcholů spárujeme libovolně všechny vrcholy až na jeden, který spárujeme s některým vrcholem T .* Protože lichých komponent $G \setminus T$ je nejvyšší tolik jako $|T|$, můžeme to udělat. Navíc je počet vrcholů sudý, takže nám z množiny T zbyde sudý počet nespárovaných vrcholů, jedná se ovšem o vrcholy, které jsou spojeny s každým vrcholem grafu, můžeme proto zbylé vrcholy mezi sebou libovolně spárovat. Zase jsme ukázali, že v G existuje perfektní párování. ■

8.10 Párování v bipartitních grafech

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y . K němu je možné vytvořit síť takovou, že každému párování P v grafu G odpovídá přípustný tok f , a naopak každému přípustnému toku f v síti odpovídá párování P v G ; a to tak, že $\text{vel}(f) = |P|$.



Vytvořme síť G' s omezeními l, c , zdrojem s , spotřebičem t a hranami

$$E' : (s, x) \forall x \in X \quad (8.6)$$

$$(y, t) \forall y \in Y. \quad (8.7)$$

A dále zorientujme: $\forall \{x, y\} \in E(G), x \in X, y \in Y \quad E'$ obsahuje (x, y) . Pak omezení takové síťe $l(e) = 0, c(e) = 1, \forall e \in E'$.

Pro párování uděláme přípustný tok f_p , že

$$\{x, y\} \in P : f_p((x, y)) = 1. \quad (8.8)$$

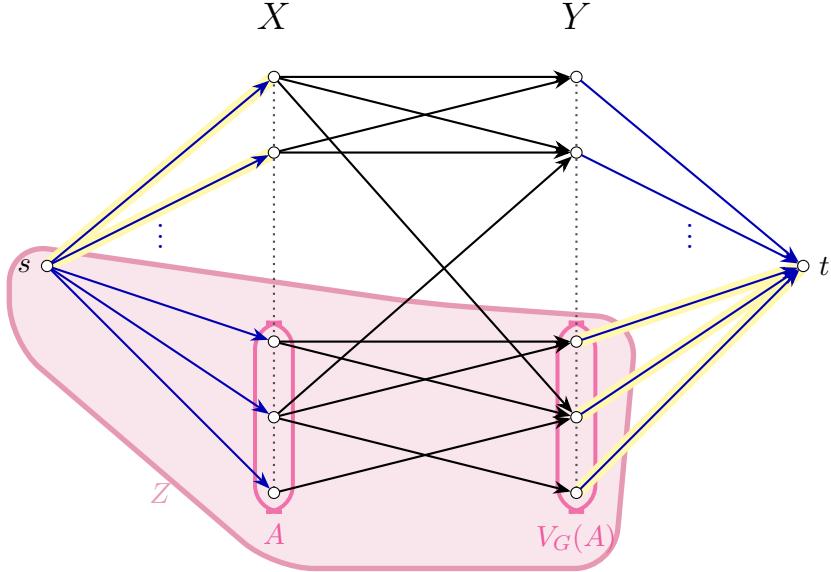
Takže $|P| = \text{vel}(f_p)$; „projde tolik jedniček, kolik je hran párování“.

No a $\{x, y\} \in P_f$ právě tehdy, když $f((x, y)) = 1$. Tedy $\text{vel}(f) = |P_f|$.

8.11 Věta o maximálním párování

König. Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y . Označme P_{\max} maximální párování v G . Pak platí

$$|P_{\max}| = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|). \quad (8.9)$$



$$Z = \{s\} \cup A \cup V_G(A), t \notin Z.$$

$$W^+(Z) = \{(s, x) \mid x \notin A\} \cup \{(y, t) \mid y \in V_G(A)\} = |\{(s, x) \mid x \notin A\}| + |\{(y, t) \mid y \in V_G(A)\}| \quad (8.10)$$

$$\text{cap}(W(Z)) = \sum_{e \in W^+(Z)} c(e) \quad (8.11)$$

$$A \text{ určuje řez } W(Z) \text{ s } \text{cap}(W(Z)) = |X - A| + |V_G(A)|.$$

Minimální řez má tvar $Z_0 = \{s\} \cup A_0 \cup V_G(A_0)$ pro vhodné $A_0 \subseteq X$, kde Z_0 je množina označkovaných vrcholů a $A_0 = Z_0 \cap X$.

Musíme ukázat, že $Z_0 \cap Y = V_G(A_0)$.

$$Z_0 \cup Y \subseteq V_G(A_0) \quad (8.12)$$

$$Z_0 \cup Y \supseteq V_G(A_0) \quad (8.13)$$

8.12 Věta o nasycujícím párování

Hall. Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y . Pak v G existuje párování nasycující stranu X právě tehdy, když pro každou množinu $A \subseteq X$ platí

$$|A| \leq |V_G(A)| = \{y \mid y \in Y \wedge \{x, y\} \in E\}. \quad (8.14)$$

DŮKAZ. Jestliže v grafu G existuje párování nasycující stranu X , pak G podmínu věty splňuje (párování každému vrcholu z množiny A „přiřazuje“ vrchol z $V_G(A)$, a tudíž vrcholů v $V_G(A)$ musí být alespoň tolik, kolik je vrcholů v A .)

„ \Leftarrow “: Víme, že $|P_{\max}| = |X \setminus A_0| + |V_G(A)|$ pro nějakou $A_0 \subseteq X$ (z **Königovy věty**). Sporem. Kdyby P_{\max} nenasycovalo X . Tak $|P_{\max}| < |X|$. Takže

$$|X \setminus A_0| + |V_G(A)| < |X| \quad (8.15)$$

$$|X| - |A_0| + |V_G(A)| < |X| \quad (8.16)$$

$$|V_G(A)| < |A_0| \quad (8.17)$$

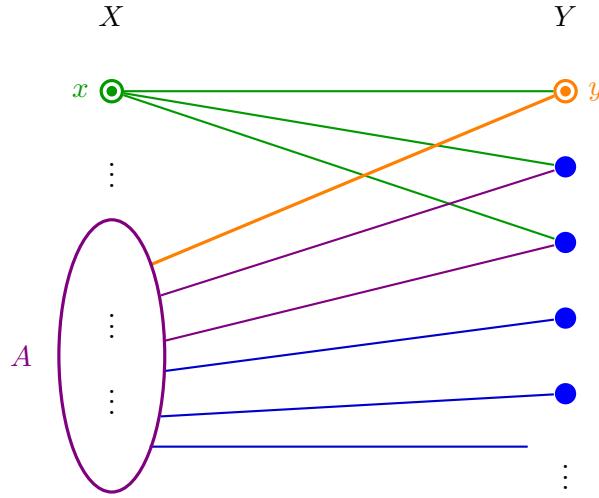
Což je spor. ■

8.13 Tvrzení o vztahu stupňů vrcholů a nasycujícího párování

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y . Jestliže pro každý vrchol $x \in X$ a každý vrchol $y \in Y$ platí

$$d(x) \geq d(y), \quad (8.18)$$

pak v G existuje párování nasycující stranu X .



DŮKAZ. Označme $d_X = \min \{d(x) \mid x \in X\}$ a $d_Y = \max \{d(y) \mid y \in Y\}$. Z předpokladu víme

$$d_X \geq d_Y. \quad (8.19)$$

Použijme **Hallovu větu**. Vezměme libovolnou množinu $A \subseteq X$.

$$W(A) \subseteq W(V_G(A)) \quad (8.20)$$

$$\text{a } |W(A)| \geq d_X|A|, |W(V_G(A))| \leq d_Y|V_G(A)| \quad (8.21)$$

Takže

$$d_X|A| \leq |W(A)| \leq |W(V_G(A))| \leq d_Y|V_G(A)| \quad (8.22)$$

a současně $d_X \geq d_Y$.

Může být $|A| > |V_G(A)|$? Kdyby ano, tak

$$d_X|A| > d_Y|V_G(A)|. \quad (8.23)$$

Což neplatí, takže

$$|A| \leq |V_G(A)|. \quad (8.24)$$

A tedy **Hallová věta** říká, že existuje párování nasycující X . ■

8.14 Tvrzení o existenci nasycujícího párování všech vrcholů

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y . Pak existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy nejvyššího stupně.

DŮSLEDEK. Je dán bipartitní graf $G = (V, E)$ se stranami X a Y . Označme $\Delta(G)$ nejvyšší stupeň, který některý vrchol grafu má. Pak množinu hran E je možno rozdělit na $\Delta(G)$ hranově disjunktních párování.

DŮKAZ. Vytořme G' , že k němu přidáme hrany a vrchol tak, aby

$$\Delta(G) = d_{G'}(x) = d_{G'}(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (8.25)$$

V novém grafu G' , protože

$$d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \quad (8.26)$$

existuje párování nasycující X .

Vybrali jsme maximální párování P_{\max} . Odstraníme všechny hrany neležící v G .

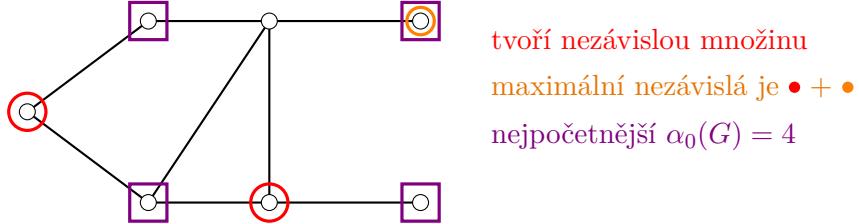
Musí zůstat nasyceny ty vrcholy, které měly největší stupeň. Tím dostaneme párování P nasycující vrcholy nejvyššího stupně. ■

9 Pokrývání

9.1 Nezávislé množiny, nezávislost

Mějme graf $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Množinu vrcholů $A \subseteq V$ nazveme *nezávislou množinou*, jestliže v grafu neexistuje hrana s oběma krajními vrcholy v A .

Nezávislost grafu, značíme ji $\alpha_0(G)$, je rovna počtu vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině v G .

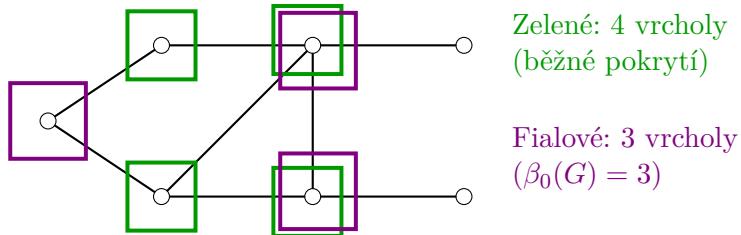


9.2 Vrcholové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Množina vrcholů $K \subseteq V$ se nazývá *vrcholové pokrytí*, jestliže každá hrana $e \in E$ má alespoň jeden krajní vrchol v K .

Počet vrcholů v nejméně početném vrcholovém pokrytí v grafu G značíme $\beta_0(G)$.

Jestliže K je vrcholové pokrytí a $K \subseteq K'$, tak K' je také vrcholové pokrytí.



9.3 Věta o vztahu vrcholového pokrytí a nezávislosti

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy. Platí

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n. \quad (9.1)$$

DŮKAZ. Máme $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. $|V| = n$.

„ \geq “: Uvažujme N nezávislou, $|N| = \alpha_0(G)$. Pak $V \setminus N$ je *vrcholové pokrytí*. Což znamená

$$|V \setminus N| = n - \alpha_0(G) \geq \beta_0(G). \quad (9.2)$$

Takže

$$n \geq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.3)$$

„ \leq “: Uvažujme vrcholové pokrytí K s $|K| = \beta_0(K)$. Pak $V \setminus K$ je *nezávislá množina*. A

$$|V \setminus K| = n - \beta_0(G) \leq \alpha_0(G). \quad (9.4)$$

Tudíž

$$n \leq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.5)$$

Dostáváme tedy

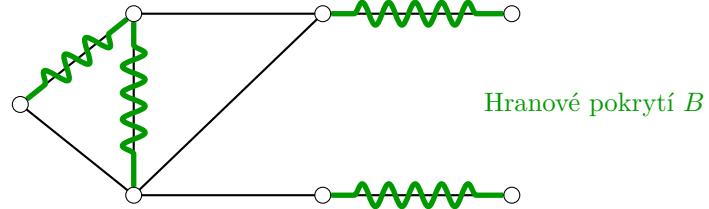
$$n = \alpha_0(G) + \beta_0(G). \quad (9.6)$$

■

9.4 Hranové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a izolovaných vrcholů. Množina hran $B \subseteq E$ se nazývá *hranové pokrytí*, jestliže každý vrchol je krajním vrcholem alespoň jedné hrany z B .

Definujme $\beta_1(G)$ jako počet hran v nejméně početném hranovém pokrytí.



9.5 Věta o vztahu hranového pokrytí a maximálního párování

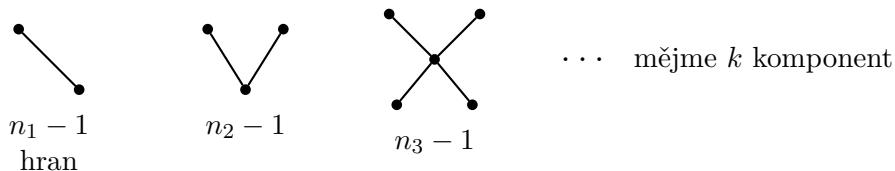
Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ bez izolovaných vrcholů s n vrcholy. Pak platí

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n, \quad (9.7)$$

kde α_1 je počet hran v maximálním párování grafu G (tj. $\alpha_1(G) = P_{\max}$).

DŮKAZ.

„≤“: Vezmeme nejméně početné *hranové pokrytí* $B \subseteq E$. Jak vypadají komponenty souvislosti (U, B) ?



Takže

$$\beta_1 = |B| = \underbrace{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}_n - k = n - k. \quad (9.8)$$

Mějme párování P , kde z každé komponenty souvislosti vezmeme jednu libovolnou hranu, takže $|P| = k$. Tedy máme $b_1(G) = n - k$ a $|P| = k \leq \alpha_1(G)$.

$$n = \beta_1(G) + k \leq \beta_1(G) + \alpha_1(G) \quad (9.9)$$

$$n \leq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \quad (9.10)$$

„≥“: Mějme P_{\max} , párování s $|P_{\max}| = \alpha_1(G)$.

$2\alpha_1(G)$ vrcholů je pokryto P_{\max} . Nepokryto je $n - 2\alpha_1(G)$ vrcholů. $B = P_{\max} \cup \{e \mid e \text{ je přidaná}\}$.

$$|B| = \alpha_1(G) + n - 2\alpha_1(G) = n - \alpha_1(G) \geq \beta_1(G) \quad (9.11)$$

$$n \geq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \quad (9.12)$$

Dostáváme tedy

$$n = \alpha_1(G) + \beta_1(G). \quad (9.13)$$

■

10 Barvení

10.1 Hranové barvení

Je dán graf bez smyček $G = (V, E, \varepsilon)$ a konečná množina C tzv. barev. *Hranové barvení* G je přiřazení $c : E \rightarrow C$, že žádné dvě hrany se společným krajním vrcholem nemají stejnou barvu.

Lze také říci, že se snažíme graf pokrýt vzájemně disjunktními párováními.

10.2 Hranová barevnost

Hranová barevnost, též *chromatický index*, grafu G je nejmenší počet barev, kterými lze **hranově barvit** graf G , značíme ji $\chi'(G)$.

Nutně platí, že

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \quad (10.1)$$

10.3 Věta o souvislosti hranové barevnosti a maximálním stupni grafu

Vizing. Je dán graf bez smyček $G = (V, E, \varepsilon)$. Pak

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (10.2)$$

Bez důkazu.

10.4 Vrcholové obarevní

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a konečná množina B (nazývaná též množina barev). *Obarvení vrcholů* grafu (též *vrcholové obarvení* grafu) je $b : V \rightarrow B$, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu.

G nazveme k -barevný, jestliže se dá obarvit k barvami.

10.5 Barevnost grafu

Barevnost grafu G , též *chromatické číslo* grafu G , je nejmenší k takové, že G je k -barevný, značíme ji $\chi(G)$.

10.6 Tvrzení o dvoubarevném grafu

Graf G je dvoubarevný právě tehdy, když G neobsahuje kružnice liché délky, tedy G je bipartitní.

DŮKAZ. At $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, tak, že:

$$\begin{aligned} v \in A &\iff \text{má barvu 1} \\ v \in B &\iff \text{má barvu 2} \end{aligned}$$

Stačí ukázat, že nemá-li G kružnice liché délky, dá se obarvit 2 barvami.

Dokažme algoritmem barvení. Vyberme si počáteční vrchol v . Následně aplikujme algoritmus BFS (breath-first-search), kterým graf rozdělíme do několika úrovní. Každé úrovni přiřadíme barvu tak, že

$$b(v) = \begin{cases} 1 & \iff v \in H_{2i}, \\ 2 & \iff v \in H_{2i+1}, \text{ pro } i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10.3)$$

Kdyby b nebylo obarvení; existuje $\{x, y\} \in E$, kde $x \in H_i$ a $y \in H_j$ tak, že $i + j = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

V našem grafu existuje cesta P_i z v do x o i hranách, a zároveň existuje cesta P_j z v do y o j hranách.

Když vezmeme P_i , $\{x, y\}$, P_j (pozpátku), jedná se o **uzavřený sled** o $i + j + 1 = 2k + 1$ hranách.

Dále máme kružnici o $i + j + 1 - 2\ell$ hranách, kde ℓ je počet hran ve společném úseku P_i, P_j .

TODO: AŽ SE SEM DOPLNÍ OBRÁZEK, BUDE TO HNED JASNÝ. ■

10.7 Tvrzení o vztahu barevnosti grafu a nezávislosti grafu

Pro každý neorientovaný graf G bez smyček o n vrcholech a m hranách platí

- (a) $\alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1$;
- (b) $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n$;
- (c) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$;

kde $\alpha_0(G)$ je počet $|N|$ tak, že N je nejpočetnější **nezávislá**.

DŮKAZ.

(a) Até b je optimální **obarvení**. To rozděluje G na nezávislé množiny dle barev. A všech vrcholů v množině je nejvíše $\alpha_0(G)$, protože to je ta nejpočetnější. Sjednocením těchto množin pak dostaneme $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n$. ■

(b) Até

$$v \in N \dots b(n) = 1, \quad (10.4)$$

$$\left. \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-\alpha_0(G)} \end{array} \right\} b(x_i) = i + 1. \quad (10.5)$$

Má tedy $1 + n - \alpha_0(G)$ barev. Upravme

$$1 + n - \alpha_0(G) \geq \chi(G) \quad (10.6)$$

$$\alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1 \quad (10.7)$$

■

(c) Até b je optimální obarvení. Mějme množiny A_1, A_2, \dots, A_k , kde $k = \chi(G)$. Mezi každými 2 množinami je alepoň jedna hrana, tj.

$$m \geq \frac{k(k-1)}{2}. \quad (10.8)$$

Upravme:

$$2m \geq k^2 - k \quad (10.9)$$

$$0 \geq 2k^2 - k - 2m \quad (10.10)$$

Určeme kvadratické kořeny:

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8m}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2m} \quad (10.11)$$

A po analýze funkce víme, že

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}. \quad (10.12)$$

■

10.8 Tvrzení o největším stupni vrcholu a barevnosti grafu

Označme Δ největší stupeň vrcholu grafu $G \in \mathcal{S}$. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta + 1. \quad (10.13)$$

DŮKAZ. Algoritmem sekvenčního barvení.

Označme $B = \{1, 2, \dots, \Delta, \Delta + 1\}$. Iterujme:

- 1) Očísloveme vrcholy grafu G , tj. v_1, v_2, \dots, v_n .
- 2) Barvíme vrcholy v tomto pořadí, že $b(v_i) = j \iff j$ je nejmenší barva, kterou nemá žádný z jižobarvených sousedů.

■

10.9 Příklad použití algoritmu sekvenčního barvení

10.10 Věta o souvislosti největšího stupně vrcholu a barevnosti grafu

Brooks. Nechť G je prostý souvislý graf bez smyček, který není ani úplný ani kružnice liché délky. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta(G). \quad (10.14)$$

DŮKAZ.