

Domácí úkol 6

Jakub Adamec
XP01TGR

27. ledna 2026

Příklad 6.1. Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y a v něm maximální párování P_{\max} . Pro každou hranu $e \in P_{\max}$ vybereme jeden její krajní vrchol do množiny A takto:

Pro hranu $e = \{x, y\} \in P_{\max}$ ($x \in X, y \in Y$) do A vybereme vrchol y , jestliže existuje cesta $a_1, e_1, a_2, e_2, \dots, e_{2k+1}, y$, kde

- $a_1 \in X$ je volný v párování P_{\max} ,
- pro $i > 0$ je $e_{2i-1} \notin P_{\max}$, $i > 0$, $e_{2i} \in P_{\max}$.

Jestliže taková cesta neexistuje, do A vybereme vrchol x .

Dokažte nebo vyvratě: Množina A (zkonstruovaná výše) je vrcholovým pokrytím grafu G .

Řešení 6.1. Definujme si dosažitelné vrcholy jako takové, ke kterým existuje střídavá cesta (přesně ta ze zadání) z nějakého volného vrcholu X .

Mějme libovolnou hranu $e = \{u, v\}$, kde $u \in X$ a $v \in Y$. Musíme dokázat, že e je pokryta, tedy buď $u \in A$, nebo $v \in A$. Mohou nastat dva případy:

- (a) Hrana e leží v párování P_{\max} . Konstrukce množiny A vybírá z každé hrany P_{\max} právě jeden vrchol. Takže hrana je určitě pokryta.
- (b) Hrana e neleží v párování P_{\max} . Sporem. Předpokládejme, že hrana $\{u, v\}$ není pokryta. To by znamenalo, že $u \notin A$ a zároveň $v \notin A$. Takže:
 - Pokud je u volný, pak je triviálně dosažitelný (je počátkem střídavé cesty délky 0). Zároveň platí $u \notin A$, protože A obsahuje pouze vrcholy z párování.
 - Pokud je u spárovaný s nějakým $y' \in Y$ (hrana $\{u, y'\} \in P_{\max}$), pak z předpokladu $u \notin A$ plyne, že do A musel být vybrán vrchol y' . To podle definice A nastane jen tehdy, je-li y' dosažitelný. Pokud je y' dosažitelný, pak prodloužením cesty přes hranu $\{y', u\}$ je dosažitelný i vrchol u .

V obou případech jsme ukázali, že

$$u \notin A \implies u \text{ je dosažitelný.} \quad (6.1)$$

Využijeme hranu $e = \{u, v\}$, která neleží v párování: Jelikož u je dosažitelný a $\{u, v\} \notin P_{\max}$, můžeme střídavou cestu končící v u prodloužit o hranu $\{u, v\}$ do vrcholu v . Tedy i v je dosažitelný. Kdyby byl v volný, našli bychom střídavou cestu z volného do volného vrcholu (zlepšující cestu), což je spor s maximalitou P_{\max} . Vrchol v je tedy nutně spárovaný s nějakým x' . Protože je v dosažitelný a spárovaný, podmínka konstrukce A říká, že pro hranu $\{x', v\}$ vybereme do A vrchol v .

A to je spor s předpokladem $v \notin A$. Tedy alespoň jeden z vrcholů u, v musí ležet v A .

Množina A je vrcholovým pokrytím. ■

Příklad 6.2. Dokážte, že v každém bipartitním grafu G platí

$$\alpha_1(G) = \beta_0(G). \quad (6.2)$$

Hint: Použijte Königovu větu pro určení počtu hran v maximálním párování v bipartitním grafu.

Řešení 6.2. Označme $\alpha_1(G)$ velikost maximálního párování a $\beta_0(G)$ velikost minimálního vrcholového pokrytí.

Nejprve si uvědomme, že pro libovolný graf platí nerovnost:

$$\alpha_1(G) \leq \beta_0(G). \quad (6.3)$$

Je to proto, že každá hrana z maximálního párování musí být pokryta alespoň jedním vrcholem a tyto hrany jsou disjunktní.

Nyní musíme dokázat opačnou nerovnost, tedy $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$. K tomu využijeme Königovu větu v jejím alternativním tvaru, která říká:

$$\alpha_1(G) = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|). \quad (6.4)$$

Uvažujme libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ a sestrojme množinu vrcholů K takto:

$$K = (X \setminus A) \cup V_G(A). \quad (6.5)$$

Velikost této množiny je $|K| = |X \setminus A| + |V_G(A)|$.

Ověříme, že K je vrcholové pokrytí. Mějme libovolnou hranu $e = \{x, y\}$, kde $x \in X$ a $y \in Y$.

(a) Pokud $x \notin A$, pak $x \in (X \setminus A) \subseteq K$. Hrana je pokryta.

(b) Pokud $x \in A$, pak z definice sousedství $y \in V_G(A) \subseteq K$. Hrana je pokryta.

Množina K je tedy vždy vrcholovým pokrytím.

Protože $\beta_0(G)$ je velikost *minimálního* vrcholového pokrytí, musí pro každé takto sestrojené K platit:

$$|K| \geq \beta_0(G). \quad (6.6)$$

Tato nerovnost platí pro libovolné A , tedy i pro to, které minimalizuje výraz z Königovy věty. Dostáváme:

$$\alpha_1(G) = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|) \geq \beta_0(G). \quad (6.7)$$

Máme tedy $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ a zároveň $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$. Z toho nutně plyne:

$$\alpha_1(G) = \beta_0(G). \quad (6.8)$$

■