Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

8. listopadu 2025

Příklad 3.1. *Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má průměr $\operatorname{diam}(G)$ roven 2 a má $2n - 5$ hran?*

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověřme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\operatorname{diam}(C_5) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_5$ a spojíme je do kružnice C_5. Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5. Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3. Pak pro $i = 1, 2, \ldots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3).

Ověřme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

1) **Počet hran**. Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.

2) **2-souvislost**. Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověřme tedy indukcí: Odeberme u_i; graf G_{n-1}, který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1, který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

   Zkusme odebrat v_1: Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5. Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3. Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3.

   Anebo odeberme v_2, v_4, nebo v_5. BÚNO vyberme v_2. Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3. Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3. Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

   Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

3) **Průměr** $\operatorname{diam}(G) = 2$. Vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

   Jestliže oba vrcholy leží na C_5, tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\operatorname{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i, pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3, tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i, pak:
   - je jeden z vrcholů v_1, respektive v_3, pak jsou sousedé, $d = 1$.
   - je jeden z vrcholů v_2, pak mají společné sousedy v_1 a v_3, $d(v_2, u_i) = 2$.
   - je jeden z vrcholů v_4, pak mají společného souseda v_3, $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5.

   Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. *Dokažte nebo vyvraťe:*
Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako ***indukovaný podgraf*** *úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G, ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y, nejen hranu s krajními vrcholy x a y.)*

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2. Sporem. Ať existuje graf G, který je prostý, souvislý, neorientovaný, $n \geq 4$ a neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$, pro který platí, že pro *každou* dvojici sousedních vrcholů u, v je graf $G \setminus \{u, v\}$ nesouvislý.

Ať (x, y) je libovolná hrana v G. Dle našeho předpokladu je $G \setminus \{x, y\}$ nesouvislý. To znamená, že množinu vrcholů $V \setminus \{x, y\}$ lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní množiny A a B tak, že mezi A a B nevedou žádné hrany. Zaměřme se na situaci, kdy existuje nějaká hrana *uvnitř* A nebo B. Předpokládejme, že v A existuje hrana (a_1, a_2). Dle našeho hlavního předpokladu musí platit, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je také nesouvislý. Graf $G \setminus \{a_1, a_2\}$ ale obsahuje vrcholy x, y, které jsou spojeny hranou, a celou neprázdnou množinu B. Protože původní graf G byl souvislý, každý vrchol $b \in B$ musel být v G spojen s $\{x, y\}$, protože nemohl být spojen s A. Stejně tak každý vrchol $a \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ musí být spojen s $\{x, y\}$. (x, y) je tedy most. To znamená, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je souvislý. Což je spor s hlavním předpokladem, takže pro libovolnou hranu $(x, y) \in E(G)$ musí platit, že $G \setminus \{x, y\}$ je nezávislá množina.

Teď ověřme, že tento důsledek může koexistovat s našimi podmínkami $n \geq 4$ a že G neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$. Protože G je souvislý a $n \geq 4$, musí nutně obsahovat alespoň jeden vrchol x se stupněm $\deg(x) \geq 2$. Vyberme dva různé sousedy x, označme y a z. Mějme hrany (x, y) a (x, z). Co když hrana (y, z) (ne)existuje?

1) Hrana neexistuje. Protože $n \geq 4$, musí existovat alespoň jeden další vrchol $w \neq x, y, z$. Dle prvního důkazu již víme, že $(z, w) \notin E$ a $(y, w) \notin E$. Protože G je souvislý, w musí mít alespoň jednoho souseda. Jeho jediný možný soused je x, tedy $(x, w) \in E$. To ale znamená, že máme indukovaný $K_{1,3}$ graf s centrem x, což je spor s předpokladem, že G je bez $K_{1,3}$. Hrana tedy musí existovat.

2) Hrana existuje. Již víme, že toto je pravda. Zároveň víme, že $G \setminus \{y, z\}$ *musí* být nezávislá množina. Protože $n \geq 4$, musí existovat 4. vrchol w. A protože G je souvislý, musí w být spojen s nějakým z vrcholů x, y, z. Pokud je w spojen s y nebo z, je $G \setminus \{y, z\}$ stále souvislý (přes x). Předpokládejme tedy, že w je spojen *pouze* s x. Ale vrcholy x i w jsou obsaženy v $G \setminus \{y, z\}$, hrana (x, w) je tedy hrana v $G \setminus \{y, z\}$, a to je spor s tím, že $G \setminus \{y, z\}$ *musí* být nezávislá množina.

Ve všech případech jsme došli ke sporu. Náš původní předpoklad, že tvrzení neplatí, musí být nepravdivý. ■

Příklad 3.3. *Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvraťte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí*

$$n - 1 \leq m \leq (n-1)^2.$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3. Dokažme jednotlivé meze.

1) *Dolní mez* $m \geq n - 1$. To již plyne z toho, že G je souvislý, respektive, že G', který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran G, je souvislý. Graf G' má stejný počet vrcholů a hran jako graf G. A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran.

2) *Horní mez* $m \geq (n-1)^2$. Využijme toho, že G není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy V lze rozdělit na dvě neprázdné, disjuktní podmnožiny, nazvěme je A a B, takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z B do A*. Chceme najít maximální možný počet hran m takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z B do A. Nechť $|A| = p$ a $|B| = q$, kde $p + q = n$ a $p, q \geq 1$.

   Maximální počet hran je součtem:

   - *Hran uvnitř A*: V G nejsou smyčky, maximální počet hran v A je $p(p-1)$.
   - *Hran uvnitř B*: Obdobně jako pro $A \to q(q-1)$.
   - *Hran z A do B*: Maximální počet hran je $p \cdot q$.
   - *Hran z B do A*: Podle našeho předpokladu 0.

   Celkový maximální počet hran $m_{\max}$ pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

   $$m \leq p(p-1) + q(q-1) + pq \tag{1}$$

   Upravme dosazením $q = n - p$:

   $$\begin{aligned} m &\leq p(p-1) + (n-p)(n-p-1) + p(n-p) && (2)\\ m &\leq p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 && (3)\\ m &\leq (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n && (4)\\ m &\leq p^2 - np + n^2 - n && (5) \end{aligned}$$

   Protože maximalizujeme funkci $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$ pro $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

   - *Pro $p = 1$*:

     $$m \leq 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \tag{6}$$

   - *Pro $p = n - 1$*:

     $$\begin{aligned} m &\leq (n-1)^2 - n(n-1) + (n^2 - n)m && (7)\\ &\leq (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m && (8)\\ &\leq n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 && (9) \end{aligned}$$

   Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je $(n-1)^2$. Z toho plyne, že $m \geq (n-1)^2$.

$\blacksquare$