České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka teorie a příkladů

Teorie grafů

Jakub Adamec

Praha, 2025

Obsah

Strana

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autor velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce https://github.com/knedl1k/XP01TGR.

Poděkování. Rád bych poděkoval profesorce Marii Demlové nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Teorie grafů.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Grafy byly nakresleny pomocí maker Ti*k*Z Tilla Tantaua.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 Neorientované grafy

1.1 Základní pojmy a definice

Graf je soubor vrcholů, hran a vztahů incidence. Zapíšeme jako $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je neprázdná množina vrcholů, E množina hran a ε říká „co hrany představují“, respektive

$$\varepsilon : E \to \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}\,. \tag{1.1}$$

Jestliže pro dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ platí, že $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, pak se hrany e_1, e_2 nazývají *paralelní.* Pokud graf nemá paralelní hrany, nazýváme jej *prostý.* V takovém případě také stačí chápat graf jako dvojici $G = (V, E)$, kde hrany jsou neprázdné maximálně dvouprvkové podmnožiny V.

Smyčkou nazveme takovou hranu, která je $e \in E$ a pro $\varepsilon(e) = \{u, v\}$ platí $u = v$.

$\mathcal{S}\ldots$ je množina všech neorientovaných prostých grafů bez smyček.

1.1.1 Základní typy grafů

Rozlišujeme 2 základní typy grafů, orientované a neorientované.

(a) Orientovaný graf: $\varepsilon : E \to \{(u, v) \mid u, v \in V\}$; $u \in P_V(\varepsilon), v \in K_V(\varepsilon)$

(b) Neorientovaný graf: $\varepsilon : E \to \{(u, v) \mid u, v \in V\}$; u, v jsou krajní vrcholy ε

1.1.2 Sled, tah, cesta

(a) Sled je taková posloupnost, která začíná a končí vrcholem a kde po každém vrcholu následuje hrana, tedy $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k$.
V orientovaném případě vždy platí $P_V(e_1) = v_i$, $K_V(e_i) = v_{i+1}$. Neorientovaný pouze říká, že v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy.

(b) Tah je sled, ve kterém se nesmí opakovat hrany.

(c) Cesta je sled, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy, s výjimkou počátečeního, ve kterém cesta může končit.

1.1.3 Kružnice a cyklus

Kružnice je uzavřená neorientovaná cesta v grafu, *cyklus* uzavřená orientovaná cesta.

Příklad kružnice:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd}$$

1.1.4 Stupně vrcholů

Pokud $G = (V, E, \varepsilon)$, pak

- vstupní stupeň v $d^-(v) = \|\{e \mid K_V(e) = v\}\|$
- výstupní stupeň v $d^+(v) = \|\{e \mid P_V(e) = V\}\|$
- stupeň v $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Příklad

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
d^-(2) &= 2 \\
d^+(2) &= 3 \\
d(2) &= 5
\end{aligned}$$

Pro $G = (V, E)$ je pouze $d(v) = \|\{e \mid v \text{ je krajní vrchol } e, \text{ smyčku počítáme } 2\times\}\|$.

Z toho máme důsledek

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\|E\| \tag{1.2}$$

Tedy každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

1.2 Skóre

Skóre grafu $\underset{\substack{G=(V,E) \\ \|V\|=d}}{(G \in \mathcal{S})}$ je $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, kde d_i je stupeň vrcholu v_i.

Mějme příklad skóre (1,1,1,2,2,3). Jak by mohl vypadat graf s takovým skóre?

$$\begin{tikzcd}
& y & & \\
x \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & t \arrow[r] & u \arrow[r] & v \\
& z & &
\end{tikzcd}$$

nebo

$$\begin{tikzcd}
& y & \\
x \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & t \arrow[r] & u \\
& z \arrow[r] & v
\end{tikzcd}$$

Jak vidíme, skóre jednoznačně neurčuje graf. Můžeme ze skóre ale říct, jestli je takové skóre validním skóre nějakého grafu?

1.3 Hledání grafu ke skóre

Máme $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$.
Pak D je skóre některého grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ definovaná tak, že

$$d_i = \begin{cases} d_i & \text{pokud } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pokud } i \ge n - d_n \end{cases} \tag{1.3}$$

je skóre nějakého $G' \in \mathcal{S}$.

Důkaz.
„$\Leftarrow$“: Existuje G' pro D'. G vytvoříme tak, že k G' přidáme vrchol v_n a spojíme se všemi vrcholy $v_{n-d_n}, v_{n-d_1+1}, \dots, v_{n-1}$. Pak G má skóre D. ■

„$\Rightarrow$“: Máme G s $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_1 je stupeň v_1, d_2 je stupeň v_2 a tak dále.

Mějme $\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ má } D\} \neq \emptyset$.

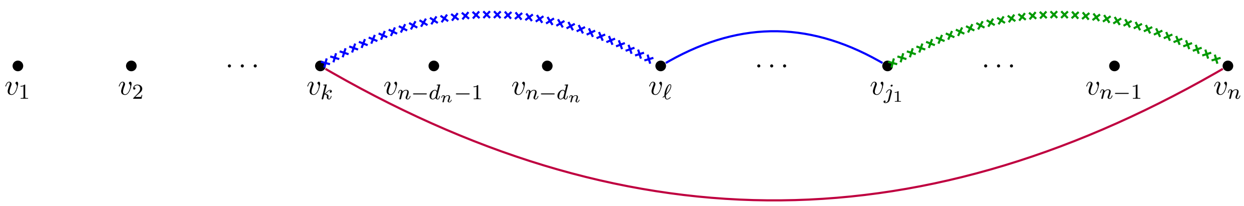
Cíl: Chceme dokázat, že mezi všemi grafy $\mathcal{G}$ existuje jeden, který má vlastnost, že poslední vrchol je spojen hranami s d_n předcházejícími vrcholy.

$\forall G \in \mathcal{G}$ mějme j_G, což bude největší index vrcholu, tak že $\{v_{j_G}, v_n\} \notin E$, tedy není mezi nimi hrana. To znamená, že pro ideální G chceme docílit $j_G = n - d_n - 1$.

Jako G_1 označíme ten $G_1 \in \mathcal{G}$, že j_{G_1} je nejmenší. (Může být j_{G_1} menší jak $n - d_n - 1$? Ne. v_n má stupeň d_n, a kdyby bylo j_{G_1} menší, tak by bylo vrcholů více, tzn. ne všechny by měly hranu s v_n.)

Označme $j_1 = j_{G_1}$.

Víme $j_1 \ge n - d_n - 1$. Teď nás ale zajímá, jestli $j_1 = n - d_n - 1$. Dokažme sporem.
Kdyby $j_1 > n - d_n - 1$, tak



$$d(v_n) = d_n \tag{1.4}$$

Protože mezi d_n předcházejícími vrcholy je nějaký, který není spojen hranou s v_n, v našem případě v_{j_1}, nutně to znamená, že v_n musí mít hranu s nějakým vrcholem, řekněme v_k, který má ještě nižší index.

$$d(v_k) \le d(v_{j_1}) \tag{1.5}$$

v_k je v pořadí dříve, než v_{j_1}, tudíž musí mít nutně menší roven stupeň. To ale nutně znamená, že v_{j_1} musí být spojen s alespoň jedním vrcholem, označme si ho v_ℓ, se kterým není spojen v_k, protože v_k je spojen s v_n, zatímco v_{j_1} není.

Vytvořme

$$\begin{aligned} G_0 &= (V_0, E_0) \\ V_0 &= V_1 = V \\ E_0 &= (E_1 \setminus \{\{v_n, v_k\}, \{v_\ell, v_{j_1}\}\}) \cup \{\{v_k, v_\ell\}, \{v_n, v_{j_1}\}\} \end{aligned}$$

G_0 má skóre D a zároveň $j_{G_0} < j_1$. To ale znamená, že G_1 nebyl graf s nejmenším j_G, což je spor. A proto nejmenší j_G je $j_{G_0} = n - d_n - 1$.

Ověřili jsme, že takový graf určitě existuje, takže G' dostaneme z G_0 odstraněním v_n. G' pak má skóre D'. ■

1.4 Příklad hledání grafu pro skóre

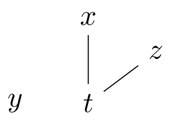
Mějme $D = (1, 1, 2, 3, 3)$; $n = 5, d_n = 3$; $n - d_n = 2$.

$D_1 = (1, 0, 1, 2) \overset{\text{uspo.}}{\rightarrow} (0, 1, 1, 2)$; $n_1 = 4, d_{n_1} = 2$; $n_1 - d_{n_1} = 2$.

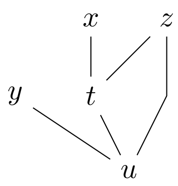
$D_2 = (0, 0, 0) \ldots$ tento graf je určitě existuje, jedná se o diskrétní graf.

Kresleme postupně, začněme u D_2.

Pak přidejme vrchol a hrany tak, aby skóre odpovídalo D_1.



A nakonec tak, aby odpovídalo D.



1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů

Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček. Pak definujme

- $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$ je minimální stupeň grafu G.
- $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$ je maximální stupeň grafu G.
- $d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$ je průměrný stupeň grafu G.
- $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2} d(G)$ je poměr počtu hran ku počtu vrcholů.

Označme $n = |V|$ a $m = |E|$. Pak $d(G) = \frac{2m}{n}$ a $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$.

Zřejme platí $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

1.6 Tvrzení o podgrafech

Pro každý $G \in \mathcal{S}$ s $|E| \geq 1$ existuje podgraf H takový, že $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Důkaz. Máme dvě situace

1. Buď $\delta(G) > \varepsilon(G)$, pak $H = G$.
2. Nebo $\delta(G) \leq \varepsilon(G)$, tj. $v_1 \in V$, $d(v_1) = \delta(G) \leq \frac{m}{n}$.

Dokažme tedy ještě platnost pro 2.

Označme $G_1 \coloneqq G \setminus v_1$. A tedy $m_1 = m - \delta(G)$ a $n_1 = n - 1$.

Chceme $\underbrace{\frac{m_1}{n_1}}_{\varepsilon(G_1)} \geq \underbrace{\frac{m}{n}}_{\varepsilon(G)}$.

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{m - \delta(G)}{n-1} - \frac{m}{n} = \frac{nm - n\delta(G) - nm + m}{(n-1)n} = \frac{m - n\delta(G)}{(n-1)n}, \delta(G) \leq \frac{m}{n}, m \geq n\delta(G) \tag{1.6}$$

A tedy

$$m - n\delta(G) \geq 0 \tag{1.7}$$
$$n(n-1) \geq 0 \tag{1.8}$$

Což dává

$$m \geq n\delta(G), \text{ tj. } \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G) \tag{1.9}$$

Algoritmus dále pokračuje:

$$\text{Pokud} \begin{cases} \delta(G_1) > \varepsilon(G_1), & \text{tak } H \coloneqq G_1, \\ \delta(G_1) \leq \varepsilon(G_1), & \text{tak } v_2 \in V \setminus \{v_1\}, d_{G_1}(v_2) = \delta(G_1). \end{cases} \tag{1.10}$$

A tedy $G_2 \coloneqq G_1 \setminus v_2$, $\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1)$. A takto postupně dále. Algoritmus končí a nikdy nedostaneme prázdný graf, díky předpokladu, že G mělo alespoň jednu hranu, tedy $\varepsilon(G) > 0$. ■

1.7 Souislý graf

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

1.8 Pojmy založené na vzdálenosti

1.8.1 Vzdálenost

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $x, y \in V$. Vzdálenost x, y je $d_G(x, y)$, což značí počet hran v nejméně početné cestě z x do y, když existuje cesta. Jinak $d_G(x, y) = \infty$.

1.8.2 Průměr

Ať G je souvislý. Průměr G je $\operatorname{diam}(G) = \max\{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$.

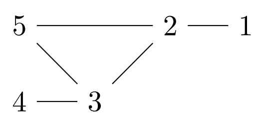
1.8.3 Excentricita

Ať G je souvislý. Excentricita vrcholu $v \in V$ je $\operatorname{ex}(V) = \max\{d_G(v, x) \mid x \in V\}$.

1.8.4 Centrum

Ať $v \in V$ je centrální $\to \operatorname{ex}(v)$ je nejmenší mezi $\operatorname{ex}(x), x \in V$. Centrum (staře *střed*) grafu je $C(G) = \{v \mid v \text{ je centrální}\}$.

Uveďme si příklad.
Zde $C(G) = \{2, 3, 5\}$.



1.8.5 Poloměr

Poloměr G je $\mathrm{rad}(G) = \mathrm{ex}(v), v \in C(G)$.

Platí $\mathrm{rad}(G) \leq \underbrace{\mathrm{diam}(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G)}_{\star}$.

Zdůvodnění $\star$. Chceme $d_G(x, y) \leq 2\,\mathrm{rad}(G) \forall x, y \in V$.

$$x \overset{P_1}{—} v \overset{P_2}{—} y$$

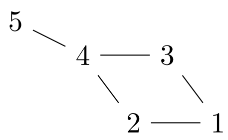
P_1, P_2 sled z x do y o $\leq 2\,\mathrm{rad}(G)$.

P_1, P_2 obsahuje cestu P z x do y o $\leq P_1, P_2 \leq 2\,\mathrm{rad}(G)$.

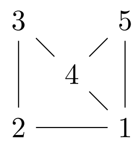
2 Souvislé grafy

2.1 k-souvislost

$G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Řekněme, že G je k-souvislý, pokud $|V| > k$ a pro každou $X \subseteq V$, $|X| = k - 1$ je $G \setminus X$ souvislý.
Mějmě



Je souvislý, ale ne 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

Každý graf je 0-souvislý, i nesouvislý graf je 0-souvislý.
1-souvislý je každý souvislý graf.

2.2 Souvislost v grafu

Souvislost v grafu G je největší k takové, že G je k-souvislý. Značíme $\kappa(G)$.
Úplný graf má $\kappa(G) = |V| - 1$.

2.3 Vrcholový řez

Vrcholový řez grafu $G \in \mathcal{S}$ je množina vrcholů $X \subsetneq V$, že $G \setminus X$ je nesouvislý.

2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu

Je-li $G \in S$, G není úplný, pak $\kappa(G) = k$ právě tehdy, když nemá vrcholový řez o $k - 1$ vrcholech a má vrcholový řez o k vrcholech.

2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, splňující $d(G) \geq 4k$. Pak G obsahuje podgraf, který je k-souvislý.

Důkaz.

- Pro $k = 0$ triviální. Všechny grafy jsou 0-souvislé.
- Pro $k = 1$: Pokud $\frac{2m}{n} \geq 4k$, tedy $m \geq 1$ (takže má hranu), tak sama hrana je 1-souvislý podgraf.
- Pro $k \geq 2$: tj. $\frac{2m}{n} \geq 4k$

$$2m \geq 4kn \tag{2.1}$$
$$m \geq 2kn \tag{2.2}$$
$$m \geq 4n \,(\text{dosazeno } k \geq 2) \tag{2.3}$$

Průběh důkazu $d(G) \geq 4k, k \geq 2 \xRightarrow{\text{Lemma 1}} \text{(i)}, \text{(ii)} \xRightarrow{\text{Lemma 2}} G$ má k-souvislost.

2.5.1 Pomocné lemma 1

Pokud $k \geq 2$ a $d(G) \geq 4k$, pak

(i) $n \geq 2k - 1$
(ii) $m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$

Důkaz. (i) Kdyby ne, tak $n < 2k - 1$.

$$n + 1 < 2k \tag{2.4}$$
$$\frac{n+1}{2} < k \tag{2.5}$$

Teď použijme předpoklad $m \geq 2kn > (n+1)n$. A to nejde, protože úplný neorientovaný graf bez smyček má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

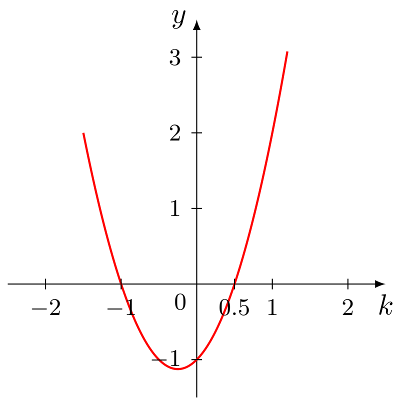
(ii) Mějme

$$m \geq 2kn - ((2k-3)(n-k+1)+1) = 2kn - (2kn - 2k^2 + 2k - 3n + 3k - 3 + 1) \tag{2.6}$$
$$= 2k^2 - 5k + 3n + 2 \tag{2.7}$$

Teď aplikujme již dokázané (i):

$$2k^2 - 5k + 3n + 2 \geq 2k^2 - 5k + 6k - 3 + 2 = 2k^2 + k - 1 \tag{2.8}$$

Vyšetřeme průběh funkce



Funkce je očividně konvexní, a protože nás zajímá průběh funkce na $k \geq 2$, můžeme prohlásit, že $2k^2 + k - 1 > 0$. ■

2.5.2 Pomocné lemma 2

Pokud G splňuje (i) a (ii), tak G má k-souvislý podgraf.

Důkaz. G není k-souvislý.
Indukcí podle $|V| = n$.

Základní krok: n $\overset{\text{(i)}}{=} 2k - 1$, $m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$.
Dosaďme $k = \frac{n+1}{2}$:

$$m \geq (n+1-3)\left(n - \frac{n+1}{2} + 1\right) + 1 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2.9}$$

A tedy graf je úplný na n vrcholech. Teď potřebujeme $n > k$.

$$n = 2k - 1 = k + \underbrace{k-1}_{\geq 1} \geq k + 1 \tag{2.10}$$

Indukční krok: Každý graf G' splňující (i) a (ii) s méně než n vrcholy (s alespoň $2k-1$ vrcholy) má k-souvislý podgraf.

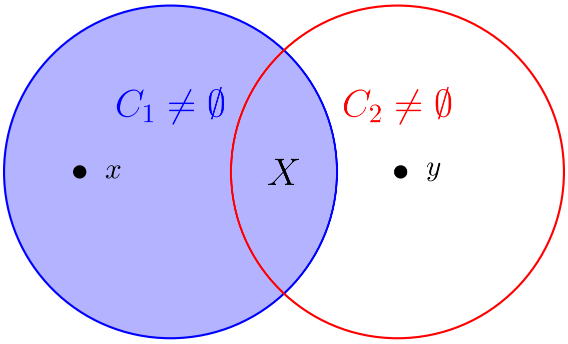
Vezmeme G splňující (i) a (ii) s n vrcholy.

(a) Kdyby $\delta(G) \leq 2k-3$, tak $v \in V$ s $d_G(v) \leq 2k-3$.
$G \setminus v = G_1$, $n_1 = n-1$,

$$m_1 \geq m - (2k-3) \geq (2k-3)(n-k+1) + 1 - (2k-3) = (2k-3)(\underbrace{n-1}_{n_1} - k + 1) + 1 \tag{2.11}$$

Tudíž G_1 má k-souvislý podgraf, tedy i ho má G.

(b) Ať $\delta(G) > 2k-3m$, $\delta(G) \geq 2k-2$; $\forall v \in G, d_G(v) \geq 2k-2$.
G není k-souvislý, tj. $X \subseteq V$, $|X| = k-1$ a X je vrcholový řez.



$G \setminus X$ je nesouvislý. Všech je $(k-1)+(k-1)+1$. $\boxed{d_G(x)} \geq 2k-2$.

G_1 graf indukovaný C_1 v X má alespoň $2k-1$ vrcholů.

Kdyby G_1 i G_2 nesplňovaly (ii), G_i má n_i vrcholů a m_i hran, $i = 1, 2$.

$$m_i \ngeq (2k-3)(n_i - k + 1) + 1, \qquad \text{tj. } m_i \leq (2k-3)(n_i - k + 1) \tag{2.12}$$

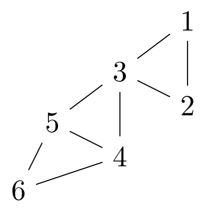
$m_1 + m_2 \geq m$ víme. $n_1 + n_2 = n + (k-1)$, počítali jsme vrcholy v X dvakrát.

$$m \leq n_1 + n_2 \leq (2k-3)(n_1 - k + 1) + (2k-3)(n_2 - k + 1) = (2k-3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \tag{2.13}$$
$$= (2k-3)(n + (k-1) - 2k + 2) \tag{2.14}$$
$$= (2k-3)(n - k + 1) \tag{2.15}$$

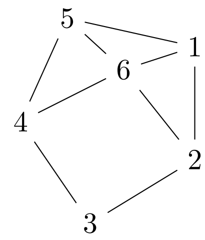
Tedy spor s (ii). ■

2.6 Artikulace

Vrchol v grafu G se nazývá artikulace, jestliže $G \setminus v$ má více komponent souvislosti, než G.
Platí. $G \in \mathcal{S}$ s alespoň 3 vrcholy je 2-souvislý $\iff$ je 1-souvislý a nemá artikulaci.



Není 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

2.7 Operace nad 2-souvislými grafy

Mějme operace

(a) $G \in \mathcal{S}$ a $e \in \{u, v\}$; $u, v \in V(G)$, $e \notin E(G)$, pak $G + e$ je graf s $V(G)$ a $E(G) \cup \{e\}$.
Je-li G 2-souvislý, tak $G + e$ je 2-souvislý.

(b) $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $e \in E$, pak $G\%e = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$.
„Do hrany e vložíme vrchol se stupněm 2.“

2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích

Každý2-souvislý graf obsahuje kružnici.

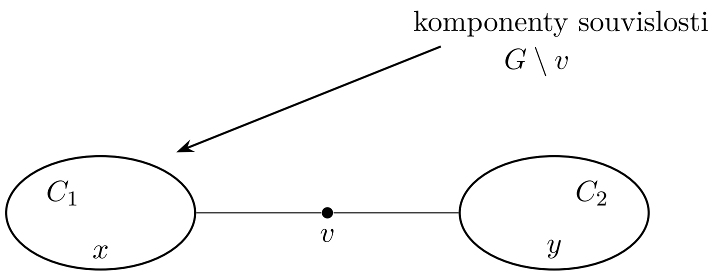
Důkaz. Každý 2-souvislý graf je souvislý. Kdyby souvislý neobsahoval kružnici, jedná se o strom. A každý strom s alespoň 3 vrcholy má artikulaci. Protože stromy nemohou být 2-souvislé, a zároveň všechny ostatní souvislé grafy obsahují kružnici, i každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici. ■

2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici

$G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je 2-souvislý právě tehdy, když každé 2 vrcholy $u \neq v$ leží na společné kružnici.

Důkaz.
„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že pro každé $u \neq v$ existuje kružnice K, která je obsahuje.

To znamená, že graf je souvislý. Musíme ještě dokázat, že v něm neexistuje artikulace. Kdyby graf měl artikulaci v:



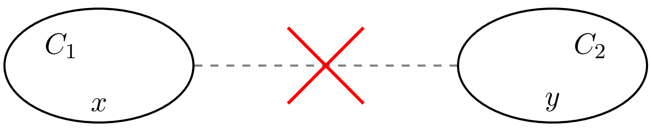
alespoň jeden vrchol
$u \in C_1$ a C_2.

Znamenalo by to, že v jedné komponentě souvislosti by ležely alespoň 2 vrcholy (protože máme minimálně 3 vrcholy). Zároveň ale vrchol $x \in C_1$ a $y \in C_2$ rozhodně neleží na společné kružnici, tudíž graf nemůže mít artikulaci, takže G je 2-souvislý. ■

„⇒“: Předpokládejme, že G je 2-souvislý. Dokažme indukcí podle vzdálenosti $d(u, v)$.

(a) Základní krok: u, v s $d(u, v) = 1$.
Budeme se snažit ukázat, že když zrušíme hranu, souvislost zůstane.

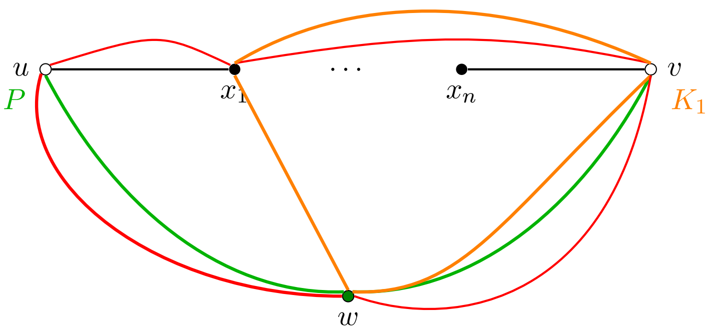
(1) $G \setminus e$ je souvislý. Kdyby ne, tak



Přitom G má alespoň 3 vrcholy, tedy v jedné komponentě leží alespoň 2 vrcholy. *BÚNO* exsistuje $x \in C_1$, $x \neq u$, tj. u je artikulace. Což je spor. Takže $G \setminus e$ je souvislý. Tedy existuje cesta P z u do v. Pak P je kružnice obsahující u, v.

(b) Indukční předpoklad: Pro každé x, y s $d(x, y) = n \geq 1$ existuje kružnice obsahující x, y.

(c) Indukční krok: Vezměme libovolné u, v s $d(u, v) = n + 1$. Vyberme nejkratší cestu:



Použijme I.P.: tj. existuje kružnice K_1 obsahující x_1, v. x_1 není artikulace, tj. existuje cesta P z u do v neobsahující x_1. w je prvním vrcholem cesty P, který leží na K_1. Použijeme cestu P, abychom se dostali z u do w, následně se přes K_1 dostaneme do v. Dále po kružnici do x_1, kde si musíme vybrat trasu, která nevede do w, tj. směrem do u. A tím uzavřeme kružnici obsahující u a v.

■

2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci

$G \in \mathcal{S}$ je 2-souvislý právě tehdy, když $G\%e$, $e \in E(G)$ je 2-souvislý.

Důkaz.
„⇒“: Předpokládejme, že G je 2-souvislý, tj. souvislý a nemá artikulaci.

Vrchol w, který vložíme do hrany e, není artikulace. A žádný jiný se nemohl stát artikulací, to by už musely být artikulací předtím, a tedy by se v prvé řadě nejednalo o 2-souvislý. ■

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že $G\%e$ je 2-souvislý, tj. každé 2 vrcholy leží na společné kružnici.

$$x, y \in V(G) \ldots \text{existuje } K \text{ v } G\%e \text{ obsahující } x, y \begin{cases} K \text{ neobsahuje } e_1, e_2 & K \text{ je kružnice } G. \\ K \text{ obsahuje } e_1, e_2 & \text{z } K \text{ odstraníme } e_1, e_2, \\ & \text{nahradíme } e \text{ a máme } K'. \end{cases} \tag{2.16}$$

K' je kružnice v G. ■

2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu

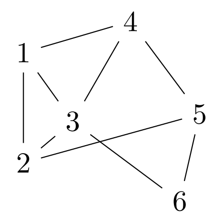
Každý 2-souvislý graf $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je možné sestrojit postupem:

$$G_0 \coloneqq K \text{ je nějaká kružnice} \tag{2.17}$$

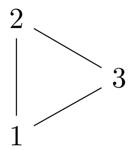
Máme-li G_i, že $G_i \neq G$, tak G_{i+1} je G_i, ke kterému přidáme cestu P (v G), která vede mezi 2 vrcholy z G_i a zároveň všechny vrcholy této cesty nejsou v G_i.

2.12 Příklad sestrojení 2-souvislého grafu

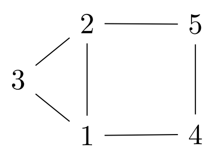
Mějme 2-souvislý graf, tj. bez artikulace:



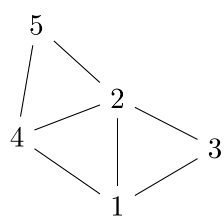
Začněme G_0:



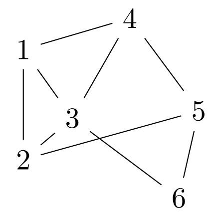
Přidáme cestu z 1 do 2, tedy G_1:



Teď přidáme cestu z 3 do 4, G_2:

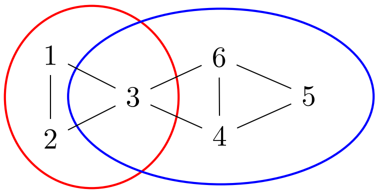


A posledně z 3 do 5, $G_3 = G$:



2.13 Komponenty 2-souvislosti - blok

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak $A \subseteq V(G)$ se nazývá *blok*, jestliže je maximální podmnožina taková, že jí indukovaný podgraf je 2-souvislý.
Pozn. maximální v tomto kontextu neznamená nejpočetnější, nýbrž, že do takové podmnožiny již nelze přidat další vrchol.



Když nejsou jednotlivé bloky vzájemně disjunktní, tak jejich průnik je artikulace.

3 Hranově souvislé grafy

3.1 Hranový řez

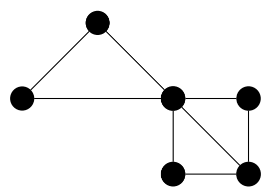
Množině $F \subseteq E$, že $G \setminus F$ je nesouvislá, se říká hranový řez.

3.2 Hranová souvislost

Máme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak G je k-hranově souvislý, jestliže neexistuje $F \subseteq E$, $|F| \leq k - 1$, taková, že $G \setminus F$ je nesouvislá.

Hranová souvislost grafu G, značíme $\lambda(G)$, je největší k, že G je k-hranově souvislý.
Pozn. největší znamená, že nemá hranový řez s $\lambda(G) - 1$ hranami, ale má s $\lambda(G)$ hranami.

Mějme 2-hranově souvislý graf:



3.3 Most

Nazvěme most hranu $e \in E(G)$, že $\{e\}$ je hranový řez.

3.4 Souvislost krajních vrcholů a mostů

Každý most má alespoň jeden krajní vrchol, který je artikulace.

Důkaz. Nechť $e = \{u, v\}$ je most v souvislém grafu G, kde $|V(G)| \geq 3$. Dle definice mostu platí, že graf $G \setminus e$ není souvislý a skládá se ze dvou komponent souvislosti. Označme K_u komponentu obsahující vrchol u a K_v komponentu obsahující vrchol v.

Protože má graf G alespoň 3 vrcholy, musí alespoň jedna z komponent K_u nebo K_v obsahovat více než jeden vrchol. *BÚNO* předpokládejme, že $|V(K_u)| \geq 2$.

To znamená, že ve komponentě K_u existuje vrchol w různý od u (tj. $w \in V(K_u), w \neq u$). Protože e je most, jediná cesta v grafu G z vrcholu w do vrcholu v vede přes hranu e, a tedy nutně prochází vrcholem u.

Pokud z grafu G odstraníme vrchol u, neexistuje žádná cesta mezi w a v, protože jediná spojnice byla přerušena. Graf $G \setminus u$ tedy není souvislý (vrcholy w a v leží v různých komponentách).

Z toho plyne, že vrchol u je artikulace. ■

3.5 Základní vlastnosti hranově souvislých grafů

G je 0-hranově souvislý pro každé G.
G je 1-hranově souvislý $\iff$ G je souvislý.
G je 2-hranově souvislý $\iff$ G je souvislý a nemá most.

3.6 Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti

Platí, že $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

4 Extremální teorie

4.1 Věta o souvislosti vrcholů a hran

Mantel. Máme $G \in \mathcal{S}$ s n vrcholy, m hranami, který nemá K_3. Pak $m \leq \frac{n^2}{4}$.

DŮKAZ.
Pomocná definice. Množina A je nezávislá $A \subseteq V(G)$ pokud pro každou $e = \{u, v\}$, jestliže $u \in A$, platí $v \notin e$. *Množina A je nezávislá právě tehdy, když v ní žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.*

Ať A je nejpočetnější nezávislá množina a $B = V \setminus A$. G nemá K_3: každá množina sousedů vrcholů $v \in V$ je nezávislá množina.

$$m \leq \sum_{N \in B} d(v) \leq \underbrace{(n-k)}_{|B|} \cdot \underbrace{k}_{|A|} \tag{4.1}$$

Každá hrana má alespoň 1 krajní vrchol v B. Pro které k je $(n-k)k$ největší?

$$f(x) = (n-x)x \tag{4.2}$$

$$f'(x) = n - 2x \implies f'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{2} \tag{4.3}$$

$$f''(x) = -2 \tag{4.4}$$

Protože jsme v $\mathbb{N}$, tak $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2}\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \leq \frac{n^2}{4}$. ∎

4.2 Věta o souvislosti hran a úplném grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, který neobsahuje K_{r+1} (úplný graf na $r+1$ vrcholech), $r \geq 2$. Pak

$$m \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2}. \tag{4.5}$$

DŮKAZ. Vezměme graf G bez K_{r+1} s nejméně hranami (přidáním hrany by vznikl K_{r+1}). Tedy G má K_r. Ať A je množina vrcholů K_r a B je $V(G) \setminus A$, $|B| = n - r$. Každý vrchol $v \in B$ má max $r-1$ sousedů v A (jinak by $A \cup \{u\}$ tvořil K_{r+1}).

m rozdělíme na hrany v A (hrany úplného grafu), hrany mezi A a B a hrany v B.

$$m = m_A + m_{A-B} + m_B \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + m_B \tag{4.6}$$

a graf indukovaný B neobsahuje K_{r+1} a má maximální počet hran.

$$m_B < m \tag{4.7}$$

$$n - r = |B| < n \tag{4.8}$$

Použijme tedy silnou indukci, dle počtu vrcholů $n = |V(G)|$.

- Základní krok. $n = 1, 2, \dots, r$.

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{4.9}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \overset{?}{\leq} \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} \tag{4.10}$$

$$\frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\left(n\frac{r-1}{r} - (n-1)\right) \tag{4.11}$$

$$= \frac{n}{2}\frac{nr - n - nr + r}{r} = \frac{n}{2}\frac{\overbrace{r-n}^{\geq 0}}{\underbrace{r}_{\geq 0}} \geq 0. \tag{4.12}$$

- Když budeme mít indukční předpoklad pro G_B, pak:

$$m \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + \frac{r-1}{n}\frac{(n-r)^2}{2} \tag{4.13}$$

$$= \frac{r-1}{r}\left(\frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{(n-r)^2}{2}\right) \tag{4.14}$$

$$= \frac{r-1}{r}\left(\frac{r^2+2rn+n^2-2nr+r^2}{2}\right) = \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2}. \tag{4.15}$$

■

4.3 Turánovy grafy

Pro n, $r < n$. $T(n,r)$ je r-partitní úplný graf. Označíme-li strany $S_1,\dots,S_r$, pak $|S_i - S_j| \leq 1$, $|S_i| = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ nebo $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. Takový graf má potom

$$\frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{n}{r}\right)^2 = \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2},\ n = k\cdot r, \tag{4.16}$$

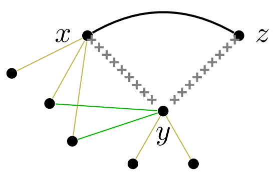
hran.

4.4 Tvrzení počtu hran a Turánově grafu

Každý $G = (v, E) \in \mathcal{S}$ bez K_{r+1} s největším počtem hran je $T(n,r)$.

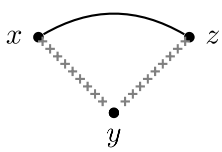
Důkaz. Na V definujme $\mathcal{R}$: $u\mathcal{R}v \iff \{u,v\} \notin E$.
$\mathcal{R}$ je reflexivní, protože nemáme smyčky. $\mathcal{R}$ je symetrické, protože se jedná o neorientovaný graf. Teď je potřeba ověřit tranzitivitu, tj. $(\{x,y\} \notin E, \{y,z\} \notin E) \implies \{x,z\} \notin E$.
Dokažme sporem. Kdyby $\{x,y\} \notin E$ a $\{y,z\} \notin E$ a $\{x,z\} \in E$.

1) $d(y) \geq d(x)$ (obdobně $d(y) \geq d(z)$). Sporem. Kdyby $d(y) < d(x)$.



Neighbourhood $N(v) = \{u \mid \{u,v\} \in E\}$.
Z G odstraníme hrany $\{y,t\}, t \in N(y)$ a přidáme $\{y,u\}, u \in N(x)$. Tím dostaneme G', to má více hran jak G.
G' nemá K_{r+1}, protože ani původní graf nebyl K_{r+1}. Což je spor. ■

2) $G'' = G \setminus \{x,y,z\}$. $m(G) \leq m(G') + d(x) + d(y) + d(z) - 1$ (-1 za hranu $\{x,z\}$).



G''' z G odstraníme hrany $\{x,t\}, t \in N(x)$ a $\{z,v\}, v \in N(z)$ a přidáme hrany $\{x,u\}, u \in N(y)$ a $\{z,u\}, u \in N(y)$.

$$m(G''') = m(G'') + 3d(y) > m(G'') + d(x) + d(y) + d(z) - 1 \geq m(G) \tag{4.17}$$

G'' nemá K_{r+1}, což je spor. ■

$\mathcal{R}$ je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence $\mathcal{R}$ jsou maximální množiny, že graf jimi indukovaný nemá hranu. G má nejvíce hran, tj. G má K_r, stran má r, je tedy úplný r-partitní graf.

Potřebujeme $||S_i| - |S_j|| \leq 1$. Dokažme sporem. Kdyby ne, tak $|S_1| \geq |S_2| + 2$. Označme $|S_1| = n_1$ a $|S_2| = n_2$.

Graf měl původně $n_1 \cdot n_2$ hran. Nově má

$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 n_2 \underbrace{\underbrace{-n_2 + n_1}_{\geq 2} - 1}_{\geq 1} . \tag{4.18}$$

A to je Turánův graf. ■

5 Orientované grafy

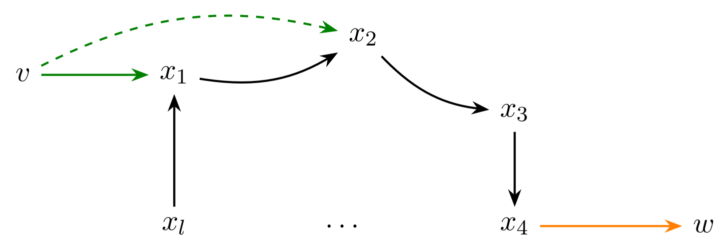
5.1 Minimálně silně souvislý graf

Silně souvislý graf se nazývá minimálně silně souvislý, jestliže $G \setminus \{e\}$ není silně souvislý pro každou hranu $e \in E(G)$.

5.2 Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech

Každý minimálně silně souvislý graf G s alespoň 2 vrcholy má 2 vrcholy stupně 2.
DŮKAZ. Indukcí podle rozdílu $k = m - n$, kde m je počet hran a n počet vrcholů.

- Základní krok. $k = 0$, tj. $m = n$. Takže se jedná o cyklus. Všechny vrcholy cyklu mají stupeň 2.
- Indukční krok. Každý graf G (minimálně silně souvislý s $m(G) - n(G) < k$) má 2 vrcholy stupně 2.
  Uvažujme G minimálně silně souvislý s $m - n = k > 0$. V G si vybereme cyklus C s největším počtem hran (tedy vrcholů). C má l vrcholů:

  $\forall v \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(v, x_i), x_i \in C$.
  $\forall w \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(x_j, w), x_j \in C$.
  Vytvořme G', což bude G, ve kterém nahradíme cyklus C vrcholem v_C.

$$m(G') - n(G') = m - l - (n - l + 1) = m - n - 1 = k - 1 \tag{5.1}$$

■

  G' má alespoň 2 vrcholy stupně 2, není-li ani jeden z nich v_C, jsou to vrcholy G stupně 2. Když $G\prime$ bude mít pouze 2 vrcholy, v_C a x, stupně 2, tak musíme řešit 2 případy:

  1) Když má cyklus alespoň 3 vrcholy ($l \geq 3$), pak v C existuje vrchol stupně 2.
  2) Když C má jen 2 vrcholy, když se zkombinují orientované hrany do neorientovaných, tak se jedná o strom. A každý strom s alespoň 2 vrcholy má 2 listy, tj. vrcholy stupně 1. A to jsou přesně ty 2 vrcholy stupně 2, které hledáme.

■

5.3 Algoritmus pro nalezení topologického očíslování

Algoritmus pro nalezení topologického očíslování v acyklickém grafu.
Pozn.: Každý acyklický graf má alespoň 1 vrchol se stupněm 0.

1) Spočítáme vstupní stupně vrcholů. Do množiny M vložíme všechny v s $d^-(v) = 0$, $i = 1$.
2) Vybereme $v_i \in M$ a odstraníme. Pro každé $(v_i, w) \in E$: $d^-(w) := d^-(w) - 1$, if $d^-(w) = 0$, pak $M := M \cup \{w\}$. $i++$.
3) Algoritmus končí pokud $M = \emptyset$ a zároveň existuje alespoň jeden vrchol u s $d^-(u) > 0$, pak topologické očíslování neexistuje, nebo jsou všechny vrcholy topologicky očíslované.

5.4 Tranzitivní uzávěr

Mějme orientovaný graf G. G^t je tranzitivní uzávěr, když $G = (V, E)$, tak $G^t = (V, E^t)$, kde $(u, v) \in E^t$, právě tehdy, když existuje netriviální orientovaná cesta z u do v.

Platí, že G je silně souvislý $\iff$ G^t je úplný orientovaný graf se všemi smyčkami.

5.5 Reflexivní a tranzitivní uzávěr

$G^\star$ je reflexivní a tranzitivní uzávěr $G^\star = (V, E^\star)$, $E^\star = E^t \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$.

*Lze také říct, že platí to samé, jako pro tranzitivní uzávěr, jen vyškrtneme **netriviální**.*

5.6 Tranzitivní redukce

$G = (V, E)$ je orientovaný graf. Jeho podgaf $G' = (V, E')$ je transitivní redukce G pokud $G^t = (G')^t$, a žádný vlastní podgraf této redukce G'' již nemá tuto vlastnost.

5.7 Souvislost acyklických grafů a trazitivní redukce

Je-li $G \in \mathcal{S}$ acyklický, pak má jedinou tranzitivní redukci.
Důkaz. Sporem. Mějme G acyklický, tedy má topologické očíslování vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$.

Kdyby $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ byly 2 různé tranzitivní redukce, tak

$$(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

Vyberme z $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ hranu $e = (v_i, v_j)$, $i < j$, která má nejmenší rozdíl $j - i$.
BÚNO: $e \in (E_1 \setminus E_2)$, tedy $e \notin E_2$, ale $e \in E_2^t$. Tj. musí existovat v G_2 cesta z v_i do v_j, která má alespoň 2 hrany.

$$v_i, e_1, e_2, \ldots, e_k, v_j,\ k \geq 2. \tag{5.3}$$

G_1 tam je z redukce, tak alespoň e_a, $a = 1, \ldots, k$ není v E_1.

$$e_a = (v_a, v_b),\ a < b. \tag{5.4}$$

$$i \leq a < b \leq j \tag{5.5}$$

Alespoň jedna z $\leq$ je ve skutečnosti $<$, tedy $b - a < j - i$. Což je spor. ■

6 Hamiltonovské grafy

6.1 Cesta, kružnice, cyklus

Cesta (kružnice, cyklus) je hamiltonovská(ský), jestliže prochází všemi vrcholy.

6.2 (Ne)orientovaný graf

(Ne)orientovaný graf je Hamiltonovský, jestliže obsahuje hamiltonovský(skou) cyklus (kružnici).

6.3 Chvátalova věta o Hamiltonovském grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, se skóre $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, $n = |V|$. Jestliže pro nějaké $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$, tak G je Hamiltonovský.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že existuje $G \in \mathcal{S}$, $n \geq 3$, G splňuje $k < \frac{n}{2}$ platí $d_k \leq k$, a pak $d_{n-k} \geq n - k$ a G není Hamiltonovský.

Když ke G splňující Chvátalovu podmínku přidáme hranu, která v G není, tak nový graf stále splňuje Chvátalovu podmínku.

Zvolíme G s Chvátalovou podmínkou maximální bez hamiltonovské kružnice. Zvolme $x, y : \{x, y\} \notin E$, $d(x) + d(y)$ je největší mezi $\{u, v\} \notin E$, $d(x) \leq d(y)$. V G existuje Hamiltonovská cesta z x do y. Označme

$$S \coloneqq \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E\} \in 1, \tag{6.1}$$
$$T \coloneqq \{j \mid \{v_j, y\} \in E\} \ni n - 1, \tag{6.2}$$

kde $n \notin S$, $n \notin T$.

$$S \cup T \subset \{1, \ldots, n - 1\} \tag{6.3}$$
$$|S| = d(x) \tag{6.4}$$
$$|T| = d(y) \tag{6.5}$$

Pomocný důkaz. Platí $S \cap T = \emptyset$.
Důkaz. Kdyby $i \in S \cap T$, tak se jedná o hamiltonovskou kružnici. Spor s velkým předpokladem. ■
Takže

$$|S \cup T| = |S| + |T| = d(x) + d(y) \leq n - 1. \tag{6.6}$$

Položme

$$k \coloneqq d(x) \qquad d(x) \leq d(y) \tag{6.7}$$
$$k < \frac{n}{2} \qquad 2d(x) \leq d(x) + d(y) \leq n - 1 \tag{6.8}$$

A tedy $d(x) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.

Máme $d(x)$ vrcholů u, že $\{x, y\} \in E$.

$$u = v_l \tag{6.9}$$
$$\{v_{l-1}, y\} \notin E \tag{6.10}$$
$$d(v_{l-1}) + d(y) \leq d(x) + d(y) \tag{6.11}$$
$$d(v_{l-1}) \leq d(x) = k \tag{6.12}$$

Tj. máme k vrcholů v_{l-1} s $d(v_{l-1}) \leq k$. Platí $d_k \leq k$, protože máme alespoň k vrcholů stupně $\leq k$. Z Chvátalovy podmínky víme, že $d_{n-k} \geq n - k$, tj. existuje $k + 1$ vrcholů w s $d(w) \geq n - k$. Ale x má $d(x) = k$. Tedy existuje w s $d(w) = n - k$, že $\{x, w\} \notin E$.

$d(x) + d(w) = k + n - k = n$, což je spor s volbou x a y, protože $d(x) + d(y) \leq n - 1$. ■

6.4 Věta o skóre grafu a hamiltonovské kružnici

Jestliže posloupnost čísel

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \text{ nesplňuje Chvátalovu podmínku,} \tag{6.13}$$

tak existuje

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n,\ a_i \leq d_i, \tag{6.14}$$

tak, že je skóre grafu, který nemá hamiltonovskou kružnici.

Důkaz. Jestliže posloupnost nesplňuje Chvátalovu podmínku, pak existuje číslo k tak, že $k \leq \frac{n}{2}$, $d_k \leq k$ a přitom $d_{n-k} \leq n-k-1$.

Utvořme graf s množinou vrcholů $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takto: $\{v_i, v_j\}$ je hrana G právě tehdy, když

- buď $1 \leq i \leq k$ a $n-k+1 \leq j \leq n$,
- nebo $i \neq j$ a $k+1 \leq i, j \leq n$.

Jinými slovy G se skládá z úplného bipartitního grafu se stranami $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ a $Y = \{v_{n-k+1}, \ldots, v_n\}$ a úplného grafu na množině vrcholů $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$.

Graf G má tedy

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{n-k} \leq a_{n-k+1} \leq \cdots \leq a_n \tag{6.15}$$

$$\underbrace{d_1}_{k} \leq \underbrace{d_2}_{k} \leq \cdots \leq \underbrace{d_k}_{k} \leq \underbrace{d_{k+1}}_{n-k+1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_{n-k}}_{n-k+1} \leq \underbrace{d_{n-k+1}}_{n-1} \leq \cdots \leq \underbrace{d_n}_{n-1} \tag{6.16}$$

a tedy majorizuje $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Není těžké nahlédnout, že v G neexistuje hamiltonovská kružnice. ■

6.5 Turnaj

Prostý orientovaný graf G bez smyček nazveme *turnajem*, jestliže pro každé dva různé vrcholy u, v buď (u, v) je hrana grafu G, nebo (v, u) je hrana G; nikdy ale ne oboje.

Jinými slovy, zapomeneme-li na orientaci hran v grafu G, dostaneme úplný graf.

6.6 Vztah hamiltonovských cyklů a silné souvislosti

Je dán turnaj G s $n \geq 3$ vrcholy. Pak v G existuje hamiltonovský cyklus právě tehdy, když je G silně souvislý.

Důkaz.

- „$\Rightarrow$“: triviální.
- „$\Leftarrow$“: Nechť $G = (V, E)$ je turnaj, který je silně souvislý.

7 Toky v sítích

7.1 Síť

Síť je prostý orientovaný graf bez smyček $G = (V, E)$. Máme zdroj s (source) a spotřebič t (target). Zapisujeme síť (G, l, c, s, t).

7.2 Tok v síti

Tok v síti je $f : E \to \mathbb{Z}$, že pro každý v $\neq s, t$ platí

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \quad \text{(Kirchhoffův zákon)} \tag{7.1}$$

7.3 Omezení toku

Mějme $l, c : E \to \mathbb{Z}$, $l(e) \leq c(e)$; kde l je dolní omezení toku a c horní omezení (kapacita).

7.4 Různé vlastnosti sítí a toků

Tok f je přípustný pokud pro každou hranu $e \in E$ je $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$. Přípustný tok obecně nemusí existovat; stačí například aby do některého vrcholu mohlo celkově přitéci méně, než z něho musí odtéci. Jestliže ale je dolní omezení v každé hraně nulové, tak přípustný tok vždy existuje.

Síť je *transparentní* pokud $l(e) = 0 \forall e \in E$.

Velikost přípustného toku od s do t je

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e). \tag{7.2}$$

Přípustný tok f se nazývá *maximální tok*, jestliže má největší velikost mezi všemi přípustnými toky.

7.5 Řez oddělující zdroj od spotřebiče

Je dána síť $G = (V, E)$ se zdrojem z, spotřebičem s, a omezeními l, c. Množinu vrcholů $A \subseteq V$ takovou, že $z \in A$, $s \notin A$ nazýváme *množina oddělující zdroj od spotřebiče*. Dále definujme $W^+(A)$ jako množinu hran vycházejících z množiny A, a $W^-(A)$ jako množinu hran vcházejících do množiny A. Přesněji

$$W^+(A) = \{e \mid P_V(e) \in A, K_V(e) \notin A\}, \tag{7.3}$$

$$W^-(A) = \{e \mid P_V(e) \notin A, K_V(e) \in A\}. \tag{7.4}$$

Množina

$$W(A) = W^+(A) \cup W^-(A) \tag{7.5}$$

se nazývá *řez určený množinou* A.

Maximální řez je řez $W(A)$ s nejmenší možnou hodnotou $\mathrm{cap}(W(A))$.

7.6 Tvrzení o tocích a řezech

Pro každý řez $W(A)$ a každý tok f platí

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e). \tag{7.6}$$

Důkaz.

7.7 Tvrzení o přípustných tocích a řezech

Pro každý přípustný tok f a řez $W(A)$ platí $\mathrm{vel}(f) \leq \mathrm{cap}(W(A))$.

Důkaz.

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \leq \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{c \in W^-(A)} l(e) = \mathrm{cap}(W(A)) \tag{7.7}$$

Navíc každý přípustný tok splňuje $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$. ∎

7.8 Zlepšující cesta vůči toku f

Je dán přípustný tok f. Neorientovaná cesta v grafu G od zdroje z ke spotřebiči s se nazývá *zlepšující cesta vůči f*, jestliže

$$f(e) < c(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vpřed,} \tag{7.8}$$

$$l(e) < f(e) \quad \text{pro každou hranu cesty vzad.} \tag{7.9}$$

Kapacita zlepšující cesty je

$$\mathrm{cap}(C) = \min\left(\{c(e) - f(e) \mid e \in C \text{ vpřed}\} \cup \{f(e) - c(e) \mid e \in C \text{ vzad}\}\right) \tag{7.10}$$

7.9 Změna toku f

Změna toku f podél zlepšující cesty C s kapacitou d je tok f' definovaný

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vpřed} \\ f(e) - d & \text{pro hrany } e \text{ cesty vzad} \\ f(e) & \text{pro hrany } e \text{ neležící na cestě} \end{cases} \tag{7.11}$$

7.10 Změna toku podle zlepšující cesty je přípustný tok

Je-li C zlepšující cesta kapacity d vzhledem k přípustnému toku f, pak zlepšující tok f' je také přípustným tokem a $\mathrm{vel}(f') = \mathrm{vel}(f) + d$.

Důkaz. f' je tok, $v \in C$, $v \neq s, t$.

7.11 Značkovací procedura

Vstup: přípustný tok f.
Výstup: zlepšující cesta C vůči f, nebo odpověď „ne“ a množina označkovaných vrcholů A.

1) *Inicializace.* Označkujeme zdroj s, ostatní vrcholy jsou bez značky.

2) *Test nalezení zlepšující cesty.* Jestliže byl označkován t, zpětným postupem zkonstruujeme zlepšující cestu, kterou vrátíme.

3) *Značkování dopředu.* Jestliže existuje hrana e taková, že $P_V(e)$ má značku, $K_V(e)$ nemá značku a $f(e) < c(e)$, označkujeme $K_V(e)$; pro $K_V(e)$ si zapatujeme e. `goto 2)`

4) *Značkování dozadu.* Jestliže existuje hrana e taokvá, že $K_V(e)$ má značku, $P_V(e)$ nemá značku a $l(e) < f(e)$, označkujeme $P_V(e)$; pro $P_V(e)$ so zapatujeme e. `goto 2)`

5) *Neexistuje zlepšující cesta.* Nemůžeme-li již značkovat a nebyl označkován t, vrátíme odpověď „ne“ a množinu označkovaných vrcholů A.

7.12 Tvrzení o výsledku značkovací procedury

Jestliže značkovací procedura skončila odpovědí „ne“ a vrátila množinu označkovaných vrcholů A, pak

$$\text{vel}(f) = \text{cap}(W(A)). \tag{7.12}$$

To znamená, že tok f má maximální velikost a řez určený množinou A má nejmenší kapacitu.

Důkaz. Mějme množinu označkovaných vrcholů A. $s \in A$ a $t \notin A$.

$$\text{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) \tag{7.13}$$

$$\vdots \tag{7.14}$$

$$\sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) = \text{cap}(W(A)) \tag{7.15}$$

7.13 Věta o přípustném toku a maximálním přípustném toku

Ford-Fulkersonova věta. Jestliže v síti $G = (V, E)$, s omezeními l, c, zdrojem s a spotřebičem t existuje přípustný tok, pak existuje maximální přípustný tok $f_{\max}$ a jeho vleikost je rovna kapacitě minimálního řezu.

7.14 Přírůstková síť vzhledem k toku

Mějme přípustný tok f v $G = (V, E)$, s omezeními l, c, zdrojem s a spotřebičem t. Pak síť $G = (V, E_f)$ je přírůstková síť toku f, se zdrojem s, spotřebičem t, nulovým dolním omezením a kapacitou c_f, kde

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = c(e) - f(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } f(e) < c(e). \tag{7.16}$$

$$(u, v) \in E_f \text{ a } c_f(u, v) = f(e) - l(e) \quad \text{jestliže pro } e \in E, e = (u, v) \text{ a platí } l(e) < f(e). \tag{7.17}$$

Každá zlepšující cesta od zdroje s ke spotřebiči t je zlepšující cestou v G_f s tím, že všechny hrany cesty jsou hranami vpřed; tj. jedná se o orientovanou cestu v G_f.

7.15 Vrstvená síť

Mějme přírustkovou síť G_f. Pak její podgraf, který obsahuje všechny hrany některé nejkratší (na počet hran v cestě) zlepšující cesty od s k t se nazývá *vrstvená síť*.

Sestrojit k dané přírůstkové síti vrstvenou síť je možné v čase úměrném počtu hran přírůstkového grafu G_f, a tudíž i původního grafu G.
Uvědomme si, že G_f má nejvýše dvakrát tolik hran jako G.

7.16 Cirkulace

Je dán orientovaný graf $G = (V, E)$ a omezení l, c. Zobrazení $f : E \to \mathbb{Z}$ se nazývá *cirkulace*, jestliže Kirchhoffův zákon platí pro všechny vrcholy $v \in V$.

Cirkulace se nazývá *přípustná*, jestliže navíc pro každou hranu $e \in E$ platí $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

7.17 Kapacita řezu

Mějme síť $G = (V, E)$ s ohodnoceními l, c. Uvažujme neprázdnou množinu vrcholů $A \subset V$ takovou, že $A \neq V$. Pak kapacita řezu $W(A)$ je definovaná jako

$$\operatorname{cap}(W(A)) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e). \tag{7.18}$$

7.18 Souvislost přípustné cirkulace a řezu

V síti $G = (V, E)$ s ohodnoceními l, c existuje přípustná cirkulace právě tehdy, když neexistuje řez záporné kapacity.
Přípustná cirkulace tedy existuje právě tehdy, když každá množina vrcholů A má tu vlastnost, že tok, který do ní povinně musí vtéci kvůli dolnímu omezení l na hranách z $W^-(A)$, může z této množiny také odtéci díky hornímu omezení c na hranách z $W^+(A)$.

Důkaz. Existuje-li přípustná cirkulace f, pak pro každý řez platí

$$C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e) - \sum_{e \in W^-(A)} l(e) \geq \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e) = 0. \tag{7.19}$$

Jestliže naopak přípustná cirkulace neexistuje, pak existence řezu se zápornou kapacitou vyplne z algoritmu pro hledání přípustné cirkulace.

8 Párování

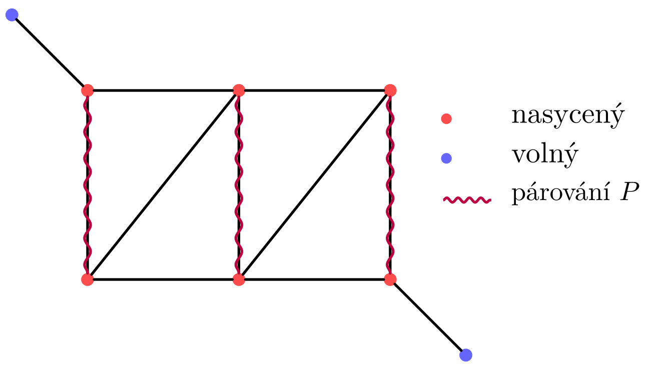
8.1 Definice

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. Podmnožina hran $P \subseteq E$ se nazývá *párování*, jestliže v P neexistují 2 různé hrany se společným krajním vrcholem (takže vrchol má stupeň max. 1).

8.2 Vrchol nasycený a volný v párování

Mějme párování P. Vrchol v grafu nazvěme *nasycený* v P, pokud existuje hrana $e \in P$ incidentní s v.

V opačném případě říkáme, že vrchol v je *volný* v P.



8.3 Perfektní párování

Párování P v grafu G nazveme *perfektní párování*, jestliže každý vrchol grafu je nasycen v P. To znamená, že P má $\frac{n}{2}$ hran, kde n je počet vrcholů grafu G.

8.4 Maximální párování

Párování P v grafu G nazveme *maximální párování*, jestliže je nejpočetnější mezi všemi072 párováními v grafu G.

Perfektní párování je jistě maximální. Naopak to neplatí. Existují grafy, které perfektní párování nemají — stačí uvažovat grafy s lichým počtem vrcholů. Ovšem ani grafy se sudým počtem vrcholů nemusí perfektní párování obsahovat.

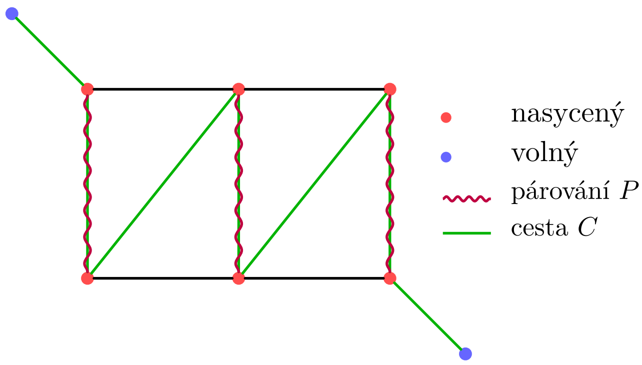
V každém grafu existuje maximální párování.

8.5 Střídavá cesta vůči párování P

Je dáno párování P v grafu G. Cesta $C = e_1, e_2, \dots, e_k$ v grafu G se nazývá *střídavá cesta vůči* P, jestliže platí následující dvě podmínky:

1) hrany z cesty C střídavě leží a neleží v párování P,

2) jestliže krajní vrchol v cesty C je nasycen v P, pak C obsahuje i hranu párování P, která vrchol v nasycuje.



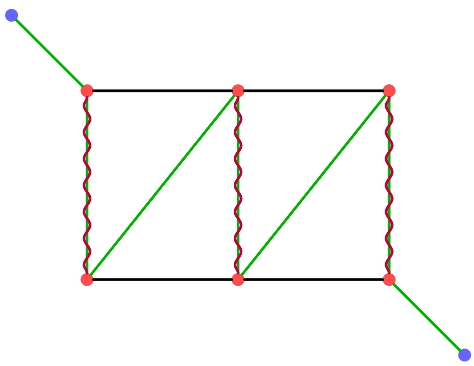
8.6 Zlepšující cesta vůči párování P

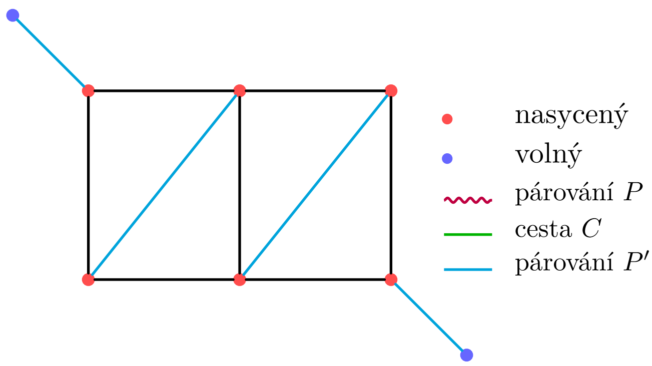
Střídavá cesta mezi volnými vrcholy se nazývá *zlepšující cesta vůči P*.

8.7 Tvrzení o střídavé cestě

Jestliže C je střídavá cesta vůči párování P, pak množina hran $P' = C \oplus P$ je také párování v G. *Připomeňme, že symetrická diference $A \oplus B$ dvou množin A, B je množina*

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{8.1}$$





A pokud je navíc C zlepšující cesta, tj. cesta mezi volnými vrcholy v P, pak $|P'| = |P| + 1$.

8.8 Věta o vrcholově disjunktních zlepšujících cestách

Berge. Je dáno párování P v grafu G. Označme $P_{\max}$ maximální párování v G (o kterém víme, že existuje). Jestliže

$$|P_{\max}| = |P| + k, \tag{8.2}$$

pak v G existuje k vrcholově disjunktních zlepšujících cest vůči P.

Přitom alespoň jedna z těchto cest je kratší než $\frac{n}{k}$, kde n je počet vrcholů.

Důkaz. Utvořme symetrickou diferenci hran obou párování, tj. $H = P \oplus P_{\max} = (P \setminus P_{\max}) \cup (P_{\max} \setminus P)$. Uvažujme graf, který obsahuje všechny vrcholy grafu G a hrany H. V tomto grafu má každý vrchol stupeň nejvýše 2. Mějme libovolný vrchol v. Pak nastane některé z následujících možností:

(a) není nasycen ani v P ani v $P_{\max}$, pak $d_H(v) = 0$;

(b) je nasycen buď v P, nebo v $P_{\max}$, pak $d_H(v) = 1$;

(c) je nasycen v obou párováních, pak $d_n(v) = 0$, jestliže stejnou hranou, nebo $d_H(v) = 2$.

Komponenty souvislosti grafu (V, H) jsou buď isolované vrcholy (stupeň 0), nebo kružnice, nebo cesty. Jak v křuznicích, tak v cestách se střídají hrany z P a $P_{\max}$. Proto jsou kružnice sudé délky, cesty pak sudé či liché délky.

Mezi komponentami souvislosti nemůže existovat cesta liché délky, která by měla víc hran z P než z $P_{\max}$ (byla by to totiž zlepšující cesta vůči $P_{\max}$ a ta neexistuje). Každá cesta liché délky je proto zlepšující cestou vzhledem k párování P. Víme, že každá kružnice i každá cesta sudé délky má stejný počet hran z P a $P_{\max}$. Ukážeme-li tedy, že H obsahuje o k více hran z $P_{\max}$ než z P, budeme mít dokázáno, že existuje k komponent grafu H, které jsou zlepšujícími cestami vůči P.

Máme

$$H = (P_{\max} \setminus P) \cup (P \setminus P_{\max}) . \tag{8.3}$$

Platí

$$|P_{\max} \setminus P| = |P_{\max}| - |P \cap P_{\max}| = |P| + k - |P \cap P_{\max}| = |P \setminus P_{\max}| + k. \tag{8.4}$$

■

8.9 Souvislost perfektního párování a počtu komponent

Tutte. Je dán prostý graf $G = (V, E)$ bez smyček s alespoň třemi vrcholy. V grafu G existuje perfektní párování právě tehdy, když pro každou podmnožinu $S \subseteq V$ platí

$$g(G \setminus S) \leq |S|, \tag{8.5}$$

kde $g(G \setminus S)$ je počet komponent souvislosti grafu $G \setminus S$, které mají lichý počet vrcholů.

Důkaz.
„$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že v grafu G existuje perfektní párování (tj. párování nasycující všechny vrcholy grafu G). Vezměme libovolnou $S \subseteq V$. Protože v každé liché komponentě souvislosti grafu $G \setminus S$ je alespoň jeden vrchol, který není spárován uvnitř komponenty, musí být v perfektním párování spárován s nějakým vrcholem S. Proto nemůže být $|S|$ menší než počet lichých komponent.

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že graf G splňuje $g(G \setminus S) \leq |S|$ pro každou $S \subseteq V$.

Nejprve si uvědomme, že pro $S = \emptyset$ podmínka zaručuje, že graf G má sudý počet vrcholů.

Dále si uvědomme, že splňuje-li G podmínku (8.5) a přidáme-li k němu hranu e mezi stávajícimi vrcholy, pak graf $G + e$ také splňuje podmínku (8.5). Ano, graf $(G + e) \setminus S$ má buď stejně lichých komponent jako $G \setminus S$, nebo o dvě méně.

Předpokládejme, že by existoval graf G splňující (8.5), který nemá perfektní párování, tak vybereme jako G ten z nich, který nemá perfektní párování, ale přidáním libovolné hrany už perfektní párování mít bude.

Označme T množinu všech vrcholů stupně $n - 1$, kde $n = |V|$. Platí $T \subseteq V$ a proto pro ni musí platit podmínka (8.5). Nejprve dokážeme, že každá komponenta souvislosti grafu $G \setminus T$ je úplný graf.

Kdyby existovala komponenta souvislosti C grafu $G \setminus T$, která není úplným grafem, pak by v C existovaly vrcholy x, y, z takové, že $\{x, y\}, \{y, z\} \in E$ a $\{x, z\} \notin E$. Navíc vrchol z neleží v T, proto existuje vrchol $w \notin T$ takový, že $\{z, w\} \notin E$.

Označme P_1 perfektní párování v grafu $G + \{x, y\}$ a P_2 perfektní párování v grafu $G + \{z, w\}$. Dále označme H symetrickou diferenci párování $P_1 \oplus P_2$. Platí $\{x, y\}, \{z, w\} \in H$. Rozebereme nyní dva případy:

(a) Hrany $\{x, y\}, \{z, w\}$ leží v různých komponentách souvislosti A, B v H, $\{x, y\} \in A$, $\{z, w\} \in B$. Pak párování P, které obsahuje hrany P_2 komponenty A jinak hrany P_1, je perfektní párování v grafu G. Což je spor s faktem, že G nemá perfektní párování.

(b) Hrany $\{x, y\}, \{z, w\}$ leží ve stejné komponentě souvislosti A grafu H. Komponenta A je kružnice sudé délky, která střídavě obsahuje hrany z P_1 a P_2. Označme K_1 tu část A, která začíná ve vrcholu z, pokračuje z P_1 a po hraně z P_2 poprvé navštíví jeden z vrcholů x, y. *BÚNO* předpokládejme, že je to vrchol y. Dále označme K_2 zbylou část kružnice A, ze které jsme odstranili hranu $\{x, y\}$. Definujme P takto: P obsahuje

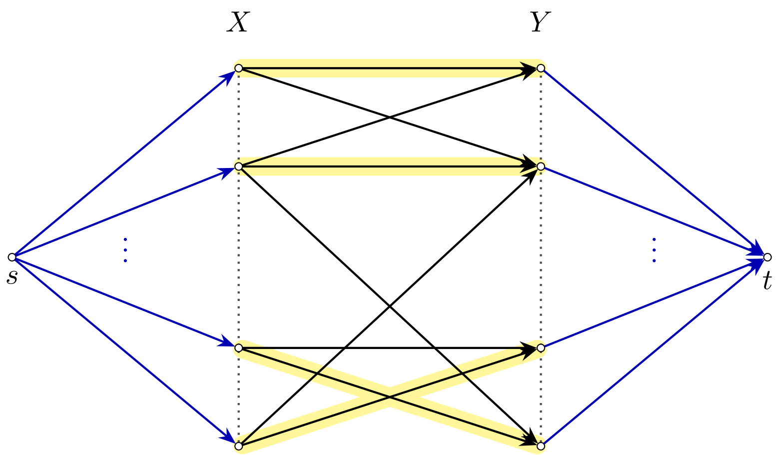
- $K_1 \cap P_2$,
- $K_2 \cap P_1$,
- $\{x, z\}$.

Tím jsme získali perfektní párování v grafu G; opět spor.

Víme tedy, že všechny komponenty souvislosti grafu $G \setminus T$ jsou úplné grafy. Definujme párování P takto: *V každé komponentě souvislosti grafu $G \setminus T$ o sudém počtu vrcholů vybereme libovolné perfektní párování; v komponentě souvislosti $G \setminus T$ o lichém počtu vrcholů spárujeme libovolně všechny vrcholy až na jeden, který spárujeme s některým vrcholem T.* Protože lichých komponent $G \setminus T$ je nejvýše tolik jako $|T|$, můžeme to udělat. Navíc je počet vrcholů sudý, takže nám z množiny T zbyde sudý počet nespárovaných vrcholů, jedná se ovšem o vrcholy, které jsou spojeny s každým vrcholem grafu, můžeme proto zbylé vrcholy mezi sebou libovolně spárovat. Zase jsme ukázali, že v G existuje pefektní párování. ■

8.10 Párování v bipartitních grafech

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y. K němu je možné vytvořit síť takovou, že každému párování P v grafu G odpovídá přípustný tok f, a naopak každému přípustnému toku f v síti odpovídá párování P v G; a to tak, že $\text{vel}(f) = |P|$.



Vytvořme síť G' s omezeními l, c, zdrojem s, spotřebičem t a hranami

$$E' : \quad (s, x) \forall x \in X \tag{8.6}$$
$$(y, t) \forall y \in Y. \tag{8.7}$$

A dále zorientujme: $\forall \{x, y\} \in E(G)$, $x \in X$, $y \in Y$ E' obsahuje (x, y). Pak omezení takové sítě $l(e) = 0$, $c(e) = 1$, $\forall e \in E'$.

Pro párování uděláme přípustný tok f_p, že

$$\{x, y\} \in P : f_P((x, y)) = 1. \tag{8.8}$$

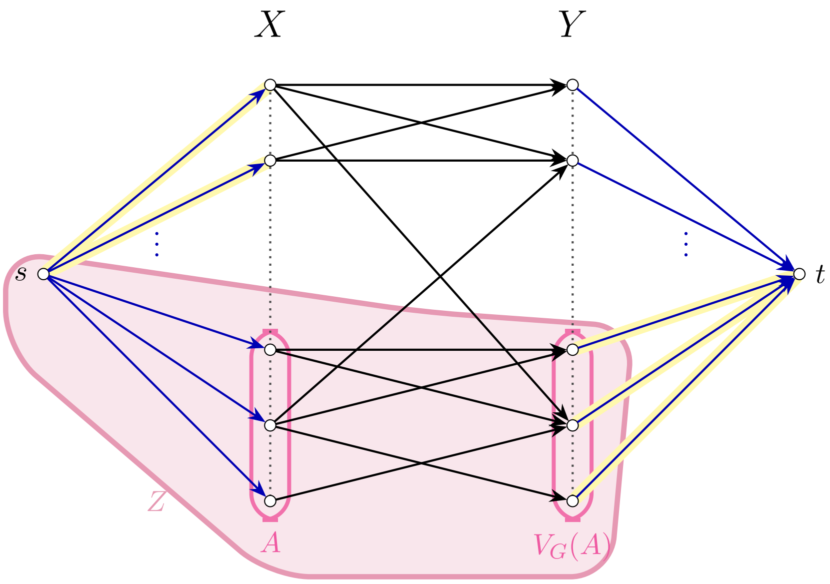
Takže $|P| = \text{vel}(f_P)$; *„projde tolik jedniček, kolik je hran párování“.*

No a $\{x, y\} \in P_f$ právě tehdy, když $f((x, y)) = 1$. Tedy $\text{vel}(f) = |P_f|$.

8.11 Věta o maximálním párování

König. Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y. Označme $P_{\max}$ maximální párování v G. Pak platí

$$|P_{\max}| = \min_{A \subseteq X}(|X \setminus A| + |V_G(A)|). \tag{8.9}$$



$Z = \{s\} \cup A \cup V_G(A)$, $t \notin Z$.

$$W^+(Z) = \{(s,x) \mid x \notin A\} \cup \{(y,t) \mid y \in V_G(A)\} = |\{(s,x) \mid x \notin A\}| + |\{(y,t) \mid y \in V_G(A)\}| \tag{8.10}$$

$$\operatorname{cap}(W(Z)) = \underbrace{\sum c(e)}_{e \in W^+(Z)} \tag{8.11}$$

A určuje řez $W(Z)$ s $\operatorname{cap}(W(Z)) = |X - A| + |V_G(A)|$.

Minimální řez má tvar $Z_0 = \{s\} \cup A_0 \cup V_G(A_0)$ pro vhodné $A_0 \subseteq X$, kde Z_0 je množina označkovaných vrcholů a $A_0 = Z_0 \cap X$.

Musíme ukázat, že $Z_0 \cap Y = V_G(A_0)$.

$$Z_0 \cup Y \subseteq V_G(A_0) \tag{8.12}$$
$$Z_0 \cup Y \supseteq V_G(A_0) \tag{8.13}$$

8.12 Věta o nasycujícím párování

Hall. Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y. Pak v G existuje párování nasycující stranu X právě tehdy, když pro každou množinu $A \subseteq X$ platí

$$|A| \leq |V_G(A)| = \{y \mid y \in Y \wedge \{x,y\} \in E\}\,. \tag{8.14}$$

Důkaz. Jestliže v grafu G existuje párování nasycující stranu X, pak G podmínku věty splňuje (párování každému vrcholu z množiny A „přiřazuje“ vrchol z $V_G(A)$, a tudíž vrcholů v $V_G(A)$ musí být alespoň tolik, kolik je vrcholů v A.)

„$\Leftarrow$“: Víme, že $|P_{\max}| = |X \setminus A_0| + |V_G(A)|$ pro nějakou $A_0 \subseteq X$ (z Königovy věty). Sporem. Kdyby $P_{\max}$ nenasycovalo X. Tak $|P_{\max} < |X|$. Takže

$$|X \setminus A_0| + |V_G(A)| < |X| \tag{8.15}$$
$$|X| - |A_0| + |V_G(A)| < |X| \tag{8.16}$$
$$|V_G(A)| < |A_0| \tag{8.17}$$

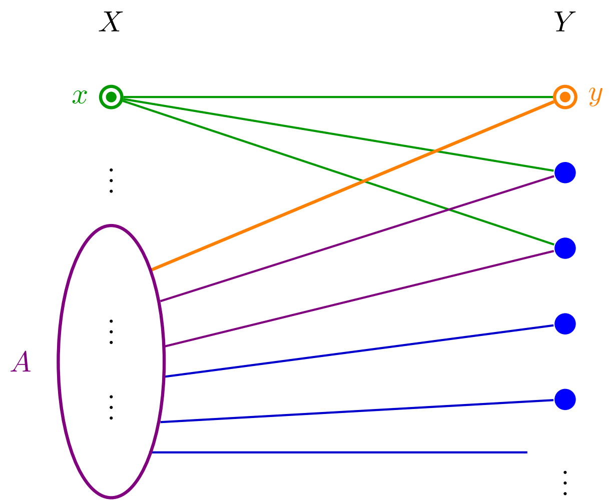
Což je spor. ∎

8.13 Tvrzení o vztahu stupňů vrcholů a nasycujícího párování

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y. Jestliže pro každý vrchol $x \in X$ a každý vrchol $y \in Y$ platí

$$d(x) \geq d(y), \tag{8.18}$$

pak v G existuje párování nasycující stranu X.



Důkaz. Označme $d_X = \min\{d(x) \mid x \in X\}$ a $d_Y = \max\{d(y) \mid y \in Y\}$. Z předpokladu víme

$$d_X \geq d_Y. \tag{8.19}$$

Použijme Hallovu větu. Vezměme libovolnou množinu $A \subseteq X$.

$$W(A) \subseteq W(V_G(A)) \tag{8.20}$$
$$\text{a } |W(A)| \geq d_X|A|, |W(V_G(A))| \leq d_Y|V_G(A)| \tag{8.21}$$

Takže

$$d_X|A| \leq |W(A)| \leq |W(V_G(A)) \leq d_Y|V_G(A)| \tag{8.22}$$

a současně $d_X \geq d_Y$.

Může být $|A| > |V_G(A)|$? Kdyby ano, tak

$$d_X|A| > d_Y|V_G(A)|. \tag{8.23}$$

Což neplatí, takže

$$|A| \leq |V_G(A)|. \tag{8.24}$$

A tedy Hallova věta říká, že existuje párování nasycující X. ∎

8.14 Tvrzení o existenci nasycujícího párování všech vrcholů

Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y. Pak existuje párování, které nasycuje všechny vrcholy nejvyššího stupně.

Důsledek. Je dán bipartitní graf $G = (V, E)$ se stranami X a Y. Označme $\Delta(G)$ nejvyšší stupeň, který některý vrchol grafu má. Pak množinu hran E je možno rozdělit na $\Delta(G)$ hranově disjunktních párování.

Důkaz. Vytořme G', že k němu přidáme hrany a vrchol tak, aby

$$\Delta(G) = d_{G'}(x) = d_{G'}(y)\,\forall x \in X,\, \forall y \in Y. \tag{8.25}$$

V novém grafu G', protože

$$d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y)\,\forall x \in X,\, \forall y \in Y, \tag{8.26}$$

existuje párování nasycující X.

Vybrali jsme maximální párování $P_{\max}$. Odstraníme všechny hrany neležící v G.

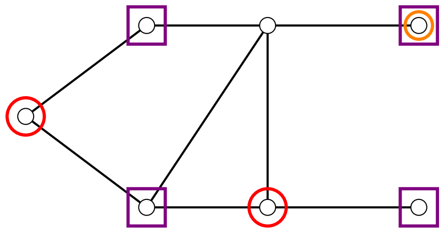
Musí zůstat nasyceny ty vrcholy, které měly největší stupeň. Tím dostaneme párování P nasycující vrcholy nejvyššího stupně. ■

9 Pokrývání

9.1 Nezávislé množiny, nezávislost

Mějme graf $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Množinu vrcholů $A \subseteq V$ nazveme *nezávislou množinou*, jestliže v grafu neexistuje hrana s oběma krajními vrcholy v A.

Nezávislost grafu, značíme ji $\alpha_0(G)$, je rovna počtu vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině v G.



tvoří nezávislou množinu

maximální nezávislá je • + •

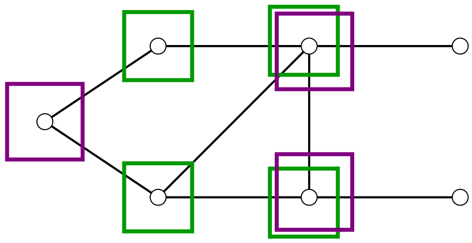
nejpočetnější $\alpha_0(G) = 4$

9.2 Vrcholové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Množina vrcholů $K \subseteq V$ se nazývá *vrcholové pokrytí*, jestliže každá hrana $e \in E$ má alespoň jeden krajní vrchol v K.

Počet vrcholů v nejméně početném vrcholovém pokrytí v grafu G značíme $\beta_0(G)$.

Jestliže K je vrcholové pokrytí a $K \subseteq K'$, tak K' je také vrcholové pokrytí.



Zelené: 4 vrcholy (běžné pokrytí)

Fialové: 3 vrcholy ($\beta_0(G) = 3$)

9.3 Věta o vztahu vrcholového pokrytí a nezávislosti

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy. Platí

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n. \tag{9.1}$$

Důkaz. Máme $G = (V, E) \in \mathcal{S}$. $|V| = n$.
„$\geq$“: Uvažujme N nezávislou, $|N| = \alpha_0(G)$. Pak $V \setminus N$ je vrcholové pokrytí. Což znamená

$$|V \setminus N| = n - \alpha_0(G) \geq \beta_0(G). \tag{9.2}$$

Takže

$$n \geq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \tag{9.3}$$

„$\leq$“: Uvažujme vrcholové pokrytí K s $|K| = \beta_0(K)$. Pak $V \setminus K$ je nezávislá množina. A

$$|V \setminus K| = n - \beta_0(G) \leq \alpha_0(G). \tag{9.4}$$

Tudíž

$$n \leq \alpha_0(G) + \beta_0(G). \tag{9.5}$$

Dostáváme tedy

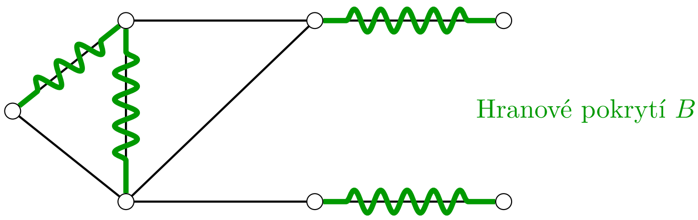
$$n = \alpha_0(G) + \beta_0(G). \tag{9.6}$$

■

9.4 Hranové pokrytí

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a izolovaných vrcholů. Množina hran $B \subseteq E$ se nazývá *hranové pokrytí*, jestliže každý vrchol je krajním vrcholem alespoň jedné hrany z B.

Definujme $\beta_1(G)$ jako počet hran v nejméně početném hranovém pokrytí.



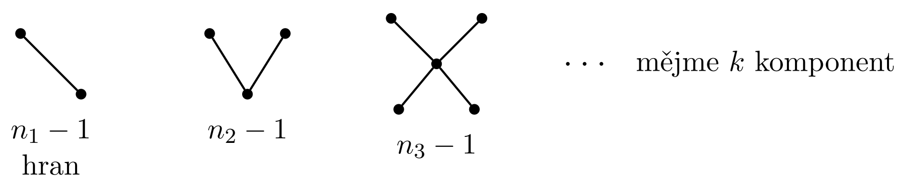
9.5 Věta o vztahu hranového pokrytí a maximálního párování

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ bez izolovaných vrcholů s n vrcholy. Pak platí

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n, \tag{9.7}$$

kde α_1 je počet hran v maximálním párování grafu G (tj. $\alpha_1(G) = P_{\max}$).

Důkaz.
„$\leq$": Vezmeme nejméně početné hranové pokrytí $B \subseteq E$. Jak vypadají komponenty souvislosti (U, B)?



Takže

$$\beta_1 = |B| = \underbrace{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}_{n} - k = n - k. \tag{9.8}$$

Mějme párování P, kde z každé komponenty souvislosti vezmeme jednu libovolnou hranu, takže $|P| = k$. Tedy máme $b_1(G) = n - k$ a $|P| = k \leq \alpha_1(G)$.

$$n = \beta_1(G) + k \leq \beta_1(G) + \alpha_1(G) \tag{9.9}$$

$$n \leq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \tag{9.10}$$

„$\geq$": Mějme $P_{\max}$, párování s $|P_{\max} = \alpha_1(G)$.

$2\alpha_1(G)$ vrcholů je pokryto $P_{\max}$. Nepokryto je $n - 2\alpha_1(G)$ vrcholů. $B = P_{\max}$ v $\{e \mid e \text{ je přidaná}\}$.

$$|B| = \alpha_1(G) + n - 2\alpha_1(G) = n - \alpha_1(G) \geq \beta_1(G) \tag{9.11}$$

$$n \geq \alpha_1(G) + \beta_1(G) \tag{9.12}$$

Dostáváme tedy

$$n = \alpha_1(G) + \beta_1(G). \tag{9.13}$$

■

10 Barvení

10.1 Hranové obarvení

Je dán graf bez smyček $G = (V, E, \varepsilon)$ a konečná množina C tzv. barev. *Hranové obarvení* G je přiřazení $c : E \to C$, že žádné dvě hrany se společným krajním vrcholem nemají stejnou barvu.

Lze také říci, že se snažíme graf pokrýt vzájemně disjunktními párováními.

10.2 Hranová barevnost

Hranová barevnost, též *chromatický index*, grafu G je nejmenší počet barev, kterými lze hranově obarvit graf G, značíme ji $\chi'(G)$.

Nutně platí, že

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \tag{10.1}$$

10.3 Věta o souvislosti hranové barevnosti a maximálním stupni grafu

Vizing. Je dán graf bez smyček $G = (V, E, \varepsilon)$. Pak

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1. \tag{10.2}$$

Bez důkazu.

10.4 Vrcholové obarevní

Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a konečná množina B (nazývaná též množina barev). *Obarvení vrcholů* grafu (též *vrcholové obarvení* grafu) je $b : V \to B$, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu.

G nazveme k-barevný, jestliže se dá obarvit k barvami.

10.5 Barevnost grafu

Barevnost grafu G, též *chromatické číslo* grafu G, je nejmenší k takové, že G je k-barevný, značíme ji $\chi(G)$.

10.6 Tvrzení o dvoubarevném grafu

Graf G je dvoubarevný právě tehdy, když G neobsahuje kružnici liché délky, tedy G je bipartitní.

DŮKAZ. Ať $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, tak, že:

$$\begin{aligned} v \in A &\iff \text{má barvu } 1 \\ v \in B &\iff \text{má barvu } 2 \end{aligned}$$

Stačí ukázat, že nemá-li G kružnici liché délky, dá se obarvit 2 barvami.

Dokažme algoritmem barvení. Vyberme si počáteční vrchol v. Následně aplikujme algoritmus BFS (breath-first-search), kterým graf rozdělíme do několika úrovní. Každé úrovni přiřadíme barvu tak, že

$$b(v) = \begin{cases} 1 \iff v \in H_{2i}, \\ 2 \iff v \in H_{2i+1}, \text{ pro } i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{10.3}$$

Kdyby b nebylo obarvení; existuje $\{x, y\} \in E$, kde $x \in H_i$ a $y \in H_j$ tak, že $i + j = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

V našem grafu existuje cesta P_i z v do x o i hranách, a zároveň existuje cesta P_j z v do y o j hranách.

Když vezmeme P_i, $\{x, y\}$, P_j (pozpátku), jedná se o uzavřený sled o $i + j + 1 = 2k + 1$ hranách.

Dále máme kružnici o $i + j + 1 - 2\ell$ hranách, kde ℓ je počet hran ve společném úseku P_i, P_j.

TODO: AŽ SE SEM DOPLNÍ OBRÁZEK, BUDE TO HNED JASNÝ. ■

10.7 Tvrzení o vztahu barevnosti grafu a nezávislosti grafu

Pro každý neorientovaný graf G bez smyček o n vrcholech a m hranách platí

(a) $\alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1$;

(b) $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n$;

(c) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$;

kde $\alpha_0(G)$ je počet $|N|$ tak, že N je nejpočetnější nezávislá.

Důkaz.

(a) Ať b je optimální obarvení. To rozděluje G na nezávislé množiny dle barev. A všech vrcholů v množině je nejvýše $\alpha_0(G)$, protože to je ta nejpočetnější. Sjednocením těchto množin pak dostaneme $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \leq n$. ■

(b) Ať

$$v \in N \quad \ldots \quad b(n) = 1, \tag{10.4}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-\alpha_0(G)} \end{matrix}\right\} b(x_i) = i + 1. \tag{10.5}$$

Má tedy $1 + n - \alpha_0(G)$ barev. Upravme

$$1 + n - \alpha_0(G) \geq \chi(G) \tag{10.6}$$

$$\alpha_0(G) + \chi(G) \leq n + 1 \tag{10.7}$$

■

(c) Ať b je optimální obarvení. Mějme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$, kde $k = \chi(G)$. Mezi každými 2 množinami je alepsoň jedna hrana, tj.

$$m \geq \frac{k(k-1)}{2}. \tag{10.8}$$

Upravme:

$$2m \geq k^2 - k \tag{10.9}$$
$$0 \geq 2k^2 - k - 2m \tag{10.10}$$

Určeme kvadratické kořeny:

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2m} \tag{10.11}$$

A po analýze funkce víme, že

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}. \tag{10.12}$$

■

10.8 Tvrzení o největším stupni vrcholu a barevnosti grafu

Označme Δ největší stupeň vrcholu grafu $G \in \mathcal{S}$. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta + 1. \tag{10.13}$$

Důkaz. Algoritmem sekvenčního barvení.

Označme $B = \{1, 2, \ldots, \Delta, \Delta + 1\}$. Iterujme:

1) Očíslujeme vrcholy grafu G, tj. $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2) Barvíme vrcholy v tomto pořadí, že $b(v_i) = j \iff j$ je nejmenší barva, kterou nemá žádný z již obarvených sousedů.

■

10.9 Příklad použití algoritmu sekvenčního barvení

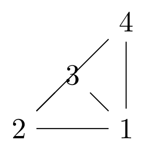
10.10 Věta o souvislosti největšího stupně vrcholu a barevnosti grafu

Brooks. Nechť G je prostý souvislý graf bez smyček, který není ani úplný ani kružnice liché délky. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta(G). \tag{10.14}$$

Důkaz. Omezme se na $\Delta(G) \geq 3$. Indukcí podle $|V| = n$.

(a) *Základní krok*, $n = 4$.



(b) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že každý souvislý $G' \in \mathcal{S}$, $|V'| = n$, který není K_n a má $\Delta(G') \geq 3$ se dá obarvit $\Delta(G')$ barvami.

(c) *Indukční krok.* $G = (V, E)$, $|V| = n + 1$. Zvolme $u_0 \in V$, pak $G \setminus u_0 = H$ je graf o n vrcholech.

11 Grafy a vektorové prostory

11.1 Těleso $\mathbb{Z}_2$

$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ se skládá ze dvou prvků, tj. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, a na této množině jsou definovány dvě operace:

sčítání $+$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

násobení $\cdot$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

11.2 Symetrická diference

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$, $W_G = P(E) = \{x \mid x \subseteq E\}$ je množina všech podmnožin množin hran E (P je potenční množina). Na W_G definujme symetrickou diferenci, značíme $\oplus$, tak, že

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y). \tag{11.1}$$

Platí

(a) *Komutativita.* $X \oplus Y = Y \oplus X$.

(b) *Inverz.* $X \oplus X = \emptyset$. Každý prvek je inverz sám k sobě.

(c) *Neutrálnost.* $X \oplus \emptyset = X$.

(d) *Asociativita.* $X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$

Když $(W_G, \oplus, \emptyset)$, pak se jedná o komutativní grupu s neutrálním prvkem $\emptyset$, kde $X \oplus X = \emptyset$, tj. prvek X je opačný sám k sobě.

Definujme násobení $\star$ prvků z W_G skaláry 0 a 1 takto

$$1 \star X = X, \quad 0 \star X = \emptyset. \tag{11.2}$$

$(W_G, \emptyset, \star)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_2$.

11.3 Tvrzení o isomorfnosti W_G

$(W_G, \oplus, \cdot)$ je isomorfní s $\mathbb{Z}_2^m$, kde m je počet hran grafu G.

Důkaz. Nejdříve si připomeňme charakteristické funkce.

$$W_G = P(E), E = (e_1, e_2, \dots, e_m) \tag{11.3}$$

$$X \subseteq E \rightsquigarrow X_x(i) = \begin{cases} 1 & \iff e_i \in X \\ 0 & \iff e_i \notin X \end{cases} \tag{11.4}$$

$$X \rightsquigarrow (a_1, a_2, \dots, a_m) \tag{11.5}$$

$$\emptyset \rightsquigarrow (0, 0, \dots, 0) \tag{11.6}$$

$$E \rightsquigarrow (1, 1, \dots, 1) \tag{11.7}$$

$$Y \rightsquigarrow (b_1, b_2, \dots, b_m) \tag{11.8}$$

$$X \oplus Y \rightsquigarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m), \text{ kde } + \text{ je z } \mathbb{Z}_2 \tag{11.9}$$

Tvrzení nám říká

$$(W_G, \oplus, \cdot) \rightsquigarrow (Z_2^m, +, \cdot). \tag{11.10}$$

Což znamená

$$(a_1, \ldots, a_m) + (b_1, \ldots, b_m) = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m). \tag{11.11}$$

$\blacksquare$

12 Kružnice a řezy

12.1 Řez

Ať G je souvislý graf. Množina hran $S \subseteq E$ je *řez*, jestliže existuje rozklad V na dvě neprázdné množiny V_1, V_2 takové, že

$$S = \{e \mid e = \{u, v\}, u \in V_1, v \in V_2\}. \tag{12.1}$$

S značíme $\langle V_1, V_2 \rangle$.

12.2 Věta o dvou různých řezech

Jsou dány dva různé řezy $S_1 = \langle V_1, V_2 \rangle$, $S_2 = \langle W_1, W_2 \rangle$ souvislého neorientovaného grafu G. Pak $S_1 \oplus S_2$ je také řez grafu G.

Důkaz. A víme

$$A \cup B \neq \emptyset \tag{12.2}$$
$$A \cup C \neq \emptyset \tag{12.3}$$
$$B \cup D \neq \emptyset \tag{12.4}$$
$$C \cup D \neq \emptyset \tag{12.5}$$

Označme: $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. $[X, Y] = \{e = \{u, v\} \mid u \in X, v \in Y\}$.

$$\langle V_1, V_2 \rangle = [A, C] \cup [A, D] \cup [B, C] \cup [B, D] \tag{12.6}$$

A protože jsou disjunktní, namísto $\cup$ můžeme psát $\oplus$.

$$\langle W_1, W_2 \rangle = [A, B] \oplus [A, D] \oplus [C, B] \oplus [C, D] \tag{12.7}$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle W_1, W_2 \rangle = [A, B] \oplus [A, C] \oplus [B, D] \oplus [C, D] \tag{12.8}$$
$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle W_1, W_2 \rangle = \langle A \cup D, B \cup C \rangle \tag{12.9}$$

Ověřme $A \cup D \neq \emptyset \neq B \cup C$. To by muselo platit $V_1 = W_2$ a $V_2 = W_1$, což neplatí. ■

12.3 Prostor řezů

Je dán souvislý graf $G = (V, E)$. *Prostor řezů* je vektorový podprostor generovaný množinou všech řezů grafu G. Značíme ho $(W_R, \oplus, \emptyset, \cdot)$.

Jinými slovy $W_R = \{S \mid S \text{ je řez}\} \cup \{\emptyset\}$.

12.4 Cutset

Je dán souvislý graf $G = (V, E)$. *Cutset* (min-řez) je minimální (ne nejmenší, ale minimální) množina $S \subseteq E$ taková, že $G \setminus S$ je nesouvislý graf.

12.5 Tvrzení o souvislosti cutsetů

Je dán řez $S = \langle V_1, V_2 \rangle$ souvislého neorientovaného grafu G. Pak S je cutsetem právě tehdy, když podgrafy indukované množinami V_1 a V_2 jsou souvislé.

12.6 Tvrzení o řezu a kostrách

Množina hran $S \subseteq E$ je řez právě tehdy, když má s každou kostrou T grafu G neprázdný průnik, tj. $S \cap T \neq \emptyset$.

Důkaz.
„$\Rightarrow$“: $S \subseteq E$ je řez. Tzn. $G \setminus S$ je nesouvislý. Mějme libovolnou kostru T. Kdyby $T \cap S = \emptyset$, tak v $G \setminus S$ existují hrany T. Tj. $G \setminus S$ je souvislý. Což je spor.

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že $T \cap S \neq \emptyset \, \forall T$.
Kdyby $G \setminus S$ bylo souvislé, tak existuje kostra T_1 grafu $G \setminus S$. Vrcholy jsou stejné, takže T_1 je kostra G. To ale znamená $S \cap T_1 = \emptyset$. Takže $G \setminus S$ musí být nesouvislé. Což je spor. ■