

Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

22. listopadu 2025

Příklad 3.1. Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má průměr $\text{diam}(G)$ roven 2 a má $2n - 5$ hran?

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověřme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\text{diam}(C_5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů v_1, v_2, \dots, v_5 a spojíme je do kružnice C_5 . Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy u_1, u_2, \dots, u_k . Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5 . Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3 . Pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3) .

Ověřme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

- 1) **Počet hran.** Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.
- 2) **2-souvislost.** Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověřme tedy indukcí: Odeberme u_i ; graf G_{n-1} , který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dálé až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1 , který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

Zkusme odebrat v_1 : Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5 . Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3 . Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3 .

Anebo odeberme v_2 , v_4 , nebo v_5 . BÚNO vyberme v_2 . Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3 . Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3 . Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

- 3) **Průměr** $\text{diam}(G) = 2$. Vrcholy jsou buď vzájemně sousedé, anebo mají společného souseda.
Jestliže oba vrcholy leží na C_5 , tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\text{diam}(C_5) = 2$.
Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i , pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3 , tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i , pak:
 - je jeden z vrcholů v_1 , respektive v_3 , pak jsou sousedé, $d = 1$.
 - je jeden z vrcholů v_2 , pak mají společné sousedy v_1 a v_3 , $d(v_2, u_i) = 2$.
 - je jeden z vrcholů v_4 , pak mají společného souseda v_3 , $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5 .Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. Dokažte nebo vyvráťte:

Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako **indukovaný podgraf** úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G , ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y , nejen hrany s krajními vrcholy x a y .)

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholem.)

Řešení 3.2. Sporem. At existuje graf G , který je prostý, souvislý, neorientovaný, $n \geq 4$ a neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$, pro který platí, že pro každou dvojici sousedních vrcholů u, v je graf $G \setminus \{u, v\}$ nesouvislý.

At (x, y) je libovolná hrana v G . Dle našeho předpokladu je $G \setminus \{x, y\}$ nesouvislý. To znamená, že množinu vrcholů $V \setminus \{x, y\}$ lze rozdělit na dvě neprázdné, disjunktní množiny A a B tak, že mezi A a B nevedou žádné hrany. Zaměřme se na situaci, kdy existuje nějaká hrana uv nitř A nebo B . Předpokládejme, že v A existuje hrana (a_1, a_2) . Dle našeho hlavního předpokladu musí platit, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je také nesouvislý. Graf $G \setminus \{a_1, a_2\}$ ale obsahuje vrcholy x, y , které jsou spojeny hranou, a celou neprázdnou množinu B . Protože původní graf G byl souvislý, každý vrchol $b \in B$ musel být v G spojen s $\{x, y\}$, protože nemohl být spojen s A . Stejně tak každý vrchol $a \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ musí být spojen s $\{x, y\}$. (x, y) je tedy most. To znamená, že $G \setminus \{a_1, a_2\}$ je souvislý. Což je spor s hlavním předpokladem, takže pro libovolnou hranu $(x, y) \in E(G)$ musí platit, že $G \setminus \{x, y\}$ je nezávislá množina.

Ted ověřme, že tento důsledek může koexistovat s našimi podmínkami $n \geq 4$ a že G neobsahuje indukovaný $K_{1,3}$. Protože G je souvislý a $n \geq 4$, musí nutně obsahovat alespoň jeden vrchol x se stupněm $\deg(x) \geq 2$. Vyberme dva různé sousedy x , označme y a z . Mějme hrany (x, y) a (x, z) . Co když hrana (y, z) (ne)existuje?

- 1) Hrana neexistuje. Protože $n \geq 4$, musí existovat alespoň jeden další vrchol $w \neq x, y, z$. Dle prvního důkazu již víme, že $(z, w) \notin E$ a $(y, w) \notin E$. Protože G je souvislý, w musí mít alespoň jednoho souseda. Jeho jediný možný soused je x , tedy $(x, w) \in E$. To ale znamená, že máme indukovaný $K_{1,3}$ graf s centrem x , což je spor s předpokladem, že G je bez $K_{1,3}$. Hrana tedy musí existovat.
- 2) Hrana existuje. Již víme, že toto je pravda. Zároveň víme, že $G \setminus \{y, z\}$ musí být nezávislá množina. Protože $n \geq 4$, musí existovat 4. vrchol w . A protože G je souvislý, musí w být spojen s nějakým z vrcholů x, y, z . Pokud je w spojen s y nebo z , je $G \setminus \{y, z\}$ stále souvislý (přes x). Předpokládejme tedy, že w je spojen pouze s x . Ale vrcholy x i w jsou obsaženy v $G \setminus \{y, z\}$, hrana (x, w) je tedy hrana v $G \setminus \{y, z\}$, a to je spor s tím, že $G \setminus \{y, z\}$ musí být nezávislá množina.

Ve všech případech jsme došli ke sporu. Náš původní předpoklad, že tvrzení neplatí, musí být nepravdivý. ■

Příklad 3.3. Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami. Dokažte nebo vyvratěte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2. \quad (3.1)$$

Budě tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3. Dokažme jednotlivé meze.

- 1) *Dolní mez* $m \geq n - 1$. To již plyne z toho, že G je souvislý, respektive, že G' , který vznikl tím, že jsme odstranili orientaci z hran G , je souvislý. Graf G' má stejný počet vrcholů a hran jako graf G . A z definice víme, že jakýkoliv neorientovaný souvislý graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran.
- 2) *Horní mez* $m \geq (n - 1)^2$. Využijme toho, že G není silně souvislý. To totiž znamená, že jeho vrcholy V lze rozdělit na dvě neprázdné, disjuktní podmnožiny, nazvěme je A a B , takové, že *neexistuje žádná hrana vedoucí z B do A* . Chceme najít maximální možný počet hran m takového grafu. Počet hran maximalizujeme, pokud přidáme všechny hrany, které nejsou zakázané, tj. hrany z B do A . Nechť $|A| = p$ a $|B| = q$, kde $p + q = n$ a $p, q \geq 1$.

Maximální počet hran je součtem:

- *Hran uvnitř A :* V G nejsou smyčky, maximální počet hran v A je $p(p - 1)$.
- *Hran uvnitř B :* Obdobně jako pro $A \rightarrow q(q - 1)$.
- *Hran z A do B :* Maximální počet hran je $p \cdot q$.
- *Hran z B do A :* Podle našeho předpokladu 0.

Celkový maximální počet hran m_{\max} pro graf, který není silně souvislý, je tedy:

$$m \leq p(p - 1) + q(q - 1) + pq \quad (3.2)$$

Upravme dosazením $q = n - p$:

$$m \leq p(p - 1) + (n - p)(n - p - 1) + p(n - p) \quad (3.3)$$

$$m \leq p^2 - p + (n^2 - np - n - np + p^2 + p) + np - p^2 \quad (3.4)$$

$$m \leq (p^2 + p^2 - p^2) + (-p + p) + (-np - np + np) + n^2 - n \quad (3.5)$$

$$m \leq p^2 - np + n^2 - n \quad (3.6)$$

Protože maximalizujeme funkci $f(p) = p^2 - np + n^2 - n$ pro $p \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, která je konvexní kvadratickou funkcí, svého maxima nabývá v krajních bodech.

- Pro $p = 1$:

$$m \leq 1^2 - n(1) + n^2 - n = 1 - n + n^2 - n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.7)$$

- Pro $p = n - 1$:

$$m \leq (n - 1)^2 - n(n - 1) + (n^2 - n)m \quad (3.8)$$

$$\leq (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - n) + (n^2 - n)m \quad (3.9)$$

$$\leq n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \quad (3.10)$$

Takže maximální možný počet hran v grafu, který není silně souvislý, je $(n - 1)^2$. Z toho plyne, že $m \geq (n - 1)^2$.

■