

# Domácí úkol 2

Jakub Adamec  
XP01TGR

3. února 2026

**Příklad 2.1.** Je dán prostý neorientovaný souvislý graf  $G = (V, E)$ , který má most  $e = \{u, v\}$ . Určete zda alespoň jeden z vrcholů  $u, v$  musí být artikulace anebo oba vrcholy  $u, v$  musí být artikulace.

Odpověď pečlivě zdůvodněte.

## Řešení 2.1.

**Lemma.** Vrchol  $u$  není artikulace  $\iff d(u) = 1$ .

**Důkaz.** Vrchol  $u$  není artikulace, pokud graf  $G \setminus u$  zůstane souvislý. Graf  $G \setminus u$  vytvoříme tak, že z  $G$  odstraníme vrchol  $u$  a všechny hrany, které z něj vycházejí (včetně mostu  $e = \{u, v\}$ ). Graf  $G \setminus u$  se bude skládat ze dvou (potenciálně prázdných) částí:

- 1) Zbytek komponenty  $C_u$  po odstranění  $u$ , tj.  $C_u \setminus \{u\}$ .
- 2) Celá komponenta  $C_v$ .

Mezi těmito dvěma částmi nevede žádná hrana, protože jediná hrana, která je spojovala, most  $e$ , byla odstraněna spolu s vrcholem  $u$ . Aby byl graf  $G \setminus u$  souvislý, musí být jedna z těchto dvou částí prázdná. Část  $C_v$  nemůže být prázdná, protože obsahuje alespoň vrchol  $v$ . Proto část  $C_u \setminus \{u\}$  musí být nutně prázdná. A to platí právě tehdy, když komponenta  $C_u$  obsahovala pouze vrchol  $u$ . To znamená, že vrchol  $u$  neměl v  $G$  žádného jiného souseda, než  $v$ . Tedy  $u$  není artikulace  $\iff d(u) = 1$ . ■

Najděme protipříklad. Hledejme souvislý graf  $G$  s mostem  $e = \{u, v\}$ , kde  $d(u) = d(v) = 1$ . Jediný takový graf je graf se dvěma vrcholy  $(u, v)$  a jedinou hranou ( $e = \{u, v\}$ ). Ověřme, že tento graf má všechny námi požadované vlastnosti:

- a) Je graf prostý, neorientovaný, souvislý? Ano.
- b) Je  $e = \{u, v\}$  most? Ano.  $G$  je souvislý a  $G \setminus e$  sestává ze dvou izolovaných vrcholů  $u, v$ , takže má 2 komponenty souvislosti. Počet komponent se zvýšil.
- c) Je  $u$  artikulace? Ne.  $d(u) = 1$ . Graf  $G \setminus u$  je pouze vrchol  $v$ . Počet komponent se nezvýšil.
- d) Je  $v$  artikulace? Ne. Obdobná situace jako pro  $u$ .

Našli jsme tedy graf  $G$ , která má most  $e = \{u, v\}$ , ale ani jeden z vrcholů  $u, v$  není artikulace. Takže ani jeden vrchol nemusí být artikulace. ■

**Příklad 2.2.** Dokažte nebo vyvraťte: Každý prostý neorientovaný graf  $G$  bez smyček s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi.

**Řešení 2.2.** Rozdělme problém na dva případy, dle souvislosti  $G$ .

- 1) Pokud  $G$  není souvislý, pak má alespoň 2 komponenty souvislosti. V takovém případě nám nastavají dvě situace:

- $G$  se skládá pouze z izolovaných vrcholů. Protože  $|V(G)| \geq 2$ ,  $G$  má alespoň dva vrcholy,  $v_1$  a  $v_2$ .  $G$  má  $n$  komponent souvislosti. Graf  $G \setminus v_1$  má  $n - 1$  izolovaných vrcholů, tedy i komponent souvislosti. Takže  $v_1$ , respektive  $v_2$ , určitě není artikulace.
- $G$  má alespoň jednu komponentu souvislosti  $C_i$  s  $|V(C_i)| \geq 2$ . Nechť  $v$  je vrchol v komponentě  $C_i$ . Odebrání  $v$  může ovlivnit pouze komponentu  $C_i$ . Zadefinujme si  $k(G)$  jako počet komponent souvislosti grafu  $G$ .

$$k(G) = k(C_i) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = 1 + \sum_{j \neq i} 1 \quad (2.1)$$

Počet komponent  $G \setminus v$  je

$$k(G \setminus v) = k(C_i \setminus v) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = k(C_i \setminus v) + k(G) - 1 > k(G) \quad (2.2)$$

právě tehdy, když  $k(C_i \setminus v) > 1$ .

To znamená, že  $v$  je artikulací  $G$  právě tehdy, když je artikulací své komponenty  $C_i$ . Tudíž stačí dokázat tvrzení pro souvislou komponentu  $C_i$ . Pokud má  $C_i$  alespoň dvě neartikulace, pak tyto dva vrcholy nejsou ani artikulacemi vůči  $G$ .

- 2) Pokud  $G$  je souvislý, pak má právě jednu komponentu souvislosti.

Protože  $G$  je souvislý a  $|V(G)| \geq 2$ , můžeme v něm sestrojit kostru  $T$ . Kostra je strom a má stejný počet vrcholů jako  $G$ . Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy. Vyberme si dva různé listy kostry  $T$ ,  $u$  a  $v$ . Teď stačí dokázat, že  $u$ , respektive  $v$ , není artikulací grafu  $G$ .

$G \setminus u$  musí být souvislý graf. Protože odebrání listu z netriviálního stromu zachovává souvislost, tak  $T \setminus u$  je souvislý. Poznamenejme, že  $T \setminus u$  je podgrafem  $G \setminus u$ , protože obsahuje všechny vrcholy  $V(G) \setminus \{u\}$  a některé hrany z  $G \setminus u$ . No ale to nutně znamená, že  $G \setminus u$  je také souvislý. Takže  $u$  určitě není artikulací.

Stejný argument platí i pro druhý list  $v$ . Tím jsme v souvislém grafu našli alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi. ■

**Příklad 2.3.** Dokažte nebo vyvratte: Prostý souvislý neorientovaný graf  $G$  bez smyček s alespoň dvěma hranami je 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany grafu  $G$  leží na společné kružnici.

### Řešení 2.3.

$\Rightarrow:$  Graf je 2-souvislý. Nechť  $e_1 = \{u, v\}$  a  $e_2 = \{x, y\}$  jsou dvě libovolné různé hrany v  $G$ .

Vytvořme nový graf  $G'$  z  $G$  tak, že rozpůlíme obě hrany:

- Hranu  $e_1$  nahradíme cestou  $u \rightarrow w_1 \rightarrow v$ .
- Hranu  $e_2$  nahradíme cestou  $x \rightarrow w_2 \rightarrow y$ .

Přidali jsme vrcholy  $w_1, w_2$ . Tímto zachováváme souvislost, tedy i  $G'$  je 2-souvislý. Víme, že v 2-souvislému grafu každé dva vrcholy leží na společné kružnici. Využijme toho: Existuje kružnice  $C'$  v  $G'$ , která obsahuje  $w_1$  i  $w_2$ .

Protože vrcholy  $w_1$  a  $w_2$  mají v  $G'$  stupeň 2, každá kružnice  $C'$ , která jimi prochází, musí obsahovat obě hrany s nimi incidentní.

- Kružnice  $C'$  musí obsahovat sled  $u \rightarrow w_1 \rightarrow v$  (případně v opačném pořadí).
- Kružnice  $C'$  musí obsahovat sled  $x \rightarrow w_2 \rightarrow y$  (případně v opačném pořadí).

A tedy kružnice  $C'$  obsahuje původní hrany  $e_1$  a  $e_2$ .

$\Leftarrow:$   $G$  je prostý graf s  $|E| \geq 2$ , ve kterém každé dvě hrany leží na společné kružnici. Aby graf byl 2-souvislý, musí být souvislý a nemít artikulaci. Ukažme, že  $G$  nemá artikulaci.

**Sporem.** At  $G$  není 2-souvislý, tedy že má artikulaci  $v$ .

Pokud  $v$  je artikulace, pak graf  $G \setminus v$  je nesouvislý. Nechť  $C_1$  a  $C_2$  jsou dvě z jeho komponent souvislosti. Protože  $G$  je souvislý, vrchol  $v$  musí mít sousedy v obou těchto komponentách:

- Existuje vrchol  $u \in V(C_1)$  takový, že  $e_1 = \{u, v\} \in E(G)$ .
- Existuje vrchol  $w \in V(C_2)$  takový, že  $e_2 = \{w, v\} \in E(G)$ .

Jelikož  $u \in C_1$  a  $w \in C_2$ , je  $u \neq w$ , tak  $e_1$  a  $e_2$  jsou dvě různé hrany. Použijme předpoklad: hrany  $e_1$  a  $e_2$  musí ležet na společné kružnici  $K$ . Tato kružnice musí nutně obsahovat sled  $u \rightarrow v \rightarrow w$ . Aby byla kružnice uzavřena, musí existovat cesta  $P$  z  $w$  zpět do  $u$ , která již neobsahuje vrchol  $v$ , protože  $G$  je prostý a kružnice nemůže vrchol opakovat mimo počátku.

To znamená, že cesta  $P$  musí celá ležet v grafu  $G \setminus v$ . Existence cesty  $P$  z  $w$  do  $u$  v  $G \setminus v$  ale znamená, že  $u$  a  $w$  leží ve stejné komponentě souvislosti  $G \setminus v$ . Což je **spor** s tím, jak jsme definovali  $u$  a  $w$ .

Graf  $G$  je souvislý a nemá artikulaci, takže je 2-souvislý.

■