Domácí úkol 7

Jakub Adamec
XP01TGR

27. ledna 2026

Příklad 7.1. *Dokažte:*

Každý řez souvislého neorientovaného grafu je disjuktiním sjednocením cutsetů.

Řešení 7.1. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf. Víme, že symetrická diference dvou různých řezů je opět řez. Důkaz provedeme indukcí dle velikosti řezu $|K|$. Nechť K je libovolný řez.

1) *Základní krok.* Je-li K minimální (vzhledem k inkluzi), pak je K z definice cutset a tvrzení triviálně platí (sjednocení jedné množiny).

2) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že K není minimální. Pak existuje vlastní podmnožina $C \subset K$, která je cutsetem.

3) *Indukční krok.* Protože $C \subset K$, platí $K \setminus C = K \oplus C$. Jelikož symetrická diference dvou řezů je řez, je i K' řezem.

   Uvažujme množinu $K' = K \setminus C$. Protože $C \subset K$, platí $K \setminus C = K \oplus C$. Jelikož K i C jsou řezy a symetrická diference řezů je řez, je i K' řezem.

   Získali jsme rozklad $K = C \cup K'$, kde C a K' jsou disjunktní. Protože $|K'| < |K|$, můžeme na K' aplikovat indukční předpoklad. Tedy K' lze rozložit na sjednocení cutsetů $C_2 \cup \cdots \cup C_k$.

Celkově pak $K = C \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, což je disjunktní sjednocení cutsetů. ■

Příklad 7.2. *Dokažte, nebo vyvraťte:*

Množina $K \subseteq E$ souvislého grafu G s množinou hran E je kružnice právě tehdy, když je to minimální množina hran, pro kterou platí

$$K \cap (E \setminus T) \neq \emptyset \tag{7.1}$$

pro každou kostu T grafu G.

Řešení 7.2.

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že množina $K \subseteq E$ souvislého grafu G s množinou hran E je kružnice.

Kostra T je z definice strom, což znamená, že je grafem bez kružnice. Protože K je kružnice, nemůže být podmnožinou žádné kostry. Tím pádem musí platit, že K má s doplňkem kostry $(E \setminus T)$ neprázdný průnik. Dále víme, že kružnice bez jedné hrany tvoří cestu (případně les), což je acyklický graf. Každý acyklický podgraf v souvislém grafu lze doplnit na kostru. Existuje tedy kostra T', která obsahuje celou množinu $K' = K \setminus \{e\}$, kde e je libovolná hrana (tj. $K' \subseteq T'$). To znamená, že $K' \cap (E \setminus T') = \emptyset$. Takže množina K' podmínku nesplňuje, K je proto minimální.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že K je minimální a splňuje podmínku $K \nsubseteq T$ pro každou kostru T.

Víme, že množina hran E je podmnožinou nějaké kostry právě tehdy, když E neobsahuje kružnici. Jelikož K není podmnožinou žádné kostry, musí K obsahovat alespoň jednu kružnici C. Jinak by totiž šla doplnit na kostru, což by byl spor s podmínkou. Takže $C \subseteq K$. A protože C je kružnice, podle první části důkazu víme, že C sama o sobě splňuje podmínku (průnik s doplňkem každé kostry je neprázdný). Kdyby K obsahovala kromě kružnice C ještě nějaké další hrany, nebyla by minimální, protože už její vlastní podmnožina C podmínku splňuje. My ale předpokládáme minimální K, tudíž $K = C$.

Množina K je skutečně kružnicí právě tehdy, když je minimální množinou, která má neprázdný průnik s doplňkem každé kostry grafu G. ■