

# Domácí úkol 4

Jakub Adamec  
XP01TGR

27. ledna 2026

**Příklad 4.1.** Najděte příklad orientovaného grafu se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran, který má nejmenší počet vrcholů.

**Řešení 4.1.** Aby graf měl více než jednu tranzitivní redukci, musí obsahovat cykly, protože tranzitivní redukce orientovaného acyklického grafu je unikátní. Zaměřme se na silně souvislé komponenty.

- Pro  $n = 1$  nebo  $n = 2$ : Jediné silně souvislé grafy jsou triviální vrchol nebo cyklus  $a \leftrightarrow b$ . V obou případech je redukce unikátní (samotný cyklus).
- Pro  $n = 3$ : Uvažujme silně souvislý graf na 3 vrcholech. Aby byl graf tranzitivní redukci, nesmí obsahovat hranu, která je „zkratkou“ pro cestu z jiných hran. Na 3 vrcholech je jediným minimálním silně souvislým grafem cyklus délky 3. Jakýkoliv graf se 4 a více hranami na 3 vrcholech obsahuje „tětvu“, kterou lze vynechat, aniž by se porušila souvislost (a tedy tranzitivní uzávěr). Ať už má graf  $G$  jakékoli hrany, jeho tranzitivní redukce budou vždy cykly délky 3. Všechny redukce tedy mají stejný počet hran  $|E| = 3$ . Podmínka zadání není splněna.
- Pro  $n = 4$ : Zkonstruujme graf  $G$ , jehož tranzitivní uzávěr je úplný graf  $K_4$ . Hledáme minimální silně souvislé podgrafy na 4 vrcholech. Zkusme dva strukturálně odlišné případy:

- 1) *Hamiltonovský cyklus*: Graf tvořený jedním cyklem procházejícím všemi vrcholy.

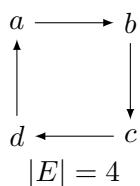
$$R_1 : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$$

Tento graf je minimální a má 4 hrany.

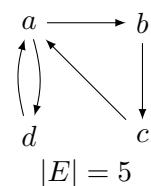
- 2) *Dva cykly sdílející vrchol*: Graf tvořený cyklem délky 3 ( $a, b, c$ ) a cyklem délky 2 ( $a, d$ ), které sdílejí vrchol  $a$ .

$$R_2 : (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a) \cup (a \leftrightarrow d)$$

Tento graf je silně souvislý a je minimální, má  $3 + 2 = 5$  hran.



Redukce  $R_1$



Redukce  $R_2$

Pokud zvolíme  $G$  jako sjednocení  $R_1 \cup R_2$ , pak  $R_1$  i  $R_2$  jsou jeho tranzitivní redukcemi. Protože  $4 \neq 5$ , nalezli jsme hledaný příklad. Jelikož pro  $n < 4$  takový graf neexistuje, je  $n = 4$  nejmenší možný počet vrcholů. ■

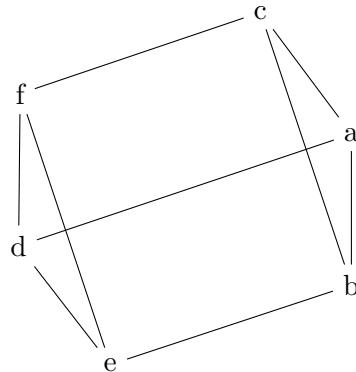
**Příklad 4.2.** Je dán prostý neorientovaný graf  $G = (V, E)$  bez smyček s  $n$  vrcholy, kde  $n$  je sudé. Dokažte, nebo vyvratte:

Jestliže každý vrchol grafu  $G$  má stupeň  $d = \frac{n}{2}$ , pak  $G$  je úplný bipartitní graf se stranami o  $\frac{n}{2}$  vrcholech.

**Řešení 4.2.** Ověřme situaci pro  $n = 6$ . Počet vrcholů je sudý. Požadovaný stupeň každého vrcholu  $d = 3$ , tedy hledáme 3-regulární graf na 6 vrcholech.

Tvrzení říká, že každo takový graf musí být  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ , takže v tomto případě  $K_{3,3}$ . Zkusme najít 3-regulární graf na 6 vrcholech, který není  $K_{3,3}$ .

Ať  $G = (V, E)$ , kde  $V = \{a, b, \dots, f\}$  a  $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, a\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$ .

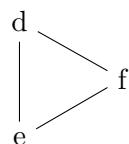


Ověřme, že graf  $G$  splňuje podmínky.

- 1) Nemá smyčky ani paralelní hrany.
- 2) Má sudý počet vrcholů,  $n = 6$ .
- 3) Ověřme stupně jednotlivých vrcholů:
  - $d(a) = 3$
  - $d(b) = 3$
  - $d(c) = 3$
  - $d(d) = 3$
  - $d(e) = 3$
  - $d(f) = 3$

Každý vrchol má stupeň  $d = 3 = \frac{6}{2}$ .

Pak by  $G$  měl být  $K_{3,3}$ , ověřme. Z definice bipartitního grafu víme, že nesmí obsahovat kružnice liché délky. Náš graf  $G$  obsahuje dokonce dvě kružnice délky tři, například



Takže  $G$  není bipartitní, tudíž nemůže být ani úplným bipartitním grafem  $K_{3,3}$ . ■

**Příklad 4.3.** Je dán prostý souvislý graf  $G = (V, E)$  bez smyček s  $n \geq 3$  vrcholy. Nechť  $x$  a  $y$  jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj.  $\{x, y\} \notin E$ ) a takové, že  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ . Dokažte, nebo vyvrátte:

$V G$  existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když  $v G + \{x, y\}$  existuje hamiltonovská kružnice.

(Graf  $G + \{x, y\}$  má stejnou množinu vrcholů jako  $G$  a množinu hran rovnu  $E \cup \{\{x, y\}\}$ .)

### Řešení 4.3.

„ $\Rightarrow$ “: Předpokládejme, že  $G = (V, E)$  má hamiltonovskou kružnici  $H$ .

Hamiltonovská kružnice  $H$  je podgraf  $G$ , který obsahuje všechny vrcholy  $V$  a cyklus tvořený hranami z  $E$ . Graf  $G + \{x, y\}$  má stejnou množinu vrcholů  $V$  a množinu hran  $E' = E \cup \{\{x, y\}\}$ . Takže každá hrana kružnice  $H$ , která je v  $E$ , je také v  $E'$ . A proto  $H$  je také hamiltonovskou kružnicí v grafu  $G + \{x, y\}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Předpokládejme, že  $G + \{x, y\}$  má hamiltonovskou kružnici  $H'$ .

Rozdělme na dvě situace.

- 1) *Kružnice  $H'$  neobsahuje hranu  $\{x, y\}$ .* Pak všechny její hrany musí pocházet z původní množiny  $E$ . A protože  $H'$  obsahuje všechny vrcholy  $V$ , je  $H'$  hamiltonovskou kružnicí i v grafu  $G$ .
- 2) *Kružnice  $H'$  obsahuje hranu  $\{x, y\}$ .* V takovém případě, když hranu  $\{x, y\}$  z  $H'$  odebereme, dostaneme hamiltonovskou cestu  $P$  v grafu  $G$ . Tato cesta vede z  $x$  do  $y$ , respektive naopak, a navštíví všechny vrcholy  $G$ . Označme vrcholy na této cestě  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , kde  $v_1 = x$  a  $v_n = y$ . Všechny hrany  $\{v_i, v_{i+1}\}$ , pro  $i = 1, \dots, n-1$ , leží v  $E$ .

Definujme množiny indexů sousedů  $x$  a  $y$  v  $G$ :

$$S = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_1, v_{i+1}\} \in E\} \quad (4.1)$$

$$T = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_i, v_n\} \in E\} \quad (4.2)$$

Takže velikost  $S$  je počet sousedů  $v_1$ . Protože  $\{v_1, v_n\} \notin E$ ,  $v_n$ , tak všichni sousedé  $x$  musí být na cestě  $P$ . Počet takových sousedů je  $|S| = d_G(x)$ . Obdobně platí, že velikost  $T$  je počet sousedů  $v_n$ , a protože  $\{v_n, v_1\} \notin E$ , tak  $|T| = d_G(y)$ .

$S$  i  $T$  jsou podmnožinami množiny indexů  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ , která má  $n-1$  prvků. Hledáme  $i$  takové, že  $i \in S$  a také  $i \in T$ , tj.  $i \in S \cap T$ .

Předpokládejme spor, takže  $S \cap T = \emptyset$ . Víme, že platí

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|. \quad (4.3)$$

Dosazením získáme

$$|S \cup T| = d_G(x) + d_G(y) - 0 = d_G(x) + d_G(y). \quad (4.4)$$

Ze zadání víme, že  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ , z čehož plyne  $|S \cup T| \geq n$ . Což je nutně spor, protože  $S \cup T$  je podmnožinou množiny  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ , která má  $n-1$  prvků. Tudiž nutně platí  $S \cap T \neq \emptyset$ . Existuje tedy alespoň jeden index  $i$ , který je v obou množinách. Díky tomuto indexu  $i$  jsme našli způsob, jak „překřížit“ a spojit konce hamiltonovské cesty  $P$  pomocí hran, které zaručeně leží v  $G$ , čímž jsme vytvořili kružnici  $H$ .

Obě dvě strany ekvivalence jsou pravdivé, a tedy tvrzení je také pravdivé. ■