Domácí úkol 5

Jakub Adamec
XP01TGR

27. ledna 2026

Příklad 5.1. *Dokažte: Je dána síť $G = (V, E)$, se zdrojem s, spotřebičem t a omezeními l a c. Dále je dán přípustný tok f a množina $A \subset V$ taková, že $s \in A$, $t \notin A$. Pak platí*

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{e \in W^-(A)} f(e). \tag{5.1}$$

Postupujte indukcí podle počtu vrcholů množiny A, $|A| = k$.

Řešení 5.1.

1) *Základní krok.* Nechť $k = 1$. Protože $s \in A$, musí platit, že $A = \{s\}$. V tomto případě je množina $W^+(A)$ tvořena všemi hranami vycházejícimi ze zdroje s a množina $W^-(A)$ všemi hranami vcházejícimido zdroje s. Podle definice velikosti toku $\mathrm{vel}(f)$ platí

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s). \tag{5.2}$$

Což přesně odpovídá definici:

$$\mathrm{vel}(f) = \sum_{e \in W^+(\{s\})} f(e) - \sum_{e \in W^-(\{s\})} f(e) \tag{5.3}$$

Tvrzení tedy pro $k = 1$ platí.

2) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolnou množinu A velikosti k obsahující s a neobsahující t.

3) *Indukční krok.* Mějme množinu A' velikosti $k + 1$, která obsahuje s a neobsahuje t. Zvolme libovolný vrchol $v \in A'$ takový, že $v \neq s$. Takový vrchol jistě existuje, protože $|A'| \geq 2$. Položme $A = A' \setminus \{v\}$. Množina A má velikost k, obsahuje s a neobsahuje t, proto pro ni dle indukčního předpokladu platí vztah (5.1).

Nyní zkoumejme rozdíl mezi toky přes řezy určené množinami A a A'. Přidáním vrcholu v do množiny A se změní sumy následovně:

- Hrany z A do v, které byly původně v $W^+(A)$, se stanou vnitřními hranami A', tedy ze sumy zmizí (odečteme tok vtékající do v z A).
- Hrany z v do A, které byly původně v $W^-(A)$, se stanou vnitřními, tedy ze sumy zmizí (přičteme tok vytékající z v do A, protože v W^- byl s minusem).
- Hrany z v do $V \setminus A'$, které dříve nebyly v řezu, se stanou součástí $W^+(A')$ (přičteme tok vytékající z v ven).
- Hrany z $V \setminus A'$ do v, které dříve nebyly v řezu, se stanou součástí $W^-(A')$ (odečteme tok vtékající do v zvenčí).

Matematicky vyjádřeno:

$$
\sum_{e \in W^+(A')} f(e) - \sum_{e \in W^-(A')} f(e) = \left(\sum_{e \in W^+(A)} f(e) - \sum_{u \in A} f(u,v) + \sum_{w \notin A'} f(v,w) \right) - \left(\sum_{e \in W^-(A)} f(e) - \sum_{u \in A} f(v,u) + \sum_{w \notin A'} f(w,v) \right) \tag{5.4}
$$

Seskupíme-li členy odpovídající původnímu toku a členy týkající se vrcholu v, dostáváme:

$$
\mathrm{Tok}(A') = \mathrm{vel}(f) + \underbrace{\left(\sum_{u \in A} f(v,u) + \sum_{w \notin A'} f(v,w) \right)}_{\text{celkový tok z } v} - \underbrace{\left(\sum_{u \in A} f(u,v) + \sum_{w \notin A'} f(w,v) \right)}_{\text{celkový tok do } v} \tag{5.5}
$$

Jelikož $v \neq s$ a $v \neq t$ (protože $t \notin A'$), platí pro vrchol v Kirchhoffův zákon zachování toku:

$$
\sum_{z \in V} f(v,z) - \sum_{z \in V} f(z,v) = 0. \tag{5.6}
$$

Členy v závorkách výše pokrývají všechny hrany incidentní s v (buď vedou z/do A, anebo z/do $V \setminus A'$). Rozdíl v závorce je tedy roven nule. Proto platí:

$$
\sum_{e \in W^+(A')} f(e) - \sum_{e \in W^-(A')} f(e) = \mathrm{vel}(f). \tag{5.7}
$$

$\blacksquare$

Příklad 5.2. *Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček a se sudým počtem vrcholů, který neobsahuje $K_{1,3}$ jako indukovaný podgraf. Pak v G existuje perfektní párování.*

Řešení 5.2. *Sporem.* Z Tutteovy věty víme, že pokud graf nemá perfektní párování, existuje podmnožina vrcholů $S \subset V$ taková, že počet lichých komponent grafu $G \setminus S$ je větší než počet vrcholů v S. Tedy předpokládáme:

$$
g(G \setminus S) > |S|, \tag{5.8}
$$

kde $g(G \setminus S)$ je počet komponent souvislosti $G \setminus S$, které mají lichý počet vrcholů.

Víme, že celkový počet vrcholů $|V|$ je sudý. Platí vztah:

$$
|V| = |S| + \sum_{C \in \text{komponenty } G \setminus S} |V(C)| \tag{5.9}
$$

Protože $|V(C)|$ je liché pro liché komponenty a sudé pro sudé, parita $|V|$ je stejná jako parita $|S| + g(G \setminus S)$. Aby byl součet sudý, musí mít $|S|$ a $g(G \setminus S)$ stejnou paritu. Z nerovonosti (5.8) pak vyplývá silnější podmínka

$$
g(G \setminus S) \geq |S| + 2. \tag{5.10}
$$

Označme $k = g(G \setminus S)$ a liché komponenty jako $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Uvažujme bipartitní graf H, kde jedna strana je množina S a druhá strana jsou komponenty $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$. Hrana mezi $s \in S$ a $C_i \in \mathcal{C}$ v grafu H existuje právě tehdy, když v původním grafu G existuje hrana mezi vrcholem sa nějakým vrcholem $v \in C_i$.

- Protože G je souvislý, každá komponenta C_i musí být spojena s alespoň jedním vrcholem z S. Tedy $d_H(C_i) \geq 1$ pro všechna i.

- Zkoumejme stupně vrcholů $s \in S$ v grafu H. Předpokládejme, že existuje vrchol $s \in S$, který je spojen s třemi (nebo více) různými komponentami, *BÚNO* řekněme C_1, C_2, C_3.
- To znamená, že existují vrcholy $v_1 \in C_1, v_2 \in C_2, v_3 \in C_3$, které jsou sousedy s v G.
- Protože v_1, v_2, v_3 leží v různých komponentách grafu $G \setminus S$, neexistuje mezi nimi žádná hrana. Množina $\{v_1, v_2, v_3\}$ je tedy nezávislá.
- Podgraf indukovaný množinou $\{s, v_1, v_2, v_3\}$ by pak tvořil $K_{1,3}$ (se středem s). To je ale ve sporu s předpokladem, že G neobsahuje $K_{1,3}$.

Takže musí platit, že každý vrchol $s \in S$ sousedí s nejvýše dvěma lichými komponentami. Tedy $d_H(s) \leq 2$.

Alespoň části grafu H, které spojují jednotlivé komponenty, jsou souvislé. Zároveň vrcholy z $\mathcal{C}$ mají stupeň alespoň 1 a vrcholy z S nejvýše 2. Takový bipartitní graf je tvořen cestami a cykly, kde se střídají vrcholy z S a $\mathcal{C}$. Abychom maximalizovali počet vrcholů z $\mathcal{C}$ vůči S, musí H vypadat jako cesta začínající a končící vrcholem z $\mathcal{C}$, například

$$C_1 — s_1 — C_2 — s_2 — C_3$$

V tomto maximálním případě platí

$$|\mathcal{C}| \leq |S| + 1. \tag{5.11}$$

Což je ale ve sporu s podmínkou (5.10). Předpoklad, že neexistuje perfektní párování, byl chybný. Graf G tedy perfektní párování má. ■

Příklad 5.3. *Je dán prostý 3-regulární graf G bez smyček, tj. každý vrchol grafu G má stupeň 3. Dokažte, nebo vyvraťte:*

Jestliže G nemá most, pak v něm existuje perfektní párování.

Hint: K důkazů použijte Tutteho větu.

Řešení 5.3. *Sporem.* Předpokládejme, že G nemá perfektní párování. Z Tutteovy věty víme, že pokud graf nemá perfektní párování, existuje podmnožina vrcholů $S \subset V$ taková, že počet lichých komponent grafu $G \setminus S$ je větší než počet vrcholů v S. Tedy předpokládáme:

$$g(G \setminus S) > |S|, \tag{5.12}$$

kde $g(G \setminus S)$ je počet komponent souvislosti $G \setminus S$, které mají lichý počet vrcholů. Pro pohodlnost označme $k = g(G \setminus S)$.

Nechť $C_1, C_2, \ldots C_k$ jsou liché komponenty vzniklé odebráním množiny S od G. Pro libovolnou komponentu C_i označme $E(C_i, S)$ množinu hran spojujících tuto komponentu s S. Počet těchto hran označme $m_i = |E(C_i, S)|$.

Sečtěme stupně všech vrcholů uvnitř komponenty C_i. Protože graf je 3-regulární, nutně platí

$$\sum_{v \in V(C_i)} d_G(v) = 3|V(C_i)|. \tag{5.13}$$

Zároveň můžeme tuto sumu vyjádřit pomocí vnitřních hran a hran vedoucích ven z komponenty do S jako

$$\sum_{v \in V(C_i)} d_G(v) = 2|E(C_i)| + m_i. \tag{5.14}$$

Protože G je souvislý a m_i je liché, musí platit $m_i \geq 1$. Pokud by $m_i = 1$, pak by tato jediná hrana byla mostem. Ze zadání ale víme, že G nemá mosty, takže nutně platí

$$m_i \geq 3 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}\,. \tag{5.15}$$

Celkový počet hran vedoucích z lichých komponent do S je

$$M = \sum_{i=1}^{k} m_i \geq \sum_{i=1}^{k} 3 = 3k. \tag{5.16}$$

Tyto hrany musí být incidentní s vrcholy v S. Jelikož každý vrchol v S má v grafu G stupeň 3, nemůže do S vcházet více než $3|S|$ hran, i kdyby všechny hrany z S vedly do lichých komponent a žádné mezi vrcholy S navzájem nebo do sudých komponent. Takže platí

$$M \leq 3|S|. \tag{5.17}$$

Spojením nerovností dostáváme

$$\begin{aligned} 3k &\leq M \leq 3|S| \\ 3k &\leq 3|S| \\ k &\leq |S| \end{aligned} \tag{5.18}$$

To je však ve sporu s předpokladem pro neexistenci perfektního párování, graf G tedy perfektní párování má. ∎