Domácí úkol 6

Jakub Adamec
XP01TGR

5. ledna 2026

Příklad 6.1. *Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y a v něm maximální párování $P_{\max}$. Pro každou hranu $e \in P_{\max}$ vybereme jeden její krajní vrchol do množiny A takto:*

Pro hranu $e = \{x, y\} \in P_{\max}(x \in X,\, y \in Y)$ do A vybereme vrchol y, jestliže existuje cesta $a_1, e_1, a_2, e_2, \ldots, e_{2k+1}, y$, kde

- *$a_1 \in X$ je volný v párování $P_{\max}$,*
- *pro $i > 0$ je $e_{2i-1} \notin P_{\max}$, $i > 0$, $e_{2i} \in P_{\max}$.*

Jestliže taková cesta neexistuje, do A vybereme vrchol x.
Dokažte nebo vyvraťte: Množina A (zkonstruovaná výše) je vrcholovým pokrytím grafu G.

Řešení 6.1. Definujme si *dosažitelné* vrcholy jako takové, ke kterým existuje střídavá cesta (přesně ta ze zadání) z nějakého volného vrcholu X.

Mějme libovolnou hranu $e = \{u, v\}$, kde $u \in X$ a $v \in Y$. Musíme dokázat, že e je pokryta, tedy buď $u \in A$, nebo $v \in A$. Mohou nastat dva případy:

(a) Hrana e *leží* v párování $P_{\max}$. Konstrukce množiny A vybírá z každé hrany $P_{\max}$ právě jeden vrchol. Takže hrana je určitě pokryta.

(b) Hrana e *neleží* v párování $P_{\max}$. Sporem. Předpokládejme, že hrana $\{u, v\}$ není pokryta. To by znamenalo, že $u \notin A$ a zároveň $v \notin A$. Takže:

- Pokud je u *volný*, pak je triviálně dosažitelný (je počátkem střídavé cesty délky 0). Zároveň platí $u \notin A$, protože A obsahuje pouze vrcholy z párování.
- Pokud je u *spárovaný* s nějakým $y' \in Y$ (hrana $\{u, y'\} \in P_{\max}$), pak z předpokladu $u \notin A$ plyne, že do A musel být vybrán vrchol y'. To podle definice A nastane jen tehdy, je-li y' dosažitelný. Pokud je y' dosažitelný, pak prodloužením cesty přes hranu $\{y', u\}$ je dosažitelný i vrchol u.

V obou případech jsme ukázali, že

$$u \notin A \implies u \text{ je dosažitelný.} \tag{6.1}$$

Využijeme hranu $e = \{u, v\}$, která neleží v párování: Jelikož u je dosažitelný a $\{u, v\} \notin P_{\max}$, můžeme střídavou cestu končící v u prodloužit o hranu $\{u, v\}$ do vrcholu v. Tedy i v je dosažitelný. Kdyby byl v volný, našli bychom střídavou cestu z volného do volného vrcholu (zlepšující cestu), což je spor s maximalitou $P_{\max}$. Vrchol v je tedy *nutně* spárovaný s nějakým x'. Protože je v dosažitelný a spárovaný, podmínka konstrukce A říká, že pro hranu $\{x', v\}$ vybereme do A vrchol v.

A to je spor s předpokladem $v \notin A$. Tedy alespoň jeden z vrcholů u, v musí ležet v A.

Množina A je vrcholovým pokrytím. ■

Příklad 6.2. *Dokažte, že v každém bipartitním grafu G platí*

$$\alpha_1(G) = \beta_0(G). \tag{6.2}$$

Hint: Použijte Königovu větu pro určení počtu hran v maximálním párování v bipartitním grafu.

Řešení 6.2. $\alpha_1(G)$ je počet hran v maximálním párování, tj. $\alpha_1(G) = |P_{\max}|$ a $\beta_0(G)$ je počet vrcholů v minimálním vrcholovém pokrytí. Abychom mohli použit *Königovu* větu, musíme ukázat

$$\beta_0(G) = \min_{A \subseteq X}(|X \setminus A| + |V_G(A)|). \tag{6.3}$$

Vezměme libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$. Sestavme množinu vrcholů K, která se skládá ze dvou částí:

(a) vrcholy z X, které *nejsou* v A (tj. $X \setminus A$),

(b) sousedé vrcholů z A v množině Y (tj. $V_G(A)$).

Takže

$$K = (X \setminus A) \cup V_G(A). \tag{6.4}$$

Velikost této množiny je pak $|K| = |X \setminus A| + |V_G(A)|$.

Musíme ověřit, že K pokrývá každou hranu v grafu. Mějme libovolnou hranu $e = \{x, y\}$, kde $x \in X$ a $y \in Y$. Mohou nastat pouze tyto situace:

(a) Vrchol x *nepatří* do A. Pak nutně $x \in (X \setminus A)$. Tím pádem je x v naší množině K. Hrana je pokryta.

(b) Vrchol x *patří* do A. Protože $x \in A$ a y je jeho soused, musí dle definice platit, že $y \in V_G(A)$. Tím pádem je y v naší množině K. Hrana je pokryta.

V obou případech je alespoň jeden vrchol hrany v množině K. Takže K je vrcholové pokrytí.

Teď stačí ukázat

$$|P_{\max}| = |K|. \tag{6.5}$$

Protože K je vrcholové pokrytí, pak nejmenší takové K odpovídá velikosti minimálního vrcholového pokrytí, tedy $\beta_0(G)$. Takže platí

$$\min_{A \subseteq X}(|X \setminus A| + |V_G(A)|) = \beta_0(G). \tag{6.6}$$

Což odpovídá přesnému znění *Königovy* věty:

$$\alpha_1(G) = |P_{\max}| = \min_{A \subseteq X}(|X \setminus A| + |V_G(A)|) = \beta_0(G) \tag{6.7}$$

■