Domácí úkol 4

Jakub Adamec
XP01TGR

3. února 2026

Příklad 4.1. *Najděte příklad orientovaného grafu* ***se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran****, který má nejmenší počet vrcholů.*

Řešení 4.1. Aby graf měl více než jednu tranzitivní redukci, musí obsahovat cykly, protože tranzitivní redukce orientovaného acyklického grafu je unikátní. Zaměřme se na silně souvislé komponenty.

- *Pro* $n = 1$ *nebo* $n = 2$: Jediné silně souvislé grafy jsou triviální vrchol nebo cyklus $a \leftrightarrow b$. V obou případech je redukce unikátní (samotný cyklus).

- *Pro* $n = 3$: Uvažujme silně souvislý graf na 3 vrcholech. Aby byl graf tranzitivní redukcí, nesmí obsahovat hranu, která je „zkratkou“ pro cestu z jiných hran. Na 3 vrcholech je jediným minimálním silně souvislým grafem *cyklus délky 3*. Jakýkoliv graf se 4 a více hranami na 3 vrcholech obsahuje „tětivu“, kterou lze vynechat, aniž by se porušila souvislost (a tedy tranzitivní uzávěr). Ať už má graf G jakékoliv hrany, jeho tranzitivní redukce budou vždy cykly délky 3. Všechny redukce tedy mají stejný počet hran $|E| = 3$. Podmínka zadání není splněna.

- *Pro* $n = 4$: Zkonstruujme graf G, jehož tranzitivní uzávěr je úplný graf K_4. Hledáme minimální silně souvislé podgrafy na 4 vrcholech. Zkusme dva strukturálně odlišné případy:

  1) *Hamiltonovský cyklus*: Graf tvořený jedním cyklem procházejícím všemi vrcholy.

  $$R_1 : a \to b \to c \to d \to a$$

  Tento graf je minimální a má 4 hrany.

  2) *Dva cykly sdílející vrchol*: Graf tvořený cyklem délky 3 (a, b, c) a cyklem délky 2 (a, d), které sdílejí vrchol a.

  $$R_2 : (a \to b \to c \to a) \cup (a \leftrightarrow d)$$

  Tento graf je silně souvislý a je minimální, má $3 + 2 = 5$ hran.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$|E| = 4$

Redukce R_1

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, bend left] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u, bend left] & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$|E| = 5$

Redukce R_2

Pokud zvolíme G jako sjednocení $R_1 \cup R_2$, pak R_1 i R_2 jsou jeho tranzitivními redukcemi.

Protože $4 \neq 5$, nalezli jsme hledaný příklad. Jelikož pro $n < 4$ takový graf neexistuje, je $n = 4$ nejmenší možný počet vrcholů. ■

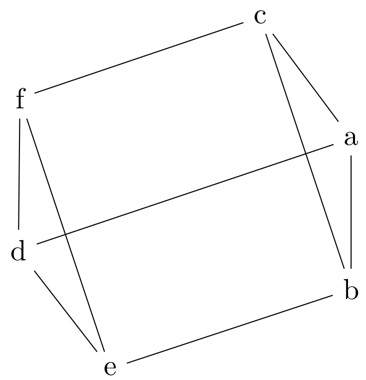
Příklad 4.2. *Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy, kde n je sudé. Dokažte, nebo vyvraťte:*

Jestliže každý vrchol grafu G má stupeň $d = \frac{n}{2}$, pak G je úplný bipartitní graf se stranami o $\frac{n}{2}$ vrcholech.

Řešení 4.2. Ověřme situaci pro $n = 6$. Počet vrcholů je sudý. Požadovaný stupeň každého vrcholu $d = 3$, tedy hledáme 3-regulární graf na 6 vrcholech.

Tvrzení říká, že každo takový graf musí být $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, takže v tomto případě $K_{3,3}$. Zkusme najít 3-regulární graf na 6 vrcholech, který *není* $K_{3,3}$.

Ať $G = (V, E)$, kde $V = \{a, b, \ldots, f\}$ a $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, a\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$.

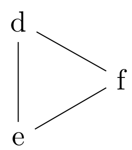


Ověřme, že graf G splňuje podmínky.

1) Nemá smyčky ani paralelní hrany.
2) Má sudý počet vrcholů, $n = 6$.
3) Ověřme stupně jednotlivých vrcholů:
   - $d(a) = 3$
   - $d(b) = 3$
   - $d(c) = 3$
   - $d(d) = 3$
   - $d(e) = 3$
   - $d(f) = 3$

   Každý vrchol má stupeň $d = 3 = \frac{6}{2}$.

Pak by G měl být $K_{3,3}$, ověřme. Z definice bipartitního grafu víme, že *nesmí* obsahovat kružnici liché délky. Náš graf G obsahuje dokonce dvě kružnice délky tři, například



Takže G není bipartitní, tudíž nemůže být ani úplným bipartitním grafem $K_{3,3}$. ■

Příklad 4.3. *Je dán prostý souvislý graf $G = (V, E)$ bez smyček s $n \geq 3$ vrcholy. Nechť x a y jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj. $\{x, y\} \notin E$) a takové, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$. Dokažte, nebo vyvraťte:*

V G existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když v $G + \{x, y\}$ existuje hamiltonovská kružnice.
(Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů jako G a množinu hran rovnu $E \cup \{\{x, y\}\}$.)

Řešení 4.3.
„$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že $G = (V, E)$ má hamiltonovskou kružnici H.
Hamiltonovská kružnice H je podgraf G, který obsahuje všechny vrcholy V a cyklus tvořený hranami z E. Graf $G+\{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů V a množinu hran $E' = E\cup\{\{x, y\}\}$. Takže každá hrana kružnice H, která je v E, je také v E'. A proto H je také hamiltonovskou kružnicí v grafu $G + \{x, y\}$.

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že $G + \{x, y\}$ má hamiltonovskou kružnici H'.
Rozdělme na dvě situace.

1) *Kružnice H' neobsahuje hranu* $\{x, y\}$. Pak všechny její hrany musí pocházet z původní množiny E. A protože H' obsahuje všechny vrcholy V, je H' hamiltonovskou kružnicí i v grafu G.

2) *Kružnice H' obsahuje hranu* $\{x, y\}$. V takovém případě, když hranu $\{x, y\}$ z H' odebereme, dostaneme hamiltonovskou cestu P v grafu G. Tato cesta vede z x do y, respektive naopak, a navštíví všechny vrcholy G. Označme vrcholy na této cestě $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, kde $v_1 = x$ a $v_n = y$. Všechny hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$, pro $i = 1, \ldots, n-1$, leží v E.

   Definujme množiny indexů sousedů x a y v G:

   $$S = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_1, v_{i+1} \in E\}\} \tag{4.1}$$
   $$T = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_i, v_n \in E\}\} \tag{4.2}$$

   Takže velikost S je počet sousedů v_1. Protože $\{v_1, v_n\} \notin E$, v_n, tak všichni sousedé x musí být na cestě P. Počet takových sousedů je $|S| = d_G(x)$. Obdobně platí, že velikost T je počet sousedů v_n, a protože $\{v_n, v_1\} \notin E$, tak $|T| = d_G(y)$.

   S i T jsou podmnožinami množiny indexů $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Hledáme i takové, že $i \in S$ a také $i \in T$, tj. $i \in S \cap T$.
   Předpokládejme spor, takže $S \cap T = \emptyset$. Víme, že platí

   $$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|. \tag{4.3}$$

   Dosazením získáme

   $$|S \cup T| = d_G(x) + d_G(y) - 0 = d_G(x) + d_G(y). \tag{4.4}$$

   Ze zadání víme, že $d_G(x)+d_G(y) \geq n$, z čehož plyne $|S\cup T| \geq n$. Což je nutně spor, protože $S \cup T$ je podmnožinou množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Tudíž nutně platí $S \cap T \neq \emptyset$. Existuje tedy alespoň jeden index i, který je v obou množinách. Díky tomuto indexu i jsme našli způsob, jak „překřížit“ a spojit konce hamiltonovské cesty P pomocí hran, které zaručeně leží v G, čímž jsme vytvořili kružnici H.

Obě dvě strany ekvivalence jsou pravdivé, a tedy tvrzení je také pravdivé. ∎