Domácí úkol 4

Jakub Adamec
XP01TGR

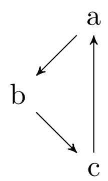
16. listopadu 2025

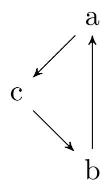
Příklad 4.1. *Najděte příklad orientovaného grafu* ***se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran****, který má nejmenší počet vrcholů.*

Řešení 4.1. Ať graf G má n vrcholů, pak

- *pro* $n = 1$ *nebo* $n = 2$ platí, že jediný netriviální případ je graf $a \leftrightarrow b$, jehož unikátní redukce je on sám.

- *pro* $n = 3$ platí, že aby redukce nebyla unikátní, musí graf mít silně souvislou komponentu. Uvažme tedy úplný graf K_3. Jeho tranzitivní redukce jsou minimální grafy, jejichž uzávěr je K_3. Takové redukce existují přesně dvě:

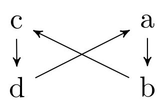
  

  Obě tyto redukce ale mají stejný počet hran, tedy nesplňují podmínku různého počtu hran.

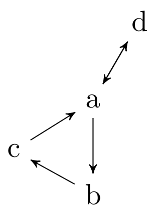
- *pro* $n = 4$ zkusme vzít úplný graf K_4. Tento graf má 12 hran. Tranzitivní uzávěr K_4 je K_4 sám. Hledáme tedy minimální silně souvislé grafy na 4 vrcholech, jejichž uzávěr je K_4.

  1) *Tranzitivní redukce* $\mathcal{R}_1$ je cyklus délky 4.

  Tento graf je očividně minimální a jeho tranzitivním uzávěrem je K_4.

  2) *Tranzitivní redukce* $\mathcal{R}_2$ je graf tvořený cyklem délky 3 a cyklem délky 2, které sdílejí jeden vrchol.

  Tento graf je také silně souvislý a jeho uzávěrem je K_4. Je také minimální.

  Zjistili jsme tedy, že jakýkoliv graf G, jehož uzávěr je K_4 má dvě tranzitivní redukce $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ s počty hran $|E_1| = 4$ a $|E_2| = 5$. A protože jsme ukázali, že pro $n < 4$ takový graf neexistuje, a zároveň $4 \neq 5$, pak nejmenší možný počet vrcholů je 4.

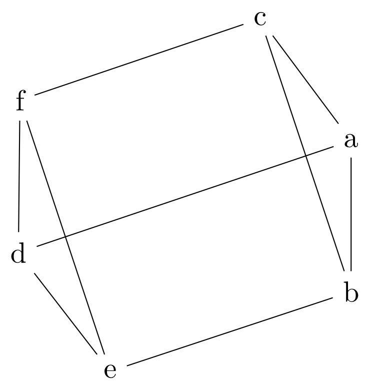
Příklad 4.2. *Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy, kde n je sudé. Dokažte, nebo vyvraťte:*

Jestliže každý vrchol grafu G má stupeň $d = \frac{n}{2}$, pak G je úplný bipartitní graf se stranami o $\frac{n}{2}$ vrcholech.

Řešení 4.2. Ověřme situaci pro $n = 6$. Počet vrcholů je sudý. Požadovaný stupeň každého vrcholu $d = 3$, tedy hledáme 3-regulární graf na 6 vrcholech.

Tvrzení říká, že každo takový graf musí být $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, takže v tomto případě $K_{3,3}$. Zkusme najít 3-regulární graf na 6 vrcholech, který *není* $K_{3,3}$.

Ať $G = (V, E)$, kde $V = \{a, b, \ldots, f\}$ a $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, a\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$.



Ověřme, že graf G splňuje podmínky.

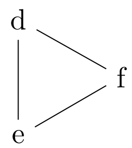
1) Nemá smyčky ani paralelní hrany.

2) Má sudý počet vrcholů, $n = 6$.

3) Ověřme stupně jednotlivých vrcholů:
   - $d(a) = 3$
   - $d(b) = 3$
   - $d(c) = 3$
   - $d(d) = 3$
   - $d(e) = 3$
   - $d(f) = 3$

   Každý vrchol má stupeň $d = 3 = \frac{6}{2}$.

Pak by G měl být $K_{3,3}$, ověřme. Z definice bipartitního grafu víme, že *nesmí* obsahovat kružnici liché délky. Náš graf G obsahuje dokonce dvě kružnice délky tři, například



Takže G není bipartitní, tudíž nemůže být ani úplným bipartitním grafem $K_{3,3}$. ■

Příklad 4.3. *Je dán prostý souvislý graf $G = (V, E)$ bez smyček s $n \geq 3$ vrcholy. Nechť x a y jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj. $\{x, y\} \notin E$) a takové, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$. Dokažte, nebo vyvraťte:*

V G existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když v $G + \{x, y\}$ existuje hamiltonovská kružnice.
(Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů jako G a množinu hran rovnu $E \cup \{\{x, y\}\}$.)

Řešení 4.3.
„$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že $G = (V, E)$ má hamiltonovskou kružnici H.
Hamiltonovská kružnice H je podgraf G, který obsahuje všechny vrcholy V a cyklus tvořený hranami z E. Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů V a množinu hran $E' = E \cup \{\{x, y\}\}$. Takže každá hrana kružnice H, která je v E, je také v E'. A proto H je také hamiltonovskou kružnicí v grafu $G + \{x, y\}$.

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že $G + \{x, y\}$ má hamiltonovskou kružnici H'.
Rozdělme na dvě situace.

1) *Kružnice H' neobsahuje hranu $\{x, y\}$.* Pak všechny její hrany musí pocházet z původní množiny E. A protože H' obsahuje všechny vrcholy V, je H' hamiltonovskou kružnicí i v grafu G.

2) *Kružnice H' obsahuje hranu $\{x, y\}$.* V takovém případě, když hranu $\{x, y\}$ z H' odebereme, dostaneme hamiltonovskou cestu P v grafu G. Tato cesta vede z x do y, respektive naopak, a navštíví všechny vrcholy G. Označme vrcholy na této cestě $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, kde $v_1 = x$ a $v_n = y$. Všechny hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$, pro $i = 1, \ldots, n-1$, leží v E.

   Definujme množiny indexů sousedů x a y v G:

$$S = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_1, v_{i+1} \in E\}\}$$
$$T = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n-1 \text{ a } \{v_i, v_n \in E\}\}$$

   Takže velikost S je počet sousedů v_1. Protože $\{v_1, v_n\} \notin E$, v_n, tak všichni sousedé x musí být na cestě P. Počet takových sousedů je $|S| = d_G(x)$. Obdobně platí, že velikost T je počet sousedů v_n, a protože $\{v_n, v_1\} \notin E$, tak $|T| = d_G(y)$.

   S i T jsou podmnožinami množiny indexů $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Hledáme i takové, že $i \in S$ a také $i \in T$, tj. $i \in S \cap T$.
   Předpokládejme spor, takže $S \cap T = \emptyset$. Víme, že platí

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|. \tag{1}$$

   Dosazením získáme

$$|S \cup T| = d_G(x) + d_G(y) - 0 = d_G(x) + d_G(y). \tag{2}$$

   Ze zadání víme, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$, z čehož plyne $|S \cup T| \geq n$. Což je nutně spor, protože $S \cup T$ je podmnožinou množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, která má $n-1$ prvků. Tudíž nutně platí $S \cap T \neq \emptyset$. Existuje tedy alespoň jeden index i, který je v obou množinách. Díky tomuto indexu i jsme našli způsob, jak „překřížit“ a spojit konce hamiltonovské cesty P pomocí hran, které zaručeně leží v G, čímž jsme vytvořili kružnici H.

Obě dvě strany ekvivalence jsou pravdivé, a tedy tvrzení je také pravdivé. ∎