# Domácí úkol 1

Jakub Adamec
XP01TGR

6. října 2025

**Příklad 1.1.** *Dokažte, nebo vyvraťte: Je dán neorientovaný graf $G$. Pak:*

1. *Každy uzavřený sled v $G$ liché délky obsahuje alespoň jednu kružnici liché délky.*
2. *Každý uzavřený sled v $G$ sudé délky obsahuje alespoň jednu kružnici.*

*Tj. buď jednotlivá tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.*

**Řešení 1.1.**

1. Dokažme indukcí podle délky sledu $k$, kde $k$ je liché číslo.
   *Základní krok:* Nejkratší možný uzavřený sled liché délky je sled délky 1. To je smyčka u vrcholu $v_1$. Takový sled, $v_1, e_1, v_1$, je sám o sobě kružnicí délky 1, což je liché číslo.

   Indukční předpoklad: Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny uzavřené sledy liché délky menší než $k$.
   *Indukční krok:* Mějme uzavřený sled $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, kde $v_0 = v_k$ a jeho délka $k$ je lichá.

2. Mějme uzavřený sled $W$ sudé délky $k \geq 2$.
   Pak nám mohou nastat přesně dvě situace:

   (a) Sled $W$ neobsahuje žádný opakující se vrchol mimo počáteční a koncový (aby byl uzavřený). Tím tedy přesně splňuje definici kružnice (uzavřené cesty) a pro něj tvrzení platí.

   (b) Sled $W$ obsahuje alespoň jeden opakující se vnitřní vrchol.
   Ať $v_i = v_j$ je první opakující se vrchol ve sledu $W$ pro $0 \leq i < j$. To znamená, že podposloupnost $(v_i, e_{i+1}, \ldots, v_{j-1})$ již žádný opakující se vrchol neobsahuje. Označme si teď podsled $C = (v_i, e_{i+1}, \ldots, v_j)$. Pro $C$ platí:

   - jedná se o uzavřený sled, protože začíná a končí ve stejném vrcholu,
   - jeho délka je $j - i > 0$,
   - protože jsme zvolili $v_j$ jako první výskyt opakovaného vrcholu po $v_i$, žádný z vrcholů $v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}$ se neopakuje a není roven $v_i$.

   Tedy sled $C$ splňuje definici kružnice, takže jsme našli kružnici, která je obsažena v původním sledu $W$.

**Příklad 1.2.** *Ukažte, že pro každá dvě kladná přirozená čísla $n, m$ splňující*

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{1}$$

*existuje prostý neorientovaný graf bez smyček s $n$ vrcholy a $m$ hranami. (To znamená, že popíšete způsob, jak byste takový graf zkonstruovali.)*

**Řešení 1.2.** Mějme tedy $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
V prostém neorientovaném grafu s $n$ vrcholy je maximální možný počet hran roven počtu všech možných dvojic vrcholů. Taková situace odpovídá úplnému grafu a jeho počet hran je

$$|E_{\max}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2}$$

Pro vytvoření $G \in \mathcal{S}$ stačí vybrat libovolných $m$ různých hran. Protože z předpokladu (1) máme zaručeno, že $m$ není větší, než celkový počet možných hran, tento výběr je vždy proveditelný.

Výsledný graf $G = (V, E)$, kde $E$ je námi vybraná množina $m$ hran, má zjevně $n$ vrcholů a přesně $m$ hran. Protože jsme hrany vybírali jako páry různých vrcholů z úplného grafu, je výsledný graf z definice prostý (tj. každou dvojici vrcholů spojuje nejvýše jedna hrana) a bez smyček (hrany spojují vždy dva různé vrcholy).

**Příklad 1.3.** *Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Definujme jeho doplňkový graf $G^{dopl} = (V, E^{dopl})$ takto: pro $u \neq v$ je*

$$\{u, v\} \in E^{dopl} \quad \textit{právě tehdy, když} \quad \{u, v\} \notin E.$$

*Existuje prostý neorientovaný graf $G$ bez smyček takový, že $G$ a $G^{dopl}$ jsou isomorfní (tj. liší se pouze pojmenováním vrcholů)? Jestliže takový graf existuje, uveďte příklad takového grafu; jestliže takový graf neexistuje, zdůvodněte to.*

**Řešení 1.3.** Mějme graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a $E = \{\{1, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 4\}\}$:

$$1 — 3 — 2 — 4$$

Když ke grafu zkonstruujme doplňkový, tj. $G^{dopl} = (V, E^{dopl})$, $E^{dopl} = \{\{2, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}\}$:

$$2 — 1 — 4 — 3$$

Je očividné, že se jedná o grafy vzájemně isomorfní.