

Domácí úkol 4

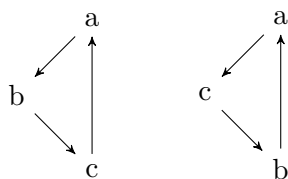
Jakub Adamec
XP01TGR

16. listopadu 2025

Příklad 4.1. Najděte příklad orientovaného grafu se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran, který má nejmenší počet vrcholů.

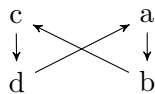
Řešení 4.1. Ať graf G má n vrcholů, pak

- pro $n = 1$ nebo $n = 2$ platí, že jediný netriviální případ je graf $a \leftrightarrow b$, jehož unikátní redukce je on sám.
- pro $n = 3$ platí, že aby redukce nebyla unikátní, musí graf mít silně souvislou komponentu. Uvažme tedy plný graf K_3 . Jeho tranzitivní redukce jsou minimální grafy, jejichž uzávěr je K_3 . Takové redukce existují přesně dvě:



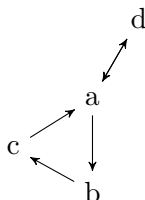
Obě tyto redukce ale mají stejný počet hran, tedy nesplňují podmínku různého počtu hran.

- pro $n = 4$ zkusme vzít plný graf K_4 . Tento graf má 12 hran. Tranzitivní uzávěr K_4 je K_4 sám. Hledáme tedy minimální silně souvislé grafy na 4 vrcholech, jejichž uzávěr je K_4 .
- 1) Tranzitivní redukce \mathcal{R}_1 je cyklus délky 4.



Tento graf je očividně minimální a jeho tranzitivním uzávěrem je K_4 .

- 2) Tranzitivní redukce \mathcal{R}_2 je graf tvořený cyklem délky 3 a cyklem délky 2, které sdílejí jeden vrchol.



Tento graf je také silně souvislý a jeho uzávěrem je K_4 . Je také minimální.

Zjistili jsme tedy, že jakýkoliv graf G , jehož uzávěr je K_4 má dvě tranzitivní redukce \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 s počty hran $|E_1| = 4$ a $|E_2| = 5$. A protože jsme ukázali, že pro $n < 4$ takový graf neexistuje, a zároveň $4 \neq 5$, pak nejmenší možný počet vrcholů je 4.

Příklad 4.2. Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy, kde n je sudé. Dokažte, nebo vyvrátte:

Jestliže každý vrchol grafu G má stupeň $d = \frac{n}{2}$, pak G je úplný bipartitní graf se stranami o $\frac{n}{2}$ vrcholech.

Řešení 4.2.

Příklad 4.3. Je dán prostý souvislý graf $G = (V, E)$ bez smyček s $n \geq 3$ vrcholy. Necht x a y jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj. $\{x, y\} \notin E$) a takové, že $d(x) + d(y) \geq n$. Dokažte, nebo vyvrátte:

V G existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když v $G + \{x, y\}$ existuje hamiltonovská kružnice.

(Graf $G + \{x, y\}$ má stejnou množinu vrcholů jako G a množinu hran rovnou $E \cup \{\{x, y\}\}$.)

Řešení 4.3.