Domácí úkol 3

Jakub Adamec
XP01TGR

6. listopadu 2025

Příklad 3.1. *Je dáno číslo $n \geq 5$. Je možné pro každé takové n zkonstruovat 2-souvislý prostý neorientovaný graf G bez smyček, který má*

- *průměr* $\operatorname{diam}(G)$ *roven 2,*
- *a má $2n - 5$ hran?*

Jestliže ano, pro každé n takový graf zkonstruujte; jestliže ne, zdůvodněte, proč takový graf nemůže existovat.

Řešení 3.1. Nejdříve ověřme, že tvrzení platí pro $n = 5$. Zvolme C_5 jako kružnici na 5 vrcholech. Protože je kružnicí, tak je určitě 2-souvislá, protože nemá artikulaci a je souvislá. Má 5 vrcholů a 5 hran, což odpovídá $2 \cdot 5 - 5 = 5$ počtu hran. Průměr $\operatorname{diam}(C_5) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ také sedí zadání.

Pro $n \geq 6$ zkonstruujme graf G_n tak, že vezmeme 5 vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_5$ a spojíme je do kružnice C_5. Máme tedy 5 vrcholů a 5 hran. Označme si zbývající počet vrcholů jako $k = n - 5$. Přidejme zbývající vrcholy $u_1, u_2, \dots, u_k$. Každý z těchto k vrcholů připojíme dvěma hranami k jedné konkrétní dvojici vrcholů, na C_5. Tato dvojice vrcholů nesmí být vzájemně sousední. Vyberme například dvojici v_1 a v_3. Pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ přidáme hrany (u_i, v_1) a (u_i, v_3). Teď máme n vrcholů a $5 + 2k$ hran.

Ověřme, zda takto zkonstruovaný graf splňuje požadavky.

1) **Počet hran**. Máme $5 + 2k$ hran, tedy $5 + 2(n - 5) = 2n - 5$ hran, to jsme přesně chtěli.

2) **2-souvislost**. Tzn. musíme ukázat, že graf nemá artikulaci. Ověřme tedy indukcí: Odeberme u_i; graf G_{n-1}, který zbyde, má stejnou strukturu, jen o jeden připojený vrchol méně. Postupujme dále až k $n = 6$, to nám zbyde původní C_5 s jedním u_1, který je očividně souvislý. Odebrání u_i tedy graf nerozpojí.

   Zkusme odebrat v_1: Zbytek C_5 je cesta v_2, v_3, v_4, v_5. Všechny vrcholy u_i jsou stále připojeny k v_3. Celý zbytek grafu $G_n \setminus v_1$ je tedy souvislý. Analogicky se ukáže pro v_3.

   Anebo odeberme v_2, v_4, nebo v_5. BÚNO vyberme v_2. Graf $G_n \setminus v_2$ je cesta v_1, v_5, v_4, v_3. Všechny vrcholy u_i jsou připojeny k v_1 i v_3. Tedy $G_n \setminus v_2$ je souvislý.

   Graf je tedy určitě 2-souvislý, protože je souvislý a nemá artikulaci.

3) **Průměr** $\operatorname{diam}(G) = 2$. Dva vrcholy jsou buď vzájemní sousedé, anebo mají společného souseda.

   Jestliže oba vrcholy leží na C_5, tak jsme již v případě $n = 5$ dokázali, že $\operatorname{diam}(C_5) = 2$. Jestliže oba vrcholy jsou z připojených vrcholů u_i, pak mají zaručeně společné sousedy v_1 a v_3, tedy $d(u_i, u_j) = 2$, pro $i \neq j$. Pokud je jeden z C_5 a druhý z u_i, pak:
   - je jeden z vrcholů v_1, respektive v_3, pak jsou sousedé, $d = 1$.
   - je jeden z vrcholů v_2, pak mají společné sousedy v_1 a v_3, $d(v_2, u_i) = 2$.
   - je jeden z vrcholů v_4, pak mají společného souseda v_3, $d(v_4, u_i) = 2$. Obdobně pro v_5.

Takže průměr grafu je 2.

Ano, pro každé $n \geq 5$ je možné takový graf zkonstruovat. ■

Příklad 3.2. *Dokažte nebo vyvraťe:*
Je dán prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s $n \geq 4$ vrcholy, který neobsahuje jako ***indukovaný podgraf*** *úplný bipartitní graf $K_{1,3}$. Pak v G existují dva sousední vrcholy x, y takové, že graf $G \setminus \{x, y\}$ je také souvislý. (Graf $G \setminus \{x, y\}$ je podgraf G, ze kterého jsme odstranili vrcholy x a y, nejen hranu s krajními vrcholy x a y.)*

($K_{1,3}$ je úplný bipartitní graf se stranami o 1 a 3 vrcholech.)

Řešení 3.2.

Příklad 3.3. *Je dán prostý orientovaný graf G bez smyček s n vrcholy a m hranami.*
Dokažte nebo vyvraťte: Je-li G souvislý, ale ne silně souvislý, pak platí

$$n - 1 \leq m \leq (n - 1)^2.$$

Buď tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.

Řešení 3.3.

1) $m \geq n - 1$. Protože G je souvislý, znamená to, že v něm ignorujeme orientaci hran. Z definice víme, že jakýkoli souvislý neorientovaný graf s n vrcholy musí mít alespoň $n - 1$ hran. Tedy nutně platí $m \geq n - 1$.

2) $m \leq (n - 1)^2$.