Domácí úkol 4

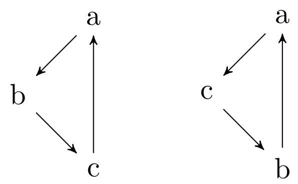
Jakub Adamec
XP01TGR

16. listopadu 2025

Příklad 4.1. *Najděte příklad orientovaného grafu* ***se dvěma tranzitivními redukcemi o různém počtu hran****, který má nejmenší počet vrcholů.*

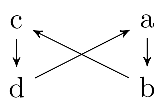
Řešení 4.1. Ať graf G má n vrcholů, pak

- *pro* $n = 1$ *nebo* $n = 2$ platí, že jediný netriviální případ je graf $a \leftrightarrow b$, jehož unikátní redukce je on sám.
- *pro* $n = 3$ platí, že aby redukce nebyla unikátní, musí graf mít silně souvislou komponentu. Uvažme tedy úplný graf K_3. Jeho tranzitivní redukce jsou minimální grafy, jejichž uzávěr je K_3. Takové redukce existují přesně dvě:

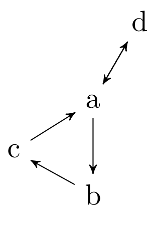
  

  Obě tyto redukce ale mají stejný počet hran, tedy nesplňují podmínku různého počtu hran.
- *pro* $n = 4$ zkusme vzít úplný graf K_4. Tento graf má 12 hran. Tranzitivní uzávěr K_4 je K_4 sám. Hledáme tedy minimální silně souvislé grafy na 4 vrcholech, jejichž uzávěr je K_4.

  1) *Tranzitivní redukce* $\mathcal{R}_1$ je cyklus délky 4.

     Tento graf je očividně minimální a jeho tranzitivním uzávěrem je K_4.
  2) *Tranzitivní redukce* $\mathcal{R}_2$ je graf tvořený cyklem délky 3 a cyklem délky 2, které sdílejí jeden vrchol.

     Tento graf je také silně souvislý a jeho uzávěrem je K_4. Je také minimální.

  Zjistili jsme tedy, že jakýkoliv graf G, jehož uzávěr je K_4 má dvě tranzitivní redukce $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ s počty hran $|E_1| = 4$ a $|E_2| = 5$. A protože jsme ukázali, že pro $n < 4$ takový graf neexistuje, a zároveň $4 \neq 5$, pak nejmenší možný počet vrcholů je 4.

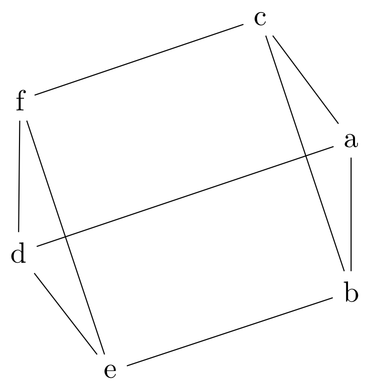
Příklad 4.2. *Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček s n vrcholy, kde n je sudé. Dokažte, nebo vyvraťte:*

Jestliže každý vrchol grafu G má stupeň $d = \frac{n}{2}$, pak G je úplný bipartitní graf se stranami o $\frac{n}{2}$ vrcholech.

Řešení 4.2. Ověřme situaci pro $n = 6$. Počet vrcholů je sudý. Požadovaný stupeň každého vrcholu $d = 3$, tedy hledáme 3-regulární graf na 6 vrcholech.

Tvrzení říká, že každo takový graf musí být $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, takže v tomto případě $K_{3,3}$. Zkusme najít 3-regulární graf na 6 vrcholech, který *není* $K_{3,3}$.

Ať $G = (V, E)$, kde $V = \{a, b, \dots, f\}$ a $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, a\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}\}$.

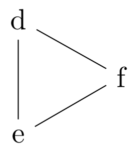


Ověřme, že graf G splňuje podmínky.

1) Nemá smyčky ani paralelní hrany.
2) Má sudý počet vrcholů, $n = 6$.
3) Ověřme stupně jednotlivých vrcholů:
   - $d(a) = 3$
   - $d(b) = 3$
   - $d(c) = 3$
   - $d(d) = 3$
   - $d(e) = 3$
   - $d(f) = 3$

   Každý vrchol má stupeň $d = 3 = \frac{6}{2}$.

Pak by G měl být $K_{3,3}$, ověřme. Z definice bipartitního grafu víme, že *nesmí* obsahovat kružnici liché délky. Náš graf G obsahuje dokonce dvě kružnice délky tři, například



Takže G není bipartitní, tudíž nemůže být ani úplným bipartitním grafem $K_{3,3}$. ∎

Příklad 4.3. *Je dán prostý souvislý graf* $G = (V, E)$ *bez smyček s* $n \geq 3$ *vrcholy. Nechť* x *a* y *jsou dva vrcholy grafu, které nejsou spojeny hranou (tj.* $\{x, y\} \notin E$*) a takové, že* $d(x) + d(y) \geq n$*. Dokažte, nebo vyvraťte:*

V G *existuje hamiltonovská kružnice právě tehdy, když v* $G + \{x, y\}$ *existuje hamiltonovská kružnice.*
(Graf $G + \{x, y\}$ *má stejnou množinu vrcholů jako* G *a množinu hran rovnu* $E \cup \{\{x, y\}\}$*.)*

Řešení 4.3.