Domácí úkol 2

Jakub Adamec
XP01TGR

23. října 2025

Příklad 2.1. *Je dán prostý neorientovaný souvislý graf $G = (V, E)$, který má most $e = \{u, v\}$. Určete zda alespoň jeden z vrcholů u, v musí být artikulace anebo oba vrcholy u, v musí být artikulace.*
Odpověď pečlivě zdůvodněte.

Řešení 2.1.

Lemma. *Vrchol u není artikulace $\iff$ $d(u) = 1$.*

Důkaz. Vrchol u není artikulace, pokud graf $G \setminus u$ zůstane souvislý. Graf $G \setminus u$ vytvoříme tak, že z G odstraníme vrchol u a všechny hrany, které z něj vycházejí (včetně mostu $e = \{u, v\}$). Graf $G \setminus u$ se bude skládat ze dvou (potenciálně prázdných) částí:

1) Zbytek komponenty C_u po odstranění u, tj. $C_u \setminus \{u\}$.
2) Celá komponenta C_v.

Mezi těmito dvěma částmi nevede žádná hrana, protože jediná hrana, která je spojovala, most e, byla odstraněna spolu s vrcholem u. Aby byl graf $G \setminus u$ souvislý, musí být jedna z těchto dvou částí prázdná. Část C_v nemůže být prázdná, protože obsahuje alespoň vrchol v. Proto část $C_u \setminus \{u\}$ musí být nutně prázdná. A to platí právě tehdy, když komponenta C_u obsahovala *pouze* vrchol u. To znamená, že vrchol u neměl v G žádného jiného souseda, než v. Tedy u není artikulace $\iff$ $d(u) = 1$. ■

Najděme protipříklad. Hledejme souvislý graf G s mostem $e = \{u, v\}$, kde $d(u) = d(v) = 1$. Jediný takový graf je graf se dvěma vrcholy (u, v) a jedinou hranou $(e = \{u, v\})$. Ověřme, že tento graf má všechny námi požadované vlastnosti:

a) *Je graf prostý, neorientovaný, souvislý?* Ano.
b) *Je $e = \{u, v\}$ most?* Ano. G je souvislý a $G \setminus e$ sestává ze dvou izolovaných vrcholů u, v, takže má 2 komponenty souvislosti. Počet komponent se zvýšil.
c) *Je u artikulace?* Ne. $d(u) = 1$. Graf $G \setminus u$ je pouze vrchol v. Počet komponent se nezvýšil.
d) *Je v artikulace?* Ne. Obdobná situace jako pro u.

Našli jsme tedy graf G, která má most $e = \{u, v\}$, ale *ani jeden* z vrcholů u, v není artikulace. Takže ani jeden vrchol nemusí být artikulace. ■

Příklad 2.2. *Dokažte nebo vyvraťte: Každý prostý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi.*

Řešení 2.2. Rozdělme problém na dva případy, dle souvislosti G.

1) *Pokud G není souvislý, pak má alespoň 2 komponenty souvislosti.* V takovém případě nám nastavají dvě situace:

   a) G se skládá pouze z izolovaných vrcholů. Protože $|V(G)| \geq 2$, G má alespoň dva vrcholy, v_1 a v_2. G má n komponent souvislosti. Graf $G \setminus v_1$ má $n-1$ izolovaných vrcholů, tedy i komponent souvislosti. Takže v_1, respektive v_2, určitě *není* artikulace.

   b) G má alespoň jednu komponentu souvislosti C_i s $|V(C_i)| \geq 2$. Nechť v je vrchol v komponentě C_i. Odebrání v může ovlivnit pouze komponentu C_i. Zadefinujme si $k(G)$ jako počet komponent souvislosti grafu G.

$$k(G) = k(C_i) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = 1 + \sum_{j \neq i} 1 \tag{1}$$

   Počet komponent $G \setminus v$ je

$$k(G \setminus v) = k(C_i \setminus v) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = k(C_i \setminus v) + k(G) - 1 > k(G) \tag{2}$$

   právě tehdy, když $k(C_i \setminus v) > 1$.
   To znamená, že v je artikulací G právě tehdy, když je artikulací své komponenty C_i. Tudíž stačí dokázat tvrzení pro souvislou komponentu C_i. Pokud má C_i alespoň dvě **ne**artikulace, pak tyto dva vrcholy nejsou ani artikulacemi vůči G.

2) *Pokud G je souvislý, pak má právě jednu komponentu souvislosti.*
   Protože G je souvislý a $|V(G)| \geq 2$, můžeme v něm sestrojit kostru T. Kostra je strom a má stejný počet vrcholů jako G. Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy. Vyberme si dva různé listy kostry T, u a v. Teď stačí dokázat, že u, respektive v, není artikulací grafu G.

   $G \setminus u$ musí být souvislý graf. Protože odebrání listu z netriviálního stromu zachovává souvislost, tak $T \setminus u$ je souvislý. Poznamenejme, že $T \setminus u$ je podgrafem $G \setminus u$, protože obsahuje všechny vrcholy $V(G) \setminus \{u\}$ a některé hrany z $G \setminus u$. No ale to nutně znamená, že $G \setminus u$ je také souvislý. Takže u určitě není artikulací.

   Stejný argument platí i pro druhý list v. Tím jsme v souvislém grafu našli alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi. ■

Příklad 2.3. *Dokažte nebo vyvraťte: Prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma hranami je 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany grafu G leží na společné kružnici.*

Řešení 2.3.
„$\Rightarrow$“: Graf je 2-souvislý.
Nechť $e_1 = \{u, v\}$ a $e_2 = \{x, y\}$ jsou dvě libovolné různé hrany v G. Vytvořme nový graf G' z G tak, že rozpůlíme obě hrany:

- Hranu e_1 nahradíme cestou $u \to w_1 \to v$.
- Hranu e_2 nahradíme cestou $x \to w_2 \to y$.

Přidali jsme vrcholy w_1, w_2. Tímto zachováváme souvislost, tedy i G' je 2-souvislý. Víme, že v 2-souvislém grafu každé dva vrcholy leží na společné kružnici. Využijme toho: Existuje kružnice C' v G', která obsahuje w_1 i w_2.

Protože vrcholy w_1 a w_2 mají v G' stupeň 2, každá kružnice C', která jimi prochází, *musí* obsahovat obě hrany s nimi incidentní.

- Kružnice C' musí obsahovat sled $u \to w_1 \to v$ (případně v opačném pořadí).
- Kružnice C' musí obsahovat sled $x \to w_2 \to y$ (případně v opačném pořadí).

A tedy kružnice C' obsahuje původní hrany e_1 a e_2. ■

„$\Leftarrow$“: G je prostý graf s $|E| \geq 2$, ve kterém každé dvě hrany leží na společné kružnici.
Aby graf byl 2-souvislý, musí být souvislý a nemít artikulaci. Ukažme, že G nemá artikulaci.
Sporem. Ať G *není* 2-souvislý, tedy že má artikulaci v.

Pokud v je artikulace, pak graf $G \setminus v$ je nesouvislý. Nechť C_1 a C_2 jsou dvě z jeho komponent souvislosti. Protože G je souvislý, vrchol v musí mít sousedy v obou těchto komponentách:

- Existuje vrchol $u \in V(C_1)$ takový, že $e_1 = \{u, v\} \in E(G)$.
- Existuje vrchol $w \in V(C_2)$ takový, že $e_2 = \{w, v\} \in E(G)$.

Jelikož $u \in C_1$ a $w \in C_2$, je $u \neq w$, tak e_1 a e_2 jsou dvě různé hrany. Použijme předpoklad: hrany e_1 a e_2 musí ležet na společné kružnici K. Tato kružnice musí nutně obsahovat sled $u \to v \to w$. Aby byla kružnice uzavřena, musí existovat cesta P z w zpět do u, která již *neobsahuje* vrchol v, protože G je prostý a kružnice nemůže vrchol opakovat mimo počátku.

To znamená, že cesta P musí celá ležet v grafu $G \setminus v$. Existence cesty P z w do u v $G \setminus v$ ale znamená, že u a w leží ve stejné komponentě souvislosti $G \setminus v$. Což je **spor** s tím, jak jsme definovali u a w.

Graf G je souvislý a *nemá* artikulaci, takže je 2-souvislý. ■