

## Domácí úkol 2

Jakub Adamec  
XP01TGR

21. října 2025

**Příklad 2.1.** Je dán prostý neorientovaný souvislý graf  $G = (V, E)$ , který má most  $e = \{u, v\}$ . Určete zda alespoň jeden z vrcholů  $u, v$  musí být artiklace anebo oba vrcholy  $u, v$  musí být artiklace.

Odpověď pečlivě zdůvodněte.

**Řešení 2.1.** Pomocné lemma. Vrchol  $u$  není artiklace  $\iff \deg(u) = 1$ .

Důkaz. Vrchol  $u$  není artiklace, pokud graf  $G \setminus u$  zůstane souvislý, tj.  $k(G \setminus u) = 1$ . Graf  $G \setminus u$  vytvoříme tak, že z  $G$  odstraníme vrchol  $u$  a všechny hrany, které z něj vycházejí (včetně mostu  $e = \{u, v\}$ ). Graf  $G \setminus u$  se bude skládat ze dvou (potenciálně prázdných) částí:

- (1) Zbytek komponenty  $C_u$  po odstranění  $u$ , tj.  $C_u \setminus \{u\}$ .
- (2) Celá komponenta  $C_v$ .

Mezi těmito dvěma částmi nevede žádná hrana, protože jediná hrana, která je spojovala, most  $e$ , byla odstraněna spolu s vrcholem  $u$ . Aby byl graf  $G \setminus u$  souvislý, musí být jedna z těchto dvou částí prázdná. Část  $C_v$  nemůže být prázdná, protože obsahuje alespoň vrchol  $v$ . Tedy část  $C_u \setminus \{u\}$  musí být nutně prázdná. A to platí právě tehdy, když komponenta  $C_u$  obsahovala pouze vrchol  $u$ . To znamená, že vrchol  $u$  neměl v  $G$  žádného jiného souseda, než  $v$ . Tedy  $u$  není artiklace  $\iff \deg(u) = 1$ . ■

Najdeme protipříklad. Hledejme souvislý graf  $G$  s mostem  $e = \{u, v\}$ , kde  $\deg(u) = \deg(v) = 1$ . Jediný takový graf je graf se dvěma vrcholy  $(u, v)$  a jedinou hranou ( $e = \{u, v\}$ ). Ověřme, že tento graf má všechny námi požadované vlastnosti:

- (a) Je graf prostý, neorientovaný, souvislý? Ano.
- (b) Je  $e = \{u, v\}$  most? Ano.  $G$  je souvislý a  $G \setminus e$  sestává ze dvou izolovaných vrcholů  $u, v$ , takže  $k(G \setminus e) = 2$ . Počet komponent se zvýšil.
- (c) Je  $u$  artiklace? Ne.  $\deg(u) = 1$ . Graf  $G \setminus u$  je pouze vrchol  $v$ .  $k(G \setminus u) = 1$ . Počet komponent se nezvýšil.
- (d) Je  $v$  artiklace? Ne. Obdobná situace jako pro  $u$ .

Našli jsme tedy graf  $G$ , která má most  $e = \{u, v\}$ , ale ani jeden z vrcholů  $u, v$  není artiklace. Takže ani jeden vrchol nemusí být artiklace. ■

**Příklad 2.2.** Dokažte nebo vyvratte: Každý prostý neorientovaný graf  $G$  bez smyček s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy, které nejsou artiklacemi.

**Řešení 2.2.**

**Příklad 2.3.** *Dokažte nebo vyvrátte: Prostý souvislý neorientovaný graf  $G$  bez smyček s alespoň dvěma hranami je 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany grafu  $G$  leží na společné kružnici.*

**Řešení 2.3.**