

Domácí úkol 2

Jakub Adamec
XP01TGR

3. února 2026

Příklad 2.1. Je dán prostý neorientovaný souvislý graf $G = (V, E)$, který má most $e = \{u, v\}$. Určete zda alespoň jeden z vrcholů u, v musí být artiklace anebo oba vrcholy u, v musí být artiklace.

Odpověď pečlivě zdůvodněte.

Řešení 2.1.

Lemma. Vrchol u není artiklace $\iff d(u) = 1$.

Důkaz. Vrchol u není artiklace, pokud graf $G \setminus u$ zůstane souvislý. Graf $G \setminus u$ vytvoříme tak, že z G odstraníme vrchol u a všechny hrany, které z něj vycházejí (včetně mostu $e = \{u, v\}$). Graf $G \setminus u$ se bude skládat ze dvou (potenciálně prázdných) částí:

- 1) Zbytek komponenty C_u po odstranění u , tj. $C_u \setminus \{u\}$.
- 2) Celá komponenta C_v .

Mezi těmito dvěma částmi nevede žádná hrana, protože jediná hrana, která je spojovala, most e , byla odstraněna spolu s vrcholem u . Aby byl graf $G \setminus u$ souvislý, musí být jedna z těchto dvou částí prázdná. Část C_v nemůže být prázdná, protože obsahuje alespoň vrchol v . Proto část $C_u \setminus \{u\}$ musí být nutně prázdná. A to platí právě tehdy, když komponenta C_u obsahovala pouze vrchol u . To znamená, že vrchol u neměl v G žádného jiného souseda, než v . Tedy u není artiklace $\iff d(u) = 1$. ■

Najděme protipříklad. Hledejme souvislý graf G s mostem $e = \{u, v\}$, kde $d(u) = d(v) = 1$. Jediný takový graf je graf se dvěma vrcholy (u, v) a jedinou hranou ($e = \{u, v\}$). Ověřme, že tento graf má všechny námi požadované vlastnosti:

- a) Je graf prostý, neorientovaný, souvislý? Ano.
- b) Je $e = \{u, v\}$ most? Ano. G je souvislý a $G \setminus e$ sestává ze dvou izolovaných vrcholů u, v , takže má 2 komponenty souvislosti. Počet komponent se zvýšil.
- c) Je u artiklace? Ne. $d(u) = 1$. Graf $G \setminus u$ je pouze vrchol v . Počet komponent se nezvýšil.
- d) Je v artiklace? Ne. Obdobná situace jako pro u .

Našli jsme tedy graf G , která má most $e = \{u, v\}$, ale ani jeden z vrcholů u, v není artiklace. Takže ani jeden vrchol nemusí být artiklace. ■

Příklad 2.2. *Dokažte nebo vyvráťte: Každý prostý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi.*

Řešení 2.2. Rozdělme problém na dva případy, dle souvislosti G .

1) *Pokud G není souvislý, pak má alespoň 2 komponenty souvislosti.* V takovém případě nám nastávají dvě situace:

- a) G se skládá pouze z izolovaných vrcholů. Protože $|V(G)| \geq 2$, G má alespoň dva vrcholy, v_1 a v_2 . G má n komponent souvislosti. Graf $G \setminus v_1$ má $n - 1$ izolovaných vrcholů, tedy i komponent souvislosti. Takže v_1 , respektive v_2 , určitě *není* artikulace.
- b) G má alespoň jednu komponentu souvislosti C_i s $|V(C_i)| \geq 2$. Nechť v je vrchol v komponentě C_i . Odebrání v může ovlivnit pouze komponentu C_i . Zadefinujme si $k(G)$ jako počet komponent souvislosti grafu G .

$$k(G) = k(C_i) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = 1 + \sum_{j \neq i} 1 \quad (2.1)$$

Počet komponent $G \setminus v$ je

$$k(G \setminus v) = k(C_i \setminus v) + \sum_{j \neq i} k(C_j) = k(C_i \setminus v) + k(G) - 1 > k(G) \quad (2.2)$$

právě tehdy, když $k(C_i \setminus v) > 1$.

To znamená, že v je artikulací G právě tehdy, když je artikulací své komponenty C_i . Tudíž stačí dokázat tvrzení pro souvislou komponentu C_i . Pokud má C_i alespoň dvě neartikulace, pak tyto dva vrcholy nejsou ani artikulacemi vůči G .

2) *Pokud G je souvislý, pak má právě jednu komponentu souvislosti.*

Protože G je souvislý a $|V(G)| \geq 2$, můžeme v něm sestrojít kostru T . Kostra je strom a má stejný počet vrcholů jako G . Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy. Vyberme si dva různé listy kostry T , u a v . Teď stačí dokázat, že u , respektive v , není artikulací grafu G .

$G \setminus u$ musí být souvislý graf. Protože odebrání listu z netriviálního stromu zachovává souvislost, tak $T \setminus u$ je souvislý. Poznamenejme, že $T \setminus u$ je podgrafem $G \setminus u$, protože obsahuje všechny vrcholy $V(G) \setminus \{u\}$ a některé hrany z $G \setminus u$. No ale to nutně znamená, že $G \setminus u$ je také souvislý. Takže u určitě není artikulací.

Stejný argument platí i pro druhý list v . Tím jsme v souvislém grafu našli alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi. ■

Příklad 2.3. *Dokažte nebo vyvrátte: Prostý souvislý neorientovaný graf G bez smyček s alespoň dvěma hranami je 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany grafu G leží na společné kružnici.*

Řešení 2.3.

\Rightarrow : Graf je 2-souvislý. Necht $e_1 = \{u, v\}$ a $e_2 = \{x, y\}$ jsou dvě libovolné různé hrany v G . Vytvořme nový graf G' z G tak, že rozpůlíme obě hrany:

- Hranu e_1 nahradíme cestou $u \rightarrow w_1 \rightarrow v$.
- Hranu e_2 nahradíme cestou $x \rightarrow w_2 \rightarrow y$.

Přidali jsme vrcholy w_1, w_2 . Tímto zachováváme souvislost, tedy i G' je 2-souvislý. Víme, že v 2-souvislém grafu každé dva vrcholy leží na společné kružnici. Využijme toho: Existuje kružnice C' v G' , která obsahuje w_1 i w_2 .

Protože vrcholy w_1 a w_2 mají v G' stupeň 2, každá kružnice C' , která jimi prochází, *musí* obsahovat obě hrany s nimi incidentní.

- Kružnice C' musí obsahovat sled $u \rightarrow w_1 \rightarrow v$ (případně v opačném pořadí).
- Kružnice C' musí obsahovat sled $x \rightarrow w_2 \rightarrow y$ (případně v opačném pořadí).

A tedy kružnice C' obsahuje původní hrany e_1 a e_2 .

\Leftarrow : G je prostý graf s $|E| \geq 2$, ve kterém každé dvě hrany leží na společné kružnici. Aby graf byl 2-souvislý, musí být souvislý a nemít artikulaci. Ukažme, že G nemá artikulaci.

Sporem. Ať G *není* 2-souvislý, tedy že má artikulaci v .

Pokud v je artikulace, pak graf $G \setminus v$ je nesouvislý. Necht C_1 a C_2 jsou dvě z jeho komponent souvislosti. Protože G je souvislý, vrchol v musí mít sousedy v obou těchto komponentách:

- Existuje vrchol $u \in V(C_1)$ takový, že $e_1 = \{u, v\} \in E(G)$.
- Existuje vrchol $w \in V(C_2)$ takový, že $e_2 = \{w, v\} \in E(G)$.

Jelikož $u \in C_1$ a $w \in C_2$, je $u \neq w$, tak e_1 a e_2 jsou dvě různé hrany. Použijme předpoklad: hrany e_1 a e_2 musí ležet na společné kružnici K . Tato kružnice musí nutně obsahovat sled $u \rightarrow v \rightarrow w$. Aby byla kružnice uzavřena, musí existovat cesta P z w zpět do u , která již *neobsahuje* vrchol v , protože G je prostý a kružnice nemůže vrchol opakovat mimo počátku.

To znamená, že cesta P musí celá ležet v grafu $G \setminus v$. Existence cesty P z w do u v $G \setminus v$ ale znamená, že u a w leží ve stejné komponentě souvislosti $G \setminus v$. Což je **spor** s tím, jak jsme definovali u a w .

Graf G je souvislý a *nemá* artikulaci, takže je 2-souvislý.

■