Domácí úkol 6

Jakub Adamec
XP01TGR

3. února 2026

Příklad 6.1. *Je dán bipartitní graf G se stranami X a Y a v něm maximální párování $P_{\max}$. Pro každou hranu $e \in P_{\max}$ vybereme jeden její krajní vrchol do množiny A takto:*

Pro hranu $e = \{x, y\} \in P_{\max}(x \in X, y \in Y)$ do A vybereme vrchol y, jestliže existuje cesta $a_1, e_1, a_2, e_2, \ldots, e_{2k+1}, y$, kde

- *$a_1 \in X$ je volný v párování $P_{\max}$,*
- *pro $i > 0$ je $e_{2i-1} \notin P_{\max}$, $i > 0$, $e_{2i} \in P_{\max}$.*

Jestliže taková cesta neexistuje, do A vybereme vrchol x.
Dokažte nebo vyvraťte: Množina A (zkonstruovaná výše) je vrcholovým pokrytím grafu G.

Řešení 6.1. Definujme si *dosažitelné* vrcholy jako takové, ke kterým existuje střídavá cesta (přesně ta ze zadání) z nějakého volného vrcholu X.

Mějme libovolnou hranu $e = \{u, v\}$, kde $u \in X$ a $v \in Y$. Musíme dokázat, že e je pokryta, tedy buď $u \in A$, nebo $v \in A$. Mohou nastat dva případy:

(a) Hrana e *leží* v párování $P_{\max}$. Konstrukce množiny A vybírá z každé hrany $P_{\max}$ právě jeden vrchol. Takže hrana je určitě pokryta.

(b) Hrana e *neleží* v párování $P_{\max}$. Sporem. Předpokládejme, že hrana $\{u, v\}$ není pokryta. To by znamenalo, že $u \notin A$ a zároveň $v \notin A$. Takže:

- Pokud je u *volný*, pak je triviálně dosažitelný (je počátkem střídavé cesty délky 0). Zároveň platí $u \notin A$, protože A obsahuje pouze vrcholy z párování.
- Pokud je u *spárovaný* s nějakým $y' \in Y$ (hrana $\{u, y'\} \in P_{\max}$), pak z předpokladu $u \notin A$ plyne, že do A musel být vybrán vrchol y'. To podle definice A nastane jen tehdy, je-li y' dosažitelný. Pokud je y' dosažitelný, pak prodloužením cesty přes hranu $\{y', u\}$ je dosažitelný i vrchol u.

V obou případech jsme ukázali, že

$$u \notin A \implies u \text{ je dosažitelný.} \tag{6.1}$$

Využijeme hranu $e = \{u, v\}$, která neleží v párování: Jelikož u je dosažitelný a $\{u, v\} \notin P_{\max}$, můžeme střídavou cestu končící v u prodloužit o hranu $\{u, v\}$ do vrcholu v. Tedy i v je dosažitelný. Kdyby byl v volný, našli bychom střídavou cestu z volného do volného vrcholu (zlepšující cestu), což je spor s maximalitou $P_{\max}$. Vrchol v je tedy *nutně* spárovaný s nějakým x'. Protože je v dosažitelný a spárovaný, podmínka konstrukce A říká, že pro hranu $\{x', v\}$ vybereme do A vrchol v.

A to je spor s předpokladem $v \notin A$. Tedy alespoň jeden z vrcholů u, v musí ležet v A.

Množina A je vrcholovým pokrytím. ■

Příklad 6.2. *Dokažte, že v každém bipartitním grafu G platí*

$$\alpha_1(G) = \beta_0(G). \tag{6.2}$$

Hint: Použijte Königovu větu pro určení počtu hran v maximálním párování v bipartitním grafu.

Řešení 6.2. Označme $\alpha_1(G)$ velikost maximálního párování a $\beta_0(G)$ velikost minimálního vrcholového pokrytí.

Nejprve si uvědomme, že pro libovolný graf platí nerovnost:

$$\alpha_1(G) \leq \beta_0(G). \tag{6.3}$$

Je to proto, že každá hrana z maximálního párování musí být pokryta alespoň jedním vrcholem a tyto hrany jsou disjunktní.

Nyní musíme dokázat opačnou nerovnost, tedy $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$. K tomu využijeme *Königovu* větu v jejím alternativním tvaru, která říká:

$$\alpha_1(G) = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|). \tag{6.4}$$

Uvažujme libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ a sestrojme množinu vrcholů K takto:

$$K = (X \setminus A) \cup V_G(A). \tag{6.5}$$

Velikost této množiny je $|K| = |X \setminus A| + |V_G(A)|$.

Ověříme, že K je vrcholové pokrytí. Mějme libovolnou hranu $e = \{x, y\}$, kde $x \in X$ a $y \in Y$.

(a) Pokud $x \notin A$, pak $x \in (X \setminus A) \subseteq K$. Hrana je pokryta.

(b) Pokud $x \in A$, pak z definice sousedství $y \in V_G(A) \subseteq K$. Hrana je pokryta.

Množina K je tedy vždy vrcholovým pokrytím.

Protože $\beta_0(G)$ je velikost *minimálního* vrcholového pokrytí, musí pro každé takto sestrojené K platit:

$$|K| \geq \beta_0(G). \tag{6.6}$$

Tato nerovnost platí pro libovolné A, tedy i pro to, které minimalizuje výraz z Königovy věty. Dostáváme:

$$\alpha_1(G) = \min_{A \subseteq X} (|X \setminus A| + |V_G(A)|) \geq \beta_0(G). \tag{6.7}$$

Máme tedy $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ a zároveň $\alpha_1(G) \geq \beta_0(G)$. Z toho nutně plyne:

$$\alpha_1(G) = \beta_0(G). \tag{6.8}$$

■