# Domácí úkol 7

Jakub Adamec
XP01TGR

7. ledna 2026

**Příklad 7.1.** *Dokažte:*

*Každý řez souvislého neorientovaného grafu je disjuktiním sjednocením cutsetů.*

**Řešení 7.1.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf. Víme, že symetrická diference dvou řezů je opět řez. Důkaz provedeme indukcí dle velikosti řezu $|K|$. Nechť $K$ je libovolný řez.

1) *Základní krok.* Je-li $K$ minimální (vzhledem k inkluzi), pak je $K$ z definice cutset a tvrzení triviálně platí (sjednocení jedné množiny).

2) *Indukční předpoklad.* Předpokládejme, že $K$ není minimální. Pak existuje vlastní podmnožina $C \subset K$, která je cutsetem.

3) *Indukční krok.* Protože $C \subset K$, platí $K \setminus C = K \oplus C$. Jelikož symetrická diference dvou řezů je řez, je i $K'$ řezem.

   Uvažujme množinu $K' = K \setminus C$. Protože $C \subset K$, platí $K \setminus C = K \oplus C$. Jelikož $K$ i $C$ jsou řezy a symetrická diference řezů je řez, je i $K'$ řezem.

   Získali jsme rozklad $K = C \cup K'$, kde $C$ a $K'$ jsou disjunktní. Protože $|K'| < |K|$, můžeme na $K'$ aplikovat indukční předpoklad. Tedy $K'$ lze rozložit na sjednocení cutsetů $C_2 \cup \cdots \cup C_k$.

Celkově pak $K = C \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, což je disjunktní sjednocení cutsetů. ∎

**Příklad 7.2.** *Dokažte, nebo vyvraťte:*

*Množina $K \subseteq E$ souvislého grafu $G$ s množinou hran $E$ je kružnice právě tehdy, když je to minimální množina hran, pro kterou platí*

$$K \cap (E \setminus T) \neq \emptyset \tag{7.1}$$

*pro každou kostu $T$ grafu $G$.*

**Řešení 7.2.**

$\Rightarrow$: Předpokládejme, že množina $K \subseteq E$ souvislého grafu $G$ s množinou hran $E$ je kružnice.

Kostra $T$ je z definice strom, což znamená, že je acyklickým grafem. Protože $K$ je kružnice, nemůže být podmnožinou žádné kostry. Tím pádem musí platit, že $K$ má s doplňkem kostry $(E \setminus T)$ neprázdný průnik. Dále víme, že kružnice bez jedné hrany tvoří cestu (případně les), což je acyklický graf. Každý acyklický podgraf v souvislém grafu lze doplnit na kostru. Existuje tedy kostra $T'$, která obsahuje celou množinu $K' = K \setminus \{e\}$, kde $e$ je libovolná hrana (tj. $K' \subseteq T'$). To znamená, že $K' \cap (E \setminus T') = \emptyset$. Takže množina $K'$ podmínku nesplňuje, $K$ je proto minimální.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že $K$ je minimální a splňuje podmínku $K \nsubseteq T$ pro každou kostru $T$.

Víme, že množina hran $E$ je podmnožinou nějaké kostry právě tehdy, když $E$ neobsahuje kružnici (tj. je acyklická). Jelikož $K$ není podmnožinou žádné kostry, musí $K$ obsahovat alespoň jednu kružnici $C$. Jinak by totiž šla doplnit na kostru, což by byl spor s podmínkou. Takže $C \subseteq K$. A protože $C$ je kružnice, podle první části důkazu víme, že $C$ sama o sobě splňuje podmínku (průnik s doplňkem každé kostry je neprázdný). Kdyby $K$ obsahovala kromě kružnice $C$ ještě nějaké další hrany, nebyla by minimální, protože už její vlastní podmnožina $C$ podmínku splňuje. My ale předpokládáme minimální $K$, tudíž $K = C$.

Množina $K$ je skutečně kružnicí právě tehdy, když je minimální množinou, která má neprázdný průnik s doplňkem každé kostry grafu $G$. $\blacksquare$