České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka teorie a příkladů

Teorie grafů

Jakub Adamec

Praha, 2025

Obsah

Strana

Úvod

Tento text není psán jako učebnice, nýbrž jako soubor řešených příkladů, u kterých je vždy uveden celý korektní postup a případné poznámky řešitelů, které často nebývají formální, a tedy by neměly být používány při oficálním řešení problémů, například při zkoušce. Jedná se pouze o pokus předat probíranou látku z různých úhlů pohledu, pokud by korektní matematický nebyl dostatečně výřečný.

Autor velmi ocení, pokud čtenáři zašlou své podněty, úpravy anebo připomínky k textu. Budu rád za všechnu konstruktivní kritiku a nápady na změny. Dejte mi také prosím vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby a jiné.

Errata a aktuální verse textu bude na stránce `https://github.com/knedl1k/XP01TGR`.

Poděkování. Rád bych poděkoval profesorce Marii Demlové nejen za zadání, okolo kterých je postavena celá sbírka, ale také za celý předmět Teorie grafů.

Text je vysázen makrem LaTeX Leslieho Lamporta s využitím balíků `hypperref` Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Grafy byly nakresleny pomocí maker Ti*k*Z Tilla Tantaua.

Stručné informace o textu

Všechny růžové texty jsou zároveň hypertextové odkazy.

U každého příkladu je pro ušetření místa a zpřehlednění sbírky řešení jednotlivých příkladů ihned pod zadáním.

1 Neorientované grafy

1.1 Základní pojmy a definice

Graf je soubor vrcholů, hran a vztahů incidence. Zapíšeme jako $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je neprázdná množina vrcholů, E množina hran a ε říká „co hrany představují“, respektive

$$\varepsilon : E \to \{\{u, v\} \mid u, v \in V\} . \tag{1}$$

Jestliže pro dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ platí, že $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, pak se hrany e_1, e_2 nazývají **paralelní**. Pokud graf nemá paralelní hrany, nazýváme jej **prostý**. V takovém případě také stačí chápat graf jako dvojici $G = (V, E)$, kde hrany jsou neprázdné maximálně dvouprvkové podmnožiny V.

Smyčkou nazveme takovou hranu, která je $e \in E$ a pro $\varepsilon(e) = \{u, v\}$ platí $u = v$.

$\mathcal{S} \ldots$ je množina všech neorientovaných prostých grafů bez smyček.

1.1.1 Základní typy grafů

Rozlišujeme 2 základní typy grafů, orientované a neorientované.

(a) Orientovaný graf: $\varepsilon : E \to \{(u, v) \mid u, v \in V\}$; $u \in P_V(\varepsilon), v \in K_V(\varepsilon)$

(b) Neorientovaný graf: $\varepsilon : E \to \{(u, v) \mid u, v \in V\}$; u, v jsou krajní vrcholy ε

1.1.2 Sled, tah, cesta

(a) Sled je taková posloupnost, která začíná a končí vrcholem a kde po každém vrcholu následuje hrana, tedy $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k$.
V orientovaném případě vždy platí $P_V(e_1) = v_i$, $K_V(e_i) = v_{i+1}$. Neorientovaný pouze říká, že v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy.

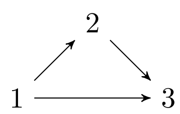
(b) Tah je sled, ve kterém se nesmí opakovat hrany.

(c) Cesta je sled, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy, s výjimkou počátečeního, ve kterém cesta může končit.

1.1.3 Kružnice a cyklus

Kružnice je uzavřená neorientovaná cesta v grafu, **cyklus** uzavřená orientovaná cesta.

Příklad kružnice:

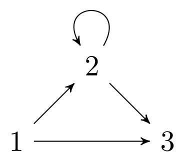


1.1.4 Stupně vrcholů

Pokud $G = (V, E, \varepsilon)$, pak

- vstupní stupeň v $d^-(v) = \|\{e \mid K_V(e) = v\}\|$
- výstupní stupeň v $d^+(v) = \|\{e \mid P_V(e) = V\}\|$
- stupeň v $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$

Příklad



$$\begin{aligned} d^-(2) &= 2 \\ d^+(2) &= 3 \\ d(2) &= 5 \end{aligned}$$

Pro $G = (V, E)$ je pouze $d(v) = \|\{e \mid v \text{ je krajní vrchol } e, \text{ smyčku počítáme } 2\times\}\|$.

Z toho máme důsledek

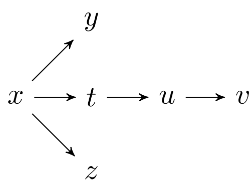
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\|E\| \tag{2}$$

Tedy každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

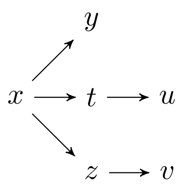
1.2 Skóre

Skóre grafu $\underset{\substack{G=(V,E)\\ \|V\|=d}}{(G \in \mathcal{S})}$ je $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, kde d_i je stupeň vrcholu v_i.

Mějme příklad skóre (1,1,1,2,2,3). Jak by mohl vypadat graf s takovým skóre?



nebo



Jak vidíme, skóre jednoznačně neurčuje graf. Můžeme ze skóre ale říct, jestli je takové skóre validním skóre nějakého grafu?

1.3 Hledání grafu ke skóre

Tvrzení. Máme $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$.
Pak D je skóre některého grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ definovaná tak, že

$$d_i = \begin{cases} d_i & \text{pokud } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pokud } i \ge n - d_n \end{cases}$$

je skóre nějakého $G' \in \mathcal{S}$.

Důkaz.
„$\Leftarrow$“: Existuje G' pro D'. G vytvoříme tak, že k G' přidáme vrchol v_n a spojíme se všemi vrcholy $v_{n-d_n}, v_{n-d_1+1}, \dots, v_{n-1}$. Pak G má skóre D. ■

„$\Rightarrow$“: Máme G s $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde d_1 je stupeň v_1, d_2 je stupeň v_2 a tak dále.

Mějme $\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ má } D\} \ne \emptyset$.

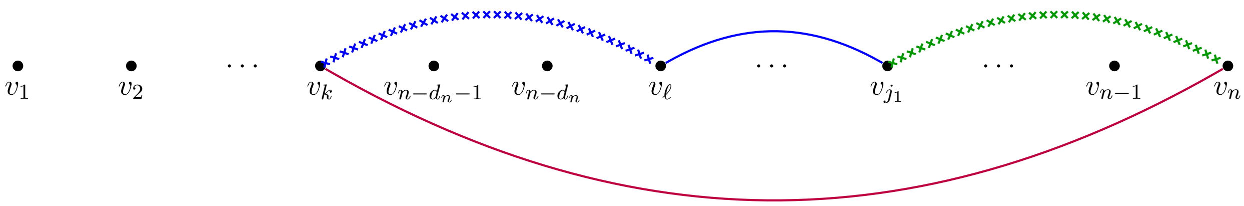
Cíl: Chceme dokázat, že mezi všemi grafy $\mathcal{G}$ existuje jeden, který má vlastnost, že poslední vrchol je spojen hranami s d_n předcházejícími vrcholy.

$\forall G \in \mathcal{G}$ mějme j_G, což bude největší index vrcholu, tak že $\{v_{j_G}, v_n\} \notin E$, tedy není mezi nimi hrana. To znamená, že pro ideální G chceme docílit $j_G = n - d_n - 1$.

Jako G_1 označíme ten $G_1 \in \mathcal{G}$, že j_{G_1} je nejmenší. (Může být j_{G_1} menší jak $n - d_n - 1$? Ne. v_n má stupeň d_n, a kdyby bylo j_{G_1} menší, tak by bylo vrcholů více, tzn. ne všechny by měly hranu s v_n.)

Označme $j_1 = j_{G_1}$.

Víme $j_1 \ge n - d_n - 1$. Teď nás ale zajímá, jestli $j_1 = n - d_n - 1$. Dokažme sporem.
Kdyby $j_1 > n - d_n - 1$, tak



$$d(v_n) = d_n$$

Protože mezi d_n předcházejícími vrcholy je nějaký, který není spojen hranou s v_n, v našem případě v_{j_1}, nutně to znamená, že v_n musí mít hranu s nějakým vrcholem, řekněme v_k, který má ještě nižší index.

$$d(v_k) \le d(v_{j_1})$$

v_k je v pořadí dříve, než v_{j_1}, tudíž musí mít nutně menší roven stupeň. To ale nutně znamená, že v_{j_1} musí být spojen s alespoň jedním vrcholem, označme si ho v_ℓ, se kterým není spojen v_k, protože v_k je spojen s v_n, zatímco v_{j_1} není.

Vytvořme

$$\begin{aligned} G_0 &= (V_0, E_0) \\ V_0 &= V_1 = V \\ E_0 &= (E_1 \setminus \{\{v_n, v_k\}, \{v_\ell, v_{j_1}\}\}) \cup \{\{v_k, v_\ell\}, \{v_n, v_{j_1}\}\} \end{aligned}$$

G_0 má skóre D a zároveň $j_{G_0} < j_1$. To ale znamená, že G_1 nebyl graf s nejmenším j_G, což je spor. A proto nejmenší j_G je $j_{G_0} = n - d_n - 1$.

Ověřili jsme, že takový graf určitě existuje, takže G' dostaneme z G_0 odstraněním v_n. G' pak má skóre D'. ■

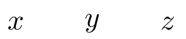
1.4 Příklad hledání grafu pro skóre

Mějme $D = (1, 1, 2, 3, 3)$; $n = 5, d_n = 3$; $n - d_n = 2$.

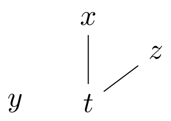
$D_1 = (1, 0, 1, 2) \overset{\text{uspo.}}{\to} (0, 1, 1, 2)$; $n_1 = 4, d_{n_1} = 2$; $n_1 - d_{n_1} = 2$.

$D_2 = (0, 0, 0) \ldots$ tento graf je určitě existuje, jedná se o diskrétní graf.

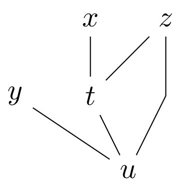
Kresleme postupně, začněme u D_2.



Pak přidejme vrchol a hrany tak, aby skóre odpovídalo D_1.



A nakonec tak, aby odpovídalo D.



1.5 Další pojmy založené na stupních vrcholů

Definice. Je dán neorientovaný prostý graf bez smyček. Pak definujme

- $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}$ je minimální stupeň grafu G.
- $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}$ je maximální stupeň grafu G.
- $d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$ je průměrný stupeň grafu G.
- $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2} d(G)$ je poměr počtu hran ku počtu vrcholů.

Označme $n = |V|$ a $m = |E|$. Pak $d(G) = \frac{2m}{n}$ a $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$.

Zřejme platí $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

1.6 Tvrzení o podgrafech

Tvrzení. Pro každý $G \in \mathcal{S}$ s $|E| \geq 1$ existuje podgraf H takový, že $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Důkaz. Máme dvě situace

1. Buď $\delta(G) > \varepsilon(G)$, pak $H = G$.
2. Nebo $\delta(G) \leq \varepsilon(G)$, tj. $v_1 \in V$, $d(v_1) = \delta(G) \leq \frac{m}{n}$.

Dokažme tedy ještě platnost pro 2.

Označme $G_1 \coloneqq G \setminus v_1$. A tedy $m_1 = m - \delta(G)$ a $n_1 = n - 1$.

Chceme $\underbrace{\frac{m_1}{n_1}}_{\varepsilon(G_1)} \geq \underbrace{\frac{m}{n}}_{\varepsilon(G)}$.

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m}{n} = \frac{m - \delta(G)}{n-1} - \frac{m}{n} = \frac{nm - n\delta(G) - nm + m}{(n-1)n} = \frac{m - n\delta(G)}{(n-1)n}, \delta(G) \leq \frac{m}{n}, m \geq n\delta(G) \tag{3}$$

A tedy

$$m - n\delta(G) \geq 0$$
$$n(n-1) \geq 0$$

Což dává

$$m \geq n\delta(G),\ \text{tj. } \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G)$$

Algoritmus dále pokračuje:

$$\text{Pokud } \begin{cases} \delta(G_1) > \varepsilon(G_1), & \text{tak } H \coloneqq G_1, \\ \delta(G_1) \leq \varepsilon(G_1), & \text{tak } v_2 \in V \setminus \{v_1\}, d_{G_1}(v_2) = \delta(G_1). \end{cases}$$

A tedy $G_2 \coloneqq G_1 \setminus v_2$, $\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1)$. A takto postupně dále. Algoritmus končí a nikdy nedostaneme prázdný graf, díky předpokladu, že G mělo alespoň jednu hranu, tedy $\varepsilon(G) > 0$. ∎

1.7 Souislý graf

Graf nazýváme souvislým, jestliže každé jeho dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

1.8 Pojmy založené na vzdálenosti

1.8.1 Vzdálenost

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $x, y \in V$. Vzdálenost x, y je $d_G(x, y)$, což značí počet hran v nejméně početné cestě z x do y, když existuje cesta. Jinak $d_G(x, y) = \infty$.

1.8.2 Průměr

Ať G je souvislý. Průměr G je $\operatorname{diam}(G) = \max\{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$.

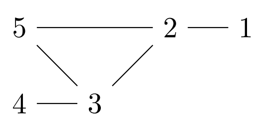
1.8.3 Excentricita

Ať G je souvislý. Excentricita vrcholu $v \in V$ je $\operatorname{ex}(V) = \max\{d_G(v, x) \mid x \in V\}$.

1.8.4 Centrum

Ať $v \in V$ je centrální $\to$ $\operatorname{ex}(v)$ je nejmenší mezi $\operatorname{ex}(x), x \in V$. Centrum (staře *střed*) grafu je $C(G) = \{v \mid v \text{ je centrální}\}$.

Uveďme si příklad.
Zde $C(G) = \{2, 3, 5\}$.



1.8.5 Poloměr

Poloměr G je $\operatorname{rad}(G) = \operatorname{ex}(v), v \in C(G)$.

Platí $\operatorname{rad}(G) \le \underbrace{\operatorname{diam}(G) \le 2\operatorname{rad}(G)}_{\star}$.

Zdůvodnění $\star$. Chceme $d_G(x, y) \le 2\operatorname{rad}(G) \forall x, y \in V$.

$$x \overset{P_1}{\text{——}} v \overset{P_2}{\text{——}} y$$

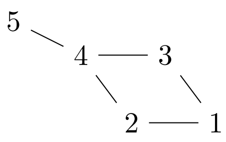
P_1, P_2 sled z x do y o $\le 2\operatorname{rad}(G)$.

P_1, P_2 obsahuje cestu P z x do y o $\le P_1, P_2 \le 2\operatorname{rad}(G)$.

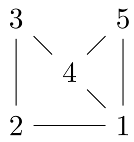
2 Souvislé grafy

2.1 k-souvislost

$G = (V, E) \in \mathcal{S}$. Řekněme, že G je k-souvislý, pokud $|V| > k$ a pro každou $X \subseteq V$, $|X| = k - 1$ je $G \setminus X$ souvislý.
Mějme



Je souvislý, ale ne 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

Každý graf je 0-souvislý, i nesouvislý graf je 0-souvislý.
1-souvislý je každý souvislý graf.

2.2 Souvislost v grafu

Souvislost v grafu G je největší k takové, že G je k-souvislý. Značíme $\kappa(G)$.
Úplný graf má $\kappa(G) = |V| - 1$.

2.3 Vrcholový řez

Vrcholový řez grafu $G \in \mathcal{S}$ je množina vrcholů $X \subsetneq V$, že $G \setminus X$ je nesouvislý.

2.4 Vztah neúplnosti a vrcholového řezu

Je-li $G \in S$, G není úplný, pak $\kappa(G) = k$ právě tehdy, když nemá vrcholový řez o $k - 1$ vrcholech a má vrcholový řez o k vrcholech.

2.5 Věta o vztahu podgrafu a souvislosti

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, splňující $d(G) \geq 4k$. Pak G obsahuje podgraf, který je k-souvislý.

Důkaz.

- Pro $k = 0$ triviální. Všechny grafy jsou 0-souvislé.
- Pro $k = 1$: Pokud $\frac{2m}{n} \geq 4k$, tedy $m \geq 1$ (takže má hranu), tak sama hrana je 1-souvislý podgraf.
- Pro $k \geq 2$: tj. $\frac{2m}{n} \geq 4k$

$$\begin{aligned} 2m &\geq 4kn \\ m &\geq 2kn \\ m &\geq 4n \,(\text{dosazeno } k \geq 2) \end{aligned}$$

Průběh důkazu $d(G) \geq 4k, k \geq 2 \xRightarrow{\text{Lemma 1}} \text{(i)}, \text{(ii)} \xRightarrow{\text{Lemma 2}} G$ má k-souislost.

2.5.1 Pomocné lemma 1

Pokud $k \geq 2$ a $d(G) \geq 4k$, pak

(i) $n \geq 2k - 1$
(ii) $m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$

Důkaz. (i) Kdyby ne, tak $n < 2k - 1$.

$$n + 1 < 2k$$
$$\frac{n+1}{2} < k$$

Teď použijme předpoklad $m \geq 2kn > (n+1)n$. A to nejde, protože úplný neorientovaný graf bez smyček má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

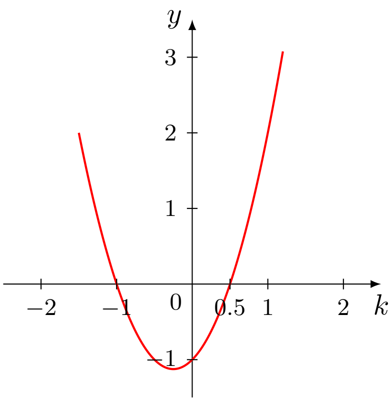
(ii) Mějme

$$\begin{aligned} m \geq 2kn - ((2k-3)(n-k+1)+1) &= 2kn - (2kn - 2k^2 + 2k - 3n + 3k - 3 + 1) \\ &= 2k^2 - 5k + 3n + 2 \end{aligned}$$

Teď aplikujme již dokázané (i):

$$2k^2 - 5k + 3n + 2 \geq 2k^2 - 5k + 6k - 3 + 2 = 2k^2 + k - 1$$

Vyšetřeme průběh funkce



Funkce je očividně konvexní, a protože nás zajímá průběh funkce na $k \geq 2$, můžeme prohlásit, že $2k^2 + k - 1 > 0$. ■

2.5.2 Pomocné lemma 2

Pokud G splňuje (i) a (ii), tak G má k-souvislý podgraf.

Důkaz. G není k-souvislý.
Indukcí podle $|V| = n$.

Základní krok: n $\overset{\text{(i)}}{=} 2k - 1$, $m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$.
Dosaďme $k = \frac{n+1}{2}$:

$$m \geq (n+1-3)\left(n - \frac{n+1}{2} + 1\right) + 1 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{4}$$

A tedy graf je úplný na n vrcholech. Teď potřebujeme $n > k$.

$$n = 2k - 1 = k + \underbrace{k-1}_{\geq 1} \geq k + 1 \tag{5}$$

Indukční krok: Každý graf G' splňující (i) a (ii) s méně než n vrcholy (s alespoň $2k-1$ vrcholy) má k-souvislý podgraf.

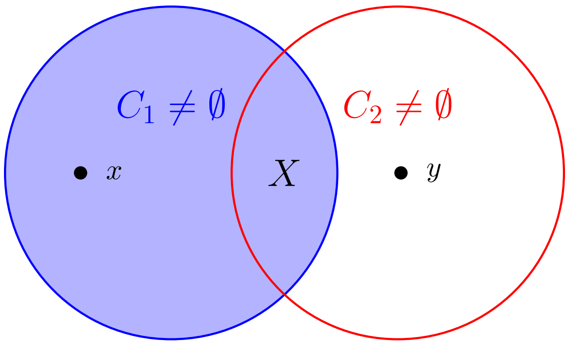
Vezmeme G splňující (i) a (ii) s n vrcholy.

(a) Kdyby $\delta(G) \leq 2k-3$, tak $v \in V$ s $d_G(v) \leq 2k-3$.
$G \setminus v = G_1$, $n_1 = n-1$,

$$m_1 \geq m - (2k-3) \geq (2k-3)(n-k+1) + 1 - (2k-3) = (2k-3)(\underbrace{n-1}_{n_1} - k + 1) + 1$$

Tudíž G_1 má k-souvislý podgraf, tedy i ho má G.

(b) Ať $\delta(G) > 2k-3m$, $\delta(G) \geq 2k-2$; $\forall v \in G, d_G(v) \geq 2k-2$.
G není k-souvislý, tj. $X \subseteq V$, $|X| = k-1$ a X je vrcholový řez.



$G \setminus X$ je nesouvislý. Všech je $(k-1)+(k-1)+1$. $d_G(x) \geq 2k-2$.

G_1 graf indukovaný C_1 v X má alespoň $2k-1$ vrcholů.

Kdyby G_1 i G_2 nesplňovaly (ii), G_i má n_i vrcholů a m_i hran, $i = 1, 2$.

$$m_i \ngeq (2k-3)(n_i - k + 1) + 1, \qquad \text{tj. } m_i \leq (2k-3)(n_i - k + 1) \tag{6}$$

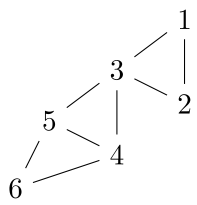
$m_1 + m_2 \geq m$ víme. $n_1 + n_2 = n + (k-1)$, počítali jsme vrcholy v X dvakrát.

$$\begin{aligned} m \leq n_1 + n_2 \leq (2k-3)(n_1 - k + 1) + (2k-3)(n_2 - k + 1) &= (2k-3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \\ &= (2k-3)(n + (k-1) - 2k + 2) \\ &= (2k-3)(n-k+1) \end{aligned}$$

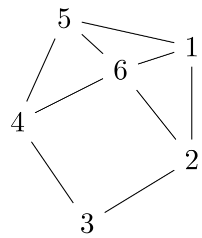
Tedy spor s (ii). ■

2.6 Artikulace

Vrchol v grafu G se nazývá artikulace, jestliže $G \setminus v$ má více komponent souvislosti, než G.
Platí. $G \in \mathcal{S}$ s alespoň 3 vrcholy je 2-souvislý $\iff$ je 1-souvislý a nemá artikulaci.



Není 2-souvislý.



Je 2-souvislý.

2.7 Operace nad 2-souvislými grafy

Mějme operace

(a) $G \in \mathcal{S}$ a $e \in \{u, v\}$; $u, v \in V(G)$, $e \notin E(G)$, pak $G + e$ je graf s $V(G)$ a $E(G) \cup \{e\}$.
Je-li G 2-souvislý, tak $G + e$ je 2-souvislý.

(b) $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, $e \in E$, pak $G\%e = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$.
„Do hrany e vložíme vrchol se stupněm 2."

2.8 Tvrzení o 2-souvislých grafech a kružnicích

Každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici.

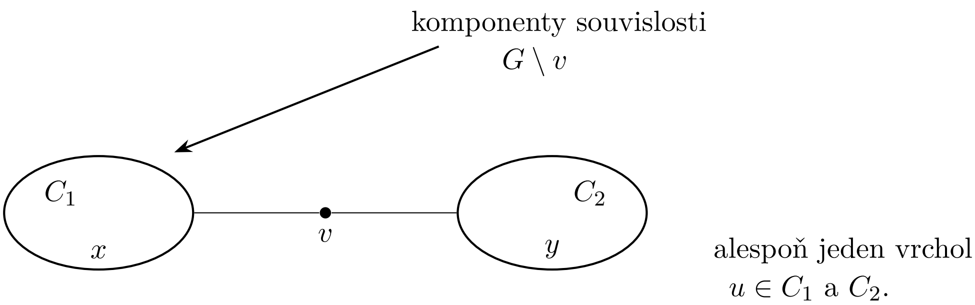
Důkaz. Každý 2-souvislý graf je souvislý. Kdyby souvislý neobsahoval kružnici, jedná se o strom. A každý strom s alespoň 3 vrcholy má artikulaci. Protože stromy nemohou být 2-souvislé, a zároveň všechny ostatní souvislé grafy obsahují kružnici, i každý 2-souvislý graf obsahuje kružnici. ■

2.9 Věta o vrcholech na společné kružnici

$G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je 2-souvislý právě tehdy, když každé 2 vrcholy $u \neq v$ leží na společné kružnici.

Důkaz.
„$\Leftarrow$": Předpokládejme, že pro každé $u \neq v$ existuje kružnice K, která je obsahuje.

To znamená, že graf je souvislý. Musíme ještě dokázat, že v něm neexistuje artikulace. Kdyby graf měl artikulaci v:

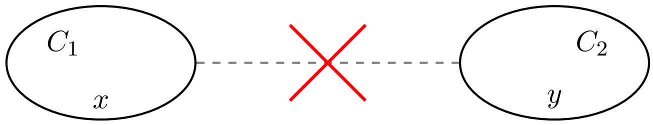


Znamenalo by to, že v jedné komponentě souvislosti by ležely alespoň 2 vrcholy (protože máme minimálně 3 vrcholy). Zároveň ale vrchol $x \in C_1$ a $y \in C_2$ rozhodně neleží na společné kružnici, tudíž graf nemůže mít artikulaci, takže G je 2-souvislý. ∎

„⇒“: Předpokládejme, že G je 2-souvislý. Dokažme indukcí podle vzdálenosti $d(u, v)$.

(a) Základní krok: u, v s $d(u, v) = 1$.
Budeme se snažit ukázat, že když zrušíme hranu, souvislost zůstane.

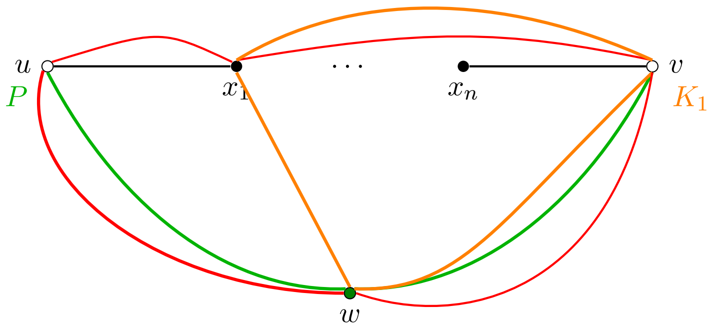
(1) $G \setminus e$ je souvislý. Kdyby ne, tak



Přitom G má alespoň 3 vrcholy, tedy v jedné komponentě leží alespoň 2 vrcholy. *BÚNO* exsistuje $x \in C_1$, $x \neq u$, tj. u je artikulace. Což je spor. Takže $G \setminus e$ je souvislý. Tedy existuje cesta P z u do v. Pak P je kružnice obsahující u, v.

(b) Indukční předpoklad: Pro každé x, y s $d(x, y) = n \geq 1$ existuje kružnice obsahující x, y.

(c) Indukční krok: Vezměme libovolné u, v s $d(u, v) = n + 1$. Vyberme nejkratší cestu:



Použijme I.P.: tj. existuje kružnice K_1 obsahující x_1, v. x_1 není artikulace, tj. existuje cesta P z u do v neobsahující x_1. w je prvním vrcholem cesty P, který leží na K_1. Použijeme cestu P, abychom se dostali z u do w, následně se přes K_1 dostaneme do v. Dále po kružnici do x_1, kde si musíme vybrat trasu, která nevede do w, tj. směrem do u. A tím uzavřeme kružnici obsahující u a v.

∎

2.10 Tvrzení o 2-souvislých grafech a % operaci

$G \in \mathcal{S}$ je 2-souvislý právě tehdy, když $G\%e$, $e \in E(G)$ je 2-souvislý.

Důkaz.
„⇒“: Předpokládejme, že G je 2-souvislý, tj. souvislý a nemá artikulaci.

Vrchol w, který vložíme do hrany e, není artikulace. A žádný jiný se nemohl stát artikulací, to by už musely být artikulací předtím, a tedy by se v prvé řadě nejednalo o 2-souvislý. ∎

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že $G\%e$ je 2-souvislý, tj. každé 2 vrcholy leží na společné kružnici.

$$x, y \in V(G) \ldots \text{existuje } K \text{ v } G\%e \text{ obsahující } x, y \begin{cases} K \text{ neobsahuje } e_1, e_2 & K \text{ je kružnice } G. \\ K \text{ obsahuje } e_1, e_2 & \text{z } K \text{ odstraníme } e_1, e_2, \\ & \text{nahradíme } e \text{ a máme } K'. \end{cases}$$

K' je kružnice v G. ■

2.11 Algoritmus sestrojení 2-souvislého grafu

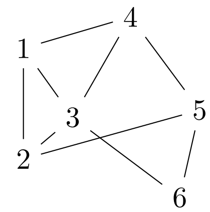
Každý 2-souvislý graf $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$ je možné sestrojit postupem:

$$G_0 \coloneqq K \text{ je nějaká kružnice}$$

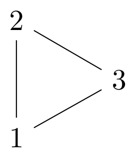
Máme-li G_i, že $G_i \neq G$, tak G_{i+1} je G_i, ke kterému přidáme cestu P (v G), která vede mezi 2 vrcholy z G_i a zároveň všechny vrcholy této cesty nejsou v G_i.

2.12 Příklad sestrojení 2-souvislého grafu

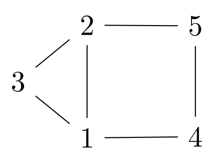
Mějme 2-souvislý graf, tj. bez artikulace:



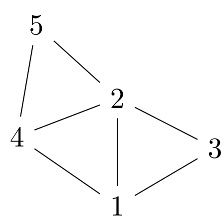
Začněme G_0:



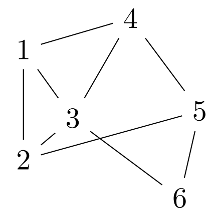
Přidáme cestu z 1 do 2, tedy G_1:



Teď přidáme cestu z 3 do 4, G_2:

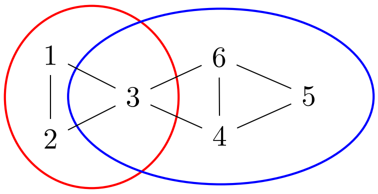


A posledně z 3 do 5, $G_3 = G$:



2.13 Komponenty 2-souvislosti - blok

Mějme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak $A \subseteq V(G)$ se nazývá **blok**, jestliže je maximální podmnožina taková, že jí indukovaný podgraf je 2-souvislý.
Pozn. maximální v tomto kontextu neznamená nejpočetnější, nýbrž, že do takové podmnožiny již nelze přidat další vrchol.



Když nejsou jednotlivé bloky vzájemně disjunktní, tak jejich průnik je artikulace.

3 Hranově souvislé grafy

3.1 Hranový řez

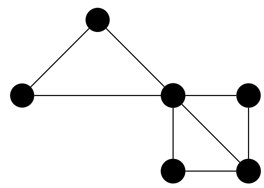
Množině $F \subseteq E$, že $G \setminus F$ je nesouvislá, se říká hranový řez.

3.2 Hranová souvislost

Máme $G \in \mathcal{S}$, $G = (V, E)$, pak G je k-hranově souvislý, jestliže neexistuje $F \subseteq E$, $|F| \leq k-1$, taková, že $G \setminus F$ je nesouvislý.

Hranová souvislost grafu G, značíme $\lambda(G)$, je největší k, že G je k-hranově souvislý.
Pozn. největší znamená, že nemá hranový řez s $\lambda(G) - 1$ hranami, ale má s $\lambda(G)$ hranami.

Mějme 2-hranově souvislý graf:



3.3 Most

Nazvěme most hranu $e \in E(G)$, že $\{e\}$ je hranový řez.

3.4 Souvislost krajních vrcholů a mostů

Každý most má alespoň jeden krajní vrchol, který je artikulace.

3.5 Základní vlastnosti hranově souvislých grafů

G je 0-hranově souvislý pro každé G.
G je 1-hranově souvislý $\iff$ G je souvislý.
G je 2-hranově souvislý $\iff$ G je souvislý a nemá most.

3.6 Tvrzení o hranové a vrcholové souvislosti

Platí, že $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

4 Extremální teorie

4.1 Věta o souvislosti vrcholů a hran (Mantel)

Máme $G \in \mathcal{S}$ s n vrcholy, m hranami, který nemá K_3. Pak $m \leq \frac{n^2}{4}$.

Důkaz.
Definice. Množina A je nezávislá $A \subseteq V(G)$ pokud pro každou $e = \{u, v\}$, jestliže $u \in A$, platí $v \notin e$.
Množina A je nezávislá právě tehdy, když v ní žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou.

Ať A je nejpočetnější nezávislá množina a $B = V \setminus A$. G nemá K_3: každá množina sousedů vrcholů $v \in V$ je nezávislá množina.

$$m \leq \sum_{N \in B} d(v) \leq \underbrace{(n-k)}_{|B|} \cdot \underbrace{k}_{|A|} \tag{7}$$

Každá hrana má alespoň 1 krajní vrchol v B. Pro které k je $(n-k)k$ největší?

$$\begin{aligned} f(x) &= (n-x)x \\ f'(x) &= n - 2x \implies f'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{2} \\ f''(x) &= -2 \end{aligned}$$

Protože jsme v $\mathbb{N}$, tak $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \leq \frac{n^2}{4}$. ■

4.2 Věta o souvislosti hran a úplném grafu

Máme $G \in \mathcal{S}$, který neobsahuje K_{r+1} (úplný graf na $r+1$ vrcholech), $r \geq 2$. Pak

$$m \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}. \tag{8}$$

Důkaz. Vezměme graf G bez K_{r+1} s nejméně hranami (přidáním hrany by vznikl K_{r+1}). Tedy G má K_r. Ať A je množina vrcholů K_r a B je $V(G) \setminus A$, $|B| = n - r$. Každý vrchol $v \in B$ má max $r - 1$ sousedů v A (jinak by $A \cup \{u\}$ tvořil K_{r+1}).

m rozdělíme na hrany v A (hrany úplného grafu), hrany mezi A a B a hrany v B.

$$m = m_A + m_{A-B} + m_B \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + m_B \tag{9}$$

a graf indukovaný B neobsahuje K_{r+1} a má maximální počet hran.

$$\begin{aligned} m_B &< m \\ n - r = |B| &< n \end{aligned}$$

Použijme tedy silnou indukci, dle počtu vrcholů $n = |V(G)|$.

- Základní krok. $n = 1, 2, \ldots, r$.

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} &\overset{?}{\leq} \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} \\ \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{n}{2}\left(n\frac{r-1}{r} - (n-1)\right) \\ &= \frac{n}{2}\frac{nr-n-nr+r}{r} = \frac{n}{2}\frac{\overbrace{r-n}^{\geq 0}}{\underbrace{r}_{\geq 0}} \geq 0. \end{aligned}$$

- Když budeme mít indukční předpoklad pro G_B, pak:

$$m \leq \frac{r(r-1)}{2} + (n-r)(r-1) + \frac{r-1}{n}\frac{(n-r)^2}{2} \tag{10}$$
$$= \frac{r-1}{r}\left(\frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{(n-r)^2}{2}\right) \tag{11}$$
$$= \frac{r-1}{r}\left(\frac{r^2+2rn+n^2-2nr+r^2}{2}\right) = \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2}. \tag{12}$$

■

4.3 Turánovy grafy

Pro n, $r < n$. $T(n,r)$ je r-partitní úplný graf. Označíme-li strany $S_1, \ldots, S_r$, pak $|S_i - S_j| \leq 1$, $|S_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. Takový graf má potom

$$\frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{n}{r}\right)^2 = \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2},\ n = k \cdot r,$$

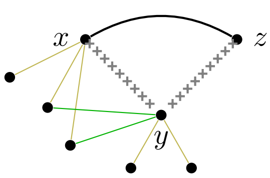
hran.

4.4 Tvrzení počtu hran a Turánově grafu

Každý $G = (v, E) \in \mathcal{S}$ bez K_{r+1} s největším počtem hran je $T(n,r)$.

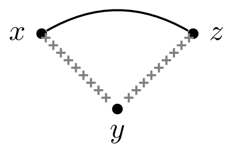
Důkaz. Na V definujme $\mathcal{R}$: $u\mathcal{R}v \iff \{u,v\} \notin E$.
$\mathcal{R}$ je reflexivní, protože nemáme smyčky. $\mathcal{R}$ je symetrické, protože se jedná o neorientovaný graf. Teď je potřeba ověřit tranzitivitu, tj. $(\{x,y\} \notin E, \{y,z\} \notin E) \implies \{x,z\} \notin E$.
Dokažme sporem. Kdyby $\{x,y\} \notin E$ a $\{y,z\} \notin E$ a $\{x,z\} \in E$.

1) $d(y) \geq d(x)$ (obdobně $d(y) \geq d(z)$). Sporem. Kdyby $d(y) < d(x)$.



Neighbourhood $N(v) = \{u \mid \{u,v\} \in E\}$.
Z G odstraníme hrany $\{y,t\}, t \in N(y)$ a přidáme $\{y,u\}, u \in N(x)$. Tím dostaneme G', to má více hran jak G.
G' nemá K_{r+1}, protože ani původní graf nebyl K_{r+1}. Což je spor. ■

2) $G'' = G \setminus \{x, y, z\}$. $m(G) \leq m(G') + d(x) + d(y) + d(z) - 1$ (-1 za hranu $\{x, z\}$).



G''' z G odstraníme hrany $\{x, t\}\,, t \in N(x)$ a $\{z, v\}\,, v \in N(z)$ a přidáme hrany $\{x, u\}\,, u \in N(y)$ a $\{z, u\}\,, u \in N(y)$.

$$m(G''') = m(G'') + 3d(y) > m(G'') + d(x) + d(y) + d(z) - 1 \geq m(G)$$

G'' nemá K_{r+1}, což je spor. ■

$\mathcal{R}$ je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence $\mathcal{R}$ jsou maximální množiny, že graf jimi indukovaný nemá hranu. G má nejvíce hran, tj. G má K_r, stran má r, je tedy úplný r-partitní graf.

Potřebujeme $||S_i| - |S_j|| \leq 1$. Dokažme sporem. Kdyby ne, tak $|S_1| \geq |S_2| + 2$. Označme $|S_1| = n_1$ a $|S_2| = n_2$.

Graf měl původně $n_1 \cdot n_2$ hran. Nově má

$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 n_2 \underbrace{\underbrace{-n_2 + n_1}_{\geq 2} -1}_{\geq 1}.$$

A to je Turánův graf. ■

5 Orientované grafy

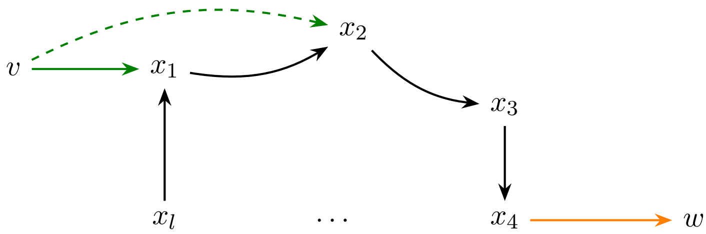
5.1 Minimálně silně souvislý graf

Silně souvislý graf se nazývá minimálně silně souvislý, jestliže $G \setminus \{e\}$ není silně souvislý pro každou hranu $e \in E(G)$.

5.2 Věta o minimálně silně souvislém grafu a jeho vrcholech

Každý minimálně silně souvislý graf G s alespoň 2 vrcholy má 2 vrcholy stupně 2.
Důkaz. Indukcí podle rozdílu $k = m - n$, kde m je počet hran a n počet vrcholů.

- Základní krok. $k = 0$, tj. $m = n$. Takže se jedná o cyklus. Všechny vrcholy cyklu mají stupeň 2.
- Indukční krok. Každý graf G (minimálně silně souvislý s $m(G) - n(G) < k$) má 2 vrcholy stupně 2.
  Uvažujme G minimálně silně souvislý s $m - n = k > 0$. V G si vybereme cyklus C s největším počtem hran (tedy vrcholů). C má l vrcholů:



  $\forall v \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(v, x_i), x_i \in C$.
  $\forall w \notin C$ existuje maximálně 1 hrana $(x_j, w), x_j \in C$.
  Vytvořme G', což bude G, ve kterém nahradíme cyklus C vrcholem v_C.

$$m(G') - n(G') = m - l - (n - l + 1) = m - n - 1 = k - 1$$

■

  G' má alespoň 2 vrcholy stupně 2, není-li ani jeden z nich v_C, jsou to vrcholy G stupně 2. Když $G\prime$ bude mít pouze 2 vrcholy, v_C a x, stupně 2, tak musíme řešit 2 případy:

  1) Když má cyklus alespoň 3 vrcholy ($l \geq 3$), pak v C existuje vrchol stupně 2.
  2) Když C má jen 2 vrcholy, když se zkombinují orientované hrany do neorientovaných, tak se jedná o strom. A každý strom s alespoň 2 vrcholy má 2 listy, tj. vrcholy stupně 1. A to jsou přesně ty 2 vrcholy stupně 2, které hledáme.

■

5.3 Algoritmus pro nalezení topologického očíslování

Algoritmus pro nalezení topologického očíslování v acyklickém grafu.
Pozn.: Každý acyklický graf má alespoň 1 vrchol se stupněm 0.

1) Spočítáme vstupní stupně vrcholů. Do množiny M vložíme všechny v s $d^-(v) = 0$, $i = 1$.
2) Vybereme $v_i \in M$ a odstraníme. Pro každé $(v_i, w) \in E$: $d^-(w) := d^-(w) - 1$, if $d^-(w) = 0$, pak $M := M \cup \{w\}$. $i++$.
3) Algoritmus končí pokud $M = \emptyset$ a zároveň existuje alespoň jeden vrchol u s $d^-(u) > 0$, pak topologické očíslování neexistuje, nebo jsou všechny vrcholy topologicky očíslované.