



Informe de Parcial Modelos de Sincronización

Nicolas Bautista, Kevin García, Sara Romero

Introducción

La sincronización se define como el acto y el resultado de sincronizar, es decir, que dos fenómenos o acciones resulten coincidentes en el tiempo o se organicen según un determinado orden, este fenómeno puede ser observado en la naturaleza, desde el parpadeo colectivo de las luciérnagas, hasta el ritmo sincronizado de las células cardíacas que mantienen el latido del corazón. Estudiar este fenómeno permite comprender como el orden colectivo surge del caos, y como un conjunto de elementos autónomos pueden alcanzar comportamientos coordinados mediante interacciones.

Contexto

El caso de estudio adoptado para esta simulación es el de la sincronización de las luciérnagas, ya que cuando una gran cantidad de luciérnagas se encuentran en el mismo espacio, sus destellos comienzan desfasados, pero al cabo de unos segundos logran coordinarse hasta producir pulsos luminosos simultáneos, este fenómeno se puede modelar como un conjunto de osciladores periódicos a través de una señal global, lo que motiva el uso de los modelos de Winfree y Kuramoto.

En este proyecto, cada luciérnaga es modelada como un oscilador de fase que evoluciona según su frecuencia natural ω_i y que interactúa con el resto mediante una fuerza de acoplamiento K , en cuanto el valor de K es mayor, la tendencia de sincronizarse, sin embargo la fuerza de acoplamiento (K) no es el único factor del cual depende la sincronización, sino que también depende de la diversidad de frecuencias (σ_ω), del número de osciladores (N) y de las condiciones iniciales, por medio de una simulación se estudiara como distintas combinaciones de las condiciones iniciales afectan la velocidad, estabilidad y grado final de sincronía.

Modelos de sincronización

Modelo Winfree

El modelo de Winfree, creado en 1967, fue uno de los primeros intentos de explicar cómo un grupo de osciladores biológicos (como luciérnagas, neuronas o células cardíacas) consigue sincronizarse por sí mismo, Arthur Winfree planteó que cada oscilador posee su propia frecuencia natural y una fase que varía con el tiempo, es decir que no se comunican

de manera individual, todos están conectados a través de una señal colectiva, un “campo medio” generado por el conjunto, debido a este planteamiento, se entendió que la sincronización no requiere conexiones directas entre cada elemento, sino que basta con que todos interactúen mediante esa variable común, el modelo considera como la respuesta del oscilador depende de su fase interna, es decir tiene una curva de respuesta de fase (PRC) que describe cómo reacciona su fase ante los estímulos del conjunto, en el contexto de la simulación con luciérnagas este modelo permite representar como cada luciérnaga emite destellos periódicos, y como la luz de sus vecinas modifica su propio ritmo de pulsos, hasta que todo el conjunto de luciérnagas este en sincronización.

La ecuación general del modelo de Winfree es la siguiente:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \epsilon Q(\theta_i) P(t)$$

- θ_i representa la **fase** del oscilador i .
- ω_i es su **frecuencia natural**.
- ϵ es el **coeficiente de acoplamiento** (intensidad de la interacción).
- $Q(\theta_i)$ es la **función de sensibilidad de fase**, que mide cómo responde el oscilador a estímulos externos.
- $P(t)$ es el **campo medio** o estímulo global, calculado como la media ponderada de la respuesta de todos los osciladores, generalmente $P(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S(\theta_j)$, con $S(\theta_j)$ como función de emisión de cada oscilador.

Modelo Kuramoto

Yoshiki Kuramoto en 1975 simplificó el modelo de Winfree para que sea matemáticamente más sencillo, Kuramoto estableció que la interacción entre osciladores se describe mediante una función sinusoidal (Función matemática que se puede describir mediante las funciones seno y coseno), lo que permite obtener soluciones analíticas para el grado de sincronización.

La ecuación diferencial es:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Este modelo es especialmente importante porque predice una transición de fase, existe un valor crítico de K_c a partir del cual el sistema pasa de un estado desordenado (las fases están distribuidas uniformemente) a un estado sincronizado (las fases se agrupan alrededor de un valor promedio).

El parámetro que mide el grado de sincronización global es el parámetro de orden R , definido como:

$$Re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j},$$

donde $R(0 \leq R \leq 1)$ mide la coherencia del sistema, y ψ es la fase promedio.

- Si $R \approx 0$, las fases están desordenadas.
- Si $R \approx 1$, las fases están alineadas y el sistema está sincronizado.

Metodología de comparación

La comparación de los modelos Winfree y Kuramoto es con el fin de evaluar la rapidez y el grado de sincronización, describir diferencias en la dinámica de fase, identificar rangos de parámetros donde cada modelo presenta transiciones y presentar visualizaciones que ayuden a interpretar los resultados.

Las métricas que se usaron para realizar el análisis y la comparación de estos modelos fueron:

1. **Parámetro de orden temporal $R(t)$:** curva temporal, máxima, promedio y último valor (final). (Implementado en `order_parameter` y guardado en `history_R`).
2. **Tiempo de sincronización:** tiempo necesario para que $R(t)$ supere un umbral (ej.: 0.5, 0.8, 0.9) de forma persistente.
3. **Estabilidad de la sincronización:** desviación estándar de $R(t)$ al final de la simulación (ej. últimos 50 pasos) como medida de oscilaciones remanentes.
4. **Distribución final de fases:** histograma y concentración angular, visualizada con histograma y diagrama circular.
5. **Tiempo de cómputo total:** para comparar coste computacional entre modelos (guardado en `results['total_time']`).

Umbral de interés: $R \geq 0.9$ (muy sincronizado), $R \in [0.5, 0.9)$ (parcial), $R < 0.5$ (desincronizado).

Se definirán unos parámetros para la simulación:

N: Número de Osciladores (El tamaño de la población)

- N bajo: Comportamiento más rápido, pero más ruidoso
- N medio: Balance entre velocidad y estabilidad
- N alto: Comportamiento más suave, pero simulación más lenta

K: Fuerza de Acoplamiento (Qué tan sensibles son las luciérnagas al destello de las demás)

- $K < 0.8$: Acoplamiento débil \rightarrow poca o ninguna sincronización
- $0.8 < K < 1.5$: Región crítica \rightarrow sincronización parcial
- $K > 1.5$: Acoplamiento fuerte \rightarrow sincronización completa
- $K > 3.0$: Acoplamiento muy fuerte \rightarrow sincronización muy rápida

omega_mean: Frecuencia Natural Media (La frecuencia natural promedio de destello), no afecta la sincronización, pero sí la escala temporal

- Valores típicos: 0.5 - 2.0
- Período natural = $2\pi/\omega \approx 6.28$ unidades de tiempo

omega_std: Diversidad de Frecuencias (la heterogeneidad de la población)

- 0.05-0.1: Población homogénea (sincronización fácil)
- 0.2-0.3: Diversidad media (sincronización posible)
- 0.4-0.5: Población muy heterogénea (sincronización difícil)

dt: Paso Temporal

- $dt = 0.05$ # Resolución temporal de la simulación

Steps: Número de Pasos (Tiempo total de simulación)

- 200-300: Para ver inicio de sincronización
- 500-800: Para ver estado estable
- 1000+: Para sistemas muy lentos o estudios detallados

Configuraciones de las simulaciones:

1. Configuración: Sincronización Rápida

- $N = 700$
- $K = 2.5$
- $dt = 0.05$
- $steps = 300$
- $\omega_{mean} = 1.0$
- $\omega_{std} = 0.1$

2. Configuración: Transición Crítica

$N = 700$

$K = 1.0$

$dt = 0.05$

$steps = 500$

$\omega_{mean} = 1.0$

$\omega_{std} = 0.2$

3. Configuración: Alta Diversidad

- $N = 700$

- $K = 2.0$

- $dt = 0.05$

- $steps = 600$

- $\omega_{mean} = 1.0$

- $\omega_{std} = 0.4$

4. Configuración: Sistema Pequeño

- $N = 200$

- $K = 1.5$

- $dt = 0.05$

- $steps = 200$

- $\omega_{mean} = 1.0$

- $\omega_{std} = 0.2$

5. Configuración: Sistema Grande

- $N = 1500$

- $K = 0.5$

- $dt = 0.05$

- $steps = 400$

- $\omega_{mean} = 1.0$

- $\omega_{std} = 0.2$

Desarrollo (Simulaciones)

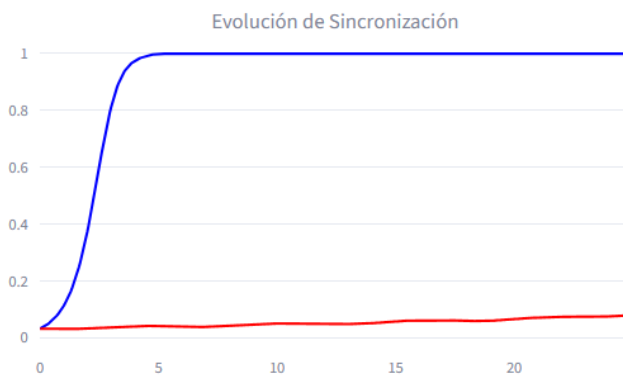
1. Simulación Sincronización Rápida:

Se escogió esta configuración porque representa un escenario donde los elementos están muy acoplados y la diversidad es baja, condiciones que suelen favorecer una sincronización rápida y estable, se realizaron las simulaciones para ambos modelos, Kuramoto y Winfree, usando exactamente las mismas condiciones iniciales, con el

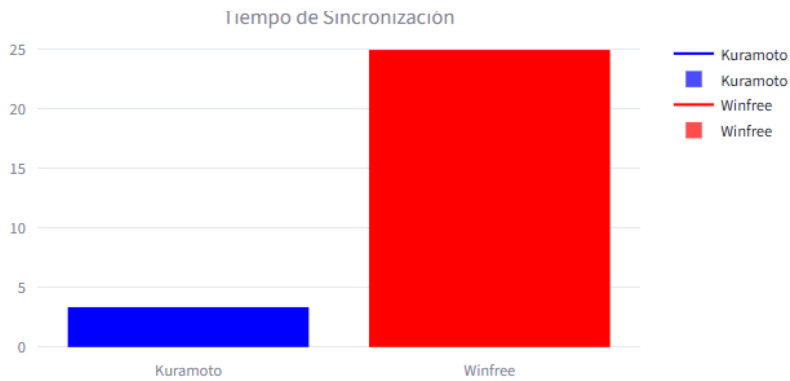
fin de observar diferencias en la rapidez de sincronización, el grado de coherencia final (R) y la distribución de las fases al finalizar el proceso.



Análisis Comparativo de Modelos

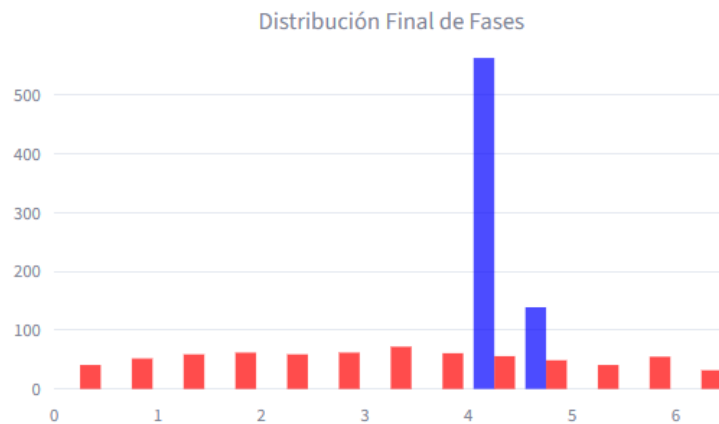


- La curva azul (Kuramoto) asciende rápidamente de $R \approx 0.0$ a $R \approx 1.0$ antes de $t = 5$ s.
El modelo de Kuramoto presenta un crecimiento exponencial típico de una transición de fase sincronizada: una vez superado el umbral crítico de acoplamiento, las fases individuales se alinean espontáneamente.
- La curva roja (Winfree) permanece casi plana cerca de 0.05.
En cambio, el modelo de Winfree refleja un comportamiento incoherente, donde los osciladores no logran acoplar sus ritmos. La falta de incremento sostenido de R indica que la interacción no produce agrupamiento de fases significativo.



- Barra azul (Kuramoto): sincroniza en ~ 3 s.
- Barra roja (Winfree): permanece sin sincronizar hasta el final (24.95 s).

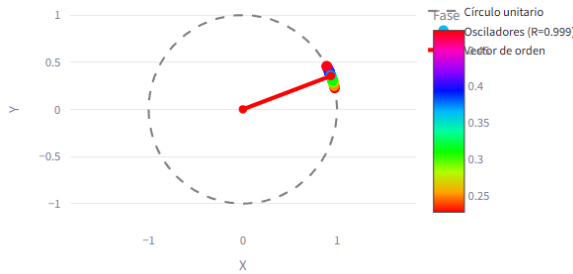
El tiempo de sincronización confirma la superioridad dinámica de Kuramoto bajo acoplamiento fuerte, este resultado implica que, en sistemas biológicos análogos (como luciérnagas o neuronas), un acoplamiento global suficientemente fuerte permite una coordinación casi instantánea, mientras que interacciones con respuestas dependientes de fase (tipo Winfree) requieren ajustes más lentos o condiciones específicas.



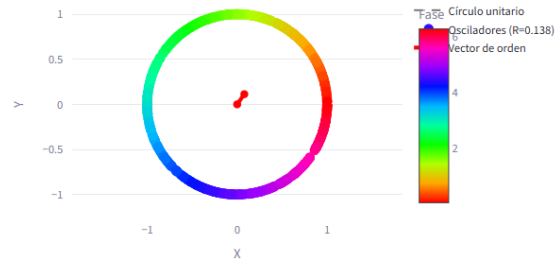
- En Kuramoto, las barras se concentran en un rango muy estrecho, alcanza un estado en el cual todas las luciérnagas emiten destellos casi simultáneamente.
- En Winfree, la distribución es prácticamente uniforme en todo el intervalo, conserva una distribución dispersa, que puede representar luciérnagas descoordinadas o con ritmos locales no acoplados al grupo.

Distribución de fases finales

Kuramoto - Estado Final ($R=0.999$)



Winfree - Estado Final ($R=0.138$)



- Kuramoto: todos los puntos (osciladores) se agrupan en un mismo sector del círculo, el vector de orden (flecha roja) tiene módulo casi unitario y apunta a la dirección promedio de sincronía.
- Winfree: los puntos cubren todo el círculo, sin agrupamiento visible, el vector de orden es corto ($R = 0.078$) y orientado de forma aleatoria.

El diagrama circular es evidencia directa de la sincronización colectiva:

Kuramoto → sincronía global perfecta.

Winfree → desincronización total.

2. Simulación Transición Crítica:



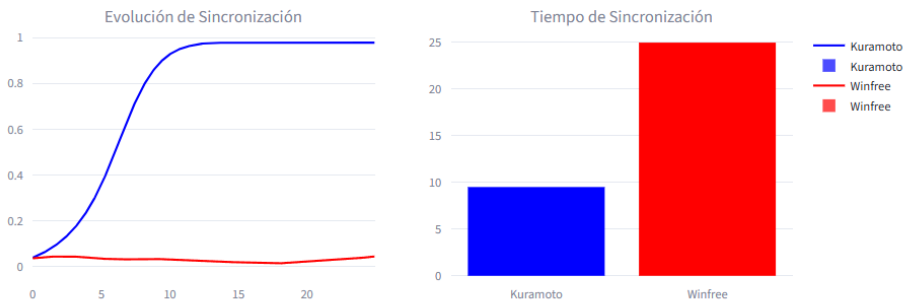
Se escogió esta configuración porque sitúa al sistema cerca del umbral entre desorden y sincronía: un acoplamiento moderado ($K = 1.0$) combinado con una diversidad no nula en las frecuencias naturales ($\sigma_\omega = 0.2$) y un tamaño grande del conjunto de osciladores ($N = 700$).

Estas condiciones reproducen una “zona crítica” (no tan fuerte como para imponer sincronía inmediata y completa, pero tampoco tan débil como para garantizar desorden permanente) y permiten observar diferencias cualitativas entre dinámicas gobernadas por acoplamiento medio (Kuramoto) y por respuestas dependientes de fase (Winfree). Las simulaciones se hicieron con el mismo set de condiciones iniciales y parámetros ($dt = 0.05$,

pasos = 500 \rightarrow tiempo total = 25 s) para comparar rapidez de acoplamiento, coherencia final R y la distribución de fases.

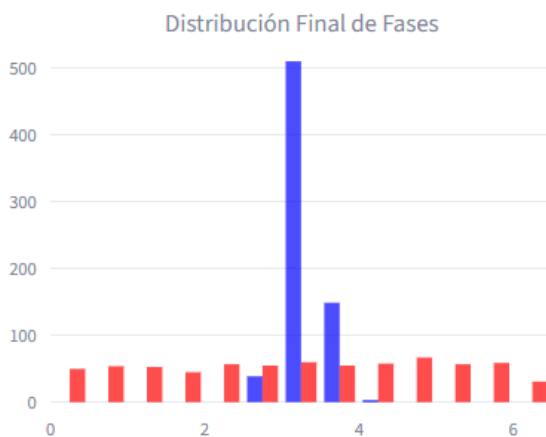
Evolución del Parámetro de Orden R

Análisis Comparativo de Modelos



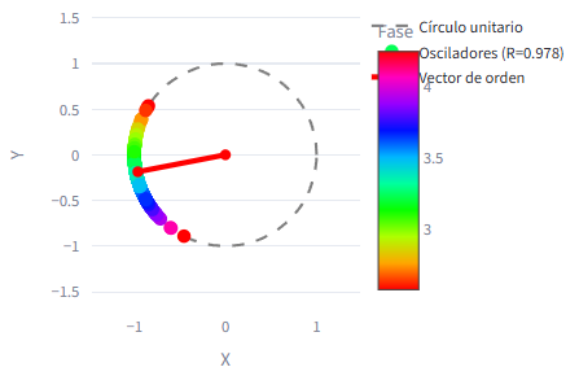
La curva del parámetro de orden R para Kuramoto (trazo azul) muestra una subida sostenida desde valores muy bajos hasta un valor cercano a $R \approx 0.978$, alcanzando el régimen de alta coherencia alrededor de $t \approx 9.5$ s. Este crecimiento no es instantáneo: refleja el cruce de un umbral efectivo donde la interacción colectiva supera la dispersión por heterogeneidad.

En contraste, la curva de Winfree (trazo rojo) permanece esencialmente plana y muy baja, con R final ≈ 0.043 incluso al final de la simulación (25 s). Aunque el tiempo de “convergencia” anotado para Winfree es mayor (≈ 24.95 s), ese tiempo no conduce a coherencia: el sistema permanece prácticamente desincronizado. Esto indica que, bajo la misma K y diversidad, la interacción tipo Winfree (dependiente de la forma de respuesta al estímulo) no logra agrupar fases de forma global.

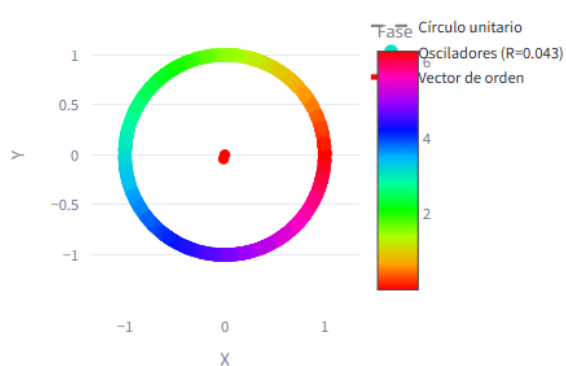


En el histograma de distribución final de fases, n Kuramoto la distribución final de fases está fuertemente concentrada en un pico estrecho (una gran mayoría de osciladores agrupados alrededor de un mismo ángulo (la barra alta azul en torno a ≈ 3.2 rad) y una noticia menor de osciladores en vecinos), lo que explica el valor $R \approx 0.978$. En Winfree, las barras rojas aparecen distribuidas casi uniformemente a lo largo del intervalo $[0, 2\pi]$, señal clara de dispersión persistente y ausencia de agrupamientos significativos.

Kuramoto - Estado Final ($R=0.978$)



Winfree - Estado Final ($R=0.043$)



En el modelo de Kuramoto, los puntos que representan a los osciladores se agrupan en una zona muy concentrada del círculo unitario. Esto indica que la mayoría de las fases están alineadas, es decir, los osciladores laten prácticamente al unísono. El vector de orden (R) es largo y apunta en la dirección promedio del grupo, reflejando una sincronización casi completa ($R \approx 0.978$).

En el modelo de Winfree, las fases se distribuyen de manera casi uniforme alrededor del círculo. No hay un grupo dominante ni dirección preferente. Por eso, el vector de orden es muy corto y se mantiene cerca del centro, lo que representa una sincronía débil o nula ($R \approx 0.043$).

3. simulación Alta Diversidad

⚙️ Parámetros de Simulación

Número de osciladores	Pasos simulación
700	600
Fuerza acoplamiento (K)	Frecuencia media (ω)
2.00	1.00
Paso temporal (dt)	Diversidad (σ_ω)
0.05	0.40

🐝 Simulación de Sincronización: Winfree vs Kuramoto

🎯 Sincronización Final

● Kuramoto ?

0.977

● Winfree ?

0.058

🕒 Velocidad

🕒 Kuramoto ?

5.00s

🕒 Winfree ?

29.95s

🏆 Comparación

Mejor: Kuramoto (R=0.977)

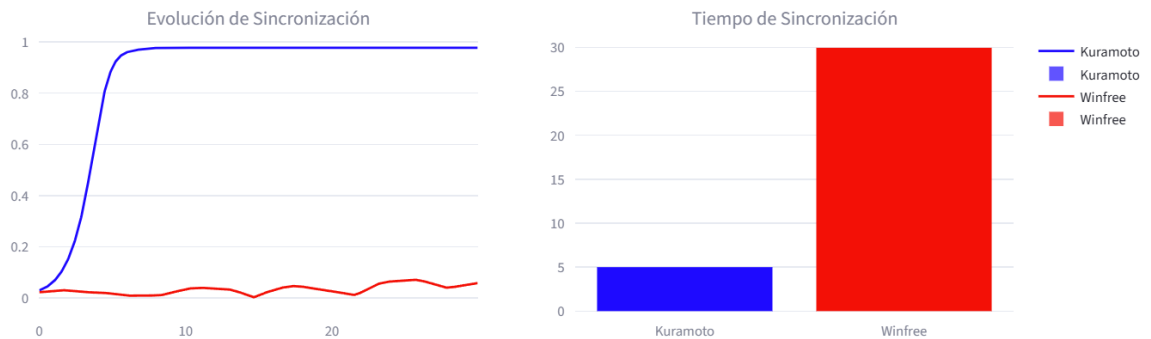
Peor: Winfree (R=0.058)

✅ Comportamiento esperado:
Kuramoto sincroniza mejor

Esta configuración representa un escenario donde las frecuencias naturales de los osciladores son muy diferentes entre sí, lo que genera una fuerte dispersión inicial. Aunque el acoplamiento (K) se mantiene igual que en simulaciones anteriores, la diversidad elevada (σ_ω alta) introduce una competencia entre la tendencia a sincronizar y la tendencia al desorden. Este tipo de configuración permite estudiar cómo responden Kuramoto y Winfree cuando las diferencias individuales dominan la dinámica colectiva.

Evolución del Parámetro de Orden R

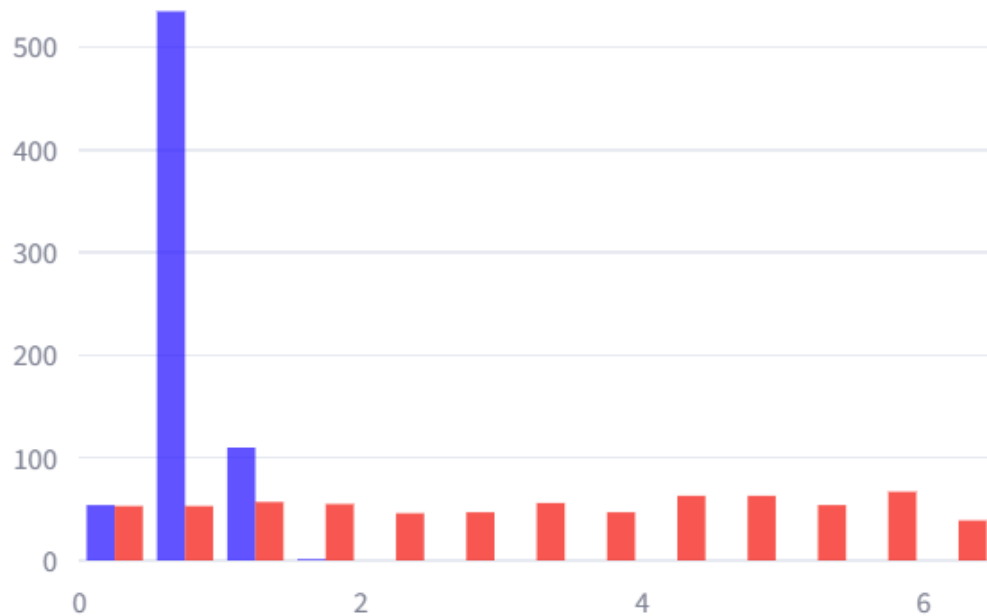
Análisis Comparativo de Modelos



En la gráfica de evolución de $R(t)$, el modelo de Kuramoto (curva azul) muestra un ascenso inicial pronunciado, alcanzando rápidamente un valor cercano a $R \approx 0.98$. Esto indica que, incluso con alta diversidad, el acoplamiento medio logra imponer coherencia global, aunque con un esfuerzo mayor. La forma sigmoideal de la curva evidencia la típica transición de sincronización después de superar el umbral crítico.

Por el contrario, la curva del modelo de Winfree (roja) permanece casi plana, sin superar valores de $R \approx 0.05$. Esto significa que la diversidad de frecuencias domina completamente su dinámica, impidiendo que los osciladores se agrupen en fase. Además, el tiempo característico de sincronización es mucho mayor (≈ 25 s frente a ≈ 9 s de Kuramoto), lo que refleja una pérdida de eficiencia y falta de coherencia colectiva.

Distribución Final de Fases

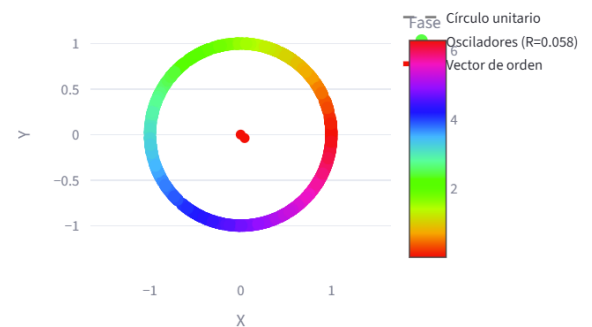
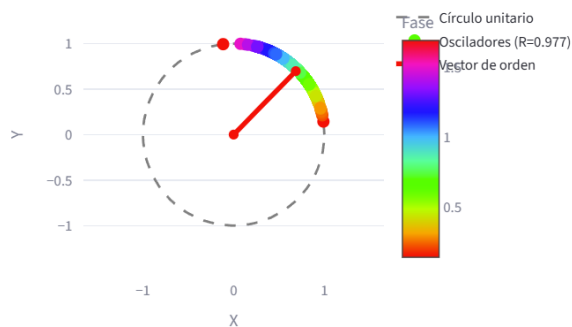


El histograma refuerza estas observaciones. En Kuramoto, la mayoría de los osciladores se concentran en un rango muy estrecho de fases, representado por un pico alto y definido en el gráfico. Esto demuestra que el sistema logra un estado coherente, donde la mayoría de los elementos oscilan en sincronía.

En cambio, en Winfree la distribución es casi uniforme. No hay un grupo predominante ni concentración visible; las fases se dispersan a lo largo de todo el intervalo $[0, 2\pi]$. Este patrón es típico de un régimen incoherente, donde cada oscilador mantiene su propio ritmo sin establecer coordinación global.

Kuramoto - Estado Final ($R=0.977$)

Winfree - Estado Final ($R=0.058$)



En el diagrama de Kuramoto, los puntos se agrupan en un sector estrecho del círculo unitario, lo que indica que casi todas las fases están alineadas. El vector de orden es largo y apunta en una dirección clara, reflejando una sincronización fuerte y estable.

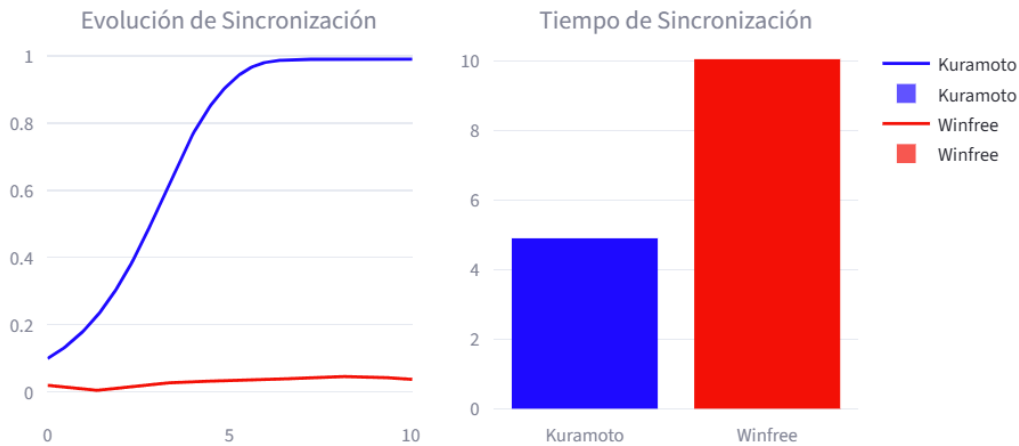
En el caso de Winfree, los puntos están repartidos alrededor de todo el círculo, sin una dirección dominante. El vector de orden aparece muy corto y cercano al centro, lo que significa una sincronía prácticamente nula. Este comportamiento muestra que el modelo no puede superar la dispersión impuesta por la alta diversidad de frecuencias.

4. simulación Sistema Pequeño



Con un tamaño reducido (200 osciladores) y un acoplamiento relativamente fuerte ($K = 1.5$), el sistema favorece la formación de sincronía si el acoplamiento supera la heterogeneidad, esta configuración prueba la robustez del acoplamiento local frente a la dispersión de frecuencias en un conjunto pequeño.

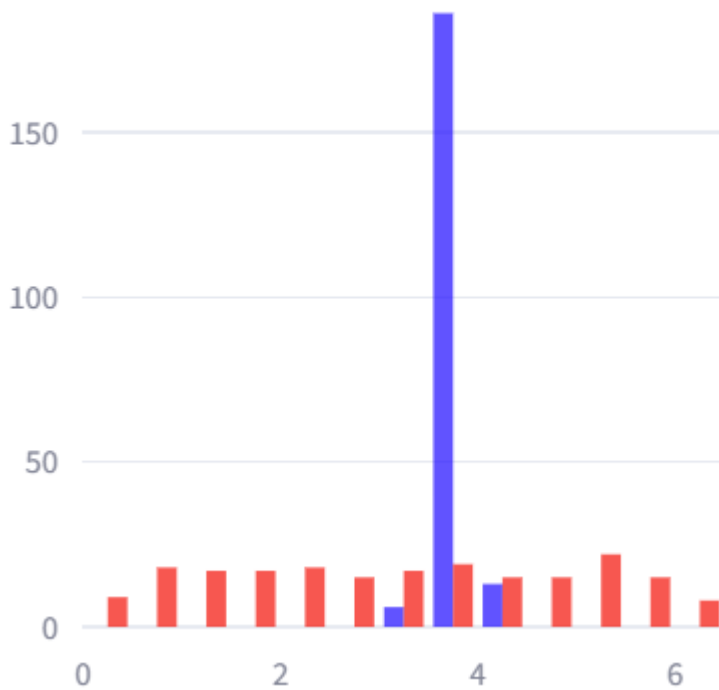
Análisis Comparativo de Modelos



Kuramoto: la curva azul sube de forma rápida y alcanza $R \approx 0.990$ antes de la mitad del tiempo total (≈ 4.9 s), lo que muestra una sincronización veloz y eficiente en un sistema pequeño.

Winfree: la curva roja se mantiene baja y casi plana, con R final ≈ 0.037 y tiempo de acercamiento mayor (≈ 10 s) sin lograr coherencia. Aquí Winfree no logra explotar el mayor K para producir orden.

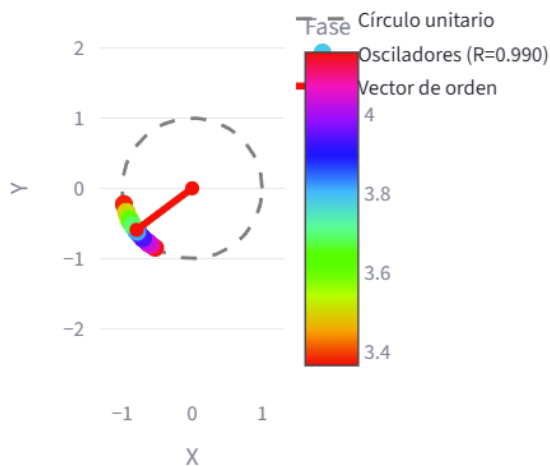
Distribución Final de Fases



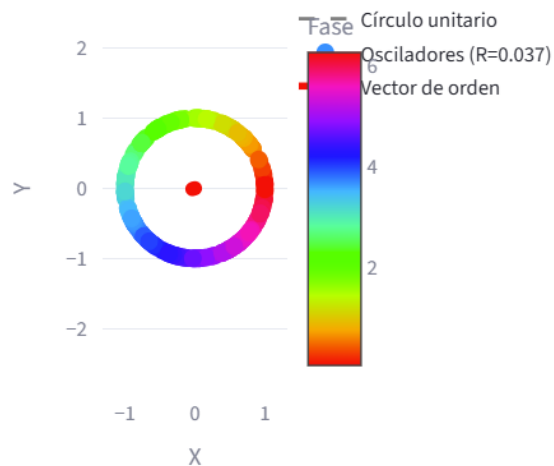
Kuramoto: presenta un pico muy pronunciado en un único bin, evidenciando que la mayoría de los osciladores convergieron a la misma fase (alta concentración).

Winfree: mantiene una distribución cercana a uniforme con pequeñas variaciones, confirmando dispersión y ausencia de agrupamiento significativo.

Kuramoto - Estado Final ($R=0.990$)



Winfree - Estado Final ($R=0.037$)



Kuramoto: los puntos están compactos en un sector estrecho del círculo; el vector de orden es largo y claro, indicando dirección promedio y alta coherencia.

Winfree: los puntos rodean el círculo de forma homogénea; el vector de orden es casi nulo y queda cerca del origen, señal de desincronización.

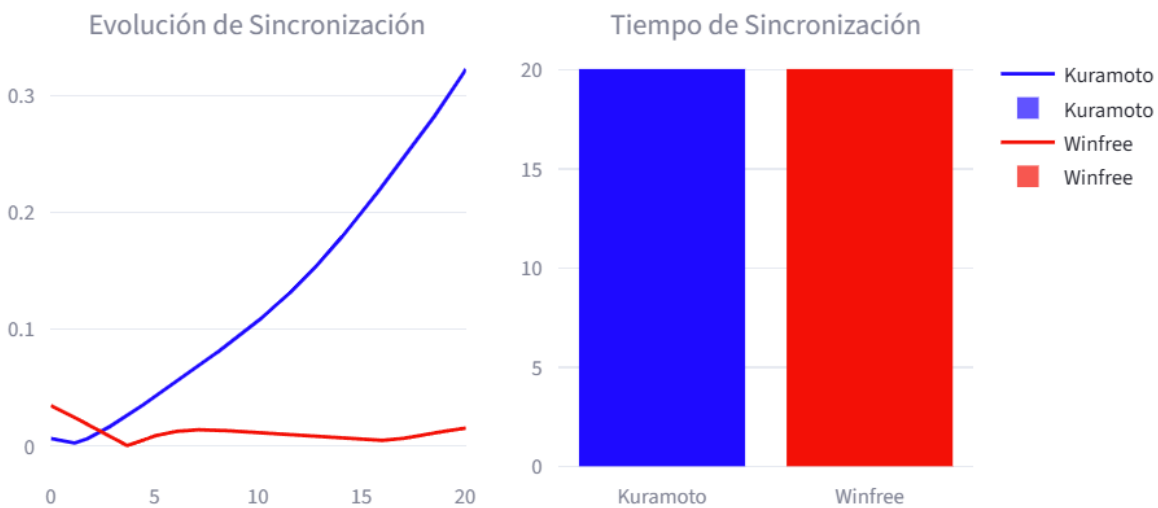
5. simulación Sistema Grande





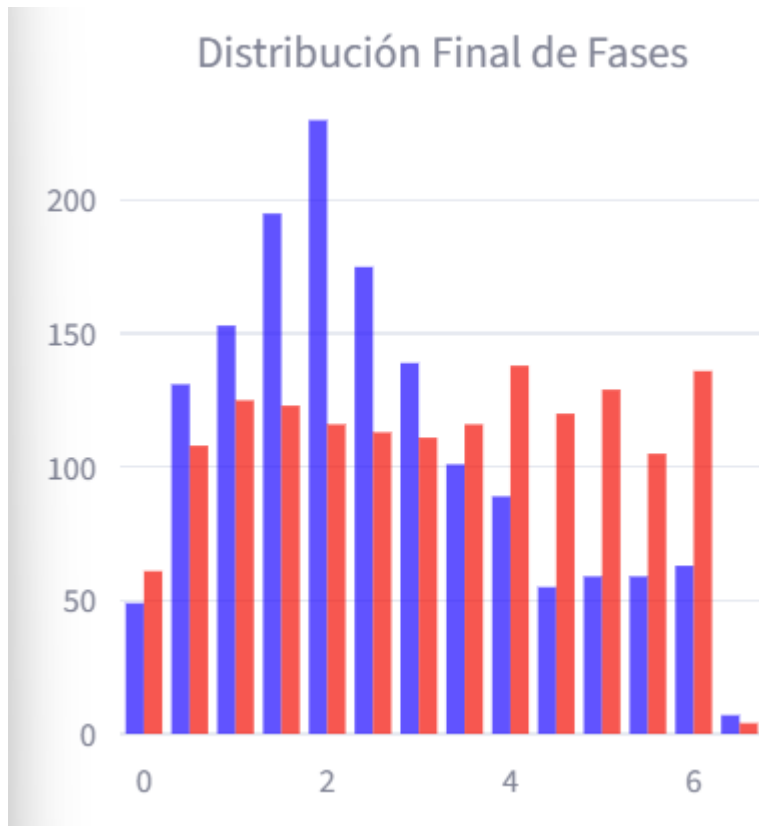
Con muchos osciladores ($N = 1500$) y acoplamiento moderado-bajo ($K = 0.5$), el sistema está lejos de empujar a todo el conjunto hacia coherencia rápida. La alta cardinalidad aumenta la dificultad de coordinarse: la heterogeneidad colectiva tiende a frenarla.

Análisis Comparativo de Modelos



Kuramoto: la curva azul muestra un crecimiento lento y sostenido que alcanza un valor intermedio ($R \approx 0.323$) al final del tiempo. No hay transición rápida, sino una acumulación gradual de correlación parcial entre grupos.

Winfree: la curva roja permanece prácticamente plana y cerca de cero ($R \approx 0.015$), indicando prácticamente ausencia de orden colectivo incluso a largo plazo.

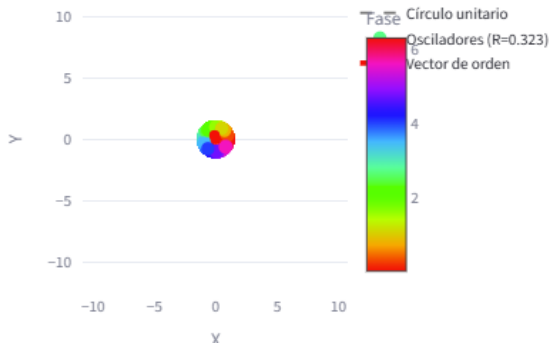


Kuramoto: las barras azules muestran una distribución con cierto sesgo y varios picos locales; hay agrupamientos parciales pero no un pico único dominante. Esto explica el R intermedio: coexistencia de clústeres parcialmente sincronizados.

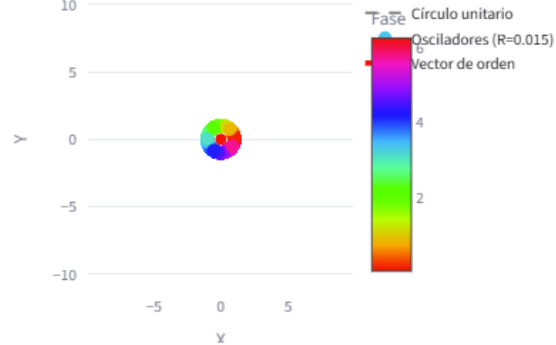
Winfree: las barras rojas tienden a una distribución más homogénea y amplia, lo que confirma dispersión extensiva y falta de agrupamiento significativo.

Distribución de Fases Finales

Kuramoto - Estado Final ($R=0.323$)



Winfree - Estado Final ($R=0.015$)



Kuramoto: los puntos aparecen alrededor del círculo con una ligera concentración; el vector de orden es corto pero visible, señalando coherencia parcial y presencia de micro-grupos alineados.

Winfree: los puntos están casi uniformemente repartidos y el vector de orden es prácticamente nulo, visualizando la desincronización total del conjunto.

Conclusiones

- **Kuramoto demuestra mayor capacidad de sincronización global.**
En todas las configuraciones simuladas, el modelo de Kuramoto alcanzó mayores valores del parámetro de orden RRR , reflejando coherencia colectiva incluso bajo condiciones críticas o de alta diversidad. Su acoplamiento sinusoidal promedio permite superar la heterogeneidad y formar agrupamientos estables de fases, evidenciando su eficacia para describir sincronizaciones rápidas y robustas.
- **Winfree presenta sincronización débil o nula bajo las mismas condiciones.**
Aunque representa interacciones más biológicas —dependientes de la fase interna y la respuesta al estímulo—, su estructura de acoplamiento limita la aparición de sincronía global. En casi todos los escenarios (salvo los de acoplamiento muy alto o baja diversidad), el sistema Winfree permaneció disperso, con RRR cercano a cero, lo que indica osciladores sin coordinación colectiva.
- **El tamaño del sistema afecta la velocidad y estabilidad de la sincronización.**
Los sistemas pequeños ($N=200$) sincronizan más rápido pero con mayor ruido en la dinámica; los grandes ($N=1500$) muestran una sincronización parcial o lenta debido a la inercia colectiva y la dispersión estadística. Kuramoto conserva una estructura de clústeres sincronizados incluso con gran número de osciladores, mientras que Winfree pierde coherencia completamente.

- **Las visualizaciones confirman la naturaleza colectiva del proceso.**

Los histogramas y diagramas circulares evidencian cómo Kuramoto concentra las fases en sectores estrechos del círculo unitario, formando vectores de orden largos y definidos. En contraste, Winfree presenta distribuciones uniformes y vectores casi nulos. Esto demuestra gráficamente la diferencia entre un modelo con acoplamiento cooperativo y otro con interacciones dependientes de fase.