~~58.2 а,б~~ ~~4~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~9~~

~~11~~ ~~14~~ ~~30~~ ~~41~~ ~~47б~~

~~51~~ ~~52~~ ~~66~~ 67 ~~72а~~

~~75~~ ~~49~~ ~~50~~ 65 ~~77~~

No: 58.2

а) $x-2y=0 \qquad (1\ {-2}\ |\ 0) \qquad X=\overset{e_1}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}y$

$3x-y=0 \qquad (3\ {-1}\ |\ 0) \qquad X=\overset{e_2}{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}y$

$V=L_1\oplus L_2 \qquad \forall x\in V \qquad x=\underset{\in L_1}{\alpha_1e_1}+\underset{\in L_2}{\alpha_2e_2}$

$Ax=\alpha_1e_1-\alpha_2e_2$

$Ae_1=e_1 \qquad \lambda_1=1 \qquad W_{\lambda_1}=\mathcal{L}(e_1)$

$Ae_2=-e_2 \qquad \lambda_2=-1 \qquad W_{\lambda_2}=\mathcal{L}(e_2)$

б) $x-3y=0 \qquad V=\Pi\oplus L$

$\begin{cases}x+z=0\\x+y-2z=0\end{cases} \qquad \forall x\in V:\ x=(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)+\beta e_3$

$Px=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$

$e_1=(3,1,0) \qquad Pe_1=e_1 \qquad \lambda_1=1 \qquad W_{\lambda_1}=\mathcal{L}(e_1,e_2)$

$e_2=(0,0,1) \qquad Pe_2=e_2 \qquad \lambda_2=0 \qquad W_{\lambda_2}=\mathcal{L}(e_3)$

$e_3=(-1,3,1) \qquad Pe_3=0$

No: 58.4

$\mathbb{R}^n\simeq M_{n-1}$

В M_{n-1} возьмем D

$\operatorname{Im}D=M_{n-2} \qquad \ker D=f:\ \deg f=0$

No: 58.6

A - оператор простой структуры по усл. $\Rightarrow \forall\lambda_i \quad \dim W_{\lambda_i}=1$

$\exists e_i$ - с.в. $A \qquad Ae_i=\lambda e_i$

$ABe_i=BAe_i=\lambda_iBe_i \Rightarrow Be_i\in W_{\lambda_i} \Rightarrow Be_i=\gamma e_i \Rightarrow e_i$ - с.в. $B \Rightarrow B$ - о.п.с $\boxtimes$

No: 58.9

$|A|=|A^T|$

$(A-\lambda I)^T=(A^T-\lambda I)$

$|A^T-\lambda I|=|A-\lambda I| \Rightarrow A$ и A^T имеют одинаковые с.в.

No: 58.11

а) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix} \qquad A+B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$

Нет в а,б

б) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$

No: 58.14

$\begin{bmatrix}0&i\\i&2\end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix}0-\lambda&i\\i&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=1 \qquad \left(\begin{matrix}-1&i\\i&1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right) \qquad X=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}x_2 \Rightarrow$ не диаг.

No: 58.30

$\begin{bmatrix}5&-1\\4&1\end{bmatrix}$ а) $\begin{vmatrix}5-\lambda&-1\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2$

$\lambda=3 \qquad \left(\begin{matrix}2&-1\\4&-2\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right) \qquad X=x_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ не диаг.

б) из а) $\Rightarrow$ тоже не диаг.

№: 58.41

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad |A - tE| = (-1)^{n+1} + (-t)^n$$

$$\begin{bmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -t \end{bmatrix}$$

n-чет: $t^n = 1$
n-нечет: $t^n = 1$ $\Rightarrow t = \sqrt[n]{1} \Rightarrow n$ различ. с.зн

$\mathrm{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ $\quad \varepsilon$ - корень n-ой степени из 1

№: 58.47

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & & & \\ \alpha_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -\lambda & & & \\ & -\lambda & & 0 \\ 0 & & 1-\lambda & \\ & & & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(1-\lambda)$ - нечет $\Rightarrow \dim W_{\lambda_0} = n - m < n - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ не диаг.

$(-\lambda)^n$ - чет $\Rightarrow \dim W_{\lambda_0} = n - m < n \Rightarrow$
$\Rightarrow$ не диаг.

№: 58.51

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda = \lambda^2(\lambda^2 - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = \sqrt{2}$
$\lambda_3 = -\sqrt{2}$

geo.mul $\quad$ alg. mul.

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $\quad e_1 (0,0,0,1) \quad \dim W_0 = 1 < 2 \Rightarrow$ не диаг.

№: 58.52

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\quad e_1 (1,0,0,0)$
$\qquad e_2 (0,-2,1,0)$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $\quad e_3 (1,1,0,0)$
$\qquad e_4 (-1,0,-2,1)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(1,1,2,2)$$

№: 58.73

$A^{100} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = S^{-1} D S$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda_1 = 2 \qquad e_1 = (1, 1)$
$\lambda_2 = 3 \qquad e_2 = (2/3, 1)$

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} & -2 \cdot 3^{100} \\ -2^{100} & 3^{100} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} & -2 \cdot 3^{100} \\ -2^{100} & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$$

№: 58.75

$S_\infty = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = (I - A)^{-1} \qquad B - BA = I \qquad B(I - A) = I \qquad BA = B - I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
$= C$

$BA = C \Rightarrow A = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \chi_A = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \Rightarrow A = S^{-1} D S \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{100} = S^{-1} D^{100} S = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 3(3^{100} - 2^{100}) \\ -2(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$$

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

No: 58.49

A подобна диагональной $\Rightarrow$ A - простой структуры $\Rightarrow \exists$ базис из собств. векторов A. Ясно, что в этом базисе матрица A будет иметь вид $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Изначально матрица A задана в базисе f. Столбцы матрицы перехода T_{ef} - координаты векторов нового базиса, разлож. по старому базису, но это как раз и означает, что столбцы T - с.в. A

No: 58.50

$$\chi_A = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-\sqrt{6})(\lambda+\sqrt{6}) \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = \sqrt{6} \quad \lambda_4 = -\sqrt{6}$$

$W_{\lambda_1}: (A - \lambda_1 I | 0) \Rightarrow e_1 = (1,0,0,2)$

$W_{\lambda_2}: e_2 = (-1,0,0,2)$

$W_{\lambda_3}: e_3 = (0, \sqrt{6}, 3, 0)$

$W_{\lambda_4}: e_4 = (0, -\sqrt{6}, 3, 0)$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & -2 & & \\ & & \sqrt{6} & \\ 0 & & & -\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad S = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

No: 58.77

$$\chi_A = -\lambda(\underbrace{\lambda^2 - 3\lambda - (a-1)}_{f(\lambda)}) \qquad D_f = 9 + 4(a-1) \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{5}{4}$$

$\mathbb{R}: a > -\frac{5}{4}$ $\qquad \mathbb{C}: a \neq -\frac{5}{4}$ $\qquad \mathbb{Q}: \lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5+4(a-1)}}{2} \in \mathbb{Q}$

$$\sqrt{5+4(a-1)} = \frac{m}{n} = x \in \mathbb{Q}$$

$$a = \frac{x^2-5}{4}$$

No: 58.66

$\Rightarrow$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = |T^{-1} B T - \lambda I| = |T^{-1}(B - \lambda I) T| = |B - \lambda I| = \chi_B(\lambda)$$

$\Leftarrow$

$$A = T^{-1} \Lambda_1 T \qquad B = F^{-1} \Lambda_2 F \qquad |A - \lambda I| = |B - \lambda I| \Rightarrow |\Lambda_1 - \lambda I| = |\Lambda_2 - \lambda I|$$

Λ_1 и Λ_2 совпадают с точностью до перестановок диаг. эл-ов $\Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2$ т.к. Λ_1 ЭП приводится к Λ_2 $\Rightarrow$ В силу транзитив. подобия имеем $A \sim \Lambda_1 \sim \Lambda_2 \sim B \Rightarrow A \sim B$ ∎

No: 58.7

Мн-во матриц коммутирующих с A образуют подпр-во H. $\dim H = n$

$I, A, \ldots A^{n-1} \in H$

П-м, что $I, A, \ldots, A^{n-1}$ ЛНЗ. $\exists$ v_i - с.в. A

Рассмотрим $f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = 0$. Тогда $f(A) v_i = (c_0 + c_1 \lambda_i + \ldots + c_n \lambda_i^n) v_i = 0$

$$v_i \neq 0 \Rightarrow c_0 + c_1 \lambda_i + \ldots + c_n \lambda_i^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 \lambda_1 + \ldots + c_n \lambda_1^n \\ \ldots \\ c_0 + c_1 \lambda_n + \ldots + c_n \lambda_n^n \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$|M|$ - опр. Вандермонда. Т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $|M| \neq 0 \Rightarrow \exists$ только тривиальное реш.

$\Rightarrow c_0 = \ldots = c_n = 0 \Rightarrow I, A, \ldots, A^{n-1}$ - ЛНЗ

Т.к. B коммутирует с $A \Rightarrow B \in H \Rightarrow \exists\, d_0, \ldots, d_{n-1} : B = d_0 + d_1 A + \ldots + d_{n-1} A^{n-1}$ ∎