

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas en general

- Una **curva plana** es una aplicación continua $\alpha : I \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.
- La **velocidad** es la derivada $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$
- La **rapidez** es la norma de la velocidad $v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$

- α es **regular** $\iff v_\alpha(t) > 0, \forall t \in I$
- La derivada (o velocidad) normalizada es $T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}$.

- La **longitud** es $l_\alpha = \int_I v_\alpha(t) dt$.
- Una **parametrización** es un difeomorfismo $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$

- El **signo de una parametrización** es

$$\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi'(t) > 0, \forall t \in J \\ -1 & \text{si } \varphi'(t) < 0, \forall t \in J \end{cases}$$

- Una curva está **parametrizada por longitud de arco** o p.p.a $\iff \|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.
- Si para dos curvas α, β existe φ difeomorfismo tal que $\alpha = \beta \circ \varphi$ decimos que $\alpha \sim \beta$
 - \sim es una relación de equivalencia
 - Dos curvas en una misma clase de equivalencia comparten la traza o imagen.
 - Se cumple

$$\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ \|\alpha'(t)\| =$$

- Una curva es **birregular** \iff para una parametrización α se tiene que α' y α'' son linealmente independientes.
 - En particular, $\alpha', \alpha'' \neq 0$ y por tanto α también es regular.

1.2. Curvas planas

- El **diedro de Frenet-Serret** formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = J\mathbf{t}_\alpha(t) \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La **curvatura** (con signo)

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \mathbf{t}'_\alpha(t), \mathbf{n}_\alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad \text{si } \alpha \text{ regular}$$

$$k_\alpha(t) = \|\alpha''(t)\| \quad \text{si } \alpha \text{ está p.p.a.}$$

- El **vector curvatura** es $\mathbf{k}_\alpha(t) = k_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t)$
- El **radio de curvatura**

$$\rho_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(t)}$$

- El **centro de curvatura**

$$C_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\mathbf{n}_\alpha(t)$$

- El **círculo osculador** o **circunferencia osculatriz**

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - C_\alpha(t)\| = \frac{1}{k_\alpha(t)}, \text{ para } t \in I \text{ fijado} \}$$

- Las **ecuaciones de Frenet-Serret** salen de tomar la submatriz 2×2 de las ecuaciones en el espacio.

1.3. Curvas en el espacio

- El triedro de Frenet-Serret formado por los vectores

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\mathbf{n}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(s)}{\|\mathbf{t}'_\alpha(s)\|}$$

$$\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- Los 3 planos del triedro de Frenet-Serret para un punto $\alpha(s)$ de la curva [afines] son:
 - El **plano osculador** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s) \rangle = 0$
 - El **plano normal** $\text{span}\{\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos P cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = 0$
 - El **plano rectificante** $\text{span}\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\} + \alpha(s)$ cuyos puntos cumplen $\langle P - \alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = 0$

- La **curvatura** (siempre ≥ 0)

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\mathbf{t}'_\alpha(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \quad \text{si } \alpha \text{ regular}$$

$$k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| \quad \text{si } \alpha \text{ p.p.a.}$$

- El **vector curvatura**

$$\mathbf{k}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ colineal con } \mathbf{n}_\alpha(s)$$

- La **torsión**

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{\langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\tau_\alpha(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \quad \text{si } \alpha \text{ regular}$$

- Las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\mathbf{t}'_\alpha = v_\alpha k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

$$\mathbf{n}'_\alpha = -v_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha + v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha$$

$$\mathbf{b}'_\alpha = -v_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'_\alpha \\ \mathbf{n}'_\alpha \\ \mathbf{b}'_\alpha \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k_\alpha & 0 \\ -k_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{pmatrix}$$

2. Superficies

- Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos es una aplicación biyectiva continua y con inversa continua.
 - Un **difeomorfismo** es un **homeomorfismo** diferenciable con inversa diferenciable.
 - Dos conjuntos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.

- Una **superficie regular** S es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 y una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. \mathbf{x} es diferenciable como aplicación $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$
2. \mathbf{x} es un homeomorfismo
3. $\forall (u, v) \in U, (d\mathbf{x})_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva \iff los vectores coordenados son linealmente independientes $\forall (u, v) \in U$.

- Puede ocurrir (esfera, cono...) que no valga con una única parametrización $\forall p \in S$. Si nos vale con una única parametrización entonces S es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 .

- Los **vectores coordenados** en un punto $\mathbf{x}(u, v) \in S$ son

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_1 \mathbf{x}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = (d\mathbf{x})_{(u,v)} \cdot e_2$$

- Los **campos coordenados** asociados a la parametrización \mathbf{x} son dos campos $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ diferenciables en el abierto $V \subset S$.

- El **plano tangente** a S en $p \in S$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 con dimensión 2 dado por:

$$T_p S = \{ \alpha'(0) \mid \exists \varepsilon > 0, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \\ \wedge \alpha(0) = p \\ \wedge \alpha \text{ diferenciable} \}$$

- Si q es la preimagen de p por \mathbf{x} (es decir, $\mathbf{x}(q) = p$) entonces $T_p S = (d\mathbf{x})_q(\mathbb{R}^2)$
- El **plano tangente (afín)** a S en $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$

$$T_p S = p + \underbrace{\text{span}\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}}_{\text{plano tangente vectorial}}$$

- La **recta normal** a S en $p \in S$ es el complemento ortogonal del plano tangente $T_p S^\perp$.

- Para cada $p \in S$ existen dos vectores normales unitarios (opuestos) en la recta normal.

- Una **función definida en la superficie regular** S es $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- f es **diferenciable** si para toda parametrización \mathbf{x} de S , la función $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable. Se cumplen las propiedades habituales sobre diferenciable: suma producto y cociente (siempre que tenga sentido) de funciones diferenciables es diferenciable.
- Si f es una función definida entre dos superficies ($f : S_1 \rightarrow S_2$) entonces f es **diferenciable** $\iff \forall p \in S_1$ hay una parametrización $\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow S_1$ con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y una parametrización $\mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow S_2$ con $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$ tales que $\tilde{f} := \mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1$ es diferenciable. \tilde{f} es la expresión en coordenadas de f .

- La **diferencial de una función definida en una superficie regular** es

$$(df)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad (df)_p(x) := (f \circ \alpha)'(0)$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow S$ es una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p \wedge \alpha'(0) = x$. $(df)_p$ está bien definida y es independiente de la elección de α .

- Más comodamente, si \mathbf{x} es una parametrización de S tal que para ciertos u_0, v_0 se tiene que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$, entonces la matrix asociada a la diferencial en la base $\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ es

$$(df)_p = \begin{pmatrix} (f \circ \mathbf{x})_u(u_0, v_0) \\ (f \circ \mathbf{x})_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

- f constante $\implies (df)_p = 0, \forall p \in S$. Recíprocamente, $(df)_p = 0 \forall p \in S \wedge S$ conexa $\implies f$ constante.
- f tiene un extremo relativo en $p \implies (df)_p = 0$.

- La **primera forma fundamental** de S en p es

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(x, y) := \langle x, y \rangle$$

- Es bilineal, simétrica y definida positiva (es el producto escalar restringido a cada plano tangente de S en p).

- Dada una parametrización \mathbf{x} de S tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p \in S$ la matriz de I_p respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ es

$$(I_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_v, x_u \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix}$$

donde cada derivada parcial de \mathbf{x} está evaluada en (u_0, v_0) .

- Al escribir

$$I_p(x, y) = \langle x, y \rangle = (x_1, x_2)(I_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

estamos obteniendo el producto escalar de dos vectores en $T_p S$ en función de sus coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) respecto de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

- La **forma diferencial de la primera forma fundamental** es

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Fdv^2$$

donde E, F y G son funciones diferenciables que evaluamos para cada $p \in S$.

- Del criterio de Sylvester para que I_p siempre sea definida positiva se tiene que $E, G > 0$ y que $EG - F^2 > 0$.

- La **longitud de un segmento** de una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow S, \alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es

$$L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fv'(t)u'(t) + Gv'(t)^2} dt$$

- El **área de una región** $R \subset S$ contenida en $\mathbf{x}(U)$ (bien parametrizada) es:

$$A(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares.

- f es una **aplicación conforme** si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \lambda(p) \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in T_p S_1, \quad \forall p \in S_1$$

- Una **parametrización** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2$ se dice **conforme** si cumple la definición anterior para $S_2 = \mathbb{R}^2$. Es decir, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\forall p \in U$. Equivalentemente, \mathbf{x} se dice conforme si

$$I_p^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \lambda(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, si $E = G$ y $F = 0$ para todo $p = (u, v) \in U$.

- f es conforme \iff **preserva ángulos**
- f es **equiárea** \iff preserva $\det I_p = EG - F^2$ entre S_1 y S_2
- f es una isometría local \iff preserva la primera forma fundamental, es decir,

$$\langle (df)_p(x), (df)_p(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- f es una isometría local $\iff f$ es conforme con $\lambda(p) = 1$ constantemente
- Toda isometría local de superficies es un difeomorfismo local
- f isometría local $\iff f$ preserva longitudes, ángulos y áreas
 - Es decir f conforme y f equiárea $\iff f$ isometría local
- Dos superficies son **localmente isométricas** si existe una isometría local f entre ellas y además f es sobre entre S_1 y S_2 . *No es suficiente que f sea una isometría local.*
- Una **isometría global** entre superficies es un difeomorfismo global que además es isometría local.
 - Dos superficies son **globalmente isométricas** si existe una isometría global entre ellas.
 - isometría global \implies isometría local

- La **aplicación de Gauss** $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por

$$N(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

asocia a cada punto $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ su vector normal unitario.

- N define un **campo normal unitario** localmente para cada entorno $\mathbf{x}(U)$ de p .
- Si N define un campo normal globalmente para todo $p \in S$ se dice que S es orientable. Esto depende de la parametrización, por tanto S es **orientable** si existe alguna parametrización para la que N defina un campo normal unitario en toda S .
- La **segunda forma fundamental** es la aplicación

$$II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(x, y) := \langle x, W_p y \rangle$$

- II_p es bilineal y simétrica pero no tiene por qué ser definida positiva

- La expresión matricial de II_p respecto de la base de vectores coordenados $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ se puede calcular a partir de la aplicación de Gauss mediante

$$II_p \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, N \rangle \\ \langle \mathbf{x}_{vu}, N \rangle & \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle \end{pmatrix}$$

- Un punto $p \in S$ es **umbilical** si $II_p = \lambda(p)I_p$

- Una **dirección asintótica** de S en p es un vector $x \in T_p S$ no nulo tal que $II_p(x, x) = 0$.

- Una **línea asintótica** de S es una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I \iff II(\alpha', \alpha') = 0$.

- El **operador de Weingarten** se define para cada $p \in T_p S$ como la aplicación

$$W : T_p S \rightarrow T_p S \text{ con } Wp(x) := -(dN)_p x$$

- Es una aplicación autoadjunta: $\langle W_p x, y \rangle = \langle x, W_p y \rangle$
- Su expresión matricial respecto de cualquier base ortonormal de $T_p S$ es simétrica y por tanto diagonalizable. Además, las curvaturas que aparecen a continuación definidas en función de los autovalores de W_p están bien definidas y permanecen invariantes por cambios de base.
- La relación matricial respecto de \mathcal{B} entre I_p, II_p y W es

$$(II_p)_{\mathcal{B}} = (I_p)_{\mathcal{B}} (W_p)_{\mathcal{B}}$$

- Un punto $p \in S$ es **umbilical** si $W_p = \lambda(p)Id$

- Las **curvaturas principales** de S en p son los autovalores $\kappa_1(p), \kappa_2(p) \in \mathbb{R}$ de W_p .

- Las **direcciones principales** son cualquier autovector de W_p . Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ las direcciones principales son los múltiplos no nulos de e_1 y e_2 . Si $\kappa_1 = \kappa_2$ todo vector no nulo de $T_p S$ es dirección principal.

- Una **línea de curvatura** es una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal de S para todo $t \in I \iff W_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda(t) \alpha'(t)$, $\forall t \in I$ y cierta función curvatura principal $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si el polinomio característico es complicado se puede utilizar que

$$Wv = \lambda v \iff I^{-1} II v \lambda v \iff II v = \lambda I v$$

. A partir de aquí, si necesitamos el λ calculamos; si no, definimos $z = II v$ y forzamos que sea linealmente dependiente de v , es decir, que $\det(II v, v) = 0$.

- Un **punto umbilical** es un $p \in S$ tal que $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$
- Las **funciones de curvatura principal** se obtienen de diagonalizar para diagonalizamos para p genérico. Obtendremos funciones continuas $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ entonces además son funciones diferenciables.

- La **curvatura de Gauss** de S en p es el número real

$$K(p) := \det W_p = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p)$$

o, alternativamente

$$K(p) = \det(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}) = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

para e, f, g, E, F, G evaluadas en p .

- Atendiendo a la curvatura gaussiana, los puntos $p \in S$ se clasifican en:

1. **puntos elípticos** si $K(p) > 0$
2. **puntos parabólicos** si $K(p) = 0 \wedge W_p \neq 0$ (e.d. si solo una de las dos curvaturas principales es 0)
3. **puntos planos** si $K(p) = 0 \wedge W_p = 0$ (e.d. si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$)
4. **puntos hiperbólicos** si $K(p) < 0$

- La **curvatura media** de S en p es el número real

$$H(p) := \frac{1}{2}\text{tr}W_p = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p))$$

o, alternativamente

$$H(p) = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

para e, f, g, E, F, G evaluadas en p .

- Una **superficie minimal** es aquella que tiene $H(p) = 0, \forall p \in S$. Son minimales los trozos de esfera y los trozos de plano.