### 3.2.4　ポアソン分布の学習と予測

ベイズ推論による機械学習入門のテキストより、ポアソン分布のときの予測値は

$$\begin{aligned} p(x_*) &= \mathrm{NB}(x_*|r,p) \\ &= \frac{\Gamma(x_*+r)}{x_*!\Gamma(r)}(1-p)^r p^x \end{aligned} \tag{3.43}$$

で与えられる。

このとき、$x_*$ の期待値は

$$\begin{aligned} \langle x_* \rangle &= \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\Gamma(x+r)}{x!\Gamma(r)}(1-p)^r p^x \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

また、$x_*^2$ の期待値は

$$\begin{aligned} \langle x_*^2 \rangle &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\Gamma(x+r)}{x!\Gamma(r)}(1-p)^r p^x \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

Eq.(A.4.1),(A.4.2) を計算するために、$r \in \mathbb{R}_+$ として次の式

$$f(p) = \frac{1}{(1-p)^r} \tag{A.4.3}$$

のテーラー展開を考える。各微分係数は

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= r \\ f''(0) &= r(r+1) \\ f^{(3)}(0) &= r(r+1)(r+2) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= r(r+1)\cdots(r+n-1) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)} \end{aligned} \tag{A.4.4}$$

であるため、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-p)^r} &= f(p) \\
&= f(0) + f'(0)p + \frac{1}{2!}f''(0)p^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)p^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) p^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)} p^n \qquad \text{(A.4.5)}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\langle x_* \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} (1-p)^r p^n \\
&= (1-p)^r \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r p \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{(1-p)^r} \\
&= \frac{pr}{1-p} \qquad \text{(A.4.6)}
\end{aligned}$$

最初の $=$ は定義。二つ目の $=$ は、$(1-p)^r$ を前に出した。三つ目の $=$ は、$n=0$ のとき $n=0$ かつ $n!=1$ を使った。四つ目の $=$ は、$p\partial/(\partial p)$ をかけることｒで、$n$ が前に出ることを使った。

同様に、

$$\begin{aligned}
\langle x_*^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} (1-p)^r p^n \\
&= (1-p)^r \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(r)} p^n \\
&= (1-p)^r p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{(1-p)^r} \\
&= \frac{pr(pr+1)}{(1-p)^2}
\end{aligned} \tag{A.4.7}$$

最初の $=$ は定義。二つ目の $=$ は、$(1-p)^r$ を前に出した。三つ目の $=$ は、$n=0$ のとき $n=0$ かつ $n!=1$ を使った。四つ目の $=$ は、$p\partial/(\partial p)$ をかけることで、$n$ が前に出ることを使った。

### （おまけ 1）負の二項係数

普通の二項係数は $r, n \in \mathbb{N}$ として

$$\binom{r}{n} := \frac{r!}{n!(r-n)!} = \frac{\Gamma(r-1)}{n!\Gamma(r-n+1)} \tag{A.4.8}$$

負の二項係数は $r, n \in \mathbb{N}$ として

$$\binom{-r}{n} := (-1)^n \binom{r+n-1}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} p^n \tag{A.4.9}$$

### （おまけ 2）負の二項展開

普通の二項展開は $p \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ として

$$(1+p)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} p^n \tag{A.4.10}$$

$$= \sum_{n=0}^{r} \frac{\Gamma(r+1)}{n!\Gamma(r-p+1)} p^n \tag{A.4.11}$$

　$r$ を正の実数とすると、これはテーラー展開になって、 $p \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+$ として

$$(1+p)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+1)}{n!\Gamma(r-p+1)} p^n \tag{A.4.12}$$

（和が有限で終わらず、無限和になる）
　負の二項展開は

$$(1+p)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r}{n} p^n \tag{A.4.13}$$

$$= \sum_{n=0}^{r} \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} (-p)^n \tag{A.4.14}$$