问题选 B

#### 2020 MCM/ICM 汇 总表

团队控制号 2011873

#### 持续时间最长的沙堡

在海边可以找到各种各样的沙堡,从简单的沙堆到复杂的城堡复制品。随着时间的推移,毫无疑问,雨水和海浪会逐渐侵蚀沙堡。但是,不同类型的沙堡被侵蚀的程度是不同的。即使同一海滩上的建筑大小和离水面的距离也大致相同。因此,我们想知道是否存在一种最佳的 3D 几何形状作为沙堡基础。

在任务 1 中,为了确定沙堡基础的最佳 3D 几何形状,首先,我们的团队选择了六种常见的几何形状进行分析。然后引入 Mohr-Coulomb 屈服准则验算沙堡地基强度,采用 Horton 公式计算海水入渗速率,进而采用 Van Genuchten 模型求得水保持曲线。在对含水量研究的基础上,我们用内摩擦角来判断沙堡地基是否稳定。最后,我们算出长方体是最好的,其中持久时间为 50min。更重要的是,通过遍历长方体的纵横比,我们发现水面的宽度越窄,持续时间越长。

在任务 2 中,考虑到砂水混合比例。由于砂水比关系到沙堡的结构稳定性,通过建立砂水比与内摩擦角的函数关系,然后进行编程遍历,我们发现最优解为水砂比为 15%时,沙堡的持久时间为 64.43min。

在任务 3 中,我们将雨水对沙堡的影响分为冲刷和入渗两部分。我们发现长方体仍然是最优几何形状,证实了我们模型的可靠性。并利用 ANSYS 仿真分析对理论结果进行了验证,结果非常相似。

综上所述,通过查阅大量数据,我们建立了波浪侵蚀、潮汐浸泡、雨冲刷、雨浸泡模型。模型的建立有一个逐步优化的过程,并利用 ANSYS 仿真对雨浸结果进行了分析。与理论计算结果吻合较好,验证了模型的正确性。

关键词:Mohr-Coulomb 屈服准则, Horton 方程, Van Genuchten 模型, 内摩擦角, ANSYS 仿真



团队# 2011873 22 页第 1 页

# 内容

| 1.介绍                           | 2  |
|--------------------------------|----|
| 1.1 背景                         | 2  |
| 1.2 我们的工<br>作2                 | •  |
| 2.假设                           |    |
|                                |    |
| 3.符号                           | 3  |
| 4.任务 1:确定最好的三维几何形状             |    |
| 4.1 在沙塔只考虑海水的力量4               |    |
| 以下 4.4.1 的波浪理论                 | 4  |
| 4.1.2 莫里森方程                    | 5  |
| 针对摩尔-库仑屈服准则 4.1.3              | 6  |
| 4.2 考虑在沙塔含水量的变化8               |    |
| 4.2.1 霍顿准备的方程                  | 8  |
| 4.2.2 Van Genuchten 模型         | 8  |
| 4.3 结论                         | 9  |
| 4.3.1 长方体作为一个例子                | .9 |
| 4.3.2 最好的三维几何形状10              |    |
| 4.3.3 灵敏度分析                    | 11 |
| 5.任务 2:考虑 Sand-to-Water 混合比例12 |    |
| 6.任务 3:考虑降雨的影响13               |    |
| 6.1 降水模型1                      | 3  |
| 6.2 Sartor-Boyd 冲刷模型           | 14 |
| 6.3 渗流过程                       | 15 |
| 6.4 ANSYS 仿真                   | 17 |
| 7.任务 4:其他策略使沙堡持续时间更长17         |    |
| 8.的优点和缺点                       |    |
| 8.1 优势                         | 18 |
| 8.2 缺点                         | 18 |
| 文章                             | 19 |
| 参考                             | 21 |



团队# 2011873 22 页第 2 页

#### 1. 介绍

#### 1.1背景

在海边可以找到各种各样的沙堡,从简单的沙堆到复杂的城堡复制品。在所有这些中,人们通常会形成一个由单一的,难以描述的湿沙堆组成的初始基础,然后继续将这个基础切割和塑造成可识别的三维几何形状,从而建立更多的城堡定义特征。

随着时间的推移,毫无疑问,雨水和海浪会逐渐侵蚀沙堡。但是,不同类型的沙堡 被侵蚀的程度是不同的。即使同一海滩上的建筑大小和离水面的距离也大致相同。

因此,为了达到最高的坚固性和最长的持续时间,我们想知道是否存在一种最佳的 3D 几何形状,可以用作沙堡的基础。

#### 1.2我们的工作

为了进一步展示我们的解决方案,我们将我们的论文安排如下:

- ●在任务 1 中,我们使用六种常见的几何形状进行研究。通过建立潮汐浸泡模型和波浪侵蚀模型,我们计算出长方体是最优的几何模型。进一步研究,通过对不同长径比长方体的研究,我们发现面对水面的长方体宽度越小,模型存在的时间越长。
- ●在任务 2 中,不同的砂水混合比会影响沙堡的强度。通过建立不同砂水混合比与内摩擦角的函数关系,我们发现 15%是最好的。
- ●在任务 3 中,我们将雨水对沙堡的影响分为冲刷和入渗两部分。通过 ANSYS 模拟。我们得到了降雨对六种几何形状的影响,与理论非常相似。
- ●在任务 4 中,我们从减少海水入渗和减少波浪侵蚀两个方面来考虑延长沙堡的持续时间

#### 2. 假设

●假设模型底部在水平面上。 ●假设波在无振幅衰减的情况下运动。 ● 忽略沙堡自身重力的影响。



团队# 2011873 22 页第 3 页

●假设海水均匀地渗入沙堡。

# 3. 符号

| 象征         | 描述        |  |
|------------|-----------|--|
| V          | 沙堡体积      |  |
| <b>-</b> ↑ | 波振幅       |  |
| u          | 波速度       |  |
| ü          | 波加速度      |  |
| F          | 波浪总内线力    |  |
| w          | 沙子中的含水量   |  |
| ση         | 横截面上的正应力  |  |
| τ          | 横截面上的剪切应力 |  |
| Φ          | 内摩擦角      |  |
| <b>V</b> * | 雨滴的平均最终速度 |  |

# 4. 任务1:找出最好的三维空间 几何形状

在这个问题中,根据人们在海滩上建造沙堡的情况,我们分析了六种常见的结构相对稳定的 3D 几何形状,从中选择最佳。假设它们具有相同的体积和高度。

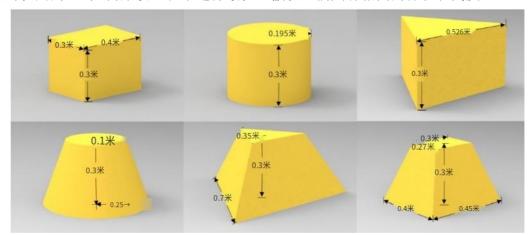


图 1 所示。我们选择的 6 个 3D 几何图形

考虑到潮汐会摧毁沙堡,随着涨潮,潮汐也会





团队# 2011873 22 页第 4 页

逐渐淹没沙堡底部,沙堡的含水量会不断上升。当沙堡完全浸入海水时,我们就不需要再去探索了。因此,我们将整个过程分为三个阶段:

1)沙堡不被淹没。在这种情况下,我们主要考虑潮汐对沙堡的作用力。

海水开始淹没沙堡。在这种情况下,渗透部分的含水量会发生变化。 3)海水完全淹没沙堡。

以美国桑迪胡克海滩为例,查询该海滩 2020[1]年 3 月 6 日的潮汐曲线。

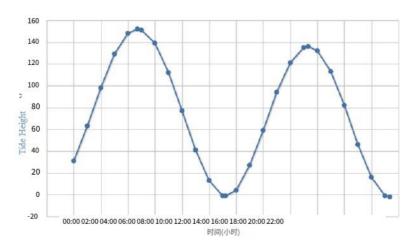


图 2。2020年3月6日桑迪胡克的潮汐曲线

由上图可以看出,00:00 时的潮高初始高度为30cm,潮高与时间的关系为:

 $h(t) = 1256\sin(0.0008776t + 3.074) + 70.98\sin(0.4971t - 0.8185) \tag{1}$ 

在哪 里

T为时间(h);H(t)为潮汐相对于潮高基准面的高度。

## 4.1仅考虑海水对沙堡的作用力

#### 4.1.1艾里波理论

要研究海浪对沙堡的作用力,我们需要知道海浪是如何运动的。在海洋工程和海岸工程中,经常应用艾里波理论<sup>[2]</sup> 对随机海况进行建模。艾里波理论是一种线性理论,用于研究波浪在势流表面和水平底部上方的传播。



团队# 2011873 22 页第 5 页

一个波分量的自由表面高程<s:1>(x,t)是正弦的,作为水平位置 x和时间 t 的函数。

$$\eta(x,t) = a \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{2}$$

在哪 里

A 为波幅,单位为米,这里取 A=0.15 m<sup>[3]</sup>。 K 为角波数,单位为弧度/米,与波长(波长)相关为 K=

2 整机,这里, 我们

假设 $\langle s:1 \rangle = 8.5 m$ 。 为角频率,单位为弧度/秒,与周期 T 和频率 f 的关系为 =  $\frac{2}{T}$  ,这里,我们假设 T=10 s 。

然后,我们可以得到波的速度(m/s²)和加速度(m/s)。

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial t} = a\omega \sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -a\omega^2 \cos(kx - \omega t) \tag{4}$$

#### 4.1.2莫里森方程

知道了波的运动方程,我们就可以进一步探索作用在波上的总内线力。莫里森方程<sup>[4]</sup> 是两个力分量的总和:与局部流动加速度相相的惯性力和与瞬时流速平方成正比的阻力。

$$F = \rho C_m V \dot{u} + \frac{1}{2} \rho C_d A u |u| \tag{5}$$

在哪 里

F 为波浪上的总内线力;  $Cis_m$  为惯性系数,这里,我们取  $C=1.5_m$ ; V 为沙堡的  $\triangle$  B7,为海水密度,  $Cis_m$  为阻力系数,A4与材料的形状有关。A 是面朝海水的表面面积。



团队# 2011873 22 页第 6 页



图 3。不同形状的阻力系数

#### 4.1.3莫尔-库仑屈服准则

为了讨论波浪对沙堡结构的影响,我们查阅相关数据,选择沙堡的内摩擦角作为研究对象。

Mohr-Coulomb 屈服准则<sup>[6]</sup> 是 C-M 准则的简称。C-M 准则是一种屈服理论,它考虑了法向或平均应力作用下的最大剪应力或单一剪应力,即当剪切面上的剪应力与法向应力之比达到最大值时,材料屈服于破坏。其表达式为:

$$\tau_n = C + \sigma_n \tan \phi \tag{6}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{S} \tag{7}$$

$$\tau_n = \frac{F}{A} \tag{8}$$

在哪 里

C 为沙的黏聚力; $\langle s:1>$ 为沙的内摩擦角; $\langle e:1_n \rangle$ 为横截面上的正应力; 为截面上的剪  $_n$ 应力;A 为剪切面面 A;S 为受力接触 a面积。

对砂石, $C=0^{[7]}$ ,因此:



团队# 2011873 22 页第 7 页

$$\tau_n = \sigma_n \tan \phi \tag{9}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{\tau_n}{\sigma_n}) \tag{10}$$

实验表明,含水量对内摩擦角有一定的影响,不同的含水量对应不同的内摩擦角。 根据找到<sup>[8] [9]</sup>的相关数据,我们找到了内摩擦角与砂土含水率的关系,公式如下:

$$g(w) = -140w^2 + 56w + 28.5 \tag{11}$$

式中, w为砂土中的含水量。

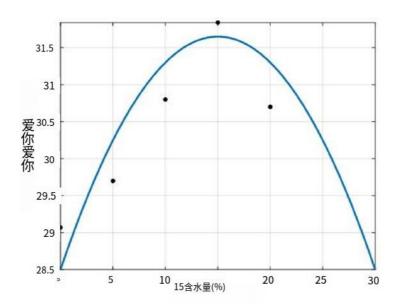


图 4。内摩擦角与含水率曲线

从图中我们可以看出,随着含水量的增加,内摩擦角先增大后减小。主要原因是在一定的含水量下,砂粒表现出黏性。要使砂粒相对滑动,不仅要克服砂粒之间的摩擦,还要克服砂粒之间的凝聚力。超过一定的含水量,所有的沙粒都渗透到水中,水的润滑作用降低了沙粒之间的摩擦。

因此,我们假设,当g(w) < s:1 > < s:1 > 1,即当作用在沙堡上的外力的内摩擦角大于沙堡在含水量下能稳定的最大内摩擦角值时,沙堡就会坍塌;当g(w)时,沙堡不会坍塌。



关注数学模型

团队# 2011873 22 页第 8 页

#### 4.2考虑沙堡含水量的变化

#### 4.2.1霍顿方程

当海水开始淹没沙堡时,为了了解沙堡的含水量是如何变化的,我们首先要知道 海浪的渗透速率。

Horton 方程是计算入渗曲线的经验公式,其表达式为[10]:

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$$
 (12)

在哪 里

F(t)为 t 时刻的浸润速率;F0 为初始浸润速率,取 F0 = 0; $f_c 0$  为土壤饱和后的恒定入渗速率或最小入渗速率,这里,我们假设  $f_c = 1$  mm/min;K 为砂土特有的衰减常数,取  $K = 2^{[12]}$ 。

#### 4.2.2 Van Genuchten模型

我们已经知道了t时刻的入渗速率,那么f(t)和沙堡的含水量是什么关系w?在这里,我们使用 Van Genuchten 模型。

保水曲线的形状可以用几种模型来描述,其中一种是 Van Genuchten 模型[12][13]。

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + (\alpha |\psi|^n)\right]^{1 - \frac{1}{n}}}$$
 (13)

在哪里

(7)为保水曲线;②为水的厘米;为。饱和含水量,取<s:1>。=0.3];<sup>[14</sup>为剩余含,水量,取<s:1> =0. $^{[14}$ ,05); 与进气口吸力的逆有关, 0,取 =0.01cm- $^{1}$ ,  $^{[14]}$ ; N 是孔径分布的度量,N 1,取 N=3。

需要注意的是,我们将(12)式与(13)式的物理含义相同,从而得到保水性曲线。



团队# 2011873 22 页第 9 页

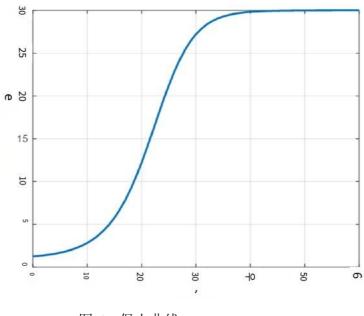


图 5。保水曲线

然后用公式(11)计算浸没部分的内摩擦角,并与<s:1>(0)↓↓对比。

#### 4.3结论

#### 4.3.1以长方体为例

假设长方体尺寸为 0.4m 0.3m 0.3m, 其中高度为 0.3m。考虑到面积越大受力越大,所以我们选择尺寸为 0.3m 0.3m 的表面作为水侧面。然后,剪切面面积 A=0.4m 0.3m,受力接触面面积 S=0.3m 0.3m。

根据图 2,潮汐的初始高度为 30cm, a=0.15m(公式(2)),我们将沙堡放置在相对于潮汐高度基准面 45cm 处,这是潮汐的最大高度。

然后,由图 2 可以得到,潮汐从初始值上升到沙堡位置所花费的时间为 40 分钟,这是我们模型中的第一个阶段。潮水持续上升到刚好完全淹没沙堡需要 50 分钟,这是第二阶段。

假设沙堡的初始含水率为 20%。此含水率下沙堡的内摩擦角 g(w) 可由图 4 求得。



团队# 2011873 22 页第 10 页

在第一阶段,计算出波浪<s:1>产生的内摩擦角小于 g(w),即长方体模型可以在第一阶段稳定存在。

在第二阶段,随着海水开始淹没沙堡,沙堡的含水量随着时间的推移逐渐增加。 从图 4 可以看出,内摩擦角在不断减小。当它减小到小于波浪产生的内摩擦角时, 沙堡就会坍塌。具体变化过程如下图所示。

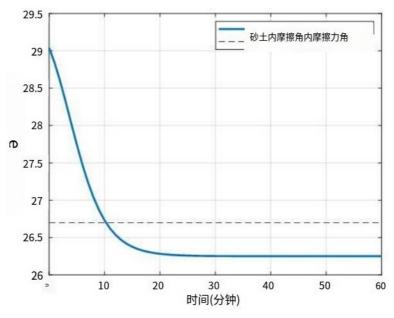


图 6。内摩擦角随时间变化曲线

从上图可以看出,长方体沙堡在第二阶段的持续时间为 10 分钟,即总持续时间 约为 50 分钟。

在分析其他五种几何形状的稳定性时,方法也类似。由于篇幅限制,不再赘述。

#### 4.3.2最佳三维几何形状

我们得到具有相同体积和高度的六种几何形状的持续时间,以及第一波作用的有效高度。具体结果如下表所示。



团队# 2011873 22 页第 11 页

表 1。六种几何形状第一阶段的持续时间和有效波高

| 几何形状                 | 持续时间(分钟) | 第一级有效波高(m) |
|----------------------|----------|------------|
| 长方体                  | 约50分钟    | >0.2       |
| 油缸                   | 小于40min  | <0.18      |
| 等边三角形圆柱体             | 小于40min  | <0.13      |
| 圆锥的截锥体               | 小于40min  | <0.10      |
| Threetrustuma金字<br>塔 | 在短时间内崩溃  | < 0.17     |
| 金字塔的四个托拉斯            | 不到40min  | <0.14      |
| <del></del>          |          |            |

从表中可以看出,除了长方体外,其他五种几何体在第一阶段都是塌缩的。我们知道,波浪越高,冲击力越大,所以波浪的有效高度值越大,说明几何形状越稳定。综上所述,长方体是最优的 3D 几何形状。

#### 4.3.3敏感性分析

由式(7)和式(8)可知,A 和 S 的面积越大,对沙堡的破坏越小。所以接下来我们改变长方体的长度和宽度,进一步分析大小对沙堡稳定性的影响。

利用式(10)计算内摩擦角随长宽比的变化,并画出图。

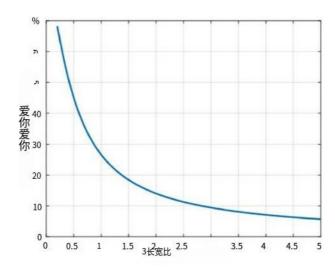


图 7。内摩擦角随长宽比变化曲线





团队# 2011873 22 页第 12 页

从上图中我们得知,长宽比越大,外力产生的内摩擦角越小,沙堡越稳定。这与 实际情况是一致的。

# 5. 任务2:将沙子与水的混合物比例 考虑

在 Task 1 中,我们将初始含水量设置为 20%,并使用内摩擦角来判断沙堡结构是 否稳定。内摩擦角与含水量有关,因此需要找到最优的砂水比,使沙堡的持续时间更长。

首先,通过改变初始含水量,再改变内摩擦角,使沙堡满足 g(w),使沙堡在第一阶段保持完整的砂水混合比范围为 5% -25%。然后,在第二阶段,绘制出沙堡坍塌时间随沙中初始含水量变化的曲线。

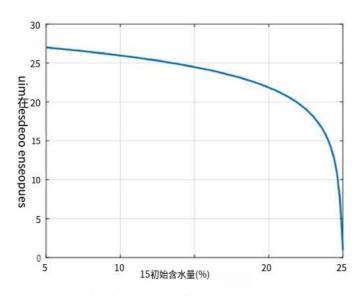


图 8。沙堡崩塌时间随初始含水量的曲线

我们可以看到,随着沙中初始含水量的增加,沙堡的持续时间逐渐减少。当初始含水量为5%时,沙堡的总持续时间最长,为67 min。

但在图 4 中,当含水量 w=15%时,内摩擦角最大,沙堡的稳定性最好。由上图可知,此条件下沙堡的总持续时间为 64.43min。

实际上,两者之间并不存在矛盾。因为当初水的时候



关注数学模型

团队# 2011873 22 页 13 页

内容少,上升起点低,相应地沙堡的持续时间也更长。考虑到沙子<sup>[15]</sup>的黏度,而且两者的差别不大,我们选择 15%作为最佳的水砂混合比。

#### 6. 任务3:考虑下雨的影响

#### 6.1降水模式

为了研究雨水对沙堡的影响,我们首先需要了解雨水的一些运动特性。

假设雨垂直下落。下落的雨滴有很大的动能。当雨滴击中沙堡时,会破坏沙堡的 结构,也会改变沙堡的含水量。因此,我们将雨水对沙堡的影响分为冲刷和渗透两部 分。

雨滴最终速度计算公式[16]:

$$V_{m} = \begin{cases} \sqrt{\left(38.9 \frac{v}{d}\right)^{2} + 2400 g d} - 38.9 \frac{v}{d} & d \leq 3 \text{mm} \\ \frac{d}{0.113 + 0.845 d} & 3 < d \leq 6 \text{mm} \end{cases}$$
(14)

式中为气流的黏度系数。当 T=20℃=293K 时,为 1.810741555 10-5Pa。

考虑雨滴为球体。根据动量公式  $q = mV_m$  and 能量公式  $E = 1mv_m^2$ ,每个雨滴所包含的动量和能量

2

,可以进一步得到雨滴直径与动量、能量的关系。

但在实际计算降雨动能等降雨特征时,往往只有降雨量或降雨强度的数据,缺乏雨滴直径的观测数据。为了便于生产应用,可以将最终的雨滴速度表示为雨强的函数。根据对实测数据的分析,雨滴直径中位数与雨强[16]之间存在幂函数关系:

$$d_{50} = 2.52i^{0.32} \tag{15}$$

式中 disso 雨滴直径中位数(mm);I 为 降 丽强度(mm/min)。

将式(15)代入式(14),就得到了由降雨强度计算雨滴平均最终速度的公式。



关注数学模型

团队# 2011873 22 页第 14 页

$$V_{m} = \begin{cases} \sqrt{\left(1.544 \frac{v}{i^{0.23}}\right)^{2} + 6.048gi^{0.23}} - 1.544 \frac{v}{i^{0.23}} & i \le 2.13\\ \frac{i^{0.23}}{0.0448 + 0.0845i^{0.23}} & 2.13 < i \le 43.46 \end{cases}$$
(16)

通过计算,我们得到降水与雨滴速度、能量、动量的关系,如下图所示:

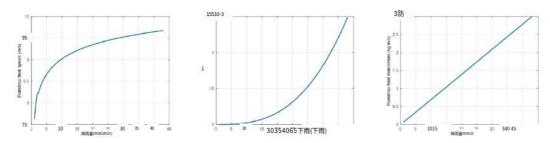


图 9。降水与雨滴速度、能量、动量的关系

## 6.2 Sartor-Boyd冲刷模型

在知道了雨滴的相关运动参数之后,我们还需要分析雨滴对沙堡的影响。 Sartor-Boyd 冲刷模型[17]主要适用于具有初始冲刷作用的降雨过程,如式(17)所示:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}t} = K_2 \,\mathrm{Pr} \tag{17}$$

式中  $\mathit{Kis}_2$  为侵蚀系数(经验值), $mm;^{-1}P$  为开始时沙堡的体积, $m;^{3}R$  为单位时间单位面积的雨水径流量,即降雨强度,mm/min;T 为时间,min。

在我们的模型中,取  $Kis_2$ 为  $0.201^{[17]}$ ,得到随降水被冲走的沙体积的变化,如下图所示:



团队# 2011873 22页15页

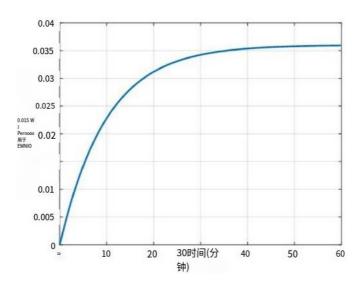


图 10。被降水冲走的沙的体积变化

# 6.3渗流过程

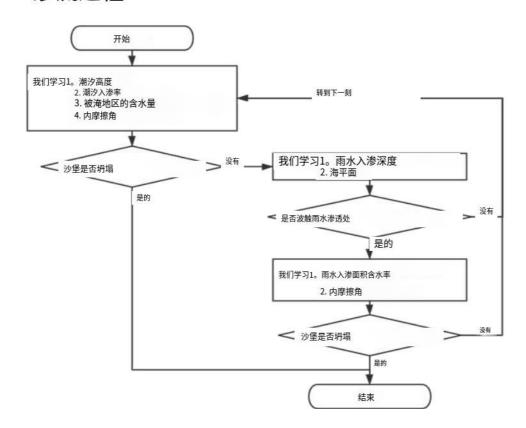


图 11。渗流过程流程图

当沙堡受雨水影响时,我们利用 Matlab 拟合了沙堡内摩擦角与含水率的关系, 如下图[18]:



(18)

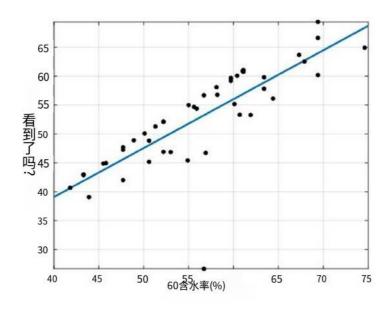


图 12。沙堡受雨影响时内摩擦角与含水率的关系

在降水模型中,我们得到了雨滴最终速度的计算公式。然后,代入式(13),得到 沙堡的含水量。根据式(18),可以得到下雨时沙堡的内摩擦角。最后,对比一下 g (w) 与<S:1> (w) 之间的关系,得出结论。

表 2。六种几何形状在下雨时的有效高度

|               | 有效高度<br>0.20米<br>0.15米 | 6 |
|---------------|------------------------|---|
| 等边三角形圆柱体      | 0.11米                  |   |
| 圆锥体的截锥        | 0.08米                  |   |
| a的三个信托<br>金字塔 | 0.15米                  |   |
| 金字塔的四个托拉      | 0.15米                  |   |

结果表明,雨水对沙堡的结构稳定性有一定的影响。对比六种几何形状的有效 高度,我们发现长方体仍然是最优几何形状,证实了我们模型的可靠性。

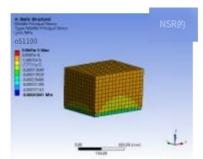


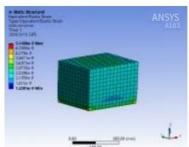


团队# 2011873 22 页第 17 页

#### 6.4 ANSYS仿真

经过理论计算,利用 ANSYS 仿真分析对理论结果进行验证。通过对降雨冲刷模型的仿真分析,得到了模型的压力图、张力图和变形图。通过与理论结果的对比,得出的结果非常相似。下图为6种模型的仿真分析:





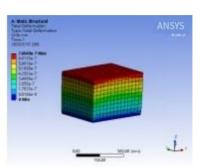
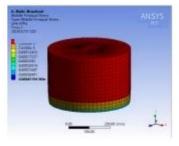
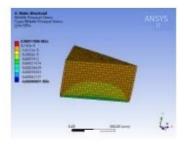
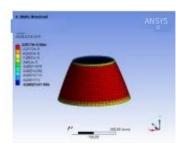
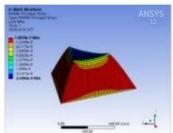


图 13。长方体的压力、张力和变形云









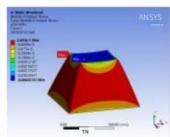


图 14。其他五种型号的压力分布

# 7. 任务4其他让沙堡经久不衰的策略

## 长

从前三个问题的分析来看,为了延长沙堡的持久时间,可以从减少海水入渗和减少 波浪侵蚀两个方面考虑。

一方面,我们可以对沙堡进行覆盖,比如在前面放置防护罩



团队# 2011873 22 页第 18 页

的沙堡,以减少海浪对沙堡的影响。另一个例子是用塑料袋包裹沙堡。这样可以消除 雨水和海水的渗透,也避免与海浪接触,从而减少对海浪的侵蚀。

另一方面,我们也可以在沙堡中放置一些石头或木制的支撑物,这样可以提高沙堡抵抗海浪的能力。或者,我们也可以在沙堡中混入一些粘土。因为粘土吸水比沙子少,而且它的内摩擦角比沙子大。因此,在沙堡中加入其他材料,可以提高抵抗海浪的能力,减少海浪的穿透。

# 8. 优点和缺点

#### 8.1优势

- ●我们选择了六种三维几何形状进行分析对比,最终通过计算沙堡的持续时间和波浪作用的有效高度,确定长方体为最优模型,具有一定的合理性。
- ●在分析波浪作用对沙堡的影响时,我们建立了波浪力方程,并使用 Mohr-Coulomb 屈服准则进行了强验算
- ●通过查阅资料,采用 Horton 方程测量入渗速率,采用 Van Genuchen 模型建立入 渗速率与砂土含水量的关系。
- ●整个模型的结构严谨合理。它适用于问题条件,可以应用于任何地区的海滩。 具有良好的通用性。

#### 8.2缺点

- 在考虑波动时, Airy wave Theory 简单地将波视为正弦形式, 但实际上, 波在向前移动时, 振幅并不是恒定的。
- ●水的渗流并不是一个均匀的过程。物体表面的含水量应该大于物体内部的含水量, 但为了计算方便,我们认为这是一个均匀的过程。
- ●雨滴在下落时是不均匀的,随着倾斜角度的变化,很难用公式推导出它对沙堡的影响。



团队# 2011873 22 页第 19 页

#### 文章

#### 持续时间最长的沙堡

大海对人有无限的吸引力。当你在海边玩耍的时候,有没有注意到沙滩上无数大小 形状各异的沙堡?有的被海浪冲刷得支离破碎,有的则完好无损。的确,它们可能没有 及时建成,但你有没有想过造成这种结果的其他因素,以及这些因素将如何指导我们建 造沙堡?

为了回答这个问题,我们以美国的桑迪·胡克为例,建立了一个在海浪和潮汐作用下的沙堡模型。基于这个模型,我们研究了相同体积的六种基本几何形状的沙堡一一长方体、圆柱体、三角形棱柱、三角形金字塔、四边形金字塔和圆形金字塔。

我们可以看到,长方体沙堡可以存在的时间最长。同时,在保持沙堡一定横截面的同时,要尽量保持滨水宽度小。这样会使沙堡存在的时间更长。

此外,我们还考虑到随着潮水的上涨,海水会逐渐淹没沙堡,导致沙堡的含水量发生变化,从而影响沙堡的龄期。因此,我们研究了沙堡中含水量与其龄期的关系。我们得出的结论是,沙堡的最佳含水率应为 15%。当含水量过大时,沙堡在海浪的冲击下就会坍塌。其实,我们在沙堡建造过程中,是不会测量沙子含水率的具体数值的。因此,我们可以在沙滩上做一个小实验。我们逐渐往沙子里加水,然后看看它们有多紧。当我们觉得沙子最结实的时候,就停止加水,把它作为建造沙堡的材料。

最后,我们研究了雨水对沙堡的影响。一方面,雨水的渗入会增加沙堡的含水量。 另一方面,沙堡上的雨水会对其产生强烈的影响。这些都会加速沙堡的崩塌,所以 雨水对沙堡不利。

总之,为了让沙堡具有最长的持续时间,我们应该选择在无雨天气使用密封性程度更高的沙子,建造一个长方体作为沙堡的基础,并使水岸的宽度尽可能窄,这样我们就可以建造一个"完美"的沙堡。当然,也有人可能会说,我们可以用塑料布把沙堡包起来,或者在沙里面加石头和泥土。



关注数学模型

团队# 2011873 22 页第 20 页

这些也可以让沙堡存在的时间更长。但是,我们不建议这样做。人们离开后,这些材料如果不及时带走,就会变成垃圾,污染海洋。同时,海滩上的石头也会给不注意的人留下危险。当我们在海滩享受生活的时候,我们一定要记得保护环境和他人。



团队# 2011873 22 页第 21 页

#### 参考

- [1] https://www.cnss.com.cn/tide/
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Airy\_wave\_theory
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Wind\_wave
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Morison\_equatio
- [5]张伯平,王力,袁海智。含水量对黄土结构强度影响的定量分析[J]。西北农业大学学报,1994(01):54-60。
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%E2%80%93Coulomb\_theory?wprov=sfla1
- [7] https://wenku.baidu.com/view/4eb7356cbed5b9f3f80f1c1c.html
- [8]陈磊,赵健。含水率对排土场粘土抗剪强度参数的影响[J]。煤炭技术, 2016,35(12):170-172。
- [9]范志杰,曲建军,周欢。沙粒中摩擦角与粒径、含水率、天然坡度角的关系[J].中国沙漠,2015,35(02):301-305。
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/Infiltration\_(水文)
- [11] http://www.soilmanagementindia.com/soil/permeability-of- engineering/16472
- [12]宋永淑,金景秀,郑胜元,李春娥。釜山 imgi 矿山排土场尾矿非饱和特征曲线估算。韩国岩土学会学报,30:47-58,03 2014。
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Water\_retention\_curve
- [14] Stingaciu, L. R., 等。"利用核磁共振弛豫仪测定孔隙大小分布和水力特性:实验室方法的比较研究。"*《水资源研究》*46.11(2010)。
- [15]张俊宏, 史旭超, 张新娟。黄土含水率对结构影响的实验研究[J]。河南科学, 2010,28(12):1575-1578。
- [16]姚文义, 陈国祥。降雨速度与终速公式[J].河海大学学报, 1993(03):21-27。
- [17]赵晓佳,王少坡,于鹤,邱春生,孙立平,王晨晨,赵乐军,宋先才。天津市中心典型下垫面降雨径流侵蚀与污染侵蚀特征[J].环境工程,2019,37(07):34-38 + 87。



关注数学模型

团队# 2011873 22 页 22 页

[18] Estela Nadal-Romero, Teodoro Lasanta, David reg<e:1> es, N. Lana- Renault 和 Artemi cerd<e:1>。地中海山地环境中不同土地覆盖条件下废弃农田的水文响应与产沙。Boletín de la Asociación de Geógrafos Españoles, 55:303- 323,01 2011。

