Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Geotecnia

# LISTA N$^{o}$ 3

Karen Ninanya

(1812565)

Professor ........................................................................................ Celso Romanel
Disciplina ............................................ CIV 2532 - Métoddos Numéricos em Engenharia Civil
Data ................................................................................ 5 de Outobro, 2018

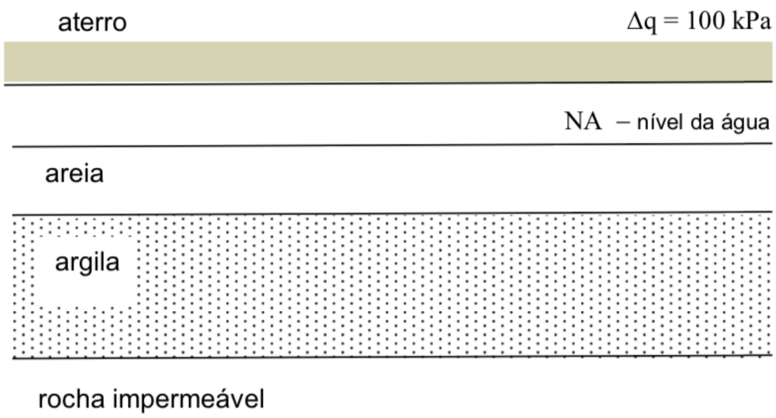
# Questão

Considere uma camada de argila saturada ($c_v = 10^{-2} cm^2/s$) de espessura $H = 200$ cm sob acréscimo de carregamento $\triangle q = 100kPa$ gerado por um aterro aplicado na superficie do solo em uma grande área.

Determine numericamente pelo método dos elementos finitos os excessos de poropressão $u_e$ no tempo $t = 18,5$ días (correspondente a um fator tempo $T = \frac{c_v t}{H^2} = 0,4$) nos nós de uma malha formada por 4 elementos quadráticos de 3 nós com igual comprimento $L = 50$ cm. Utilize o método das diferenças finitas centrais ($\theta = 1/2$) no dominio do tempo.

Considere no minimo 10 intervalos de tempo $\triangle t$ iguais para a obtenção da solução aproximada deste problema. Compare seus resultados com a solução gráfica da figura ou valores da tabela abaixo, calculados analiticamente.

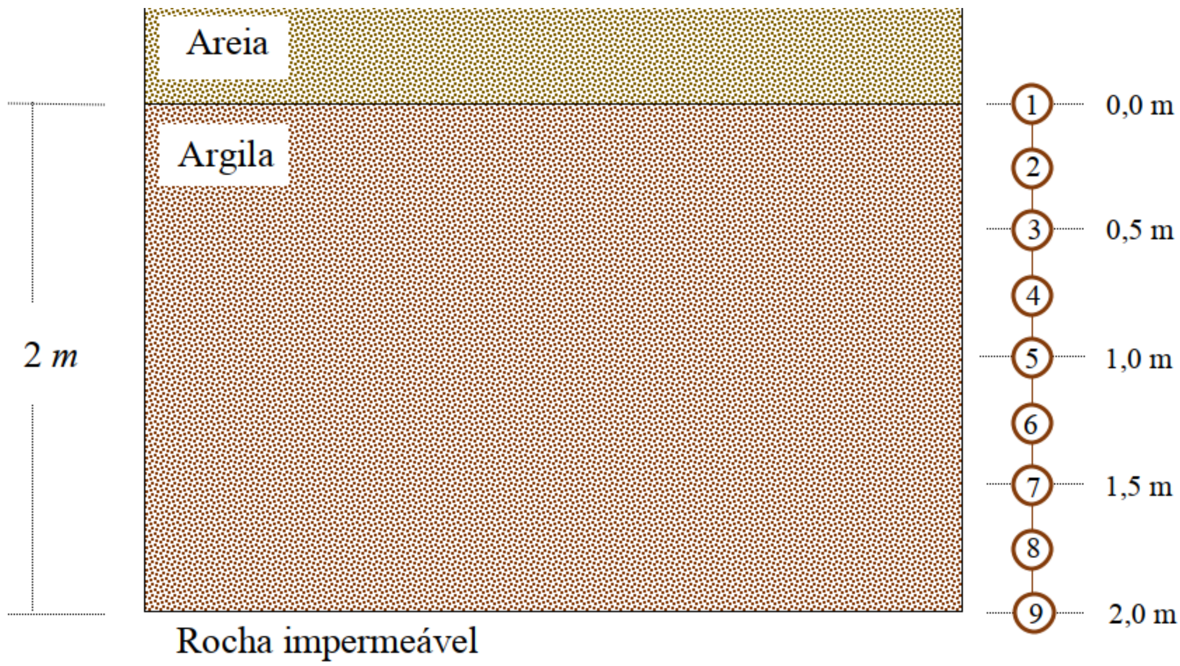
Figura 1: Esquema geral do problema



## Solução

A camada de argila do problema foi discretizando em 4 elementos lineares quadráticos , como pode ser observado na seguinte figura.

Figura 2: Vista global da coluna com 3 elementos




*Método das diferenças finitas centrais*

- Formulação variacional

Na seguinte equação é mostrada a formulação variacional.

$$\Omega = \int_V \left[ \frac{1}{2} c_v \left( \frac{\partial u_e}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u_e}{\partial t} u_e \right] dV - \int_{z_1}^{z_2} \bar{p} u_e dz \tag{1}$$

onde o escesso de pressão neutra $u_e$ depende da matriz das funções de interpolação $[N]$ (elementos quadráticos) e o vetor $[q]$.

$$u_e = [N][q] \tag{2}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & (1-\xi^2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Logo, a derivada do excesso de pressão neutra respeito à profundidade é mostrada a continuação.

$$\frac{\partial u_e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[N][q]$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & (1-\xi^2) \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot [q]$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial z} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} [q] \tag{5}$$

sendo a matriz $[B]$:

$$[B] = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} \tag{6}$$

Além, a derivada do excesso de pressão neutra respeito ao tempo é expressada na equação 7.

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[N][q]$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = [N][\dot{q}] \tag{7}$$

$$[\dot{q}] = \begin{bmatrix} \dot{u_e^1} \\ \dot{u_e^2} \\ \dot{u_e^3} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ao reemplazar os valores de $\frac{\partial u_e}{\partial z}$ e $\frac{\partial u_e}{\partial t}$ e obtida a seguinte equação.

$$\Omega = \frac{A}{2}\int_{-1}^{+1}[q]^T[B]^T[R][B][q]\cdot\frac{L}{2}\cdot d\xi + A\int_{-1}^{+1}[q]^T[N]^T[N][\dot{q}]\cdot\frac{L}{2}\cdot d\xi - \int_{-1}^{+1}[q]^T[N]^T\cdot\bar{p}\cdot\frac{L}{2}\cdot d\xi \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial[q]} = 0 = \left[\frac{AL}{2}\int_{-1}^{+1}[B]^T[R][B]d\xi\right][q] + \left[\frac{AL}{2}\int_{-1}^{+1}[N]^T[N]d\xi\right][\dot{q}] = \frac{\bar{p}L}{2}\int_{-1}^{+1}[N]^T d\xi \tag{10}$$

Agrupando.

$$[k'][q] + [k^*][\bar{p}] = [Q'] \tag{11}$$

- Matriz elemental $[k']$

A matriz $[k']$ depende de $[R] = c_v$.

$$[k'] = \frac{L}{2}\int_{-1}^{+1}[B]^T[R][B]d\xi$$

$$[k'] = \frac{c_v}{2L}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} 2\xi - 1 \\ 2\xi + 1 \\ -4\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k'] = \frac{c_v}{2L}\int_{+1}^{-1}\begin{bmatrix} 4\xi^2 - 4\xi + 1 & 4\xi^2 - 1 & -8\xi^2 + 4\xi \\ 4\xi^2 - 1 & 4\xi^2 + 4\xi + 1 & -8\xi^2 - 4\xi \\ -8\xi^2 + 4\xi & -8\xi^2 - 4\xi & 16\xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k'] = \frac{c_v}{2L}\begin{bmatrix} 4\xi^3/3 - 2\xi^2 + \xi & 4\xi^3/3 - \xi & -8\xi^3/3 + 2\xi^2 \\ 4\xi^3/3 - \xi & 4\xi^3/3 + 2\xi^2 + \xi & -8\xi^3/3 - 2\xi^2 \\ -8\xi^3/3 + 2\xi^2 & -8\xi^3/3 - 2\xi^2 & 16\xi^3/3 \end{bmatrix}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$[k'] = \frac{c_v}{6L}\begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix} = \frac{c_v}{2L}[A] \tag{12}$$

- Matriz elemental $[k^*]$

A matriz $[k^*]$ de acordo a equação 10 e a seguinte.

$$[k^*] = \frac{L}{2}\int_{-1}^{+1}[N]^T[N]d\xi$$

$$[k^*] = \frac{L}{2}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \\ (1 - \xi^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) & \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) & (1 - \xi^2) \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k^*] = \frac{L}{2}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{4} & \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^2}{4} & -\frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{2} \\ \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^2}{4} & \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{4} & -\frac{\xi^4}{2} - \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} \\ -\frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{2} & -\frac{\xi^4}{2} - \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} & \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k^*] = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} \frac{\xi^5}{20} - \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{12} & \frac{\xi^5}{20} - \frac{\xi^3}{12} & -\frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{4} \\ \frac{\xi^5}{20} - \frac{\xi^3}{12} & \frac{\xi^5}{20} + \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{12} & -\frac{\xi^5}{10} - \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} \\ -\frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{4} & -\frac{\xi^5}{10} - \frac{\xi^4}{8} + \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} & \frac{\xi^5}{5} - \frac{2\xi^3}{3} + \xi \end{bmatrix}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$[k^*] = \frac{L}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} = \frac{L}{30}[B] \tag{13}$$

- Vetor elemental $[Q']$

Logo, a matriz $[Q']$ de acordo a equação 10 e a seguinte.

$$[Q'] = \frac{\bar{p}L}{2}\int_{-1}^{+1} [N]^T d\xi$$

$$[Q'] = \frac{\bar{p}L}{2}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \\ (1-\xi^2) \end{bmatrix} d\xi$$

$$[Q'] = \frac{\bar{p}L}{4}\begin{bmatrix} \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \\ \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} \\ 2\xi - \frac{2\xi^3}{3} \end{bmatrix}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$[Q'] = \frac{\bar{p}L}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{\bar{p}L}{12}[C] \tag{14}$$

- Discretização temporal no dominio do tempo - Diferença finita central

Considerando o método das diferenças centrais ($\theta = 1/2$) temos a seguinte formulação.

$$\left([k^*] + \frac{\triangle t}{2}[k']\right)[q]_{(t)} = \left([k^*] - \frac{\triangle t}{2}[k']\right)[q]_{(t-\triangle t)} + \frac{\triangle t}{2}\left([Q']_{(t-\triangle t)} + [Q']_{(t)}\right) \tag{15}$$

Ao reemplazar os valores correspondentes e dividir entre $L$, temos:

$$\left(\frac{1}{30}[B] + \frac{c_v\triangle t}{12L^2}[A]\right)[q]_{(t)} = \left(\frac{1}{30}[B] + \frac{c_v\triangle t}{12L^2}[A]\right)[q]_{(t-\triangle t)} + \frac{\triangle t}{2}\left(\frac{\bar{p}L}{12}[C]_{(t-\triangle t)} + \frac{\bar{p}L}{12}[C]_{(t)}\right)$$

Para o presente problema o valor da pressão neutra prescrita equivale a zero $\dot{p} = 0$ e reemplazando o fator tempo na equação, temos:

$$\left(\frac{1}{30}[B] + \frac{\triangle T}{12}[A]\right)[q]_{(t)} = \left(\frac{1}{30}[B] + \frac{\triangle T}{12}[A]\right)[q]_{(t-\triangle t)} \tag{16}$$

onde a equação 16 tem a forma da seguinte equação.

$$[k][q]_t = [Q] \tag{17}$$

- Matriz local $[k]$

$$[k] = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} + \frac{\triangle T}{12}\begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix} \tag{18}$$

- Vetor local $[Q]$

$$[Q] = \left[\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} + \frac{\triangle T}{12}\begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix}\right][q]_{(t-\triangle t)}$$
$$+ \frac{\triangle t}{2}\left[\frac{\bar{p}L}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}_{(t-\triangle t)} + \frac{\bar{p}L}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}_{(t)}\right] \tag{19}$$

- Condições de contorno

$$u_e(0,t) = 0; \quad t > 0 \tag{20}$$

$$u_e(2,t) = 0; \quad t > 0 \tag{21}$$

- Condição inicial

$$u_e(z,t) = 100kPa; \quad 0 \leq z \leq 2 \tag{22}$$

- Matriz de correspondencia Global-local

| Global | Local | | | |
|---|---|---|---|---|
| | △1 | △2 | △3 | △4 |
| 1 | 1 | - | - | - |
| 2 | 3 | - | - | - |
| 3 | 2 | 1 | - | - |
| 4 | - | 3 | - | - |
| 5 | - | 2 | 1 | - |
| 6 | - | - | 3 | - |
| 7 | - | - | 2 | 1 |
| 8 | - | - | - | 3 |
| 9 | - | - | - | 2 |

- Montagem da matriz global

$$\left[ \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \frac{\triangle T}{12} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 28 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t)}$$

$$= \left[ \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right.$$

$$
-\frac{\triangle T}{12}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 28 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}\Bigg]\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t-\triangle t)}
$$

Neste problema serão considerado 10 intervalos de tempo com um $\triangle t = 1,85$ días, o que significa variações de fatores tempo iguais a $\triangle T = 1998/3125$.

Por tanto a matriz global ficaria da seguinte forma.

$$
\frac{10^{-5}}{3}\begin{bmatrix} 263776 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t)}
$$

$$
= \frac{10^{-5}}{3}\begin{bmatrix} -183776 & 275744 & -41968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 275744 & -351488 & 275744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41968 & 275744 & -367552 & 275744 & -41968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 275744 & -351488 & 275744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -41968 & 275744 & -367552 & 275744 & -41968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 275744 & -351488 & 275744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -41968 & 275744 & -367552 & 275744 & -41968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 275744 & -351488 & 275744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -41968 & 275744 & -183776 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t-\triangle t)}
$$

- Paso 1 : $t_1 = t_0 + \triangle t = 1,85$ días,

  No tempo $t = 0$ temos: $u_e^1 = u_e^2 = u_e^3 = u_e^4 = u_e^5 = u_e^6 = u_e^7 = u_e^8 = 100kPa$

  Além disso, o valor de ($u_e^1 = 0$).

$$
\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_1)} = 10^6 \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os escessos de pressão neutra nodais, os quais são

mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_1=1,85dias} = \begin{bmatrix} 0 \\ 58,8200 \\ 82,7037 \\ 92,8765 \\ 97,0059 \\ 98,7617 \\ 99,4671 \\ 99,7501 \\ 99,8210 \end{bmatrix} kPa \tag{23}$$

- Paso 2 : $t_2 = t_1 + \triangle t = 3,7$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_1$ forem calculados no paso 1, ver equação 23.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_2)} = \begin{bmatrix} 2130525 \\ 7360346 \\ 16908869 \\ 9543027 \\ 19462699 \\ 9918675 \\ 19891535 \\ 4986352 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os escessos de pressão neutra nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_2=3,7dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 21,9125 \\ 53,3776 \\ 74,4070 \\ 86,8361 \\ 93,4213 \\ 96,7046 \\ 98,1926 \\ 98,6074 \end{bmatrix} kPa \tag{24}$$

- Paso 3 : $t_3 = t_2 + \triangle t = 5,55$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_2$ forem calculados no paso 2, ver equação 24.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_3)} = \begin{bmatrix} 7016572 \\ 3296143 \\ 12509919 \\ 8062215 \\ 17773781 \\ 9509721 \\ 19342592 \\ 4895848 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os escessos de pressão neutra nodais, os quais são

mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_3=5,55dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 24,6352 \\ 40,4067 \\ 58,6676 \\ 73,6350 \\ 84,1212 \\ 90,5796 \\ 93,9532 \\ 94,9855 \end{bmatrix} kPa \tag{25}$$

- Paso 4 : $t_4 = t_3 + \triangle t = 7,4$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_3$ forem calculados no paso 3, ver equação 25.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_4)} = \begin{bmatrix} 2482928 \\ 5028370 \\ 10825357 \\ 6811230 \\ 15713598 \\ 8733569 \\ 18145041 \\ 4649531 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os escessos de pressão neutra nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_4=7,4dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 16,9236 \\ 37,6726 \\ 52,0867 \\ 64,7700 \\ 75,1837 \\ 82,7261 \\ 87,1934 \\ 88,6643 \end{bmatrix} kPa \tag{26}$$

- Paso 5 : $t_5 = t_4 + \triangle t = 9,25$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_4$ forem calculados no paso 4, ver equação 26.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_5)} = \begin{bmatrix} 4439551 \\ 2464269 \\ 9940082 \\ 6234813 \\ 14244996 \\ 7929037 \\ 16612441 \\ 4276838 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são

mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_5=9,25dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 17,343 \\ 30,5674 \\ 46,0547 \\ 58,4491 \\ 68,1584 \\ 75,2661 \\ 79,6459 \\ 81,1273 \end{bmatrix} kPa \tag{27}$$

- Paso 6 : $t_6 = t_5 + \triangle t = 11,1$ días,

 Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_5$ forem calculados no paso 5, ver equação 27.

 Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_6)} = \begin{bmatrix} 2332921 \\ 3793435 \\ 8358091 \\ 5568873 \\ 12914304 \\ 7234201 \\ 15129964 \\ 3893861 \end{bmatrix}$$

 Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_6=11,1dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 13,8868 \\ 29,6590 \\ 41,2834 \\ 52,4776 \\ 61,6662 \\ 68,3899 \\ 72,4610 \\ 73,8267 \end{bmatrix} kPa \tag{28}$$

- Paso 7 : $t_7 = t_6 + \triangle t = 12,95$ días,

 Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_6$ forem calculados no paso 6, ver equação 28.

 Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_7)} = \begin{bmatrix} 3297248 \\ 2109247 \\ 8138055 \\ 4984571 \\ 11653559 \\ 6547187 \\ 13746202 \\ 3542923 \end{bmatrix}$$

 Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são

mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_7=12,95dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 13,6525 \\ 24,9009 \\ 37,5549 \\ 47,5490 \\ 55,8013 \\ 61,9610 \\ 65,7622 \\ 67,0448 \end{bmatrix} kPa \tag{29}$$

- Paso 8 : $t_8 = t_7 + \triangle t = 14,8$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_7$ forem calculados no paso 7, ver equação 29.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_8)} = \begin{bmatrix} 2719554 \\ 2067584 \\ 2972221 \\ 6777529 \\ 4620262 \\ 10583238 \\ 5937244 \\ 12457951 \\ 3211928 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_8=14,8dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 11,5120 \\ 24,0202 \\ 33,6461 \\ 43,0672 \\ 50,6056 \\ 56,1838 \\ 59,6151 \\ 60,7772 \end{bmatrix} kPa \tag{30}$$

- Paso 9 : $t_9 = t_8 + \triangle t = 16,65$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_8$ forem calculados no paso 8, ver equação 30.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_9)} = \begin{bmatrix} 2577096 \\ 1815958 \\ 6672748 \\ 4036464 \\ 9580607 \\ 5384087 \\ 11297302 \\ 2911194 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são

mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_9=16,65dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 11,0420 \\ 20,5200 \\ 30,8005 \\ 38,9063 \\ 45,7982 \\ 50,9043 \\ 54,0370 \\ 55,0915 \end{bmatrix} kPa \tag{31}$$

- Paso 10 : $t_10 = t_9 + \triangle t = 18,5$ días,

Os excessos de pressão neutra do tempo $t = t_9$ forem calculados no paso 9, ver equação 31.

Além disso, o valor de $(u_e^1 = 0)$.

$$\begin{bmatrix} 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 527552 & -235744 & 21968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235744 & 671488 & -235744 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21968 & -235744 & 263776 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{(t=t_10)} = \begin{bmatrix} 1777136 \\ 2362832 \\ 5560440 \\ 3824009 \\ 8667216 \\ 4874080 \\ 10234349 \\ 2639531 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os esxessos de pressão neutra nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor.

$$\begin{bmatrix} u_e^1 \\ u_e^2 \\ u_e^3 \\ u_e^4 \\ u_e^5 \\ u_e^6 \\ u_e^7 \\ u_e^8 \\ u_e^9 \end{bmatrix}_{t=t_{10}=18,5dias} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 9,5229 \\ 19,5865 \\ 27,5835 \\ 35,3950 \\ 41,5259 \\ 46,1213 \\ 48,9601 \\ 49,9226 \end{bmatrix} kPa \tag{32}$$

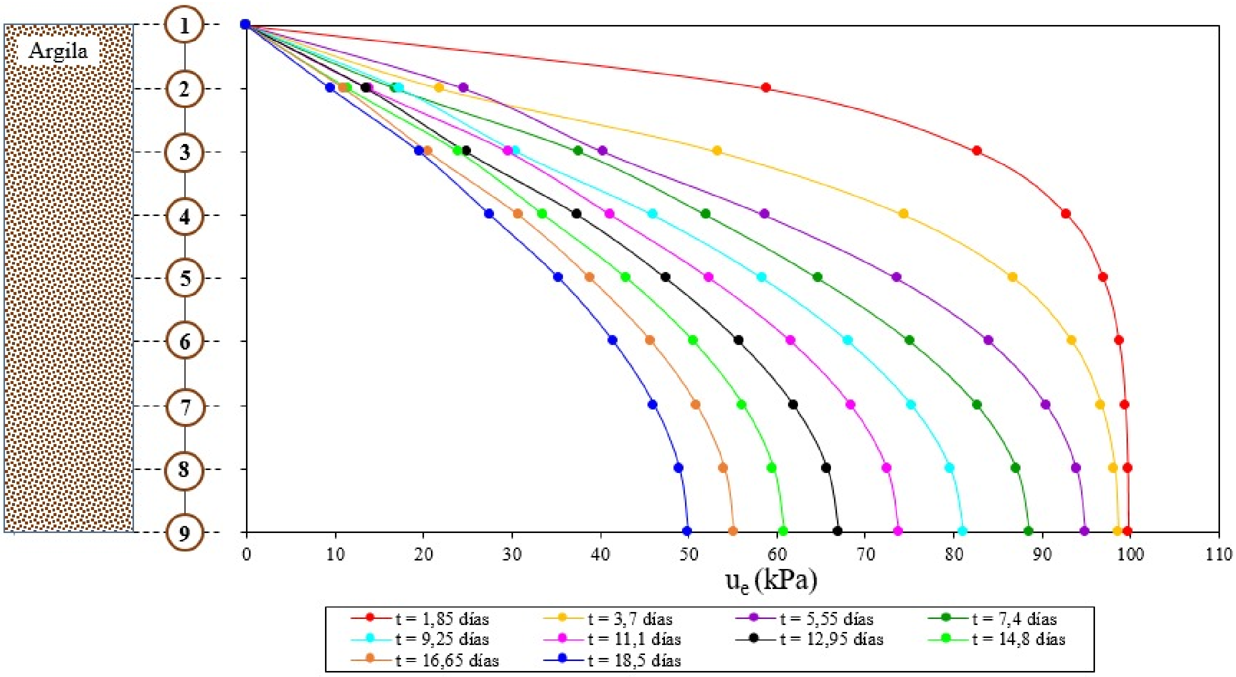
- Resumen

O resumen dos resultados das pressões neutras nódais $(u_e)$ são nostradas na seguinte tabela e a Fig. 3.

Tabela 1: Excesso de pressão neutra nodai $(u_e)$ respeito do tempo

| Nós | t (días) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,85 | 3,7 | 5,55 | 7,4 | 9,25 | 11,1 | 12,95 | 14,8 | 16,65 | 18,5 |
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 58,8200 | 21,9125 | 24,6352 | 16,9236 | 17,3430 | 13,8868 | 13,6525 | 11,5120 | 11,0420 | 9,5229 |
| 3 | 82,7037 | 53,3776 | 40,4067 | 37,6726 | 30,5674 | 29,6590 | 24,9009 | 24,0202 | 20,5200 | 19,5865 |
| 4 | 92,8765 | 74,4070 | 58,6676 | 52,0867 | 46,0547 | 41,2834 | 37,5549 | 33,6461 | 30,8005 | 27,5835 |
| 8 | 97,0059 | 86,8361 | 73,6350 | 64,7700 | 58,4491 | 52,4776 | 47,5490 | 43,0672 | 38,9063 | 35,3950 |
| 6 | 98,7617 | 93,4213 | 84,1212 | 75,1837 | 68,1584 | 61,6662 | 55,8013 | 50,6056 | 45,7982 | 41,5259 |
| 7 | 99,4671 | 96,7046 | 90,5796 | 82,7261 | 75,2661 | 68,3899 | 61,9610 | 56,1838 | 50,9043 | 46,1213 |
| 8 | 99,7501 | 98,1926 | 93,9532 | 87,1934 | 79,6459 | 72,4610 | 65,7622 | 59,6151 | 54,037 | 48,9601 |
| 9 | 99,8210 | 98,6074 | 94,9855 | 88,6643 | 81,1273 | 73,8267 | 67,0448 | 60,7772 | 55,0915 | 49,9226 |

Figura 3: Evolução de $u_e$ nodais ao longo do tempo (até $t = 18,5$ días)




Finalmente, uma comparação dos resultados analíticos e numéricos de excessos de pressão neutra nodais no tempo $t = 18,5$ días pode ser observada na Fig. 4

Figura 4: Evolução de $u_e$ ao longo do tempo (até $t = 18,5$ días)