Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Geotecnia

LISTA N^o 1

Karen Ninanya

(1812565)

Professor .... Celso Romanel
Disciplina .... MEC 2532 - Métoddos Numéricos em Engenharia Civil
Data .... 23 de Setembro, 2018

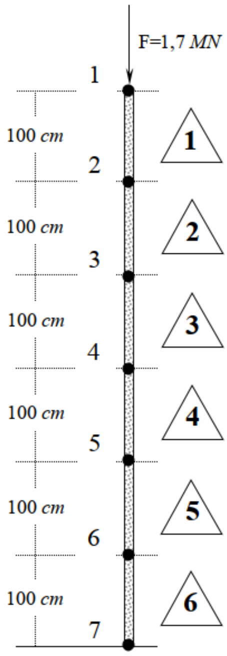
Questão 1

Considere uma coluna con $6m$ de altura e área de seção transversal $A = 100cm^2$ suportando em seu topo um força vertical de compressão $F = 1,7MN$. O módulo de Young do material que forma a coluna é $E = 20MN/cm^2$.
Execute duas análises pelo método dos elemetos finitos. A primera com elementos lineares de 2 nós com comprimento $L = 1m$ cada (total de 6 elementos lineares ao longo da altura da coluna). A segunda análise com 3 elementos quadráticos de 3 nós com comprimento $L = 2m$ cada (total de 3 elementos quadráticos ao longo da altura da coluna).
Plote a variação das tensões normais e dos deslocamentos verticais ao longo da coluna.
Como é assegurada a continuidades dos deslocamentos entre elementos finitos?
Como é assegurada a continuidade dos deslocamentos no interior de cada elemento?

Solução 1 a)

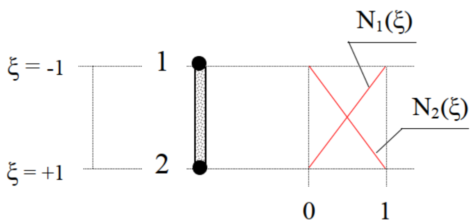
Método dos elementos finitos com elementos de 2 nós(Funções de interpolação lineares)

Figura 1: Vista global da coluna con 6 elementos



- Funções de interpolação

Figura 2: Vista local de um elemento da coluna



Apartir da equação 1 foram obtidos as equações de interpolação para os nós do elemento.

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \tag{1}$$

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{2}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3}$$

- Deslocamento

O deslocamento ao longo do elemento finito são aproximados mediante as funções de interpolação, de formal geral são:

$$v = \sum N_i v_i \tag{4}$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2$$

$$[v] = [N][q]$$

sendo:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Deformação

$$\epsilon_{yy} = \frac{d}{dy}[N(\xi)][q] \tag{7}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{d}{d\xi}[N(\xi)]\frac{d\xi}{dy}[q]$$

sendo $\frac{d\xi}{dy}$ ou determinante do Jacobiano (siempre positivo) igual a $\frac{2}{L}$ (Ł = Comprimento de cada elemento de coluna), temos:

$$\epsilon_{yy} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d}{d\xi}[N(\xi)][q] \tag{8}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1-\xi}{2} \end{bmatrix}[q]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}[q] \tag{9}$$

onde:

$$B = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

- Tensões

$$[\triangle\sigma] = [C][\triangle\epsilon] \tag{11}$$

$$[\sigma] = [C][\epsilon] - [C][\epsilon_0] + [\sigma_0] \tag{12}$$

onde $[C]$ e a matriz constitutiva, neste caso igual à E (para o caso 1D e elastico).

- Equação de elemento finito

$$\begin{aligned} \Pi_p = \frac{1}{2}\int_v [q]^T[B]^T[C][B][q]dv - \int_v [q]^T[B]^T[C][\epsilon_0]dv + \int_v [q]^T[B]^T[\sigma_0]dv \\ - \int_v [q]^T[N]^T[F]dv - \int_{S_1}[q]^T[N]^T[\phi]dS - [q]^T[p] \end{aligned} \tag{13}$$

Ao derivar a equação 13, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial [q]} = 0 = \int_v [B]^T[C][B][q]dv - \int_v [B]^T[C][\epsilon_0]dv + \int_v [B]^T[\sigma_0]dv \\ - \int_v [N]^T[F]dv - \int_{S_1}[N]^T[\phi]dS - [p] \end{aligned} \tag{14}$$

Ao ordenar obtemos $[k][q] = [Q]$

$$\left[\int_v [B]^T[C][B]dv\right][q] = \int_v [B]^T[C][\epsilon_0]dv - \int_v [B]^T[\sigma_0]dv + \int_v [N]^T[F]dv + \int_{S_1}[N]^T[\phi]dS + [p] \tag{15}$$

onde:

$$[k] = \int_v [B]^T [C][B] dv \tag{16}$$

$$[Q] = \int_v [B]^T [C][\epsilon_0] dv - \int_v [B]^T [\sigma_0] dv + \int_v [N]^T [F] dv + \int_{S_1} [N]^T [\phi] dS + [p] \tag{17}$$

- Rigidez

Reemplazandos a matriz [B] na equação 16, temos:

$$[k] = \int_v \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dv \tag{18}$$

$$[k] = \int_{y_1}^{y_2} \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} A dy$$

sendo: $dy = \frac{L}{2}\xi$.

$$[k] = \int_{+1}^{-1} \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k] = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xi \Big|_{-1}^{+1}$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Reemplazando as propriedades do elemento na equação 19 é obtida a matriz de rigidez de todos os elementos da coluna.

$$[k]^{(l)} = \frac{100 \cdot 20}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} MN/cm$$

$$[k]^{(l)} = 20000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} kN/cm$$

- Matriz $[Q]$

Considerando as condições iniciais $[\epsilon_0] = [\sigma_0] = [0]$ na equação 17.

$$[Q] = \int_v [N]^T [F] dv + \int_{S_1} [N]^T [\phi] dS + [p]$$

$$[Q] = \int_{y_1}^{y_2} [N]^T \gamma A dy + \int_{y_1}^{y_2} [N]^T [\phi] p \cdot dy + [p] \tag{20}$$

$$[Q] = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma AL}{4} \begin{bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{bmatrix} d\xi + \int_{-1}^{+1} \frac{Lt}{4} \begin{bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{bmatrix} d\xi + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \left(\frac{\gamma AL + Lt}{4} \right) \begin{bmatrix} \xi - \xi^2/2 \\ \xi + \xi^2/2 \end{bmatrix} \Bigg|_{-1}^{+1} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \left(\frac{\gamma AL + Lt}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

As matrices [Q] de cada elemento são:

$$[Q]^{(l)} = \left(\frac{0 \cdot 100 \cdot 100 + 100 \cdot 0}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \end{bmatrix} kN \tag{22}$$

$$[Q]^{(2)} = [Q]^{(3)} = [Q]^{(4)} = [Q]^{(5)} = [Q]^{(6)} = 25 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN \tag{23}$$

- Matriz de correspondencia Global-Local

Global	Local					
	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$	$\triangle_4$	$\triangle_5$	$\triangle_6$
1	1	-	-	-	-	-
2	2	1	-	-	-	-
3	-	2	1	-	-	-
4	-	-	2	1	-	-
5	-	-	-	2	1	-
6	-	-	-	-	2	1
7	-	-	-	-	-	2

- Montagem do sistema de equaçoes globais

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)}+k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)}+k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)}+k_{11}^{(5)} & k_{12}^{(5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(5)} & k_{22}^{(5)}+k_{11}^{(6)} & k_{12}^{(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(6)} & k_{22}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)}+Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)}+Q_1^{(3)} \\ Q_2^{(3)}+Q_1^{(4)} \\ Q_2^{(4)}+Q_1^{(5)} \\ Q_2^{(5)}+Q_1^{(6)} \\ Q_2^{(6)} \end{bmatrix}$$

$$20000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

Introducção das condições de contorno ($v_7 = 0$).

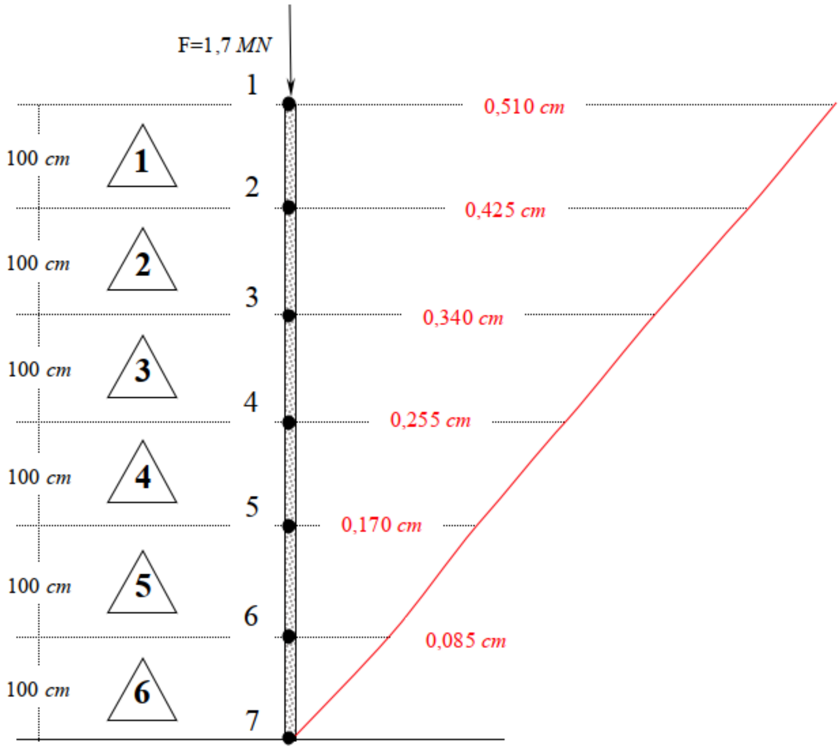
$$20000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

- Variavel primaria - Deslocamentos

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os deslocamentos nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor e a Fig. 3.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,510 \\ 0,425 \\ 0,340 \\ 0,255 \\ 0,170 \\ 0,085 \end{bmatrix} cm$$

Figura 3: Deslocamentos nodais



- Variavel secundarias - Tensão-Deformação

Com a equação 9 foram calculados as deformações para cada elemento da coluna.

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}[q]$$

$$\epsilon_{yy}^{(1)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,510 \\ 0,425 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{24}$$

$$\epsilon_{yy}^{(2)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,425 \\ 0,340 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{25}$$

$$\epsilon_{yy}^{(3)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,340 \\ 0,255 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{26}$$

$$\epsilon_{yy}^{(4)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,255 \\ 0,170 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{27}$$

$$\epsilon_{yy}^{(5)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,170 \\ 0,085 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{28}$$

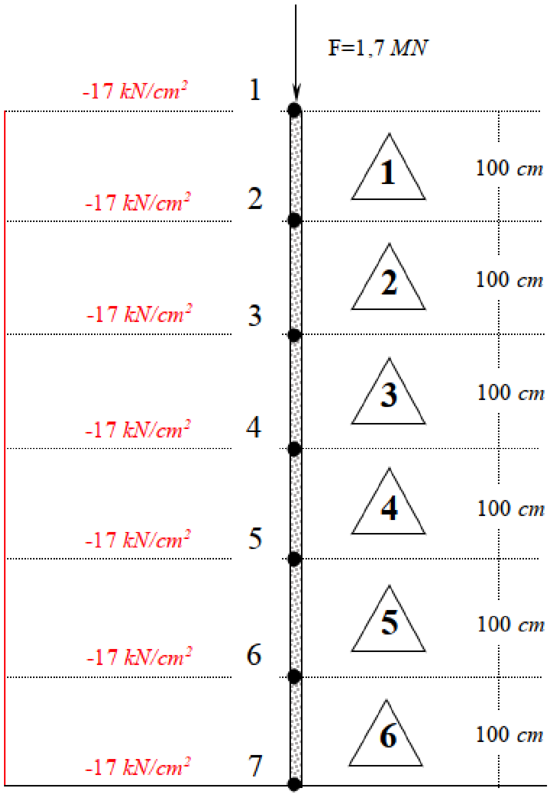
$$\epsilon_{yy}^{(6)} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,085 \\ 0,000 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{29}$$

Logo, a tensão de cada elemento pode ser calculada com a equação 12.

$$[\sigma] = [C][\epsilon]$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(4)} = \sigma_{yy}^{(5)} = \sigma_{yy}^{(6)} = 20 \cdot \frac{-0,085}{100} = -17kN/cm^2 \tag{30}$$

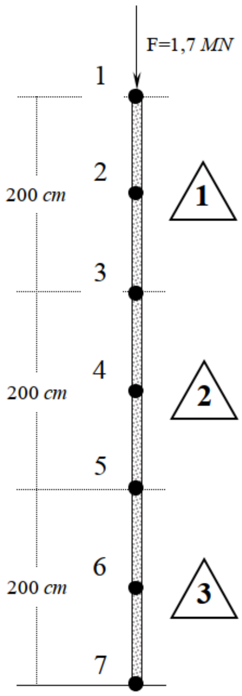
Figura 4: Tensões ao longo do elemento



Solução 1 b)

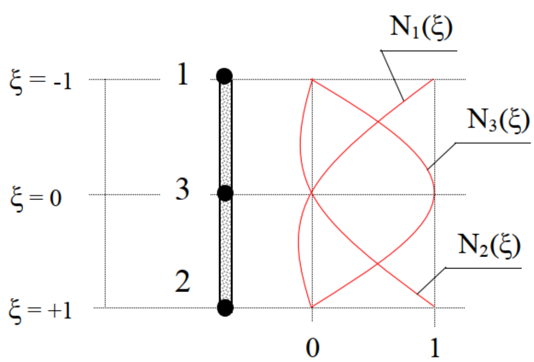
Método dos elementos finitos com elementos de 3 nós (Funções de interpolação quadraticas)

Figura 5: Vista global da coluna con 3 elementos



- Funções de interpolação

Figura 6: Vista local de um elemento da coluna



Apartir da equação 1 foram obtidos as equações de interpolação para os nós do elemento.

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \tag{31}$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \tag{32}$$

$$N_3(\xi) = (1 - \xi)(1 + \xi) \tag{33}$$

- Deslocamento

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \tag{34}$$

$$[v] = [N][q] \tag{35}$$

sendo:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

- Deformação

A deformação é obtida apartir da equação 8.

$$\epsilon_{yy} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d}{d\xi}[N(\xi)][q]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{2}{L} \cdot \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} & \frac{\xi(\xi+1)}{2} & (1-\xi)(1+\xi) \end{bmatrix} [q]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} [q] \tag{38}$$

onde:

$$[B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} \tag{39}$$

- Rigidez

Reemplazandos a matriz [B] na equação 16, temos:

$$[k] = \int_v [B]^T [C][B] dv$$

$$[k] = \int_v \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 \\ 2\xi + 1 \\ -4\xi \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} dv$$

$$[k] = \int_{y_1}^{y_2} \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 \\ 2\xi + 1 \\ -4\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix} A dy$$

sendo: $dy = \frac{L}{2}\xi$.

$$[k] = \int_{+1}^{-1} \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 4\xi^2 - 4\xi + 1 & 4\xi^2 - 1 & -8\xi^2 + 4\xi \\ 4\xi^2 - 1 & 4\xi^2 + 4\xi + 1 & -8\xi^2 - 4\xi \\ -8\xi^2 + 4\xi & -8\xi^2 - 4\xi & 16\xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$[k] = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 4\xi^3/3 - 2\xi^2 + \xi & 4\xi^3/3 - \xi & -8\xi^3/3 + 2\xi^2 \\ 4\xi^3/3 - \xi & 4\xi^3/3 + 2\xi^2 + \xi & -8\xi^3/3 - 2\xi^2 \\ -8\xi^3/3 + 2\xi^2 & -8\xi^3/3 - 2\xi^2 & 16\xi^3/3 \end{bmatrix} \Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$[k] = \frac{AE}{6L} \begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Reemplazando as propriedades do elemento na equação 40 é obtida a matriz de rigidez de todos os elementos da coluna.

$$[k] = \frac{100 \cdot 20}{6 \cdot 200} \begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix} MN/cm$$

$$[k] = \frac{5000}{3} \begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 2 & 14 & -16 \\ -16 & -16 & 32 \end{bmatrix} kN/cm$$

- Matriz $[Q]$

Da equação 20 pode-se obter a matriz $[Q]$

$$[Q] = \int_{y_1}^{y_2} [N]^T \gamma A dy + \int_{y_1}^{y_2} [N]^T [\phi] p \cdot dy + [p]$$

$$[Q] = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma AL}{4} \begin{bmatrix} \xi(\xi-1) \\ \xi(\xi+1) \\ 2(1-\xi)(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi + \int_{-1}^{+1} \frac{Lt}{4} \begin{bmatrix} \xi(\xi-1) \\ \xi(\xi+1) \\ 2(1-\xi)(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \\ p_3^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \left(\frac{\gamma AL + Lt}{4}\right) \begin{bmatrix} \xi^3/3 - \xi^2/2 \\ \xi^3/3 + \xi^2/2 \\ 2\xi^3/3 - 2\xi \end{bmatrix} \Bigg|_{-1}^{+1} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \\ p_3^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \left(\frac{\gamma AL + Lt}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \\ p_3^{(l)} \end{bmatrix} \tag{41}$$

As matrices [Q] de cada elemento são:

$$[Q] = \left(\frac{0 \cdot 100 \cdot 200 + 100 \cdot 0}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \\ p_3^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$[Q]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN \tag{42}$$

$$[Q]^{(2)} = [Q]^{(3)} = [Q]^{(4)} = [Q]^{(5)} = [Q]^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN \tag{43}$$

- Graus de libertade

Global	Local		
	△1	△2	△3
1	1	-	-
2	3	-	-
3	2	1	-
4	-	3	-
5	-	2	1
6	-	-	3
7	-	-	2

- Montagem da matriz global

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{13}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^{(3)} & k_{33}^{(3)} & k_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{23}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \\ Q_2^{(1)} + Q_1^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \\ Q_2^{(2)} + Q_1^{(3)} \\ Q_3^{(3)} \\ Q_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{5000}{3} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 28 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

Introducção das condições de contorno ($v_7 = 0$).

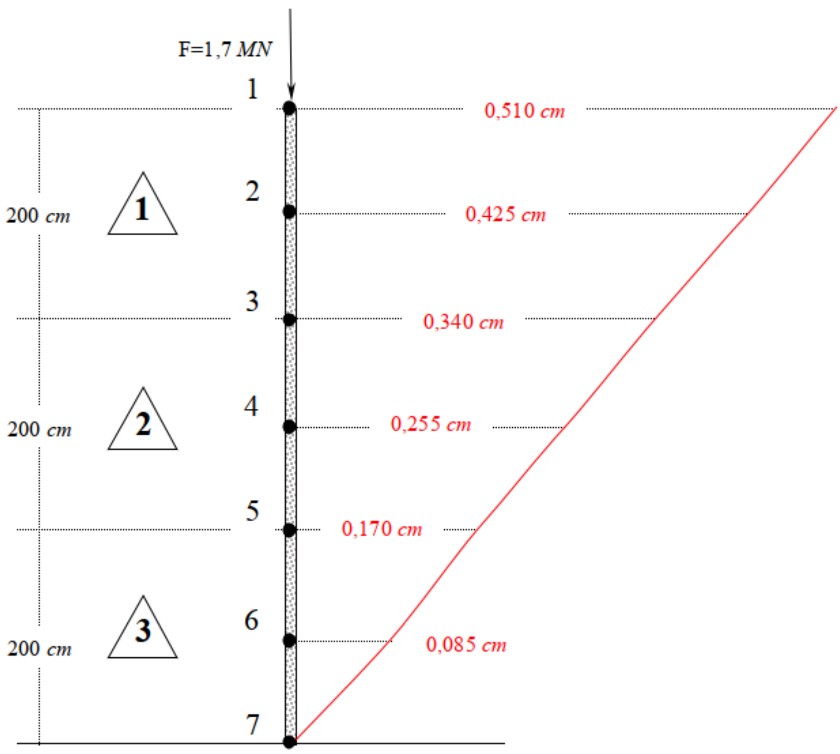
$$\frac{5000}{3}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 28 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 32 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -16 & 28 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

- Variaveis primarias - Deslocamentos

Ao resolver a matriz com o MatLab forem obtidos os deslocamentos nodais, os quais são mostrados no seguinte vetor e a Fig. 7.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,510 \\ 0,425 \\ 0,340 \\ 0,255 \\ 0,170 \\ 0,085 \end{bmatrix} cm$$

Figura 7: Deslocamentos da coluna con 3 elementos



- Variaveis secundarias - Tensão-Deformação

Apartir da equação 38 as deformações para cada elemento da coluna foram calculados.

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 2\xi - 1 & 2\xi + 1 & -4\xi \end{bmatrix}[q]$$

$$\epsilon_{yy}^{(1)} = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,510 \\ 0,340 \\ 0,425 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{44}$$

$$\epsilon_{yy}^{(2)} = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,340 \\ 0,170 \\ 0,255 \end{bmatrix} = -0,085\% \tag{45}$$

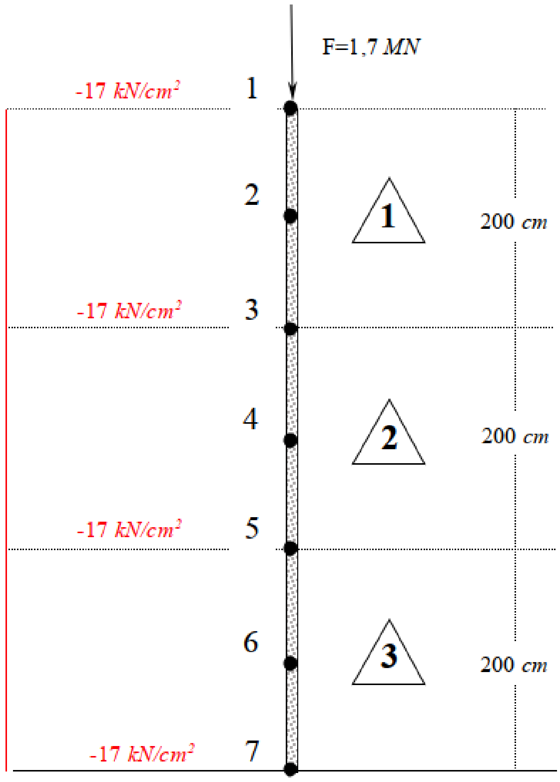
$$\epsilon_{yy}^{(3)} = \frac{1}{200}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,170\\0,000\\0,085\end{bmatrix} = -0,085\% \tag{46}$$

Logo, a tensão de cada elemento pode ser calculada com a equação 12.

$$[\sigma] = [C][\epsilon]$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(4)} = \sigma_{yy}^{(5)} = \sigma_{yy}^{(6)} = 20 \cdot \frac{-0,085}{100} = -17kN/cm^2 \tag{47}$$

Figura 8: Tensões ao longo do elemento



Solução 1 c)

Como é asegurada a continuidade dos deslocamentos entre elementos finitos?

A compatibilidade na interface entre elementos finitos adjacentes é satisfeita quando é colocado um numero de nós que determinam unicamente a solução aproximada.

Como é asegurada a continuidade dos deslocamentos no interior de cada elemento?

A continuidade ou compatibilidade dos deslocamentos é satisfeita no interior do elemento se o campo de deslocamentos asumidos for continui, isto é, as funções de interpolação $[N]$ forem matematicamente continuas.

$$[v] = [N][q]$$