PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO, RJ, BRASIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL, GEOTECNIA

LISTA Nº 1

Karen Ninanya

(1812565)

Professor .... Sergio Fontoura
Disciplina .... CIV 2534 - Mecânica das rochas aplicadas
Data .... 16 de Outubro, 2018

Questão 1

1. O objetivo deste exercício é trabalhar o conceito o conceito de distribução de tensões ao redor de uma abertura subterrânea.
2. Para tal será utilizada uma abertura circular num meio rochoso homogêneo isotrópico e linear elastica.
3. Considerar um estado de tensões *in situ* definido por $\sigma_v = 40\ MPa$ e $\sigma_h = 30\ MPa$.
4. Considerar uma abertura de raio $4,5\ m$.
5. Considerar uma rocha cuja resistência é definida por uma resistência à compressão simples de 20 MPa e um ângulo de atrito de $35°$.
6. Determine a distribução de tensões utilizando as equações de Kirsch e estime a região de plastificação ao redor da abertura.

Solução 1

Método dos elementos finitos

- Discretização

A discretizazção do medio poroso foe feita a partir de elementos de 3 nós (T3) , como pode ser observado na figura 1. A vista local do elemento é mostrado na figura 2.

Figura 1: Vista global do problema com elementos de três nós (T3)

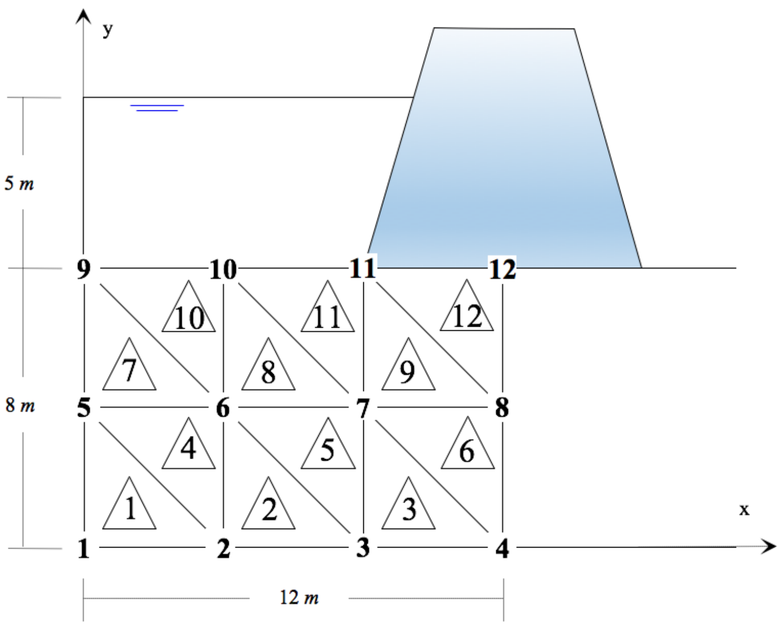
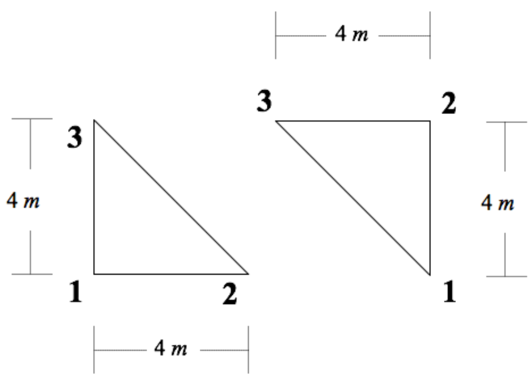


Figura 2: Vista do elemento T3



As coordenadas dos nós de acordo à figura 1 são mostradas na seguinte tabela.

Coordenadas	Nós											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x (m)	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
y (m)	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8

- Formulação variacional

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_A [q]^T[B]^T[R][B][q]dA - \int_A \bar{Q}[q]^T[N]^T dA - \int_{S_1} \bar{q}[q]^T[N]^T dS \tag{1}$$

Ao derivar respecto de $[q]$, temos

$$\frac{\partial\Omega}{\partial[q]} = 0 = \int_A [B]^T[R][B][q]dA - \int_A \bar{Q}[N]^T dA - \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS \tag{2}$$

$$\left[\int_A [B]^T[R][B]dA\right][q] = \left[\int_A \bar{Q}[N]^T dA + \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS\right] \tag{3}$$

Agrupando.

$$[k][q] = [Q] \tag{4}$$

- Matriz elemental $[k]$

Da equação 3, temos que a matriz elemental $[k]$ é a seguinte.

$$[k] = \int_A [B]^T[R][B]dA \tag{5}$$

$$[k] = A[B]^T[R][B] \tag{6}$$

onde o calculo das matrices $[R]$ e $[B]$ é da seguinte manera.

$$[R] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \tag{8}$$

sendo o calculo das áreas (A) da seguinte forma.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Então, a matriz $[k]$ elemental ficaria:

$$[k] = \frac{1}{2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \tag{10}$$

onde $k_x = k_y = k = 1x10^{-6} m/s$
Por tanto as matrices $[k]$ elementares do problema são os seguintes.

$$[k]^{1,3,5,7,9,11} = \frac{k}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[k]^{2,4,6,8,10,12} = \frac{k}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Vetor $[Q]$ elementar

Logo, o vetor $[Q]$ de acordo a equação 3 e o seguinte.

$$[Q] = \int_A \bar{Q}[N]^T dA + \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS$$

Sendo o valor do fluxo retirao ou injetado $\bar{Q} = 0$ os vetores $[Q]$ elementares são os mostrados a continuação.

$$[Q]^1 = [Q]^2 = [Q]^3 = [Q]^4 = [Q]^5 = [Q]^6 = [Q]^7 = [Q]^8 = [Q]^9 = [Q]^{10} = [Q]^{11} = [Q]^{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de correspondencia Global-local

Global	Local											
	△1	△2	△3	△4	△5	△6	△7	△8	△9	△10	△11	△12
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	2	1	-	-	-	-	-	-
5	3	3	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
6	-	2	3	3	-	-	2	1	1	-	-	-
7	-	-	-	2	3	3	-	-	2	1	1	-
8	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	2	1
9	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	2	3	3	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-		2	3	3
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2

- Montagem da matriz global

$$\frac{k}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

- Introdução das condições de contorno

Sendo o valor das carga hidraulica h_1, h_4, h_5, h_8, h_9, h_{10}, h_{11} e h_{12} valores conhecidos o sistema linear fico da seguinte forma.

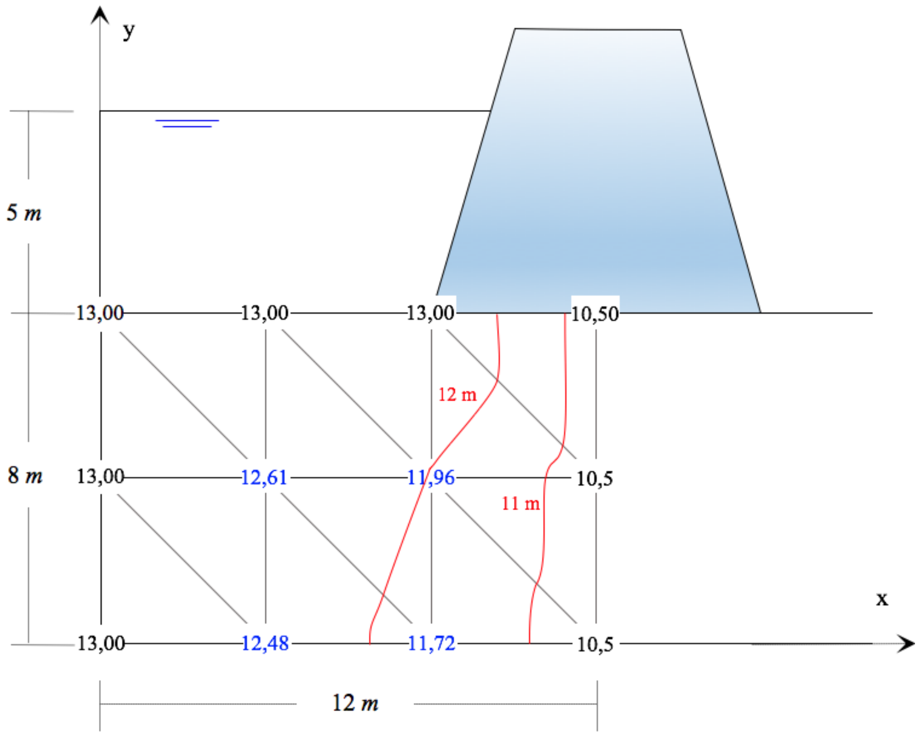
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_4 \\ 2(h_5 + h_{10}) \\ 2(h_8 + h_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,00 \\ 10,50 \\ 52,00 \\ 47,00 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ao resolver o sistema linear no MatLab os valores das cargas hidraulicas h_2, h_3, h_6 e h_7 forem obtidos.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,00 \\ 12,48 \\ 11,72 \\ 10,50 \\ 13,00 \\ 12,61 \\ 11,96 \\ 10,50 \\ 13,00 \\ 13,00 \\ 13,00 \\ 10,50 \end{bmatrix} m \tag{15}$$

Na figura 3 é mostrado as cargas hidraulicas nodais.

Figura 3: Cargas hidraulicas em m e linhas equipotenciais de 11 m e 12 m



- Variavel secundaria - Velocidade de fluxo

O calculo da velocidade de fluxo é determinada a partir da seguinte equiação.

$$[v] = -[R][g] \tag{16}$$

sendo $[g] = [B][q]$, temos:

$$[v] = -[R][B][q] \tag{17}$$

$$[v] = -\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Reemplazando os correspondentes valores na equação 18 para cada elementos temos os correspondentes vetores de velocidade.

$$[v]^1 = \begin{bmatrix} 1,30 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{19}$$

$$[v]^2 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{20}$$

$$[v]^3 = \begin{bmatrix} 1,90 \\ -0,33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{21}$$

$$[v]^4 = \begin{bmatrix} 1,63 \\ -0,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{22}$$

$$[v]^5 = \begin{bmatrix} 3,05 \\ -0,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{23}$$

$$[v]^6 = \begin{bmatrix} 3,65 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{24}$$

$$[v]^7 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{25}$$

$$[v]^8 = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,98 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{26}$$

$$[v]^9 = \begin{bmatrix} 1,63 \\ -0,98 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{27}$$

$$[v]^{10} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -2,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{28}$$

$$[v]^{11} = \begin{bmatrix} 3,65 \\ -2,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{29}$$

$$[v]^{12} = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{30}$$

Figura 4: Velocidades nas direções x e y no meio poroso