Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Geotecnia

# LISTA Nº 4

Karen Ninanya

(1812565)

Professor ........................................ Celso Romanel
Disciplina ........................................ CIV 2532 - Métodos Numéricos em Engenharia Civil
Data ........................................ 15 de Outubro, 2018

# Questão

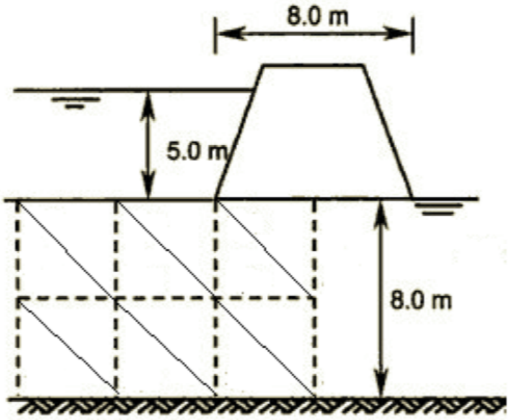
Pede-se determinar pelo método dos elementos finitos, considerando elementos de três nós (T3), as cargas hidráulicas nodais e velocidades de fluxo nos elementos da malha da Fig. 1. Admitir um coeficiente de permeabilidade isotrópico do solo de fundação $k = 1x10^{-4}$ cm/s.

Considerar a origem dos eixes cartesianos no nó inferior esquerdo. Condições de contorno em relação ao nivel de referência na interface solo-rocha impermeável:

a) Linha equipotencial máxima $h = 13$ m.
b) Contorno vertical esquerdo, admitindo ausência de fluxo $h = 13$ m.
c)Linha equipotencial sob o centro da barragem, devido à simetria do problema $h = 10,5$ m.

Os elementos T3 da malha são todos iguais, representados por triângulos retângulos com catetos de 4 m.

Figura 1: Esquema geral do problema



# Solução

## *Método dos elementos finitos*

- Discretização

A discretização do medio poroso foi feita a partir de elementos de 3 nós (T3) , como pode ser observado na figura 2. A vista local do elemento é mostrado na figura 3.

Figura 2: Vista global do problema com elementos de três nós (T3)

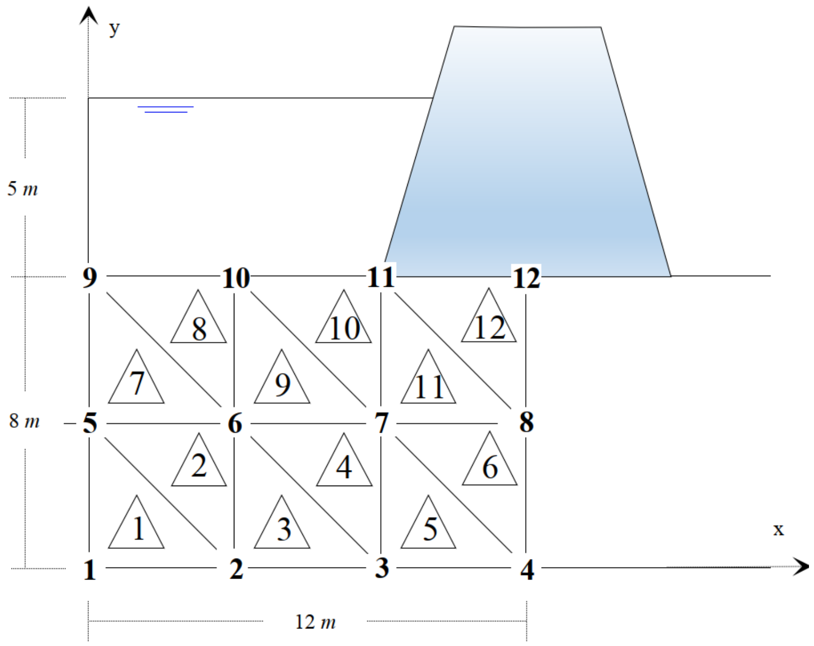
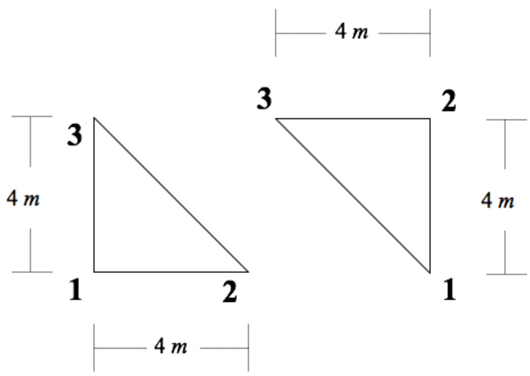



Figura 3: Vista do elemento T3




As coordenadas dos nós de acordo à figura 2 são mostradas na seguinte tabela.

| Coordenadas | Nós | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| x (m) | 0 | 4 | 8 | 12 | 0 | 4 | 8 | 12 | 0 | 4 | 8 | 12 |
| y (m) | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 |

Sendo a equação de elementos finitos:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_A [q]^T[B]^T[R][B][q]dA - \int_A \bar{Q}[q]^T[N]^T dA - \int_{S_1} \bar{q}[q]^T[N]^T dS \tag{1}$$

Ao derivar respecto de $[q]$, temos

$$\frac{\partial\Omega}{\partial[q]} = 0 = \int_A [B]^T[R][B][q]dA - \int_A \bar{Q}[N]^T dA - \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS \tag{2}$$

$$\left[\int_A [B]^T[R][B]dA\right][q] = \left[\int_A \bar{Q}[N]^T dA + \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS\right] \tag{3}$$

Agrupando.

$$[k][q] = [Q] \tag{4}$$

- Matriz elemental $[k]$

Da equação 3, temos que a matriz elemental $[k]$ é a seguinte.

$$[k] = \int_A [B]^T[R][B]dA \tag{5}$$

$$[k] = A[B]^T[R][B] \tag{6}$$

onde o cálculo das matrices $[R]$ e $[B]$ é da seguinte manera.

$$[R] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \tag{8}$$

sendo o calculo das áreas $(A)$ da seguinte forma.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Então, a matriz $[k]$ elemental ficaria:

$$[k] = \frac{1}{2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \tag{10}$$

onde $k_x = k_y = k = 1x10^{-6}m/s$

Por tanto as matrices $[k]$ elementares do problema são os seguintes.

$$[k]^{1,3,5,7,9,11} = \frac{k}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[k]^{2,4,6,8,10,12} = \frac{k}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Vetor $[Q]$ elementar

Logo, o vetor $[Q]$ de acordo a equação 3 e o seguinte.

$$[Q] = \int_A \bar{Q}[N]^T dA + \int_{S_1} \bar{q}[N]^T dS$$

Sendo o valor do fluxo retirao ou injetado $\bar{Q} = 0$ e o fluxo preescrito $\bar{q} = 0$ os vetores $[Q]$ elementares são os mostrados a continuação.

$$[Q]^1 = [Q]^2 = [Q]^3 = [Q]^4 = [Q]^5 = [Q]^6 = [Q]^7 = [Q]^8 = [Q]^9 = [Q]^{10} = [Q]^{11} = [Q]^{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de correspondencia Global-local

| Global | Local | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | △1 | △2 | △3 | △4 | △5 | △6 | △7 | △8 | △9 | △10 | △11 | △12 |
| 1 | 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | 2 | 1 | 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | - | 2 | 1 | 1 | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 2 | 1 | - | - | - | - | - | - |
| 5 | 3 | 3 | - | - | - | - | 1 | - | - | - | - | - |
| 6 | - | 2 | 3 | 3 | - | - | 2 | 1 | 1 | - | - | - |
| 7 | - | - | - | 2 | 3 | 3 | - | - | 2 | 1 | 1 | - |
| 8 | - | - | - | - | - | 2 | - | - | - | - | 2 | 1 |
| 9 | - | - | - | - | - | - | 3 | 3 | - | - | - | - |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | 2 | 3 | 3 | - | - |
| 11 | - | - | - | - | - | - | - | - | | 2 | 3 | 3 |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2 |

- Montagem da matriz global

$$\frac{k}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

- Introdução das condições de contorno

Sendo o valor das cargas hidráulicas $h_1$, $h_4$, $h_5$, $h_8$, $h_9$, $h_{10}$, $h_{11}$ e $h_{12}$ valores conhecidos o sistema linear ficou da seguinte forma.

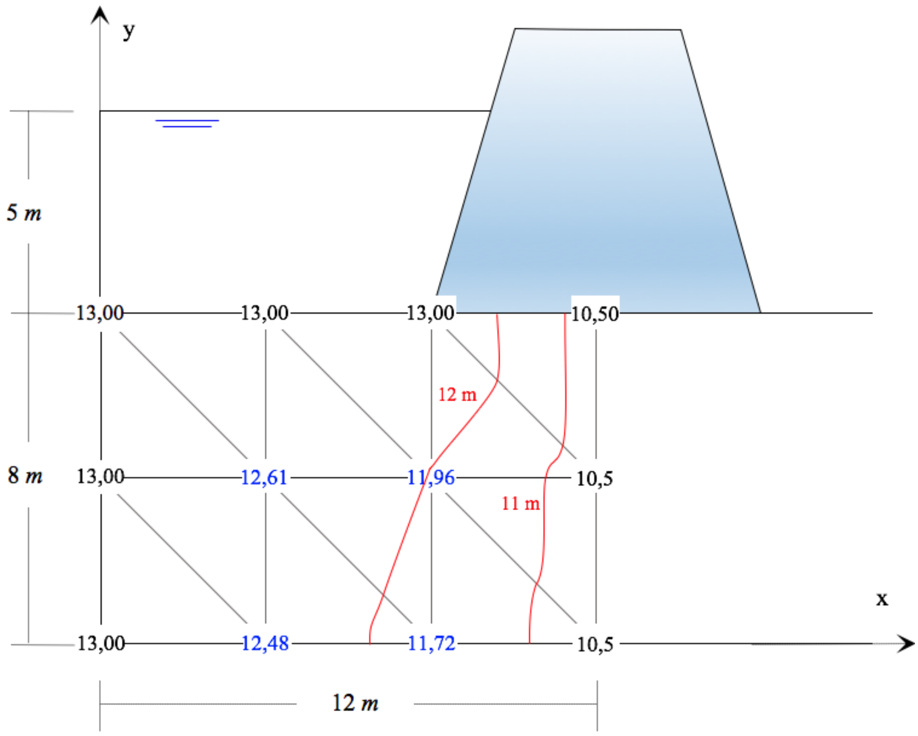
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_4 \\ 2(h_5 + h_{10}) \\ 2(h_8 + h_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,00 \\ 10,50 \\ 52,00 \\ 47,00 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ao resolver o sistema linear no MatLab os valores das cargas hidraulicas $h_2$, $h_3$, $h_6$ e $h_7$ forem obtidos.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,00 \\ 12,48 \\ 11,72 \\ 10,50 \\ 13,00 \\ 12,61 \\ 11,96 \\ 10,50 \\ 13,00 \\ 13,00 \\ 13,00 \\ 10,50 \end{bmatrix} m \tag{15}$$

Na figura 4 são mostradas as cargas hidráulicas nodais.

Figura 4: Cargas hidráulicas em $m$ e linhas equipotenciais (h=11 $m$ e h=12 $m$)




- Variável secundária - Velocidade de fluxo

O calculo da velocidade de fluxo é determinada a partir da seguinte equação.

$$[v] = -[R][g] \tag{16}$$

sendo $[g] = [B][q]$, temos:

$$[v] = -[R][B][q] \tag{17}$$

$$[v] = -\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Subtituindo os correspondentes valores na equação 18 para cada elemento temos os correspondentes vetores de velocidade.

$$[v]^1 = \begin{bmatrix} 1,30 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{19}$$

$$[v]^2 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{20}$$

$$[v]^3 = \begin{bmatrix} 1,90 \\ -0,33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{21}$$

$$[v]^4 = \begin{bmatrix} 1,63 \\ -0,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{22}$$

$$[v]^5 = \begin{bmatrix} 3,05 \\ -0,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{23}$$

$$[v]^6 = \begin{bmatrix} 3,65 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{24}$$

$$[v]^7 = \begin{bmatrix} 0,98 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{25}$$

$$[v]^8 = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,98 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{26}$$

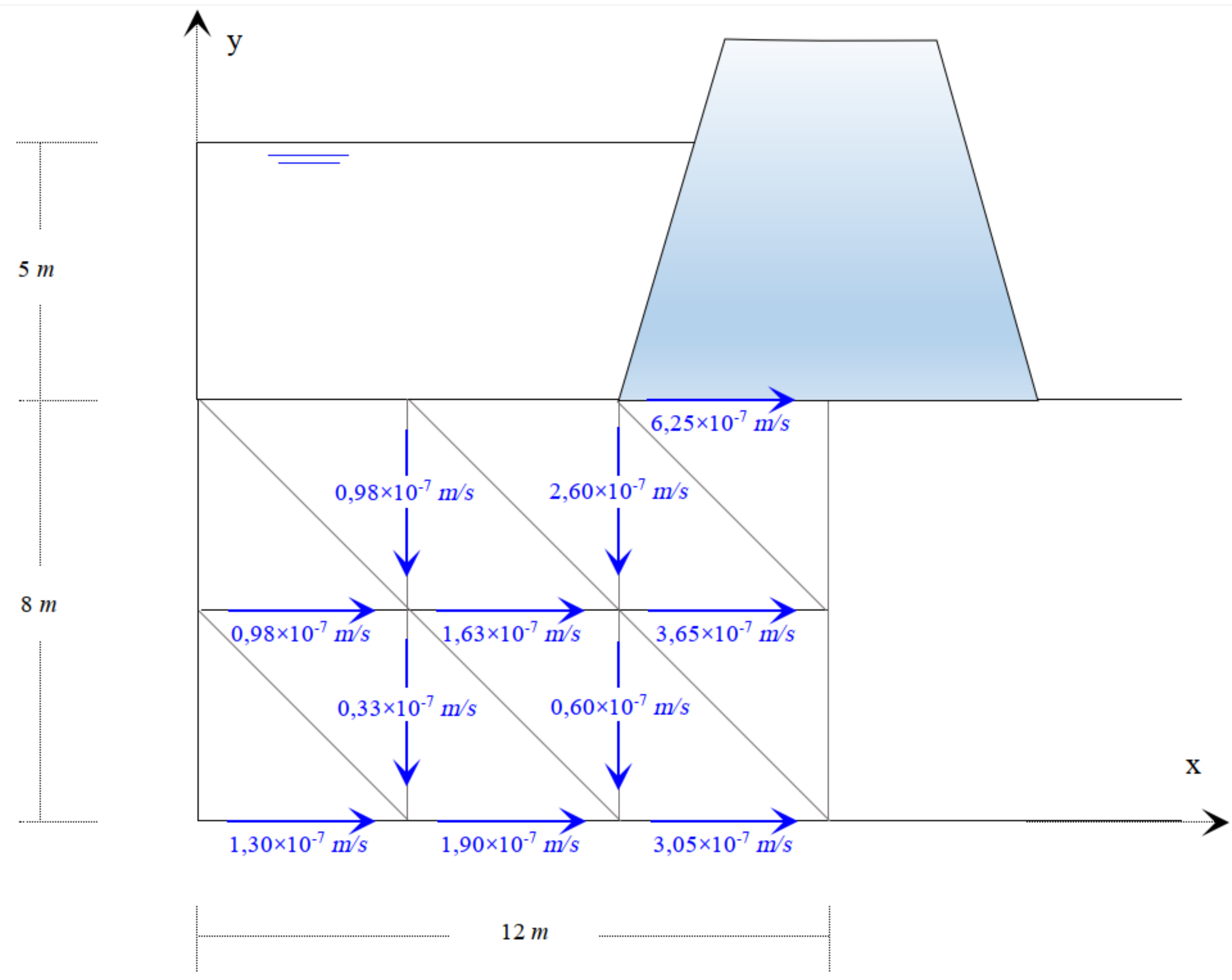
$$[v]^9 = \begin{bmatrix} 1,63 \\ -0,98 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{27}$$

$$[v]^{10} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -2,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{28}$$

$$[v]^{11} = \begin{bmatrix} 3,65 \\ -2,60 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{29}$$

$$[v]^{12} = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 0,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} m/s \tag{30}$$

Figura 5: Velocidades nas direções x e y no meio poroso




- Efeito refinamento da malha

Nas seguintes figuras são mostrados a distribução de cargas hidraulicas e poropressões para uma malha com 12 elementos e 12 nós e para uma muito más refinada (678 elementos e 425 nós).

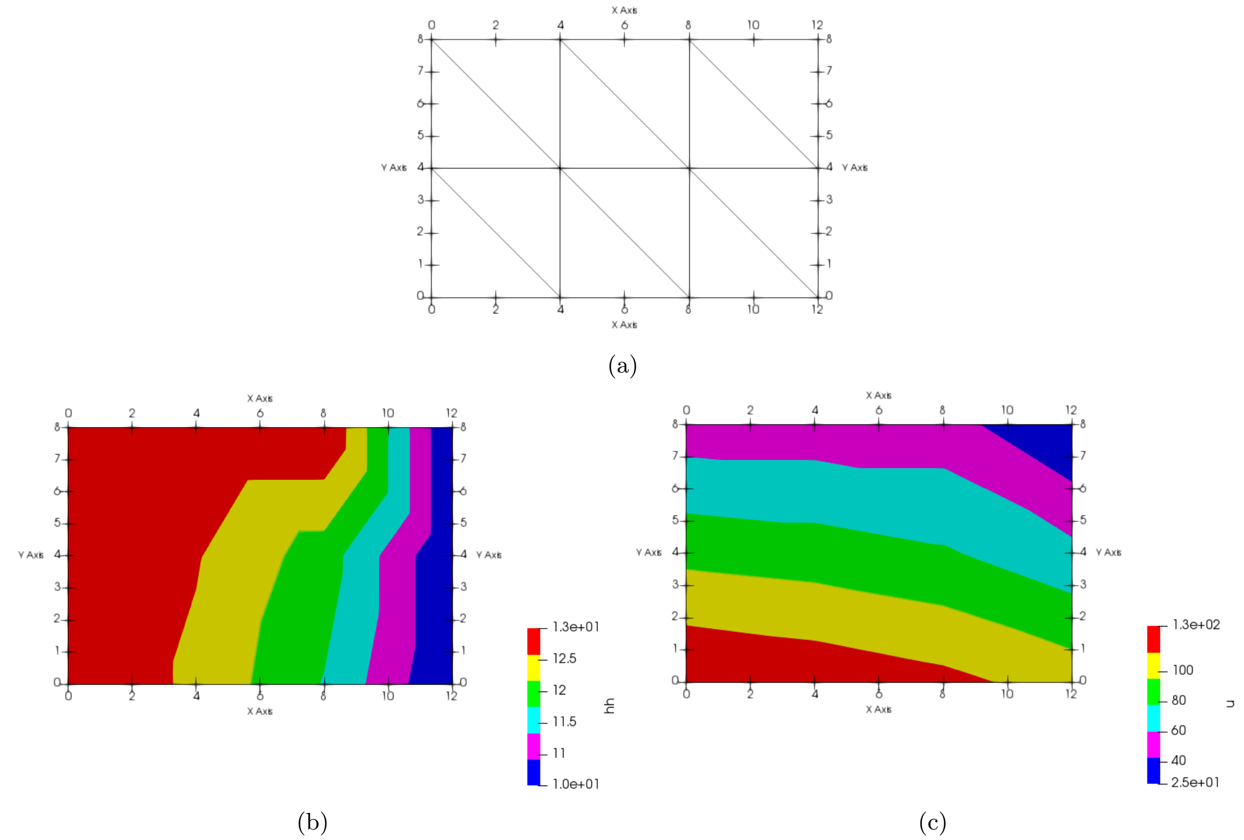



Figura 6: (a)Discretização da malha com 12 elementos e 12 nós, (b) distribução de cargas hidraulicas (m) e (c) poropressões (kPa).

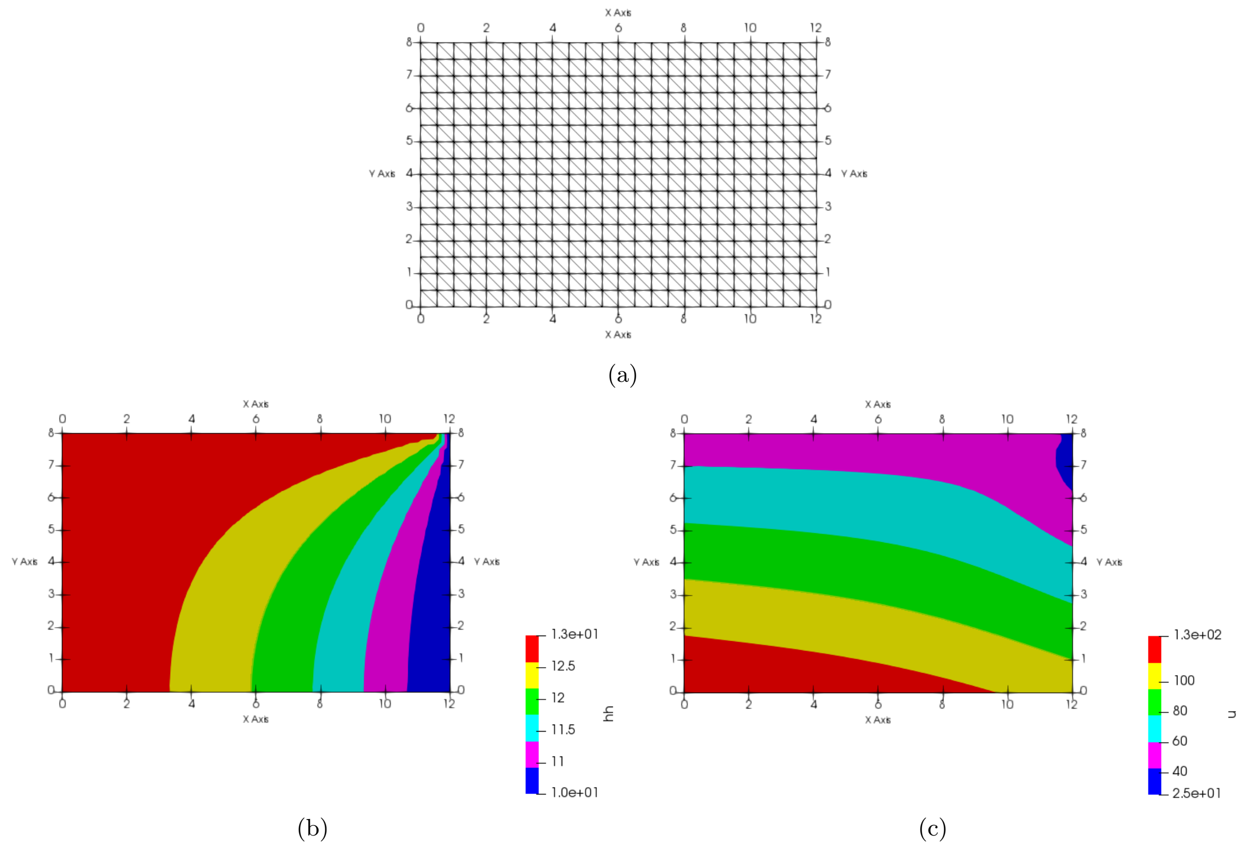
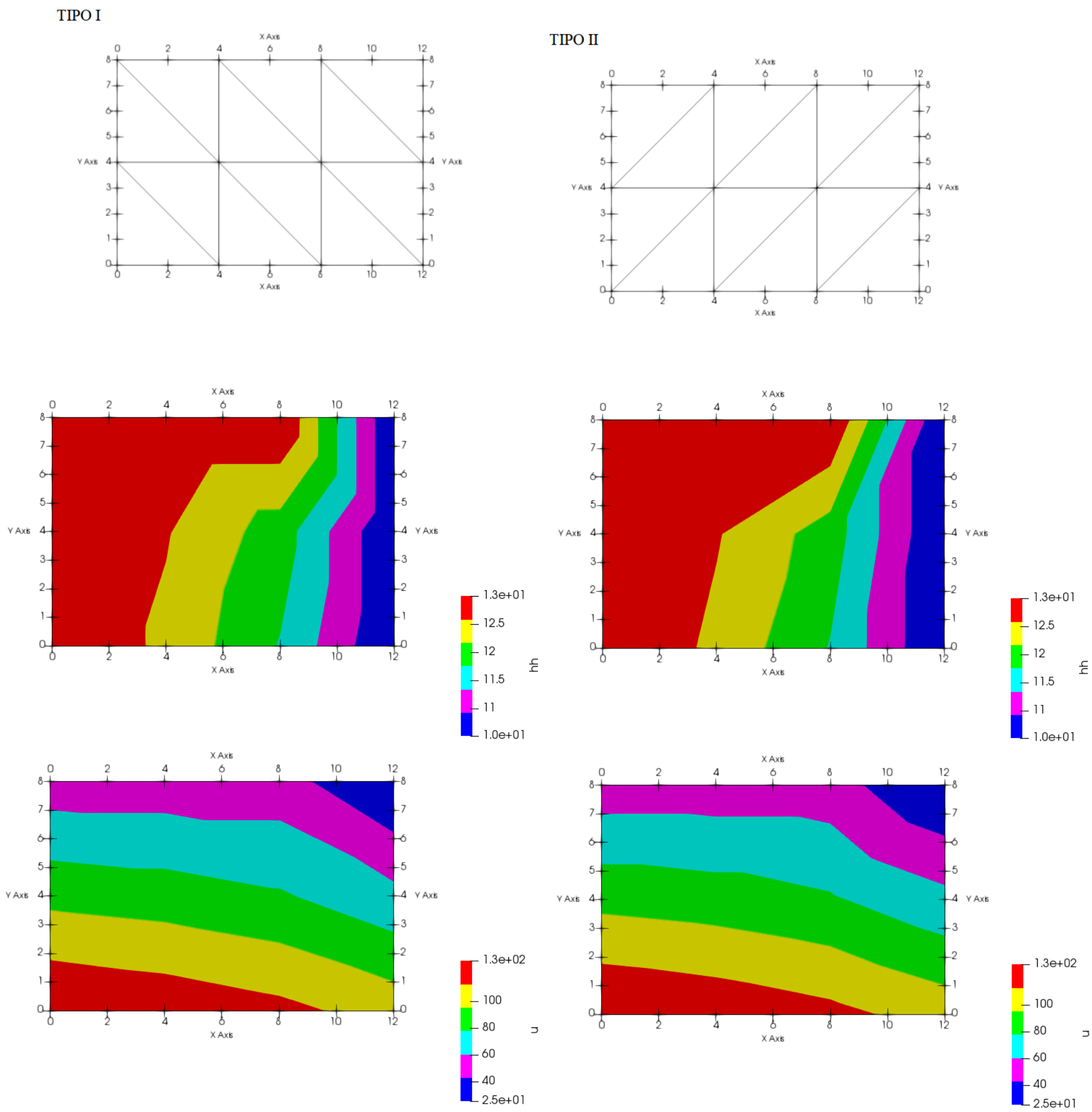


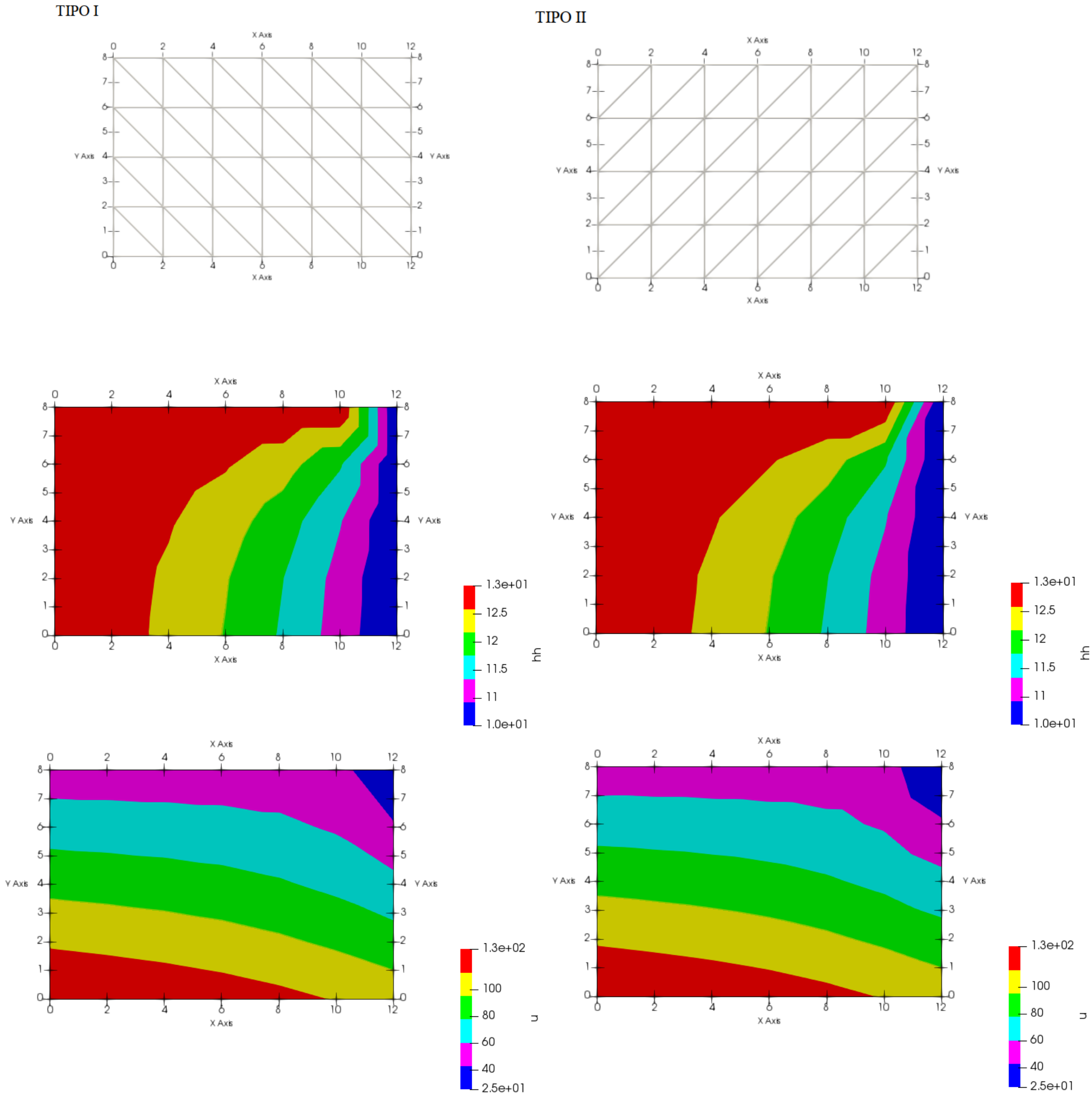

Figura 7: (a)Discretização da malha com 768 elementos e 425 nós, (b) distribução de cargas hidraulicas (m) e (c) poropressões (kPa).

- Efeito forma da malha




(a) (b)

Figura 8: Discretização da malha com 12 elementos e 12 nós, distribução de cargas hidraulicas ($m$) e poropressões ($kPa$) para elementos triangulares (a) TIPO I e (b) TIPO II.




(a) (b)

Figura 9: Discretização da malha com 48 elementos e 35 nós, distribução de cargas hidraulicas ($m$) e poropressões ($kPa$) para elementos triangulares (a) TIPO I e (b) TIPO II.