Diffoory cheatsheet

September 2018

1 Теоретическое говно, которое надо помнить

Короче, есть два вида уравнений, в канонической и симметричной форме.

Каноническая $y' = f(x, y)$

Симметричная $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

1.1 Каноническая

Каноническое уравнение задается на области и части границы этой области.

Что надо знать нам: У любой области есть граница, но не на всей границе задается наше уравнение.

Граница нужна для решения задачи Коши, поэтому советую обратить внимание на говно, которое здесь написано.

Короче область существования задается в основном ОДЗ.(лорифмы, отрицательная степень у икса и прочее говно) в основном это "плохая граница"(на которй наше уравнение отсасывает), кроме того случая когда оно продолжимо на границу (как $xlnx$). А "хорошая граница"это такое условие, в котором дифур то не существует совсем. Например в $M(x, y)y'$

$M(x, y)$ - граница.

1.2 Симметричная

А вот тут говнище полное, кроме области и ее границы, существует говно - особые точки. В них вообще ну полный пиздец и непредсказуемость. Особые точки, это случай, когда $M^2 +$

$N^2 = 0$ тут дифуры тоже нет никакой, вырождается все, от того и непредсказуемо. Это тоже невероятно важно для решения вашей горячо любимой задачи Коши.

Уравнение в этой форме сводится к канону, но про особые точки надо помнить.

2 С чего начинается решение дифуры?

В первую очередь - с ОДЗ. Потом, если уравнение в симметричной - особые точки надо найти(из условия выше)

3 Задача Коши для самых маленьких

Да, вы не ослышались.Я попробую максимально коротко.

Короче говоря, вот вы нашли всякие решения, одно из них общее, в каком оно может быть виде?

$y = f(x, C)$ - best of the best, то что надо

$x = f(y, C)$ - неплохо

$C = f(x, y)$ - общий интеграл называется, уже хуже

$0 = f(x, y, C)$ - ебать ты сосешь, чувак(иха)

В чем состоит решение залачи Коши? В том что вам надо найти конкретную функцию, то бишь избавиться от неизвестного ну и конечно же найти максимальный интервал существования. Первое это в общем то легко, подставляете, выводите С. Теперь, когда мы избавились от одной неизвестной, надо попробовать выразить все это дело в первый или второй вид. Попутные действия будут добавлять нам всякие точки разрыва. Ну и отвечая на вопрос, что же в итоге является максимальном интервалом существования - это интервал, внутри которого вашего точка. Слева и справа либо бесконечность, либо что то из следующего: ОДЗ, граница, гладкое пересечение со специальными решениями(которые из точек неединственности), а также особые точки, если есть.

Другое дело, если у вас нихрена не выражается - это уже так сказать "искусство думать надо, график строить или другие методы. А так же, если вы $x = f(y)$ сделали, то надо интервал для y делать. Ну вот и все. Искать все это - говно, говнище, говнилова. Но в этом весь "прикол".

4 Типы уравнений

4.1 Важно помнить, что...

1. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$ при y' в уравнении $dx \neq 0 \Rightarrow dx \not\equiv C$.
2. Чтобы делать замены, надо привести уравнение к его образцу (в левой части должен находиться y' без коэффициентов)
3. В уравнениях с разделёнными переменными $\mathrm{d}x \not\equiv C$.
4. Интегралы неопределённые.
5. Частные решения состоят целиком из точек единственности.
6. Специальные решения состоят целиком из точек неединственности.
7. Вносить и выносить переменные под дробную степень нужно следя за знаком.
8. При решении уравнения Бернулли надо учитывать область определения функции (например, корни не могут быть отрицательными).
9. При решении дробно-линейного уравнения надо помнить, что общие точки двух линейных функций из условия пересекаются в точке неединственности.
10. Вас отчислят.

4.2 Уравнение с разделёнными переменными

$\frac{y'}{f(y)} = g(x)$
ОДЗ: $f(y) \neq 0; x \not\equiv C$

4.3 Уравнение с разделяющимися переменными

1. $y' = f(x)g(y)$

   Помним про случай $g(y) = 0$.

2. $f_1(x)g_1(y)\,\mathrm{d}x + f_2(x)g_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$

   Рассматриваем: $f_2(x) = 0; g_1(y) = 0$ - эти решения всегда будут и решением исходного уравнения

   Привод к канону - деление на $f_2(x)dx$ с проверкой

4.4 Линейные неоднородные уравнения

$y' + a(x)y = b(x)$

$y_{\text{общ}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$

Решение методом вариации произвольной постоянной.

1. ЛОУ - Решить $y' + a(x)y = 0$ $y = C(x)f(x)$

   $y' = C'(x)f(x) + C(x)f'(x)$

2. Ищем частные

   Подставить в исходное неоднородное уравнение, должно сократиться $C(x)$

   Ну а теперь решаем новый дифур относительно $C'(x)$, подставляем обратно в y

4.5 Уравнение Бернулли

$y' + a(x)y = b(x)y^n \;\; \& \;\; n \neq 0, 1$

$y'y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$

Решается через замену $z = y^{1-n}; z' = (1-n)y^{-n}y'$

$z' + a(x)(1-n)z = b(x)(1-n)$

Это линейное неоднородное уравнение.

4.6 Уравнение Риккати

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$

Проанализировать степени слагаемых, найти частное решение y_1.

Сделать замену $y = y_1 + u$

$y_1' + u' + a(x)(y_1 + u) + b(x)(y1 + u)^2 =$

$(y_1' + a(x)y + b(x)y^2) + u' + a(x)u + 2b(x)y_1u + b(x)u^2 = c(x)$

$u' + a(x)u + 2b(x)y_1u + b(x)u^2 = 0$

$u' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))u = -b(x)u^2$

Это уравнение Бернулли при $n = 2$.

4.7 Однородные уравнения

Однородным называется уравнение $f(x, y)$, если $\forall k > 0 : f(kx, ky) = k^n f(x, y)$

$y' = f(\frac{x}{y})$

Решается через замену $y = ux; u = yx^{-1}; y' = u'x + u$.

После корректной замены должен исчезнуть x.

Получится уравнение с разделяющимися переменными.

4.8 Дробно-линейные уравнения

$y' = f(\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2})$

Решается через нахождение точки пересечения графиков $a_1x + b_1y + c_1$ и $a_2x + b_2y + c_2$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Пусть точки пересечения это x^* и y^*.

Тогда далее делается замена $\begin{cases} x = u + x^* & \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ y = v + y^* & \mathrm{d}y = \mathrm{d}v \end{cases}$

Уравнение сводится к однородному.

4.9 Обобщённо-однородные уравнения

Однородные уравнения с разным весом переменных. Есть два стула:

1. $x \sim 1, y \sim m$

   $f(kx, k^m x) = k^n f(x, y)$

   Решается заменой вида $y = z^m$

   (не забыть про $y = -z^m$).

2. $x \sim \alpha, y \sim \beta$

   $f(k^\alpha x, k^\beta y) = k^n f(x,y)$

   Подобрать α и β, ввести замену вида $y^\alpha = ux^\beta$

Сводится к однородному уравнению.

Как понять когда юзать второй способ, а когда второй? Надо посмотреть на инвариантность х в исх уравнении. Если при $x = -x$(не забыв про $d(-x) = -dx$) уравнение остается неизменным - все чики пуки, изи первый способ. Иначе, стоит подумать о том, чтобы создать инвариантность введя вторую замену. Сразу использованием замены при однородности(это решит наши проблемы, не задумывайтесь об этом).

4.10 Уравнения в полных дифференциалах

$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$

Ввести функцию $U(x,y)$, где $U'_x \equiv M, U'_y \equiv N$

Убедиться, что $M'_y \equiv N'_x$

Решение:

$\int M\,\mathrm{d}x = h(x,y) + C(y) = V$

$V'_y = N$

Найти C_1 как интеграл от $C'(y)$

Ответом будет выражение $h(x,y) = C_1$

4.11 Уравнение с интегрирующим множителем

$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \ \ \& \ \ M'_y - N'_x = F \neq 0$

Это уравнение - признак отчаяния, проверяется и используется в последнюю очередь. Ввести интегрирующий множитель $\mu(x,y) \neq 0$, при котором $F = 0$, решать как уравнение в полных дифференциалах.

Вычисление μ :

$(\mu M)'_y = (\mu N)'_x$

$\mu'_y M + \mu M'_y = \mu'_x N + \mu N'_x$

$\mu(M'_y - N'_x) = \mu'_x N - \mu'_y M$

$\mu = \frac{\mu'_x N - \mu'_y M}{F}$ Попытаться подобрать множитель через один из следующих способов:

1. $\mu(x,y) = \mu(x) \Rightarrow \mu'_y = 0$
   $\mu(x,y) = \mu(y) \Rightarrow \mu'_x = 0$

2. $\exists \omega(x,y) \neq 0$
   $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y))\mu = \frac{\mu'_\omega(\omega'_x N - \omega'_y M)}{F}$ Это хитрое говно, надо выделять какие особенные функции и равнять их степени, а потом коэффициенты.

4.12 Уравнения, не разрешённые относительно производной

$F(x,y,y') = 0$

1) Попробовать привести уравнение к виду $y' = f(x,y)$, это будет уравнение первого порядка

2) Попробовать привести уравнение к виду $y = f(x,y')$, ввести замену вида $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y', \mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$

После дифференцирования исходного уравнения выйдет: $p\,\mathrm{d}x = f'_x(x,p)\,\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\,\mathrm{d}p$

Привести уравнение к виду $\lambda(x,p) \cdot (M(x,p)\,\mathrm{d}x + N(d,p)\,\mathrm{d}p) = 0$, решить, рассматривая 2 случая, зануляя поочерёдно каждую скобку.

Возможны 2 варианта:

2.1) $x = x(p)$, тогда $y = f(x(p),p)$, ответ будет в виде параметрической записи.

2.2) $p = p(x)$, тогда $y = f(x,p(x))$, это явная запись ответа.

2.3) Если не получается привести к двум верхним видам, то очень жаль.

3) $x = f(y,y')$

Ввести замену вида $p = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p}$

$\mathrm{d}x = f'_y(y,p)\,\mathrm{d}y + f'_p(y,p)\,\mathrm{d}p$

$0 = (f'_y(y,p) - \frac{1}{p})\,\mathrm{d}y + f'_p(y,p)\,\mathrm{d}p$

Также как и в предыдущем номере, попытаться вывести зависимость между p и y

4.13 Уравнения высокого порядка, допускающие его понижение

$F(x,y,...,y^{(n)}) = 0$

Важно: в уравнении порядка m будет m констант.

1. $y^{(n)} = f(x)$, интегрируем n раз.

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, ввести замену вида $z = y^{(k)}$, тем самым понижая порядок.

3. $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, ввести замену вида $y' = p(y)$, тем самым получив уравнение с y в качестве переменной.

В этом случае нужен пересчёт производной:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$: $y'' = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p' \cdot p$:

$y'' = p'p$

$y''' = p'p^2 + (p')^2 p$

4. $F(x, ky, ky', ..., ky^{(n)}) = kF(x, y, y', ..., y^{(n)})$, это уравнение, однородное по y и всем его производным.

Ввести новую функцию через замену вида $y' = yz(x)$. После подстановки исчезнет y как множитель в уравнении.

5. $F(kx, k^m y, k^{m-1}y', ..., k^{m-n}y^{(n)}) = k^\alpha F(x, y, ..., y^{(n)})$, обобщённо однородное уравнение.

Найти m приравнивая все степени слагаемых (m может быть каким угодно, в том числе и 0).

Ввести замену вида $\begin{cases} x = e^t, \\ y = z(t)e^{mt} \end{cases}$

Необходим пересчёт производной.

4.14 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = F(x)$

Сначала решить однородное уравнение $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$

Для этого составить уравнение вида $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, найти все λ_i (корни характеристического многочлена).

После этого можно выписать решение однородного уравнения: $y_i = Ce^{\lambda_i x}$, если λ_i корень кратности 1 или $y_l = (C_l + C_{l+1}x + C_{l+2}x^2 + ...C_{l+m}x^{m-1})e^{\lambda_l x}$, если кратность λ_l равна m. Если λ_i комплексное, то обязательно существует корень λ_j, комплексно сопряжённый с λ_i. Это позволяет выписать корни в вещественном виде, воспользовавшись теоремой Эйлера: $y = C_i e^{\alpha x} cos(\beta x) + C_j e^{\alpha x} sin(\beta x)$, если $\lambda_{i,j} = \alpha \pm i\beta$.

Если кратности $\lambda_{i,j} > 1$, то вместо соотвествующих коэффициентов будут стоять полиномы(как и в вещественном случае с корнем кратности не 1).

Решением однородного уравнения будет сумма всех полученных решений для каждого λ

Частное решение ищется с помощью правила суммы: $Ly = f + g$;

$Ly_1 = f, Ly_2 = g \Rightarrow L(y_1 + y_2) = f + g$.

Разбить $F(x)$ на сумму слагаемых $f(x)$, группируя по $e^{\gamma x}$

Возможны 2 случая:

I: Метод неопределённых коэффициентов

a) $f(x)$ имеет вид $f = P_m(x) \cdot e^{\gamma x}$ (m это кратность), случай вещественного γ

Тогда ответ будет иметь вид $y = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$, где s это кратность γ в характеристическом полиноме (0, если γ не присутствует среди корней).

b) $f = e^{\alpha x}(P(x)cos(\beta x) + Q(x)sin(\beta x)), \gamma = \alpha + i\beta$, случай комплексного γ

$y = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)cos(\beta x) + T_m(x)sin(\beta x)), m = max(deg(P), deg(Q))$, s выбрать по алгоритму из предыдущего пункта.

Далее представить многочлены в y как $a + bx + cx^2 + ...$, продифференцировать n раз и подставить в исходное уравнение $Ly = f(x)$. Так определятся все коэффициенты многочленов $a, b, ...$, это и будет искомым частным решением.

II: Метод вариации произвольных постоянных.

Выписать систему вида $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0 \\ a_0(C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)}) = f(x) \end{cases}$

Решить относительно C_i', потом проинтегрировать каждое C_i'.

y_i это множитель при C_i в выписанном общем решении диффура. y_i это функция от x, то есть C_i также должно быть функцией от x.

Ответом будет сумма общего решения и всех частных.

4.15 Уравнение Эйлера

$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_ny = F(x)$

Очевидно, что левая часть инвариантна относительно x. Значит, можно провести замену вида $x = e^t > 0$. Если f не инвариантна относительно x, то дополнительно нужно рассмотреть замену $x = -e^t$, иначе просто добавить модуль в конце.

Здесь необходим пересчёт производной:

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{y}e^{-t}$

$y'' = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \cdot e^{-x} = (\dot{y'_t e^{-t}})e^{-t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$

Дальше решать как неоднородное.

4.16 Линейные системы уравнений (гроб гроб кладбище)

$\dot{y} = Ay + F(t)$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$

Рассмотреть общее решение уравнения. Пусть λ это корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda E) = 0$

Тогда общее решение имеет вид $y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \nu^i$, где ν^i это собственные векторы A.

$(A - \lambda_i E)\nu^i = 0$ — уравнение на собственный вектор, если λ_i имеет кратность 1.

Пусть λ_i имеет кратность n_i. Тогда $m_i = n_i - r_i$ это число л.н.з. собственных векторов для λ_i, где $r_i = rk(A - \lambda E)$.

Тогда: $\begin{cases} y_1 = P_{1m_i}(t)e^{\lambda_i t} \\ ... \\ y_n = P_{n_i m_i}(t)e^{\lambda_i t} \end{cases}$, где все P_i имеют кратность m_i. Дальше решить методом неопределённых коэффициентов (выразить полиномы через добавочные буквы, продифференцировать, подставить в исходное уравнение). Итоговые векторы должны зависеть от n разных C

Чит: $\dot{y} = Ax \Rightarrow y = (E + (A - \lambda E)t + \frac{1}{2}(A - \lambda E)^2 t^2 + ...)Ce^{\lambda t}$, где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}$, число слагаемых в формуле равно порядку нильпотентности матрицы $A - \lambda E$ (это m_i) и λ это какой-то корень.

Как и в случае с линейным уравнением, разбить $F(t)$ на сумму $f(t)$, найти частные решения для каждого $f(t)$ и сложить их с общим.

1) Метод вариации произвольной постоянной.

Продифференцировать вектор общих решений покомпонентно, учитывая, что C_i это функции. Подставить в исходную систему $\dot{y} = Ay + f(t)$, заменяя $\dot{y}$ на новый вектор в котором есть C' и y на вектор общих решений. НЕТОЧНО: должны сократиться все чистые C, то есть остаться только C' и коэффициенты при них.

2) Метод неопределённых коэффициентов

Если $f(t)$ состоит из функций вида $P_m(t)e^{\gamma t}$, то каждое частное решение в векторе будет иметь вид $y_i = e^{\gamma_i t} Q^i_{m+s}(t)$, где $s = 0$, если γ_i не собственное число, и $s =$ кратность γ_i среди λ иначе.

Продифференцировать y, заменив $Q^i_{m+s}(t)$ на $a^i_0 + a^i_1 t + ... + a^i_{m+s} t^{m+s}$. Подставить в исходное уравнение $\dot{y} = Ay + f(y)$ и определить значения всех коэффициентов в полиномах Q^i.

Если γ комплексное, то $f(t)$ должно иметь вид $e^{\alpha t}(P_{m_1} cos(\beta t) + Q_{m_2} sin(\beta t))$ при $\gamma = \alpha \pm i\beta$

Тогда решение будет иметь вид $y_i = e^{\alpha_i t}(T^i_{max(m_1,m_2)+s}(t) cos(\beta_i t) + R^i_{max(m_1,m_2)+s}(t) sin(\beta_i t))$ в полном соответствии с линейными уравнениями, где s это кратность γ.

Точно так же методом неопределённых коэффициентов определяем неизвестные полиномы и выписываем вектор-ответ.

Сумма общего решения и всех частных будет являться ответом на задачу.