3.1 อัตราสัมพัทธ์

ในการประยุกต์ของแคลคูลัส บางครั้งเราต้องพบกับตัวแปร x และ y ที่มีความสัมพันธ์กันบนช่วงเวลา t ถ้าเราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตัวหนึ่งเทียบกับเวลา และต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่น ๆ เทียบกับเวลา เราจะเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์** (Related rate problems)

ให้ x และ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t นั่นคือ $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ โดยนิยามของอนุพันธ์จะได้ว่า $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x และ y เทียบกับ t ตามลำดับ

ในการประยุกต์ของแคลคูลัส บางครั้ง x และ y มีความสัมพันธ์โดยกำหนดสมการมาให้ เช่น

$$x^2 - y^3 - 2x + 7y^2 - 2 = 0$$

ถ้าเราหาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้ $2x\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} + 14y\frac{dy}{dt} = 0$
เรียก $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$ ว่า **อัตราสัมพัทธ์** (related rates)

สำหรับปัญหาอัตราสัมพัทธ์ สามารถสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้ 4 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

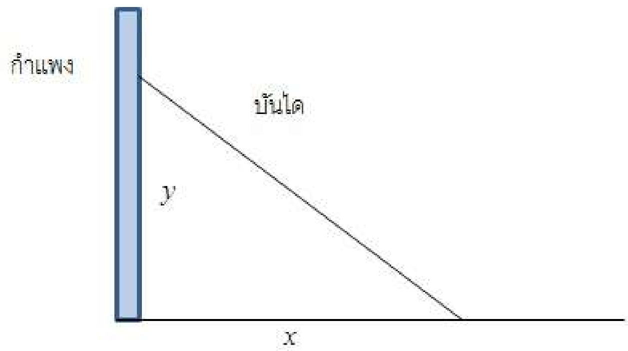
1. วาดภาพที่เกิดขึ้นในปัญหา ซึ่งเป็นจริงเมื่อเวลา t ใด ๆ และกำหนดตัวแปรกำกับระยะต่าง ๆ ในภาพ

2. เขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้น ซึ่งเป็นจริงที่เวลา t ใด ๆ (เป็นสมการที่มีตัวแปรที่เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงร่วมกับตัวแปรที่เราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงแล้ว)

3. หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของทั้งสองข้างของสมการ

4. คำนวณค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ต้องการต่อหนึ่งหน่วยเวลา

ตัวอย่าง 3.1.1. บันไดยาว 25 ฟุต วางเอียงพิงอยู่กับกำแพง ถ้าปลายล่างของบันไดถูกทำให้เคลื่อนที่ออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุตต่อวินาที ปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ลงด้วยอัตราเร็วเท่าไร ขณะที่ปลายล่างอยู่ห่างจากกำแพง 15 ฟุต



วิธีทำ

วิเคราะห์ : มีตัวแปร 2 ตัวที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คือ ระยะทางที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง และระยะทางที่ปลายบนของบันไดที่อยู่สูงจากพื้น

ให้ t (วินาที) เป็นเวลาที่ผ่านไปหลังจากปลายล่างของบันไดเคลื่อนออกจากกำแพง

ให้ x (ฟุต) เป็นระยะจากกำแพงถึงปลายล่างของบันไดเมื่อเวลา t วินาที

ให้ y (ฟุต) เป็นระยะจากพื้นดินถึงปลายบนของบันไดเมื่อเวลา t วินาที

ทั้ง x และ y เป็นฟังก์ชันของ t จากรูปข้างต้น เมื่อเวลา t วินาที จะเห็นว่า x และ y มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$x^2 + y^2 = 25^2 \tag{3.1}$$

จากโจทย์ กล่าวว่า ปลายล่างของบันไดถูกทำให้เคลื่อนที่ออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุตต่อวินาที จึงได้ว่า $\dfrac{dx}{dt} = +3$

ต้องการหาว่า ปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ลงด้วยอัตราเร็วเท่าไร เมื่อปลายล่างอยู่ห่างจากกำแพง 15 ฟุต นั่นคือ ต้องการหาว่า $\dfrac{dy}{dt}$ =? เมื่อ $x = 15$

หาอนุพันธ์ของ 3.1 เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{(25)^2 - x^2}}\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

แทนค่า $\frac{dx}{dt} = +3$ และ $x = 15$ ได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{15}{\sqrt{(25)^2 - 15^2}}(3) \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

นั่นคือ ขณะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 15 ฟุต และเคลื่อนที่ออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุตต่อวินาที ทำให้ปลายบนของบันได เคลื่อนที่**ลง**ด้วยอัตรา $\frac{9}{4}$ ฟุตต่อวินาที (เครื่องหมายลบในผลลัพธ์แสดงว่า y ลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น)

ตัวอย่าง 3.1.2. ให้พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าลดลงด้วยอัตราเร็ว 4 ตร.ซม/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของด้านสามเหลี่ยม เมื่อพื้นที่ของสามเหลี่ยมเป็น $100\sqrt{3}$ ตร.ซม.

วิธีทำ

วิเคราะห์ : มีตัวแปร 2 ตัวที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คือ ความยาวด้านๆหนึ่งของสามเหลี่ยมด้านเท่า และ พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่า

ให้ t (วินาที) เป็นเวลาที่ผ่านไปเมื่อสามเหลี่ยมด้านเท่ามีขนาดลดลง

ให้ x (ซม.) เป็นความยาวด้านๆหนึ่งของสามเหลี่ยมด้านเท่าเมื่อเวลา t วินาที

ให้ A (ตร.ซม) เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าเมื่อเวลา t วินาที

ทั้ง x และ A เป็นฟังก์ชันของ t เมื่อเวลา t วินาที จะเห็นว่า x และ A มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}xh \tag{3.2}$$

เมื่อ h คือ ความสูงตรงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งคำนวณได้จาก $h = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$
จากโจทย์ กล่าวว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าลดลงด้วยอัตราเร็ว 4 ตร.ซม./วินาที จึงได้ว่า
$\dfrac{dA}{dt} = -4$ ต้องการหาว่า $\dfrac{dx}{dt} =?$ เมื่อ $A = 100\sqrt{3}$
จาก สมการ 3.2 จะได้

$$A = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \tag{3.3}$$

เมื่อ $A = 100\sqrt{3}$ จึงได้ $x^2 = \dfrac{4A}{\sqrt{3}} = \dfrac{4(100\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 400$ ดังนั้น $x = 20$
หาอนุพันธ์ของ 3.3 เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x)\frac{dx}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{\sqrt{3}x}\frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

แทนค่า $\dfrac{dA}{dt} = -4$ และ $x = 20$ ได้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}\,(20)}(-4) = -\frac{2}{5\sqrt{3}}$$

นั่นคือ ขณะพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าลดลงด้วยอัตราเร็ว 4 ตร.ซม./วินาที ทำให้การเปลี่ยนแปลงของความยาวของด้านสามเหลี่ยม**ลดลง** ด้วยอัตรา $\dfrac{2}{5\sqrt{3}}$ ซม./วินาที เมื่อพื้นที่ของสามเหลี่ยมเป็น $100\sqrt{3}$ ตร.ซม.

ตัวอย่าง 3.1.3. ขว้างก้อนหินลงไปในสระน้ำ ทำให้เกิดการกระเพื่อมเป็นวงกลมที่รัศมีขยายออกด้วยอัตราเร็วคงที่ 4 ฟุต/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม เมื่อเวลา 12 วินาที

วิธีทำ

วิเคราะห์ : มีตัวแปร 2 ตัวที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คือ รัศมีและพื้นที่ของวงกลม

ให้ t (วินาที) เป็นเวลาที่ผ่านไปเมื่อวงกลมขยายออก

ให้ r (ฟุต) เป็นรัศมีของวงกลมเมื่อเวลา t วินาที

ให้ A (ตร.ฟุต) เป็นพื้นที่ของวงกลมเมื่อเวลา t วินาที

ทั้ง r และ A เป็นฟังก์ชันของ t เมื่อเวลา t วินาที จะเห็นว่า r และ A มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$A = \pi r^2 \tag{3.4}$$

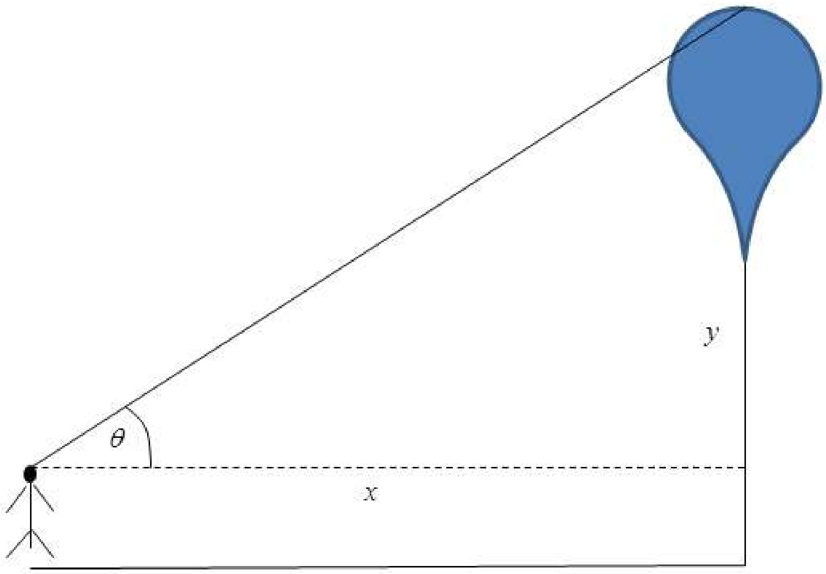
เนื่องจาก รัศมีขยายออกด้วยอัตราเร็วคงที่ 4 ฟุต/วินาที ดังนั้น ณ เวลา $t = 12$ รัศมีของวงกลมเป็น $4 \times 12 = 48$ ฟุต จากโจทย์ $\dfrac{dr}{dt} = +4$ ต้องการหาว่า $\dfrac{dA}{dt} =?$ เมื่อ $t = 12$

หาอนุพันธ์ของสมการ 3.4 เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2\,\pi\, r\, \frac{dr}{dt} \\ &= 2\,\pi(48)(4) = 384\pi \end{aligned}$$

นั่นคือ ขณะที่รัศมีวงกลมขยายออกด้วยอัตราเร็วคงที่ 4 ฟุต/วินาที ทำให้ อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลม**เพิ่มขึ้น** ด้วยอัตรา 384π ตร.ฟุต/วินาที เมื่อเวลา 12 วินาที

ตัวอย่าง 3.1.4. ลูกบอลลูนลอยดิ่งขึ้นจากพื้นห่างจากผู้สังเกตการณ์ในแนวนอน $1,200$ ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 200 ฟุต/นาที จงหาว่ามุมเงยของผู้สังเกตการณ์จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร ขณะที่ลูกบอลลูนอยู่ที่ระดับความสูง $1,600$ ฟุต เหนือระดับสายตาในแนวราบ



วิธีทำ

วิเคราะห์ : มีตัวแปร 2 ตัวที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คือ มุมเงยของผู้สังเกตการณ์และระยะทางที่ลูกบอลลอยขึ้นในแนวดิ่ง

ให้ t (นาที) เป็นเวลาที่ผ่านไปเมื่อลูกบอลลอยขึ้น

ให้ y (ฟุต) เป็นระยะทางที่ลูกบอลลอยขึ้นในแนวดิ่ง เมื่อเวลา t วินาที

ให้ Θ (เรเดียน) เป็นมุมเงยของผู้สังเกตการณ์ เมื่อเวลา t วินาที

ทั้ง y และ Θ เป็นฟังก์ชันของ t เมื่อเวลา t วินาที จะเห็นว่า y และ Θ มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\tan\Theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{1200} \tag{3.5}$$

เมื่อ x คือระยะห่างในแนวนอนจากตำแหน่งที่ผู้สังเกตการณ์ยืนอยู่จนถึงจุดที่ลูกบอลลูนลอยดิ่งขึ้นจากพื้น ในที่นี้โจทย์กำหนดให้ $x = 1,200$ ฟุต

เนื่องจาก ลูกบอลลูนลอยดิ่งขึ้นด้วยอัตราเร็ว 200 ฟุต/นาที ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = +200$ ต้องการหาว่า $\frac{d\Theta}{dt} =?$ เมื่อ $y = 1,600$

หาอนุพันธ์ของสมการ 3.5 เทียบกับ t จะได้

$$\sec^2\Theta\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{1200}\frac{dy}{dt}$$

เนื่องจาก $\sec\Theta = \dfrac{1}{\cos\Theta} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}}$
ระยะทางจากสายตาผู้สังเกตการณ์ถึงลูกบอลลูน คือ $\sqrt{(1600^2)+(1200^2)} = 2000$
ดังนั้น $\sec\Theta = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \dfrac{2000}{1200} = \dfrac{5}{3}$ จากสมการข้างต้นจึงได้

$$\begin{aligned}
\sec^2\Theta\frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{1200}\frac{dy}{dt} \\
\left(\frac{5}{3}\right)^2\frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{1200}(200) \\
\frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{600}\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{3}{5000}
\end{aligned}$$

ลูกบอลลูนลอยดิ่งขึ้นจากพื้นห่างจากผู้สังเกตการณ์ในแนวนอน $1,200$ ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 200 ฟุต/นาที มุมเงยของผู้สังเกตการณ์จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\dfrac{3}{5000}$ เรเดียน/นาที ขณะที่ลูกบอลลูนอยู่ที่ระดับความสูง $1,600$ ฟุต เหนือระดับสายตาในแนวราบ

ตัวอย่าง 3.1.5. ถังน้ำใบหนึ่งเป็นรูปกรวยกลมตรงหงาย สูง 12 ฟุต รัศมีของฐานยาว 6 ฟุต ถ้าปล่อยน้ำออกจากถังด้วยอัตราเร็ว 1 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำในถังขณะที่ความลึกของระดับน้ำเป็น 5 ฟุต (ตอบ $-\frac{4}{25\pi}$ ฟุต/วินาที)

แบบฝึกหัด 3.1.6. จงแสดงวิธีทำ

1. ดวงไฟอยู่ที่พื้นห่างจากตัวตึก 20 เมตร ชายคนหนึ่งสูง 2 เมตร เดินออกจากดวงไฟมุ่งหน้าไปทางตัวตึกด้วยอัตรา 1 เมตร/วินาที ความสูงของเงาของเขาที่อยู่บนตัวตึกมีอัตราการเปลี่ยนแปลงเท่าใด เมื่อเขาอยู่ห่างจากตัวตึง 14 เมตร
2. กรวยกระดาษมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 เซนติเมตร และลึก 6 เซนติเมตร น้ำไหลออกทางก้นกรวยด้วยอัตรา 2 ลบ.เซนติเมตร/วินาที จงหาว่า ระดับน้ำในกรวยกระดาษเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าได เมื่อความสูงของระดับน้ำในกรวยเป็น 3 เซนติเมตร
3. ชายคนหนึ่งสูง 2 เมตร เดินเข้าหาเสาไฟด้วยอัตรา 0.5 เมตร/วินาที เสาไฟสูง 5 เมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของเงาของเขา ในขณะที่เขาอยู่ห่างจากเสาไฟ 3 เมตร
4. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ A ของวงกลมเมื่อเทียบกับเส้นรอบวง C
5. แท้งค์น้ำรูปกรวยกลมตรง มีรัศมี 15 เมตร และสูง 12 เมตร น้ำไหลเข้าไปในแท้งค์ด้วยอัตรา 2 ลบ.เมตร/นาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำในถัง ในขณะที่ความสูงของน้ำในแท้งค์สูง 8 เมตร
6. ลูกโป่งรูปทรงกลมถูกปล่อยลมออกด้วยอัตรา 4 ลบ.เซนติเมตร/นาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของลูกโป่ง ในขณะที่รัศมีของลูกโป่งเป็น 10 เซนติเมตร
7. บันไดยาว 10 เมตร วางพิงผนังตึกโดยที่ปลายอีกข้างอยู่บนพื้นดิน ถ้าปลายบนของบันไดเลื่อนลงอัตรา 2 เมตร/วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปลายด้านล่างของบันไดที่เลื่อนออกจากตัวตึก ขณะที่ปลายบนสูงจากพื้น 6 เมตร
8. วัตถุรูปทรงกระบอกกลมตรงอันหนึ่งถูกเพิ่มแรงดันให้ขยายออกโดยรัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 เซนติเมตร/วินาที ขณะที่พื้นที่ผิวยังคงที่ ที่ 600π ตารางเซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของทรงกระบอกขณะที่รัศมี 10 เซนติเมตร

เฉลย

1. $-\dfrac{10}{9}$ เมตร/วินาที
2. $-\dfrac{2}{\pi}$ ซม./วินาที
3. $-\dfrac{1}{3}$ เมตร/วินาที
4. $\dfrac{C}{2\pi}$
5. $\dfrac{1}{50\pi}$ เมตร/วินาที
6. $-\dfrac{1}{100\pi}$ เมตร/นาที
7. $\dfrac{3}{2}$ เมตร/วินาที
8. -16 ซม./วินาที

3.2 ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Maximum and Minimum Problems)

นิยาม 3.2.1. จะกล่าวว่า

1. ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บนช่วง (a, b) ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $a < x_1 < x_2 < b$
2. ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บนช่วง (a, b) ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $a < x_1 < x_2 < b$

ทฤษฎีบท 3.2.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) และต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, b)
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, b)

ตัวอย่าง 3.2.3. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและลดในช่วงใด

วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x + 2)$

	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
ค่าของ $x - 4$	$-$	$-$	$+$
ค่าของ $x + 2$	$-$	$+$	$+$
ค่าของ $(x - 4)(x + 2)$	$+$	$-$	$+$

จะเห็นว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-2, 4)$
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-2, 4)$

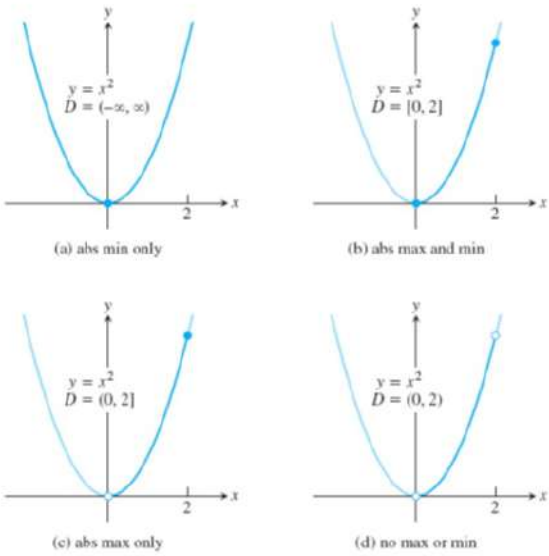
นิยาม 3.2.4. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซต S จะกล่าวว่า

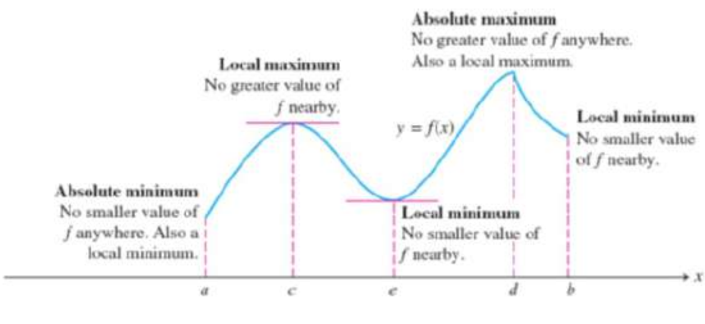
1. f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (Absolute Maximum) ที่จุด x_0 ซึ่งอยู่ใน S ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ใน S

   และ f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (Absolute Minimum) ที่จุด x_0 ซึ่งอยู่ใน S ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ใน S

2. f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) หรือ**ค่าสูงสุดเฉพาะที่** (Local maximum) ที่จุด x_0 ถ้ามี $c > 0$ ซึ่ง $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ใน $(x_0 - c, x_0 + c)$

3. f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) หรือ**ค่าต่ำสุดเฉพาะที่** (Local minimum) ที่จุด x_0 ถ้ามี $c > 0$ ซึ่ง $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ใน $(x_0 - c, x_0 + c)$





นิยาม 3.2.5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน $[a, b]$ จะเรียกจุด x_0 ซึ่ง $x_0 \in (a, b)$ และ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ว่าเป็น **จุดวิกฤต** (Critical point) ของ f

ทฤษฎีบท 3.2.6. ให้ x_0 เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วง (a, b) และ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดบนช่วง (a, b) (อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 เองก็ได้) จะได้ว่า

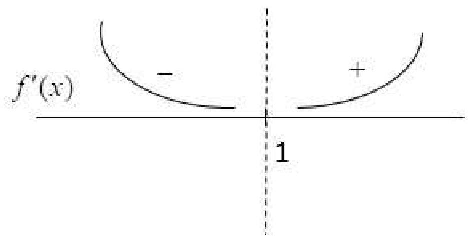
1. ถ้า $f'(x_0) > 0$ สำหรับทุกค่า x ใน (a, x_0) และ $f'(x_0) < 0$ สำหรับทุกค่า x ใน (x_0, b) แล้ว f จะมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ที่ x_0

2. ถ้า $f'(x_0) < 0$ สำหรับทุกค่า x ใน (a, x_0) และ $f'(x_0) > 0$ สำหรับทุกค่า x ใน (x_0, b) แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0

ตัวอย่าง 3.2.7. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 4$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ หาจุดวิกฤตโดยพิจารณา $f'(x) = 0$ นั่นคือ $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1) = 0$ ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต

เมื่อ $x < 1$ จะเห็นว่า $f'(x) < 0$ และ เมื่อ $x > 1$ จะเห็นว่า $f'(x) > 0$



ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุด และค่าต่ำสุดนั้นคือ

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 3$$

ตัวอย่าง 3.2.8. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 22$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ หาจุดวิกฤตโดยพิจารณา $f'(x) = 0$ นั่นคือ

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = (x+3)(x-1) = 0$

ดังนั้น $x = 1$ หรือ $x = -3$ เป็นจุดวิกฤต

	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
ค่าของ $x+3$	$-$	$+$	$+$
ค่าของ $x-1$	$-$	$-$	$+$
ค่าของ $(x+3)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

บนช่วง $(-\infty, -3)$ ได้ว่า $f'(x) > 0$

บนช่วง $(-3, 1)$ ได้ว่า $f'(x) < 0$

บนช่วง $(1, \infty)$ ได้ว่า $f'(x) > 0$

ดังนั้นที่ $x = -3$ เป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุด และค่าสูงสุดนั้นคือ $f(-3) = 5$ และที่ $x = 1$ เป็นจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุด และค่าต่ำสุดนั้นคือ $f(-3) = -27$

ตัวอย่าง 3.2.9. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)^3$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ หาจุดวิกฤตโดยพิจารณา $f'(x) = 0$ นั่นคือ $f'(x) = 3(x-1)^2 = 0$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต ซึ่งเป็นจุดที่อาจให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด แต่เมื่อพิจารณา $f'(x) = 3(x-1)^2$ จะเห็นว่า $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$ ดังนั้น $x = 1$ ไม่ใช่จุดที่ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ลองวาดกราฟ

ทฤษฎีบท 3.2.10. ถ้า f หาอนุพันธ์ได้อันดับที่สองที่จุดวิกฤติ x_0 และ

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ที่ x_0

หมายเหตุ ถ้า $f'' = 0$ แล้วสรุปผลยังไม่ได้ ต้องตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 3.2.11. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 4$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ

พิจารณา $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) = 0$ ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต
และ $f''(x) = 2 > 0$ ดังนั้นจุด $x = 1$ ให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และค่าต่ำสุดนั้นคือ
$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 3$

ตัวอย่าง 3.2.12. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = x^2e^{-x}$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2x - x^2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2x - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 2 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$f''(x) = -(2x - x^2)e^{-x} + e^{-x}(2 - 2x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

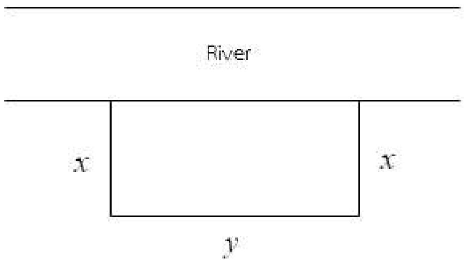
ที่จุด $x = 0$ จะเห็นว่า $f''(0) = [2 - 4(0) + 0]e^0 = 2 > 0$ ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดที่ $x = 0$
และที่จุด $x = 2$ จะเห็นว่า $f''(2) = (2 - 8 + 4)e^{-2} = \dfrac{-2}{e^2} < 0$ ดังนั้น f มีค่าสูงสุดที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 3.2.13. จงหาจุดที่ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

สำหรับการแก้ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. ตีความปัญหา แล้ววาดภาพประกอบ
2. กำหนดตัวแปรประกอบในรูปภาพ
3. สร้างฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (มักจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรมากกว่า 1 ตัว)
4. ใช้ข้อมูลในปัญหากำจัดตัวแปรในฟังก์ชันให้เหลือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวเพื่อที่จะได้ใช้ทฤษฎีบทการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
5. หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันตัวแปรเดียวจากข้อ 4) แล้วหาจุดวิกฤต (นั่นคือ แก้สมการ $f' = 0$)
6. ตรวจสอบค่าของตัวแปรที่จุดวิกฤตว่าเป็นค่าที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งหรืออันดับสอง

ตัวอย่าง 3.2.14. ชาวนาคนหนึ่งมีวัสดุสำหรับทำรั้วได้ยาว $1,000$ เมตร ถ้าเขาต้องการล้อมรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านหนึ่งของพื้นที่ที่ต้องการล้อมเป็นแม่น้ำ จงหาขนาดของพื้นที่ที่มากที่สุดซึ่งเขาสามารถล้อมรั้วได้



วิธีทำ

ให้ x และ y เป็นความกว้าง และความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามลำดับ และ A เป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จึงได้ความสัมพันธ์

$$A = xy$$

จากโจทย์ เราทราบว่า $2x + y = 1,000$ ดังนั้น $y = 1,000 - 2x$ จึงได้

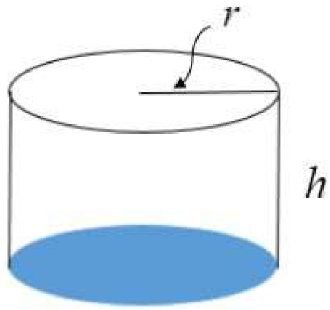
$$A = x(1,000 - 2x) = 1,000x - 2x^2$$

จากความรู้เรื่องค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน จึงทราบว่า A อาจมีขนาดมากที่สุดเมื่อ $\frac{dA}{dx} = 0$ ดังนั้น

$$\frac{dA}{dx} = 1,000 - 4x = 0 \text{ จะได้ } x = 250 \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

ต่อไปจะทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่ 2 นั่นคือ $\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0$ ดังนั้น ที่ $x = 250$ จึงเป็นจุดที่ทำให้ A มีค่ามากที่สุด เมื่อ $x = 250$ จะได้ $y = 1,000 - 2x = 1,000 - 2(250) = 500$ และ $A = 250 \times 500 = 125,000$ ตารางเมตร เป็นขนาดพื้นที่ที่มากที่สุด

ตัวอย่าง 3.2.15. บริษัทแห่งหนึ่งต้องการผลิตกระป๋องรูปทรงกระบอกปิดซึ่งมีปริมาตร $1,000$ ซีซี ($= 1$ ลิตร) โดยใช้วัสดุในการผลิตน้อยที่สุดเท่าใด



วิธีทำ

ให้ h และ r เป็นความสูง และรัศมีของกระป๋องรูปทรงกระบอกตามลำดับ มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ S เป็นพื้นที่ผิวของกระป๋องรูปทรงกระบอกมีหน่วยเป็นตารางเซนติเมตร จึงได้ความสัมพันธ์

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

โจทย์กำหนดให้กระป๋องมีปริมาตร $1,000$ ลบ.ซม. ดังนั้น ปริมาตรทรงกระป๋อง คือ $\pi r^2 h = 1,000$ ดังนั้นจึงได้

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

จากความรู้เรื่องค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน จึงทราบว่า S อาจมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\frac{dS}{dr} = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dr} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 = 2000 \\
&\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{2000}{4\pi} = \frac{1000}{2\pi} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่ 2 นั่นคือ

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} = 4\pi + \frac{4000}{\left(\frac{1000}{2\pi}\right)} = 12\pi > 0$$

ดังนั้น ที่ $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ จึงเป็นจุดที่ทำให้ S มีค่าน้อยที่สุด

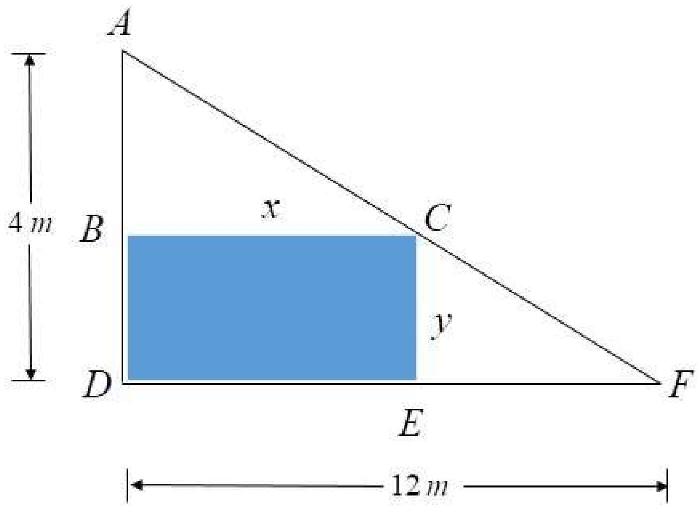
นั่นคือ ขนาดกระป๋องทรงกระบอกจะมีพื้นที่ผิวน้อยที่สุดเมื่อมีรัศมี $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ เซนติเมตร และความสูง $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{1000}{\pi\left[\frac{100}{(2\pi)^{2/3}}\right]} = \frac{10\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$ เซนติเมตร

และขนาดพื้นที่ผิวน้อยที่สุด คือ

$$S = 2\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2 + \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}} = \frac{2000\pi}{(2\pi)^{2/3}} + 200\sqrt[3]{2\pi}$$

ตารางเมตร

ตัวอย่าง 3.2.16. ต้องการล้อมรั้วสนามเด็กเล่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สามารถบรรจุอยู่ภายในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากเป็น 4 เมตร และ 12 เมตร จงหาขนาดพื้นที่สนามเด็กเล่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุด



วิธีทำ ให้ x และ y แทนความยาวและความกว้างของสนามเด็กเล่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A = xy$

พิจารณา Δ คล้าย : $\Delta\ ABC \sim \Delta ADF$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{4-y}{4} &= \frac{x}{12} \\ 4-y &= \frac{x}{3} \\ y &= 4-\frac{x}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$A = xy = x\left(4-\frac{x}{3}\right) = 4x - \frac{x^2}{3}$$

จะเห็นว่า ค่า A จะมากที่สุดเมื่อ $\frac{dA}{dx} = 0$ นั่นคือ $\frac{dA}{dx} = 4 - \frac{2}{3}x = 0$ จะได้ $x = 6$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $y = 4 - \frac{x}{3} = 4 - \frac{6}{3} = 2$

ต่อไปจะทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่ 2 นั่นคือ

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{2}{3} < 0$$

ดังนั้นสนามเด็กเล่นมีพื้นที่มากที่สุดเมื่อมีความยาว $x = 6$ เมตรและความกว้าง $y = 2$ เมตร และมีพื้นที่มากที่สุดนั้นเป็น $A = 6 \times 2 = 12$ ตารางเมตร

แบบฝึกหัด 3.2.17. จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จากข้อ $1.1) - 1.10)$ จงหา

    a. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน

    b. แสดงว่าจุดวิกฤตนั้นๆให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน (ใช้การพิจารณาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรืออนุพันธ์อันดับสอง)

    c. หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับจุดวิกฤตในแต่ละจุด

1.1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

1.2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$

1.3) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x - 4)$

1.4) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 99$

1.5) $f(x) = x - \sin x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

1.6) $f(x) = \cos^2 x + \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

1.7) $f(x) = x \ln x$

1.8) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1.9) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1.10) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

2. จงหาขนาดของทรงกระบอกกลมที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุลงในกรวยกลม ซึ่งมีรัศมี 12 หน่วยและสูง 10 หน่วย เมื่อแกนของกรวยกลมอยู่แนวเดียวกันกับทรงกระบอกกลม

3. จงหาขนาดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเส้นรอบรูปยาวที่สุดที่สามารถบรรจุในวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. จงหาจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ ที่อยู่ใกล้จุด $(0, 3)$ มากที่สุด

3.3 รูปแบบยังไม่กำหนดและกฎของโลปิตาล

3.3.1 กฎของโลปิตาลและรูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$

ทฤษฎีบท 3.3.1. ให้ L เป็นจำนวนจริงใดๆ หรือ ∞ หรือ $-\infty$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บน (a, b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับ $a < x < b$ และ

1. ถ้า $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

2. ถ้า $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ และ $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

3. ถ้า $c \in (a,b),\ \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ และ $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

4. ถ้าลิมิตของ f และ g เป็น ∞ หรือ $-\infty$ แล้ว ผลลัพธ์ $1, 2$ และ 3 ยังเป็นจริง

ตัวอย่าง 3.3.2. จงหา $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 2x - 1}{3x}$

ตัวอย่าง 3.3.3. จงหา $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$

ตัวอย่าง 3.3.4. จงหา $\lim_{x\to 0} \dfrac{4\tan x}{1 - \sec x}$

ตัวอย่าง 3.3.5. จงหา $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

ตัวอย่าง 3.3.6. จงหา $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

ตัวอย่าง 3.3.7. จงหา $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{e^x}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x} \\
&= \dots \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3.2 รูปแบบยังไม่กำหนด $(0)\infty$ และ $\infty - \infty$

วิธีหาค่าทำได้โดยเปลี่ยนรูป ให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วหาค่าลิมิตโดยใช้ความรู้ใน หัวข้อ 3.3.1

ตัวอย่าง 3.3.8. จงหา $\lim_{x\to 0} (x^2 \ln x)$

วิธีทำ เมื่อ $x \to 0$ จะเห็นว่า $x^2 \to 0$ และ $\ln x \to -\infty$

วิธีการ คือ เปลี่ยนรูป $x^2 \ln x$ เป็น $\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\dfrac{-\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.9. จงหา $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$

วิธีทำ เมื่อ $x\to 0$ จะเห็นว่า $\dfrac{1}{x}\to\infty$ และ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\to\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{xe^x-x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x+e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.3.3 รูปแบบยังไม่กำหนด 0^0, ∞^0 และ 1^∞

ถ้า $y=(f(x))^{g(x)}$ อยู่ในรูป 0^0, ∞^0 และ 1^∞ แล้ว $\ln y = g(x)\ln f(x)$ จะอยู่ในรูป $(0)\infty$ ต่อไปหาค่า $\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))$ และพิจารณาค่า $\lim_{x\to a} y$ จาก $\lim_{x\to a}\ln y$ ดังนี้

1. ถ้า $\lim_{x\to a}\ln y = L$ แล้ว $\lim_{x\to a} y = \mathrm{e}^L$

2. ถ้า $\lim_{x\to a} \ln y = \infty$ แล้ว $\lim_{x\to a} y = \infty$

3. ถ้า $\lim_{x\to a} \ln y = -\infty$ แล้ว $\lim_{x\to a} y = 0$

ถ้าแทน $a \to a$ ด้วย $a \to \infty$ หรือ $a \to -\infty$ ก็ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 3.3.10. จงหา $\lim_{x\to 0^+} x^x$

วิธีทำ เมื่อ $x \to 0^+$ จะเห็นว่า $x^x \to 0^0$

ให้ $y = x^x$ ต้องการหาค่า $\lim_{x\to 0^+} y$

ต่อไปทำการ take ln ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \ln x \\
\lim_{x\to 0^+} (\ln y) &= \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+} (\ln y) = 0$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$

ตัวอย่าง 3.3.11. จงหา $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

วิธีทำ เมื่อ $x \to 1$ จะเห็นว่า $x^{\frac{1}{x-1}} \to 1^\infty$

ให้ $y = x^{\frac{1}{x-1}}$

ต่อไปทำการ take ln ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\begin{aligned}
\ln y &= \left(\frac{1}{x-1}\right)\ln x = \frac{\ln x}{x-1} \\
\lim_{x\to 1}(\ln y) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 1$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} y = e^1 = e$$

ตัวอย่าง 3.3.12. จงหา $\lim_{x\to 0}\,(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

วิธีทำ เมื่อ $x \to 0$ จะเห็นว่า $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \to \infty$ และ $\dfrac{1}{\ln x} \to 0$

ให้ $y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

ต่อไปทำการ take ln ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{\ln x}\ln(\cot x) = \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \\
\lim_{x\to 0}(\ln y) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1/\cot x)(-\csc x\cot x)}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\csc x}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0} -x\csc x \\
&= \lim_{x\to 0} -x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\ln(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0}(\ln y) = 0$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\,(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

แบบฝึกหัด 3.3.13. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}, n \in \mathbb{N}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

7. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\arctan x}$

8. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x$

9. $\lim_{x\to -0} (e^x + 3x)^{\dfrac{1}{x}}$

10. $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2}\right)$

11. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (e^{\tan x} \sec^2 x)$

12. $\lim_{x\to \infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$

13. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{3}{x}}}{x^2}$

14. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln^5 x}{x^2}$