1104126

แคลคูลัส 1

Calculus 1

ศราวุธ แสนการุณ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติ และคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Limits and Continuity)

1.1 นิยามของลิมิต (Definition of Limits)

ในหัวข้อนี้ เราสนใจหาค่า $y = f(x)$ ของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a โดยที่ x ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ a

เช่น พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x) = \frac{3x^3-6x^2}{4x-8}$

สังเกตว่า 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ f เพราะว่าถ้าเราแทน $x = 2$ จะทำให้ส่วนเป็น 0 ซึ่งไม่นิยาม

ให้ x เข้าใกล้ 2 แล้ว พิจารณาว่า y มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวอะไรหรือไม่ ดังตาราง

x	$y = f(x)$
1.999997	2.999991
1.999998	2.999994
1.999999	2.999997
2.000001	3.000003
2.000002	3.000006
2.000003	3.000009

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แล้ว $y = f(x)$ จะเข้าใกล้จำนวนจริง 3

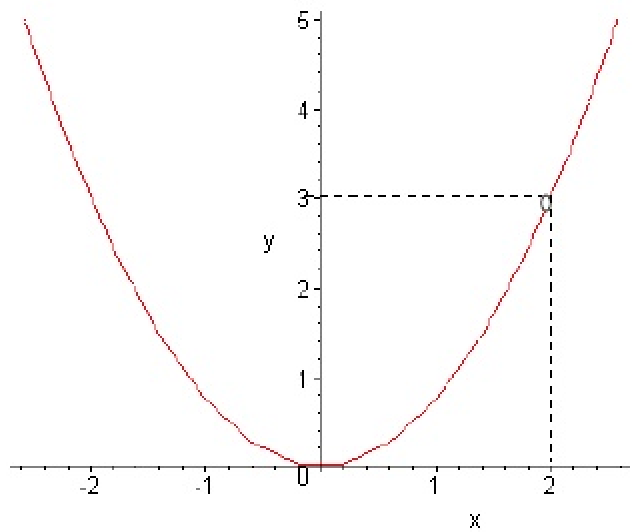
อย่างไรก็ตาม จากตาราง เราไม่อาจแน่ใจได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แล้ว $y = f(x)$ เข้าใกล้ 3 เพราะว่าเราไม่สามารถคำนวณทุกค่า x ที่เข้าใกล้ 2 ได้

สำหรับการให้เหตุผลที่ดีกว่าการใช้ตาราง เราจะพิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ดังนี้

แยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วน $y = f(x) = \frac{3x^2(x-2)}{4(x-2)}$

เนื่องจาก $x \neq 2$ จะได้ว่า $y = f(x) = \frac{3x^2}{4}$

ดังนั้นกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นกราฟพาราโบลา $y = f(x) = \frac{3x^2}{4}$ โดยที่ไม่มีจุด $x \neq 2$ ดังรูป



โดยทางเรขาคณิต เราอาจแน่ใจได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แล้ว $y = f(x)$ เข้าใกล้ 3 เหมือนดังตาราง

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้าฟังก์ชัน f นิยามบนบางช่วงเปิดที่บรรจุจำนวนจริง a (อาจจะไม่นิยามที่ a)

ถ้า x เข้าใกล้ a แล้ว $y = f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว L เพียงตัวเดียว เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L และเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

หรืออาจเขียนเป็น $f(x) = L$ เมื่อ $x \to a$

เช่นในตัวอย่างที่ผ่านมาจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{3x^3 - 6x^2}{4x - 8} = L$$

ข้อสังเกต $f(a)$ และ L อาจจะเท่ากัน หรือ ไม่เท่ากันก็ได้

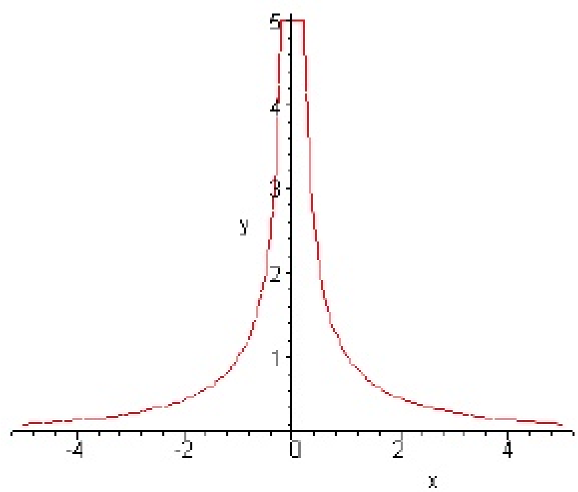
ต่อไปจะแสดง ตัวอย่างกรณีที่ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ $x = a$ ซึ่งมี 2 แบบคือ

(1) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใด ๆ เลย

(2) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวมากกว่าหนึ่งค่า

ตัวอย่าง 1.1 *ให้* $f(x) = \frac{1}{|x|}$ *จงหา* $\lim_{x\to 0} f(x)$

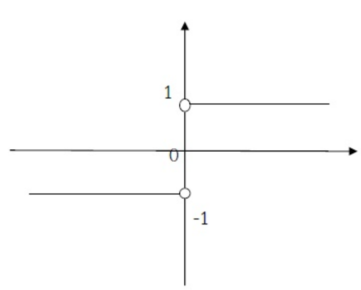
วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{|x|}$ คือ



สังเกตว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 0 แล้ว y ไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใดเลย ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 1.2 *ให้* $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ *จงหา* $\lim_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ



จะเห็นได้ว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวสองค่าคือ 1 และ -1 ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

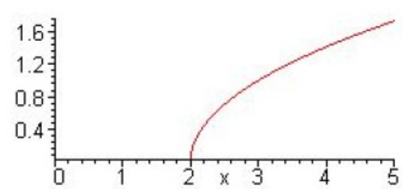
ถ้าฟังก์ชัน f หาค่าได้บนบางช่วงเปิด (c, a) และเมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ แล้ว $y = f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว L แล้วเราจะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ L เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

ถ้าฟังก์ชัน f หาค่าได้บนบางช่วงเปิด (a, c) และเมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ แล้ว $y = f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว R แล้วเราจะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ R เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = R$$

ตัวอย่าง 1.3 *ให้* $f(x) = \sqrt{x-2}$ *จงหา*
1. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ *2.* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *3.* $\lim_{x\to 2} f(x)$



วิธีทำ 1. เมื่อ $x > 2$ แล้ว $x - 2 > 0$ จะได้ว่า $f(x) = \sqrt{x-2}$ เป็นจำนวนจริง จากรูปจะเห็นว่า $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

2. เมื่อ $x < 2$ แล้ว $x-2 < 0$ จะได้ว่า $f(x) = \sqrt{x-2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง($f(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x < 2$) ดังนั้น $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ไม่มี

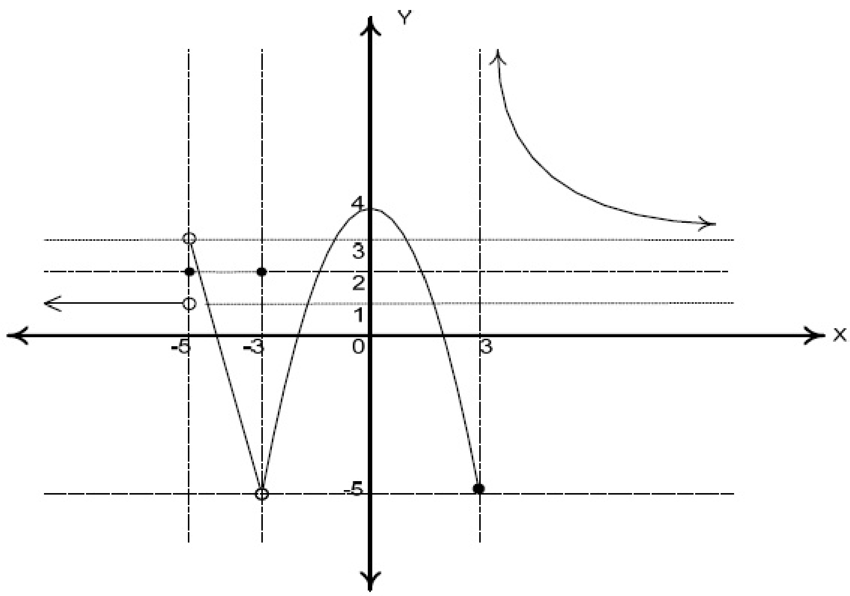
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีเพราะว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ไม่มี

ทฤษฎีบท 1.4 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *ก็ต่อเมื่อ*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

นิยาม 1.5 *ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนบางช่วงเปิดที่บรรจุ a (อาจจะหาค่าไม่ได้ที่ a) และให้ L เป็นจำนวนจริงที่เป็นค่าคงตัว เราจะกล่าวว่า*
$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะต้องมี $\delta > 0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x \in D_f$ และ $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \epsilon$

ตัวอย่าง 1.6 *ให้ฟังก์ชัน $f(x)$ มีกราฟดังนี้*



จงหา

$1. \lim_{x\to -5^+} f(x) =$	$2. \lim_{x\to -5^-} f(x) =$ ....
$3. \lim_{x\to -5} f(x) =$	$4. \lim_{x\to 0^+} f(x) =$ ....
$5. \lim_{x\to 0^-} f(x) =$	$6. \lim_{x\to 0} f(x) =$ ....
$7. \lim_{x\to 3^+} f(x) =$	$8. \lim_{x\to 3^-} f(x) =$ ....
$9. \lim_{x\to 3} f(x) =$	$10. \lim_{x\to \infty} f(x) =$ ....
$11. \lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$12. f(-5) =$ ....

1.2 ทฤษฎีบทของลิมิต (Theorem on limits)

ทฤษฎีบท 1.7 *ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีลิมิตที่จุด $x = a$ แล้ว ลิมิตของ $f(x)$ มีเพียงค่าเดียว*
นั่นคือ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} f(x) = R$ แล้ว $L = R$

ทฤษฎีบท 1.8 *ให้ a และ c เป็นจำนวนจริงค่าคงตัว*

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

ตัวอย่าง 1.9 *จงหา*

1. $\lim_{x\to 3} 8 = ...$ 2. $\lim_{x\to 0} -2 = ...$

3. $\lim_{x\to 1} \pi = ...$ 4. $\lim_{x\to 5} 2^3 = ...$

5. $\lim_{x\to 4} \sin\pi = ...$ 6. $\lim_{x\to 6} x = ...$

7. $\lim_{x\to \mathrm{e}} x = ...$ 8. $\lim_{x\to \cos 0} x = ...$

ทฤษฎีบท 1.10 *ให้ a, c, L และ M เป็นค่าคงที่*
ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x) = LM$

3. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}\ ; M \neq 0$

4. $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$

ทฤษฎีบท 1.11 *ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว*

1. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

2. $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$

ตัวอย่าง 1.12 *จงหา*

1. $\lim_{x\to 2}\left(5x^3 + 3x^2 - 6\right) =$

2. $\lim_{x\to 1}(3x+4)^5 =$

ทฤษฎีบท 1.13 *ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนาม(polynomial function) และ a เป็นจำนวนจริงค่าคงตัว แล้ว $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$*

ให้ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม(polynomial function) ได้ว่า $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ เมื่อ $q(a) \neq 0$

ตัวอย่าง 1.14 จงหา

1. $\lim_{x\to 2} \left(5x^3 + 3x^2 - 6\right) =$ ....

2. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{5x^2-2x+1}{4x^3-7}\right) =$ ....

ทฤษฎีบท 1.15 *ให้ $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ หรือ (n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่และ $\lim_{x\to a} f(x) > 0$) แล้ว $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$*

ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ m และ $n \neq 0$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ตัวหารร่วมมากเป็น 1 จะได้ว่า $\lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ (สมมุติว่า $L > 0$ ถ้า n เป็นเลขคู่)

ตัวอย่าง 1.16 จงหา

1. $\lim_{x\to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9} =$ ....

2. $\lim_{x\to 64} \left(x^{\frac{1}{6}} - 4x^{\frac{2}{3}} + 9\right) =$ ....

ทฤษฎีบท 1.17 (Sandwich Theorem) *ให้ $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุกในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x (อาจจะยกเว้นที่จุด $x = a$) จะได้ว่า ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ แล้ว $\lim_{x\to a} h(x) = L$*

ตัวอย่าง 1.18 จงใช้ *sandwich theorem* พิสูจน์ว่า $\lim_{x\to a} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$

ตัวอย่าง 1.19 *โดยอาศัย Sandwich Theorem จะแสดงได้ว่า*

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

2. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ตัวอย่าง 1.20 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$ ....

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} =$ ....

ทฤษฎีบท 1.21 *ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันชนิดที่*

1. $f(x) = g(x)$ *ทุก x บนบางช่วงเปิดที่บรรจุ a (อาจจะไม่เท่ากันที่ a)*
2. $\lim_{x\to a} g(x) = L$
   แล้วจะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ตัวอย่าง 1.22 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} =$

ถ้าแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^-$ หรือ $x \to a^+$ แล้วทฤษฎีบทต่างๆในหัวข้อนี้ ยังคงเป็นจริง

แบบฝึกหัด 1.23 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)*

1. $\lim_{x\to 2}(4x+3)$ 2. $\lim_{x\to -5^+}\sqrt{x^2+5}$

3. $\lim_{x\to 3}(x-2)^7$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

5. $\lim_{t\to 6}8(t-5(t-7)$ 6. $\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$

7. $\lim_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$ 8. $\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

9. $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$ 10. $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

11. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$ 12. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$

13. $\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1}$ 14. $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

15. $\lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1}$ 16. $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

17. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 18. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

19. $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ 20. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

21. $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}$ 22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2+x}$

23. $\lim_{x\to 2}f(x)$ *เมื่อ* $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\leqslant 2 \\ 2x+1 & ; x>2 \end{cases}$

1.3 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ (Limits involving infinity)

อนันต์ (infinity) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง

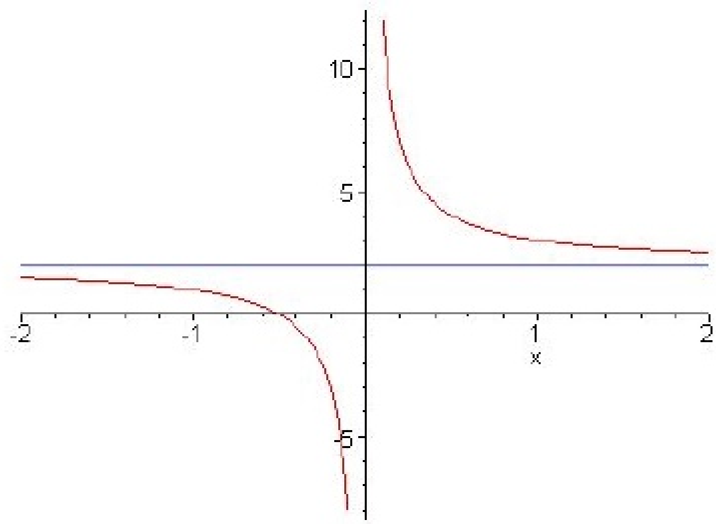
เราใช้เพื่อแสดงพฤติกรรมของฟังก์ชัน เมื่อค่าในโดเมนหรือเรนจ์ของมันเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด

เช่น เรากล่าวว่า "ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์" จะหมายความว่า ลิมิตของ f เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด

และเมื่อกล่าวว่า "ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ลบอนันต์(minus infinity) ($-\infty$) จะหมายถึง ลิมิตของ f เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

1.3.1 ลิมิต(ค่าจริง)ที่จุดอนันต์ (Finite Limits at infinity)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x} + 2$



จากกราฟของ $y = f(x) = \frac{1}{x} + 2$ จะเห็นว่าเมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{x} + 2 \to 2$ นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2$

และในทำนองเดียวกัน $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2$

ในกรณีทั่วไป $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ หมายความว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง L

และทำนองเดียวกัน $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ก็หมายความว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัดแล้วค่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L

ลิมิตของผลบวก ผลคูณ และผลหาร ในหัวข้อที่ 1.2 ยังคงเป็นจริงเมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$

ทฤษฎีบท 1.24 *ให้ k เป็นจำนวนจริงบวกและ c เป็นจำนวนจริงค่าคงตัว จะได้ว่า*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

สำหรับการหา $\lim_{x\to\infty} f(x)$ หรือ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะนั้นสามารถทำได้โดยหารทั้งเศษและส่วนของ $f(x)$ ด้วย x^n โดยที่ n เป็นกำลังที่มากที่สุดของ $f(x)$ ที่ปรากฏในส่วน

ตัวอย่าง 1.25 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+x+2} =$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{x^4+1} =$

ถ้า $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ และ $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & ; n = m \\ 0 & ; n < m \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 1.26 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x+7}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3-4x+1}$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$
6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$
8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{\frac{2}{3}}-4}$

1.3.2 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x = a$ (Infinite limits at $x = a$)

ทฤษฎีบท 1.27 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า*

1. $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$
2. $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} \infty & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\infty & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 1.28 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$

2. $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2}$

ทฤษฎีบท 1.29 *ให้ a, c, L และ $I = \infty$ หรือ $I = -\infty$*
ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = I$ แล้ว

1. $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = I$
2. $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} I & ; L > 0 \\ \infty & ; L < 0 \text{ และ } I = -\infty \\ -\infty & ; L < 0 \text{ และ } I = \infty \end{cases}$
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \begin{cases} I & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \infty & ; \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่ และ } I = \infty \end{cases}$

5. $\lim_{x\to a}(g(x))^n = \begin{cases} I & \textit{เมื่อ } n \textit{ เป็นจำนวนคี่} \\ \infty & ; \textit{เมื่อ } n \textit{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

สำหรับทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา และถ้า $L = 0$ แล้ว $g(x)f(x)$ จะอยู่ในรูปแบบที่ยังไม่กำหนด $(0)\infty$ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

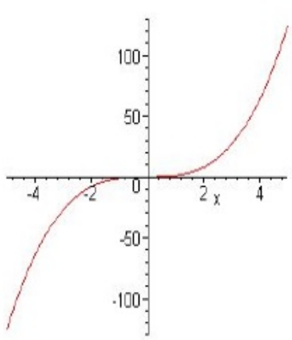
ตัวอย่าง 1.30 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{(x-2)^3}+5\right)$

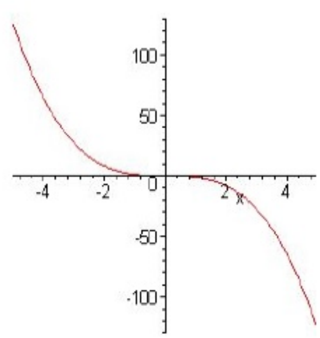
2. $\lim_{x\to 4^+}\frac{-5}{x^2-3x}$

1.3.3 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ (Infinite limits at infinity)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ และ $f(x) = -x^3$



$f(x) = x^3$



$f(x) = -x^3$

จากกราฟจะเห็นว่าเมื่อ $x \to \infty$ จะทำให้ $x^3 \to \infty$ นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

และในทำนองเดียวกัน $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$ และ $\lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$

ทฤษฎีบท 1.31 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ จะได้ว่า*

1. $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\infty & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 1.32 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to-\infty} x^2 =$ ....

2. $\lim_{x\to-\infty} x^5 =$ ....

ทฤษฎีบท 1.33 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ จะได้ว่า*

1. $\lim_{x\to\infty} (f(x)+g(x)) = \begin{cases} \infty & ; n\ I = J = \infty \\ -\infty & ; n\ I = J = -\infty \end{cases}$
2. $\lim_{x\to\infty} (f(x)g(x)) = \begin{cases} \infty & ; \text{เมื่อ } I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน} \\ -\infty & ; \text{เมื่อ } I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายต่างกัน} \end{cases}$

ถ้า $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ และ $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ $n > m$ แล้ว

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m}$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้ว หาค่าลิมิตอันหลังนี้ต่อไป

ตัวอย่าง 1.34 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้*

1. $\lim_{x\to\infty}\left(3x^2+x+1\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(5-4x^2\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4+4x^3+2x-1}{1-x+x^2-x^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+x+1}{1+2x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

แบบฝึกหัด 1.35 *จงหาค่า* $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *และ* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ของฟังก์ชันดังต่อไปนี้ (เป็น ∞, $-\infty$ หรือไม่มีลิมิตในกรณีที่ลิมิตด้านซ้ายไม่เท่ากับลิมิตด้านขวา)*

1. $f(x) = \frac{5}{x-4}; a = 4$ 2. $f(x) = \frac{5}{4-x}; a = 4$

3. $f(x) = \frac{8}{(2x+5)^3}; a = -\frac{5}{2}$ 4. $f(x) = \frac{3x}{(x+8)^2}; a = -8$

5. $f(x) = \frac{2x^2}{(x^2-x-2)^3}; a = -1$ 6. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}; a = 3$

แบบฝึกหัด 1.36 *จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$ 2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4-7x}{2+3x}$

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{4x^3+5x}$ 4. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{8+x^2}{x(x+1)}}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+1}{6x^3+2x^2-7}$ 6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(x+2)}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3+1}$ 8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-3)}{\sqrt{x^2+1}}$

9. $\lim_{x\to-\infty} |x|$ 10. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x-1}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}}{5x^{\frac{1}{5}}-7x^{\frac{1}{7}}}$

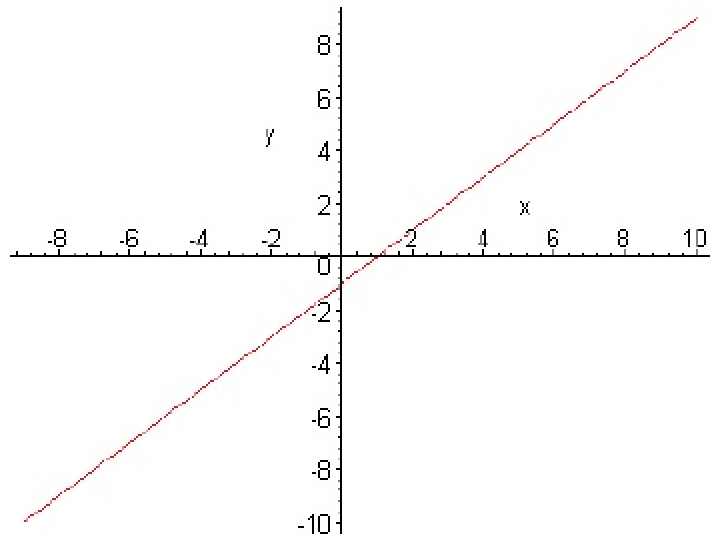
1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน(Continuity of Functions)

สำหรับความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เราจะหมายถึงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งต่อเนื่องโดยไม่มีการขาดของเส้นกราฟ

นิยาม 1.37 *ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงและ a เป็นค่าคงตัว จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*

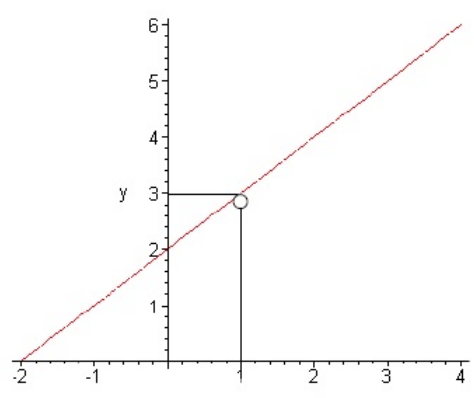
จากนิยามข้างบนจะได้ว่า $y = f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ต่อเมื่อ
1) $f(a)$ หาค่าได้
2) $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้
3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่งเงื่อนไข ที่ไม่สอดคล้อง แล้วเราจะกล่าวว่า ไม่ต่อเนื่อง (discontinuous) ที่ a

ตัวอย่าง 1.38 *1.* $y = f(x) = x - 1$



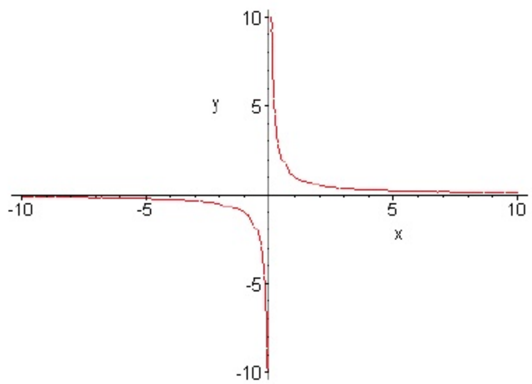
f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด* a *ที่เป็นจำนวนจริง เนื่องจาก* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x-1) = a-1 = f(a)$

2. $y = g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$



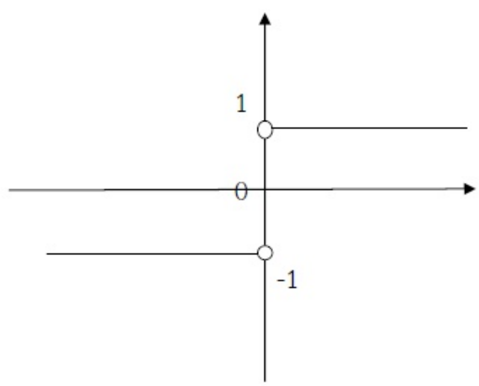
g *เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้(Removable discontinuity) ที่* $a = 1$

3. $y = h(x) = \frac{1}{x}$



h *เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่จุด* $a = 0$

4. $y = u(x) = \frac{|x|}{x}$



u *เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด* $a = 0$

นิยาม 1.39 *ฟังก์ชัน* $y = f(x)$ *ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด* $x = a$ *ถ้า*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ *ต่อเนื่องทางขวาที่จุด* $x = a$ *ถ้า*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

นิยาม 1.40 *ให้* $y = f(x)$ *เป็นฟังก์ชัน* a, b *เป็นค่าคงที่ โดยที่* $a < b$ *จะกล่าวว่า*

1. f *ต่อเนื่องบนช่วงเปิด* (a, b) *ถ้า* f *ต่อเนื่องที่ทุกจุด* $x \in (a, b)$

2. f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) และ f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x=a$ และต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x=b$

สำหรับความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงอื่นๆ นิยามได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.41 *ฟังก์ชันพหุนาม $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง*

ทฤษฎีบท 1.42 *ฟังก์ชันตรรกยะ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x),Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุด a ชนิดที่ $Q(a)\neq 0$*

ตัวอย่าง 1.43 *$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุด a ยกเว้น $a=$ ....*

ทฤษฎีบท 1.44 *ถ้าฟังก์ชัน f และ g ต่อเนื่องที่ $x=a$ แล้ว*

1. $f+g$, $f-g$, fg ต่อเนื่องที่ทุกจุด $x=a$
2. $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ทุกจุด $x=a$ ที่ $g(a)\neq 0$

ทฤษฎีบท 1.45 *ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=a$ และ g ต่อเนื่องที่ $y=f(a)$ แล้ว $g\circ f$ ต่อเนื่องที่ทุกจุด $x=a$*

ทฤษฎีบท 1.46 (Intermediate Value Theorem) *ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ w เป็นค่าของฟังก์ชันที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $c\in[a,b]$ ชนิดที่ $f(c)=w$*

ตัวอย่าง 1.47 *กำหนดให้* $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ;-1\leqslant x<0 \\ 2x & ;0<x<1 \\ 1 & ;x=1 \\ -2x+4 & ;1\leqslant x<2 \\ 0 & ;2\leqslant x<3 \end{cases}$

1. $f(-1)$ หาค่าได้หรือไม่
2. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ หาค่าได้หรือไม่
3. $f(1)$ หาค่าได้หรือไม่

4. $\lim_{x\to 1} f(x)$ *หาค่าได้หรือไม่*
5. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ *หรือไม่*
6. $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ *หรือไม่*
7. f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่* $x = 1$ *หรือไม่*
8. f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่* $x = -1$ *หรือไม่*

2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน(Derivative of Functions)

2.1 นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Definition of Derivative of Functions)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$

จะเรียกผลต่างของ $x_1 - x_0$ ว่าส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x เขียนแทนด้วย Δx ดังนั้น

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

และจะเรียกผลต่างของ $f(x_1) - f(x_0)$ ว่าส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y เขียนแทนด้วย Δy ดังนั้น

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

เราจะเรียกอัตราส่วนของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $[x_0, x_1]$

ตัวอย่าง 2.1 *กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$ จงหา Δy และ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก x_0 ไปเป็น x_1 โดยที่ $x_0 = 1$ และ $x_1 = 1.1$*

นิยาม 2.2 *ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x (Differentiable at x) ถ้า*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \; ; h = \Delta x$$

หาค่าได้ และจะเรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่ x (Derivative of f at x) เขียนแทนด้วย $f'(x)$

หมายเหตุ

1. ถ้า $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าไม่ได้ เราจะบอกว่าฟังก์ชัน f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด x
2. สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่ x ใด ๆ คือ $f'(x)$ หรือจะเขียนแทนด้วย $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx} = y' = D_x f(x)$

ตัวอย่าง 2.3 *จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน* $y = 2x^2 + 3x - 6$

1. ที่จุด x ใด ๆ

2. ที่จุด $x = 1$

นิยาม 2.4 *ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ด้านขวาได้ที่ x (Right-hand differentiable at x) ถ้า*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ด้านขวา (Right-hand derivative) ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f'(x^+)$
อนุพันธ์ด้านซ้าย (Left-hand derivative) ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f'(x^-)$ นิยามในทำนองเดียวกัน

จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ถ้าอนุพันธ์ด้านขวาและอนุพันธ์ด้านซ้ายหาค่าได้และเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.5 *จงใช้อนุพันธ์ด้านซ้ายและด้านขวาแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = |x - 5|$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 5$*

นิยาม 2.6 *ฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) ก็ต่อเมื่อ f สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบน (a,b)*

ฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f สามารถหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ หาอนุพันธ์ด้านขวาได้ที่ $x=a$ และด้านซ้ายได้ที่ $x=b$

ตัวอย่าง 2.7 *ฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x}$ สามารถหาอนุพันธ์ในช่วงต่อไปนี้ได้หรือไม่ จงอธิบาย*

1. $[0,2]$
2. $[1,3]$

ทฤษฎีบท 2.8 *ให้ c,n เป็นจำนวนจริง*

1. $\frac{d}{dx}c=0$
2. $\frac{d}{dx}x=1$
3. $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$

ตัวอย่าง 2.9 *จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้*

$1.\frac{d}{dx}3=$ .... $2.\frac{d}{dx}3^2=$ ....

$3.\frac{d}{dx}\pi=$ .... $4.\frac{d}{dx}\sin 3=$ ....

$5.\frac{d}{dx}x=$ .... $6.\frac{d}{dx}x^3=$ ....

$7.\frac{d}{dx}x^{-5}=$ .... $8.\frac{d}{dx}\frac{1}{x^4}=$ ....

$9.\frac{d}{dx}\sqrt{x}=$ .... $10.\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=$ ....

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง เส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x, y)$ และมีความชันเท่ากับ $f'(x)$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

จะเรียกความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P ใด ๆ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

จะเห็นว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y)

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$y - y_0 = f'(x)\,(x - x_0)$$

ตัวอย่าง 2.10 *ให้* $y = f(x) = x^2$ *จงหา*

1. *สมการเส้นสัมผัสกราฟที่จุด* $(2, 4)$
2. *หาจุดที่สมการเส้นสัมผัสกราฟมีความชันเท่ากับศูนย์*

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว $y' = f'(x)$ ก็ยังคงเป็นฟังก์ชันของ x

ดังนั้น ถ้าเราสามารถหาอนุพันธ์ของ $y' = f'(x)$ เทียบกับ x ได้อีกแล้วจะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์นี้ว่า อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และจะใช้สัญลักษณ์

$$y'' = f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะใช้สัญลักษณ์ $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ แทนอนุพันธ์อันดับ n ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

ตัวอย่าง 2.11 *จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้*

$1. \frac{d^3}{dx^3}x^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2. \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3. \frac{d^{100}}{dx^{100}}x^{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ทฤษฎีบท 2.12 (อนุพันธ์และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน) *ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f จะต่อเนื่องที่ a*

สำหรับบทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง

2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Differentiation of Algebraic function)

ทฤษฎีบท 2.13 *ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า*

1. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

ข้อสังเกต

1. $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

2. $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

ตัวอย่าง 2.14 *จงหา $f'x$ เมื่อ*

$1.f(x) = \left(x^3 - 2\right)(x - 1)$

$2.f(x) = \frac{6x^2+4x+5}{x^4+8x+1}$

$3.f(x) = \left(3x^2 + 4x - 2\right)\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)$

$4.f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

2.3 2.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Differentiation of composite functions)

ทฤษฎีบท 2.15 (กฎลูกโซ่ (Chain Rule)) *ถ้า $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(f(x))$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้วจะได้ว่า $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

ถ้า $z = g(f(x)) = g(y)$ และ $y = f(x)$ นั่นคือ z เป็นฟังก์ชันของ y และ y

เป็นฟังก์ชันของ x และ $\frac{dz}{dy} = g'(y) = g'(f(x))$ จะได้ว่า

$$\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

ตัวอย่าง 2.16 *จงหา* $\frac{dz}{dx}$ *เมื่อ* $z = y^5$ *และ* $y = 1 + 2x^2$

ตัวอย่าง 2.17 *จงหา* $\frac{dy}{dx}$ *เมื่อ* $y = \left(2x^4 + 8x^2 + 1\right)^5$

ทฤษฎีบท 2.18 *ให้* $y = f(x)$ *เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ* $x = g(y) = f^{-1}(y)$ *ถ้า* $f'(x) \neq 0$ *แล้ว*

$$g'(y) = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

2.4 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ทฤษฎีบท 2.19

$$\frac{d}{dx}c = 0 \qquad (1)$$

ตัวอย่าง 2.20 จงหา

1.$\frac{d}{dx}3 =$ .... 2.$\frac{d}{dx}3^2 =$ ....

3.$\frac{d}{dx}\pi =$ .... 4.$\frac{d}{dx}\sin 3 =$ ....

ทฤษฎีบท 2.21 *ให้* $u = f(x)$ *จะได้ว่า*

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

ตัวอย่าง 2.22 จงหา

1.$\frac{d}{dx}x =$ .... 2.$\frac{d}{dx}x^3 =$ ....

3.$\frac{d}{dx}x^{-5} =$ .... 4.$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^4} =$ ....

5.$\frac{d}{dx}\sqrt{x} =$ .... 6.$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{x}} =$ ....

ตัวอย่าง 2.23 จงหา $\frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x^2 - x + 1\right)^{10}$

ตัวอย่าง 2.24 จงหา $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

ทฤษฎีบท 2.25 *ให้* $u = f(x)$ *จะได้ว่า*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}a^u &= a^u \ln a \frac{du}{dx} \ ; a > 0 & (3) \\ \frac{d}{dx}\mathrm{e}^u &= \mathrm{e}^u \frac{du}{dx} & (4) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.26 จงหา $\frac{d}{dx}3^{\left(x^2+2x-2\right)}$

ตัวอย่าง 2.27 จงหา $\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

ทฤษฎีบท 2.28 *ให้* $u = f(x)$ *จะได้ว่า*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log_a |u| &= \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx} \ ; a > 0 & (5) \\ \frac{d}{dx}\ln u &= \frac{1}{u}\frac{du}{dx} & (6) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.29 จงหา $\frac{d}{dx}\log_2 2x + 1$

ตัวอย่าง 2.30 จงหา $\frac{d}{dx}\ln\left(x^3 + 2x\right)$

ทฤษฎีบท 2.31 *ให้* $u = f(x)$ *จะได้ว่า*

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx} \tag{7}$$
$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx} \tag{8}$$

ตัวอย่าง 2.32 *จงหา* $\frac{d}{dx}\sin(3x-1)$

ตัวอย่าง 2.33 *จงหา* $\frac{d}{dx}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$

ทฤษฎีบท 2.34 *ให้* $u = f(x)$ *จะได้ว่า*

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx} \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx} \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u\cot u\frac{du}{dx} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccsc} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \tag{18}$$

ตัวอย่าง 2.35 *จงหา* $\frac{d}{dx}\cos^5(3x)$

ตัวอย่าง 2.36 *จงหา* $\frac{d}{dz}\sec\left(2z+1\right)^2$

ตัวอย่าง 2.37 *จงหา* $\frac{d}{dz}\mathrm{e}^x \ln x^2$

ตัวอย่าง 2.38 *จงหา* $\frac{d}{dx}x^2 \sin^4 x$

ตัวอย่าง 2.39 *จงหา* $\frac{d}{dx}(4x+3)^4(x+1)^{-3}$

ตัวอย่าง 2.40 *จงหา* $\frac{d}{dx}\sec\sqrt{x}\tan\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

แบบฝึกหัด 2.41 *จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้*

1. $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	2. $\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$
3. $\sqrt{3-x}$	4. $\frac{1}{21}(3x-2)^7+\left(4-\frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
5. $x\tan(2\sqrt{x})+7$	6. $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$
7. $\cot\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	8. $x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$

แบบฝึกหัด 2.42 *จงหา* y''

1. $y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$	2. $y=(1-\sqrt{x})^{-1}$
3. $y=\frac{1}{9}\cot(3x-1)$	4. $y=9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

2.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Differentiation)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $y = f(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการ นั้น เราจะถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และใช้กฎการหาอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วมาช่วยในการหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 2.43 *ให้* $y = f(x)$ *เป็นฟังกันที่สอดคล้องกับสมการ* $y^2 - x = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

แบบฝึกหัด 2.44 *กำหนดให้* $y = f(x)$ *สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้ จงหา* y'

1. $8x^2 + y^2 = 10$ 2. $4x^3 - 2y^3 = x$

3. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$ 4. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

แบบฝึกหัด 2.45 *จงหาความชันของกราฟที่จุด* P

1. $xy + 16 = 0\ ;\ P(-2, 8)$

2. $y^2 - 4x^2 = 5\ ;\ P(-1, 3)$

2.6 การหาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึม (Logarithmic Differentiation)

ตัวอย่าง 2.46 *จงใช้การหาอนุพันธ์ของลอการิทึม หา* $\frac{dy}{dx}$

1. $y = x^x$

2. $y = x^\pi \pi^x$

3. $y = (x+1)^x$

4. $y = x^{\left(4+x^2\right)}$

5. $y = (x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4$

6. $y = \frac{\left(x^2+2x+9\right)^3}{\sin(2x^3+3x+4)}$

2.7 การหาอนุพันธ์ของสมการอิงตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการ $x = t+1$ กับ $y = t+2$

จะเห็นว่าสมการดังกล่าวประกอบด้วย ปริมาณ x, y, t และ ในแต่ละค่าของ t ก็จะทำให้ได้ค่า x หนึ่งค่า และค่า y หนึ่งค่า

ถ้าเราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ที่ค่า t เดียวกัน เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือ $y = x+1$

เรียกปริมาณ t ว่าตัวแปรเสริม (Parameter)และเรียกสมการ $x = t+1$ กับ $y = t+2$ ว่าสมการอิงตัวแปรเสริม

กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม $x = f(t)$ กับ $y = g(t)$ ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $f'(t) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

โดยทั่วไป

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

ตัวอย่าง 2.47 *จงหา* $\frac{dy}{dx}$ *และ* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ของสมการอิงตัวแปรเสริม*

1. $x = 3t + 2\mathrm{e}^{5t+7}, y = \cos t + 2\sin t + 9t$

2. $x = \cos t + 2t, y = \mathrm{e}^t$

3. $x = 2t + 1, y = 2t$

4. $x = \ln|t+2|, y = 2^t$