完全性定理

目次

1　命題論理の完全性

命題論理とは，真偽が定まったさまざまな命題（原子命題）を論理演算子で結合した命題についての論理の体系をいう．命題論理の完全性定理は，命題論理における真なる命題は必ず証明できることを主張する．

命題の真偽に関する議論を**意味論**，証明に関する議論を**構文論**という．ここではまず命題論理の意味論，続いて構文論について述べ，完全性定理の証明を行う．

1.1　命題論理の意味論

定義 1.1

$p_0, p_1, p_2, \ldots$ を**原子命題**とし，集合 Prop を次のように帰納的に定義する．

1. p が原子命題のとき，$p \in \mathrm{Prop}$.
2. $A, B \in \mathrm{Prop}$ のとき，$\neg A, A \to B \in \mathrm{Prop}$.
3. 以上によって定まるもののみが Prop に属す．

Prop の元を**命題**という．

以降，帰納的定義に関する 3 つ目の条件は省略する．またここでは否定 $\neg$，含意 $\to$ のみを論理演算子として認め，論理積 $A \wedge B$，論理和 $A \wedge B$ はそれぞれ $\neg(A \to \neg B), \neg A \to B$ の略記とする．

定義 1.2

原子命題を真偽値 $\mathbf{T}, \mathbf{F}$ に割り当てる関数 v は，各命題の真偽を定める．この関数 v を，次のように一般の命題から真偽値への

関数 V に拡張する．

$$
\begin{aligned}
V(p) &= \quad v(p) \quad p\text{ が原子命題のとき} \\
V(\neg A) &= \begin{cases} \mathbf{T} & V(A) = \mathbf{F}\text{ のとき} \\ \mathbf{F} & \text{それ以外} \end{cases} \\
V(A \to B) &= \begin{cases} \mathbf{T} & V(A) = \mathbf{F}\text{ または } V(B) = \mathbf{T}\text{ のとき} \\ \mathbf{F} & \text{それ以外} \end{cases}
\end{aligned}
$$

このようにして定まる V を，**真理値関数**という．

定義 1.3

$A \in \mathrm{Prop}$ が $\Sigma \subset \mathrm{Prop}$ の**トートロジー的帰結**であるとは，

$$
\begin{gathered}
\text{任意の真理値関数 } V \text{ に対し，} \\
(\forall B \in \Sigma, V(B) = \mathbf{T}) \implies V(A) = \mathbf{T}
\end{gathered}
$$

が成り立つことをいう．このことを

$$\Sigma \vDash A$$

と書く．

特に Σ が空集合のときは単に $\vDash A$ と書き，A は**トートロジー**であるという．また，すべての $B \in \Sigma$ に対し $V(B) = \mathbf{T}$ となる V が存在しないときは，任意の命題 A について $\Sigma \vDash A$ となる．

命題 1.4

任意の $A, B, C \in \mathrm{Prop}$ に対し，次が成り立つ．

1. $\models A \to (B \to A)$

2. $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B)) \to (A \to C))$

3. $\models (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

証明 1. は次のようにしてわかる．ある V に対して $V(A \to (B \to A)) = \mathbf{F}$ とすると，$V(A) = \mathbf{T}$ かつ $V(B \to A) = \mathbf{F}$ である．$V(B \to A) = \mathbf{F}$ より $V(B) = \mathbf{T}$ かつ $V(A) = \mathbf{F}$ であるが，これは $V(A) = \mathbf{T}$ に矛盾する．ゆえに仮定は誤りで，どのような V に対しても $V(A \to (B \to A)) = \mathbf{T}$ である． $\square$

2., 3. も同じようにしてわかる．また，ここでは解説しないが，真理値表を書いてもよい．

1.2 命題論理の構文論

証明は，公理に始まる命題の連鎖といえる．ここではウカシェビッチ (Lukasiewicz) の公理と呼ばれる，次の 3 つの命題を用いる．

P1: $A \to (B \to A)$

P2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B)) \to (A \to C))$

P3: $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

以上の 3 つを**公理**と呼ぶ．

定義 1.5

命題の有限列 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ は命題の集合 Σ に対し，次の条件を満たすとき **Σ における A_n の証明**という．

各 $0 \leq k \leq n$ について，次のいずれかが成り立つ．

1. A_k は公理か，Σ に属する．
2. ある $i, j < k$ が存在して，A_j が $A_i \to A_k$ の形をしている（三段論法）．

Σ における A の証明が存在するとき

$$\Sigma \vdash A$$

と書き，**A は Σ で証明可能**であるという．Σ が空集合のときは単に $\vdash A$ と書き **A は証明可能**であるという．Σ における A の証明が存在しないとき $\Sigma \nvdash A$ と書く．

定義より，証明は一意でないことに注意されたい．

命題 1.6

任意の $A \in \mathrm{Prop}$ に対し，$A \to A$ は証明可能である．

証明 次の命題列が $A \to A$ の証明である．

$$\begin{aligned}
A_0 :&\quad A \to ((A \to A) \to A) && : \mathrm{P1} \\
A_1 :&\quad (A \to ((A \to A) \to A)) \\
&\qquad \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) && : \mathrm{P2} \\
A_2 :&\quad (A \to (A \to A)) \to (A \to A) && : A_1 = A_0 \to A_2 \\
A_3 :&\quad A \to (A \to A) && : \mathrm{P1} \\
A_4 :&\quad A \to A && : A_2 = A_3 \to A_4
\end{aligned}$$

$\square$

定理 1.7（演繹定理）

ある仮定 A を用いて B が証明できるとき，A 以外の仮定のみから $A \to B$ が証明できる．すなわち，$\Sigma \subset \mathrm{Prop}$ として

$$\Sigma \cup \{A\} \vdash B \implies \Sigma \vdash A \to B$$

証明 $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ とし，その証明を $B_0, B_1, \ldots, B_k$ とする．k に関する数学的帰納法により，すべての k について $\Sigma \vdash B$ が成り立つことを示す.

(i) $k = 0$ のとき.

この場合 $i, j < k$ が存在しないので $B_0 (= B)$ は公理であるか $\Sigma \cup A$ の元である.

$B \neq A$ のとき,

$$\begin{array}{lll} A_0: & B & : \text{公理か } \Sigma \text{ の元} \\ A_1: & B \to (A \to B) & : \mathrm{P1} \\ A_2: & A \to B & : A_1 = A_0 \to A_2 \end{array}$$

が $A \to B$ の証明である.

$A = A$ のときは, $\vdash A \to A$ の証明が $\Sigma \vdash A \to B$ の証明になっている．結局，$k = 0$ のとき $\Sigma \vdash A \to B$ が成り立つ.

(ii) $k' < k$ で定理が成り立つと仮定して，$k > 0$ のとき.

$B_k (= B)$ が公理であるか $\Sigma \cup A$ の元である場合は (i) と同様．$i, j < k$ があって B_j が $B_i \to B_k$ の形をしているとき.

$\Sigma \cup \{A\} \vdash B_i, B_j$ であり，$i, j < k$ だから仮定より $\Sigma \vdash A \to B_i, A \to B_j$ である．その証明をそれぞれ $A_0, \ldots, A_m (= A \to B_i)$ と $A_{m+1}, \ldots, A_n (= A \to B_j)$ とする．これらを連ねた命題列 $A_0, \ldots A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ に，次の 3 つの命題を付け加える．

$$
\begin{array}{lll}
A_{n+1}: & (A \to (B_i \to B_k)) & \\
 & \to ((A \to B_i) \to (A \to B_k)) & : \mathrm{P2} \\
A_{n+2}: & (A \to B_i) \to (A \to B_k) & : A_{n+1} = A_n \to A_{n+2} \\
A_{n+3}: & A \to B_k & : A_{n+2} = A_m \to A_{n+3}
\end{array}
$$

得られた命題列 $A_0, \ldots, A_{n+3}$ は $A \to B_k (= B)$ の証明になっていて，$\Sigma \vdash A \to B$ が言えた．

□

なお演繹定理の逆は三段論法より明らかである．演繹定理の応用として，次の命題が成り立つ．

命題 1.8

$\vdash \neg\neg A \to A$ が成り立つ．

証明 演繹定理より，$\neg\neg A \vdash A$ が言えればよい．

$$
\begin{array}{lll}
A_0: & \neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) & : \mathrm{P1} \\
A_1: & \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A & : A_1 = \neg\neg A \to A_0 \\
A_2: & (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) & : \mathrm{P3} \\
A_3: & \neg A \to \neg\neg\neg A & : A_2 = A_1 \to A_3 \\
A_4: & (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A) & : \mathrm{P3} \\
A_5: & \neg\neg A \to A & : A_4 = A_3 \to A_5 \\
A_6: & A & : A_5 = \neg\neg A \to A_6
\end{array}
$$

ゆえに，$\vdash \neg\neg A \to A$ が成り立つ． □

続いて矛盾を定義し，それに続く補題を証明していく．無矛盾性は，証明の非存在性について議論するにあたって重要になる概念である．

定義 1.9

命題 $\neg(p_0 \to p_0)$ を**矛盾**といい，$\perp$ と書く．$\Sigma \vdash \perp$ となるとき Σ は**矛盾する**といい，そうでないとき，すなわち $\Sigma \nvdash \perp$ のとき**無矛盾である**という．

補題 1.10

矛盾する集合からは任意の命題が証明できる．すなわち，$\Sigma \subset \mathrm{Prop}$ として

$$\Sigma \vdash \perp \implies \forall A \in \mathrm{Prop}, \Sigma \vdash A$$

証明 任意の命題 A に対し，P1 より $\perp \to (\neg A \to \perp)$ が言える．これと，仮定 $\Sigma \vdash \perp$ から三段論法を用いて $\neg B \to \perp$ が言える．$\perp$ は $\neg(p_0 \to p_0)$ であったから，P3 から $(p_0 \to p_0) \to A$ が言える．$\vdash p_0 \to p_0$ であるので任意の命題 A が証明できる． $\square$

補題 1.11

命題の集合 $\Sigma \subset \mathrm{Prop}$ に対し，ある命題 A で肯定も否定も証明できるものがあれば，その集合は矛盾している．すなわち，

$$\exists A \text{ s.t. } \Sigma \vdash A \text{ and } \Sigma \vdash \neg A \implies \Sigma \vdash \perp$$
$$(\text{i.e.} \quad \Sigma \nvdash \perp \implies \forall A \in \mathrm{Prop}, \Sigma \nvdash A \text{ or } \Sigma \nvdash \neg A)$$

証明 任意の命題 B に対し，P1 より $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ である．仮定 $\Sigma \vdash \neg A$ より三段論法を用いて $\Sigma \vdash \neg B \to \neg A$ で，P3 から $\Sigma \vdash A \to B$ である．$\Sigma \vdash A$ より三段論法を用いて B が言える．B として $\perp$ を取れば Σ は矛盾していることが分かる． □

補題 1.12

Σ から A が証明できることと，$\Sigma \cup \{\neg A\}$ が矛盾することは同値である．すなわち，

$$\Sigma \vdash A \iff \Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \perp$$
$$(\text{i.e. } \Sigma \nvdash A \iff \Sigma \cup \{\neg A\} \nvdash \perp)$$

証明 $(\Rightarrow)$ $\Sigma \vdash A$ を仮定すると，$\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash A, \neg A$ であるから補題 1.11 より $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \perp$ である．$(\Leftarrow)$ $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \perp$ なら，演繹定理より $\Sigma \vdash \neg A \to \perp$ が言える．$\perp$ は $\neg(p_0 \to p_0)$ であったから，P3 と三段論法で $\Sigma \vdash (p_0 \to p_0) \vdash A$ が言える．$\vdash p_0 \to p_0$ より $\Sigma \vdash A$ である． □

次の補題は，完全性定理の証明において要となるものである．

補題 1.13

無矛盾な集合に A か $\neg A$ を付け加えると，少なくとも一方は無矛盾である．すなわち，

$$\Sigma \nvdash \perp \implies \forall A \in \mathrm{Prop}, (\Sigma \cup \{A\} \nvdash \perp \text{ or } \Sigma \cup \{\neg A\} \nvdash \perp)$$

証明 仮定 $\Sigma \nvdash \perp$ と補題 1.11 より，任意の $A \in \mathrm{Prop}$ について $\Sigma \nvdash A$

または $\Sigma \nvdash \neg A$ である．

$\Sigma \nvdash A$ なら，補題 1.12 より $\Sigma \cup \{\neg A\} \nvdash \bot$ である．

$\Sigma \nvdash \neg A$ なら，補題 1.12 より $\Sigma \cup \{\neg\neg A\} \nvdash \bot$ である．ところで $\vdash \neg\neg A \to A$ であったから，$\Sigma \cup \{A\} \vdash \bot$ のとき，三段論法を使って $\Sigma \cup \{\neg\neg A\}$ から $\bot$ が証明できる．すなわち，$\Sigma \cup \{A\} \vdash \bot \implies \Sigma \cup \{\neg\neg A\} \vdash \bot$ である．この対偶から，$\Sigma \cup \{\neg\neg A\} \nvdash \bot \implies \Sigma \cup \{A\} \nvdash \bot$ である．ゆえに，$\Sigma \nvdash \neg A \iff \Sigma \cup \{\neg\neg A\} \nvdash \bot \implies \Sigma \cup \{A\} \nvdash \bot$ が言える．

結局，$\Sigma \nvdash \bot$ なら，任意の命題 A に対し，$\Sigma \cup \{A\} \nvdash \bot$ または $\Sigma \cup \{\neg A\} \nvdash \bot$ である． □

1.3 命題論理の完全性定理

補題の準備が終わったので，ここから完全性定理の証明を行う．

定理 1.14（完全性定理）

任意の $\Sigma \subset \mathrm{Prop}, A \in \mathrm{Prop}$ に対して，次が成り立つ．

$$\Sigma \vdash A \iff \Sigma \vDash A$$

なお，$\Sigma \vdash A \implies \Sigma \vDash A$ を**健全性**ともいう．

証明

($\Rightarrow$) $\Sigma \vdash A$ とし，その証明を $A_0, \ldots, A_n$ とする．n に関する数学的帰納法によって示す．

(i) $n = 0$ の場合，$A = A_0$ は公理か Σ の元である．公理はトートロジーであったし，A が Σ の元の場合，$\Sigma \vDash A$ の定義から $\Sigma \vdash A \implies \Sigma \vDash A$ が成り立つ．

(ii) $n' < n$ の場合で $\Sigma \vdash A \implies \Sigma \vDash A$ が成り立つと仮定して，$n > 0$ とする．A_n が公理か Σ の元であるときは (i) と同様である．$i, j < n$ に対して A_j が $A_i \to A_n$ の形をしているとき，$A_0, \ldots, A_i$ と $A_0, \ldots, A_i \to A_n$ はそれぞれ A_i と $A_i \to A_n$ の証明になっている．ゆえに帰納法の仮定から，$\Sigma \vDash A_i$ と $\Sigma \vDash A_i \to A_n$ が言える．$\Sigma \vDash A_i \to A_n$ であるから，$\to$ に関する真理値関数の定義から $\Sigma \nvDash A_i$ か $\Sigma \vDash A_n$ であるが，$\Sigma \vDash A_i$ であったので $\Sigma \vDash A_n$ が分かる．

これで健全性が言えた．

($\Leftarrow$) 対偶 $\Sigma \nvdash A \implies \Sigma \nvDash A$ を示す．$\Sigma \nvdash A$ なる A に対し $\Sigma \nvDash A$，すなわちある真理値関数 V が存在して，

$$(\forall B \in \Sigma, V(B) = \mathbf{T}) \text{ and } V(A) = \mathbf{F} \tag{i}$$

を満たすことを言えばよい．これから，そのような V を具体的に構成する．

　まずすべての命題を並べ，$A_0, A_1, A_2, \ldots$ のように番号を振り，

$$\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\neg A\}$$

とおく．$\Sigma \nvdash A$ であるから，補題 1.12 より Σ_0 は無矛盾である．ここから，

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n & (\Sigma_n \cup \{A_n\} \vdash \bot) \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} & (\Sigma_n \cup \{A_n\} \nvdash \bot) \end{cases}$$

と定めると各 Σ_n は無矛盾であり，これにより無限増加列 $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \cdots$ が得られる．Σ_∞ を

$$\Sigma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$$

と定めると，Σ_∞ も無矛盾である．なぜなら，もし $\Sigma_\infty \vdash \bot$ とすれば，その証明に使われる Σ_∞ に属する命題は有限個であるから，十分

大きな n について $\Sigma_n \vdash \perp$ となってしまう．これは各 Σ_n の無矛盾性に反する．Σ_∞ は無矛盾であるから，補題 1.11 より $A, \neg A$ の両方を含むことはない．また補題 1.13 より，A か $\neg A$ の少なくとも一方が Σ_∞ に属することになる．ゆえに Σ_∞ は，任意の命題 A について，A または $\neg A$ のいずれか一方のみを含むことが分かる，無矛盾な集合である．

Σ_∞ を用いて，(i) を満たす真理値関数 V を構成する．関数 V を，

$$V(A) = \begin{cases} \mathbf{T} & (A \in \Sigma_\infty) \\ \mathbf{F} & (A \notin \Sigma_\infty) \end{cases}$$

と定め，これが真理値関数であることを確かめる．

まず Σ_∞ が A または $\neg A$ の一方のみを含むから，$V(\neg A) = \mathbf{T} \iff V(A) = \mathbf{F}$ である．また Σ_∞ の無矛盾性から，$V(A \to B) = \mathbf{T} \iff V(A) = \mathbf{F}$ or $V(B) = \mathbf{T}$ である．さもなければ Σ_∞ は矛盾してしまう．ゆえに，V は真理値関数であることが分かった．

$\Sigma \cup \{\neg A\} \subset \Sigma_0 \subset \Sigma_\infty$ であるから，各 $B \in \Sigma$ に対して $V(B) = \mathbf{T}$ であり，かつ $V(A) = \mathbf{F}$ である．したがって，この真理値関数は (i) を満たす．求めていた真理値関数が存在することが分かり，これで完全性が示された． □

注意したいのは，$\Sigma \nvdash A$ は $\Sigma \vdash \neg A$ を意味しないという点である．例えば $\Sigma = \{p_0\}$ で，原子命題が p_0, p_1 のみであれば，明らかに p_1 に真を充てる真理値関数も偽を割り当てる真理値関数も存在する．すなわち，$\Sigma \nvDash p_1$ かつ $\Sigma \nvDash \neg p_1$ である．つまり，完全性定理から $\Sigma \nvdash A$ であり，かつ $\Sigma \nvdash \neg A$ である．

2　一階述語論理の完全性

一階述語論理は,「x は F である」といった形の文を形式的に記述することのできる論理の体系である．また「任意の x について」とか「ある x について」といった**量化**を記述することのできる体系でもあ

る．群などの代数構造，その他たいていの数学を記述するできる集合論も一階述語論理によって記述することができる．

一階述語論理も命題論理と同様に完全性が成り立つ．まず言語と呼ばれる記号の集まりを用意し，記号列として論理式等々を定義し，次いでそれらに意味を与える．そして形式的証明を定義し，真なる文と証明できる文が一致することを示す．

2.1 言語と項と論理式

形式的体系で用いられる記号は,

1. 論理記号: $\neg, \to, \forall$
2. 等号: $=$
3. 変数記号: $x_0, x_1, x_2, \dots$
4. 括弧: $(,)$
5. その体系に独自の記号

である．その体系独自の記号の集まりは言語と呼ばれる．

定義 2.1

関数や述語の引数の数を**元数** (arity) という．一階述語論理における**言語**とは，元数 n_i の関数記号 f_i の集まり F と元数 m_i の述語記号 P_j の集まり P，定数記号の集まり C の組

$$\begin{aligned} L &= (F, P, C) \\ &= (\{f_i \mid i \in I\}, \{P_j \mid j \in J\}, \{c_k \mid k \in K\}) \end{aligned}$$

である．また，元数を表す

$$\rho = (\{n_i \mid i \in I\}, \{m_j \mid j \in J\})$$

を言語 L の**類型** (similarity type) という．

ただし，関数記号や述語記号はどの集合の上においても定義されておらず，この段階では元数の定まった記号に過ぎない．

さて，言語が与えられて形式的体系に用いられる記号が定まると，さまざまな記号列を定義することができる．

定義 2.2

言語 L の**項** (term) は次のように帰納的に定義される記号列である．

1. 変数記号 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ は言語 L の項である．
2. 定数記号 c_k $(k \in K)$ は言語 L の項である．
3. $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ が L の項で f が L の n 変数関数記号のとき，$f(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ は L の項である．

定義 2.3

言語 L における**原子式**とは，次のように定義される記号列である．

1. 言語 L の項 s, t に対し，$s = t$ は L の原子式である．
2. P を L の m 項述語記号，$t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}$ を L の項とすると，$P(t_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$ は L の原子式である．

定義 2.4

言語 L の**論理式**は，つぎのように帰納的に定義される．

1. L の原子式は L の論理式である.

2. φ, ψ を L の論理式，x を変数記号として，

   - $\neg(\psi)$
   - $(\varphi) \to (\psi)$
   - $\forall x(\varphi)$

   は論理式である.

括弧は適宜省略する．論理式に現れる変数について，次の概念は重要である.

定義 2.5

$\forall x(\varphi)$ という論理式において，φ の中に現れる変数 x は**束縛されている**という．x が束縛された論理式から作られた論理式についても x は束縛されている．束縛された変数を**束縛変数**という．束縛されていない変数を**自由変数**という.

全ての変数が束縛された論理式を**文** (sentence) または**命題**という.

常識的な方法で，論理式の自由変数への項の代入を定義する．注意すべきなのは，代入する項に現れる変数が代入先で束縛されるような場合である．例えば $\forall y(\varphi(x,y))$ なる論理式の自由変数 y に項 t を代入するとき，項 t に変数 y が現れるなら，適当に変数を書き換えなければならない．その辺は普段無意識にやっていることであるから，まあ適当に自分で定義してくれ.

ここまでさまざまな定義をしたが，これらは構造を指定する上で必要になる骨組みのようなものである.

2.2　構造

実際に関数や述語として機能するのは構造によって指定される具体的な関数や述語である．

定義 2.6

類型 $\rho = (\{n_i \mid i \in I\}, \{m_j \mid j \in J\})$ を持つ言語 L の**構造**あるいは L-**構造**は，次の 4 つから成る組 $\mathfrak{A}$ である．

$$\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{A}}, C^{\mathfrak{A}})$$

- 対象の集合 A
- n_i 変数関数 $f_i^{\mathfrak{A}} : A^{n_i} \to A$ の集合 $F^{\mathfrak{A}} = \{f_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}$
- m_j 項述語 $P_j^{\mathfrak{A}} : A^{m_j} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ の集合 $P^{\mathfrak{A}} = \{P_j^{\mathfrak{A}} \mid j \in J\}$
- 定数の解釈 $C^{\mathfrak{A}} = \{c_k^{\mathfrak{A}} \in A \mid k \in K\}$

構造が 1 つ定まると，まず変数を含まない項に対してその構造における値を定めることができる．

定義 2.7

$\mathfrak{A}$ を L-構造とする．変数を含まない項 t に対して，その値 $t^{\mathfrak{A}}$ を次のように定める．

1. c_k の値は $c_k^{\mathfrak{A}}$ である．
2. $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ が変数を含まない L の項で，言語 L の m 変数関数 f に対応する $\mathfrak{A}$ の関数を $f^{\mathfrak{A}}$ とするとき，項 $f(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ の値は $f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}, t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}})$ である．

また，変数を含まない原子式に対して真偽を定めることができる．

定義 2.8

$\mathfrak{A}$ を L-構造として，変数を含まない原子式の真偽を次のように定める．

1. 変数を含まない項 s, t について，$s^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}$ のとき，$s = t$ は $\mathfrak{A}$ において真である．
2. P を m 項述語記号，$t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}$ を変数を含まない L の項として，$P^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}, t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}) = \mathbf{T}$ のとき，$P(t_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$ は真である．

ここから構造 $\mathfrak{A} = (A, F, P, C)$ を 1 つ固定して，一般の論理式の真偽を定義する．そのために，言語 L に定数記号を追加して新たな言語 L_A を用意する．追加する記号は A の各元 $a \in A$ に対応する記号 a^* である．

$$\begin{aligned} L_A &:= (A, F, P, C_A) \\ &= (A, F, P, C \cup \{a^* \mid a \in A\}) \end{aligned}$$

これに合わせて構造 $\mathfrak{A}$ を拡張した構造 $\mathfrak{A}_A$ を作る．ただし $a^{*\mathfrak{A}}$ の解釈は A の元 a とする．つまり $a^{*\mathfrak{A}} = a$ である．

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_A &:= (A,\ F^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{A}}, C_A^{\mathfrak{A}}) \\ &= (A,\ F^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{A}}, C^{\mathfrak{A}} \cup \{a^{*\mathfrak{A}} \mid a \in A\}) \end{aligned}$$

定義 2.9

次を満たす L_A の文の集合 $Th(\mathfrak{A}_A)$ を，構造 $\mathfrak{A}_A$ の**初等ダイヤグラム** (elementary diagram) という．

1. 変数を含まない L_A の原子式 φ について，$\varphi \in Th(\mathfrak{A}_A)$
$\iff$ φ が $\mathfrak{A}_A$ で真

2. $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{A}_A)$
$\iff$ $\varphi \notin Th(\mathfrak{A}_A)$

3. $\varphi \to \psi \in Th(\mathfrak{A}_A)$
$\iff$ $\varphi \notin Th(\mathfrak{A}_A)$ または $\psi \in Th(\mathfrak{A}_A)$

4. $\forall x\varphi(x)$
$\iff$ 任意の $a \in C_A$ について，$\varphi(a) \in Th(\mathfrak{A}_A)$

これによって一階述語論理における真偽が定義されたことになる.

定義 2.10

L の文 φ について，$\varphi \in Th(\mathfrak{A}_A)$ となるとき，φ は構造 $\mathfrak{A}$ で真であるといい,

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

と書く.

言語 L の集合 T が $Th(\mathfrak{A}_A)$ の部分集合になるとき，構造 $\mathfrak{A}$ は**理論** T の**モデル**であるといい,

$$\mathfrak{A} \models T$$

と書く.

これで一階述語論理の意味論が完成する.

定義 2.11

T を言語 L の集合，φ を L の文とする．T の任意のモデル $\mathfrak{A}$ において $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ となるとき φ は T の**帰結** (consequence) であるといい，

$$T \vDash \varphi$$

と書く．

2.3 証明

一階述語論理における証明は，命題論理を拡張した形で次のように定義される．

定義 2.12

一階述語論理の論理式の有限列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ は，次の条件を満たすとき，T **における** φ_n **の証明**という．

各 $0 \leq k \leq n$ について，次のいずれかが成り立つ．

1. φ_k が T に属す．
2. φ_k が次の公理のいずれかの形をしている．

   P1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

   P2. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

   P3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

   P4. $\forall x(\varphi(x)) \to \varphi(t)$

   P5. $x = x$

   P6. $x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$

3. （三段論法）$i, j < k$ に対して，φ_j が $\varphi_i \to \varphi_k$ の形をしている．

4. （一般化）$i < k$ に対して，φ_i が $\psi \to \theta(x)$ の形をしていて，φ_k が $\psi \to \forall x \theta(x)$ の形をしている．ただし x は自由変数として ψ に現れない．

ただし φ, ψ, θ は任意の論理式，t は任意の項，x, y は任意の変数，$\varphi(x), \theta(x)$ は自由変数 x を含む任意の論理式である．

T における φ の証明があるとき φ は T で**証明可能**であるといい，

$$T \vdash \varphi$$

と書く．そうでないとき，すなわち T における φ の証明が存在しないとき $T \nvdash \varphi$ と書く．

1., P1., P2., P3. と 4. は命題論理の証明と同様であるから，一階述語論理の全ての文を原子命題とれば，これに対して構造による真偽の割り当ては真理値関数になる．これによって，命題論理における定理に一階述語論理の文を代入したもの（例えば $\forall x(f(x)) \to \forall x(f(x))$ など）はいずれも一階述語論理の定理になる．

また，証明に $\varphi(x)$ という論理式が現れれば，

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1. & \varphi(x) & : \text{現れた } \varphi(x) \\
\varphi_2. & \varphi(x) \to ((x_0 = x_0) \to \varphi(x)) & : \mathrm{P1} \\
\varphi_3. & x_0 = x_0 & : \mathrm{P5} \\
\varphi_4. & (x_0 = x_0) \to \varphi(x) & : \varphi_2 = \varphi_3 \to \varphi_4 \\
\varphi_5. & (x_0 = x_0) \to \forall x \varphi(x) & : \text{一般化} \\
\varphi_6. & \forall x \varphi(x) & : \varphi_5 = \varphi_4 \to \varphi_6
\end{array}$$

という論理式の列によって $\forall x \varphi(x)$ が証明可能である．

2.4　ゲーデルの完全性定理

定理 2.13（健全性定理）

T で証明可能な文は T の帰結である．

$$T \vdash \varphi \implies T \vDash \varphi$$

証明　$T \vdash \varphi_n$ とし，その証明 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ の長さ n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_n = \varphi_0$ は T に属する文か公理である．

$$yappi$$

□

定理 2.14（演繹定理）

φ を次の文，ψ を論理式とする．このとき，次が成り立つ．

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff T \vdash \varphi \to \psi$$

証明　命題論理の場合と同様に，$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ における ψ の証明 $\psi_0, \ldots, \psi_k$ の長さ k についての帰納法で示す．

(i) $k = 0$ のときは，命題論理と同様にして $T \vdash \varphi \to \psi$ が言える．

(ii) $k' < k$ で定理が成り立つと仮定して，$k > 0$ のとき．

$\psi_k (= \psi)$ が公理であるか $T \cup \psi$ の元である場合と，$i, j < k$ について ψ_j が $\psi_i \to \psi_k$ の形をしている場合，命題論理の場合と同様にして $T \vdash \varphi \to \psi$ が言える．

$i < k$ について，η に x が自由変数として現れず，ψ_i が $\eta \to \theta(x)$，φ_k が $\eta \to \forall x \theta(x)$ の形をしている場合，$i < k$ であるから仮定より $T \vdash \varphi \to \psi_i$ の証明

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$$

が存在する．ただし $\varphi_n = \varphi \to \psi_i$ である．このとき，φ は文であるから自由変数を持たない．したがって φ_{n+1} として $\varphi \to \forall x(\psi_i)$，すなわち $\varphi \to \forall x(\eta \to \theta(x))$ を追加した論理式の列

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$$

は T における $\varphi \to \forall x(\eta \to \theta(x))$ の証明である．

あぱぱぱぱぱ

□

定義 2.15

矛盾とは，次の文

$$\neg \forall x_0 (x_0 = x_0)$$

のことである．これを $\perp$ と書く．$T \vdash \perp$ となるとき T は**矛盾する**といい，そうでないとき T は**無矛盾である**という．

補題 2.16

T が無矛盾ならば，任意の文 φ について $T \cup \{\varphi\}$ か $T \cup \{\neg\varphi\}$ のいずれか一方は無矛盾である．

証明　まず，$\forall x_0(x_0 = x_0)$ $\square$

補題 2.17

言語 L の理論 $T \cup \{\neg\forall x \neg\varphi(x)\}$ が無矛盾であるとき，L に新しい定数記号 c を加えた言語 L' において $T \cup \{\varphi(c)\}$ も無矛盾である（この c を **Henkin の定数記号** (Henkin constant) という）.

証明　$T \cup \{\varphi(c)\} \vdash \perp$ とする．このとき， $\square$

3　参考文献

田中一之, 鹿島亮, 角田法也, 菊池誠. 数学基礎論講義–不完全性定理とその発展. 日本評論社, 1997.

索 引