Tensor Algebra

目次

1　テンソル積の普遍性

テンソル積は，与えられたベクトル空間から新たなベクトル空間を作る操作である．テンソル積は次の普遍性によって特徴づけられる．

定義 1.1

体 K 上のベクトル空間 V_1, V_2 のテンソル積とは，次の性質 (**テンソル積の普遍性**) を満たす，K 上のベクトル空間 T と双線型写像 $\otimes : V_1 \times V_2 \to T$ の組 $(T, \otimes)$ である．

任意の双線型写像 $f : V_1 \times V_2 \to Z$ に対し，
ただ 1 つ線型写像 $f' : T \to Z$ が存在して，
$f = f' \circ \otimes$ を満たす.

上の定義において，$V_1 \times V_2$ はベクトル空間ではないということに注意されたい．

命題 1.2

テンソル積は，存在すれば同型を除いて一意である．すなわち，$(T_0, \otimes_0)$ と $(T_1, \otimes_1)$ がいずれも V_1, V_2 のテンソル積の普遍性を持つなら，同型写像 $\Psi : T_0 \to T_1$ で $\Psi \circ \otimes_0 = \otimes_1$ を満たすものが一意に存在する．

証明 $(T_0, \otimes_0)$ と $(T_1, \otimes_1)$ をともに V_1, V_2 のテンソル積とする．$\otimes_1$ は $V_1 \times V_2$ から T_1 への双線型写像であるから，$(T_0, \otimes_0)$ の普遍性から

$$\exists! \otimes_1^{(0)} : T_0 \to T_1 \text{ s.t. } \otimes_1^{(0)} \circ \otimes_0 = \otimes_1$$

この写像は一意である点を強調しておく．同様に，T_0 と T_1 の役割を入れ替えれば

$$\exists! \otimes_0^{(1)} : T_1 \to T_0 \text{ s.t. } \otimes_0^{(1)} \circ \otimes_1 = \otimes_0$$

が言える．ここで合成 $\otimes_0^{(1)} \circ \otimes_1^{(0)} : T_0 \to T_0$ を考えると，これは条件

$$(\otimes_0^{(1)} \circ \otimes_1^{(0)}) \circ \otimes_0 = \otimes_0$$

を満たしている．ところでこの条件は恒等写像 id_{T_0} によっても満たされるが，$(T_0, \otimes_0)$ の $\otimes_0$ についての普遍性からそのような写像は一意であった．つまり $\otimes_0^{(1)} \circ \otimes_1^{(0)} = \mathrm{id}_{T_0}$ である．同様に，$\otimes_1^{(0)} \circ \otimes_0^{(1)} = \mathrm{id}_{T_1}$ であることが言える．結局 $\otimes_1^{(0)}$ が求める一意な同型 Ψ である．$\otimes_1^{(0)} \circ \otimes_0^{(1)} : T_1 \to T_1$ □

この命題は，普遍性を満たすテンソル積の構造がただ 1 つであると言っている．しばしばテンソル積はこの命題が保証する同型写像によって同一視され，これを $V_1 \otimes V_2$ と書く．これによって，我々は具体的なテンソル積の構成方法を知らずとも，普遍性によってテンソル積の構造を捉えられるのである．

2　双線型写像としてのテンソル

テンソル積がその構成方法によらず，普遍性によって特徴づけられる構造を持つことは分かった．しかしわれわれはまだその存在性を確かめていない．ここではテンソル積の一例として，双線型汎関数の成す空間が普遍性を持つことを確認しよう．

命題 2.1

V_1, V_2 を有限次元のベクトル空間とする．

$$L := L(V_1^*, V_2^*; K) := \{f : V_1^* \times V_2^* \to K \mid f \text{ は双線型}\}$$

で $L = L(V_1^*, V_2^*; K)$ を定義する (平たく言えば L は $V_1 \times V_2$ 上の双線型な汎関数全体である)．このとき，$\Phi : V_1 \times V_2 \to L$ を

$$\Phi(v, w) : V_1^* \times V_2^* \ni (\varphi, \psi) \mapsto \varphi(v)\psi(w) \in K$$

と定めると，(L, Φ) は V_1, V_2 のテンソル積である．L は V_1, V_2 のテンソル積である．

証明　まずは Φ の well-defined 性, つまり各 $v \in V_1, w \in V_2$ について $\Phi(v, w)$ が $V_1^* \times V_2^*$ から L への双線型写像であることを確かめよう．1 つ目の変数についての双線型性は，$\varphi, \varphi' \in V_1^*$, $\psi \in V_2^*$, $a, a' \in K$, $v \in V_1$, $w \in V_2$ として，

$$\begin{aligned}\Phi(v, w)((a\varphi + a'\varphi), \psi) &= (a\varphi + a'\varphi')(v)\psi(w)\\ &= (a\varphi(v) + a'\varphi'(v))\psi(w)\\ &= a\varphi(v)\psi(w) + a'\varphi'(v)\psi(w)\\ &= a\Phi(v, w)(\varphi, \psi) + a'\Phi(v, w)(\varphi', \psi)\end{aligned}$$

から確かめられる．2 つ目の変数についても同様であるから，$\Phi(\varphi, \psi)$ は双線型である．したがって Φ は well-defined である．

続いて Φ の双線型性を確かめよう．1 つ目の変数については，$a, a' \in K$, $v, v' \in V_1$, $w \in V_2$ として，任意の $\varphi \in V_1^*, \psi \in V_2^*$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Phi(av + a'v', w)(\varphi, \psi) &= \varphi(av + a'v')\psi(w) \\
&= (a\varphi(v) + a'\varphi'(v))\psi(w) \\
&= a\varphi(v)\psi(w) + a'\varphi'(v)\psi(w) \\
&= a\Phi(v, w)(\varphi, \psi) + a'\Phi(v', w)(\varphi, \psi) \\
&= (a\Phi(v, w) + a'\Phi(v', w))(\varphi, \psi)
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
\Phi(av + a'v', w) = a\Phi(v, w) + a'\Phi(v', w)
$$

となることが分かる．

普遍性を確かめるために，任意の双線型写像 $f : V_1 \times V_2 \to Z$ を取り，$f' \circ \Phi = f$ となる $f' : L \to Z$ が一意的に存在することを示そう．V_1 と V_2 の基底をそれぞれ $(e_1, \ldots, e_{m_1}), (f_1, \ldots, f_{m_2})$ とすると，V_1^*, V_2^* の双対基底 $(e_1^*, \ldots, e_{m_1}^*), (f_1^*, \ldots, f_{m_2}^*)$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} \\
f_i^*(f_j) = \delta_{i,j}
\end{aligned}
$$

を満たす．任意の $g \in L$ に (φ, ψ) を代入すると，双対基底を用いて双線型性から

$$
\begin{aligned}
g(\varphi, \psi) &= g\left(\sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i e_i^*, \sum_{j=1}^{m_2} \psi f_j^*\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \varphi_i \psi_j g(e_i^*, f_j^*)
\end{aligned}
$$

となる．ところで

$$\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{m_1}\varphi_i e_i^*(e_j)=\sum_{i=1}^{m_1}\varphi_i\delta_{i,j}=\varphi_j$$
$$\psi(f_j)=\sum_{i=1}^{m_2}\psi_i f_i^*(f_j)=\sum_{i=1}^{m_2}\psi_i\delta_{i,j}=\psi_j$$

であるから，

$$\begin{aligned}g(\varphi,\psi)&=\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2}\varphi(e_i)\psi(f_j)g(e_i^*,f_j^*)\\&=\sum_{i,j}g(e_i^*,f_j^*)\Phi(e_i,f_j)\end{aligned}$$

となる．結局，任意の $g\in L$ は $\Phi(e_i,f_j)$ の線型結合で表されることが分かる．また，$g=0$ であれば各 e_i^*,f_j^* について $g(e_i^*,f_j^*)=0$ であるから，$\Phi(e_i,j_j)$ は線型独立である．したがって $\Phi(e_i,f_j)$ は L の基底を成す．この基底を用いて，$f':L\to Z$ を

$$f'(\Phi(e_i,f_j))=f(e_i,f_j)$$

で定める．定義から明らかに $f'\circ\Phi=f$ で，$f'\circ\Phi=f$ を満たすならどのような基底についても $f'(\Phi(e_i,f_j))=f(e_i,f_j)$ であるから，この定義は基底によらず，定まった写像は一意である．普遍性が確かめられたから，$L=L(V_1^*,V_2^*;K)$ は V_1 と V_2 のテンソル積である． $\square$

3　有限個のテンソル積

ここまで 2 つのベクトル空間のテンソル積を確認してきたが，2 つを n 個に拡張したくなるのが人情である．一般に n 個のベクトル空間のテンソル積

も同様の普遍性によって定義される.

定義 3.1

体 K 上のベクトル空間 $V_1, \dots, V_n$ のテンソル積とは, 次のテンソル積の普遍性を持つ, ベクトル空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ と多重線型写像 $\otimes^n : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ の組 $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \otimes^n)$ である.

任意の多重線型写像 $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to Z$ に対し,
ただ 1 つ線型写像 $f' : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to Z$ が存在して,
$f = f' \circ \otimes^n$ を満たす.

命題 3.2

テンソル積は，存在すれば同型を除いて一意である.

証明 2 つの場合と同様である.

□

2 つの場合と同様に，多重線型汎関数全体がテンソル積になる.

命題 3.3

V_i $(i = 1, \dots n)$ をそれぞれ m_i 次元ベクトル空間とする.

$$\begin{aligned} L &:= L(V_1^*, \dots, V_n^*; K) \\ &:= \{f : V_1^* \times \cdots \times V_n^* \to K \mid f \text{ は各変数について線型}\} \end{aligned}$$

とおき，$\Phi : V_1 \times \cdots \times V_n \to L$ を

$$\Phi(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) : \begin{array}{ccc} V_1^* \times \cdots \times V_n^* & \to & K \\ (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}) & \mapsto & \varphi^{(1)}(v^{(1)}) \cdots \varphi^{(n)}(v^{(n)}) \end{array}$$

とおくと，(L, Φ) は $V_1, \dots, V_n$ のテンソル積である.

証明 読者の演習とする (笑). □