距離空間の間の連続性は ε-δ と同値だよ

定義 0.1

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．$f : X \to Y$ が連続関数であるとは，

$$\forall U \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$

が成り立つことである．

まずは ε-δ を距離空間の言葉から位相っぽく言い換えよう．

$$\begin{aligned}
&\forall y \in X, d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \\
&\iff y \in N(x, \delta) \implies f(y) \in N(f(x), \varepsilon \\
&\iff y \in N(x, \delta) \implies y \in f^{-1}(N(f(x), \varepsilon) \\
&\iff N(x, \delta) \subset f^{-1}(N(f(x), \varepsilon)
\end{aligned}$$

$f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(B)$ であることに注意されたい．そこがミソである[1]．さて次の命題を示せば，距離空間での話が位相の言葉に直されたたことになる．

[1]ちなみに $f(x) \in f(A)$ の同値な言い換えは $\exists x' \in A$ s.t. $f(x') = f(x)$ である．不便だね．なお逆像の便利な性質は写像の well-defined 性に起因しているから，f に単射性を課せば $f(x) \in f(A) \iff x \in A$ となる．嬉しいね．

命題 0.2

距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ の間の写像 $f : X \to Y$ に関して，ε-δ 式の連続性は位相空間の間の写像の連続性と同値である．すなわち

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ s.t. } N_X(x,\delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(x),\varepsilon))$$
$$\iff \forall O' \in \mathfrak{N}_Y(f(x)), \exists O \in \mathfrak{N}_X(x) \text{ s.t. } O \subset f^{-1}(O')$$

が成り立つ．

証明 ($\Longrightarrow$) 任意の $O' \in \mathfrak{N}_Y(f(x))$ を取る．O' は $f(x)$ を含み開だから，$f(x) \in O'$ について $\exists\overline{\varepsilon}$ s.t. $N_X(x, \overline{\varepsilon}) \subset O'$ が言える．仮定より得られた δ について $N_Y(f(x), \delta) \in \mathfrak{N}_X(x)$ である．
($\Longleftarrow$)$N_Y(f(x)) \in \mathfrak{N}_Y(f(x))$ であるから，仮定よりある $O \in \mathfrak{N}_X(x)$ が取れて $O \subset f^{-1}(N_Y(f(x)))$ となる．O は x を含み開であるから $\exists\overline{\delta}$ s.t. $N_X(x,\delta) \subset O$ となる． □

位相の連続写像の定義の正当性がこれで納得できると思う．