極限（圏論）

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] \arrow[d, dotted, "\exists! u"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

目次

はじめに

圏論でいう極限とは，前順序集合の部分集合の下限や，集合の共通部分，集合や群などの直積，逆極限などをひとまとめに扱う概念である．本冊子では圏の定義や具体例から始めて，最終的には極限をコンマ圏の終対象として特徴づける．

1　圏とさまざまな対象

1.1　圏の定義と例

定義 1

圏 C とは，次の 3 つ

- クラス $\mathrm{ob}\, C$（$a \in \mathrm{ob}\, C$ を**対象**と呼ぶ）
- 各 $a, b \in \mathrm{ob}\, C$ に対して定まるクラス $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ の族 $\{\mathrm{Hom}_C(a, b)\}_{a,b \in \mathrm{ob}\, C}$（$f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ を a から b への**射**と呼び，$f\colon a \to b$ と書く．$\mathrm{Hom}_C(a, b)$ の添字 C はしばしば省略する）．
- 各 $a, b, c \in \mathrm{ob}\, C$ に対して定まる**合成**と呼ばれる写像

$$\begin{array}{rccc} \circ_{abc}\colon & \mathrm{Hom}(a, b) \times \mathrm{Hom}(b, c) & \to & \mathrm{Hom}(a, c) \\ & (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

  の族 $\{\circ_{abc}\}_{a,b,c \in \mathrm{ob}\, C}$

から成る 3 つ組 $(\mathrm{ob}\, C, \{\mathrm{Hom}(a, b)\}_{a,b \in \mathrm{ob}\, C}, \{\circ_{abc}\}_{a,b,c \in \mathrm{ob}\, C})$ であって，次の性質を満たすものである．以下では $\circ_{abc}$ の添字を省略する．

- $\forall a \in \mathrm{ob}\, C,\ \exists \mathrm{id}_a \in \mathrm{Hom}(a, a)$ s.t. $\forall b, c \in \mathrm{ob}\, C,\ \forall f \in \mathrm{Hom}(c, a),\ \forall g \in \mathrm{Hom}(a, b),$

$$\mathrm{id}_a \circ f = f, \quad g \circ \mathrm{id}_a = g.$$

- $\forall a, b, c, d \in \mathrm{ob}\, C,\ \forall f \in \mathrm{Hom}(a, b),\ \forall g \in \mathrm{Hom}(b, c),\ \forall h \in \mathrm{Hom}(c, d),$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

上の定義は，圏が “対象および合成が結合的で単位的な射から成る代数的構造” であることを言っている．恒等射が一意であることは容易に確かめられる．

例　対象をすべての集合，射を集合の間の写像，合成を写像の合成，恒等射を恒等写像とすれば，これは圏を成す．これを **Sets** と書く[*1]．

対象を群，射を群準同型写像とすればこれも圏を成す．これを **Grp** と書く．同様にして，環と環準同型の成す圏 **Ring**，位相空間と連続写像の成す圏 **Top**，多様体と C^∞ 写像の成す圏 **Mfd**，半順序集合と単調写像

[*1] 圏の定義で対象の集まりをクラスとしたのはこのような圏を考えたかったためである．クラスについては補足の節で述べる．

の成す圏 $\mathbf{Pos}$ などが定義できる．

例　群 $(G, *, e)$ は $\mathrm{ob}\, C = \{*\}$，$\mathrm{Hom}(*, *) = G$，$\mathrm{id}_* = e$ で，群の演算が射の合成であるような圏 C と見做せる．群の演算の結合律は合成の結合性に，単位律は恒等射の単位性に帰着される．可逆律は，任意の射 $g\colon * \to *$ に対してただ一つ $g^{-1}\colon * \to *$ が存在して $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e = \mathrm{id}_*$ となることを言っている．

例　半順序集合 $(P, \leq)$ は，$\mathrm{ob}\, C = P$ とし，

$$\mathrm{Hom}(a, b) = \begin{cases} \{i_{ba}\} & (a \leq b) \\ \varnothing & (a \not\leq b) \end{cases}$$

で定義される圏 C と見做せる．逆に，各 $a, b \in \mathrm{ob}\, C$ に対して $\mathrm{Hom}(a, b)$ が高々一点集合であるような圏は半順序集合と見做せる．

$\mathbb{N}$ の n 個の元から成る有限部分集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ に $\mathbb{N}$ から誘導される順序を入れた半順序集合を圏と見做したものを $\boldsymbol{n}$ と書く．特に，$\mathbf{0}$ は**空圏**と呼ばれる．$\mathbf{0}$ は対象も射も持たない圏である．

例　集合 X は，$\mathrm{ob}\, C = X$，

$$\mathrm{Hom}(a, b) = \begin{cases} \{\mathrm{id}_a\} & (a = b) \\ \varnothing & (a \neq b) \end{cases}$$

とすれば，圏と見做せる．このように射が恒等射のみである圏を**離散圏**という．離散圏は圏とみなした半順序集合の特殊な場合である．

圏から新たに圏を作ることもできる．

例　C を圏とする．$x \in \mathrm{ob}\, C$ を 1 つ固定し，圏 C/x を次のように定義する．

- 対象は任意の $a \in \mathrm{ob}\, C$ から x への射 $f\colon a \to x$.
- $f\colon a \to x$ から $g\colon b \to x$ への射 $k\colon f \to g$ は $g \circ k = f$ となる $k\colon a \to b$ である．すなわち次の図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

が可換になる（2 対象の間の射を得るのに複数の合成の仕方があり，どの合成の仕方でもそれらが等しくなる）射 k を f から g への射と定める．

$f\colon a \to x$ の恒等射は id_a，$k\colon f \to g, k'\colon g \to h$ の合成は $k' \circ k$ と定める．この圏を $x \in \mathrm{ob}\, C$ による**スライス圏**という．

例　圏 C に対し圏 C^{op} を

- $\mathrm{ob}\, C^{\mathrm{op}} = \mathrm{ob}\, C$.

- $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(b,a) = \mathrm{Hom}_C(a,b)$
- C^{op} の射 $g\colon c \to b, f\colon b \to a$ の合成 $f \circ^{\mathrm{op}} g$ を圏 C での合成 $g \circ f$ で定める．

この圏 C^{op} を C の**双対圏**という．要は C の射の向きをすべてひっくり返し，合成の順序をそれと整合するように入れ替えた圏である．

双対圏が圏となることから，任意の圏 C についての命題 P は，命題 P に現れる圏 C をすべて双対圏 C^{op} に置き換えた命題 P^{op} と同値になる．P^{op} を P の**双対命題**という．この pdf に書かれたあらゆる真なる命題に対応して，その双対命題もまた真である．

1.2 逆射と同型

定義 2

C を圏とする．射 $f\colon a \to b$ の**逆射**とは，射 $g\colon b \to a$ であって $g \circ f = \mathrm{id}_a, f \circ g = \mathrm{id}_b$ を満たすものである．逆射は存在すれば一意であるので，f の逆射を f^{-1} と書く．

逆射が存在するような射を**同型射**という．$a, b \in \mathrm{ob}\, C$ の間に同型射が存在するとき，a と b は**同型**であるといい，$a \cong b$ で表す．

逆射の一意性から f^{-1} の逆射は f である．同型な対象は，射の視点からは区別することができないため，同一の対象として扱って差し支えがない．ある性質を満たす対象がその性質によって定まる同型射によって同型になるとき，その対象は**同型を除いて一意**であるという．

例　**Sets** における同型射は全単射である．**Grp** における同型射は群同型，**Top** における同型射は同相写像である．

例　圏と見做した半順序集合においては，反対称律によって同型な対象はただ一つである．

群は対象がただ一つの圏と見做せたが，そのような圏はすべての射が逆射を持つ．逆に，対象がただ一つですべての射が逆射を持つ圏は群と見做せる．

1.3 さまざまな対象

圏論では射によって対象の特徴づけを行う．ここではそのような例をいくつか見ていく．

定義 3

圏 C の**終対象**とは，$t \in \mathrm{ob}\, C$ であって，任意の $a \in \mathrm{ob}\, C$ に対して $!_a\colon a \to t$ がただ一つ存在するものである．

命題 4
t, t' を終対象とするとき，これらの間には一意的な同型が存在する．

証明 任意の $a \in \mathrm{ob}\, C$ に対し，a から t に向かう一意な射を $!_a$，a から t' に向かう一意な射を $!'_a$ とする．t や t' への射が一意であることに注意すると，$!_{t'} \circ !'_t = !_t = \mathrm{id}_t, !'_t \circ !_{t'} = !'_{t'} = \mathrm{id}_{t'}$ となる．したがって $!_{t'}$ は同型射であり，またこれは一意的である． □

端的に言えば,「終対象は存在すれば同型を除いて一意」ということである.

例 **Sets** における終対象は一点集合である．また一点集合の間には全単射があるため，これらはすべて同型になる．

例 **Grp** における終対象は自明な群である．**Ring** における終対象は零環である．

例 圏と見做した半順序集合 P の終対象は $\max P$ である．このことからも分かるように，終対象は必ずしも存在するとは限らない．

定義 5
圏 C の**始対象**とは，$i \in \mathrm{ob}\, C$ であって，任意の $a \in \mathrm{ob}\, C$ に対して $!^a \colon i \to a$ がただ一つ存在するものである．

圏 C の始対象は，C^{op} の終対象である．このように，圏 C で定義されたもの A の C^{op} における対応物 A^{op} を A の**双対**という．始対象が一意であることも終対象のときと同様にして示せるが，これは始対象が終対象の双対であり，したがって始対象一意性が，終対象の一意性の双対命題であるからである．

例 **Sets** における始対象は空集合である．**Grp** における始対象は自明な群である．**Ring** における始対象は整数環 $\mathbb{Z}$ である．

定義 6
C を圏とする．$x_1, x_2 \in \mathrm{ob}\, C$ の**積**とは，3 つ組 (x, p_1, p_2) であって

- $x \in \mathrm{ob}\, C$, $p_1 \colon x \to x_1$, $p_2 \colon x \to x_2$
- $\forall y \in \mathrm{ob}\, C$, $\forall f_1 \colon y \to x_1$, $\forall f_2 \colon y \to x_2$, $\exists ! u \colon y \to x$ s.t. $p_1 \circ u = f_1 \wedge p_2 \circ u = f_2$

を満たすものである．図示すると

$$
\begin{tikzcd}
& y \arrow[ddl, bend right, "\forall f_1"'] \arrow[d, dotted, "\exists! u"] \arrow[ddr, bend left, "\forall f_2"] & \\
& x \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
x_1 & & x_2
\end{tikzcd}
$$

のようになる．x_1 と x_2 の積は存在すれば同型を除いて一意であるので，これを $x_1 \times x_2$ と書く．

例　**Sets** における集合 A, B の積は直積集合 $A \times B$ と射影 $p_1 \colon A \times B \to A$, $p_2 \colon A \times B \to B$ の組 $(A \times B, p_1, p_2)$ である．**Grp** における積は群の直積と射影，**Top** における積は積空間と射影である．

例　圏と見做した半順序集合 P において，$x, y \in P$ の積は二元の下限である．

定義 7

C を圏とする．射 $f, g \colon x \to y$ の**イコライザ**とは，組 (e, k) であって

- $e \in \operatorname{ob} C$, $k \colon e \to x$
- $f \circ k = g \circ k$
- $\forall e' \in \operatorname{ob} C,\ \forall k' \colon e' \to x,\ f \circ k' = g \circ k' \implies \exists! u \colon e' \to e \text{ s.t. } k' = k \circ u$

を満たすものである．図示すると

$$
\begin{tikzcd}
e' \arrow[d, dotted, "\exists! u"'] \arrow[dr, "\forall k'"] & & \\
e \arrow[r, "k"] & x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & y
\end{tikzcd}
$$

のようになる．f, g のイコライザは存在すれば同型を除いて一意である．

例　**Sets** における写像 $f, g \colon X \to Y$ のイコライザは集合 $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X$ と包含写像 $i \colon E \to X$ の組 (E, i) である．

2　関手

2.1　関手の定義と例

定義 8

C, D を圏とする．C から D への**関手** F とは組 $F = (F_0, F_1)$ であって以下を満たすものである．

- $F_0 \colon \mathrm{ob}\, C \to \mathrm{ob}\, D$ は写像である．
- F_1 は $(F_1)_{ab} \colon \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_D(F_0(a), F_0(b))$ の族 $\{(F_1)_{ab}\}_{a,b \in \mathrm{ob}\, C}$ である．以降は記号を濫用して F_0, F_1, F_{ab} をすべて F と書く．
- $\forall a \in \mathrm{ob}\, C,\ F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ を満たす．
- 任意の C の合成射 $g \circ f$ に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ を満たす．

例　関手 $U \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Sets}$ を，群の構造を "忘れる" ことによって定めることができる．G を単に集合 G に写し，群準同型 f を単に集合間の写像 f に写すこの関手はしばしば**忘却関手**と呼ばれる．他にも，$\mathbf{Ring}, \mathbf{Top}, \mathbf{Mfd}, \mathbf{Pos}$ などから $\mathbf{Sets}$ への忘却関手も同様にして定義できる．$\mathbf{Ring}$ から積の構造を忘れる関手 $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ も同様である．

例　離散圏 X から圏 C への関手 $F \colon X \to C$ を定めることは，$|X|$ 個の C の対象の族を与えることと同じである．一般に圏 I から C への関手は，C の中にある（合成の整合性を含めた）I の形をした対象と射の族を与えることと同義である．すなわち，関手 $I \to C$ は C に I 型の図式を与えていると見做せる．

2.2　極限

定義 9

関手 $T \colon I \to C$ の**極限**とは，対象 X と射 $x_i \colon X \to x_i$ の族から成る組 $(X, \{x_i\}_{i \in \mathrm{ob}\, I})$ であって

- $\forall i, j \in \mathrm{ob}\, I,\ \forall f \colon i \to j,\ T(f) \circ x_i = x_j$
- $\forall (Y, \{y_i \colon Y \to T(i)\}_{i \in \mathrm{ob}\, I}),\ (\forall i, j \in \mathrm{ob}\, I,\ \forall f \colon i \to j,\ T(f) \circ y_i = y_j)$

$$\Longrightarrow \exists ! u \colon Y \to X \text{ s.t. } \forall i \in \mathrm{ob}\, I,\ x_i \circ u = y_i$$

を満たすものである．

例　圏 C における対象 a, b の積は，離散圏 $\{1, 2\}$ からの関手 $T \colon \{1, 2\} \to C$ で $T(1) = a, T(2) = b$ であるようなものの極限である．

例　圏 C における射 f, g のイコライザは，2 対象から成り，その間に 2 つの射 $h, h' \colon 1 \to 2$ を持つ圏 I からの関手 $T \colon I \to C$ で $T(h) = f, T(h') = g$ であるようなものの極限である．

例　圏 C の終対象は，空圏 $\mathbf{0}$ から C への関手（つまり空な図式）の極限である．

2.3　関手の例

例　C, D を圏とする．$x \in \operatorname{ob} D$ を 1 つ固定して，関手 $\Delta_x \colon C \to D$ を $\Delta_x(c) = x, \Delta_x(f) = \mathrm{id}_x$ で定めることができる．これを**定値関手**という．

例　圏 C に対して，**恒等関手** $\mathrm{id}_C \colon C \to C$ を“何も手を加えない関手”として定めることができる．すなわち，C の対象 x と射 f に対して，$\mathrm{id}_C(x) = x, \mathrm{id}_C(f) = f$ となる関手である．

定義 10
C, D, E を圏，$F \colon C \to D, G \colon D \to E$ を関手とする．関手の合成 $G \circ F$ を，C の対象と射それぞれ x, f に対して $(G \circ F)(x) = G(F(x))$，$(G \circ F)(f) = G(F(f))$ で定める．

命題 11
関手の合成は関手になる．また合成は結合的である．恒等関手は合成に関して単位的に振る舞う．

証明　容易である．□

このことから，圏と関手は，圏を対象，関手を射として圏と見做せることが分かる．この圏を $\mathbf{Cat}$ と書く[*2]．$\mathbf{Cat}$ の始対象は $\mathbf{0}$，終対象は $\mathbf{1}$ である．

定義 12
C_1, C_2, D を圏，$F_1 \colon C_1 \to D, F_2 \colon C_2 \to D$ を関手とする．**コンマ圏** $F \downarrow G$ を次で定める．

- 対象は $c_1 \in \operatorname{ob} C_1$ と $c_2 \in \operatorname{ob} C_2$，$D$ の射 $f \colon F_1(c_1) \to F_2(c_2)$ の 3 つ組 (c_1, c_2, f).
- 射 $(c_1, c_2, f) \to (c_1', c_2', f')$ は C_1 の射 $g_1 \colon c_1 \to c_1'$ と C_2 の射 $g_2 \colon c_2 \to c_2'$ の組 (g_1, g_2) で $F_2(g_2) \circ f = f' \circ F_1(g_1)$ を満たすもの．すなわち

[*2] 正確には，$\mathbf{Cat}$ はある意味で“小さい”圏が成す圏として定義される．なぜなら，$\mathbf{Cat}$ が $\mathbf{Cat}$ 自身の対象であると矛盾が生じるからである．

$$\begin{array}{ccc} F(c_1) & \xrightarrow{f} & F(c_2) \\ {\scriptstyle F_1(g_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2(g_2)} \\ F(c_1') & \xrightarrow{f'} & F(c_2') \end{array}$$

C を圏，$x \in \mathrm{ob}\, C$ とする．恒等関手 $\mathrm{id}_C\colon C \to C$ と定値関手 $\Delta_x\colon C \to C$ のコンマ圏 $\mathrm{id}_C \downarrow \Delta_x$ はスライス圏 C/x である．すなわち，スライス圏はコンマ圏の特殊な場合である．

2.4 自然変換

定義 13

C, D を圏とし，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．F から G への**自然変換** $\tau\colon F \Longrightarrow G$ とは，D の射の族 $\{\tau_x\colon F(x) \to G(x)\}_{x \in \mathrm{ob}\, C}$ であって，任意の C の射 $f\colon x \to y$ に対して $G(f) \circ \tau_x = \tau_y \circ F(f)$ を満たすもの．すなわち次の図式

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

を可換にするものである．

$\tau\colon F \Longrightarrow G$ と $\sigma\colon G \Longrightarrow H$ を C から D への関手の間の自然変換とする．τ と σ の合成とは，各 $x \in \mathrm{ob}\, C$ に対して

$$\sigma \circ \tau = \{(\sigma \circ \tau)_x = \sigma_x \circ \tau_x\colon F(x) \to H(x)\}_{x \in \mathrm{ob}\, C}$$

で定義される自然変換 $\sigma \circ \tau\colon F \to H$ である．

また，$\mathrm{id}_F = \{\mathrm{id}_{F(x)}\colon F(x) \to F(x)\}_{x \in \mathrm{ob}\, C}$ で定義される自然変換 $F \Longrightarrow F$ を F の**恒等自然変換**という．

C から D への関手を対象，自然変換を射とすれば，圏が得られる．

定義 14

圏 C, D に対し，C から D への関手を対象，関手の自然変換を射とする圏を**関手圏**という．

例 圏と見做した半順序集合 $\mathbf{2} = \{0 \leq 1\}$ から離散圏 X への関手についての関手圏 $X^{\mathbf{2}}$ は，包含関係による半順序によって半順序集合と見做した集合 X のべき集合（を圏と見做したもの）になる．

定義 15

C, I を圏とする．C から C^I への**対角関手** $\Delta\colon C \to C^I$ とは，$x \in \operatorname{ob} C$ に定値関手 Δ_x を割り当て，射 $f\colon x \to y$ に自然変換 $\Delta_f = \{f\colon \Delta_x(z) = x \to \Delta_y(z) = y\}_{z \in \operatorname{ob} C}\colon \Delta_x \Longrightarrow \Delta_y$ を割り当てる関手である．

2.5 極限の定義再論

コンマ圏を用いると，極限の定義は次のように言い換えることができる．

命題 16

図式 $T\colon I \to C$ に対して，T の極限は，対角関手 $\Delta\colon I \to C^I$ と定値関手 $\Delta_T\colon \mathbf{1} \to C$ のコンマ圏 $\Delta \downarrow \Delta_T$ の終対象である．

この言い換えから，極限が同型を除いて一意であることが終対象の普遍性からただちに分かる．また，極限の双対として**余極限**が考えられる．積の双対は**余積**，イコライザの双対は**コイコライザ**と呼ばれる（双対を表すのに，余やコ (co-) といった接頭辞を付けることが多い）．

3 補足: クラスについて

3.1 クラス

集合とは限らない数学的対象の集まりは非公式には**クラス**と呼ばれる．ここまでの節では，集合と写像の成す圏や群と群準同型の成す圏を扱うために，圏 C の対象全体の集まり $\operatorname{ob} C$ はクラスであるものとして圏を定義した．しかし，集合にならないクラスはうっかりすると矛盾につながる危険な代物である．いくつかの方法によって矛盾を回避できるが，ここでは宇宙を用いる方法を紹介する．

3.2 宇宙

宇宙を用いる方法では，クラスは存在せず，すべてを集合として扱う．その代わり，これまでクラスとして扱っていたものの中身を巨大な集合の元に制限する．

定義 17

集合 U が**宇宙**であるとは，

- $\varnothing \in U$
- $x \in U \implies x \subset U$
- $x \in U \implies \mathfrak{P}(x) \in U$
- $I \in U \land (\forall i \in I,\ x_i \in U) \implies \displaystyle\bigcup_{i \in I} x_i \in U$
- $\mathbb{N} \in U$

を満たすことを言う．

宇宙は集合論的な操作について閉じた巨大な集合である．したがって，基本的な数学はすべて U の中で行える．例えば，$\mathbb{N}$ やその冪集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ が U の元であるから，実数やその間の連続関数などはすべて U の元である．そこで宇宙 U を 1 つ固定し，U の元を U-集合と言うことにする．圏 $\mathbf{Sets}_U$ を，U-集合を対象，その間の写像を射とする圏と定めれば，これは初めに定義した **Sets** と同じようなものと思って差し支えがない．このようにすれば，クラスという言葉を使わずに，圏を

定義 18

圏とは，集合 $\mathrm{ob}\, C$，射の集合 $\mathrm{Hom}(a,b)$ の族，合成を与える写像 $\{\circ_{abc}\}$ の族の組

$$(\mathrm{ob}\, C, \{\mathrm{Hom}(a,b)\}_{a,b\in \mathrm{ob}\, C}, \{\circ_{abc}\}_{a,b,c\in \mathrm{ob}\, C})$$

で，かくかくしかじかの公理を満たすものである．

と定義できる．このような定義のもと，圏の圏 **Cat** は，例えば対象の成すクラスが U-集合であるような圏全体の成す圏と定義される．これで **Cat** 自身が **Cat** 自身の対象にならずに済むのである．

ただし，この宇宙の存在は ZFC から独立である（証明も反証もできない）上，この公理は ZFC の無矛盾性より真に強い．なぜなら宇宙 U の存在は ZFC の無矛盾性を意味するため，ZFC と同じ強さの公理ではありえないからである．したがって，実はこの方法で矛盾が回避されたかどうかは誰にも（今のところは）わからない．