テンソル

K. N.

目次

1　線型空間の一般論

定義 1.1

体 K 上の線型空間 V とは，和 $+$ とスカラー倍という演算が備わった集合で，次の性質を満たすものである．

- $(V, +)$ はアーベル群である．

- 任意の $c, c' \in K$ と $v, w \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} c(c'v) &= (cc')v \\ (c+c')v &= cv + c'v \\ c(v+w) &= cv + cw \\ 1v &= v \end{aligned}$$

を満たす.

定義 1.2

線型空間 V の部分集合 W が部分空間であるとは，W もまた V 上の和とスカラー倍によって線型空間となることである．V を線型空間, $W \subset V$ をその部分空間とする．W による V の**商空間**とは，集合 V を次で定める同値関係

$$v \sim v' \iff v - v' \in W$$

で割った集合 $V/W := V/\sim$ に，和とスカラー倍を

$$\begin{aligned} [v] + [v'] &:= [v + v'] \\ c[v] &:= [cv] \end{aligned}$$

で導入した線型空間 V/W である.

なお，和とスカラー倍の well-defined 性は各自で確かめよ.

定義 1.3

集合 S が生成する自由線型空間 $F(S)$ とは，集合

$$\begin{aligned} F(S) &:= \{f : S \to K \mid \text{有限個の } s \in S \text{ を除き } f(s) = 0\} \\ &= \{f : S \to K \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |S \backslash f^{-1}(\{0\})| = n\} \end{aligned}$$

に，和とスカラー倍を

$$\begin{aligned} (f+g)(s) &:= f(s) + g(s) \\ (cf)(s) &:= cf(s) \end{aligned}$$

で導入した線型空間である．ただし $|A|$ は集合 A の濃度とした．S は $F(S)$ の基底となる．

定義 1.4

線型空間の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ に対し，その**直和**とは，集合

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{f \in \prod_{i \in I} V_i \mid \text{有限個の } i \in I \text{ を除き } f(i) = 0\}$$

に，成分ごとの和とスカラー倍を入れた線型空間である．

2　テンソル積

テンソル積は，多重線型写像を線型写像として取り扱うための線型空間である．以下では体 K を 1 つ固定して，K 上の線型空間を考える．なおこの節での内容に限り，K を環とした環上の加群においても成立する．

2.1　定義と構成

定義 2.1

線型空間 V, W の**テンソル積** (tensor product) とは，線型空間 $V \otimes W$ と双線型写像 ρ の組 $(V \otimes W, \rho)$ であって，次の性質（普遍性）を持つものである．

- 任意の線型空間 U への任意の双線型写像 $f : V \times W \to U$ に対して，$\overline{f} \circ \rho = f$ となる線型写像 $\overline{f} : V \otimes W \to U$ が唯一つ存在する．すなわち，

$$\begin{aligned}&\forall U : \text{ lin. sp.}, \forall f : V \times W \to U : \text{ bilin.},\\ &\exists ! \overline{f} : V \otimes W \to U : \text{ lin. s.t. } \overline{f} \circ \rho = f\end{aligned}$$

を満たす．

$\rho(v, w)$ を $v \otimes w$ と書く．ρ は自明なものとして省略する場合がある．テンソル積の元を**テンソル** (tensor) という．

命題 2.2

T, T' が V, W のテンソル積は存在すれば同型を除いて一意である．

証明 普遍性から分かる．また普遍性から定まる同型は一意的であるから，この同型によって構成の異なるテンソル積も自然に同一視できる．　□

命題 2.3

V, W, U を線型空間とする．このとき，次の 2 つの集合

$$L(V, W; U) = \{f : V \times W \to U \mid f \text{ は bilin.}\}$$
$$L(V \otimes W; U) = \{f : V \otimes W \to U \mid f \text{ は lin.}\}$$

の間には全単射が存在する．すなわち，$V \times W$ から U への双線型写像と $V \otimes W$ から U への線型写像は一対一に対応する．

証明 具体的に写像を構成して示す．双線型写像 $f : V \times W \to U$ に対して普遍性から一意に定まる線型写像を $\overline{f} : V \otimes W \to U$ と書くことにする．$\varphi : L(V, W; U) \to L(V \otimes W; U)$ を，普遍性によって定まる写像を割り当てることによって

$$\varphi(f) = \overline{f}$$

で定める．次に，$\psi : L(V \otimes W; U) \to L(V, W; U)$ を，

$$\psi(g) = g \circ \rho$$

すなわち

$$\psi(g)(v, w) = g(v \otimes w)$$

によって定める．すると ψ と φ は普遍性から互いに逆写像になる．これで示された． $\square$

命題 2.4

テンソル積は存在する．

証明 集合としての直積 $V \times W$ が生成する自由線型空間を $F(V \times W)$ とする．$X \subset F(V \times W)$ を次で定める．

$$\begin{aligned} X = \{&(cv, w) - c(v, w), \\ &(v, cw) - c(v, w), \\ &(v + v', w) - (v, w) - (v', w), \\ &(v, w + w') - (v, w) - (v, w') \mid \\ &c \in K, v, v' \in V, w, w' \in W\} \end{aligned}$$

ここで，線型空間 $V \otimes W$ を

$$V \otimes W := F(V \times W)/\operatorname{Span} X$$

とおき[*1]，写像 $\rho : V \times W \to V \otimes W$ を

$$\rho(v, w) = [(v, w)]$$

で定める．ただし $[(v, w)]$ は $(v, w) \in F(V \times W)$ の $V \otimes W$ での同値類である．すると，ρ は双線型であり，$(V \otimes W, \rho)$ は V, W のテンソル積の普遍性を持つ．以下でこれを示す．

（ρ の双線型性）X の定義より $(v + v', w) - (v, w) - (v', w) \in X$ であるから

$$\begin{aligned} \rho(v + v', w) &= [(v + v', w)] = [(v, w) + (v', w)] \\ &= [(v, w)] + [(v', w)] \\ &= \rho(v, w) + \rho(v', w) \end{aligned}$$

---

*1 $F(V \times W)$ と $\operatorname{Span} X$ はともにとてつもなく巨大な線型空間である．次元は当然のように非可算であり，この時点での和や積にはもはや形式的な意味しかない．しかし商空間をとることによって丁度いい空間が手に入るのが興味深いと思う．

となる．すなわち第 1 引数について ρ は和を保存する．スカラー倍や w についても同様に示せて，ρ は双線型である．

（普遍性）任意に線型空間 U と双線型写像 $f : V \times W \to U$ をとる．まず $f_0 : F(V \times W) \to U$ を

$$f_0\left(\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)\right) = \sum_\lambda c_\lambda f(v_\lambda, w_\lambda)$$

と定める．すると $[\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)] = [\sum_\lambda c'_\lambda(v'_\lambda, w'_\lambda)]$ のとき，すなわち

$$\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda) - \sum_\lambda c'_\lambda(v'_\lambda, w'_\lambda) \in \operatorname{Span} X$$

のとき，f が双線型であることから

$$f_0\left(\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)\right) = f_0\left(\sum_\lambda c'_\lambda(v'_\lambda, w'_\lambda)\right)$$

となる．ゆえに商集合の一般論から $\overline{f} : F(V \times W)/\operatorname{Span} X \to U$ が

$$\overline{f}\left(\left[\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)\right]\right) = \sum_\lambda c_\lambda f(v_\lambda, w_\lambda)$$

として well-defined に定まる．明らかにこれは $\overline{f} \circ \rho = f$ を満たし，定義より線型であることが分かる．また，$g \circ \rho = f$ を満たす線型写像 $g : F(V \times W)/\operatorname{Span} X \to U$ の存在を仮定すると，

$$\begin{aligned}
g\left(\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)\right) &= \sum_\lambda c_\lambda g(v_\lambda, w_\lambda) \\
&= \sum_\lambda c_\lambda f(v_\lambda, w_\lambda) \\
&= \overline{f}\left(\sum_\lambda c_\lambda(v_\lambda, w_\lambda)\right)
\end{aligned}$$

となるから，$g = \overline{f}$ である．すなわち，$\overline{f}$ の一意な存在が言えて，普遍性が示された． □

2.2　n 個の線型空間のテンソル積

定義 2.5

$V_1, \ldots, V_n$ を線型空間とする．$V_1, \ldots, V_n$ のテンソル積とは，線型空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ と n 重線型写像 $V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ の組であって，次の普遍性

- 任意の線型空間 U への任意の n 重線型写像 $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ に対して，$\overline{f} \circ \rho = f$ となる線型写像 $\overline{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$ が唯一つ存在する．すなわち，

$$\forall U : \text{lin. sp.}, \forall f : V_1 \times \cdots \times V_n \to U : n\text{-lin.},$$
$$\exists! \overline{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U : \text{lin. s.t. } \overline{f} \circ \rho = f$$

を満たすものである．これを

$$\bigotimes_{k=1}^{n} V_k$$

とも書き，すべての V_k が共通の V の場合

$$V^{\otimes n}$$

とも書く．ただし $V^{\otimes 0} = K, V^{\otimes 1} = V$ と約束する．

命題 2.6

V_1, V_2, V_3 を線型空間とする．$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ と $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ はともに V_1, V_2, V_3 のテンソル積である．

証明 まず $\rho : V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ を，

$$\rho(v_1, v_2, v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$$

で定める．すなわち，$(V_2 \otimes V_3, \rho_{23})$ を V_2, V_3 のテンソル積，$(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3), \rho_{1(23)})$ を $V_1, V_2 \otimes V_3$ のテンソル積として，

$$\rho = \rho_{1(23)} \circ (\mathrm{id}_{V_1} \times \rho_{23})$$

と定める．$(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3), \rho)$ がテンソル積であることを示す．

普遍性を示すため, 任意に線型空間 U と 3 重線型写像 $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \to U$ をとる．$v_1 \in V_1$ を固定すると，

$$\begin{aligned} f_{v_1} : V_2 \times V_3 &\to U \\ (v_2, v_3) &\mapsto f(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

は双線型写像である．$V_2 \otimes V_3$ の普遍性から

$$\overline{f_{v_1}} \circ \rho_{23} = f_{v_1}$$

なる線型写像 $\overline{f_{v_1}} : V_2 \otimes V_3 \to U$ が一意に存在する．ここで写像 $\overline{f} : V_1 \times (V_2 \otimes V_3) \to U$ を

$$\begin{aligned} \overline{f}(v_1, v_2 \otimes v_3) &= \overline{f_{v_1}}(v_2 \otimes v_3) \\ &= f(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

で定めると，これは双線型である．したがって，$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ の普遍性から

$$\overline{\overline{f}} \circ \rho_{1(23)} = \overline{f}$$

なる線型写像 $\overline{\overline{f}} : V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to U$ が一意に存在する．このとき $\overline{\overline{f}}$ は

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{f} \circ (\mathrm{id}_{V_1} \times \rho_{23}) \\
&= \overline{\overline{f}} \circ \rho_{1(23)} \circ (\mathrm{id}_{V_1} \times \rho_{23}) = \overline{\overline{f}} \circ \rho
\end{aligned}
$$

を満たす．これで普遍性を満たす写像の存在が言えた．

次に一意性であるが，$f = g \circ \rho$ を満たす線型写像 $g : V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to U$ の存在を仮定すると，g の線型性より任意の $\sum_\lambda c_\lambda (v_{1\lambda} \otimes (v_{2\lambda} \otimes v_{3\lambda})) \in V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ に対して

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum_\lambda c_\lambda (v_{1\lambda} \otimes (v_{2\lambda} \otimes v_{3\lambda})) \right) &= \sum_\lambda c_\lambda g(v_{1\lambda} \otimes (v_{2\lambda} \otimes v_{3\lambda})) \\
&= \sum_\lambda c_\lambda (g \circ \rho)(v_{1\lambda}, v_{2\lambda}, v_{3\lambda}) \\
&= \sum_\lambda c_\lambda f(v_{1\lambda}, v_{2\lambda}, v_{3\lambda}) \\
&= \overline{\overline{f}} \left(\sum_\lambda c_\lambda (v_{1\lambda} \otimes (v_{2\lambda} \otimes v_{3\lambda})) \right)
\end{aligned}
$$

となるから，$\overline{\overline{f}}$ は一意である．

同様にして $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ も V_1, V_2, V_3 のテンソル積であることが分かる．これで命題が示された． $\square$

この命題から，テンソル積を取る操作は標準的な同型を除いて結合的であると言える．また，この命題の操作を帰納的に繰り返すことで n 個のベクトル空間のテンソル積が存在することも示せる．

3　双対空間

この節では線型空間 V の元を線型結合で表したときの係数の添字を上付きで，基底の添字を下付きで書くことにする．

定義 3.1

集合 $\{f : V \to K \mid f \text{ は線型}\}$ に対して，和とスカラー倍を

$$
\begin{aligned}
(f+g)(v) &:= f(v) + g(v) \\
(cf)(v) &:= cf(v)
\end{aligned}
$$

で定義することで，これは線型空間になる（ベクトル空間からその係数体への線型写像を**線型汎関数**という）．これを V の**双対空間**といい，記号 V^* で表す．零ベクトルは任意の $v \in V$ に対して $f(v) = 0$ なる f で，これも記号 0 で表すことにする．

双対空間 V^* については添字の上下を V とは逆に書くことにする．この記法は微分幾何の分野で用いられる．

命題 3.2

V の基底 $e_i (i \in I)$ に対して，線型汎関数 e^i を

$$
e^i : \sum v^j e_j \mapsto v^i
$$

あるいは同じことだが

$$
e^i(e_j) = \delta^i_j
$$

で定めると，これらは一次独立である．ただし δ^i_j はクロネッカーのデルタである．特に V が有限次元のとき，これは V^* の基底となる．

証明 任意の有限集合 $I' \subset I$ と任意の $c_i \in K (i \in I')$ に対して

$$
\sum_{i \in I'} c_i e^i = 0
$$

を仮定する．両辺を線型汎関数と見て e_j を代入すると，

$$\sum_{i \in I'} c_i e^i(e_j) = 0(e_j) = 0$$

である．右辺は 0 で，左辺は

$$\sum_{i \in I'} c_i \delta^i_j = c_j$$

であるから c_i はいずれも 0 であることが分かる．ゆえに e^i は一次独立である．

V が有限次元であるとき，任意の $v \in V$ は基底を用いて

$$v = \sum_i v^i e_i$$

と表される．線型汎関数 $f \in V^*$ にこれを代入すると

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_i v^i f(e_i) \\ &= \sum_i f(e_i) e^i(v) \end{aligned}$$

となるから，f は e^i の和で

$$f = \sum_i f(e_i) e^i$$

と表せる．基底 e_i への f の作用が定められているからこの表式は一意である． □

定義 3.3

有限次元線型空間 V の基底 e_i に対し，

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

で定まる $e^i \in V^*$ を e_i の**双対基底**あるいは**双対底**という．

なお，無限次元の場合 e^i は V^* の基底にならない．実際，全ての e_i に対して $f(e_i) = 1$ となる f は線型汎関数であるが，双対底の有限和で書くことはできない．

定義 3.4

任意の $f \in V^*, g \in W^*$ に対して，写像 $f \otimes' g : V \times W \to K$ を

$$f \otimes' g(v, w) = f(v)g(w)$$

と定めると，これは明らかに双線型である．テンソル積の普遍性から $f \otimes' g$ に対して線型汎関数 $f \otimes g : V \otimes W \to K$ が定まる．これを f と g のテンソル積という．明示的に書けば，

$$f \otimes g \left(\sum_\lambda c^\lambda (v_\lambda \otimes w_\lambda) \right) = \sum_\lambda c^\lambda f(v_\lambda) g(w_\lambda)$$

となる．

命題 3.5

線型空間 V, W がそれぞれ基底 e_i, e'_j を持つとする．このとき，$e_i \otimes e'_j$ は一次独立である．特に V, W が有限次元のとき $e_i \otimes e'_j$ は $V \otimes W$ の基

底になり，したがって

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

が成り立つ.

証明

e_i, e'_j の双対底を e^i, e'^j とする．$c^{ij} \in K$ に対し

$$c^{ij} e_i \otimes e'_j = 0$$

を仮定し，両辺に双対底のテンソル積 $e^k \otimes e'^l$ を適用すると

$$\begin{aligned} e^k \otimes e'^l (c^{ij} e_i \otimes e'_j) &= c^{ij} e^k \otimes e'^l (e_i \otimes e'_j) \\ &= c^{ij} e^k(e_i) e'^l(e'_j) \\ &= c^{ij} \delta^k_i \delta^l_j \\ &= c^{kl} = 0 \end{aligned}$$

したがって $e_i \otimes e'_j$ は一次独立である．特に V, W が有限次元のとき，任意の $v \in V, w \in W$ に対して $v \otimes w$ は

$$v \otimes w = \sum_{i,j} v_i w_j e_i \otimes e'_j$$

と書けるから，$e_i \otimes e'_j$ は $V \otimes W$ の生成系でもある．ゆえに基底である．□

命題 3.6

V, W を有限次元の線型空間とする．$(V \otimes W)^*$ は V^* と W^* のテンソル積である.

証明 $\rho : V^* \times W^* \to (V \otimes W)^*$ を

$$\rho(f, g) = f \otimes g$$

で定めると，ρ は明らかに双線型である．$((V \otimes W)^*, \rho)$ がテンソル積の普遍性を持つことを示す.

任意に線型空間 U と双線型写像 $\varphi : V^* \times W^* \to U$ をとる．φ は双線型だから，φ の振る舞いは $\varphi(e^i, e'^j)$ の値で決定される．$V \otimes W$ の基底 $e_i \otimes e'_j$ に対し，

$$e^i \otimes e'^j(e_k \otimes e'_l) = \delta^i_k \delta^j_l$$

となることから，$e_i \otimes e'_j$ の双対底は $e^i \otimes e'^j$ である．$\overline{\varphi} : (V \otimes W)^* \to U$ を

$$\overline{\varphi}\left(\sum_{i,j} c_{ij}(e^i \otimes e'^j)\right) = \sum_{i,j} c_{ij}\varphi(e^i, e'^j)$$

で定めると $\overline{\varphi} \circ \rho = \varphi$ であり，e^i, e^j が V^*, W^* の基底であることからそのような φ は一意である．これで普遍性が示された. □

4　テンソル代数

定義 4.1

多元環あるいは**代数** (algebra) とは，線型空間 V とその上の双線型な乗法 $\cdot$ の組 $(V, \cdot)$ である．具体的には，$c \in K, v \in V$ として，乗法は次の

性質を満たす.

$$\begin{aligned} c(v \cdot w) &= (cv) \cdot w = v \cdot (cw) \\ (v+v') \cdot w &= v \cdot w + v' \cdot w \\ v \cdot (w+w') &= v \cdot w + v \cdot w' \end{aligned}$$

定義 4.2

線型空間 V 上の**テンソル代数** (tensor algebra) とは, 多元環 $(T(V), \otimes)$ と**自然な埋め込み**と呼ばれる線型写像 $i : V \to T(V)$ の組であって, 次の普遍性を持つものである.

- V 上の任意の多元環 A と任意の線型写像 $f : V \to A$ に対して, $f = \overline{f} \circ i$ となる多元環の準同型 $\overline{f} : T(V) \to A$ が唯一つ存在する. すなわち,

$$\begin{aligned} &\forall V : \text{lin. sp.}, \forall A : \text{alg.}/V, \forall f : V \to A : \text{lin.}, \\ &\exists ! \overline{f} : T(V) \to A \text{ s.t. } f = \overline{f} \circ i \end{aligned}$$

  を満たす.

普遍性から, そのような多元環 $T(V)$ は存在すれば同型を除き一意である.

命題 4.3

テンソル代数は存在する.

証明 線型空間 V に対し，多元環 $T(V)$ を次のように定義する．

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

とおき，積として結合性による自然な同一視

$$V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes l} \to V^{\otimes k+l}$$

を各項について $T(V)$ へ拡張する．すなわち，$v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V^{\otimes k}, w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_l \in V^{\otimes l}$ に対して

$$\begin{aligned}&(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_l)\\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_l\end{aligned}$$

と定め，$v_i \in V^{\otimes k_i}, w_j \in V^{\otimes k_j}$ の和に対しては上の定義を用いて

$$\left(\sum_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j w_j\right) = \sum_{i,j} v_i \otimes w_j$$

と定める．これは結合的な多元環となる．また，線型写像 $i : V \to T(V)$ を

$$\begin{aligned}i : V &\to T(V)\\ v &\mapsto v\end{aligned}$$

で定義する．$(T(V), i)$ がテンソル代数の普遍性を持つことを示す．

普遍性を示す．任意に線型空間 V と多元環 A，線型写像 $f : V \to A$ をとる．多元環の準同型 $\overline{f} : T(V) \to A$ を各 $v \in V$ に対して

$$\overline{f}(v) = v$$

とおけば，全ての $T(V)$ の元についても $\overline{f}$ の値が定まる．明らかに $\overline{f} \circ i(v) = \overline{f}(v)$ となり，また構成から分かるようにこのような $\overline{f}$ は一意である． $\square$

テンソル代数の元は，$v \in V$ を用いて

5　外積代数

定義 5.1

線型空間 V 上の**外積代数**とは, 多元環 $(\bigwedge(V), \wedge)$ と, $j(v) \wedge j(v) = 0$ を満たす**自然な埋め込み**と呼ばれる線型写像 $j : V \to \bigwedge(V)$ の組 $(\bigwedge(V), j)$ であって，次の普遍性を持つものである．

- V 上の任意の多元環 $(A, \cdot)$ と $f(v) \cdot f(v) = 0$ を満たす任意の線型写像 $f : V \to A$ に対して，$f = \overline{f} \circ j$ となる多元環の準同型 $\overline{f} : \bigwedge(V) \to A$ が唯一つ存在する．すなわち，

  $$\begin{aligned}&\forall V : \text{lin. sp.}, \forall A : \text{alg.}/V, \forall f : V \to A : \text{lin.},\\&\forall v \in V, f(v) \cdot f(v) = 0 \implies \exists ! \overline{f} : T(V) \to A \text{ s.t. } f = \overline{f} \circ j\end{aligned}$$

  を満たす.

普遍性から，そのような多元環 $\bigwedge(V)$ は存在すれば同型を除き一意である.

定義 5.2

多元環のイデアルとは，多元環のイデアルであって，スカラー乗法についても閉じたものをいう．多元環のイデアルによる剰余環に対して

$$c[v] = [cv]$$

と定めるとこれは well-defined である．これによって定まる多元環を**商多元環**という．多元環 A のイデアル I による商多元環を，A/I と書く.

命題 5.3

外積代数は存在する．

証明 $T(V)$ の部分集合

$$\{v \otimes v \in T(V) \,|\, v \in V\}$$

の生成する両側イデアル I による $T(V)$ の商多元環によって

$$\bigwedge(V) := T(V)/I$$

とし，その乗法を $\wedge$ と書くことにする．$j : V \to \bigwedge(V)$ を

$$j(v) = v$$

によって定義すると，$v \otimes v \in I$ より $j(v) \wedge j(v) = v \wedge v = 0$ である．$(\bigwedge(V), i)$ が外積代数の普遍性を持つことを示す．

普遍性を示す．任意に多元環 $(A, \cdot)$，$f(v) \cdot f(v)$ を満たす線型写像 $f : V \to A$ をとる．多元環の準同型 $\overline{f} : \bigwedge(V) \to A$ を各 $v \in V$ に対して

$$\overline{f}(v) = v$$

とおけば，全ての $\bigwedge(V)$ の元 w についても $\overline{f}(w)$ の値が定まる．明らかに $\overline{f} \circ i(v) = \overline{f}(v)$ かつ $\overline{f}(v) \cdot \overline{f}(v) = \overline{f}(v \wedge v) = 0$ であり，また構成から分かるようにこのような $\overline{f}$ は一意である． □

外積代数の上での乗法 $\wedge$ を**ウェッジ積**，あるいは**楔積** (wedge product) という．外積代数の元は $v \in V$ のウェッジ積の和で書ける．任意の $v \in V$ に対して $v \wedge v = 0$ であることから，任意の $v, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= (v + w) \wedge (v + w) \\ &= v \wedge v + v \wedge w + w \wedge v + w \wedge w \\ &= v \wedge w + w \wedge v \end{aligned}$$

ゆえ $v \wedge w = -w \wedge v$ である．n 個のウェッジ積では任意の n 個の置換 σ に対して

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \cdots v_{\sigma(n)}$$

となる．特に，$v_1, \ldots, v_n$ の中に重複があるとその値は 0 になる．V が有限次元のとき, その次元は a 基底を $e_i (1 \leq i \leq n)$ とすれば, $v = \sum_i v^i e_i, w = \sum_j w^j e_j$ に対して

$$\begin{aligned} v \wedge w &= \left(\sum_i v^i e_i \right) \wedge \left(\sum_j w^j e_j \right) \\ &= \sum_{i,j} v^i w^j e_i \wedge e_j \\ &= \sum_{i \neq j} v^i w^j e_i \wedge e_j \\ &= \sum_{i<j} (v^i w^j - v^j w^i) e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

となる．

付録 A　代数的事項に関する補足

定義 1.1

写像 $* : X \times X \to X$ を集合 X 上の**二項演算** (binary operation) という．代数の文脈では，$*(x, y)$ の意味で $x * y$ のように書く．二項演算の性質には次のような名前がついている．

結合性　$\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = x * (y * z)$

可換性　$\forall x, y \in X, x * y = y * x$

単位性　$\exists e \in X \text{ s.t. } \forall x \in X, e * x = x * e = x$

単位的な場合には,

可逆性　$\forall x \in X, \exists y \in X \text{ s.t. } x * y = y * x = e$

が定義できる．特定の性質を持つ二項演算を備えた集合には名前がある．**モノイド** (monoid) とは，結合的で単位的な二項演算を備えた集合．**群** (group) とは，演算が可逆的なモノイド．**アーベル群** (abelian group) とは，演算が可換な群.

定義 1.2

環 (ring) とは，集合 R とその上の二項演算 $+$ と $\cdot$ の組 $(R, +, \cdot)$ で，次を満たすもの.

- $(R, +)$ はアーベル群.
- $(R, \cdot)$ はモノイドで，$+$ に対して**両側分配的**である．すなわち，任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\
(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c
\end{aligned}
$$

  を満たす.

$(R, \cdot)$ が単位的モノイドとなるとき，これを**単位的な環**という．$+$ を加法，$\cdot$ を乗法と呼び，それぞれの単位元を $0, 1$ と書く．$a \in R$ の加法の逆元を $-a$，乗法の逆元を a^{-1} と書く．$a \cdot b$ は ab と略記する場合がある.

$0 \neq 1$ であり，0 でない全ての元が乗法の逆元を持つ環を**体** (field) という.

例 1.3

一点集合は唯一定まる演算によって環になる．これを**零環**あるいは**自明な環**という．

例 1.4

整数の集合に通常の和と積を入れると，単位的な環になる．

例 1.5

偶数の集合に通常の和と積を入れると，単位的でない環になる．

以降，単位的な環を単に環，単位的な可換環を可換環と呼ぶことにする[*2]．$(R,+,\cdot)$ を，演算を省いて R と略記することがある．

定義 1.6

環 R に対して，その加法に関する部分群 I が次を満たすとき，それぞれを左イデアル，右イデアルという．

$$\forall r \in R, \forall x \in I, rx \in I$$
$$\forall r \in R, \forall x \in I, xr \in I$$

左イデアルかつ右イデアルとなるものを**両側イデアル** (two-sided ideal) という．可換環のイデアルは常に両側イデアルである．

[*2] 環の加法は乗法と違って定義より常に可換だが，実はこの定義は冗長で，加法の可換性は両側分配性から導かれる．実際，両側分配的であることから $(1+a)\cdot(1+b) = 1+b+a+ab = 1+a+b+ab$ となるので，左から -1，右から $-ab$ を足せば $a+b=b+a$ が導かれる．

定義 1.7

集合 $X \subset R$ を含む最小のイデアルを X が**生成するイデアル**という．

なお，最小性よりそのようなイデアルは一意である．

命題 1.8

$X \subset R$ に対し，集合

$$I := \{r_1 x_1 s_1 + \cdots + r_n x_n s_n \in R \,|\, n \in \mathbb{N}, r_i, s_i \in R, x_i \in X\}$$

とおくと I はイデアルであり，X が生成するイデアルとなる．

証明（イデアルであること）定義より明らか．（最小であること）X を含むイデアル I' を任意に取ると，I' がイデアルであることから I の元は全て I' に含まれる．ゆえに最小である．□

命題 1.9

環 R の両側イデアル I に対して，

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in I$$

と定めると，

$$a \sim a', b \sim b' \implies a + b \sim a' + b'$$
$$a \sim a', b \sim b' \implies ab \sim a'b'$$

が成り立つ．

証明 I がアーベル群の部分群であり，両側イデアルであることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&a + b - a' + b' = (a - a') + (b - b') \in I \\
&ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'
\end{aligned}
$$

より成り立つ. $\square$

この命題からこの同値関係 $\sim$ による商に演算が導入できる.

定義 1.10

R を環，I を R の両側イデアルとする.

$$a \sim b :\iff a - b \in I$$

による R の同値類を R/I と書く．これに

$$
\begin{aligned}
[a] + [b] &:= [a + b] \\
[a][b] &:= [ab]
\end{aligned}
$$

によって加法と乗法を導入すると，環になる．これを I による**剰余環**という.

索引