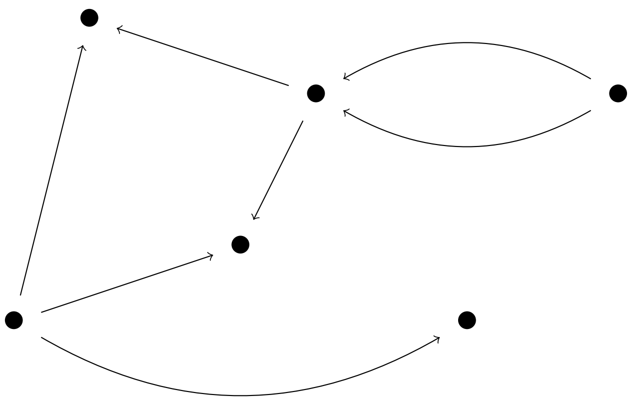
中学数学で耐える圏論



はじめに

この pdf のゴールとなるのは，ある種の矢印を扱う「圏論」と呼ばれる数学の一分野です．かなり抽象的な分野ではありますが，中学数学が分かれば読めるようにがんばって丁寧に書きました．

名前の通り，圏論では「圏」という数学的対象について論じます．では圏とは何かというと，標語的に言えば

「対象」と，その間の「射」と呼ばれる
矢印から成るネットワーク

です．ここで,「対象」や「射」は何でも構いません．例えば,

- 対象を自然数，対象の間の射を「大小関係が成り立つこと」と思えば，自然数 $1 \leq 2 \leq 3 \cdots$ は圏をなす．
- 対象を図形，射を図形から図形への連続的な変形とすれば，これは圏をなす．
- ものの集まりは射のない圏である．
- 親族は, 血縁関係という射を持つ圏とみなせる．
- 場所とその間の移動手段は圏をなす．

といった具合です．みなさんもこの pdf を読み終わる頃には，世界のあらゆる構造に圏を見いだせるようになることでしょう．

目次

1 圏の前に–集合と写像

圏論の数学的な背景を知ってもらうために，はじめのセクションではいくつかの数学的構造を紹介します．

最初を飾るのは，圏のプロトタイプとも言える「集合」と「写像」です．数学史の中では比較的最近作られた概念ですが，今や現代数学において欠くことのできない概念となっています．

1.1 集合

集合とは，要するにものの集まりのことです．「もの」は何でも[*1] 構いませんが，数学的に扱うためには「何が入っていて何が入っていないか」がきちんと定まっていなければなりません．

> **定義 1**
> ものの集まりのうち，その中身が定まったものを**集合**という．もの x が集合 S に入っていることを
>
> $$x \in S$$
>
> と書き，x を S の**元**という．

「ものの集まり S の中身が定まっている」というのは，任意の[*2] もの x が与えられたときに，それが集まり S に入っているか，そうでないかが確定しているということです．

例えば「大きな数の集まり」は,「大きな数」の定義が明確に与えられなければ集合とは言えません．これに対して「100 以上の自然数[*3] の集まり」は集

[*1] 実は例外があります．これについては補足のセクションで触れます．

[*2] 「任意の x に対してほにゃらら」というのは,「どんな x に対しても，その x についてほにゃらら」という意味です．例えば,「任意の偶数 n に対して $n+2$ は偶数」というのは,「どんな偶数でも，2 でも 4 でも 6 でも , . . ., $2+2, 4+2, 6+2, \ldots$ はそれぞれ偶数」という意味です．

[*3] 自然数とは $0, 1, 2, 3, \ldots$ といった数のこと．0 を自然数とみなさない流儀もありますが，ここでは 0 は自然数とします．なお，分数や負の数（マイナスの数）などは自然数ではありません．自然数と $-1, -2, -3, \ldots$ のような負

合になります．どんなものでも，100 以上の自然数であるかそうでないか確定しているからです．この例からも分かるように，集合の元の数は無限個でも構いません．

元 $a, b, c, \ldots$ から成る集合を

$$\{a, b, c, \ldots\}$$

と書き，x についての条件 $P(x)$ を満たす x の集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

と書きます．例えば，100 以上の自然数から成る集合 S はから成る集合 E は

$$S = \left\{x \,\middle|\, x \text{ は 100 以上の自然数}\right\}$$

と定義できます．集合の元に順番はありません．したがって，$\{1, 2, 3\}$ と $\{3, 1, 2\}$ は同じ集合を表します．

さて，集合が 2 つあるとき，これらを使って新たに集合を作ることができます．

> **定義 2**
>
> 集合 A, B の**積集合** $A \times B$ とは，A の元 a と B の元 b の順序のついた組
>
> $$(a, b)$$
>
> をすべて集めた集合である．すなわち，
>
> $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$
>
> で定義される集合である．

「順序のついた」というのは，順番に意味があるということです．つまり異なる 2 つのもの a, b について，(a, b) と (b, a) は別物だということです．以降，順序のついた組のことを単に組といいます．

例　集合 $\{1, 2, 3\}$ と $\{1, 2\}$ の積集合

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$$

は，

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

である．

1.2　写像

集合 A, B に対して，「A の元を B の元に対応させるやり方」を考えることができます．これを写像といいます．

> **定義 3**
>
> 集合 A の任意の元 a に対して B の元 b がただ 1 つ定まっているとする．この対応 f を A から B への**写像**と言い，a に対してただ 1 つ定まる b を $f(a)$ と書く．また A から B への写像 f を
>
> $$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$
>
> などと書く．またこのときの A を f の**定義域**，B を**終域**という．

写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon A' \to B'$ が同じ写像であることは，

$$\begin{aligned} A &= A' \\ B &= B' \end{aligned}$$

すなわち定義域と終域が一致していて，かつ

$$\text{すべての } A \text{ の元 } a \text{ に対して } f(a) = g(a)$$

が成り立つこととします．つまり写像は，「どの集合の間の写像であるか」とその「対応の仕方」によって規定されるということです．

1.3　写像の例

写像はたくさん考えられます．さっそく写像の例を色々見ていきましょう．

例　$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{a, b\}$ として，

$$\begin{aligned} f(1) &= a \\ f(2) &= b \\ f(3) &= a \end{aligned}$$

の数を合わせて整数といいます．

によって対応 f を定めると，これによって写像

$$f\colon A \to B$$

が定義できる．

例　A や B としてすべての自然数から成る集合 $\mathbb{N}$ を取り，

$$\begin{aligned} \mathrm{suc}\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

と定めれば suc は写像である．

この写像 suc は「自然数に 1 を足す」という写像です．

例　A として $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を取り，B として $\mathbb{N}$ を取る．

$$\begin{aligned} \mathrm{plus}\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n,m) &\mapsto n+m \end{aligned}$$

と定めれば，これは写像である．

積集合からの写像 plus が定義されましたが，これは n と m という 2 つの自然数を足すという写像です．このように積集合を使えば，足し算のような演算を写像として捉えることができます．

なお，集合 A に対して，$A\times A$ から A への写像を A 上の**二項演算**と呼びます．二項演算では，しばしば $f((x,y))$ を xfy のように書きます（$n+m$ のような書き方に合わせているのです）．

例　A として自然数の集合 $\mathbb{N}$，B としてすべての有理数[*4] から成る集合 $\mathbb{Q}$ を取り，

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

と定めると，これは写像である．

写像 i は $\mathbb{N}$ の元に何も手を加えていませんが，$\mathbb{N}$ の元が $\mathbb{Q}$ の元に割り当てられているので，これも立派な写像です．

[*4] 有理数とは，整数 n,m を使って $\frac{n}{m}$ のように分数で表すことのできる数のこと．整数 n は $\frac{n}{1}$ と表すことができるので，有理数は整数を含みます．

ところで，$\mathbb{N}$ の元はすべて $\mathbb{Q}$ の元になっていますね．一般に集合 A' と A に対して「a が A' の元ならば a は A の元である」という条件が成り立つとき，A' を A の**部分集合**といい，$A' \subset A$ と書きます．

1.4　写像の合成と恒等写像

写像 $f\colon A\to B$ と $g\colon B\to C$ があるとき，これらは「合成」できます．

定義 4

任意の写像

$$\begin{aligned} f&\colon A \to B \\ g&\colon B \to C \end{aligned}$$

に対して，**合成写像** $g\circ f\colon A\to C$ を

$$(g\circ f)(a) = g(f(a))$$

で定める．

図で描けば，次のようになります．

$$\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "g"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[ll, bend right, "g\circ f"'] \end{tikzcd}$$

写像の合成について，次の命題が成り立ちます．

命題 5

写像の合成は結合的である．すなわち，任意の

$$\begin{aligned} f&\colon A \to B \\ g&\colon B \to C \\ h&\colon C \to D \end{aligned}$$

に対して

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$$

が成り立つ．

証明　合成の定義から，$(h\circ g)\circ f$ と $h\circ(g\circ f)$ は，いずれも A から D への写像であり，定義域と終域は一致している．

A の任意の元 a に対し，

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$$

を示せばよい．合成の定義から

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

である．他方

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

である．両者は一致しているので，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が示された．（証明終わり）

次に定義するのは，恒等写像です．これは写像の中で，最もアタリマエなものです．

定義 6
任意の集合 A に対して，A の**恒等写像** id_A を次で定義します．

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A(a) \colon A &\to A \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

つまり id_A は「何もしない」写像です．恒等写像について，次の命題が成り立ちます．

命題 7
恒等写像は，任意の $f \colon X \to A$，$g \colon A \to Y$ との合成に対して次のように振る舞う．

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A \circ f &= f \\ g \circ \mathrm{id}_A &= g \end{aligned}$$

証明 写像として，$\mathrm{id}_A \circ f$ と f の定義域と終域はそれぞれ一致している．$\mathrm{id}_A \circ f = f$ を示すために，X の任意の元 x に対して $(\mathrm{id}_A \circ f)(x) = f(x)$ を示す．合成の定義から，

$$(\mathrm{id}_A \circ f)(x) = \mathrm{id}_A(f(x))$$

である．A の任意の元 a に対して $\mathrm{id}_A(a) = a$ より，$f(x)$ が A の元であるので

$$\mathrm{id}_A(f(x)) = f(x)$$

である．ゆえに $(\mathrm{id}_A \circ f)(x) = f(x)$ が言えた．したがって $\mathrm{id}_A \circ f = f$ である．$g \circ \mathrm{id}_A = g$ も同様にして示せる．（証明終わり）

次の図のような状況です（A が 2 つ描いてありますが，これらは同じものです）．

$$\begin{tikzcd} C & A \arrow[l, "g"] & A \arrow[l, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[ll, bend right, "g = g \circ \mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "f = \mathrm{id}_A \circ f"] \end{tikzcd}$$

何もしないものを考えるのは一見無駄なようで，実はとても大事なことです．何もしないとはどういうことか分かっていれば，「もとに戻す」ということができるようになるからです．

定義 8
写像 $f \colon A \to B$ に対して，f の**逆写像**とは，写像

$$g \colon B \to A$$

であって

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_A \\ f \circ g &= \mathrm{id}_B \end{aligned}$$

を満たすもののことである．

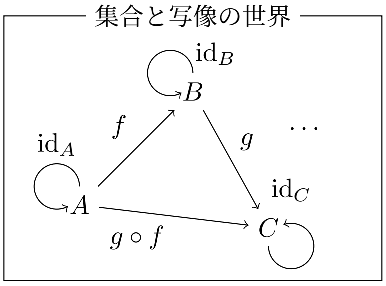
定義から逆写像は，A の任意の元 a に対し

$$g(f(a)) = a$$

を満たします．「おっとっと，a を f で $f(a)$ にしてしまった」というときは，逆写像 g を使って $g(f(a))$ としてやれば，もとに戻すことができるというわけです．

1.5 集合と写像のまとめ

集合とは「ものの集まり」のことで，写像とは「集合の間にある元の対応」の一種でした．写像は合成できて，各集合には恒等写像という特別な写像がありました．図で描くとこんな感じです．



2　圏の前に–群と群準同型

ここまでは，数学の基礎となる集合と写像について述べてきました．次にご紹介するのは「集合」に「代数的構造」が入ったものの代表例である「群」です．

2.1　群の定義

突然ですが，有理数の足し算と掛け算を考えてみましょう．どちらにも次のような性質があります．

- 結合法則.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

- 演算の結果を変えない数がある.

$$x + 0 = x = 0 + x = x$$
$$x \times 1 = x = 1 \times x$$

- 演算をもとに戻す数がある.（ただし掛け算については $x \neq 0$).

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$
$$x \times \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \times x$$

群は，これを一般化したものになっています.

定義 9

群とは，集合 G と G 上の二項演算

$$*\colon G \times G \to G$$

の組

$$(G, *)$$

であって，次の性質を満たすものである.

- G の任意の元 x, y, z に対して次を満たす.

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- G の特別な元 e があり，G の任意の元 x に対して次を満たす.

$$x * e = x = e * x$$

- G の任意の元 x に対して，次を満たす G の元 x^{-1} がただ 1 つ存在する.

$$x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$$

e を**単位元**，x^{-1} を x の**逆元**という.

このセクションの冒頭で述べた例から分かるように，有理数の足し算や掛け算は群を成します.

例　$(\mathbb{Q}, +)$ は群である．単位元は 0, x の逆元は $-x$ である.

例　0 以外の $\mathbb{Q}$ の元から成る集合を $\mathbb{Q}^\times$ とする．$(\mathbb{Q}^\times, \times)$ は群である．単位元は 1，x の逆元は $\frac{1}{x}$ である.

このように，もとになる集合が同じようなものでも，異なる二項演算によって異なる群になります.

例　すべての整数から成る集合

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

に対し，$(\mathbb{Z}, +)$ は群である．単位元は 0，n の逆元は $-n$ である.

実は $(\mathbb{Z}, +)$ の中には更に群が隠れています.

例　整数の部分集合で，すべての偶数から成る集合

$$E = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

に対し，通常の足し算を考えると $(E, +)$ は群である．単位元は 0，n の逆元は $-n$ である.

ほかにも，数らしからぬ集合に群の構造を導入することができます.

例　集合 $\{a,b\}$ に対して，二項演算 $*\colon \{a,b\}\times\{a,b\}\to\{a,b\}$ を

$$\begin{aligned} a*a&=a\\ a*b&=b\\ b*a&=b\\ b*b&=a \end{aligned}$$

と定めると，$(\{a,b\},*)$ は群になる．単位元は a で，a の逆元は a，b の逆元は b である．

更にシンプルな群は，単位元しか持たない群です．

例　集合 $\{0\}$ に対して二項演算 $*\colon \{0\}\times\{0\}\to\{0\}$ を

$$0*0=0$$

と定めると，$(\{0\},*)$ は群になる．単位元は 0 で，0 の逆元は 0 である．この群を**自明な群**という．

2.2　群準同型

さて，群 $(G,*),(G',*')$ に対して，写像 $f\colon G\to G'$ が考えられます．しかし単に写像を考えるだけでなく，二項演算の性質も含めた議論をしたいところです．そこで登場するのが群準同型写像です．

定義 10
$(G,*)$ と $(G',*')$ をそれぞれ e,e' を単位元に持つ群とする．写像 $f\colon G\to G'$ が**群準同型**であるとは，

$$f(x*y)=f(x)*'f(y)$$

を満たすことである．

群準同型 f とは，演算を保存する写像と捉えることができます．

ちなみに，群準同型であれば単位元と逆元は保存されます．すなわち，次の命題が成り立ちます．

命題 11
$(G,*)$ と $(G',*')$ をそれぞれ e,e' を単位元に持つ群とし，$f\colon G\to G'$ を群準同型とする．

$$f(e)=e'$$

が成り立ち，G の任意の元 x に対して

$$f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$$

が成り立つ．

証明（単位元を保存すること）f が群準同型であるから，

$$f(e)=f(e*e)=f(e)*'f(e)$$

が成り立つ．$f(e)$ は G' の元であるので，$f(e)$ は逆元 $(f(e))^{-1}$ を持つ．これを $f(e)=f(e)*'f(e)$ の両辺に右から掛ければ

$$\begin{aligned} f(e)*'(f(e))^{-1}=e'&=f(e)*'f(e)*'(f(e))^{-1}\\ &=f(e)*'e=f(e) \end{aligned}$$

よって $f(e)=e'$ が成り立つ．

（逆元を保存すること）$f(x^{-1})*'f(x)=e'=f(x)*'f(x^{-1})$ を示せば，逆元がただ 1 つであることから $(f(x))^{-1}=f(x^{-1})$ が言える．f は群準同型であるから

$$\begin{aligned} f(x^{-1})*'f(x)&=f(x^{-1}*x)=f(e)=e'\\ f(x)*'f(x^{-1})&=f(x*x^{-1})=f(e)=e' \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $f(x^{-1})*'f(x)=e'=f(x)*'f(x^{-1})$ であり，したがって $(f(x))^{-1}=f(x^{-1})$ である．（証明終わり）

これまでに見てきた写像の中には，群準同型になっているものがあります．

例　群 $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+)$ に対して写像

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z}&\to\mathbb{Q}\\ n&\mapsto n \end{aligned}$$

は，$f(0)=0$ を満たし，

$$f(n+m)=n+m=f(n)+f(m)$$

であるから，群準同型である．

次の例では，累乗の指数の足し算との関連を，群の視点から理解することができます．

例　群 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}^{\times}, \times)$ に対して，写像

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q}^{\times} \\ n &\mapsto 2^n \end{aligned}$$

は群準同型である．実際，累乗の性質から

$$f(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \times 2^m = f(n) \times f(m)$$

が成り立つ．

2.3　群準同型の合成と恒等写像

群準同型も写像ですから，合成と恒等写像が考えられます．

> **命題 12**
> $(G, *)$ と $(G', *'), (G'', *'')$ をそれぞれ e, e', e'' を単位元に持つ群とする．群準同型 $f\colon G \to G', g\colon G' \to G''$ に対して，その合成
>
> $$g \circ f\colon G \to G''$$
>
> は群準同型である．また，恒等写像
>
> $$\mathrm{id}_G\colon G \to G$$
>
> も準同型である．

証明の概略　G の任意の元 x, y に対して

$$(g \circ f)(x * y) = (g \circ f)(x) *'' (g \circ f)(y)$$

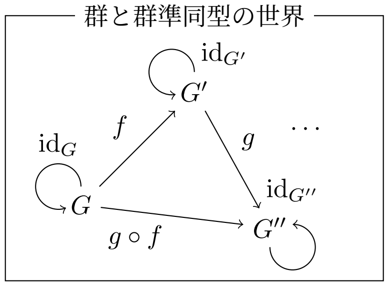
を示せばよい．詳細は読者に委ねる．（証明略）

定義通りに式を変形していけば示すことができます．数学書ではこのように簡単な証明はしばしば読者に委ねられます[*5]．

2.4　群と群準同型のまとめ

結局何が言いたかったのかというと，「群と群準同型」というのがおよそ「集合と写像」と似たようなものだということです．図で描くとこんな感じの世界です．

[*5] 簡単でない証明を省略する本もあります．迷惑この上ないですね．



集合と写像のときと同じような図ですね．

3　圏の前に–順序と単調写像

3.1　半順序

群のセクションでは集合に演算を入れました．ここでは集合に順序を入れることを考えましょう．

> **定義 13**
> 集合 X の上の**半順序**とは，写像
>
> $$\leq\colon X \times X \to \{0, 1\}$$
>
> であって，次の条件を満たすものである．ただし以後 $\leq (x, y) = 1$ であることを $x \leq y$ と書く．
>
> - X の任意の元 x について $x \leq x$ である．
> - X の任意の元 x, y, z について次を満たす．
>
> $$x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ ならば } x \leq z$$
>
> - X の任意の元 x, y について次を満たす．
>
> $$x \leq y \text{ かつ } y \leq x \text{ ならば } x = y$$
>
> 集合 X とその上の半順序 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ を**半順序集合**という．

さっそく例を見ていきましょう．

例　通常の順序（等号つき不等号）によって

$$(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$$

などは半順序集合である．

大小関係とは少し違うものも半順序になります．

例　0 でない自然数 n, m に対して，n が m をあまりなしに割り切るときにこれを $n|m$ と書く．する

と $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ は半順序集合になる．ただし $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ は 0 でない全ての自然数のなす集合とする．

例　集合 X の部分集合全体のなす集合を $\mathcal{P}(x)$ と書く．$U, V \subset X$ に対して $U \subset V$ であるとき，またそのときに限って $U \leq V$ と定めると，

$$(\mathcal{P}(X), \leq)$$

は半順序集合になる．

半順序の「半」は，X の任意の元 x, y に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとは限らないことを表しています．最後に述べた 2 つは，必ずしも 2 つの元が比較できるとは限りません（例えば $2, 3$ について，これらは互いに相手を割り切れません）．

3.2　単調写像

群のとき群準同型が演算を保存したように，半順序集合の間の写像でも順序が保存されてほしいところです．そのような気持ちのもとで，単調写像が定義されます．

定義 14

$(P, \leq), (Q, \leq')$ を半順序集合とする．写像 $f\colon P \to Q$ が**単調写像**であるとは，P の任意の元 x, y について

$$x \leq y \text{ ならば } f(x) \leq' f(y)$$

が成り立つことをいう．

ここまでと同様に，単調写像の合成も単調写像となること，恒等写像が単調写像であることが証明できます．つまりどういうことかというと，こういうことです:

半順序集合と単調写像の世界

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[loop above, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[dr, "g"] & \cdots \\
P \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & R \arrow[loop right, "\mathrm{id}_R"]
\end{tikzcd}$$

ここまで来れば，もう圏の定義がすんなりと理解できると思います．

4　圏の定義と例

4.1　圏の定義

圏は「対象」とその間の「射」から成ります．

定義 15（圏）

圏とは，

- **対象** $A, B, C, \ldots$
- **射** $f, g, h, \ldots$

の集まりであって，以下の条件を満たすもののことである．

- すべての射には，始点と終点がただ 1 つずつ定まっている．以後「A を始点，B を終点とする射 f」を

$$f\colon A \to B$$

と書く．

- 任意の射 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ に対して，**合成射** $g \circ f\colon A \to C$

$$\begin{tikzcd}
C & B \arrow[l, "g"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[ll, bend right, "g \circ f"']
\end{tikzcd}$$

がただ 1 つある．合成射を得る操作を**合成**という．3 つの射の合成について，

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．すなわち，次の図の一番上の射と一番下の射は必ず等しい．

$$
\begin{tikzcd}
D & C \arrow[l, "h"'] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "h \circ g"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend right, "g \circ f"'] \arrow[lll, bend right=50, "h \circ (g \circ f)"'] \arrow[lll, bend left=50, "(h \circ g) \circ f"]
\end{tikzcd}
$$

- すべての対象に対して, **恒等射**と呼ばれる射

$$\mathrm{id}_A \colon A \to A$$

がある. 任意の対象 A の恒等射 id_A は, 任意の射

$$f \colon B \to A$$
$$g \colon A \to C$$

に対して

$$\mathrm{id}_A \circ f = f$$
$$g \circ \mathrm{id}_A = g$$

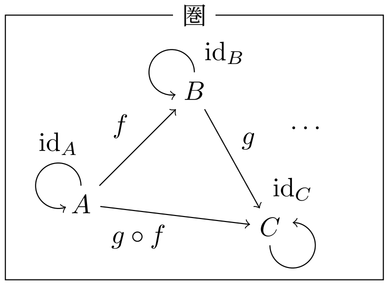
を満たす. すなわち,

$$
\begin{tikzcd}
C & A \arrow[l, "g"'] & A \arrow[l, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[ll, bend right, "g \circ \mathrm{id}_A = g"'] & B \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}_A \circ f = f"]
\end{tikzcd}
$$

上の定義を大雑把にまとめれば, 圏は次の条件を満たすものです.

- なんらかの対象がある.
- 対象の間に射がある.
- 射は “繋げる” ことができる.
- 各対象は, 自分自身に向かう “特別な射” を持つ.

これらの条件を満たすあらゆるものは圏とみなせます. 図で描けばこうなります:



例　対象を集合, 射を集合の間の写像とすれば, これは圏をなす.

例　対象を群, 射を群準同型とすれば, これは圏をなす.

例　対象を半順序集合, 射を単調写像とすれば, これは圏をなす.

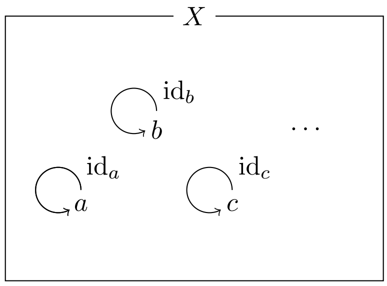
これ以外にも, 集合に何かしらの構造を定め, その構造を保存するような写像を考えることは珍しくありません. そのような構造は多くの場合, 圏を定めます.

しかし, 圏はそれだけではありません. 次のような圏も考えられます.

例　X を集合とする.

$$X = \{a, b, c, \ldots\}$$

対象を X の元, 射を恒等射のみとすれば, 集合 X は圏とみなせる.



例　半順序集合 $(P, \leq)$ に対して, 対象を P の元と

し，射を

$$x \le y \text{ が成り立つとき，}$$
$$\text{ただ 1 つ射 } (x \le y)\colon x \to y \text{ がある}$$

ように定めると，これは圏になる．例えば自然数のなす半順序集合では次の図のようになる（恒等射は省略した）．

$(\mathbb{N}, \le)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0\le1"] \arrow[rr, bend right, "0\le2"'] & 1 \arrow[r, "1\le2"] \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

例　対象も射も何もないとき，これを**空圏**いい，記号 $\mathbf{0}$ で表す．

$\mathbf{0}$

例　対象が 0 ただ 1 つで射は恒等射のみである圏を記号 $\mathbf{1}$ で表す．

$\mathbf{1}$

$$0$$

例　対象が $0, 1$ の 2 つで射は恒等射と $f\colon 0 \to 1$ のみである圏を記号 $\mathbf{2}$ で表す．

$\mathbf{2}$

$$0 \xrightarrow{f} 1$$

同様に，$0, 1, 2$ を対象に持ち，恒等射と $f\colon 0 \to 1, g\colon 1 \to 2$ とその合成のみを射に持つ圏を記号 $\mathbf{3}$ で表す．

$\mathbf{3}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & 1 \arrow[r, "g"] & 2 \end{tikzcd}$$

これらは $(\mathbb{N}, \le)$ の部分集合に通常の順序を入れた半順序集合と同じ構造を持っている．一般に，半順序集合とみなした $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対応する圏 $\boldsymbol{n}$ を考えることができる．

このような例から，圏は非常に一般的なものであることが分かります．更に，圏の定義から，対象について射を用いて特徴づけを行うことができます．その例が，次の節で扱う「同型」という概念です．

4.2　逆射と同型

集合と写像の圏で見た逆写像に相当するものは，一般の圏でも定義できます．

定義 16

圏 C の射 $f\colon A \to B$ に対して，f の**逆射**とは，射

$$g\colon B \to A$$

であって

$$g \circ f = \mathrm{id}_A$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_B$$

を満たすもののことである．

逆射 g を持つ射 $f\colon A \to B$ を**同型射**といい，対象 A と B の間に同型射があるとき，A と B は**同型**であるという．

例　集合と写像の圏において集合 X と Y が同型であるとき，X と Y の元は一対一に対応する．したがって，X と Y は，各元の特徴を無視して「区別できるものの集まり」として見ると同じものである．

例　群と群準同型の圏において 2 つの群 $(G, *), (G', *')$ が同型であるとき，これらの群の元は一対一に対応し，かつ演算の結果も保存される．

例　半順序集合と単調写像の圏において 2 つの半順序集合 $(P, \le), (Q, \le')$ が同型であるとき，これらの

元は一対一に対応し，かつ大小関係も保存される．

つまり，同型な対象は構造を含めて実質的に同じものになるのです．

逆射はこれだけではありません．逆射という概念を用いると群自体を圏として捉えることができます．

例　群 $(G, *)$ は，ただ 1 つの対象 X を持つ圏とみなせる．G の元 g ごとに射 $g\colon X \to X$ を用意し，G の元 g, g' に対して $g \circ g'\colon X \to X$ を $g * g'\colon X \to X$ によって定めればよい．単位元 e は X の恒等射 id_X に，逆元は逆射に相当する．

逆に，対象がただ 1 つで，全ての射が同型射であるような圏は，群とみなせる．

ほかにもさまざまな射の性質，それを用いた対象の性質を定義できますが，ここでは割愛します．

5　関手と自然変換

いろいろな圏を見てきましたが，ここからは圏と圏の間の関係を見ていきます．

5.1　関手

圏を，対象と射の集まりに，射の間の合成という構造が入ったものと捉えると，群準同型のように，構造を保つ写像のようなものを考えられそうです．それが関手です．

定義 17

圏 $\mathbf{C}$ と圏 $\mathbf{D}$ に対し，$\mathbf{C}$ から $\mathbf{D}$ への**関手**

$$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

とは，

- $\mathbf{C}$ の対象 A に対してただ 1 つ $\mathbf{D}$ の対象 $F(A)$ が定まっている
- $\mathbf{C}$ の射 $f\colon A \to B$ に対してただ 1 つ $\mathbf{D}$ の射 $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ が定まっている

ような対応 F であって，合成可能な $\mathbf{C}$ の任意の射 f, g と $\mathbf{C}$ の任意の対象 A に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$$

を満たすものである．

群準同型が元の対応だけでなく演算の整合性も要求しているのと同じように，合成の整合性を要求した定義になっています．

例　群と群準同型のなす圏を $\mathbf{C}$，集合と写像のなす圏を $\mathbf{D}$ とする．関手 $U\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を各群 $(G, *)$ や群準同型 $f\colon (G, *) \to (G', *')$ に対して

$$U((G, *)) = G$$
$$U(f) = f\colon G \to G'$$

と定めると，これは関手になる．

この関手は群 $(G, *)$ を，演算のことを無視して単に集合とみなす関手です．群準同型は写像だったので，これはそのまま $\mathbf{D}$ の射になります．

例　半順序集合と単調写像のなす圏を $\mathbf{C}$，集合と写像のなす圏を $\mathbf{D}$ とする．関手 $U\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を各半順序集合 $(P, \leq)$ や単調写像 $f\colon (P, \leq) \to (Q, \leq')$ に対して

$$U((P, \leq)) = P$$
$$U(f) = f\colon P \to Q$$

と定めると，これは関手になる．

これも，群の場合と同様に，半順序集合を単に集合とみなす関手です．

例　群はそれ自体圏とみなせた．圏と見做した群の間の関手は，群準同型になる．

例　半順序集合も圏とみなせた．圏と見做した半順序集合の間の関手は，単調写像になる．

アタリマエな関手も定義できます．

例　圏 $\mathbf{C}$ に対し，**恒等関手** $\mathrm{id}_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を，任意

の $\mathbf{C}$ の対象 A と射 f に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathbf{C}}(A) &= A\\ \mathrm{id}_{\mathbf{C}}(f) &= f\end{aligned}$$

と定めることができる．

さらに，関手は合成できます．

定義 18
$\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ を圏とする．関手

$$\begin{aligned}F &\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}\\ G &\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}\end{aligned}$$

に対して，**合成関手**

$$G \circ F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$$

を

- $\mathbf{C}$ の対象 A に対して
$$G(F(A))$$
- $\mathbf{C}$ の射 $f\colon A \to B$ に対して $\mathbf{E}$ の射
$$G(F(f))\colon G(F(A)) \to G(F(B))$$

を割り当てる対応で定義する．

すると，関手の合成は結合的で，恒等関手に関して単位的です．すなわち

命題 19
関手 F, G, H の合成に関して

$$F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$$

が成り立ち，$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ に対して

$$\begin{aligned}F \circ \mathrm{id}_{\mathbf{C}} &= F\\ \mathrm{id}_{\mathbf{D}} \circ F &= F\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明 任意の $\mathbf{C}$ の対象 A と射 f に対し

$$\begin{aligned}(F \circ (G \circ H))(A) &= ((F \circ G) \circ H)(A)\\ (F \circ (G \circ H))(f) &= ((F \circ G) \circ H)(f)\\ (F \circ \mathrm{id}_{\mathbf{C}})(A) &= F(A)\\ (F \circ \mathrm{id}_{\mathbf{C}})(f) &= F(f)\\ (\mathrm{id}_{\mathbf{D}} \circ F)(A) &= F(A)\\ (\mathrm{id}_{\mathbf{D}} \circ F)(f) &= F(f)\end{aligned}$$

を示せばよいが，これらは定義より明らかである．

（証明終わり）

結局のところ，圏とその間の関手はこのような世界を作っているのです:

圏と関手の世界

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{D} \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{\mathbf{D}}"] \arrow[dr, "G"] & \cdots \\ \mathbf{C} \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{\mathbf{C}}"] \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "G \circ F"'] & & \mathbf{E} \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{\mathbf{E}}"] \end{tikzcd}$$

つまり，圏と関手はそれ自体が圏をなします[*6]．

5.2 自然変換

関手の間にも関係を定義することができます．

定義 20
$\mathbf{C}, \mathbf{D}$ を圏とし，

$$\begin{aligned}F &\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}\\ G &\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}\end{aligned}$$

を関手とする．F から G への自然変換

$$\theta\colon F \Longrightarrow G$$

とは，各 $\mathbf{C}$ の対象 A に対して $\mathbf{D}$ の射

$$\theta_A\colon F(A) \to G(A)$$

[*6] 正確には，「小さな圏のなす圏」のように何らかの制限が付きます．この例で言う「小さい」というのは，対象の集まりが集合になるような圏という意味です．このように何らかの制限を加えないと，圏と関手のなす圏に圏と関手の圏が含まれてしまい，ラッセルのパラドクスにつながってしまうのです．

割り当てる対応であって，任意の $\mathbf{D}$ の射

$$f\colon A \to B$$

に対して

$$G(f)\circ\theta_A = \theta_B \circ F(f)$$

を満たすものである．この条件を**自然性**という．

自然性の条件を図で書くと次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "G(f)\circ\theta_A"', "\theta_B\circ F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\theta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

例　関手 $F\colon \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ に対して，**恒等自然変換**

$$\mathrm{id}_F\colon F \Longrightarrow F$$

を，$\mathbf{C}$ の各対象 A に対して

$$(\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{F(A)}\colon F(A)\to F(A)$$

と定めると，これは自然変換になる．

さらに，自然変換は合成できます．

定義 21

$\mathbf{C},\mathbf{D}$ を圏とする．関手 $F,G,H\colon \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ と，自然変換

$$\theta\colon F \Longrightarrow G$$
$$\eta\colon G \Longrightarrow H$$

に対し，θ と η の合成

$$\eta\circ\theta$$

を

$$(\eta\circ\theta)_A = \eta_A\circ\theta_A\colon F(A)\to H(A)$$

によって定める．

この自然変換の合成もまた自然変換になる，すなわち自然性を満たすことは，次のようにして分かります．

証明　$\mathbf{C}$ の任意の射

$$f\colon A\to B$$

に対して，

$$H(f)\circ(\eta\circ\theta)_A = (\eta\circ\theta)_B\circ F(f)$$

を示せばよい．式変形をしていくと

$$\begin{aligned}
H(f)\circ(\eta\circ\theta)_A &= H(f)\circ(\eta_A\circ\theta_A)\\
&= (H(f)\circ\eta_A)\circ\theta_A\\
&= (\eta_B\circ G(f))\circ\theta_A\\
&= \eta_B\circ(G(f)\circ\theta_A)\\
&= \eta_B\circ(\theta_B\circ F(f))\\
&= (\eta_B\circ\theta_B)\circ F(f)\\
&= (\eta\circ\theta)_B\circ F(f)
\end{aligned}$$

となる．よって示された．（証明終わり）

何度もこの流れをやっていますが，つまりこういうことです:

関手と自然変換の世界

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[loop left, "\mathrm{id}_G"] \arrow[dr, "\eta"] & \cdots \\
F \arrow[loop left, "\mathrm{id}_F"] \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "\eta\circ\theta"'] & & H \arrow[loop right, "\mathrm{id}_H"]
\end{tikzcd}$$

2 つの圏を固定して，これらの間の関手を対象，自然変換を射とすると圏になるというわけです．この圏を**関手圏**といいます．

6　まとめ

最後の方は定義を列挙したような形になってしまいましたが，とにかく何でもかんでも圏になるというのはなんとなく感じていただけたのではないでしょうか．

集合と写像のなす圏に始まり，群と群準同型，半順序集合と単調写像といった例に加えて，集合その

もの，群そのもの，半順序集合そのものも圏とみなせました．更に，圏の間には関手があって，これらによって圏と関手も圏をなします．そして更に，関手の間にも自然変換と呼ばれるある種の関係があり，関手と自然変換すら圏になりました．

本冊子で紹介したのは，結局のところ圏の定義とその例に過ぎません．まあ圏も悪くないな，と思った方は，ネットに落ちている圏論の入門や種々の数学書を読み漁ってみてください．

7 補足（集合について）

「集合とは中身が定まったものの集まりである」と述べましたが，実はものの集まりがすべて集合になるわけではありません．厳密に述べるためには，**集合論**が必要になります．

7.1 ラッセルのパラドクス

例えば，次のようなものの集まりを考えてみましょう．

$$U = \{x \mid x \notin x\}$$

これは，$x \in x$ を満たさないものをすべて集めたものです．では，$U \in U$ でしょうか？

$U \in U$ だとすると，U は $U \notin U$ を満たすはずです．しかしこれは矛盾です．ところが，$U \notin U$ だとすると，U の定義から $U \in U$ となるので，やはり矛盾です．

$U \in U$ を仮定しても，$U \notin U$ を仮定しても矛盾しました．つまり，U は存在し得ないのです．U を考えることによって導かれるこの矛盾を**ラッセルのパラドクス**といいます．

7.2 集合論の公理

ラッセルのパラドクスの解消方法として，「ものの集まりとして認めるものを制限する」という手法が考えられます．つまり，ある条件を満たすものだけをものの集まりとして認めるというわけです．この条件を満たすものの集まりを**集合**と呼ぶのです．集合を扱う理論は**集合論**と呼ばれ，現在の数学で暗黙に仮定されているのが ZFC と呼ばれる集合論の公理[*7] です．

ZFC は次の公理から成ります．

- 集合が存在する．
- 元が等しい集合は互いに等しい．
- 任意の集合 x と任意の条件 P に対し，P を満たす x の元から成る x の部分集合が存在する．
- 任意の集合 x, y に対し，x, y をともに含む集合が存在する．
- 任意の集合 x に対し，ある $y \in x$ について $z \in y$ となるような全ての z から成る集合が存在する．
- 任意の集合 x に対し，x の全ての部分集合から成る集合が存在する．
- 任意の集合 x に対し，x の任意の元 y ごとに集合 $u(y)$ がただ 1 つ定まっているとき，各 $u(y)$ の全ての元から成る集合が存在する．
- 1 つ以上の元を持つ集合のみから成る集合 x に対し，x の元からちょうど 1 つずつ元を選んで新たな集合を作ることができる．
- 1 つ以上の元を持つ任意の集合 x に対し，x の元 y で x と y が共通の元を持たないものが存在する．

ZFC では，全ては集合として取り扱われ，数や写像も形式的には集合として表現されます．無味乾燥な世界ですが，現代数学は（現時点では）これを取り決めとして築かれています[*8]．

8 参考文献

[1] Steve Awodey. Category Theory Second Edition

[2] `alg-d.com`

[*7] 公理とは，議論の前提となる一連の基本的な仮定のことです．集合論の公理は集合が満たす条件のことです（ある意味で集合の定義に相当します）．

[*8] とは言え，実際は ZFC などを気にすることはあまりありません．これらの公理は "ふつうの数学的操作" が正当化されるように作られているからです．