複素関数論 第2講 課題

Q2-1

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x)$
$= \cos x - i\sin x$ より

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad , \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Q2-2

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{より}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 4 \cdots (1)$$

Q2-3

$X = e^{iz}$ とおくと

$$(1) \iff X + \frac{1}{X} = 4$$

$$\iff X^2 - 4X + 1 = 0$$

より $X = 2 \pm \sqrt{3}$

Q2-4, Q2-5

$\log X = \log e^{iz} = \log(2 \pm \sqrt{3})$ より $iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i$ (nは整数)

$$z = \pm i \log(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi \quad (n\text{は整数})$$