包絡線定理

鈴木花奈子

2014 年 6 月 8 日

1　包絡線定理

包絡線定理とは、パラメータつきの最大化問題である、

$$v(\alpha) = \max_{x} f(x, a), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m$$

を考える。

1. どういうときに v は微分可能か
2. 微分可能な時に $\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}$ はどう書けるか

の答えを考えたい。

微分可能性を仮定して、$\frac{\partial v}{\partial \alpha_j}$ を求めた際に、

1. 最適解を代入してからパラメータで微分したもの
2. パラメータ微分してから最適解を代入したもの

の二つが等しくなることを、**包絡線定理**と呼ぶ。

また、$f(x, \alpha)$ を、$\alpha - \beta$ 平面において、曲線

$$l_x : \beta = f(\alpha)$$

とみたとき、曲線 $\beta = v(\alpha)$ は直線群 l_x の**包絡線**であるという。

2　コードについて

2.1　コード

今回私が包絡線定理のために書いたコードは以下の通りです。

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.axes_grid.axislines import SubplotZero
import numpy as np
import fractions
FIGNUM = 1
if FIGNUM == 0:
    t_max, step = 2, fractions.Fraction(1, 3)
if FIGNUM == 1:
    t_max, step = 3, fractions.Fraction(1, 2)
x_max = 7
y_max = 6
y_min = −5
def f(x, t):
    return t ∗ x − t ∗ ∗2
t_min = −t_max
x_min = −x_max
if 1:
    fig = plt.figure(1)
    ax = SubplotZero(fig, 111)
    fig.add_subplot(ax)
    for direction in [”xzero”, ”yzero”]:
        ax.axis[direction].set_axisline_style(“−| >”)
        ax.axis[direction].set_visible(True)
    for direction in [”left”, ”right”, ”bottom”, ”top”]:
        ax.axis[direction].set_visible(False)
    ax.text(0, y_max, ’y’)
    ax.text(x_max, 0, ’x’)
    plt.xticks([])
    plt.yticks([])
    plt.xlim(x_min, x_max)
    plt.ylim(y_min, y_max)
    x = np.linspace(x_min, x_max, 100)
    for t in np.arange(t_min, t_max+step, step):
```

```
35         y = f(x,t)
36         ax.plot(x, y, color='black', linewidth=1)
37 plt.savefig('envelope'+str(FIGNUM)+'.png')
38 plt.savefig('envelope'+str(FIGNUM)+'.pdf')
39 plt.show()
```

2.2 コードの説明

- 今回は、2 種類の直線群それぞれについて包絡線を描くとを目指した。そこで、6〜10 行目では 6 行目の値を 0 か 1 に変更させることで好きな方の図を表示させられるようにした。
- 16〜17 行目では対称性を利用して変数を設定できるようにし、入力の手間が省けるようにした。
- 34〜36 行目では、パラメータの上限と下限、およびその間いくつ刻みで直線群を描くかを arange 関数を利用して設定し、for 文によって繰り返しを行った。
- 軸のデザインが少し見栄えがよくないままであったり、いただいたヒントをそのまま適用しただけの部分が多いため、今後は自在に操れるようにさらに学習を重ねていきたい。

2.3 実行結果

$$f(t,x) = -t^2 + xt$$

とし、パラメータ t の上限および下限、いくつ刻みかを変化させた結果、以下の 2 つの図を得ることができた。

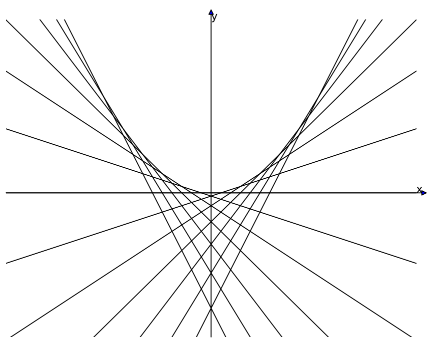

図 1　傾き-2〜2、1/3 刻みのグラフ

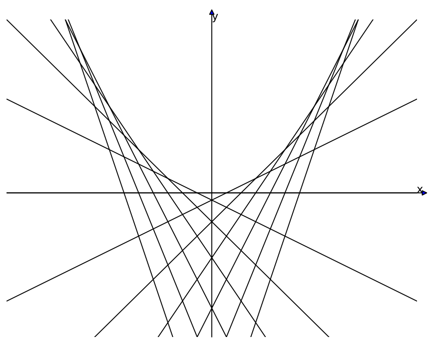

図 2　傾き-3〜3、1/2 刻みのグラフ

参考文献

[1] 2013 年度「経済学のための数学」講義ノート
[2] 尾山大輔、安田洋祐「経済学で出る包絡線定理」『経済セミナー』2011 年 10/11 月. pp. 38-39. 日本評論社