

Light Up-Problem (LUP)

Light Up ist ein Problem, bei dem auf einem vorgegebenem Gebiet Lichtquellen platziert werden sollen, damit das gesamte Gebiet beleuchtet ist. Dabei sind noch einige Zusatzbedingungen zu erfüllen:

Ein Gebiet sei durch eine Matrix $F \in \{W, S, 0, 1, 2, 3, 4\}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, beschrieben. Dabei steht W für ein weißes Feld und $S, 0, 1, \dots, 4$ für ein schwarzes Feld. Das Gebiet besteht aus allen weißen Feldern.

Auf dem Gebiet sollen k Lichtquellen, $k \in \mathbb{N}$, platziert werden. Jede Lichtquelle hat Koordinaten $(x_i, y_i) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Die Lichtquellen strahlen horizontal und vertikal, bis sie von schwarzen Zellen blockiert werden. Dabei soll gelten:

- Die Lichtquellen müssen auf weißen Feldern platziert werden, d.h. $F(x_i, y_i) = W$.
- Die Lichtquellen dürfen sich nicht gegenseitig anstrahlen, d.h. für zwei Lichtquellen i und j gilt dass falls $x_i = x_j$ ist, dann mindestens eines der Felder (x_i, y) , $\min(y_i, y_j) < y < \max(y_i, y_j)$ schwarz ist, $F(x_i, y) \neq W$, oder dass falls $y_i = y_j$ ist, dann mindestens eines der Felder (x, y_i) , $\min(x_i, x_j) < x < \max(x_i, x_j)$ schwarz ist, $F(x, y_i) \neq W$.
- Schwarze Zellen, die eine Zahl enthalten, müssen von genau dieser Anzahl von Lichtquellen umgeben sein: Zwei Zellen (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) heißen benachbart, falls gilt $x = \tilde{x}$ und $y - \tilde{y} = \pm 1$ oder $y = \tilde{y}$ und $x - \tilde{x} = \pm 1$. Für jedes Feld (x, y) , dass eine Zahl enthält, $F(x, y) = z$, $z \in \mathbb{N}$, muss also die Anzahl der benachbarten Lichtquellen genau z sein, d.h.,

$$|\{i \in \{1, 2, \dots, k\} \mid (x, y) \text{ und } (x_i, y_i) \text{ sind benachbart}\}| = z.$$

Eine Folge von k Lichtquellen, die die obigen Bedingungen erfüllt, heißt **zulässig**.

Das Ziel ist, die Lichtquellen so zu platzieren, dass jedes weiße Feld angestrahlt wird: Für jedes Feld (x, y) mit $F(x, y) = W$ gibt es eine Lichtquelle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, die diese Feld anstrahlt, d.h. $x = x_i$ und für keines der Felder (x, \tilde{y}) , $\min(y_i, y) < \tilde{y} < \max(y_i, y)$ gilt $F(x, \tilde{y}) \neq W$, oder $y = y_i$ und für keines der Felder (\tilde{x}, y) , $\min(x_i, x) < \tilde{x} < \max(x_i, x)$ gilt $F(\tilde{x}, y) \neq W$.

Formulierung als Sprache:

Zur Kodierung des Problems wird als Alphabet

$$\Sigma = \{W, S, 0, 1, 2, 3, 4, \#\}$$

verwendet. Die Matrix $F \in \{W, S, 0, 1, 2, 3, 4\}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ wird als

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= F(1, 1)F(1, 2) \dots F(1, n) \# F(2, 1)F(2, 2) \dots F(2, n) \# \\ &\dots F(n, 1)F(n, 2) \dots F(n, n) \# \end{aligned}$$

kodiert. Damit

$$LUP = \{w \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} w = \langle F \rangle \text{ für eine Matrix } F \in \{W, S, 0, 1, 2, 3, 4\}^{n \times n} \\ \text{und es gibt eine zulässige Folge von Lichtquellen,} \\ \text{die das Gebiet beleuchtet.} \end{array} \}$$

Aufgabe:

- Eingabe: Ein Ausdruck $w \in \Sigma^*$ (ein String).
- Bestimme,
 - ob $w = \langle F \rangle$ für eine Matrix $F \in \{W, S, 0, 1, 2, 3, 4\}^{n \times n}$ gilt,
 - ob es eine zulässige Folge von Lichtquellen gibt, die das Gebiet beleuchtet.
- Ausgabe:
 - Ja, falls beides zutrifft.
 - Sonst nein.