Определённый интеграл

Рассмотрим задачу о движении точки вдоль числовой оси. Пусть $S(t)$ — её координата в момент времени t, а $v(t) = S'(t)$ — её скорость в тот же момент времени. Предположим, что мы знаем $S(t_0)$ точки в момент времени t_0, и пусть нам поступают данные о её скорости, и мы хотим вычислить $S(t)$ для любого фиксированного времени $t > t_0$. Если считать скорость $v(t)$ меняющейся непрерывно, то смещение точки за малый промежуток времени Δt можно вычислить как произведение $v(\tau) \cdot \Delta t$, где τ — произвольный момент времени.

Разобъём отрезок $[t_0; t]$, отметив некоторые моменты времени t_i, такие, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n$, причём промежутки $[t_{i-1}; t_i]$ малы, а $\tau \in [t_{i-1}; t_i]$. Тогда будем иметь приближенное равенство:

$$S(t) - S(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

Это приближенное равенство будет уточняться, если переходить к разбиениям отрезка $[t_0; t]$ на всё более мелкие промежутки. Таким образом,в пределе, когда величина наибольшего из промежутков разбиения будет стремиться к нулю,

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t = S(t) - S(t_0)$$

Сумма, стоящая в левой части равенства, называется интегральной суммой. Отметим, что это равенство есть не что иное, как фундаментальная формула для матанализа, называемая формулой Ньютона-Лейбница. Она позволяет, в частности, находить первообразную $S(t)$ по её производной $v(t)$.

Понятие интегральной суммы и её предела

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим конечное число точек $x_1 \ldots x_{n-1}$, лежащих внутри отрезка, удовлетворяющих неравенству $a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$. Положим $a = x_0, b = x_n$. Тогда указанные точки производят разбиение отрезка $[a; b]$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots [x_{n-1}; x_n]$. Длину k-го отрезка обозначим за $\Delta x_k = x_n - x_{n-1}$, возьмём на каждом k-м отрезке произвольную точку ξ_k, такую, что $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ и составим для рассмотренного разбиения следующую сумму:

$$\sigma = \sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Геометрический смысл σ очевиден: это сумма площадей с основаниями $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ и высотами $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то есть, площадь криволинейной трапеции.

Определение. *Число I называется пределом интегральных суммм при стремлении к 0 наибольшей длины d частичных отрезков, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся соответствующее ему $\delta(\varepsilon)$, такое, что при единственном условии $d < \delta(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\sigma - I < \varepsilon$.*

$\forall\, x > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)\colon d < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$