Первообразная функции

Простейшей, но весьма важной задачей является вопрос об отыскании функции F по известной её производной. Пусть Δ — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, на котором заданы f и F.

Определение. *Функция F называется первообразной для функции f на промежутке Δ, если F дифференцируема на промежутке Δ и в каждой точке этого промежутка $F' = f(x)$ (1).*

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$. Действительно, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Однако, $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ также будет первообразной для $f(x) = x^2$. В самом деле, $\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2$.

Первообразная любой функции неперывна, так как она имеет производную. Функция же, у которой существует первообразная, не обязательно непрерывна.

Лемма 1. *Для того, чтобы две дифференцируемые на некотором промежутке функции были первообразными одной и той же функции, необходимо и достаточно, чтобы они на этом промежутке отличались на константу.*

Доказательство: Функции $F(x), \Phi(x)$ являются первообразными на промежутке Δ одной и той же функции тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + C$ при $x \in \Delta$.

Достаточность: если F — первообразная функции $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$. $F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$, так как $(F + C)' = F' + C' = F' = f(x)$.

Необходимость: если F и Φ — первообразные, то должно выполняться равенство $F' = \Phi' = f$. Тогда $(F - \Phi)' = F' - \Phi' = 0$, а следовательно, согласно следствию из теоремы Лагранжа, разность $F - \Phi = C$, C=const. $\square$

Определение. *Пусть f задана на некотором промежутке Δ. Совокупность всех её первообразных на этом промежутке называется неопределённым интегралом и обозначается $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (2).*

Здесь $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Из определения неопределённого интеграла следует, что $F(x)$ — какая-либо первообразная для функции $f(x)$, а $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ (3). Таким образом, неопределённый интеграл от функции f представляет собой общий вид функции с производной f. Кроме того, под знаком интеграла стоит дифференциал функции F: $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$. Следовательно, будем считать (по определению дифференциала), что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из следующих видов: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x)$ (4).

Основные свойства интегралов:

Будем полагать, что все рассматриваемые функции определены на промежутке Δ.

1. Если F дифференцируема на Δ, то

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C \tag{5}$$

2. Пусть f имеет первообразную на Δ. Тогда

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) устанавливают взаимность операций дифференцирования и неопределённого интегрирования. Эти действия взаимно обратны с точностью до константы.

3. Если f_1,f_2 имеют первообразную на промежутке Δ, то $f_1 + f_2$ тоже имеет первообразную на Δ.
$$\int (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
.

Пусть F_1, F_2 — первообразные функций f_1 и f_2 соответственно. Тогда на промежутке Δ будут справедливы равенства: $F_1'(x) = f_1(x), F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда неопределённые интегралы $\int f_1(x)\,\mathrm{d}x, \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$ будут состоять из функций вида $F_1(x) + C$ и $F_2(x) + C$.

Пусть $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$. Тогда $F(x)$ — первообразная функции $(f_1 + f_2)$, так как $F'(x) = (F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$, а интеграл $\int (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$, в то время как $\int f_1\,\mathrm{d}x + \int f_2\,\mathrm{d}x = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. В силу того, что C, C_1, C_2 — произвольные постоянные, то оба множества совпадают.

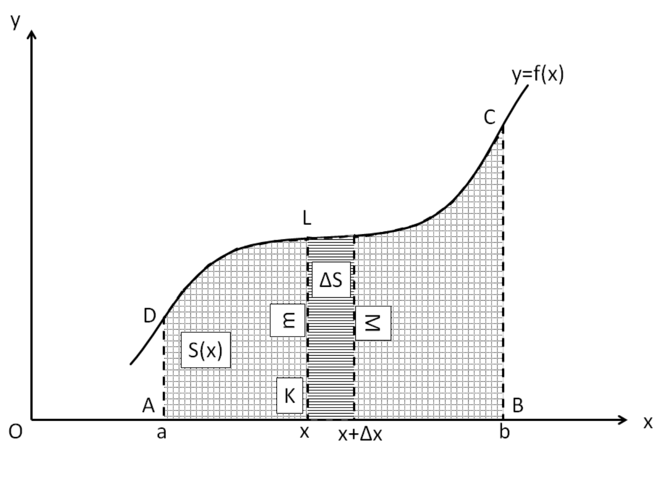
4. Если f имеет первообразную и k — некоторое число, то $k \cdot f$ также имеет первообразную при $k \neq 0$, тогда $\int (k \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Пусть F — первообразная функции $f(x)$. Тогда $k \cdot F(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$, поскольку $(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$. Поэтому $\int (k \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = k \cdot F(x) + C = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot (F(x) + C) = k \cdot F(x) + k \cdot C$.

Следствие (линейность). *Если f_1,f_2 имеют первообразную на Δ, а $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то*

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + \lambda_2 \int f_2(x)\mathrm{d}x$$

Интеграл и задача об определении площади



Пусть дана $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, принимающая лишь положительные значения. Рассмотрим фигуру $ABCD$, которая ограничена кривой DC, двумя ординатами $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox. Такую фигуру будем называть криволинейной трапецией.

Желая определить величину площади этой фигуры, изучим поведение площади переменной фигуры $AKLD$, которая заключена между ординатой a и ординатой, соответствующей произвольной x из отрезка $[a; b]$. При изменении x площадь этой фигуры будет изменяться соответствующе. Следовательно, площадь трапеции $AKLD$ — некоторая функция, зависящая от x. $S_{AKLD} = S(x)$.

Сначала найдём производную этой функции. Придадим x некоторое приращение Δx, тогда площадь получит приращение ΔS. Обозначим через m и M наименьшее и наибольшее значение $f(x)$ в промежутке $[x; x+\Delta x]$. Сравним площадь ΔS с площадью прямоугольников, построенных на основании Δx и имеющих высоты m и M. $m \cdot \Delta x < \Delta S < M \cdot \Delta x$. Разделим всё на Δx: $m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M$. Если $\Delta x \to 0$, то, в силу непрерывности функции, m и M будут стремиться к $f(x)$, тогда $S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Таким образом, приходим к теореме Ньютона-Лейбница:

Теорема (Ньютона-Лейбница)**.** *Производная от переменной площади ΔS по конечной абсциссе равна конечной ординате $y = f(x)$.*

Другими словами, переменная площадь $S(x)$ представляет собой первообразную фнукцию для заданной функции $y = f(x)$.

Если известна какая-либо первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, то площадь $S(x)$ равна $F(x)+C$. Постоянную C легко определить, положив $x = a$. $F(a) + C = 0$, следовательно, $C = -F(a)$. $S(x) = F(x) - F(a)$, и, в частности, для получения площади трапеции $ABCD$ необходимо принять $x = b$. Получим:

$$S_{ABCD} = F(b) - F(a)$$