درس مبانی نظریه محاسبه

جلسه شانزدهم

حل چند مسئله

بنظر شما گرامر زیر چه زبانی را تولید می‌کند؟

$$G: \; T \to TT \mid aTb \mid bTa \mid a \mid \epsilon$$

چند رشته که توسط گرامر بالا تولید می‌شوند مثال بزنید.

$$ab, ba, abbbaa, a, \epsilon, aaa$$

نشان دهید گرامر بالا معادل با زبان زیر است.

$$A = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) \geq n_b(w)\}$$

یک طرف گزاره تا حدی بدیهی است. واضح است در هر رشته که G تولید می‌کند تعداد a ها حداقل به اندازه تعداد b هاست. پس

$$L(G) \subseteq A$$

باید نشان دهیم

$$A \subseteq L(G)$$

یعنی اگر $w \in A$. باید نشان دهیم w توسط گرامر G تولید می‌شود.

این را با استقرا می‌توان نشان داد. فرض کنید همه رشته با طول حداکثر k که در زبان A هستند توسط گرامر G تولید می‌شوند. یک رشته $w \in A$ با طول $k+1$ در نظر بگیرید. رشته w می‌تواند به یکی از چهار حالت زیر باشد.

$$1)\ aw'b \quad 2)\ bw'a \quad 3)\ aw'a \quad 4)\ bw'b$$

دو حالت اول با استفاده از قوانین جایگذاری

$$T \to aTb, \qquad\qquad T \to bTa$$

و فرض استقرا می‌توان گفت که w از گرامر G مشتق می‌شود.

در مورد حالت سوم که $w = aw'a$ اگر در w تعداد a از تعداد b بیشتر باشد، از اشتقاق زیر و فرض استقرا استفاده می‌کنیم.

$$T \Rightarrow TT \Rightarrow aT \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$$

اگر در w تعداد a و b برابر باشند، مشابه استدلالی که قبلاً انجام داده‌ایم چنین رشته‌ای را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد که در هر دو قسمت تعداد a و تعداد b برابر باشند و لذا از اشتقاق زیر و فرض استقرا استفاده می‌کنیم.

$$T \Rightarrow TT \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$$

در مورد حالت چهارم $w = bw'b$ چون تعداد a از تعداد b کمتر نیست، پس با شروع از سمت چپ به جایی در رشته می‌رسیم که تعداد a ها و b ها برابر هستند. پس در این حالت رشته w را می‌توان به صورت $w = xy$ نوشت به طوری که $x \in A$ و $y \in A$. لذا برای اشتقاق مشابه حالت سوم از قانون زیر شروع می کنیم.

$$T \Rightarrow TT \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$$

آیا گرامر G مبهم است؟

$$G: \ T \rightarrow TT \mid aTb \mid bTa \mid a \mid \epsilon$$

بله. برای مثال دو اشتقاق چپ متفاوت برای رشته aa موجود است.

$$T \Rightarrow TT \Rightarrow aT \Rrightarrow aa$$

$$T \Rightarrow TT \Rightarrow TTT \Rightarrow aTT \Rightarrow aaT \Rightarrow aa$$

مسئله: نشان دهید خانواده زبانهای مستقل از متن تحت عملگرهای اتصال و بستار ستاره‌ای بسته است. به عبارت دیگر اگر A و B مستقل از متن باشند آنگاه زبانهای AB و A^* زیر نیز مستقل از متن هستند.

اثبات: چون A و B مستقل از متن هستند پس گرامرهای $G_1(V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ و $G_2(V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ به ترتیب برای زبانهای A و B وجود دارند. می‌توانیم فرض کنیم که مجموعه متغیرهای V_1 و V_2 اشتراکی ندارند.

گرامر مستقل از متن زیر معادل با زبان AB است.

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S)$$

گرامر مستقل از متن زیر نیز معادل با زبان A^* میباشد.

$$G_4 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, R_1 \cup \{S \to SS_1, S \to \epsilon\}, S)$$

مسئله: نشان دهید خانواده زبانهای مستقل از متن تحت عملگر اشتراک بسته نیست. به عبارت دیگر اگر A و B مستقل از متن باشند آنگاه زبان $A \cap B$ لزوما مستقل از متن نیست.

اثبات: دو زبان زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\}, \qquad B = \{a^* b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

می‌دانیم که A و B هر دو مستقل از متن هستند. از طرفی

$$A \cap B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

قبلا با استفاده از لم تزریق نشان دادیم که زبان بالا مستقل از متن نیست.

نتیجه: زبانهای مستقل از متن تحت عمل متمم بسته نیست.

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

تمرین: می‌دانیم که زبان زیر مستقل از متن است.

$$N = \{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, x \neq y\}$$

آیا زبان زیر مستقل از متن است؟

$$E = \{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, x = y\}$$

جواب: بله. گرامر زیر معادل با زبان E است.

$$S \rightarrow aSa \mid \#$$

تمرین: می‌دانیم که زبان زیر مستقل از متن است.

$$Q = \{x\#y \mid x, y \in \{a, b\}^*, x \neq y\}$$

آیا زبان زیر مستقل از متن است؟

$$F = \{x\#y \mid x, y \in \{a, b\}^*, x = y\}$$

نشان دهید F مستقل از متن نیست. با استفاده از این نشان دهید زبانهای مستقل از متن تحت عملگر متمم بسته نیست. در اثبات خود می‌توانید از لم زیر استفاده کنید.

لم: اگر A مستقل از متن باشد و B منظم باشد آنگاه زبان $A \cap B$ مستقل از متن است.

جواب قسمت اول: فرض کنید F مستقل از متن باشد. پس شرایط لم تزریق در مورد F صادق است. فرض کنید p انتخاب شده است. باید نشان دهیم یک رشته با طول حداقل p که در زبان F وجود دارد که نمی‌توانیم آن را به پنج قسمت $uvxyz$ تقسیم کنیم بطوریکه شرایط سه‌گانه لم تزریق برقرار باشند.

رشته $a^p b^p \# a^p b^p$ را انتخاب می‌کنیم.

چون باید داشته باشیم $|vxy| \leq p$ قسمت vxy را هر جای رشته بگیریم با تزریق هماهنگ y و v طرفین علامت # نامتقارن می‌شود.

جواب قسمت دوم: فرض کنید زبانهای مستقل از متن تحت عملگر متمم بسته باشد. چون Q مستقل از متن است پس $\overline{Q}$ مستقل از متن است.

$$\overline{Q} = \overline{\{x\#y \mid x, y \in \{a, b\}^*, x \neq y\}}$$

$$\overline{Q} = \{x\#y \mid x, y \in \{a, b\}^*, x = y\} \cup F_1$$

$$F_1 = \{w \in \{a, b, \#\}^* \mid n_\#(w) \geq 2 \ \text{ or } \ n_\#(w) = 0\}$$

F_1 یک زبان منظم است. داریم

$$\overline{Q} = F \cup F_1, \qquad F \cap F_1 = \emptyset$$

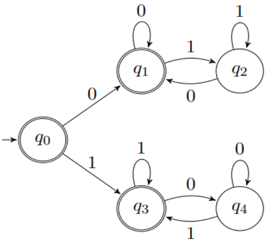
پس

$$F = \overline{Q} - F_1 = \overline{Q} \cap \overline{F_1}$$

چون $\overline{Q}$ مستقل از متن است و متمم یک زبان منظم نیز منظم است، با استفاده از لمی که در صورت سوال ذکر شده، پس زبان F باید مستقل از متن باشد. اما نشان دادیم که F مستقل از متن نیست. لذا فرض ما مبنی بر بسته بودن زبانهای مستقل از متن تحت عملگر متمم باید اشتباه باشد.

برای زبان A یک ماشین متناهی طراحی کنید.

A = $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ has equal occurrences of 01 and 10 as substrings}\}.$



سه حالت دارد: (1) رشته تهی است. (2) رشته با 0 شروع می‌شود. (3) رشته با 1 شروع می‌شود. اگر رشته با 0 شروع شود و بعد از مدتی اولین 1 دیده شود، یک رخداد 01 داریم که با دیدن اولین 0 کنسل می‌شود (مثل برگشت به وضعیت اولیه است.) بطور مشابه اگر رشته با 1 شروع شود و بعد از مدتی اولین 0 دیده شود، یک رخداد 10 داریم که با دیدن اولین 1 کنسل می‌شود.

یک nfa با سه وضعیت برای زبان $A = \{ab + abc\}^*$ طراحی کنید.

نشان دهید زبان زیر مستقل از متن است.

$$A = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) + 1 \}$$