پاسخ سوالات امتحان ۱۴۰۴/۱/۳۰ مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها

۱- مساله: فرض کنید A یک مجموعه باشد به طوری که هر زیر مجموعه سره آن متناهی است. نشان دهید A متناهی است.

حل: به خلاف فرض کنیم A نامتناهی است. آنگاه برای هر $x\in A$، مجموعه $A-\{x\}$ نیز نامتناهی است. این با فرض متناهی بودن $A-\{x\}$ متناقض است.

۲- مساله: یک مجموعه نامتناهی را تعریف کنید. اگر A و B دو مجموعه باشند و $f: A\to B$ یک تابع یک به یک باشد و A نامتناهی، نشان دهید B نیز نامتناهی است.

حل: یک مجموعه X را نامتناهی گوییم هرگاه یک تابع یک به یک از X به روی یک زیر مجموعه سره Y از X وجود داشته باشد. $f: X\to Y\subsetneq X$ یک به یک پوشا باشد.

قسمت دوم: حال فرض کنیم A نامتناهی و $f: A\to B$ تابعی یک به یک است.
اگر f پوشا باشد آنگاه B و A هم توان است. در نتیجه B نیز نامتناهی است (زیرا A نامتناهی است).
اگر f پوشا نباشد آنگاه f یک تابع یک به یک پوشا از A به روی $f(A)$ خواهد بود. چون A نامتناهی است و A و $f(A)$ در تناظر یک به یک قرار می‌گیرند پس $f(A)$ هم نامتناهی است. چون $f(A)\subseteq B$ و B شامل مجموعه $f(A)$ است، پس B یک مجموعه نامتناهی است [هر ابر مجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است]

۳- فرض کنید A و B دو مجموعه و $f: A\to B$ یک تابع پوشاست.

الف: نشان دهید رابطه $\forall x,y\in A,\ f(x)=f(y)\Leftrightarrow xRy$ یک رابطه هم ارزی است.

ب: رده هم ارزی $x\in A$، یعنی $[x]=\{y\in A \mid xRy\}$ را تعیین کنید و اگر $b=f(x)$ نشان دهید $[x]=f^{-1}(b)$ و نشان دهید $A=\bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$

پ: نشان دهید اگر A شمارا باشد، B نیز شماراست.

۲) حل ج الف: اولاً انعکاسی $f(x)=f(y) \iff xRx$

ثانیاً تقارن $xRy \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow f(y)=f(x) \Rightarrow yRx$

ثالثاً خاصیت ترکیبی

$$\left.\begin{array}{l} xRy \Rightarrow f(x)=f(y) \\ yRz \Rightarrow f(y)=f(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=f(z) \Rightarrow xRz$$

ب:

$$[x]=\{y\in A \mid xRy\}=\{y\in A \mid f(x)=f(y)\}$$

اما

$$f^{-1}(b)=\{y\in A \mid f(y)=b\}$$

چون $f$ پوشاست پس $x\in A$ وجود دارد که $b=f(x)$.

بنابراین $f(y)=f(x)$ و $yRx$. بنابر تعریف $[x]$

همان مجموعه $\{y\in A \mid f(y)=f(x)=b\}$ است. پس $f^{-1}(b)=[x]$.

چون برای هر $b\in B$، $A\supset f^{-1}(b)=[x]$ پس $A\supset \bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$

به طور متقابل فرض کنیم $x\in A$. پس $b=f(x)\in A$. در نتیجه $x\in f^{-1}(b)$.

بنابراین $x\in \bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$ و $A\subset \bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$.

پس $A=\bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$.

ج: طبق d برای هر $b\in B$، چون $[x]=f^{-1}(b)$، می‌توان [illegible]

عضو $y_b\in[x]$ را انتخاب کرد به طوری که $f(y_b)=b$

بنابراین قرار می‌دهیم

$$\forall b\in B,\quad C=\{y_b\in A \mid f(y_b)=b\}$$

چون $B$ در تناظر یک به یک با $C$ قرار می‌گیرد و

چون $C$ یک زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی شمارای $A$ است لذا شمارا است.

بنابراین $B$ نیز شمارا است.

مسأله ۴- فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه ناشمارا باشند.

الف) نشان دهید $A \cup B$ نیز یک مجموعه ناشمارا است

ب) نشان دهید $A \cap B$ لزوماً ناشمارا نیست

ج) نشان دهید $A \times B$ ناشمارا است

حل: الف) چون $A$ ناشمارا است و $A \subset A \cup B$ پس $A \cup B$ هم ناشمارا است

ب) چون $A$ ناشمارا است، پس برای هر $x \in A$، $A-\{x\}$ نیز ناشمارا است. قرار می‌دهیم $B = A-\{x\}$. آنگاه

$$A \cap B = A \cap (A-\{x\}) = A-\{x\}$$

که یک مجموعه ناشمارا است.

ج) فرض کنیم $b \in B$. مجموعه $A \times \{b\}$؛ چون $A$ در تناظر یک به یک قرار می‌گیرد پس $A \times \{b\}$ ناشمارا است. و چون $A \times \{b\} \subset A \times B$ پس $A \times B$ نیز ناشمارا است.

مسأله ۵- فرض کنید $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$. نشان دهید

الف) برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\operatorname{Card} \mathbb{N}^k = \operatorname{Card} \mathbb{N}$

ب) نشان دهید $\operatorname{Card} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k = \operatorname{Card} \mathbb{N}$.

حل- الف- می‌دانیم $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می‌گیرد. پس $\operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{N}^2$. بنابر فرض استقراء فرض کنیم برای $k \in \mathbb{N}$، $\operatorname{Card} \mathbb{N}^k = \operatorname{Card} \mathbb{N}$

حال چون $\mathbb{N}^{k+1} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ و چون $\operatorname{Card} \mathbb{N}^k = \operatorname{Card} \mathbb{N}$ پس

$$\operatorname{Card} \mathbb{N}^{k+1} = \operatorname{Card} \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{N}^k \times \operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{N} \times \operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} \mathbb{N}^2 = \operatorname{Card} \mathbb{N}$$

ب- می‌دانیم اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارا، شمارا است پس برابر است

(۴) پس $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ یک مجموعه شمارش‌پذیر است و چون $\mathbb{N}\subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k$

پس $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است. بنابراین

$$\text{Card}\,\mathbb{N} = \text{Card} \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k .$$

مساله ۶: آیا اعداد معمولی با اعداد اصلی متفاوتند؟ دو عدد اصلی متفاوت مثال بزنید.

حل: می‌دانیم عدد اصلی، اندازه‌ای برای تعداد اعضای یک مجموعه است

مثلاً اگر $A=\mathbb{N}_k$ آنگاه $\text{Card}\,A=\text{Card}\,\mathbb{N}_k=k$

ولی اگر $A=\mathbb{N}$ آنگاه $\text{Card}\,\mathbb{N}=\aleph_0$ یک عدد طبیعی نیست

بنابراین اعداد معمولی با اعداد کاردینال تفاوت دارند.

مثلاً: عدد اصلی $\mathbb{N}_k$ با عدد اصلی $\mathbb{N}$ تفاوت دارد زیرا

$$k=\text{Card}\,\mathbb{N}_k < \text{Card}\,\mathbb{N}=\aleph_0 .$$

و عدد اصلی $\mathbb{R}$ با عدد اصلی $\mathbb{N}$ نیز تفاوت دارد زیرا

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$$

$$\aleph_0 = \text{Card}\,\mathbb{N} < \text{Card}\,\mathbb{R} = c$$

توضیح: در مسائل بالا از گزاره‌های زیر استفاده شده و مسئله را حل کردیم

۱- اگر $A$ نامتناهی باشد آنگاه $A-\{x\}$ هم نامتناهی است

۲- اگر $A$ نامتناهی باشد و $A\subset B$ آنگاه $B$ هم نامتناهی است

۳- هم‌توانی در مجموعه‌ها توسط یک تابع یک‌به‌یک پوشا تعریف می‌شود.