حل تمرین مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

سری اول، مجموعه های شمارای نامتناهی و ناشمارا

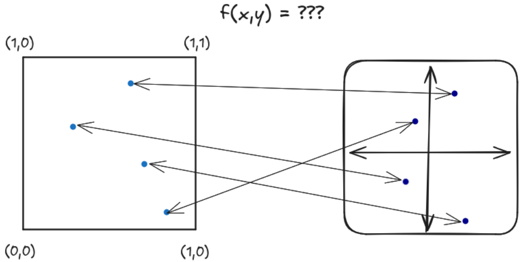
عماد پورحسنی

تمرین ۱

- نشان دهید $\mathbb{R}^2$ با مجموعه نقاط واقع در مربع $(0,1) \times (0,1)$ در تناظر یک به یک قرار میگیرند. یعنی این دو مجموعه هم توان هستند. به همین ترتیب نشان دهید فضای $\mathbb{R}^3$ با مکعب $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ هم توان هستند. میتوانید حالت کلی تر این حکم را بنویسید؟

تمرین ۱

- نشان دهید $\mathbb{R}^2$ با مجموعه نقاط واقع در مربع $(0,1) \times (0,1)$ در تناظر یک به یک قرار میگیرند. یعنی این دو مجموعه هم توان هستند. به همین ترتیب نشان دهید فضای $\mathbb{R}^3$ با مکعب $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ هم توان هستند. میتوانید حالت کلی تر این حکم را بنویسید؟



تمرین ۱

بررسی یک حالت ساده تر

$$(0,1) \xrightarrow{?} \mathbb{R}$$

تمرین ۱

بررسی یک حالت ساده تر

$$(0,1) \xrightarrow{?} \mathbb{R}$$

- میدانیم که تناظر بین $(-1,1)$ و $\mathbb{R}$ وجود دارد:

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(\frac{\pi x}{2})$$

تمرین ۱

بررسی یک حالت ساده تر

$$(0,1) \xrightarrow{?} \mathbb{R}$$

- میدانیم که تناظر بین $(-1,1)$ و $\mathbb{R}$ وجود دارد:

$$f:(-1,1) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(\frac{\pi x}{2})$$

- حال تابع g را به طوری باید پیدا کنیم که :

$$g:(0,1) \to (-1,1)$$

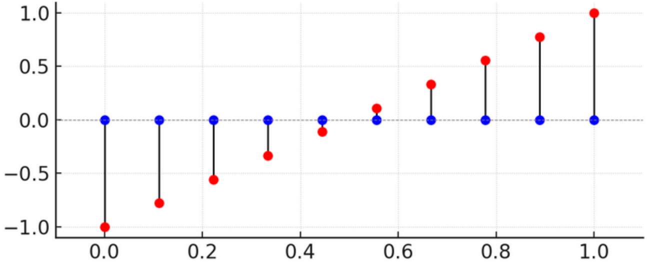
تمرین ۱

بررسی یک حالت ساده تر

$$(0,1) \xrightarrow{?} \mathbb{R}$$

- تبدیل خطی $(0,1)$ به $(-1,1)$

$$g : x \mapsto 2x - 1$$



تمرین ۱

بررسی یک حالت ساده تر

$$(0,1) \xrightarrow{?} \mathbb{R}$$

- از ترکیب توابع استفاده میکنیم :

$$h = f \circ g : (0,1) \to \mathbb{R}$$

- تابع h یک تابع یک به یک و پوشا است.

تمرین ۱

تابع f و g را میتوان به ابعاد بالاتر تعمیم داد.

- $f : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\tan(\frac{\pi x}{2}), \tan(\frac{\pi y}{2}))$$

- $g : (0,1) \times (0,1) \to (-1,1) \times (-1,1)$

$$g(x,y) = (2x-1, 2y-1)$$

تمرین ۱

تابع f و g را میتوان به ابعاد بالاتر تعمیم داد.

- میتوان نتیجه گرفت که تابع h نیز برای ابعاد بالاتر قابل تعریف است.
- این تابع نیز یک به یک و پوشا است.
- میتوان نتیجه گرفت که $(0,1)\times(0,1)\sim\mathbb{R}^2$ و به طور کلی :

$$(0,1)^n\sim\mathbb{R}^n$$

$$h(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\tan\left(\frac{\pi(2x_1-1)}{2}\right),\tan\left(\frac{\pi(2x_2-1)}{2}\right),\dots,\tan\left(\frac{\pi(2x_n-1)}{2}\right)\right)$$

تمرین ۲

نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\cos(x) = 0$ شماراست. همین سوال را برای مجموعه جواب های معادلات $\sin(x)$ و $\tan(x)$ و $\cot(x)$ پاسخ دهید.

تمرین ۲

نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\cos(x) = 0$ شماراست. همین سوال را برای مجموعه جواب های معادلات $\sin(x)$ و $\tan(x)$ و $\cot(x)$ پاسخ دهید.

$$\{kx + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\} \overset{?}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$$

تمرین ۲

برای $\cos(x)$ داریم:

- تابع f_{cos} را باید طوری تعریف کنیم که یک به یک و پوشا باشد و داشته باشیم

$$f_{cos} : \mathbb{Z} \to \{\dots, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$$

تمرین ۲

برای $\cos(x)$ داریم:

- تابع f_{cos} را باید طوری تعریف کنیم که یک به یک و پوشا باشد و داشته باشیم

$$f_{cos} : \mathbb{Z} \to \{\dots, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$$

- میدانیم که $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

تمرین ۲

برای $\cos(x)$ داریم:

- مجموعه جواب های معادله $\cos(x) = 0$ برابر $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

تمرین ۲

برای $\cos(x)$ داریم:

- مجموعه جواب های معادله $\cos(x) = 0$ برابر $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.
- تابع f_{cos} را میتوان اینگونه تعریف کرد:

$$f_{cos} : x \mapsto (\frac{2x+1}{2})\pi$$

- به راحتی میتوان دید که این تابع یک به یک و پوشا است.

تمرین ۲

برای $\sin(x)$ داریم:

- تابع f_{sin} را باید طوری تعریف کنیم که یک به یک و پوشا باشد و داشته باشیم

$$f_{sin} : \mathbb{Z} \to \{\dots, -\pi, 0\,\pi, \cdots\}$$

- مجموعه جواب های معادله $\sin(x) = 0$ برابر $x = k\pi$ است.
- تابع f_{sin} را میتوان اینگونه تعریف کرد:

$$f_{sin} : x \mapsto x\pi$$

- به راحتی میتوان دید که این تابع یک به یک و پوشا است.

تمرین ۲

- برای $\tan(x)$ و $\cot(x)$ به ترتیب همانند $\sin(x)$ و $\cos(x)$ عمل میکنیم.
- زیرا داریم

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

تمرین ۳

نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\sinh(x) = 0$ یک مجموعه شماراست.

تمرین ۳

نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\sinh(x) = 0$ یک مجموعه شماراست.

- ابتدا معادله را حل میکنیم

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \implies e^x = e^{-x} \implies e^x = \frac{1}{e^x} \implies e^{2x} = 1 \implies x = 0$$

پس زمانی $\sinh(x) = 0$ که داشته باشیم $x = 0$

تمرین ۳

نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\sinh(x) = 0$ یک مجموعه شماراست.

- ابتدا معادله را حل میکنیم

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \implies e^x = e^{-x} \implies e^x = \frac{1}{e^x} \implies e^{2x} = 1 \implies x = 0$$

پس زمانی $\sinh(x) = 0$ که داشته باشیم $x = 0$

- میدانیم که هر مجموعه متناهی، شماراست.

تمرین ۴

آیا مجموعه $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست؟ مجموعه $\mathbb{C}$ چطور؟

تمرین ۴

آیا مجموعه $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست؟ مجموعه $\mathbb{C}$ چطور؟

- خیر ، هر دو مجموعه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ ناشمارا هستند. میدانیم که $(-1,1)$ ناشماراست و داریم:

$$(-1,1) \sim (0,1) \sim \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

تمرین ۵

نشان دهید $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ با $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ همتوان هستند. همچنین با فرض $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ نشان دهید تابع $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ که به صورت $f(a, b) = \frac{a}{b}$ تعریف میشود تابعی پوشاست. آیا این تابع یک به یک است؟

تمرین ۵

نشان دهید $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ با $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ همتوان هستند.

تمرین ۵

نشان دهید $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ با $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ همتوان هستند.

- فرض کنیم $f : \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ و $g : \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ است. تابع $f \times g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ را برای هر $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ تعریف میکنیم. که یک به یک و پوشا است.

یک به یک بودن :

$$(f \times g)(x_1, y_1) = (f \times g)(x_2, y_2) \implies (f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$$

$$\implies f(x_1) = f(x_2) \quad \& \quad g(x_1) = g(x_2)$$

این تابع مشخصا پوشا است.
پس داریم:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

تمرین ۵

با فرض $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ نشان دهید تابع $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ که به صورت $f(a, b) = \frac{a}{b}$ تعریف میشود تابعی پوشاست. آیا این تابع یک به یک است؟

تمرین ۵

با فرض $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ نشان دهید تابع $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ که به صورت $f(a,b) = \frac{a}{b}$ تعریف میشود تابعی پوشاست. آیا این تابع یک به یک است؟

- فرض کنیم که $q \in \mathbb{Q}$ یک عدد گویاست. $q = \frac{m}{n}$ که در آن $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$
  با توجه به تعریف تابع اگر قرار دهیم $a = m$ و $b = n$ آنگاه خواهیم داشت:

$$q = \frac{m}{n} = f(m,n) = f(a,b)$$

پس تابع f پوشاست. اما این تابع یک به یک نیست:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \implies 1 \neq 2 \quad \& \quad 3 \neq 6$$

تمرین ۶

نشان دهید که هر دنباله در $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست. (متناهی یا نامتناهی.)

تمرین ۶

نشان دهید که هر دنباله در $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست. (متناهی یا نامتناهی.)

$$A = a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

یک مجموعه شمارا دو حالت دارد، یا متناهی است و یا نامتناهی.
تابع $f : \mathbb{N} \to A$ را به صورت $f : n \mapsto a_n$ تعریف میکنیم که در آن $f(n) = a_n$.
که یک تابع یک به یک و پوشاست پس $A \sim \mathbb{N}$ و A یک مجموعه شماراست.

تمرین ۷

نشان دهید مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

تمرین ۷

نشان دهید مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

- فرض کنیم که مجموعه اعداد اول متناهی باشد

$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$$

تمرین ۷

نشان دهید مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

- فرض کنیم که مجموعه اعداد اول متناهی باشد

$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$$

- حال عدد $p_{n+1} = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۷

نشان دهید مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

- فرض کنیم که مجموعه اعداد اول متناهی باشد

$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$$

- حال عدد $p_{n+1} = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ را در نظر بگیرید.
- این عدد فقط بر خودش و ۱ بخش پذیر است. لذا اول است. پس مجموعه P نمیتواند متناهی باشد
- مجموعه اعداد اول زیرمجموعه ای از $\mathbb{N}$ است پس باید شمارا باشد.

تمرین ۸

نشان دهید مجموعه اعداد مرکب شمارای نامتناهی است.
آیا میتوانید زیرمجموعه های شمارای نامتناهی دیگری مثال بزنید؟

تمرین ۸

نشان دهید مجموعه اعداد مرکب شمارای نامتناهی است.
آیا میتوانید زیرمجموعه های شمارای نامتناهی دیگری مثال بزنید؟

- مجموعه زیر را در نظر بگیرید :

$$kP = \{\ k2, k3, k5, \cdots\} \text{ where } k \in \mathbb{N}$$

می دانیم که kP زیر مجموعه ای از مجموعه اعداد مرکب است.

تمرین ۸

نشان دهید مجموعه اعداد مرکب شمارای نامتناهی است.
آیا میتوانید زیرمجموعه های شمارای نامتناهی دیگری مثال بزنید؟

- مجموعه زیر را در نظر بگیرید :

$$kP = \{\ k2, k3, k5, \cdots\} \text{ where } k \in \mathbb{N}$$

می دانیم که kP زیر مجموعه ای از مجموعه اعداد مرکب است.

- میدانیم که این مجموعه ، نامتناهی است، و از آن جایی که مجموعه اعداد مرکب ابر مجموعه آن است باید نامتناهی باشد
- اگر مجموعه اعداد مرکب ناشمارا باشد، اجتماع آن با مجموعه اعداد اول باید ناشمارا باشد. اما اینطور نیست پس مجموعه اعداد مرکب شماراست.