

جواب تکلیف سوم

مبانی نظریه محاسبه. دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

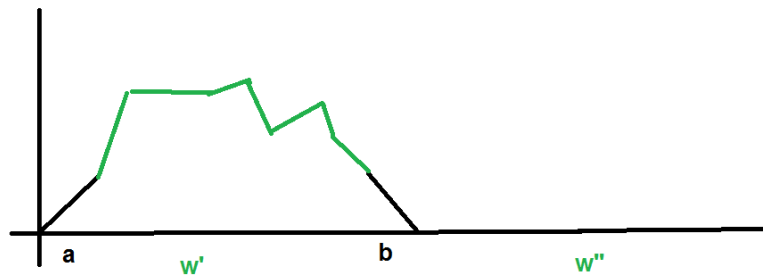
۱. مشابه مثالی است که در کلاس انجام دادیم. از طرفی روشن است هر رشته که توسط گرامر تولید می‌شود، تعداد a ها برابر با تعداد b هاست. از طرف دیگر باید نشان دهیم هر رشته که تعداد a ها و b هایش برابر است، توسط گرامر تولید می‌شود. از متد استقرا استفاده می‌کنیم. فرض کنید هر رشته با طول k که تعداد a ها و b هایش برابر است توسط گرامر تولید می‌شود. نشان می‌دهیم برای رشته‌های با طول $k+1$ نیز صادق است. فرض کنید رشته با حرف a شروع شود. قاعدتا تولید رشته باید با قانون

$$S \rightarrow aSbS$$

شروع شود. پس باید نشان دهیم که رشته w که با حرف a شروع می‌شود و جزو زبان است، بصورت $aw'bw''$ نوشته می‌شود که w' و w'' هم جزو زبان هستند. اگر از تابع

$$f(w) = n_a(w) - n_b(w)$$

استفاده کنیم. نمودار تابع اول صعودی است و لذا اولین جایی را در نظر بگیرید که به صفر برمی‌گردد. حتما آنجا باید یک b باشد. لذا قسمت aw' به یک b ختم می‌شود. قاعدا قسمت w' باید جزو زبان باشد. بقیه رشته w'' از کاراکتر بعد از b شروع می‌شود.



حالتی که رشته با b شروع می‌شود مشابه این می‌توان استدلال کرد.

۲. اسم زبانی که تعداد a ها برابر با b هاست را E می‌گذاریم. مجموعه رشته‌هایی که تعداد a و b برابر نیستند، فرض کنید N باشد. می‌توانیم زبان N را با دو قسمت تقسیم کنیم. مجموعه A آنهایی است که تعداد a ها بیشتر است. مجموعه B آنهایی است که تعداد b ها بیشتر است.

$$N = A \cup B$$

روی A تمرکز می‌کنیم. یک نکته مهم این است که هر رشته‌ای که در زبان A باشد تعدادی a اضافه دارد و آن را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$w = w_1aw_2aw_3 \cdots aw_k$$

بطوریکه w_i ها همه جزو زبان E هستند (این را تحقیق کنید!)
 لذا اگر متغیر E همه رشته‌هایی را تولید که تعداد a ها و b ها برابر است و متغیر A همه رشته‌هایی که
 تعداد a ها بیشتر است، داریم

$$\begin{aligned} A &\rightarrow EX \\ X &\rightarrow aE \mid XX \\ E &\rightarrow aEb \mid bEa \mid EE \mid \epsilon \end{aligned}$$

اینجا X یک متغیر کمکی است. تولید زبان B به طریق مشابه قابل انجام است.

۳.

$$L = (01)^*$$

۴. جواب این مسئله هم مشابه سوال اول است. متغیرهای S همه رشته‌هایی تولید می‌کند که تعداد b ها
 یکی بیشتر از a هاست. متغیر T رشته‌هایی تولید می‌کند که تعداد a ها و b ها برابر است. متغیر A
 رشته‌هایی را تولید می‌کند که تعداد a ها یکی بیشتر از تعداد b هاست. این ادعاها را با استقرا می‌توان
 اثبات کرد. در واقع باید همه این ادعا را همزمان با هم فرض استقرا بگیرید (برای طول رشته k) و
 سپس از این فرضها استفاده کنید برای طول رشته $k + 1$ این ادعاها را اثبات کنید.

۵. ایده ماشین پشته‌ای شبیه مثالهایی است که قبلا حل کردیم. a و b را داخل پشته می‌گذارید اگر پشته
 خالی باشد. اگر a آمد و پشته بالایش b بود بالای پشته را pop می‌کنید. اگر b آمد و بالای پشته a
 بود pop می‌کنید. اگر a آمد و بالای پشته a بود push می‌کنید. اگر b آمد و بالای پشته b بود Push
 می‌کنید. در نهایت باید فقط b در پشته باقی بماند در غیر اینصورت رد می‌شود.

۶. ایده راه حل در کلاس ارائه شده است.

۷. اثبات با استفاده از لم تزریق. فرض کنید که مستقل از متن باشد پس لم تزریق برای زبانهای مستقل
 از متن در مورد آن صادق است. یک رشته با طول حداقل p که زبان باشد در نظر بگیرید. این انتخاب
 بدیهی

$$w = a^p!$$

چون طول قسمت vxy باید حداکثر p باشد، پس قسمتی که تزریق می‌شود طولش حداکثر p است.
 فرض کنید طول قسمتی که تزریق می‌شود k باشد لذا

$$|uv^2xy^2z| = p! + k$$

اما امکان ندارد این طول رشته در زبان باشد چون

$$p! + k \leq p! + p < (p + 1)!$$