حل تمرین مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

سری دوم، اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

عماد پورحسنی

یادآوری

یادآوری

- اعداد اصلی
  - مفهوم شهودی آن تعداد اعضای یک مجموعه است.
  - $\mathrm{Card} A = \mathrm{Card} B \iff A \sim B$
  - عدد اصلی یک مجموعه متناهی برابر اعداد اعضای آن مجموعه است .
  - عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نمایش میدهیم.

یادآوری

- اعداد اصلی
  - مفهوم شهودی آن تعداد اعضای یک مجموعه است.
  - $\mathrm{Card}A = \mathrm{Card}B \iff A \sim B$
  - عدد اصلی یک مجموعه متناهی برابر اعداد اعضای آن مجموعه است .
  - عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نمایش میدهیم.
- قضیه کانتور
  - برای هر مجموعه X داریم $\mathrm{Card}X < \mathrm{Card}\mathcal{P}(X)$

$$x \mapsto \{x\}$$

یادآوری

- اعداد اصلی
  - مفهوم شهودی آن تعداد اعضای یک مجموعه است.
  - $A \sim B \iff \text{Card}A = \text{Card}B$
  - عدد اصلی یک مجموعه متناهی برابر اعداد اعضای آن مجموعه است .
  - عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نمایش میدهیم.
- قضیه کانتور
  - برای هر مجموعه X داریم $\text{Card}X < \text{Card}\mathcal{P}(X)$

$$x \mapsto \{x\}$$

- فرضیه پیوستار
  - عدد اصلی مانند x که در $\aleph_0 < x < 2^{\aleph_0}$ صدق کند وجود ندارد.

تمرین ۱

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n < \mathrm{Card}\mathbb{N}$

تمرین ۱

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n < \mathrm{Card}\mathbb{N}$

- یادآوری ۱ : هر عدد طبیعی n کاردینال یک مجموعه متناهی ($\mathbb{N}_n$) است.
- یادآوری ۲ : فرض کنیم A و B دو مجموعه اند. میگوییم $\mathrm{Card}B \leq \mathrm{Card}A$ هرگاه A با یک زیر مجموعه از B در تناظر یک به یک قرار بگیرد.

تمرین ۱

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n < \mathrm{Card}\mathbb{N}$

- یادآوری ۱ : هر عدد طبیعی n کاردینال یک مجموعه متناهی ($\mathbb{N}_n$) است.
- یادآوری ۲ : فرض کنیم A و B دو مجموعه اند. میگوییم $\mathrm{Card}B \leq \mathrm{Card}A$ هرگاه A با یک زیر مجموعه از B در تناظر یک به یک قرار بگیرد.
- بر اساس تعریف $\mathbb{N}_n$ یک زیرمجموعه برای مجموعه اعداد طبیعی است.
- توسط تابع همانی با خودش در تناظر یک به یک است.

تمرین ۱

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n < \mathrm{Card}\mathbb{N}$

- یادآوری ۱ : هر عدد طبیعی n کاردینال یک مجموعه متناهی ($\mathbb{N}_n$) است.
- یادآوری ۲ : فرض کنیم A و B دو مجموعه اند. میگوییم $\mathrm{Card}B \leq \mathrm{Card}A$ هرگاه A با یک زیر مجموعه از B در تناظر یک به یک قرار بگیرد.
- بر اساس تعریف $\mathbb{N}_n$ یک زیرمجموعه برای مجموعه اعداد طبیعی است.
- توسط تابع همانی با خودش در تناظر یک به یک است.
- پس به ازای هر n طبیعی ،

$$n < \mathrm{Card}\mathbb{N}$$

تمرین ۲

اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $\aleph_0 = \mathrm{Card}\mathbb{N} \leq a$
نتیجه بگیرید که کاردینال $\mathbb{N}$ کوچک ترین عدد اصلی ترامتناهی است.

تمرین ۲

اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $\aleph_0 = \text{Card}\mathbb{N} \leq a$
نتیجه بگیرید که کاردینال $\mathbb{N}$ کوچک ترین عدد اصلی ترامتناهی است.

- اگر a برابر با $\text{Card}\mathbb{N}$ باشد که حکم صادق است.

در غیر اینصورت، مجموعه هایی که a میتواند عدد اصلی آن باشد را در نظر میگیریم.

تمرین ۲

اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $\aleph_0 = \mathrm{Card}\mathbb{N} \leq a$
نتیجه بگیرید که کاردینال $\mathbb{N}$ کوچک ترین عدد اصلی ترامتناهی است.

- اگر a برابر با $\mathrm{Card}\mathbb{N}$ باشد که حکم صادق است.

  در غیر اینصورت، مجموعه هایی که a میتواند عدد اصلی آن باشد را در نظر میگیریم.

- اگر این مجموعه متناهی باشد، آنگاه a نمیتواند عدد اصلی ترامتناهی باشد.
- اگر این مجموعه متناهی نباشد، پس یا شمارا است یا ناشمارا، میدانیم که اگر شمارا باشد، پس حتما با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است.

  در غیر اینصورت باید مجموعه ای ناشمارا باشد. میدانیم که یعنی کاردینال آن (a) بزرگتر از کاردینال مجموعه اعداد طبیعی است.

تمرین ۲

اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $\aleph_0 = \mathrm{Card}\mathbb{N} \leq a$
نتیجه بگیرید که کاردینال $\mathbb{N}$ کوچک ترین عدد اصلی ترامتناهی است.

- اگر a برابر با $\mathrm{Card}\mathbb{N}$ باشد که حکم صادق است.

  در غیر اینصورت، مجموعه هایی که a میتواند عدد اصلی آن باشد را در نظر میگیریم.

- اگر این مجموعه متناهی باشد، آنگاه a نمیتواند عدد اصلی ترامتناهی باشد.
- اگر این مجموعه متناهی نباشد، پس یا شمارا است یا ناشمارا، میدانیم که اگر شمارا باشد، پس حتما با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است.

  در غیر اینصورت باید مجموعه ای ناشمارا باشد. میدانیم که یعنی کاردینال آن (a) بزرگتر از کاردینال مجموعه اعداد طبیعی است.

- پس نتیجه میشود که $\mathrm{Card}\mathbb{N} \leq a$ و میدانیم که مجموعه اعداد طبیعی، کوچک ترین مجموعه نامتناهی است.

  پس کاردینال آن نیز کوچک ترین عدد اصلی ترامتناهی است.

تمرین ۳

مجموعه A و B مفروض اند. نشان دهید :

$$\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B \iff \exists f : A \xrightarrow{1 \text{ to } 1} B$$

تمرین ۳

مجموعه A و B مفروض اند. نشان دهید :

$$\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B \iff \exists f : A \overset{1 \text{ to } 1}{\longrightarrow} B$$

- فرض کنیم $\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B$ آنگاه بنابر تعریف عملگر $\leq$ یک تابع یک به یک از A به B وجود دارد.

تمرین ۳

مجموعه A و B مفروض اند. نشان دهید :

$$\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B \iff \exists f : A \overset{1 \text{ to } 1}{\to} B$$

- فرض کنیم $\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B$ آنگاه بنابر تعریف عملگر $\leq$ یک تابع یک به یک از A به B وجود دارد.
- فرض کنیم که تابعی مانند $f : A \to B$ وجود دارد که یک به یک است.
این یعنی تمام اعضای مجموعه A بدون اینکه همپوشانی داشته باشیم، به عضوی از B تصویر میشوند.
پس A نمیتواند بزرگتر از B باشد، لذا :

$$\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B$$

- هر دو طرف اگر و تنها اگر برقرار است. حکم ثابت میشود.