

آزمونک اول درس مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها (۲۷ فروردین ۱۴۰۴؛ زمان ۹۰ دقیقه)

۱. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی است به طوری که هر زیرمجموعه آن متناهی است. نشان دهید A متناهی است.

۲. یک مجموعه نامتناهی را تعریف کنید. اگر A و B دو مجموعه باشند و $f: A \rightarrow B$ یک تابع یک به یک باشد و A نامتناهی، نشان دهید B نیز نامتناهی است.

۳. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک تابع پوشا است.

(الف) نشان دهید رابطه

$$\forall x, y \in A, \quad xRy \iff f(x) = f(y)$$

یک رابطه هم ارزی است (یعنی انعکاسی، متقارن و متعدی است).

(ب) رده های هم ارزی عنصر x ، یعنی $[x] = \{y \in A \mid xRy\}$ را تعیین کنید. اگر $b = f(x)$ نشان دهید $A = \cup_{b \in B} f^{-1}(b)$ و نشان دهید $[x] = f^{-1}(b)$.

(پ) با استفاده از این ویژگی نشان دهید اگر A شمارا باشد، آنگاه B نیز شماراست.

۴. فرض کنید A و B دو مجموعه نامتناهی باشند.

(الف) نشان دهید $A \cup B$ نیز یک مجموعه نامتناهی است.

(ب) با یک مثال نشان دهید $A \cap B$ لزوماً متناهی نیست.

(پ) نشان دهید $A \times B$ نیز نامتناهی است.

۵. فرض کنید $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$. نشان دهید

(الف) برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، نشان دهید $\text{Card } \mathbb{N}^k = \text{Card } \mathbb{N}$.

(ب) نشان دهید $\text{Card } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k = \text{Card } \mathbb{N}$.

۶. آیا اعداد معمولی با اعداد اصلی (یا کاردینال) متفاوتند؟ سه عدد اصلی (کاردینال) متفاوت مثال بزنید.

سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	
نمره	۲	۲	۳	۴/۵	۳	۱/۵			مجموعاً ۱۶

توزیع نمرات :

موفق و پیروز باشید