حل تمرین مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

سری سوم

عماد پورحسنی

یادآوری

- اعداد اصلی
  - مفهوم شهودی آن تعداد اعضای یک مجموعه است.
  - $\mathrm{Card}A = \mathrm{Card}B \iff A \sim B$
  - عدد اصلی یک مجموعه متناهی برابر اعداد اعضای آن مجموعه است .
  - عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نمایش میدهیم.
- قضیه کانتور
  - برای هر مجموعه X داریم $\mathrm{Card}X < \mathrm{Card}\mathcal{P}(X)$

$$x \mapsto \{x\}$$

- فرضیه پیوستار
  - عدد اصلی مانند x که در $\aleph_0 < x < 2^{\aleph_0}$ صدق کند وجود ندارد.

تمرین ۱

نشان دهید مجموعه زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ شماراست.
نشان دهید مجموعه زیرمجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$ ناشماراست.

تمرین ۱

نشان دهید مجموعه زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ شماراست.

فرض میکنیم A_k مجموعه تمام زیر مجموعه های k عضوی $\mathbb{N}$ باشد به طوری که $k \in \mathbb{N}$ پس به ازای هر k داریم

$$A_k \sim \mathbb{N}_k \sim \mathbb{N}$$

پس $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ شماراست. زیرا میدانیم که اجتماع مجموعه های شمارا، شماراست.

تمرین ۱

نشان دهید مجموعه زیرمجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$ ناشماراست.
طبق قضیه کانتور میدانیم که

$$card(\mathbb{N}) < card(\mathbf{P}(\mathbb{N}))$$

مجموعه زیر مجموعه های متناهی اعداد طبیعی همتوان با اعداد طبیعی است. پس کاردینال مجموعه زیرمجموعه های نامتناهی اعداد طبیعی باید بیشتر از اعداد طبیعی باشد، اگر نباشد اجتماع آن ها نیز کاردینال برابر با اعداد طبیعی ندارد، اما میدانیم اینطور است. پس مجموعه زیرمجموعه های نامتناهی اعداد طبیعی ناشماراست

یادآوری ۲

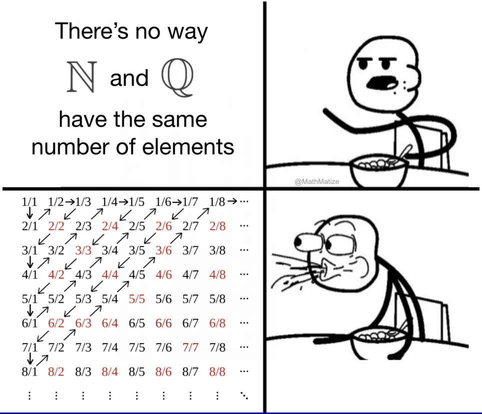
- قضیه کانتور-شرودر-برنشتاین
  - اگر A و B دو مجموعه که
  - A با یک زیرمجموعه B همتوان باشد
  - B با یک زیرمجموعه A همتوان باشد
  - آنگاه $A \sim B$
- بیان دیگر قضیه:
  - اگر A و B دو مجموعه که
  - تابع یک به یک از A در B
  - تابع یک به یک از B در A
  - آنگاه $A \sim B$

تمرین ۲

برای یادگیری کاربرد قضیه، تمرین های زیر را حل کنید

۱ نشان دهید $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

۲ نشان دهید $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$



تمرین ۲

نشان می‌دهیم $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

- تعریف تابع یک‌به‌یک از $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$:

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z-1 & z < 0 \end{cases}$$

- تعریف تابع یک‌به‌یک از $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ even} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \end{cases}$$

- طبق قضیه کانتور-شرودر-برنشتاین:

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$$

تمرین ۲

نشان می‌دهیم $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

- مجموعه $\mathbb{Q}$ قابل شمارش است. می‌توان آن را به صورت دنباله‌ای از $\mathbb{N}$ مرتب کرد.
- روش مرتب‌سازی: نمایش اعداد گویای مثبت و منفی به صورت $\frac{p}{q}$ و مرتب‌سازی قطری (روش کانتور).
- پس توابع یک‌به‌یک از $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ و بالعکس وجود دارد.
- طبق قضیه کانتور-شرودر-برنشتاین:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$$

تمرین ۲

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1/1	1/2 →	1/3	1/4 →	1/5	1/6 →	1/7	1/8 →	⋯
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8	8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

نکته : قبلا نشان دادیم هر دنباله نامتناهی از $\mathbb{R}$ شماراست.

اصول موضوعه پئانو

مجموعه اعداد طبیعی را می‌توان با استفاده از اصول پئانو (Peano Axioms) به صورت صوری تعریف کرد.
این اصول پایه‌ای برای ساخت نظریه اعداد هستند:

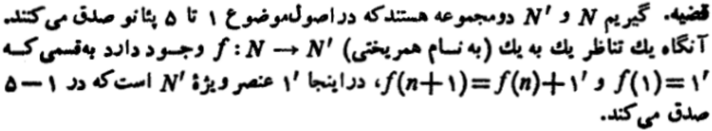
۱. 1 یک عدد طبیعی است.
۲. برای هر عدد طبیعی n، یک عدد جدید به نام جانشین یا تالی آن ($S(n)$ یا n^+) وجود دارد.
۳. هیچ عددی وجود ندارد که تالی برابر 1 باشد.
۴. اگر $n^+ = m^+$، آنگاه $n = m$ (تالی یکتا است).
۵. اگر یک ویژگی برای 1 برقرار باشد و برای هر n نیز برقرار باشد به شرطی که برای n برقرار باشد، آنگاه آن ویژگی برای تمام اعداد طبیعی برقرار است. (اصل استقرا)

اصول موضوعه پئانو

$$0 = \emptyset$$
$$1 = s(0) = s(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$
$$2 = s(1) = s(\{0\}) = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}$$
$$3 = s(2) = s(\{0, 1\}) = \{0, 1\} \cup \{\{0, 1\}\} = \{0, 1, \{0, 1\}\} = \{0, 1, 2\}$$

اصول موضوعه پئانو

قضیه جالب توجه از کتاب


قضیه. گیریم N و N' دومجموعه هستندکه دراصول‌موضوع ۱ تا ۵ پئانو صدق می‌کنند. آنگاه یك تناظر یك به یك (به نـام همریختی) $f: N \to N'$ وجـود دارد به‌قسمی کـه $f(1)=1'$ و $f(n+1)=f(n)+1'$، دراینجا $1'$ عنصر ویژهٔ N' است که در ۱ — ۵ صدق می‌کند.

حساب لاندا، دستگاه صوری در منطق ریاضی جهت بیان محاسبات براساس تجرید تابع و به کار بردن آن با استفاده از انقیاد نام و جایگزینی است.

اصول موضوعه پئانو

Function definition	Lambda expression
$0\ f\ x = x$	$0 = \lambda f.\, \lambda x.\, x$
$1\ f\ x = f\ x$	$1 = \lambda f.\, \lambda x.\, f\ x$
$2\ f\ x = f\ (f\ x)$	$2 = \lambda f.\, \lambda x.\, f\ (f\ x)$
$3\ f\ x = f\ (f\ (f\ x))$	$3 = \lambda f.\, \lambda x.\, f\ (f\ (f\ x))$
$\vdots$	$\vdots$
$n\ f\ x = f^n\ x$	$n = \lambda f.\, \lambda x.\, f^{\circ n}\ x$

بیانی از تعریف مجموعه اعداد طبیعی در Lambda-Calculus که به Church-Encoding شناخته میشود.

ساختار $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ با **کلاس‌های هم‌ارزی**

برای گسترش $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ و سپس $\mathbb{Q}$، از مفهوم **کلاس‌های هم‌ارزی** استفاده می کنیم.

- هدف: تعریف منفی‌ها و سپس کسرها با استفاده از ترکیب اعضای $\mathbb{N}$.
- رویکرد: تعریف زوج‌های مرتب از $\mathbb{N}$ و تعریف رابطه هم‌ارزی مناسب.

ابتدا به سراغ $\mathbb{Z}$ می‌رویم.

ساختار $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ با کلاس‌های هم‌ارزی

ساخت $\mathbb{Z}$ از $\mathbb{N}$ با استفاده از کلاس‌های هم‌ارزی:

- اعضای $\mathbb{Z}$ به صورت کلاس‌های هم‌ارزی از زوج‌های مرتب $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ تعریف می‌شوند.
- تفسیر: (m, n) نمایش عدد $m - n$ است.
- رابطه هم‌ارزی:

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n$$

- مثال: $(4, 2) \sim (3, 1)$ چون $3 + 2 = 5 = 4 + 1$
- مجموعه $\mathbb{Z}$ برابر است با مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی $[(m, n)]$ طبق این رابطه.

ساختار $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ با کلاس‌های هم‌ارزی

ساخت $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{Z}$ با استفاده از کلاس‌های هم‌ارزی:

- اعضای $\mathbb{Q}$ کلاس‌های هم‌ارزی از زوج‌های مرتب $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ هستند.
- تفسیر: (a, b) نمایش عدد a/b است.
- رابطه هم‌ارزی:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot d = c \cdot b$$

- مثال: $(1, 2) \sim (2, 4)$ چون $1 \cdot 4 = 4 = 2 \cdot 2$
- پس $\mathbb{Q}$ = مجموعه تمام کلاس‌های هم‌ارزی $[(a, b)]$