

درس مبانی نظریه محاسبه

جلسه بیست و پنجم

حل چند مسئله در مورد زبانهای تصمیم ناپذیر

با فرض اینکه می‌دانیم مسائل EQ_{TM} و $HALT, A_{TM}, E_{TM}$ تصمیم ناپذیر هستند به سوالات پاسخ دهید.

سوال اول: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

آیا ماشین تورینگ M رشته $hello$ را می‌پذیرد؟

به عبارت دیگر زبان

$$B = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ می‌پذیرد } hello \}$$

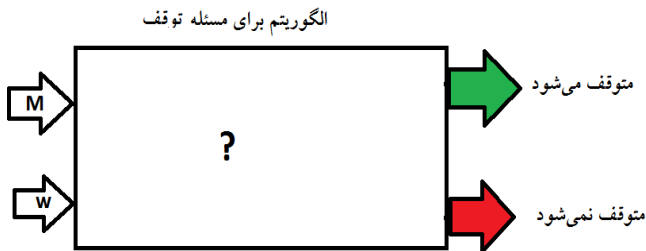
الف) یک ماشین تورینگ برای مسئله بالا ارائه دهید.

کافی است ماشین M را روی رشته $hello$ اجرا کنیم و نتیجه را گزارش دهیم.

ب) ثابت کنید B تصمیم پذیر نیست (الگوریتم ندارد).

فرض کنید B تصمیم پذیر باشد و الگوریتمی برای آن موجود باشد. اسم این الگوریتم را R می‌گذاریم (یعنی الان یک الگوریتم داریم به اسم R که به ما می‌گوید فلان ماشین تورینگ رشته hello را می‌پذیرد یا نه؟) از این الگوریتم استفاده می‌کنیم و مسئله توقف HALT را حل می‌کنیم.

به عبارت دیگر مسئله HALT را به مسئله B تقلیل می‌دهیم.



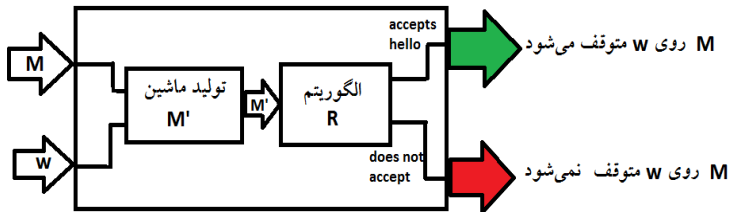
از روی توصیف ماشین M و رشته w ، ماشین M' را بصورت زیر می‌سازیم:

قدم اول: ماشین M را روی رشته w اجرا کن.

قدم دوم: به q_{accept} برو.

دقت کنید در ماشین بالا اگر M روی رشته w متوقف شود (قدم اول به پایان برسد) همه ورودی‌ها را قبول می‌کند، علی‌الخصوص رشته $hello$ را هم قبول می‌کند. اگر M روی w متوقف نشود (قدم اول هیچ گاه به پایان نرسد.) ماشین M' هیچ رشته‌ای را قبول نخواهد کرد.

الگوریتم برای مسئله توقف



سوال دوم: وضعیت q در ماشین تورینگ M بلااستفاده است اگر M هرگز وارد q نشود. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

آیا ماشین تورینگ M یک وضعیت بلااستفاده دارد؟

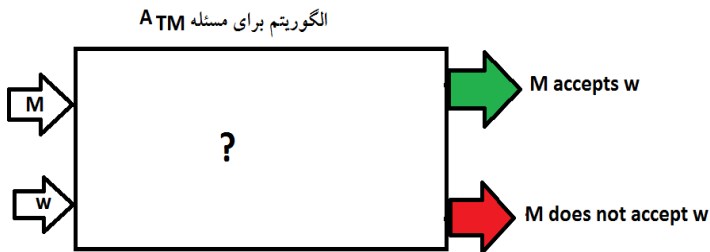
به عبارت دیگر زبان C بصورت زیر تعریف شده است.

$$C = \{ \langle M \rangle \mid \text{یک وضعیت بلا استفاده دارد} \}$$

نشان دهید C تصمیم پذیر نیست.

فرض کنید C تصمیم پذیر باشد و الگوریتمی برای آن موجود باشد. اسم این الگوریتم را R می‌گذاریم (یعنی الان یک الگوریتم داریم به اسم R که به ما می‌گوید فلان ماشین تورینگ وضعیت بلااستفاده دارد یا نه؟) از این الگوریتم استفاده می‌کنیم و مسئله پذیرش A_{TM} را حل می‌کنیم.

به عبارت دیگر مسئله A_{TM} را به مسئله C تقلیل می‌دهیم.



از روی توصیف ماشین M و رشته w ، ماشین M' را بصورت زیر می‌سازیم:

ابتدا همه وضعیتهای ماشین (غیر از q_{accept} و q_{reject}) را ملاقات کن.

حال ببین اگر ورودی رشته تهی باشد به q_{reject} برو در غیر اینصورت مانند زیر عمل کن.

ماشین M را روی رشته w اجرا کن. اگر M متوقف شد و به وضعیت پذیرش رفت، به وضعیت q_{accept} برو. اگر M متوقف شد و به وضعیت رد رفت، به وضعیت q_{reject} برو.

دقت کنید در ماشین M' وضعیت q_{accept} بلااستفاده است اگر و فقط ماشین M رشته w را قبول نکند. هیچ وضعیت دیگری در ماشین بلااستفاده نیست.

پس اگر M' را به الگوریتم R بدهیم و الگوریتم R تشخیص داد که M' وضعیت بلااستفاده ندارد، یعنی ماشین M رشته w را پذیرفته است در غیر این صورت رشته را نپذیرفته است.

سوال سوم: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

آیا زبان ماشین تورینگ M منظم است؟

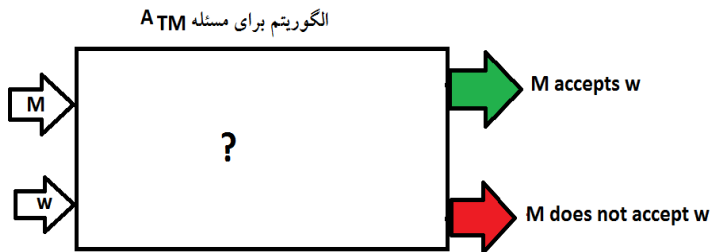
به عبارت دیگر زبان D بصورت زیر تعریف شده است.

$$F = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ توصیف یک ماشین تورینگ است و } L(M) \text{ منظم است} \}$$

نشان دهید F تصمیم پذیر نیست.

فرض کنید F تصمیم پذیر باشد و الگوریتمی برای آن موجود باشد. اسم این الگوریتم را R می‌گذاریم (یعنی الان یک الگوریتم داریم به اسم R که به ما می‌گوید فلان ماشین تورینگ زبانش منظم است یا نه؟) از این الگوریتم استفاده می‌کنیم و مسئله پذیرش A_{TM} را حل می‌کنیم.

به عبارت دیگر مسئله A_{TM} را به مسئله F تقلیل می‌دهیم.



از روی توصیف ماشین M و رشته w ، ماشین M' را بصورت زیر می‌سازیم:

اگر رشته ورودی x از نوع $0^n 1^n$ بود قبول کن.

اگر x به این فرم نبود، ماشین M را روی w اجرا کن. اگر M رشته w را قبول کرد، رشته ورودی x را قبول کن.

دقت کنید داریم

$$L(M') = \Sigma^* \quad \text{if} \quad M \text{ accepts } w$$

$$L(M') = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \quad \text{if} \quad M \text{ does not accept } w$$

پس اگر M' را به الگوریتم R بدهیم و الگوریتم R تشخیص داد که زبان M' منظم است یعنی ماشین M رشته w را پذیرفته است در غیر اینصورت رشته را نپذیرفته است.

سوال چهارم: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

آیا زبان ماشین تورینگ M متناهی است؟

به عبارت دیگر زبان D بصورت زیر تعریف شده است.

$$D = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ متناهی است} \}$$

نشان دهید D تصمیم پذیر نیست.