Likevektstilstand I

Finn egenverdiene og egenvektorene for matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

Egenverdiene for systemet er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}v &= \lambda v \\ (\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})v &= 0 \\ \det \mathbf{M} - \lambda \mathbf{I} &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 0.5 - \lambda & 0.5 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (0.5 - \lambda)(1 - \lambda) - 0 &= 0 \\ \lambda &\in \{0.5, 1\} \\ \lambda_1 &= 0.5 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Egenvektorene for $\lambda_1 = 0.5$er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}v_1 &= \lambda_1 v_1 \\ (\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I})v_1 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 - 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Som gir ligningene:

$$\begin{aligned} 0.5y_1 &= 0 \\ 0.5y_1 &= 0 \\ \\ y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Vi vet ingenting om x_1 så vi setter den som fri variabel og får:

$$v_1 \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in R \setminus 0 \right\}$$

Tilsvarende får vi egenvektorene for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}v_2 &= \lambda_2 v_2 \\ (\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I})v_2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0.5 - 1 & 0.5 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Som gir ligningene:

$$
\begin{aligned}
-0.5x_2 + 0.5y_2 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x_2 = y_2$$

Ved å bruke $y_2 = t$ som fri variabel får vi:

$$v_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} : t \in R \setminus 0 \right\}$$