1　実験目的・課題

以下の 3 つの課題を行う。

- 課題 1
  - 数値微分の方法を理解する
  - $sin(x)$ を微分するプログラムを作成する
  - 分割数を変更し精度が変化することを確認する
- 課題 2
  - 数値積分の方法を理解する
  - 円の面積を求めるプログラムを作成する
  - 分割数を変更し精度が変化することを確認する
- 課題 3
  - 上記以外の微分法・積分法について調査しプログラムを実装する

2　実装方法

2.1　課題 1

式 1 によって関数 $f(x)$ の微分は定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \tag{1}$$

しかし、計算機では極限の計算はできない。そのため、h に微小量を設定して近似して解を得る。

微分を計算する差分のとり方は 3 つあり、それぞれ前方差分 (式 2)、後方差分 (式 3)、中心差分 (式 4) である。

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{3}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{4}$$

2.2　課題 2

関数 $f(x)$ の値域 a から b までの定積分は式 5 で計算することが出来る。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\Delta \tag{5}$$

しかし、計算機では極限の計算が出来ないため、Δ を微小量として長方形の面積の和を計算し近似的な値を得る。

2.2.1 台形公式

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値は xy 座標平面で $y = f(x)$ と x 軸の区間 $[a, b]$ で囲まれた面積になる。よって近似値は式 6 によって計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{6}$$

この式では、曲線 $y = f(x)$ が直線から離れているほど精度が悪くなる。そこで、積分区間 $[a, b]$ を n 個の区間 $[a_0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{n-1}, a_n](a_0 = a, a_n = b)$ に分割し、それぞれで台形公式を適用しその和で面積を近似計算する (式 7)。

$$\int_a^b f(x) \simeq \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\frac{f(a_{k-1})+f(a_k)}{2} \tag{7}$$

2.2.2 シンプソンの公式

シンプソンの公式は $f(x)$ を二次関数 $g(x)$ で近似することで導かれる。$g(x)$ は $f(x)$ の点 a, m, b $(m = (a+b)/2)$ におけるラグランジュ補完によって次の多項式 (式 8) になる。

$$g(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)} \tag{8}$$

この多項式を $[a, b]$ で積分すると式 9(シンプソンの公式) が得られる。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\simeq \int_a^b g(x)dx \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

2.3 課題 3

ガウスの数値積分公式を用いて数値積分を行う。

2.3.1 ガウス求積

ガウスの数値積分公式とは、n を正の整数とし、$f(x)$ の [-1,1] の積分を式 10 の形で近似する公式のことである。

$$\int_{-1}^{1} \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{10}$$

ここで、x_i は積分点またはガウス点と呼ばれる [-1,1] 内の n 個の点であり、w_i は重みと呼ばれる n 個の実数である。

n 次のルジャンドル多項式の [-1,1] 内にある n 個の零点を積分点として選び、w_i を適切に選ぶと、$f(x)$ が $2n-1$ 次以下の多項式であれば式 10 が厳密に成立する。この方法を n 次のガウス・ルジャンドル公式と呼び、通常はガウス求積と言えばこの方法を指す。

$f(x)$ が $2n-1$ 次を超える多項式関数または、多項式関数ではない場合、式 10 は厳密には成立しないが、$f(x)$ が $2n-1$ 次以下の多項式関数で精度よく近似できる場合には $f(x)$ に式 10 を適用することにより精度よく定積分値を得ることが出来る。

式 10 の積分を区間 $[a, b]$ に適用したいときは新たな変数 t での原点を [a,b] の中点とし、1 目盛りの幅を $(b-a)/2$ とすると、

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}x \\
dt &= \frac{b-a}{2}dx
\end{aligned}
$$

から、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^1 f(t)dt \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x)dx \qquad (11) \\
&= \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n w_i f(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

と変形できる。

3 結果と考察

参考文献

[1] 台形公式 https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%B0%E5%BD%A2%E5%85%AC%E5%BC%8F

[2] シンプソンの公式 https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B7%E3%83%B3%E3%83%97%E3%82%BD%E3%83%B3%E3%81%AE%E5%85%AC%E5%BC%8F

[3] ガウス求積 https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AC%E3%82%A6%E3%82%B9%E6%B1%82%E7%A9%8D