

# 1 Мыщельскиан графа. Пример Зыкова–Мыщельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

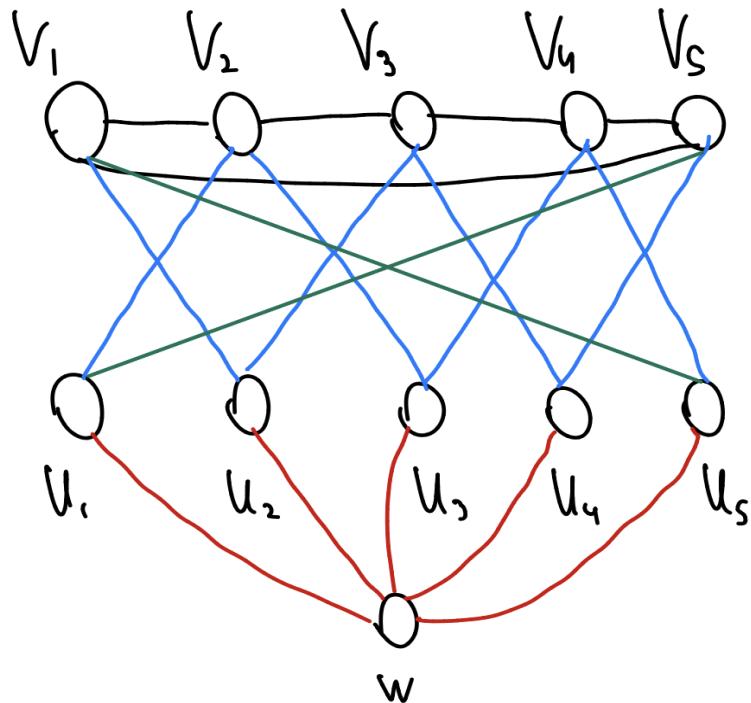
## 1.1 Мыщельскиан графа.

Мыщельскиан графа  $G$  – граф  $\mu(G) = (V', E')$ :

$$V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n, w\}$$

$$E' = E \cup \{(v_i, u_j) \mid \text{если } (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(w, u_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Пример:  $G$  – цикл длины 5 (черные ребра – исходные):



## 1.2 Пример Зыкова–Мыщельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Пусть  $G_2 = K_2$ ,  $G_3 = \mu(G_2), \dots, G_t = \mu(G_{t-1})$

Тогда  $G_t$  – граф без треугольников с  $\chi(G_t) = t$

*Доказательство:*

Полная индукция по  $t$ :

1)  $G_t$  без треугольников:

Вершина  $w$  не может быть в треугольнике, также не могут быть две вершины  $u_i, u_j$  в треугольнике (по опр.). По предположению индукции треугольника  $v_i, v_j, v_k$  тоже не может быть:

Пусть  $v_i, v_j, u_k$  – треугольник  $\Rightarrow k \neq i, j$ :

$$\begin{cases} v_j \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_j \rightarrow v_k \\ v_i \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_i \rightarrow v_k \end{cases} \Rightarrow \text{есть треугольник } v_i, v_j, v_k \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) а)  $\chi(G_t) \leq t$ :

$\chi(G_{t-1}) = t - 1$ . Красим  $u_i$  в цвет  $v_i$ .  $w$  красим в новый цвет  $\Rightarrow$  покрасили в  $t$  цветов.

б)  $\chi(G_t) \geq t$ :

От противного:  $\chi(G_t) = t - 1$ :

Пусть раскрасили в  $t - 1$  цвет и  $w$  имеет цвет  $t - 1$ . Тогда  $u_i$  раскрашены в цвета  $(1, \dots, t - 2)$ . Перекрашиваем  $v_i$ :

$$\text{цвет } v_i = \begin{cases} \text{прежний, если он не } t - 1 \\ \text{цвет } u_i, \text{ если он } t - 1 \end{cases}$$

Вершины  $v_i$  цвета  $t - 1$  найдутся по предположению индукции.

Тем самым  $G_{t-1}$  раскрашен в  $t - 2$  цвета и для подграфа  $G_{t-1}$  раскраска правильная:

(Иначе были  $v_i \leftrightarrow v_j$  с одинаковым цветом  $x$ , поменяли цвет одной из вершин  $\Rightarrow$  раньше в  $v_i$  был цвет  $t - 1$  но поменяли на цвет  $x$  который

у  $u_i$ . Между  $u_i$  и  $v_j$  есть ребро  $\Rightarrow$  противоречие (они одного цвета до изменений цветов))

Получается мы раскрасили  $G_{t-1}$  в  $t - 2$  цвета  $\Rightarrow$  противоречие

## 2 Паросочетания и вершинные покрытия в графе.

**Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.**

Паросочетание в  $G - M \subseteq E : \forall m_1, m_2 \in E : m_1 \cap m_2 = \emptyset$

Вершинное покрытие в  $G - U \subseteq V : \forall \{a, b\} \in E : (a \in U) \vee (b \in U)$

В произвольном графе:

$$|M_{max}| \leq |U_{min}|$$

Чтобы покрыть все ребра из  $M$  нужно как минимум  $|M|$  вершин

### 2.1 Теорема Кёнига

В двудольном графе  $G$  выполняется равенство:

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

## 3 Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.

## 4 Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла

### 4.1 Теорема Холла

В двудольном графе  $G = (L \cup R, E)$ :

$$\exists \text{ паросочетание размера } |L| \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq L : |N(S)| \geq |S|}_{\text{условие Холла}}$$

Для  $S \subseteq L : N(S) = \{y \in R \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$

*Доказательство:*

## 5 Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамселя. Верхняя оценка чисел Рамселя

Размер наибольшей клики в  $G - \omega(G)$

Размер наибольшего нез. мн-ва в  $G - \alpha(G)$

Пусть  $n, k \geq 1 : R(n, k)$  – наименьшее  $N$  такое, что  $\forall G$  на  $N$  вершинах найдется либо клика размером  $k$ , либо нез. мн-во размера  $n$

Свойства:

- $R(n, k) = R(k, n)$  (дополнение  $\overline{G}$ )
- $R(1, k) = 1$
- $R(2, k) = k$

### 5.1 Теорема Рамселя

$\forall n, k \geq 2 : R(n, k)$  – конечно

$$R(n, k) \leq R(n-1, k) + R(n, k-1)$$

Верхняя оценка:

$$R(n, k) \leq \binom{n+k-2}{n-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

## 6 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок. Утверждение о связи строгого и нестрогого порядков.

Пусть  $A \neq \emptyset$  – мн-во:

Отношение  $R$  на  $A$  является отношением **строгого** частичного порядка, если:

1.  $\neg aRa$  – Иррефлексивность
2.  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$  – Транзитивность

Отношение  $R$  на  $A$  является отношением **нестрогого** частичного порядка, если:

1.  $aRa$  – Рефлексивность
2.  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$  – Антисимметричность
3.  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$  – Транзитивность

Линейный порядок – частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы

### 6.1 Связь строгого и нестрогого порядков

Из строгого порядка можно получить нестрогий и наоборот:

1. Пусть  $\leq$  – нестрогий порядок. Тогда

$$< := \leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$$

2. Пусть  $<$  – строгий порядок. Тогда

$$\leq := < \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

## 7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покоординатный порядок, лексикографический порядок.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – мн-во с заданным отн. порядка:  $(A, <)$  или  $(A, \leq)$

Пример:

1.  $(\mathbb{N}, |) a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$
2.  $(\mathbb{Z}, |)$  – не ЧУМ  $(-1 \mid 1) \wedge (1 \mid -1) \not\Leftrightarrow 1 = -1$
3.  $(2^A, \subseteq)$  – ЧУМ

### 7.1 Операции с ЧУМ

1. Сумма порядков:

Пусть  $(A, \leq_A)$ ,  $(B, \leq_B)$  – ЧУМ. Сумма  $A + B = A \sqcup B$ :

- Внутри  $A$  порядок  $\leq_A$
- Внутри  $B$  порядок  $\leq_B$
- Все элементы из  $A$  меньше всех элементов из  $B$

2. Покоординатный порядок:

$$(A \times B, \leq) : (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

3. Лексикографический порядок:

$$(A \times B, <) : (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \vee \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 <_B b_2 \end{cases}$$

**8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства. Примеры порядков: с бесконечным числом минимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.**

Пусть  $(P, \leq_P)$  – ЧУМ:

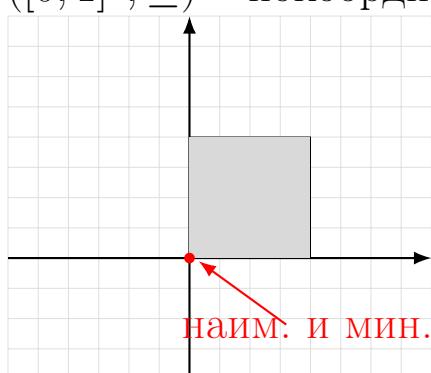
$$\begin{cases} a \in P - \text{минимальный, если } \nexists b \in P : b < a \\ a \in P - \text{наименьший, если } \forall b \in P : a \leq b \\ a \in P - \text{максимальный, если } \nexists b \in P : b > a \\ a \in P - \text{наибольший, если } \forall b \in P : a \geq b \end{cases}$$

Наименьший/наибольший – единственный, если существует

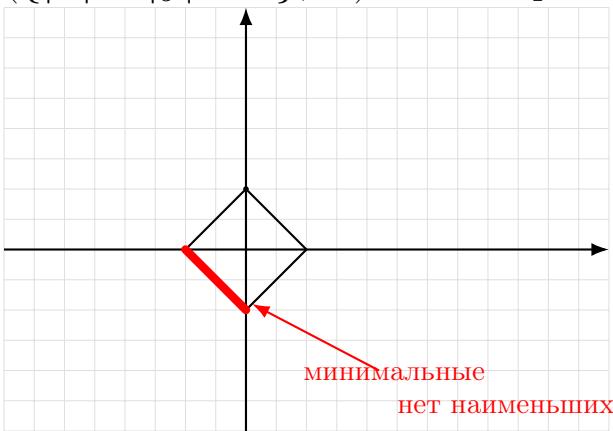
Наименьший/наибольший является минимальным/максимальным

Примеры:

- $(\mathbb{Z} \cup \{*\}, \leq)$ : минимальный – \*, наименьшего – нет
- $([0, 1]^2, \leq)$  – покоординатный:



- $(\{|x| + |y| = 1\}, \leq)$  – покоординатный:



## 9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

### 9.1 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть  $(P, \leq_P)$ ,  $(Q, \leq_Q)$  – ЧУМ.  $P \simeq Q$ , если  $\exists$  биекция  $h : P \rightarrow Q$ :

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow h(x) \leq_Q h(y)$$

Примеры:

- $(\mathbb{N}, \leq) \simeq (\{2, 4, 6, \dots\}, \leq)$  – биекция  $f(n) = 2n$
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{R}, \leq)$  – нет биекции между  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$

Инварианты:

- Мощность (из счетного нет биекции в континуум и т.д.)
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{Z}, \leq)$  –  $\mathbb{Q}$  – плотный,  $\mathbb{Z}$  – нет
- $([0, 1], \leq) \not\simeq ((0, 1), \leq)$  – в интервале нет наименьшего/наибольшего
- Наличие непосредственных предшественников/последователей

## 9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме

Если  $\varphi : P \rightarrow Q$  – изоморфизм  $P, Q \Rightarrow \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

## 9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

Плотный порядок:  $\forall a < b : \exists c : a < c < b$

Теорема: Любые два счётных плотных линейных порядка без наим/наиб элемента изоморфны

## 10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств. Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Бесконечно убывающая цепь в ЧУМ  $(A, <)$  – последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

### 10.1 Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Для ЧУМ  $(P, \leq)$  следующие определения эквивалентны:

1.  $P$  – фундированное ( $\forall S \subseteq P : \exists \min(S)$ )
2.  $\nexists$  бесконечно убывающих цепей
3. Для  $P$  справедлив принцип индукции:

Для  $\forall$  семейства подмножеств:

$$\{A(p) \mid p \in P\}$$

$$\forall p \in P (\forall q < p : A(q) = 1) \Rightarrow A(p) = 1$$

База индукции – проверить утверждения на минимальных элементах

## 11 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.

$(P, \leq)$  – ЧУМ

### 11.1 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах

Цепь в  $P - C \subseteq P : \forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$

Антицепь в  $P - A \subseteq P : \forall x \neq y \in A : x, y$  – несравнимы

$|A \cap C| \leq 1$  – (если как минимум 2 элемента есть, то они не могут быть сравнимы и несравнимы одновременно)

### 11.2 Теорема Мирского

Наименьшее кол-во антицепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе

### 11.3 Теорема Дилуорса

Наименьшее кол-во цепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе

- 12 LYM-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.
- 13 Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?
- 14 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности.  
Пошаговое задание распределения, дерево событий

Вероятностное пространство – ( $\underbrace{\Omega}_{\text{эл. исходы}}, \underbrace{P}_{\text{ф-я вероятности}})$

Функция вероятности/вероятностное распределение –  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ :

$$\begin{cases} 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1 \end{cases}$$

Событие  $A$  – подмн-во  $A \subseteq \Omega$

Вероятность события  $A$  –  $\sum P(\omega_i), \omega_i \in A$

Свойства вероятности:

1.  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2.  $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4.  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Пошаговое задание распределения:

Если эксперимент состоит из нескольких шагов, распределение задаётся через дерево событий.

На каждом уровне дерева — возможные исходы текущего шага с условными вероятностями.

Вероятность пути в дереве — произведение вероятностей вдоль рёбер пути.

Вероятность исхода — вероятность соответствующего пути от корня до листа.

## 15 Формула включений-исключений для вероятностей.

### Задача о беспорядках.

#### 15.1 Формула включений-исключений для вероятностей

$(\Omega, P) : A_1, \dots, A_n :$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

#### 15.2 Задача о беспорядках

Вероятностное пространство  $\Omega$ ,  $P = \frac{1}{n!}$  (все равновероятны)

Беспорядок  $(p_1, \dots, p_n) - \forall i : p_i \neq i$

Пусть  $Y_i = \{p \in S_n \mid p_i = i\}$  —  $i$ -ый элемент на своем месте

$P(p \text{ не беспорядок}) \Leftrightarrow \exists i : p \in Y_i \Leftrightarrow P(Y_1 \cup \dots \cup Y_n)$

$$P(Y_1 \cap \dots \cap Y_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$P(\geq 1 \text{ неподвижной точки}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

## 16 Условные вероятности, независимые события.

**Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)**

$$\text{Условная вероятность } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Условная вероятность – вероятность  $A$  после  $B$

События  $A$  и  $B$  независимы, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Независимость  $A_1, \dots, A_n$  в совокупности:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Попарная независимость  $A_1, \dots, A_n$ :

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Попарная независимость не означает независимость в совокупности

Пример:

Подбросим 2 монеты. Пусть событие  $A$  – первая монета О,  $B$  – вторая монета О,  $C$  – монеты выпали одинаковой стороной:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Попарная независимость:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/4, & \text{выпало 'OO'} \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/4, & 2-\text{ая 'O'} \Rightarrow 1-\text{ая 'O'} \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/4, & 1-\text{ая 'O'} \Rightarrow 2-\text{ая 'O'} \end{cases}$$

Независимость в совокупности:

$$P(A \cap B \cap C) =? P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$P(A \cap B \cap C)$  – первая и вторая 'О' и они равны

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}, \text{ выпало 'OO'}$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$



$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

## 17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.

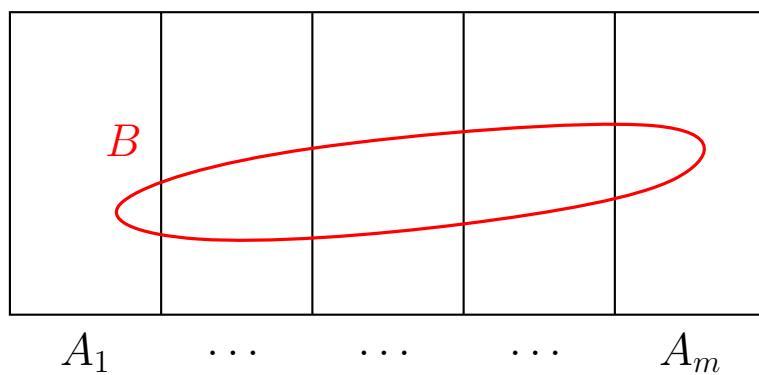
### 17.1 Формула полной вероятности

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$ ,  $P(A_i) > 0$

Тогда для любого события  $B$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Графическая интерпретация:



### 17.2 Формула Байеса

Для любых событий  $A, B : P(A) > 0, P(B) > 0$ :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Пример с тестом на выявление болезни:

Предположим, что некоторый тест правильно предсказывает наличие или отсутствие определенного заболевания с вероятностью 0,95 (если человек действительно болен, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,95 и наоборот)

1% населения имеет это заболевание. Предположим, что чел  $X$  прошел тестирование и получил положительный результат. Какова вероятность того, что  $X$  действительно болен?

Пусть события  $A - X$  здоров,  $\bar{A} - X$  болен,  $B -$  тест положительный:

$$P(B|\bar{A}) = 0.95, P(\bar{A}) = 0.01$$

$$P(B|A) = 0.05, P(A) = 0.99$$

По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.059$$

Тогда ответ (вероятность болезни после теста):

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.059} \simeq 0.161$$

Несмотря на положительный тест, вероятность наличия болезни 16%

## 18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Дисперсия случайной величины.

Пусть  $(\Omega, P)$  – вероятностное пространство:

Случайная величина – функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}, f(w_i) = a_i \in \mathbb{R}$$

## 18.1 Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания.

Мат. ожидание  $f - \mathbb{E}(f) = p_1 \cdot f(w_1) + \dots + p_n \cdot f(w_n) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(w_i)$

Свойства:

1.  $f = c \Rightarrow \mathbb{E}(f) = c, c - \text{const}$
2.  $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g) - \text{линейность}$
3.  $\mathbb{E}(f \cdot c) = c \cdot \mathbb{E}(f), c - \text{const}$

4.  $A - \text{событие}, I_A(w_i) = \begin{cases} 1, & w_i \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(I_A) = \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot I_A(w) = \sum_{w \in A} P(w) = P(A)$$

5.  $\mathbb{E}(f) = \sum_{x \in Range(f)} x \cdot P(f = x)$

## 18.2 Дисперсия случайной величины.

Дисперсия  $f - \mathbb{D}(f) = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) \geq 0$

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2$$

## 19 Неравенства Маркова и Чебышёва.

### 19.1 Неравенство Маркова

Пусть  $f - \text{неотрицательная}$  случ. величина,  $\alpha > 0$ :

$$P(f \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(f)}{\alpha}$$

## 19.2 Неравенство Чебышёва

Пусть  $f$  – случ. величина,  $\alpha > 0$ :

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{D}(f)}{\alpha^2}$$

## 20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Случайные величины  $f, g$  независимы, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : P(f = x \wedge g = y) = P(f = x) \cdot P(g = y)$$

Случ. величины  $f_1, \dots, f_n$  независимы  $\Leftrightarrow$  независимы в совокупности

### 20.1 Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Пусть  $f, g$  – независимые случ. величины.

Мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(f \cdot g) = \mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g)$$

Дисперсия:

$$\mathbb{D}(f + g) = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)$$

## 21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

### 21.1 Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## 21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Подбросим  $n = 2k$  раз монету. Чему равна вероятность выпадения ровно  $\frac{n}{2}$  орлов?

$$P\left(= \frac{n}{2} \text{ орлов}\right) = \binom{n}{n/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n \left(\frac{n}{2e}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

## 22 Оценки для биномиальных коэффициентов.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$