

## Содержание

1	Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.	7
1.1	Мыцельскиан графа. . . . .	7
1.2	Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом. . . . .	7
2	Паросочетания и вершинные покрытия в графе. Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.	9
2.1	Теорема Кёнига . . . . .	9
3	Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.	11
4	Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла	11
4.1	Теорема Холла . . . . .	11
5	Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея	12
5.1	Теорема Рамсея . . . . .	13
6	Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок. Утвержде-	

ние о связи строгого и нестрогого порядков.	14
6.1 Связь строгого и нестрогого порядков . . . . .	15
7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покомпонентный порядок, лексикогра- фический порядок.	16
7.1 Операции с ЧУМ . . . . .	16
8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свой- ства. Примеры порядков: с бесконечным числом ми- нимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.	17
9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частич- но упорядоченных множествах, их образы при изомор- физме. Теорема об изоморфизме счётных плотных ли- нейных порядков без наименьшего и наибольшего эле- мента	18
9.1 Изоморфизм порядков, примеры . . . . .	18
9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их об- разы при изоморфизме . . . . .	19
9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента . .	19
10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств. Фун- дированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.	20

10.1	Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества. . . .	21
11	Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.	22
11.1	Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах	22
11.2	Теорема Мирского . . . . .	22
11.3	Теорема Дилуорса . . . . .	24
12	LYM-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.	24
13	Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?	25
13.1	Граф сравнимости частично упорядоченного множества.	25
13.2	Совершенные графы. Когда граф является совершенным?	25
14	Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности. Пошаговое задание распределения, дерево событий	25
15	Формула включений-исключений для вероятностей. Задача о беспорядках.	27
15.1	Формула включений-исключений для вероятностей . . .	27
15.2	Задача о беспорядках . . . . .	27
16	Условные вероятности, независимые события. Независимость событий в совокупности, отличие от попарной	

независимости событий (приведите явный пример)	27
<b>17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.</b>	<b>29</b>
17.1 Формула полной вероятности . . . . .	29
17.2 Формула Байеса . . . . .	29
<b>18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность математического ожидания. Дисперсия случайной величины.</b>	<b>30</b>
18.1 Математическое ожидание случайной величины, линейность математического ожидания. . . . .	30
18.2 Дисперсия случайной величины. . . . .	32
<b>19 Неравенства Маркова и Чебышёва.</b>	<b>32</b>
19.1 Неравенство Маркова . . . . .	32
19.2 Неравенство Чебышёва . . . . .	33
<b>20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.</b>	<b>33</b>
20.1 Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин. . . . .	34
<b>21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.</b>	<b>35</b>
21.1 Формула Стирлинга . . . . .	35
21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.	35

22	Оценки для биномиальных коэффициентов.	35
23	Вероятностный метод: общая формулировка и оценка объединения. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея	36
23.1	Пример применения вероятностного метода для поиска разреза в графе величины более половины числа ребер	37
23.2	Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея . . . . .	37
24	Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры. Когда производящая функция обратима?	38
25	Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница. Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление $n$ -го коэффициента производящей функции с использованием производных.	39
25.1	Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница . . . . .	39
25.2	Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление $n$ -го коэффициента производящей функции с использованием производных. . . . .	40
26	Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.	40

26.1	Бином Ньютона, обобщение на целые показатели. . . .	41
27	<b>Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами? Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.</b>	<b>42</b>
27.1	Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами? . . . . .	42
27.2	Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода. . . . .	43
28	<b>Числа Фибоначчи: их производящая функция и явная формула (формула Бине).</b>	<b>44</b>
29	<b>Правильные скобочные последовательности. Критерий того, что скобочная последовательность является правильной. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.</b>	<b>45</b>
29.1	Критерий того, что скобочная последовательность является правильной. . . . .	45
29.2	Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей. . . . .	46
30	<b>Числа Каталана: их производящая функция и явная формула</b>	<b>46</b>
30.1	Явная формула . . . . .	48

# 1 Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

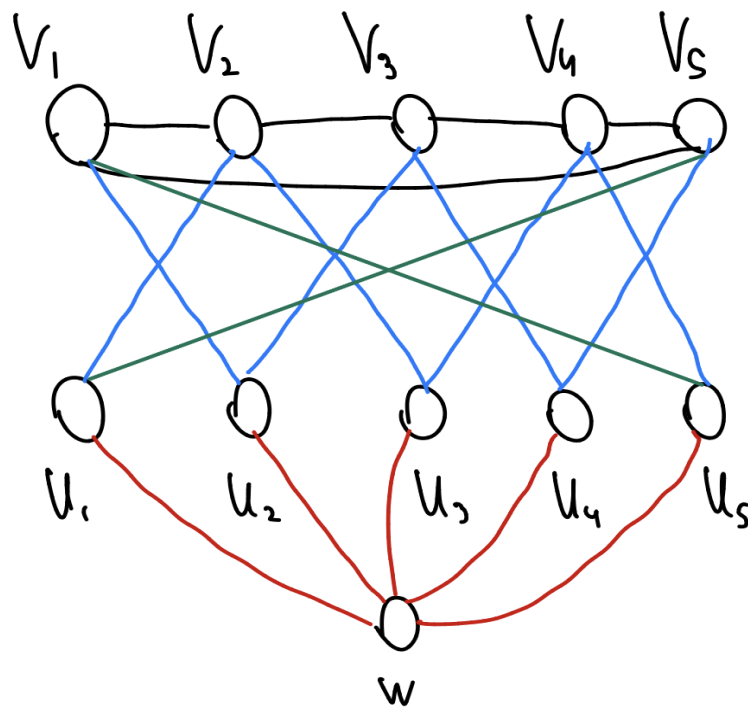
## 1.1 Мыцельскиан графа.

Мыцельскиан графа  $G$  – граф  $\mu(G) = (V', E')$  :

$$V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n, w\}$$

$$E' = E \cup \{(v_i, u_j) \mid \text{если } (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(w, u_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Пример:  $G$  – цикл длины 5 (черные ребра – исходные):



## 1.2 Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Пусть  $G_2 = K_2$ ,  $G_3 = \mu(G_2), \dots, G_t = \mu(G_{t-1})$

Тогда  $G_t$  – граф без треугольников с  $\chi(G_t) = t$

*Доказательство:*

Полная индукция по  $t$ :

1)  $G_t$  без треугольников:

Вершина  $w$  не может быть в треугольнике, также не могут быть две вершины  $u_i, u_j$  в треугольнике (по опр.). По предположению индукции треугольника  $v_i, v_j, v_k$  тоже не может быть:

Пусть  $v_i, v_j, u_k$  – треугольник  $\Rightarrow k \neq i, j$ :

$$\begin{cases} v_j \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_j \rightarrow v_k \\ v_i \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_i \rightarrow v_k \end{cases} \Rightarrow \text{есть треугольник } v_i, v_j, v_k \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) а)  $\chi(G_t) \leq t$ :

$\chi(G_{t-1}) = t - 1$ . Красим  $u_i$  в цвет  $v_i$ .  $w$  красим в новый цвет  $\Rightarrow$  покрасили в  $t$  цветов.

б)  $\chi(G_t) \geq t$ :

От противного:  $\chi(G_t) = t - 1$ :

Пусть раскрасили в  $t-1$  цвет и  $w$  имеет цвет  $t-1$ . Тогда  $u_i$  раскрашены в цвета  $(1, \dots, t-2)$ . Перекрашиваем  $v_i$ :

$$\text{цвет } v_i = \begin{cases} \text{прежний, если он не } t-1 \\ \text{цвет } u_i, \text{ если он } t-1 \end{cases}$$

Вершины  $v_i$  цвета  $t-1$  найдутся по предположению индукции.

Тем самым  $G_{t-1}$  раскрашен в  $t-2$  цвета и для подграфа  $G_{t-1}$  раскраска правильная:

(Иначе были  $v_i \leftrightarrow v_j$  с одинаковым цветом  $x$ , поменяли цвет одной из вершин  $\Rightarrow$  раньше в  $v_i$  был цвет  $t-1$  но поменяли на цвет  $x$  который



у  $u_i$ . Между  $u_i$  и  $v_j$  есть ребро  $\Rightarrow$  противоречие (они одного цвета до изменений цветов))

Получается мы раскрасили  $G_{t-1}$  в  $t - 2$  цвета  $\Rightarrow$  противоречие

## 2 Паросочетания и вершинные покрытия в графе.

**Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.**

Паросочетание в  $G - M \subseteq E : \forall m_1, m_2 \in M : m_1 \cap m_2 = \emptyset$

Вершинное покрытие в  $G - U \subseteq V : \forall \{a, b\} \in E : (a \in U) \vee (b \in U)$

В произвольном графе:

$$|M_{max}| \leq |U_{min}|$$

Если достигается равенство  $\Leftrightarrow \exists$  парсоч. и мин. покр равного размера  
*Доказательство:*

Пусть  $M'$  – парсоч,  $U'$  – вершин. покрытие и  $|M'| = |U'|$ :

$$|M'| \leq |M_{max}| \leq |U_{min}| \leq |U'|$$

$\Downarrow$

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

Чтобы покрыть все ребра из  $M$  нужно как минимум  $|M|$  вершин

### 2.1 Теорема Кёнига

В двудольном графе  $G = (L \cup R, E)$  выполняется равенство:

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

### Доказательство:

Рассмотрим парсоч.  $M_{max}$ .

Строим  $U_{min} \subseteq V$ :  $\forall \{x, y\} \in M_{max}$ :

$$\begin{cases} y \in U_{min}, & \text{если } \exists \text{ черед. путь отн. } M_{max} \text{ оканч в } y \\ x \in U_{min}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Покажем, что  $U_{min}$  – вер. покрытие:

Пусть  $\{a, b\} \in E \setminus M_{max}$ :

- $a$  не покрыто  $M_{max}$ :

1.  $b$  не покрыто  $M_{max} \Rightarrow$  противоречие (можно добавить в  $M_{max}$ )
2.  $b$  покрыто  $M_{max} \Rightarrow$  мы уже выбрали  $b$  ( $a - b$  черед. путь)

- $a$  покрыто  $M_{max} \Rightarrow \{a, b'\} \in M_{max} \Rightarrow$  один из концов был выбран  
Пусть  $b' \in U$  (иначе все покрыто)  $\Rightarrow \exists$  черед. путь  $a' \in L \rightarrow b'$ .  
Тогда путь  $a' \rightarrow b' - a - b$  – чередующийся:

В  $b'$  пришли по ребру не из  $M_{max} \Rightarrow$  чередование не нарушилось

Ребра  $\{a, b\}, \{a, b'\}$  не встречались ранее: (если возьмем такой путь  $min$  длины) т.к. путь не был бы наименьшим если мы бы пришли в  $b'$ . Если ребро  $\{a, b\}$  было, то мы не могли прийти в  $a$  по ребру не из  $M_{max} \Rightarrow$  побывали бы в  $b'$

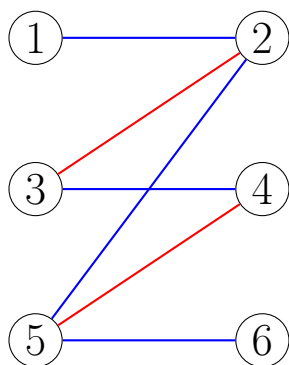
1.  $b$  не покрыто  $M_{max} \Rightarrow$  этот путь увеличивающий (противоречие)
2.  $b$  покрыто  $M_{max} \Rightarrow \{a'', b\} \in M_{max}$ . Тогда  $b \in U$ :  $\exists$  черед. путь  $a' \rightarrow b' - a - b$

### 3 Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.

Пусть  $G = (L \cup R, E)$  – двудольный граф и  $M$  – паросочетание.

Чередующийся путь относительно  $M$  – путь (без повторений по ребрам), начинающийся в  $a \in L$  не покрытой  $M$  и в котором ребра чередуются по принадлежности  $M$  ( $\notin M, \in M, \dots$ )

Увеличивающий путь относительно  $M$  – чередующийся путь из  $a$  в  $b$ :  $b$  тоже не покрыта  $M$



1-2-3-4 – чередующийся путь

1-2-3-4-5-6 – увеличивающийся путь

Если относительно  $M$  есть увеличивающийся путь  $\Rightarrow M$  – не максимальное паросочетание

### 4 Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла

#### 4.1 Теорема Холла

В двудольном графе  $G = (L \cup R, E)$ :

$$\exists \text{ паросочетание размера } |L| \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq L : |N(S)| \geq |S|}_{\text{условие Холла}}$$

Для  $S \subseteq L : N(S) = \{y \in R \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$

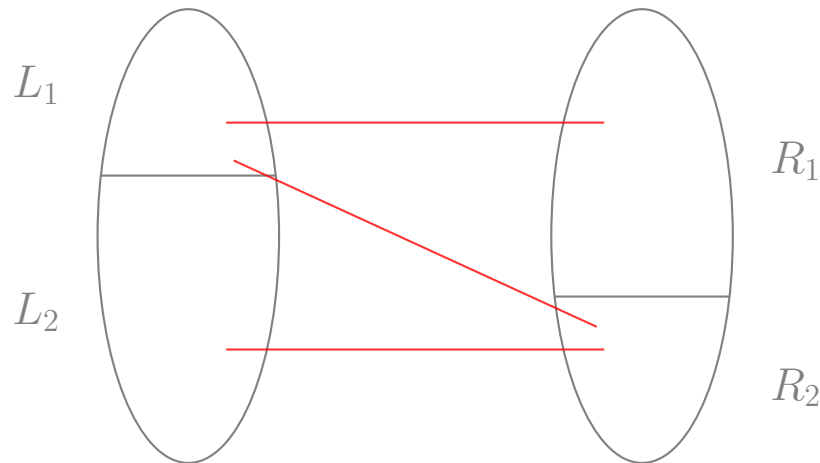
*Доказательство:*

1)  $\Rightarrow$ :  $\forall S \subseteq L$   $N(S)$  содержит правые концы ребер из парсоча

2)  $\Leftarrow$ :

Из условия Холла  $|R| \geq |L|$ . По т. Кёнига,  $|M_{max}| = |U_{min}|$

Рассмотрим  $U_{min}$ :



$U_{min} = L_1 \cup R_2$ . Нет ребер между  $L_2$  и  $R_1$ .

Применим Холла для  $S = L_2 \Rightarrow N(S) \subseteq R_2 \Rightarrow |R_2| \geq |N(L_2)| \geq |L_2|$

$\Downarrow$

$$|U_{min}| = |L_1| + |R_2| \geq |L_1| + |L_2| = |L|$$

При этом  $L$  тоже вершин. покрытие  $\Rightarrow |U_{min}| = |L| \Rightarrow \exists M_{max} :$   
 $|M_{max}| = |L|$

## 5 Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея

Размер наибольшей клики в  $G - \omega(G)$

Размер наибольшего нез. мн-ва в  $G - \alpha(G)$

Пусть  $n, k \geq 1 : R(n, k)$  – наименьшее  $N$  такое, что  $\forall G$  на  $N$  вершинах найдется либо клика размером  $k$ , либо нез. мн-во размера  $n$

Свойства:

- $R(n, k) = R(k, n)$  (дополнение  $\overline{G}$ )
- $R(1, k) = 1$
- $R(2, k) = k$

### 5.1 Теорема Рамсея

$\forall n, k \geq 2 : R(n, k)$  – конечно

$$R(n, k) \leq R(n-1, k) + R(n, k-1)$$

*Доказательство:*

Индукция по  $(n + k)$ :

Переход  $(n + k - 1) \rightarrow (n + k)$ :

Пусть  $R(n-1, k) + R(n, k-1) = N$ . Рассмотрим граф  $G$  на  $N$  вершинах:

$$\text{Возьмем } \forall v \in G: \deg(v) = x, x + y = N - 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq R(n-1, k) \\ y \geq R(n, k-1) \end{cases}$$

1)  $x \geq \overbrace{R(n-1, k)}^{\text{для } G_1} \Rightarrow$  в  $G_1$  найдется или клика разм.  $(n-1)$ , или нез. мн-во разм.  $k$ :

Если нез. мн-во размером  $k$ , то все получилось. Если клика размером  $(n-1)$ , то  $v$  соединена со всеми вершинами в  $G_1 \Rightarrow$  получилась клика размером  $n$

Второй случай аналогично

Верхняя оценка:

$$R(n, k) \leq \binom{n+k-2}{n-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

*Доказательство:*

Индукция по  $(n+k)$ :

Имеем:

$$\begin{aligned} R(n, k) &\leq R(n-1, k) + R(n, k-1) \leq \binom{n-1+k-2}{n-2} + \binom{n+k-1-2}{n-1} = \\ &= \binom{n+k-3}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-1} \end{aligned}$$

## 6 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок.

**Утверждение о связи строгого и нестрогого порядков.**

Пусть  $A \neq \emptyset$  – мн-во:

Отношение  $R$  на  $A$  является отношением **строгого** частичного порядка, если:

1.  $\neg aRa$  – Иррефлексивность
2.  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$  – Транзитивность

Отношение  $R$  на  $A$  является отношением **нестрогого** частичного порядка, если:

1.  $aRa$  – Рефлексивность
2.  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$  – Антисимметричность

### 3. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Линейный порядок – частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы

#### 6.1 Связь строгого и нестрогого порядков

Из строгого порядка можно получить нестрогий и наоборот:

1. Пусть  $\leq$  – нестрогий порядок. Тогда

$$< := \leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$$

*Доказательство:*

(a)  $\neg aRa$

(b) Пусть  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a \neq b, b \neq c \Rightarrow a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow a < c$  ( $a \neq c$ )

2. Пусть  $<$  – строгий порядок. Тогда

$$\leq := < \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

*Доказательство:*

(a)  $a \leq a$

(b) Пусть  $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(c) Пусть  $a \leq b \wedge b \leq c$ . Если не все попарно различны, то очев  
Иначе  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \Rightarrow a \leq c$

## 7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покомпонентный порядок, лексикографический порядок.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – мн-во с заданным отн. порядка:  $(A, <)$  или  $(A, \leq)$

Пример:

1.  $(\mathbb{N}, |) \quad a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$
2.  $(\mathbb{Z}, |)$  – не ЧУМ  $(-1 \mid 1) \wedge (1 \mid -1) \not\Leftrightarrow 1 = -1$
3.  $(2^A, \subseteq)$  – ЧУМ

### 7.1 Операции с ЧУМ

1. Сумма порядков:

Пусть  $(A, \leq_A)$ ,  $(B, \leq_B)$  – ЧУМ. Сумма  $A + B = A \sqcup B$ :

- Внутри  $A$  порядок  $\leq_A$
- Внутри  $B$  порядок  $\leq_B$
- Все элементы из  $A$  меньше всех элементов из  $B$

2. Покомпонентный порядок:

$$(A \times B, \leq) : (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

3. Лексикографический порядок:

$$(A \times B, <) : (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \vee \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 <_B b_2 \end{cases}$$



## 8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства. Примеры порядков: с бесконечным числом минимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.

Пусть  $(P, \leq_P)$  – ЧУМ:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in P - \text{минимальный, если } \nexists b \in P : b < a \\ a \in P - \text{наименьший, если } \forall b \in P : a \leq b \\ a \in P - \text{максимальный, если } \nexists b \in P : b > a \\ a \in P - \text{наибольший, если } \forall b \in P : a \geq b \end{array} \right.$$

Наименьший/наибольший – единственный, если существует

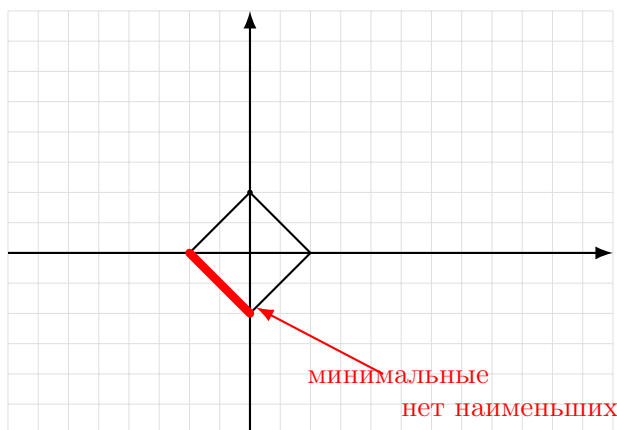
Наименьший/наибольший является минимальным/максимальным

Примеры:

- $(\mathbb{Z} \cup \{*\}, \leq)$ : минимальный – \*, наименьшего – нет
- $([0, 1]^2, \leq)$  – покоординатный:



- $(\{|x| + |y| = 1\}, \leq)$  – покоординатный:



## 9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

### 9.1 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть  $(P, \leq_P)$ ,  $(Q, \leq_Q)$  – ЧУМ.  $P \simeq Q$ , если  $\exists$  биекция  $h : P \rightarrow Q$ :

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow h(x) \leq_Q h(y)$$

Примеры:

- $(\mathbb{N}, \leq) \simeq (\{2, 4, 6, \dots\}, \leq)$  – биекция  $f(n) = 2n$
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{R}, \leq)$  – нет биекции между  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$

Инварианты:

- Мощность (из счетного нет биекции в континуум и т.д.)
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{Z}, \leq)$  –  $\mathbb{Q}$  – плотный,  $\mathbb{Z}$  – нет
- $([0, 1], \leq) \not\simeq ((0, 1), \leq)$  – в интервале нет наименьшего/наибольшего
- Наличие непосредственных предшественников/последователей

## 9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме

Если  $\varphi : P \rightarrow Q$  – изоморфизм  $P, Q \Rightarrow \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

*Доказательство:*

$$1) a \leq c \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(c) \leq \varphi(b)$$

$$2) \varphi(a) \leq y \leq \varphi(b) \Rightarrow a \leq \varphi^{-1}(y) \leq b$$

## 9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

Плотный порядок:  $\forall a < b : \exists c : a < c < b$

Теорема: Любые два счётных плотных линейных порядка без наим/наиб элемента изоморфны

*Доказательство:*

Построим явную биекцию. Пронумеруем элементы:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}, Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$$

Строим изоморфизм  $\varphi : P \rightarrow Q$ :

$$\varphi_1: p_1 \rightarrow q_1$$

$\vdots$

$$\varphi_n : \quad p_{i_1} <_P p_{i_2} <_P \dots <_P p_{i_{n-1}} <_P p_{i_n}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$q_{i_1} <_Q q_{i_2} <_Q \dots <_Q q_{i_{n-1}} <_Q q_{i_n}$$

Рассмотрим  $p_k \notin \{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\}$  с  $\min k$ :

1. Если  $p_k$  между двумя  $p_{i_m}$  и  $p_{i_{m+1}}$ , то из за плотности  $\exists q_k : q_{j_m} < q_k < q_{j_{m+1}}$ . Переведем  $p_k \rightarrow q_k$
2. Если он меньше  $p_{i_1}$  или больше  $p_{i_n}$  – из за отсутствия наибольшего  $\exists q_k$  который  $< q_{j_1}$  или  $> q_{j_n}$  соответственно

Но такое отображение может быть не сюръективным. Чтобы это исправить, нужно после определения образа  $p_k$  рассматривать  $q_{k'} \notin \{q_{j_1}, \dots, q_{j_n}, q_k\}$  с  $\min k'$ . Ищем подходящий  $p'_k$  аналогично

После итерации:

$$\begin{cases} p_k \rightarrow q_k \\ p'_k \rightarrow q'_k \end{cases} \quad \text{переходим } \varphi_n \text{ до } \varphi_{n+1}$$

Теперь для каждого элемента найдется шаг когда он будет покрыт

$\Downarrow$

$$\varphi = \varphi_1 \cup \dots - \text{биекция}$$

## 10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств.

### Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Бесконечно убывающая цепь в ЧУМ  $(A, <)$  – последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

## 10.1 Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Для ЧУМ  $(P, \leq)$  следующие определения эквивалентны:

1.  $P$  – фундированное ( $\forall S \subseteq P : \exists \min(S)$ )
2.  $\nexists$  бесконечно убывающих цепей
3. Для  $P$  справедлив принцип индукции:

Для  $\forall$  семейства подмножеств:

$$\{A(p) \mid p \in P\}$$

$$\forall p \in P (\forall q < p : A(q) = 1) \Rightarrow A(p) = 1$$

База индукции – проверить утверждения на минимальных элементах

*Доказательство эквивалентности:*

$\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$ : Пусть  $\exists p_1 > p_2 > \dots \Rightarrow x = \{p_1, p_2, \dots\}$  – нет мин. элемента

$\neg 2) \Rightarrow \neg 1)$ :  $\forall X \subseteq P, X \neq \emptyset$ : в  $X$  нет мин. эл.

$$p_1 \in X \Rightarrow \exists p_2 < p_1$$

$$p_2 \in X \Rightarrow \exists p_3 < p_2$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\exists p_1 > p_2 > \dots$$

1)  $\Rightarrow$  3):

$X = \{p \in P \mid A(p) = 0\}$ . Пусть  $X \neq \emptyset$ :

$$\exists p' \in X, p' = \min(X)$$

Тогда  $\forall q < p' : A(q) = 1 \Rightarrow A(p') = 1 \Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow X = \emptyset$   
 3)  $\Rightarrow$  1):

Пусть  $X \subseteq P, X \neq \emptyset$ . Пусть в  $X$  нет мин. эл:

$$A(p) = (p \notin X)$$

$$\forall p \in P (\forall q < p : q \notin X) \Rightarrow \overbrace{p \notin X}^{\text{верно, иначе } \exists \min(X)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p \in P : p \notin X \Rightarrow X = \emptyset \Rightarrow \text{противоречие}$$

## 11 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.

$(P, \leq)$  – ЧУМ

### 11.1 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах

Цепь в  $P$  –  $C \subseteq P : \forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$

Антицепь в  $P$  –  $A \subseteq P : \forall x \neq y \in A : x, y$  – несравнимы

$|A \cap C| \leq 1$  – (если как минимум 2 элемента есть, то они не могут быть сравнимы и несравнимы одновременно)

### 11.2 Теорема Мирского

Наименьшее кол-во антицепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе

*Доказательство:*

Пусть  $P$  – ЧУМ,  $l$  – макс. длина цепи.

Покажем, что  $P$  разбивается на  $l$  антицепей

Пусть  $\min X = \{x \in X \mid x - \text{мин. в } X\}$

Возьмем  $P_1 = \min P$ :

$$P_2 = \min (P \setminus P_1)$$

$$P_3 = \min (P \setminus (P_1 \cup P_2))$$

$$\vdots$$

$$P_k = \min (P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{k-1}))$$

$$\Downarrow$$

$$P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_m$$

Каждое  $P_i$  – антицепь. Докажем, что  $m = l$ :

Построим в  $P$  цепь размера  $m$ . Рассмотрим  $\forall p_m \in P_m \Rightarrow \exists p_{m-1} \in P_{m-1} : p_m > p_{m-1}$ :

$$p_m > p_{m-1} > \dots > p_r$$

$$\min (P_m \sqcup \dots \sqcup P_r \sqcup P_{r-1}) = P_{r-1}$$

$$p_r \text{ не минимальный} \Rightarrow \exists p_{r-1} < p_r$$

$p_{r-1} \in P_{r-1}$  (иначе 2 минимума сравнимы  $\Rightarrow$  противоречие)

$$\Downarrow$$

Продолжили до конца и получили цепь в  $P$  размером  $m$

$$\Downarrow$$

$$m \leq l$$

Но мы разбили множество на  $m$  антицепей  $\Rightarrow l \geq m$

$$\Downarrow$$

$$m = l$$

### 11.3 Теорема Дилуорса

Наименьшее кол-во цепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе

## 12 ЛУМ-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Булев куб  $\mathbb{B}^n = \{0, 1\}^n$  – ЧУМ всех подмножеств  $\{1, 2, \dots, n\}$  по включению

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n), \quad 0 < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i : a_i \leq b_i$$

Вес  $|a|$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  – колво единиц в  $a$

Уровни  $\mathbb{B}^n : B_0, B_1, \dots, B_n, B_k = \{a \in \mathbb{B}^n \mid |a| = k\}$

Макс. размер цепи в  $\mathbb{B}^n - (n + 1)$

*Доказательство:*

ЛУМ неравенство: Пусть  $A$  – а/ц в  $\mathbb{B}^n$ ,  $a_k = |A \cap B_k|$ . Тогда:

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{|B_k|} \leq 1$$

Теорема Шпернера: макс. размер антицепи в  $\mathbb{B}^n - \binom{n}{[n/2]}$



*Доказательство:*

### 13 Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

#### 13.1 Граф сравнимости частично упорядоченного множества.

Пусть  $(P, \leq)$  – ЧУМ. Граф сравнимости  $P$  – простой неор. граф  $G$ :

$$G = (V, E), V = P : (x, y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \\ x > y \end{cases}$$

#### 13.2 Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

Граф  $G$  совершенный, если для любого индуцированного подграфа:

$$\forall H \subseteq G : \chi(H) = \omega(H)$$

Граф является совершенным, если он не содержит ни  $C_{2k+1}$ , ни  $\overline{C_{2k+1}}$  в качестве индуцированного подграфа при  $k > 1$

Граф  $G$  совершенный  $\Leftrightarrow$  граф  $\overline{G}$  совершенный

Для любого конечного ЧУМ  $P$  его граф сравнимости  $G$ :

$G$  и  $\overline{G}$  – совершенные

### 14 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности. Пошаговое задание распределения, дерево событий

Вероятностное пространство –  $(\underbrace{\Omega}_{\text{эл. исходы}}, \underbrace{P}_{\text{ф-я вероятности}})$

Функция вероятности/вероятностное распределение –  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ :

$$\begin{cases} 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1 \end{cases}$$

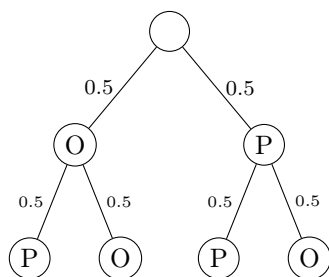
Событие  $A$  – подмн-во  $A \subseteq \Omega$

Вероятность события  $A$  –  $\sum P(\omega_i), \omega_i \in A$

Свойства вероятности:

1.  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2.  $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4.  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Пошаговое задание распределения:



Если эксперимент состоит из нескольких шагов, распределение задаётся через дерево событий.

На каждом уровне дерева — возможные исходы текущего шага с условными вероятностями.

Вероятность пути в дереве — произведение вероятностей вдоль рёбер пути.

Вероятность исхода — вероятность соответствующего пути от корня до листа.

## 15 Формула включений-исключений для вероятностей.

### Задача о беспорядках.

#### 15.1 Формула включений-исключений для вероятностей

$(\Omega, P) : A_1, \dots, A_n :$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

#### 15.2 Задача о беспорядках

Вероятностное пространство  $\Omega$ ,  $P = \frac{1}{n!}$  (все равновероятны)

Беспорядок  $(p_1, \dots, p_n) - \forall i : p_i \neq i$

Пусть  $Y_i = \{p \in S_n \mid p_i = i\}$  –  $i$ -ый элемент на своем месте

$$P(p \text{ не беспорядок}) \Leftrightarrow \exists i : p \in Y_i \Leftrightarrow P(Y_1 \cup \dots \cup Y_n)$$

$$P(Y_1 \cap \dots \cap Y_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$P(\geq 1 \text{ неподвижной точки}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

## 16 Условные вероятности, независимые события.

Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)

$$\text{Условная вероятность } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Условная вероятность – вероятность  $A$  после  $B$

События  $A$  и  $B$  независимые, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Независимость  $A_1, \dots, A_n$  в совокупности:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Попарная независимость  $A_1, \dots, A_n$ :

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Попарная независимость не означает независимость в совокупности

Пример:

Подбросим 2 монеты. Пусть событие  $A$  – первая монета О,  $B$  – вторая монета О,  $C$  – монеты выпали одинаковой стороной:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Попарная независимость:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/4, & \text{выпало 'ОО'} \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/4, & 2\text{-ая 'О'} \Rightarrow 1\text{-ая 'О'} \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/4, & 1\text{-ая 'О'} \Rightarrow 2\text{-ая 'О'} \end{cases}$$

Независимость в совокупности:

$$P(A \cap B \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$P(A \cap B \cap C)$  – первая и вторая 'О' и они равны

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}, \text{ выпало 'ОО'}$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$\Downarrow$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

## 17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.

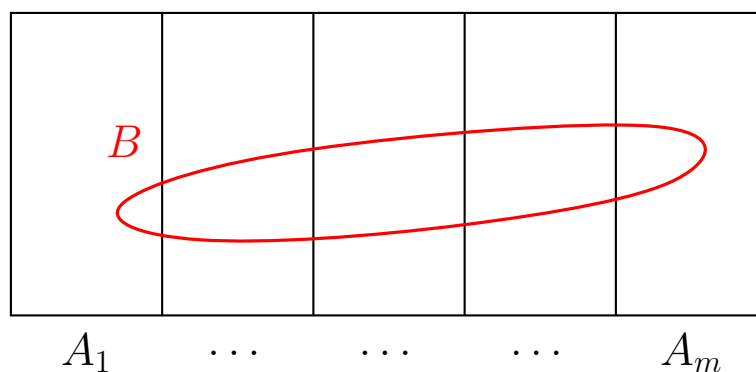
### 17.1 Формула полной вероятности

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$ ,  $P(A_i) > 0$

Тогда для любого события  $B$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Графическая интерпретация:



### 17.2 Формула Байеса

Для любых событий  $A, B : P(A) > 0, P(B) > 0$ :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Пример с тестом на выявление болезни:

Предположим, что некоторый тест правильно предсказывает наличие или отсутствие определенного заболевания с вероятностью 0,95 (если человек действительно болен, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,95 и наоборот)

1% населения имеет это заболевание. Предположим, что чел  $X$  прошел тестирование и получил положительный результат. Какова вероятность того, что  $X$  действительно болен?

Пусть события  $A$  –  $X$  здоров,  $\bar{A}$  –  $X$  болен,  $B$  – тест положительный:

$$P(B|\bar{A}) = 0.95, P(\bar{A}) = 0.01$$

$$P(B|A) = 0.05, P(A) = 0.99$$

По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.059$$

Тогда ответ (вероятность болезни после теста):

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.059} \simeq 0.161$$

Несмотря на положительный тест, вероятность наличия болезни 16%

## 18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность математического ожидания. Дисперсия случайной величины.

Пусть  $(\Omega, P)$  – вероятностное пространство:

Случайная величина – функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}, f(w_i) = a_i \in \mathbb{R}$$

### 18.1 Математическое ожидание случайной величины, линейность математического ожидания.

Мат. ожидание  $f - \mathbb{E}(f) = p_1 \cdot f(w_1) + \dots + p_n \cdot f(w_n) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(w_i)$

Свойства:

1.  $f = c \Rightarrow \mathbb{E}(f) = c, c - \text{const}$
2.  $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)$  – линейность

*Доказательство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f + g) &= \sum_{i=1}^n p_i(f(w_i) + g(w_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i f(w_i) + \sum_{i=1}^n p_i g(w_i) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)\end{aligned}$$

3.  $\mathbb{E}(f \cdot c) = c \cdot \mathbb{E}(f), c - \text{const}$

$$4. A - \text{событие}, I_A(w_i) = \begin{cases} 1, & w_i \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(I_A) = \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot I_A(w) = \sum_{w \in A} P(w) = P(A)$$

$$5. \mathbb{E}(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x)$$

Задача о днях рождения

Пусть есть  $n = 28$  людей.  $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$  равновероятно

$f$  – кол-во пар человек, рожденных в один день.  $\mathbb{E}(f) = ?$

$$f = \sum_{i < j} g_{ij}, \quad g_{ij} = \begin{cases} 1, & i, j \text{ в один день} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i < j} \mathbb{E}(g_{ij}) =$$

$$= \sum_{i < j} P(i \text{ и } j \text{ в один день})$$

$$P(i \text{ и } j \text{ в один день}) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365} \Rightarrow \mathbb{E}(f) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{365} = \frac{378}{365} > 1$$

## 18.2 Дисперсия случайной величины.

Дисперсия  $f$  —  $\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) \geq 0$

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) &= \mathbb{E}(f^2 - 2 \cdot f \cdot \mathbb{E}(f) + (\mathbb{E}(f))^2) = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(f) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(f))^2) = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - 2(\mathbb{E}(f))^2 + (\mathbb{E}(f))^2 = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2 \end{aligned}$$

## 19 Неравенства Маркова и Чебышёва.

### 19.1 Неравенство Маркова

Пусть  $f$  — **неотрицательная** случ. величина,  $\alpha > 0$ :

$$P(f \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(f)}{\alpha}$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x) \\ \mathbb{E}(f) &= \underbrace{\sum_{x < \alpha} x \cdot P(f = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f) &\geq \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) \\
\sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) &\geq \sum_{x \geq \alpha} \alpha \cdot P(f = x) = \alpha \cdot P(f \geq \alpha) \\
&\Downarrow \\
\mathbb{E}(f) &\geq \alpha \cdot P(f \geq \alpha)
\end{aligned}$$

## 19.2 Неравенство Чебышёва

Пусть  $f$  – случ. величина,  $\alpha > 0$ :

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{D}(f)}{\alpha^2}$$

*Доказательство:*

Пусть  $g = (f - \mathbb{E}(f))^2 \geq 0$ :

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) = \underbrace{P(g \geq \alpha^2)}_{\text{по Маркову}} \leq \frac{\overbrace{\mathbb{E}(g)}^{\mathbb{D}(f)}}{\alpha^2}$$

## 20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Случайные величины  $f, g$  независимые, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : P(f = x \wedge g = y) = P(f = x) \cdot P(g = y)$$

Случ. величины  $f_1, \dots, f_n$  независимы  $\Leftrightarrow$  независимы в совокупности

## 20.1 Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Пусть  $f, g$  – независимые случ. величины.

Мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(f \cdot g) = \mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g)$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x), \mathbb{E}(g) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(g = x), \\ \mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x) \cdot \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot P(g = y) = \\ &= \sum_{x, y \in \mathbb{R}} x \cdot y \cdot \overbrace{P(f = x) \cdot P(g = y)}^{P(f=x \cap g=y)} = \mathbb{E}(f \cdot g)\end{aligned}$$

Дисперсия:

$$\mathbb{D}(f + g) = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(f + g) &= \mathbb{E}((f + g)^2) - (\mathbb{E}(f + g))^2 = \\ &= \mathbb{E}(f^2 + 2fg + g^2) - (\mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g))^2 = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g) + \mathbb{E}(g^2) - (\mathbb{E}(f))^2 - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g) - (\mathbb{E}(g))^2 = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2 + \mathbb{E}(g^2) - (\mathbb{E}(g))^2 = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)\end{aligned}$$

## 21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

### 21.1 Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

### 21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Подбросим  $n = 2k$  раз монету. Чему равна вероятность выпадения ровно  $\frac{n}{2}$  орлов?

$$P\left(= \frac{n}{2} \text{ орлов}\right) = \binom{n}{n/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n \left(\frac{n}{2e}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

## 22 Оценки для биномиальных коэффициентов.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$

*Доказательство:*

$$1) \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \overbrace{\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{1}}^k \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

$$\text{При } a \geq b \geq 1 : \frac{a}{b} \leq \frac{a-1}{b-1}$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1 + x$$

$$\text{Покажем, что } \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$

Фикс.  $t \in (0; 1)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} &\leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot t^{i-k} = \frac{1}{t^k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot t^i \leq \frac{1}{t^k} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot t^i = \\ &= \frac{1}{t^k} (1+t)^n \end{aligned}$$

$$\text{При } t = \frac{k}{n}: \left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \Rightarrow \left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot e^k = \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$

## 23 Вероятностный метод: общая формулировка и оценка объединения. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

Пусть вер. пространство  $(\Omega, P)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}(f) = c$

Лемма:

$$\begin{cases} \exists w_{min} \in \Omega : f(w_{min}) \leq c \\ \exists w_{max} \in \Omega : f(w_{max}) \geq c \end{cases}$$

*Доказательство:*

$$c = \mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(w_i)$$

От противного:  $\forall w : f(w) > c$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \cdot c &< \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(w_i) \\ c &< c \end{aligned}$$

Противоречие  $\Rightarrow \exists w : f(w) \leq c$

### 23.1 Пример применения вероятностного метода для поиска разреза в графе величины более половины числа ребер

Пусть  $G = (V, E)$  – граф. Тогда  $\exists$  разрез  $S \subseteq V$ :  $|S| \geq \frac{|E|}{2}$

*Доказательство:*

$\Omega$  – все подмножества  $n$  вершин ( $|\Omega| = 2^n$ ). Все равновероятно

Пусть  $f(S) = |E(S, V \setminus S)|$  – случай величина

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{e \in E} \mathbb{E}(I_e):$$

$$I_e = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in E(S, V \setminus S) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(I_e) = P(e \in E(S, V \setminus S)) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{все состояния вершин на концах ребра})$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \mathbb{E}(f) &= \frac{|E|}{2} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

По лемме существует исход  $S \in \Omega$  для которого  $f(S) \geq \mathbb{E}(f)$

Оценка объединения:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

### 23.2 Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

$$R(k, k) \leq \binom{2k-1}{k-1} < 2^{2k-2}$$

$$\left\lceil \frac{k \cdot 2^{k/2}}{2e} \right\rceil < R(k, k), \quad \text{при } k \geq 3$$

## 24 Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры. Когда производящая функция обратима?

$$(a_0, a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \text{производящая функция (ПФ)} (a_0, a_1, \dots)$$

Переменная  $x$  – формальная (вместо нее может быть например )

Мн-во всех ПФ:  $\mathbb{C}[[x]]$  (кольцо формальных степенных рядов)

Операции:

$$1. A(x) \pm B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$2. c \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n, c - \text{const}$$

$$3. A(x) \cdot B(x) = (a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Константные ПФ:  $c = (c, 0, 0, \dots) \leftrightarrow C(x) = c$

Свойства операций:

$$1. (A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$$

$$2. A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$$

$$3. c \cdot A(x) = C(x) \cdot A(x), c - \text{const}$$

$$4. A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$$

$$5. A(x)(B(x) + C(x)) = A(x)B(x) + A(x)C(x)$$

$$6. (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x) = A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x))$$

ПФ  $B(x)$  обратная к  $A(x)$ , если  $A(x) \cdot B(x) = 1$ ,  $B(x) = A^{-1}(x)$

Пример:  $A(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

$$A(x) \cdot \overbrace{(1-x)}^{A^{-1}(x)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Свойства:

$$1. \frac{1}{A(x)} \cdot \frac{1}{B(x)} = \frac{1}{A(x) \cdot B(x)}$$

$$2. \frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + B(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

ПФ  $A(x)$  обратима  $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

**25 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница.**  
Подстановка нуля в производящую функцию,  
вычисление  $n$ -го коэффициента производящей функции  
с использованием производных.

**25.1 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница**

Формальная производная ПФ  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  – ПФ  $A'(x)$ :

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Свойства:

1.  $(A(x) \pm B(x))' = A'(x) \pm B'(x)$
2.  $(c \cdot A(x))' = c \cdot A'(x)$ ,  $c - \text{const}$
3.  $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$  – правило Лейбница

## 25.2 Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление $n$ -го коэффициента производящей функции с использованием производных.

Пусть  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  – ПФ:

$$\begin{cases} A(0) = a_0 \\ A'(0) = a_1 \\ A''(0) = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow A^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$

Преф. суммы  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ :

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots = A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

## 26 Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть  $S, T$  – мн-ва,  $S \cap T = \emptyset$

Пусть  $A(x)$  – ПФ неупорядоч. выборок из  $S$ ,  $B(x)$  – ПФ неупорядоч. выборок из  $T$ . Тогда  $A(x) \cdot B(x)$  – ПФ неупорядоч. выборок из  $S \cup T$

Примеры:



## 1. Бином Ньютона:

$\{a_1, \dots, a_n\} : \binom{n}{k}$  – способы выбрать  $k$  элементов

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \quad | \quad \{a_1, \dots, a_n\} \leftrightarrow \overbrace{\underbrace{\{a_1\}}_{1+x} \cup \dots \cup \underbrace{\{a_n\}}_{1+x}}^{(1+x)^n}$$

## 2. Кол-во салатов:

- Перец – 0 или 1
- Редиска – 0, 2, 4, ...
- Баклажан – любое
- Помидор –  $\leq 3$

Кол-во салатов из  $n$  овощей = ?

Перец:  $1 + x$

Редиска:  $1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$

Баклажан:  $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$

Помидор:  $1 + x + x^2 + x^3$

$\Downarrow$

Ответ на задачу – коэф.  $[x^n]$ :

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+x^3) &= \\ &= \frac{(1+x)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x^2)(1-x)} \end{aligned}$$

## 26.1 Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

- $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$
- $\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

**27** **Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами? Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.**

$(a_0, a_1, \dots)$  – линейное рекуррентное соотношение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами, если  $\exists c_1, \dots, \overbrace{c_k}^{\neq 0} : \forall n \geq 0 :$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} \dots + c_k a_n$$

Пример:  $F_n = 1 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2}$  – Фибоначчи порядка 2

Через  $c_1, \dots, c_k$  и  $a_0, \dots, a_{k-1}$  однозначно определяется  $a_n$

**27.1** **Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами?**

Теорема:  $A(x)$  – ПФ линейной рекуррентны порядка  $k$ . Тогда  $\exists$  многочлены  $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg P < k, \deg Q = k$ :

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

*Доказательство:*

Умножим  $A(x)$  на  $(c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k)$ :

$$\begin{aligned} A(x) \cdot c_1x &: a_0c_1x + a_1c_1x^2 + \dots + a_{k-1}c_1x^k + \dots \\ A(x) \cdot c_2x^2 &: a_0c_2x^2 + a_1c_2x^3 + \dots + a_{k-2}c_2x^k + \dots \\ &\vdots \\ A(x) \cdot c_kx^k &: a_0c_kx^k + \dots \end{aligned}$$

Коэфф. при  $[x^k] : c_1a_{k-1} + \dots + c_ka_0$  – рекурента Слагаемые с  $x^d, d < k$  –  $\bar{P}(x)$ :

$$\begin{aligned} A(x)(c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k) &= \bar{P}(x) + \sum_{t \geq k} b_tx^t = \\ &= A(x) + \overbrace{\bar{P}(x) - \sum_{t < k} b_tx^t}^{P(x)}, \deg P < k \\ &\quad \Downarrow \\ A(x) \underbrace{(-1 + c_1x + \dots + c_kx^k)}_{Q(x)} &= P(x) \end{aligned}$$

**27.2 Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.**

Пусть  $a_1, \dots, a_s$  – различные корни со степенью вхождения  $c_1, \dots, c_s$ .

Разложим ПФ на сумму дробей:

$$A(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{c_i} \frac{B_{i,j}}{(1 - a_ix)^j}$$

Тогда по обобщенному биному Ньютона:

$$[x^n] : \sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{-n}{j} \cdot (-a_i)^n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{n+j-1}{j-1} \cdot a_i^n \right)$$

## 28 Числа Фибоначчи: их производящая функция и явная формула (формула Бине).

Пусть ПФ Фибоначчи –  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$F(x) - F_0 - F_1 x = x(F(x) - F_0) + x^2 \cdot F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = F_0 + F_1 x - F_0 x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Разложим на сумму дробей:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}}_A - \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}}_B \right)$$

$$\begin{cases} A = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \\ B = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \end{cases} \Rightarrow F_n = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}$$

## 29 Правильные скобочные последовательности. Критерий того, что скобочная последовательность является правильной. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Правильные скобочные последовательности определяются следующим образом:

1.  $\emptyset$  – ПСП
2.  $P$  – ПСП  $\Rightarrow (P)$  – ПСП
3.  $P_1, P_2$  – ПСП  $\Rightarrow P_1 P_2$  – ПСП

### 29.1 Критерий того, что скобочная последовательность является правильной.

Последовательность из '(' и ')' – ПСП, если и только если

1. Кол-во '(' равно кол-ву ')'
2. Разность кол-ва '(' и кол-ва ')' для любого префикса неотрицательна

*Доказательство:*

$\Rightarrow$ : (индукция по построению)

$\Leftarrow$ : Полная индукция по длине слова:  $\forall$  слово такого вида – ПСП.

Переход ( $\forall k < n \rightarrow n$ ):

Рассмотрим префикс min длины  $k$ , на котором кол-во '(' равно кол-ву ')':

$(P_1)P_2$  – закрывающая скобка ')' на позиции  $k$

К  $\Pi_2$  применяется предположение индукции. На позиции  $k$  разность скобок равна 0  $\Rightarrow \forall i < k$  разность строго больше 0. Префикс  $\Pi_1$  – префикс исходной минус '('  $\Rightarrow$  в  $\Pi_1$  для каждого префикса разность неотрицательна и в  $\Pi_1$  равно кол-во '(' и ')'  $\Rightarrow \Pi_1$  – ПСП

$\Downarrow$

$$(\Pi_1)\Pi_2 - \text{ПСП}$$

Следствие:  $\forall$  ПСП представляется в виде  $(\Pi_1)\Pi_2$ , причем ед. образом

*Доказательство единственности:*

## 29.2 Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Пусть  $C_n$  – кол-во ПСП с  $n$  скобками '(':

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

*Доказательство:*

$$\Pi = \underbrace{(\Pi_1)}_k \underbrace{\Pi_2}_{n-k-1}^n$$

## 30 Числа Каталана: их производящая функция и явная формула

Числа Каталана  $C_n$ :

- Кол-во ПСП длины  $2n$
- Кол-во способов соединить  $2n$  точек на окружности непересекающимися хордами

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

ПФ чисел Каталана:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

*Доказательство:*

$$C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$xC^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$xC^2(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots = C(x) - 1$$

$$\Downarrow$$

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$$

Решим уравнение:

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = x \left( C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 - \frac{1}{4x} + 1 =$$

$$= x \left( C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 + \frac{4x - 1}{4x} = 0$$

$$4x^2 \left( C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 = 1 - 4x$$

$$\left( \underbrace{2xC(x) - 1}_{Y(x)} \right)^2 = 1 - 4x$$

$$Y^2(x) = 1 - 4x$$

$$Y(x) = \pm(2xC(x) - 1)$$

Так как  $C(0) = 1 \Rightarrow Y(x) = -(2xC(x)) - 1$ :

$$2xC(x) - 1 = -\sqrt{1 - 4x}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

### 30.1 Явная формула

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} 1 - (1 - 4x)^{1/2} &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} (-4x)^k = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(-1)(-3) \dots (-(2k-3))}{k! \cdot 2^k} (-4x)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \cdot 4^k \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)! \cdot 4^k}{k! \cdot 2^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \binom{2k-2}{k-1} x^k \\ &\quad \Downarrow \\ C(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \\
&\quad \Downarrow \\
C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$