Коллоквиум 2

Содержание

1 Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

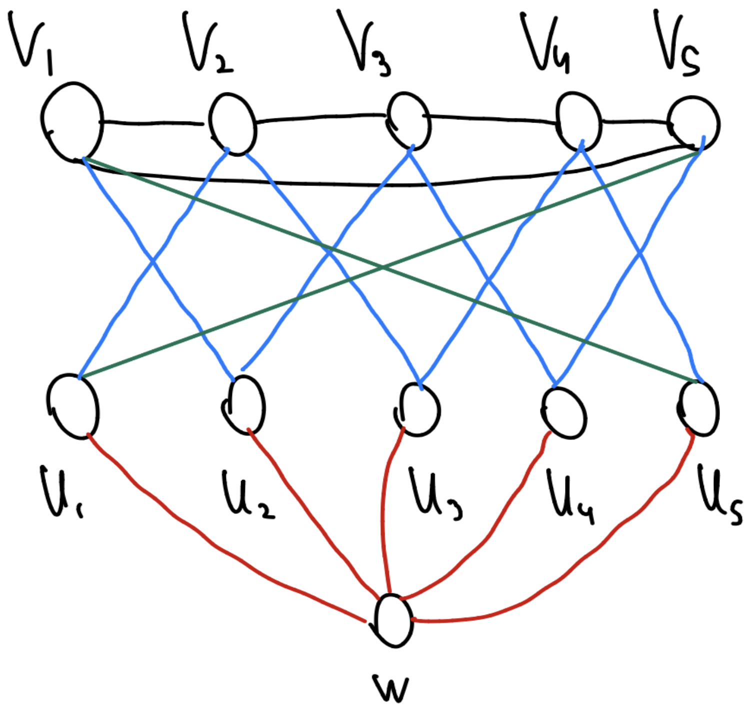
1.1 Мыцельскиан графа.

Мыцельскиан графа G – граф $\mu(G) = (V', E')$:

$V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n, w\}$

$E' = E \cup \{(v_i, u_j) \,|$ если $(v_i, v_j) \in E\} \cup \{(w, u_i) \,| i = 1, \dots, n\}$

Пример: G – цикл длины 5 (черные ребра – исходные):



1.2 Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Пусть $G_2 = K_2$, $G_3 = \mu(G_2), \dots, G_t = \mu(G_{t-1})$

Тогда G_t – граф без треугольников с $\chi(G_t) = t$

Доказательство:

Полная индукция по t:

1) G_t без треугольников:

Вершина w не может быть в треугольнике, также не могут быть две вершины u_i, u_j в треугольнике (по опр.). По предположению индукции треугольника v_i, v_j, v_k тоже не может быть:

Пусть v_i, v_j, u_k – треугольник $\Rightarrow k \neq i, j$:

$$\begin{cases} v_j \to u_k \Rightarrow \exists v_j \to v_k \\ v_i \to u_k \Rightarrow \exists v_i \to v_k \end{cases} \Rightarrow \text{ есть треугольник } v_i, v_j, v_k \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) а) $\chi(G_t) \leq t$:

$\chi(G_{t-1}) = t - 1$. Красим u_i в цвет v_i. w красим в новый цвет $\Rightarrow$ покрасили в t цветов.

б)$\chi(G_t) \geq t$:

От противного: $\chi(G_t) = t - 1$:

Пусть раскрасили в $t-1$ цвет и w имеет цвет $t-1$. Тогда u_i раскрашены в цвета $(1, \ldots, t-2)$. Перекрашиваем v_i:

$$\text{цвет } v_i = \begin{cases} \text{прежний, если он не } t-1 \\ \text{цвет } u_i\text{, если он } t-1 \end{cases}$$

Вершины v_i цвета $t-1$ найдутся по предположению индукции.

Тем самым G_{t-1} раскрашен в $t-2$ цвета и для подграфа G_{t-1} раскраска правильная:

(Иначе были $v_i \leftrightarrow v_j$ с одинаковым цветом x, поменяли цвет одной из вершин $\Rightarrow$ раньше в v_i был цвет $t-1$ но поменяли на цвет x который у u_i. Между u_i и v_j есть ребро $\Rightarrow$ противоречие (они одного цвета до изменений цветов))

Получается мы раскрасили G_{t-1} в $t-2$ цвета $\Rightarrow$ противоречие

2 Паросочетания и вершинные покрытия в графе. Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.

Паросочетание в G – $M \subseteq E : \forall m_1, m_2 \in E : m_1 \cap m_2 = \emptyset$

Вершинное покрытие в G – $U \subseteq V : \forall \{a, b\} \in E : (a \in U) \vee (b \in U)$

В произвольном графе:

$$|M_{max}| \leq |U_{min}|$$

Если достигается равенство $\Leftrightarrow \exists$ парсоч. и мин. покр равного размера
Доказательство:

Пусть M' – парсоч, U' – вершин. покрытие и $|M'| = |U'|$:

$$|M'| \leq |M_{max}| \leq |U_{min}| \leq |U'|$$

$$\Downarrow$$

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

Чтобы покрыть все ребра из M нужно как минимум $|M|$ вершин

2.1 Теорема Кёнига

В двудольном графе $G = (L \cup R, E)$ выполняется равенство:

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

Доказательство:

Рассмотрим парсоч. M_{max}.

Строим $U_{min} \subseteq V$: $\forall \{x, y\} \in M_{max}$:

$$\begin{cases} y \in U_{min}, \text{ если } \exists \text{ черед. путь отн. } M_{max} \text{ оканч в } y \\ x \in U_{min}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Покажем, что U_{min} – вер. покрытие:

Пусть $\{a, b\} \in E \setminus M_{max}$:

- a не покрыто M_{max}:

  1. b не покрыто $M_{max} \Rightarrow$ противоречие (можно добавить в M_{max})
  2. b покрыто $M_{max} \Rightarrow$ мы уже выбрали b ($a - b$ черед. путь)

- a покрыто $M_{max} \Rightarrow \{a, b'\} \in M_{max} \Rightarrow$ один из концов был выбран Пусть $b' \in U$ (иначе все покрыто) $\Rightarrow \exists$ черед. путь $a' \in L \to b'$. Тогда путь $a' \to b' - a - b$ – чередующийся:

  В b' пришли по ребру не из $M_{max} \Rightarrow$ чередование не нарушилось

  Ребра $\{a, b\}, \{a, b'\}$ не встречались ранее: (если возьмем такой путь min длины) т.к. путь не был бы наименьшим если мы бы пришли в b'. Если ребро $\{a, b\}$ было, то мы не могли прийти в a по ребру не из $M_{max} \Rightarrow$ побывали бы в b'

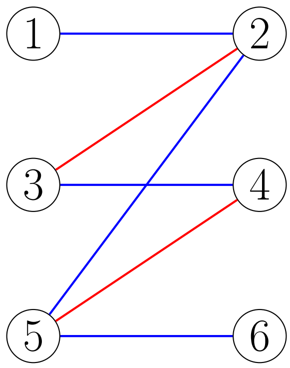
  1. b не покрыто $M_{max} \Rightarrow$ этот путь увеличивающий (противоречие)
  2. b покрыто $M_{max} \Rightarrow \{a'', b\} \in M_{max}$. Тогда $b \in U$: $\exists$ черед. путь $a' \to b' - a - b$

3 Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.

Пусть $G = (L \cup R, E)$ – двудольный граф и M – паросочетание.

Чередующийся путь относительно M – путь (без повторений по ребрам), начинающийся в $a \in L$ не покрытой M и в котором ребра чередуются по принадлежности M ($\notin M, \in M, \ldots$)

Увеличивающий путь относительно M – чередующийся путь из a в b: b тоже не покрыта M



1-2-3-4 – чередующийся путь

1-2-3-4-5-6 – увеличивающийся путь

Если относительно M есть увеличивающийся путь $\Rightarrow$ M – не максимальное паросочетание

4 Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла

4.1 Теорема Холла

В двудольном графе $G = (L \cup R, E)$:

$$\exists \text{ паросочетание размера } |L| \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq L : |N(S)| \geq |S|}_{\text{условие Холла}}$$

Для $S \subseteq L : N(S) = \{y \in R \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$

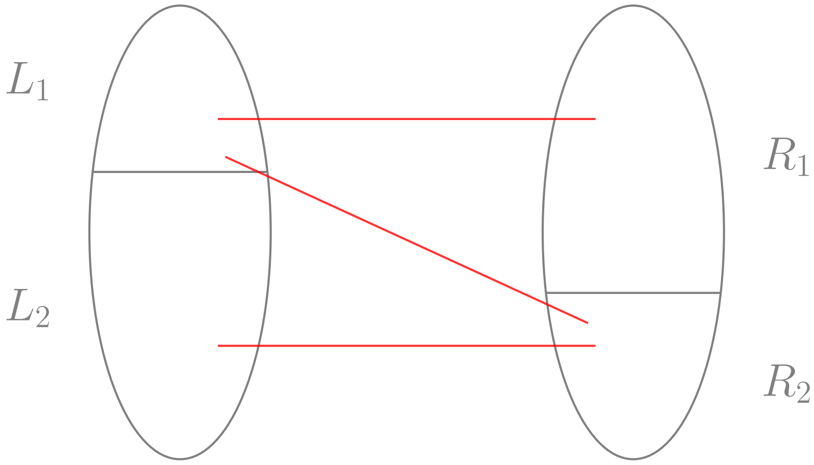
Доказательство:

1) $\Rightarrow$: $\forall S \subseteq L$ $N(S)$ содержит правые концы ребер из парсоча

2) $\Leftarrow$:

Из условия Холла $|R| \geq |L|$. По т. Кёнига, $|M_{max}| = |U_{min}|$

Рассмотрим U_{min}:



$U_{min} = L_1 \cup R_2$. Нет ребер между L_2 и R_1.

Применим Холла для $S = L_2 \Rightarrow N(S) \subseteq R_2 \Rightarrow |R_2| \geq |N(L_2)| \geq |L_2|$

$$\Downarrow$$

$$|U_{min}| = |L_1| + |R_2| \geq |L_1| + |L_2| = |L|$$

При этом L тоже вершин. покрытие $\Rightarrow$ $|U_{min}| = |L|$ $\Rightarrow$ $\exists M_{max}$: $|M_{max}| = |L|$

5 Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея

Размер наибольшей клики в G – $\omega(G)$

Размер наибольшего нез. мн-ва в G – $\alpha(G)$

Пусть $n, k \geq 1 : R(n, k)$ – наименьшее N такое, что $\forall G$ на N вершинах найдется либо клика размером k, либо нез. мн-во размера n

Свойства:

- $R(n, k) = R(k, n)$ (дополнение $\overline{G}$)
- $R(1, k) = 1$
- $R(2, k) = k$

5.1 Теорема Рамсея

$\forall n, k \geq 2 : R(n, k)$ – конечно

$$R(n, k) \leq R(n-1, k) + R(n, k-1)$$

Доказательство:

Индукция по $(n + k)$:

Переход $(n + k - 1) \to (n + k)$:

Пусть $R(n-1, k) + R(n, k-1) = N$. Рассмотрим граф G на N вершинах:

Возьмем $\forall v \in G$: $deg(v) = x, x + y = N - 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq R(n-1, k) \\ y \geq R(n-1, k) \end{array}\right.$

1) $x \geq \overbrace{R(n-1, k)}^{\text{для } G_1} \Rightarrow$ в G_1 найдется или клика разм. $(n-1)$, или нез. мн-во разм. k:

Если нез. мн-во размером k, то все получилось. Если клика размером $(n-1)$, то v соединена со всеми вершинами в $G_1 \Rightarrow$ получилась клика размером n

Второй случай аналогично

Верхняя оценка:

$$R(n,k) \leq \binom{n+k-2}{n-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

Доказательство:

Индукция по $(n+k)$:

Имеем:

$$R(n,k) \leq R(n-1,k)+R(n,k-1) \leq \binom{n-1+k-2}{n-2}+\binom{n+k-1-2}{n-1} =$$

$$= \binom{n+k-3}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-1}$$

6 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок. Утверждение о связи строгого и нестрогого порядков.

Пусть $A \neq \emptyset$ – мн-во:

Отношение R на A является отношением **строгого** частичного порядка, если:

1. $\neg aRa$ – Иррефлексивность
2. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Отношение R на A является отношением **нестрогого** частичного порядка, если:

1. aRa – Рефлексивность
2. $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ – Антисимметричность

3. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Линейный порядок – частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы

6.1 Связь строгого и нестрогого порядков

Из строгого порядка можно получить нестрогий и наоборот:

1. Пусть $\leq$ – нестрогий порядок. Тогда

$$< := \leq \setminus \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Доказательство:

(a) $\neg\, aRa$

(b) Пусть $a < b \wedge b < c \Rightarrow a \neq b, b \neq c \Rightarrow a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow a < c \ (a \neq c)$

2. Пусть $<$ – строгий порядок. Тогда

$$\leq := < \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Доказательство:

(a) $a \leq a$

(b) Пусть $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(c) Пусть $a \leq b \wedge b \leq c$. Если не все попарно различны, то очев Иначе $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c \Rightarrow a \leq c$

7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покоординатный порядок, лексикографический порядок.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – мн-во с заданным отн. порядка: $(A, <)$ или $(A, \leq)$

Пример:

1. $(\mathbb{N}, |)$ $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$
2. $(\mathbb{Z}, |)$ – не ЧУМ $(-1 \mid 1) \wedge (1 \mid -1) \not\Rightarrow 1 = -1$
3. $(2^A, \subseteq)$ – ЧУМ

7.1 Операции с ЧУМ

1. Сумма порядков:

   Пусть $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ – ЧУМ. Сумма $A + B$ – $A \sqcup B$:

   - Внутри A порядок $\leq_A$
   - Внутри B порядок $\leq_B$
   - Все элементы из A меньше всех элементов из B

2. Покоординатный порядок:

$$(A \times B, \leq) : (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

3. Лексикографический порядок:

$$(A \times B, <) : (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \ \vee \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 <_B b_2 \end{cases}$$

8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства. Примеры порядков: с бесконечным числом минимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.

Пусть $(P, \leq_P)$ – ЧУМ:

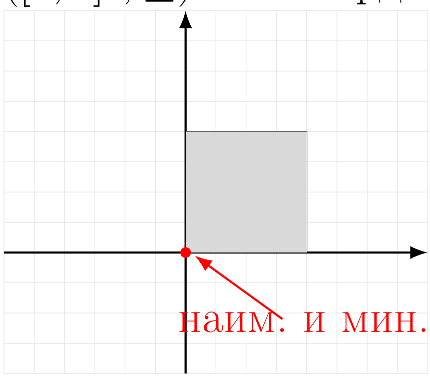
$$\begin{cases} a \in P \text{ – минимальный, если } \nexists b \in P : b < a \\ a \in P \text{ – наименьший, если } \forall b \in P : a \leq b \\ a \in P \text{ – максимальный, если } \nexists b \in P : b > a \\ a \in P \text{ – наибольший, если } \forall b \in P : a \geq b \end{cases}$$

Наименьший/наибольший – единственный, если существует

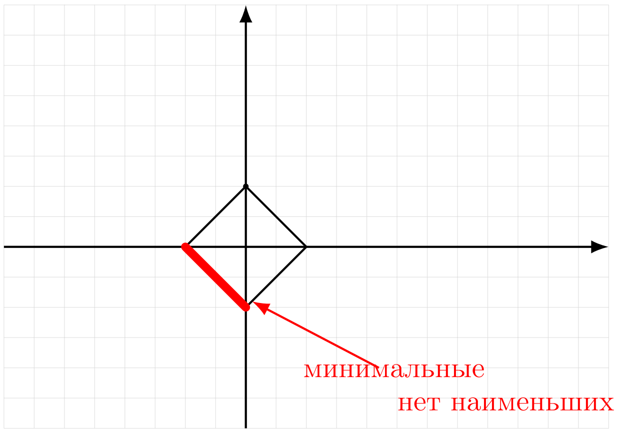
Наименьший/наибольший является минимальным/максимальным

Примеры:

- $(\mathbb{Z} \cup \{*\}, \ \leq \ )$: минимальный – $*$, наименьшего – нет
- $([0,1]^2, \leq)$ – покоординатный:



- $(\{|x| + |y| = 1\}, \leq)$ – покоординатный:



9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

9.1 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ – ЧУМ. $P \simeq Q$, если $\exists$ биекция $h : P \to Q$:

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow h(x) \leq_Q h(y)$$

Примеры:

- $(\mathbb{N}, \leq) \simeq (\{2, 4, 6, \dots\}, \leq)$ – биекция $f(n) = 2n$
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{R}, \leq)$ – нет биекции между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

Инварианты:

- Мощность (из счетного нет биекции в континуум и т.д.)
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{Z}, \leq)$ – $\mathbb{Q}$ – плотный, $\mathbb{Z}$ – нет
- $([0, 1], \leq) \not\simeq ((0, 1), \leq)$ – в интервале нет наименьшего/наибольшего
- Наличие непосредственных предшественников/последователей

9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме

Если $\varphi : P \to Q$ – изоморфизм $P, Q \Rightarrow \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

Доказательство:

1) $a \leq c \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(c) \leq \varphi(b)$

2) $\varphi(a) \leq y \leq \varphi(b) \Rightarrow a \leq \varphi^{-1}(y) \leq b$

9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

Плотный порядок: $\forall a < b : \exists c : a < c < b$

Теорема: Любые два счётных плотных линейных порядка без наим/наиб элемента изоморфны

Доказательство:

Построим явную биекцию. Пронумеруем элементы:

$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$

Строим изоморфизм $\varphi : P \to Q$:

φ_1: $p_1 \to q_1$

$\vdots$

$$\begin{array}{llllllllll} \varphi_n : & p_{i_1} & <_P & p_{i_2} & <_P & \ldots & <_P & p_{i_{n-1}} & <_P & p_{i_n} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \ldots & & \downarrow & & \downarrow \\ & q_{i_1} & <_Q & q_{i_2} & <_Q & \ldots & <_Q & q_{i_{n-1}} & <_Q & q_{i_n} \end{array}$$

Рассмотрим $p_k \notin \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$ с $\min k$:

1. Если p_k между двумя p_{i_m} и $p_{i_{m+1}}$, то из за плотности $\exists q_k : q_{j_m} < q_k < q_{j_{m+1}}$. Переведем $p_k \to q_k$
2. Если он меньше p_{i_1} или больше p_{i_n} – из за отсутствия наибольшего $\exists q_k$ который $< q_{j_1}$ или $> q_{j_n}$ соответственно

Но такое отображение может быть не сюръективным. Чтобы это исправить, нужно после определения образа p_k рассматривать $q_{k'} \notin \{q_{j_1}, \dots, q_{j_n}, q_k\}$ с $\min k'$. Ищем подходящий p'_k аналогично

После итерации:

$$\begin{cases} p_k \to q_k \\ p'_k \to q'_k \end{cases} \quad \text{переходим } \varphi_n \text{ до } \varphi_{n+1}$$

Теперь для каждого элемента найдется шаг когда он будет покрыт

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \varphi_1 \cup \dots \text{ – биекция}$$

10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств. Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Бесконечно убывающая цепь в ЧУМ $(A, <)$ – последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

10.1 Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Для ЧУМ $(P, \leq)$ следующие определения эквивалентны:

1. P – фундированное $(\forall S \subseteq P : \exists\, min(S))$
2. $\nexists$ бесконечно убывающих цепей
3. Для P справедлив принцип индукции:

   Для $\forall$ семейства подмножеств:

$$\{A(p) \mid p \in P\}$$

$$\forall p \in P \ (\forall q < p : A(q) = 1) \Rightarrow A(p) = 1$$

База индукции – проверить утверждения на минимальных элементах

Доказательство эквивалентности:

$\neg$ 1) $\Rightarrow \neg$ 2): Пусть $\exists p_1 > p_2 > \ldots \Rightarrow x = \{p_1, p_2, \ldots\}$ – нет мин. элемента

$\neg$ 2) $\Rightarrow \neg$ 1): $\forall X \subseteq P, X \neq \emptyset$: в X нет мин. эл.

$$p_1 \in X \Rightarrow \exists p_2 < p_1$$

$$p_2 \in X \Rightarrow \exists p_3 < p_2$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\exists p_1 > p_2 > \ldots$$

1) $\Rightarrow$ 3):

$X = \{p \in P \mid A(p) = 0\}$. Пусть $X \neq \emptyset$:

$$\exists p' \in X, p' = \min(X)$$

Тогда $\forall q < p' : A(q) = 1 \Rightarrow A(p') = 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow X = \emptyset$

3) $\Rightarrow$ 1):

Пусть $X \subseteq P, X \neq \emptyset$. Пусть в X нет мин. эл:

$$A(p) = (p \notin X)$$

$$\forall p \in P (\forall q < p : q \notin X) \Rightarrow \overbrace{p \notin X}^{\text{верно, иначе } \exists \min(X)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p \in P : p \notin X \Rightarrow X = \emptyset \Rightarrow \text{противоречие}$$

11 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.

$(P, \leq)$ – ЧУМ

11.1 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах

Цепь в P – $C \subseteq P : \forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$

Антицепь в P – $A \subseteq P : \forall x \neq y \in A : x, y$ – несравнимы

$|A \cap C| \leq 1$ – (если как минимум 2 элемента есть, то они не могут быть сравнимы и несравнимы одновременно)

11.2 Теорема Мирского

Наименьшее кол-во антицепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе

Доказательство:

Пусть P – ЧУМ, l – макс. длина цепи.

Покажем, что P разбивается на l антицепей

Пусть $min\,X = \{x \in X \mid x$ – мин. в $X\}$

Возьмем $P_1 = min\,P$:

$$P_2 = min\,(P \setminus P_1)$$

$$P_3 = min\,(P \setminus (P_1 \cup P_2))$$

$$\vdots$$

$$P_k = min\,(P \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_{k-1}))$$

$$\Downarrow$$

$$P = P_1 \sqcup \ldots \sqcup P_m$$

Каждое P_i – антицепь. Докажем, что $m = l$:

Построим в P цепь размера m. Рассмотрим $\forall p_m \in P_m \Rightarrow \exists p_{m-1} \in P_{m-1} : p_m > p_{m-1}$:

$$p_m > p_{m-1} > \ldots > p_r$$

$$min\,(P_m \sqcup \ldots \sqcup P_r \sqcup P_{r-1}) = P_{r-1}$$

$$p_r \text{ не минимальный} \Rightarrow \exists p_{r-1} < p_r$$

$$p_{r-1} \in P_{r-1} \text{ (иначе 2 минимума сравнимы} \Rightarrow \text{противоречие)}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Продолжили до конца и получили цепь в } P \text{ размером } m$$

$$\Downarrow$$

$$m \leq l$$

Но мы разбили множество на m антицепей $\Rightarrow l \geq m$

$$\Downarrow$$

$$m = l$$

11.3 Теорема Дилуорса

Наименьшее кол-во цепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе

12 LYM-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

Булев куб $\mathbb{B}^n = \{0,1\}^n$ – ЧУМ всех подмножеств $\{1, 2, \dots, n\}$ по включению

$$(a_1, \dots, a_n) \le (b_1, \dots, b_n), \quad 0 < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i : a_i \le b_i$$

Вес $|a|$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ – колво единиц в a

Уровни $\mathbb{B}^n : B_0, B_1, \dots, B_n,\ B_k = \{a \in \mathbb{B}^n \mid |a| = k\}$

Макс. размер цепи в $\mathbb{B}^n$ – $(n+1)$

Доказательство:

LYM неравенство: Пусть A – а/ц в $\mathbb{B}^n$, $a_k = |A \cap B_k|$. Тогда:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{|B_k|} \le 1$$

Теорема Шпернера: макс. размер антицепи в $\mathbb{B}^n$ – $\binom{n}{[n/2]}$

Доказательство:

13 Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

13.1 Граф сравнимости частично упорядоченного множества.

Пусть $(P, \leq)$ – ЧУМ. Граф сравнимости P – простой неор. граф G:

$$G = (V, E), V = P : (x, y) \in E \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < y \\ x > y \end{array}\right.$$

13.2 Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

Граф G совершенный, если для любого индуцированного подграфа:

$$\forall H \subseteq G : \chi(H) = \omega(H)$$

Граф является совершенным, если он не содержит ни C_{2k+1}, ни $\overline{C_{2k+1}}$ в качестве индуцированного подграфа при $k > 1$

Граф G совершенный $\Leftrightarrow$ граф $\overline{G}$ совершенный

Для любого конечного ЧУМ P его граф сравнимости G:

$$G \text{ и } \overline{G} \text{ – совершенные}$$

14 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности. Пошаговое задание распределения, дерево событий

Вероятностное пространство – $(\underbrace{\Omega}_{\text{эл. исходы}}, \underbrace{P}_{\text{ф-я вероятности}})$

Функция вероятности/вероятностное распределение – $P : \Omega \to [0, 1]$:

$$\begin{cases} 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1 \end{cases}$$

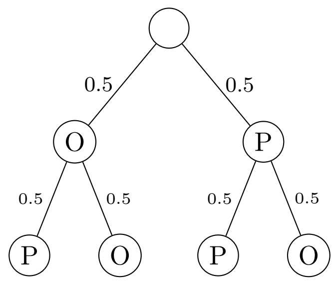
Событие A – подмн-во $A \subseteq \Omega$

Вероятность события A – $\sum P(\omega_i),\ \omega_i \in A$

Свойства вероятности:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Пошаговое задание распределения:



Если эксперимент состоит из нескольких шагов, распределение задаётся через дерево событий.

На каждом уровне дерева — возможные исходы текущего шага с условными вероятностями.

Вероятность пути в дереве – произведение вероятностей вдоль рёбер пути.

Вероятность исхода – вероятность соответствующего пути от корня до листа.

15 Формула включений-исключений для вероятностей. Задача о беспорядках.

15.1 Формула включений-исключений для вероятностей

$(\Omega, P) : A_1, \ldots, A_n :$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

15.2 Задача о беспорядках

Вероятностное пространство Ω, $P = \dfrac{1}{n!}$ (все равновероятны)

Беспорядок $(p_1, \ldots, p_n)$ – $\forall i : p_i \neq i$

Пусть $Y_i = \{p \in S_n \mid p_i = i\}$ – i-ый элемент на своем месте

$P(p$ не беспорядок$) \Leftrightarrow \exists i : p \in Y_i \Leftrightarrow P(Y_1 \cup \ldots \cup Y_n)$

$P(Y_1 \cap \ldots \cap Y_k) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$

$P(\geq 1$ неподвижной точки$) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

16 Условные вероятности, независимые события. Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)

Условная вероятность $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Условная вероятность – вероятность A после B

События A и B независимые, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Независимость $A_1, \dots, A_n$ в совокупности:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Попарная независимость $A_1, \dots, A_n$:

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Попарная независимость не означает независимость в совокупности

Пример:

Подбросим 2 монеты. Пусть событие A – первая монета О, B – вторая монета О, C – монеты выпали одинаковой стороной:

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$

Попарная независимость:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/4, & \text{выпало 'ОО'} \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/4, & \text{2-ая 'О'} \Rightarrow \text{1-ая 'О'} \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/4, & \text{1-ая 'О'} \Rightarrow \text{2-ая 'О'} \end{cases}$$

Независимость в совокупности:

$$P(A \cap B \cap C) =^{?} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$P(A \cap B \cap C)$ – первая и вторая 'О' и они равны

$P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$, выпало 'ОО'

$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.

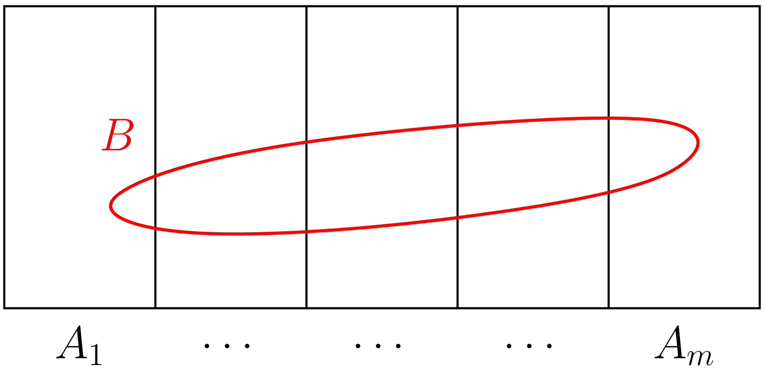
17.1 Формула полной вероятности

Пусть $\Omega = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} A_i,\ P(A_i) > 0$

Тогда для любого события B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Графическая интерпретация:



17.2 Формула Байеса

Для любых событий $A, B : P(A) > 0, P(B) > 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Пример с тестом на выявление болезни:

Предположим, что некоторый тест правильно предсказывает наличие или отсутствие определенного заболевания с вероятностью 0,95 (если человек действительно болен, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,95 и наоборот)

1% населения имеет это заболевание. Предположим, что чел X прошел тестирование и получил положительный результат. Какова вероятность того, что X действительно болен?

Пусть события A – X здоров, $\overline{A}$ – X болен, B – тест положительный:

$$P(B|\overline{A}) = 0.95, P(\overline{A}) = 0.01$$

$$P(B|A) = 0.05, P(A) = 0.99$$

По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0.059$$

Тогда ответ (вероятность болезни после теста):

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.059} \simeq 0.161$$

Несмотря на положительный тест, вероятность наличия болезни 16%

18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Дисперсия случайной величины.

Пусть (Ω, P) – вероятностное пространство:

Случайная величина – функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}, f(w_i) = a_i \in \mathbb{R}$$

18.1 Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания.

Мат. ожидание f – $\mathbb{E}(f) = p_1 \cdot f(w_1) + \ldots + p_n \cdot f(w_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot f(w_i)$

Свойства:

1. $f = c \Rightarrow \mathbb{E}(f) = c$, c – const

2. $\mathbb{E}(f+g) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)$ – линейность

Доказательство:

$$\mathbb{E}(f+g) = \sum_{i=1}^{n} p_i(f(w_i) + g(w_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i f(w_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i g(w_i) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)$$

3. $\mathbb{E}(f \cdot c) = c \cdot \mathbb{E}(f)$, c – const

4. A – событие, $I_A(w_i) = \begin{cases} 1, & w_i \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(I_A) = \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot I_A(w) = \sum_{w \in A} P(w) = P(A)$$

5. $\mathbb{E}(f) = \sum\limits_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x)$

Задача о днях рождения

Пусть есть $n = 28$ людей. $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$ равновероятно

f – кол-во пар человек, рожденных в один день. $\mathbb{E}(f) =?$

$$f = \sum_{i<j} g_{ij}, \quad g_{ij} = \begin{cases} 1, & i, j \text{ в один день} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i<j} \mathbb{E}(g_{ij}) =$$

$$= \sum_{i<j} P(i \text{ и } j \text{ в один день})$$

$$P(i \text{ и } j \text{ в один день}) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365} \Rightarrow \mathbb{E}(f) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{365} = \frac{378}{365} > 1$$

18.2 Дисперсия случайной величины.

Дисперсия f – $\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) \geq 0$

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2$$

Доказательство:

$$\mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) = \mathbb{E}(f^2 - 2 \cdot f \cdot \mathbb{E}(f) + (\mathbb{E}(f))^2) =$$

$$= \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(f) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(f))^2) =$$

$$= \mathbb{E}(f^2) - 2(\mathbb{E}(f))^2 + (\mathbb{E}(f))^2 = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2$$

19 Неравенства Маркова и Чебышёва.

19.1 Неравенство Маркова

Пусть f – **неотрицательная** случ. величина, $\alpha > 0$:

$$P(f \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(f)}{\alpha}$$

Доказательство:

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x)$$

$$\mathbb{E}(f) = \underbrace{\sum_{x<\alpha} x \cdot P(f = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(f) \geq \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x)$$

$$\sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) \geq \sum_{x \geq \alpha} \alpha \cdot P(f = x) = \alpha \cdot P(f \geq \alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(f) \geq \alpha \cdot P(f \geq \alpha)$$

19.2 Неравенство Чебышёва

Пусть f – случ. величина, $\alpha > 0$:

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{D}(f)}{\alpha^2}$$

Доказательство:

Пусть $g = (f - \mathbb{E}(f))^2 \geq 0$:

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) = \underbrace{P(g \geq \alpha^2) \leq \frac{\overbrace{\mathbb{E}(g)}^{\mathbb{D}(f)}}{\alpha^2}}_{\text{по Маркову}}$$

20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Случайные величины f, g независимые, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : P(f = x \wedge g = y) = P(f = x) \cdot P(g = y)$$

Случ. величины $f_1, \ldots, f_n$ независимы $\Leftrightarrow$ независимы в совокупности

20.1 Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Пусть f, g – независимые случ. величины.

Мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(f \cdot g) = \mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g)$$

Доказательство:

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x), \mathbb{E}(g) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(g = x),$$

$$\mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(f = x) \cdot \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot P(g = y) =$$

$$= \sum_{x, y \in \mathbb{R}} x \cdot y \cdot \overbrace{P(f = x) \cdot P(g = y)}^{P(f = x \cap g = y)} = \mathbb{E}(f \cdot g)$$

Дисперсия:

$$\mathbb{D}(f + g) = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)$$

Доказательство:

$$\mathbb{D}(f + g) = \mathbb{E}((f + g)^2) - (\mathbb{E}(f + g))^2 =$$

$$= \mathbb{E}(f^2 + 2fg + g^2) - (\mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g))^2 =$$

$$= \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g) + \mathbb{E}(g^2) - (\mathbb{E}(f))^2 - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g) - (\mathbb{E}(g))^2 =$$

$$= \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2 + \mathbb{E}(g^2) - (\mathbb{E}(g))^2 = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)$$

21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

21.1 Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Подбросим $n = 2k$ раз монету. Чему равна вероятность выпадения ровно $\frac{n}{2}$ орлов?

$$P\left(=\frac{n}{2}\text{ орлов}\right) = \binom{n}{n/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n\cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

22 Оценки для биномиальных коэффициентов.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{n\cdot e}{k}\right)^k$$

Доказательство:

1) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \overbrace{\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}}^{k} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k$

При $a \ge b \ge 1 : \frac{a}{b} \le \frac{a-1}{b-1}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \ge 1 + x$

Покажем, что $\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \le \left(\frac{n\cdot e}{k}\right)^k$

Фикс. $t \in (0;1)$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot t^{i-k} = \frac{1}{t^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot t^i \leq \frac{1}{t^k} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot t^i =$$

$$= \frac{1}{t^k}(1+t)^n$$

При $t = \frac{k}{n}$: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n}_{\to e} \Rightarrow \left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot e^k = \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$

23 Вероятностный метод: общая формулировка и оценка объединения. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

Пусть вер. пространство (Ω, P), $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f) = c$

Лемма:

$$\begin{cases} \exists w_{min} \in \Omega : f(w_{min}) \leq c \\ \exists w_{max} \in \Omega : f(w_{max}) \geq c \end{cases}$$

Доказательство:

$$c = \mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(w_i)$$

От противного: $\forall w : f(w) > c$:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot c < \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(w_i)$$

$$c < c$$

Противоречие $\Rightarrow \exists w : f(w) \leq c$

23.1 Пример применения вероятностного метода для поиска разреза в графе величины более половины числа ребер

Пусть $G = (V, E)$ – граф. Тогда $\exists$ разрез $S \subseteq V$: $|S| \geq \dfrac{|E|}{2}$

Доказательство:

Ω – все подмножества n вершин ($|\Omega| = 2^n$). Все равновероятно

Пусть $f(S) = |E(S, V \setminus S)|$ – случ величина

$\mathbb{E}(f) = \sum\limits_{e \in E} \mathbb{E}(I_e)$:

$$I_e = \begin{cases} 1, \text{ если } e \in E(S, V \setminus S) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(I_e) = P(e \in E(S, V \setminus S)) = 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ (все состояния вершин на концах ребра)

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}(f) = \frac{|E|}{2}$$

$$\Downarrow$$

По лемме существует исход $S \in \Omega$ для которого $f(S) \geq \mathbb{E}(f)$

Оценка объединения:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

23.2 Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

$$R(k, k) \leq \binom{2k-1}{k-1} < 2^{2k-2}$$

$$\left[\frac{k \cdot 2^{k/2}}{2e}\right] < R(k, k), \quad \text{при } k \geq 3$$

Доказательство:

Построим граф на $n = \left[\dfrac{k \cdot 2^{k/2}}{2e}\right]$ вершинах, в котором нет клик и нез. мн-ва размера k

Ω – все графы на n вершинах ($|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$). Все графы равновероятны

Для $W \subseteq \{1, \ldots, n\}, |W| = k$: A_w = 'W – клика', B_w = 'W – нез. мн-во':

$P(A_w) = P(B_w) = \dfrac{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}}$ (фикс. ребра между k вершинами)

$$P(\text{в } G \text{ есть клика/нез. мн-во размера } k) = P(\bigcup_{|W|=k} (A_w \cup B_w)) \leq$$

$$\leq \sum_{|W|=k} P(A_w) + P(B_w) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Подставляем n:

$$\left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{k \cdot 2^{k/2} \cdot e}{2e \cdot k}\right)^k \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} =$$

$$= 2^{k^2/2 - k + 1 - k(k-1)/2} = 2^{1-k/2} < 1 \text{ при } k \geq 3$$

$$\Downarrow$$

$\exists G$ в дополнении события, такой что нет клики/нез. мн-ва размера k

24 Теорема Эрдёша о существовании графа со сколь угодно большим хроматическим числом и сколь угодно большим обхватом: выбор вероятностного пространства, план доказательства, формулировки необходимых лемм.

Обхват графа G: $S(G)$ – мин. длина цикла в G

Теорема Эрдёша: $\forall k \in \mathbb{N}:\ \exists$ граф G с $S(G) > k, \chi(G) > k$

Доказательство:

Используем модель Эрдёша-Реньи случайных графов $G(n, p), p \in [0; 1]$

Граф на n вершинах, ребро независимо проводится с вероятностью p

Пусть $p = \dfrac{\ln n}{n}$:

Лемма 1: $P\left(\alpha(G) \geq \dfrac{n}{2k}\right) \to 0, n \to \infty$:

Пусть $r = \lceil \dfrac{n}{2k} \rceil$:

$$P\left(\alpha(G) \geq r\right) = P\Big(\bigcup_{X, |X|=r} (X \text{ – нез. мн-во})\Big) \leq \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{ne}{r}\right)^r \cdot (1-p)^{r(r-1)/2} = \left(\frac{ne}{r}(1-p)^{(p-1)/2}\right)^r$$

Покажем, что $\dfrac{ne}{r}(1-p)^{(p-1)/2} \to 0$:

$$\frac{ne}{r}(1-p)^{(p-1)/2} \leq \frac{ne}{r}e^{-p\cdot(r-1)/2} \leq 2ke \cdot e^{-p\cdot(r-1)/2} \leq$$

$$\leq 2ke \cdot e^{-p\cdot r/4} \leq 2ke \cdot n^{-1/8k} \to 0$$

Лемма 2: $X(G)$ – колво циклов длины $\leq k$ в G. Тогда

$$P\left(X(G) \geq \frac{n}{2}\right) \to 0, n \to \infty$$

Количество циклов на i вершинах: $\dfrac{i!}{2i} = \dfrac{(i-1)!}{2}$, вероятность – p^i

$$\mathbb{E}(X(G)) = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \cdot \frac{(i-1)!}{2} \cdot p^i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{2i} p^i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} (np)^i \leq (k-2)(np)^k$$

По неравенству Маркова:

$$P\left(X(G) \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X(G))}{n/2} \leq (k-2)\frac{(np)^k}{n/2} = 2(k-2)\frac{(\ln n)^k}{n} \to 0$$

Вероятность $p = \dfrac{\ln n}{n}$, фикс. $n, G(n,p)$:

$$\begin{cases} P\left(\alpha(G) \geq \dfrac{n}{2k}\right) < 1/2 \\ P\left(X(G) \geq \dfrac{n}{2}\right) < 1/2 \end{cases} \Rightarrow \exists G : \begin{cases} \alpha(G) < \dfrac{n}{2k} \\ X(G) < \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

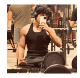
Удалим по одной вершине из всех циклов длины $\leq k \to G'$:

$$S(G') > k,\ \chi(G) \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{n/2k} = k \Rightarrow G' \text{ – подходит}$$

25 Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры. Когда производящая функция обратима?

$(a_0, a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – производящая функция (ПФ) $(a_0, a_1, \ldots)$

Переменная x – формальная (вместо нее может быть например )

Мн-во всех ПФ: $\mathbb{C}[[x]]$ (кольцо формальных степенных рядов)

Операции:

1. $A(x) \pm B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$
2. $c \cdot A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) x^n$, c – const
3. $A(x) \cdot B(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Константные ПФ: $c = (c, 0, 0, \ldots) \leftrightarrow C(x) = c$

Свойства операций:

1. $(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$
2. $A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$
3. $c \cdot A(x) = C(x) \cdot A(x)$, c – const
4. $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$
5. $A(x)(B(x) + C(x)) = A(x)B(x) + A(x)C(x)$
6. $(A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x) = A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x))$

ПФ $B(x)$ обратная к $A(x)$, если $A(x) \cdot B(x) = 1, \quad B(x) = A^{-1}(x)$

Пример: $A(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

$$A(x) \cdot \overbrace{(1 - x)}^{A^{-1}(x)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Свойства:

1. $\dfrac{1}{A(x)} \cdot \dfrac{1}{B(x)} = \dfrac{1}{A(x) \cdot B(x)}$
2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} + \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)D(x) + B(x)C(x)}{B(x)D(x)}$

ПФ $A(x)$ обратима $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

26 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница. Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n-го коффициента производящей функции с использованием производных.

26.1 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница

Формальная производная ПФ $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – ПФ $A'(x)$:

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Свойства:

1. $(A(x) \pm B(x))' = A'(x) \pm B'(x)$
2. $(c \cdot A(x))' = c \cdot A'(x)$, c – const
3. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$ – правило Лейбница

26.2 Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n-го коффициента производящей функции с использованием производных.

Пусть $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – ПФ:

$$\begin{cases} A(0) = a_0 \\ A'(0) = a_1 \\ A''(0) = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow A^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$

Преф. суммы $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots = A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

27 Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть S, T – мн-ва, $S \cap T = \emptyset$

Пусть $A(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из S, $B(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из T. Тогда $A(x) \cdot B(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из $S \cup T$

Примеры:

1. Бином Ньютона:

$$\{a_1, \ldots, a_n\} : \binom{n}{k} \text{ – способы выбрать } k \text{ элементов}$$

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \ \mid \ \{a_1, \ldots, a_n\} \leftrightarrow \overbrace{\underbrace{\{a_1\}}_{1+x} \cup \ldots \cup \underbrace{\{a_n\}}_{1+x}}^{(1+x)^n}$$

2. Кол-во салатов:

- Перец – 0 или 1
- Редиска – $0, 2, 4, \dots$
- Баклажан – любое
- Помидор – ≤ 3

Кол-во салатов из n овощей $=$?

Перец: $1 + x$

Редиска: $1 + x^2 + x^4 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Баклажан: $1 + x + x^2 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x}$

Помидор: $1 + x + x^2 + x^3$

$$\Downarrow$$

Ответ на задачу – коэф. $[x^n]$:

$$(1+x)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+x^3) =$$

$$= \frac{(1+x)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x^2)(1-x)}$$

27.1 Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \dbinom{\alpha}{0} = 1$
- $\dbinom{-n}{k} = \dfrac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \dbinom{n+k-1}{k}$

Пусть $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

28 Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами. Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами? Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.

$(a_0, a_1, \ldots)$ – линейное рекурентное соотношение порядка k с постоянными коэффициентами, если $\exists c_1, \ldots, \overbrace{c_k}^{\neq 0} : \forall n \geq 0 :$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} \ldots + c_k a_n$$

Пример: $F_n = 1 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2}$ – Фибоначчи порядка 2

Через $c_1, \ldots, c_k$ и $a_0, \ldots, a_{k-1}$ однозначно определяется a_n

28.1 Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами?

Теорема: $A(x)$ – ПФ линейной рекурентны порядка k. Тогда $\exists$ многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg P < k, \deg Q = k$:

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Доказательство:

Умножим $A(x)$ на $(c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k)$:

$$A(x) \cdot c_1 x : a_0 c_1 x + a_1 c_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} c_1 x^k + \ldots$$

$$A(x) \cdot c_2 x^2 : a_0 c_2 x^2 + a_1 c_2 x^3 + \ldots + a_{k-2} c_2 x^k + \ldots$$

$$\vdots$$

$$A(x) \cdot c_k x^k : a_0 c_k x^k + \ldots$$

Коэфф. при $[x^k] : c_1 a_{k-1} + \ldots + c_k a_0$ – рекурента Слагаемые с $x^d, d < k$ – $\overline{P}(x)$:

$$A(x)(c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k) = \overline{P}(x) + \sum_{t \geq k} b_t x^t =$$

$$= A(x) + \overbrace{\overline{P}(x) - \sum_{t<k} b_t x^t}^{P(x)}, \deg P < k$$

$$\Downarrow$$

$$A(x) \underbrace{(-1 + c_1 x + \ldots + c_k x^k)}_{Q(x)} = P(x)$$

28.2 Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ – различные корни со степенью вхождения $c_1, \ldots, c_s$. Разложим ПФ на сумму дробей:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{B_{i,j}}{(1 - a_i x)^j}$$

Тогда по обобщенному биному Ньютона:

$$[x^n] : \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{-n}{j} \cdot (-a_i)^n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{n+j-1}{j-1} \cdot a_i^n \right)$$

29 Числа Фибоначчи: их производящая функция и явная формула (формула Бине).

Пусть ПФ Фибоначии – $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$F(x) - F_0 - F_1 x = x(F(x) - F_0) + x^2 \cdot F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = F_0 + F_1 x - F_0 x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Разложим на сумму дробей:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}}_{A} - \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}}_{B}\right)$$

$$\begin{cases} A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n \\ B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n \end{cases} \Rightarrow F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

30 Правильные скобочные последовательности. Критерий того, что скобочная последовательность является правильной. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Правильные скобочные последовательности определяются следующим образом:

1. $\emptyset$ – ПСП
2. П – ПСП $\Rightarrow$ (П) – ПСП
3. $П_1$, $П_2$ – ПСП $\Rightarrow$ $П_1 П_2$ – ПСП

30.1 Критерий того, что скобочная последовательность является правильной.

Последовательность из '(' и ')' – ПСП, если и только если

1. Кол-во '(' равно кол-ву ')'
2. Разность кол-ва '(' и кол-ва ')' для любого префикса неотрицательна

Доказательство:

$\Rightarrow$: (индукция по построению)

$\Leftarrow$: Полная индукция по длине слова: $\forall$ слово такого вида – ПСП.

Переход ($\forall k < n \to n$):

Рассмотрим префикс min длины k, на котором кол-во '(' равно кол-ву ')':

$$(П_1)П_2 \text{ – закрывающая скобка ')' на позиции } k$$

К $П_2$ применяется предположение индукции . На позиции k разность скобок равна $0 \Rightarrow \forall i < k$ разность строго больше 0. Префикс $П_1$ – префикс исходной минус '(' $\Rightarrow$ в $П_1$ для каждого префикса разность неотрицательна и в $П_1$ равно кол-во '(' и ')' $\Rightarrow$ $П_1$ – ПСП

$$\Downarrow$$

$$(П_1)П_2 \text{ – ПСП}$$

Следствие: $\forall$ ПСП представляется в виде $(\Pi_1)\Pi_2$, причем ед. образом

Доказательство единственности:

30.2 Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Пусть C_n – кол-во ПСП с n скобками '(':

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

Доказательство:

$$\Pi = \overbrace{(\underbrace{\Pi_1}_{k})\underbrace{\Pi_2}_{n-k-1}}^{n}$$

31 Числа Каталана: их производящая функция и явная формула

Числа Каталана C_n:

- Кол-во ПСП длины $2n$
- Кол-во способов соединить $2n$ точек на окружности непересек. хордами

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

ПФ чисел Каталана:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Доказательство:

$$C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$xC^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$xC^2(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = C(x) - 1$$

$$\Downarrow$$

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$$

Решим уравнение:

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = x\left(C(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 - \frac{1}{4x} + 1 =$$

$$= x\left(C(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 + \frac{4x-1}{4x} = 0$$

$$4x^2\left(C(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 = 1 - 4x$$

$$\left(\underbrace{2xC(x) - 1}_{Y(x)}\right)^2 = 1 - 4x$$

$$Y^2(x) = 1 - 4x$$

$$Y(x) = \pm(2xC(x) - 1)$$

Так как $C(0) = 1 \Rightarrow Y(x) = -(2xC(x)) - 1$:

$$2xC(x) - 1 = -\sqrt{1-4x}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

31.1 Явная формула

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Доказательство:

$$1 - (1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k =$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} (-4x)^k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(-1)(-3)\ldots(-(2k-3))}{k! \cdot 2^k} (-4x)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \cdot 4^k \cdot x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)! \cdot 4^k}{k! \cdot 2^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)} x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1!)} x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

$$\Downarrow$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$