1 Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

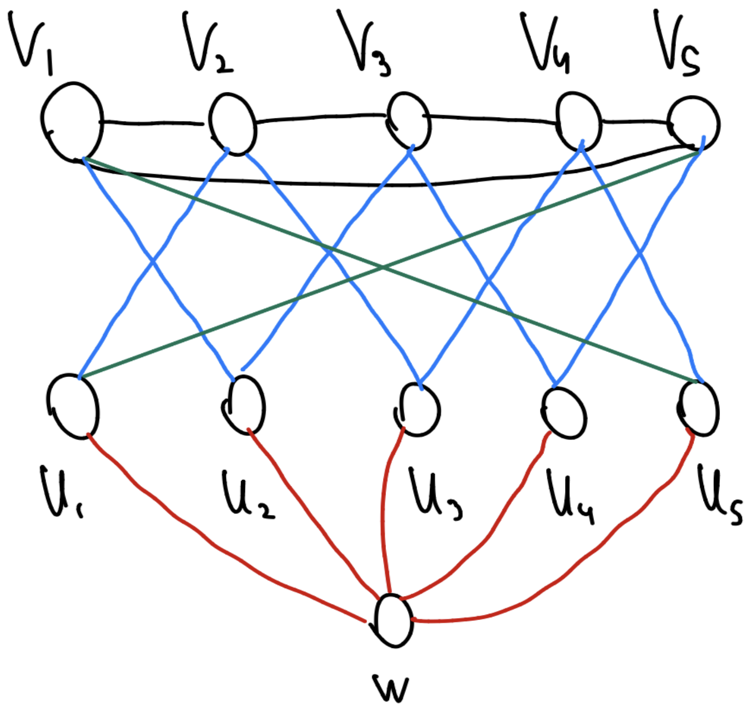
1.1 Мыцельскиан графа.

Мыцельскиан графа G – граф $\mu(G) = (V', E')$:

$V = \{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n, w\}$

$E' = E \cup \{(v_i, u_j) \,|\, \text{если } (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(w, u_i) \,|i = 1, \ldots, n\}$

Пример: G – цикл длины 5 (черные ребра – исходные):



1.2 Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Пусть $G_2 = K_2$, $G_3 = \mu(G_2), \ldots, G_t = \mu(G_{t-1})$

Тогда G_t – граф без треугольников с $\chi(G_t) = t$

Доказательство:

Полная индукция по t:

1) G_t без треугольников:

Вершина w не может быть в треугольнике, также не могут быть две вершины u_i, u_j в треугольнике (по опр.). По предположению индукции треугольника v_i, v_j, v_k тоже не может быть:

Пусть v_i, v_j, u_k – треугольник $\Rightarrow k \neq i, j$:

$$\begin{cases} v_j \to u_k \Rightarrow \exists v_j \to v_k \\ v_i \to u_k \Rightarrow \exists v_i \to v_k \end{cases} \Rightarrow \text{ есть треугольник } v_i, v_j, v_k \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) а) $\chi(G_t) \leq t$:

$\chi(G_{t-1}) = t - 1$. Красим u_i в цвет v_i. w красим в новый цвет $\Rightarrow$ покрасили в t цветов.

б)$\chi(G_t) \geq t$:

От противного: $\chi(G_t) = t - 1$:

Пусть раскрасили в $t-1$ цвет и w имеет цвет $t-1$. Тогда u_i раскрашены в цвета $(1, \ldots, t-2)$. Перекрашиваем v_i:

$$\text{цвет } v_i = \begin{cases} \text{прежний, если он не } t-1 \\ \text{цвет } u_i\text{, если он } t-1 \end{cases}$$

Вершины v_i цвета $t - 1$ найдутся по предположению индукции.

Тем самым G_{t-1} раскрашен в $t - 2$ цвета и для подграфа G_{t-1} раскраска правильная:

(Иначе были $v_i \leftrightarrow v_j$ с одинаковым цветом x, поменяли цвет одной из вершин $\Rightarrow$ раньше в v_i был цвет $t-1$ но поменяли на цвет x который у u_i. Между u_i и v_j есть ребро $\Rightarrow$ противоречие (они одного цвета до изменений цветов))

Получается мы раскрасили G_{t-1} в $t-2$ цвета $\Rightarrow$ противоречие

2 Паросочетания и вершинные покрытия в графе. Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.

Паросочетание в G – $M \subseteq E : \forall m_1, m_2 \in E : m_1 \cap m_2 = \emptyset$

Вершинное покрытие в G – $U \subseteq V : \forall \{a, b\} \in E : (a \in U) \vee (b \in U)$

В произвольном графе:

$$|M_{max}| \leq |U_{min}|$$

Чтобы покрыть все ребра из M нужно как минимум $|M|$ вершин

2.1 Теорема Кёнига

В двудольном графе G выполняется равенство:

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

3 Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.

4 Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла

4.1 Теорема Холла

В двудольном графе $G = (L \cup R, E)$:

$$\exists \text{ паросочетание размера } |L| \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq L : |N(S)| \geq |S|}_{\text{условие Холла}}$$

Для $S \subseteq L : N(S) = \{y \in R \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$

Доказательство:

5 Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея

Размер наибольшей клики в G – $\omega(G)$

Размер наибольшего нез. мн-ва в G – $\alpha(G)$

Пусть $n, k \geq 1 : R(n, k)$ – наименьшее N такое, что $\forall G$ на N вершинах найдется либо клика размером k, либо нез. мн-во размера n

Свойства:

- $R(n, k) = R(k, n)$ (дополнение $\overline{G}$)
- $R(1, k) = 1$
- $R(2, k) = k$

5.1 Теорема Рамсея

$\forall n, k \geq 2 : R(n, k)$ – конечно

$$R(n, k) \leq R(n-1, k) + R(n, k-1)$$

Верхняя оценка:

$$R(n, k) \leq \binom{n+k-2}{n-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

6 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок. Утверждение о связи строгого и нестрогого порядков.

Пусть $A \neq \emptyset$ – мн-во:

Отношение R на A является отношением **строгого** частичного порядка, если:

1. $\neg aRa$ – Иррефлексивность
2. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Отношение R на A является отношением **нестрогого** частичного порядка, если:

1. aRa – Рефлексивность
2. $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ – Антисимметричность
3. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Линейный порядок – частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы

6.1 Связь строгого и нестрогого порядков

Из строгого порядка можно получить нестрогий и наоборот:

1. Пусть $\leq$ – нестрогий порядок. Тогда

$$< := \leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$$

2. Пусть $<$ – строгий порядок. Тогда

$$\leq := < \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покоординатный порядок, лексикографический порядок.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – мн-во с заданным отн. порядка: $(A, <)$ или $(A, \leq)$

Пример:

1. $(\mathbb{N}, \mid)$ $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$
2. $(\mathbb{Z}, \mid)$ – не ЧУМ $(-1 \mid 1) \wedge (1 \mid -1) \not\Rightarrow 1 = -1$
3. $(2^A, \subseteq)$ – ЧУМ

7.1 Операции с ЧУМ

1. Сумма порядков:

   Пусть $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ – ЧУМ. Сумма $A + B$ – $A \sqcup B$:

   - Внутри A порядок $\leq_A$
   - Внутри B порядок $\leq_B$
   - Все элементы из A меньше всех элементов из B

2. Покоординатный порядок:

$$(A \times B, \leq) : (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

3. Лексикографический порядок:

$$(A \times B, <) : (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \ \vee \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 <_B b_2 \end{cases}$$

8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства. Примеры порядков: с бесконечным числом минимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.

Пусть $(P, \leq_P)$ – ЧУМ:

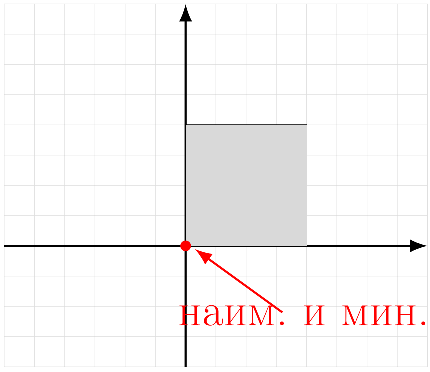
$$\begin{cases} a \in P \text{ – минимальный, если } \nexists b \in P : b < a \\ a \in P \text{ – наименьший, если } \forall b \in P : a \leq b \\ a \in P \text{ – максимальный, если } \nexists b \in P : b > a \\ a \in P \text{ – наибольший, если } \forall b \in P : a \geq b \end{cases}$$

Наименьший/наибольший – единственный, если существует

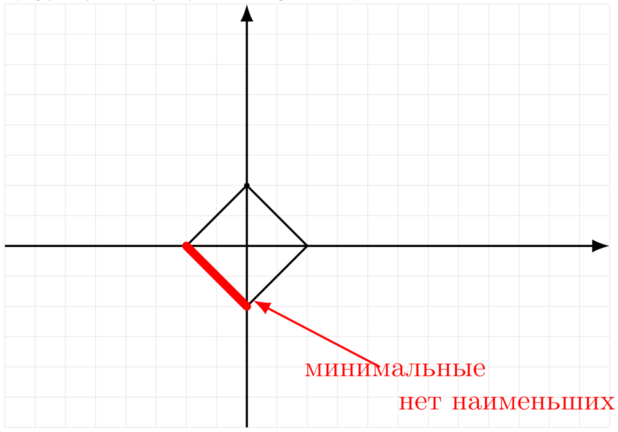
Наименьший/наибольший является минимальным/максимальным

Примеры:

- $(\mathbb{Z} \cup \{*\}, \ \leq \ )$: минимальный – $*$, наименьшего – нет
- $([0, 1]^2, \leq)$ – покоординатный:



- $(\{|x|+|y|=1\}, \leq)$ – покоординатный:



9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

9.1 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ – ЧУМ. $P \simeq Q$, если $\exists$ биекция $h : P \to Q$:

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow h(x) \leq_Q h(y)$$

Примеры:

- $(\mathbb{N}, \leq) \simeq (\{2, 4, 6, \ldots\}, \leq)$ – биекция $f(n) = 2n$
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{R}, \leq)$ – нет биекции между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

Инварианты:

- Мощность (из счетного нет биекции в континуум и т.д.)
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{Z}, \leq)$ – $\mathbb{Q}$ – плотный, $\mathbb{Z}$ – нет
- $([0, 1], \leq) \not\simeq ((0, 1), \leq)$ – в интервале нет наименьшего/наибольшего
- Наличие непосредственных предшественников/последователей

9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме

Если $\varphi : P \to Q$ – изоморфизм $P, Q \Rightarrow \varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

Плотный порядок: $\forall a < b : \exists c : a < c < b$

Теорема: Любые два счётных плотных линейных порядка без наим/наиб элемента изоморфны

10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств. Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Бесконечно убывающая цепь в ЧУМ $(A, <)$ – последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

10.1 Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Для ЧУМ $(P, \leq)$ следующие определения эквивалентны:

1. P – фундированное $(\forall S \subseteq P : \exists\, min(S))$
2. $\nexists$ бесконечно убывающих цепей
3. Для P справедлив принцип индукции:

Для $\forall$ семейства подмножеств:

$$\{A(p) \mid p \in P\}$$

$$\forall p \in P \; (\forall q < p : A(q) = 1) \Rightarrow A(p) = 1$$

База индукции – проверить утверждения на минимальных элементах

11 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.

$(P, \leq)$ – ЧУМ

11.1 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах

Цепь в P – $C \subseteq P : \forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$

Антицепь в P – $A \subseteq P : \forall x \neq y \in A : x, y$ – несравнимы

$|A \cap C| \leq 1$ – (если как минимум 2 элемента есть, то они не могут быть сравнимы и несравнимы одновременно)

11.2 Теорема Мирского

Наименьшее кол-во антицепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе

11.3 Теорема Дилуорса

Наименьшее кол-во цепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе

12 LYM-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.

13 Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

14 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности. Пошаговое задание распределения, дерево событий

Вероятностное пространство – $(\underbrace{\Omega}_{\text{эл. исходы}}, \underbrace{P}_{\text{ф-я вероятности}})$

Функция вероятности/вероятностное распределение – $P : \Omega \to [0, 1]$:

$$\begin{cases} 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1 \end{cases}$$

Событие A – подмн-во $A \subseteq \Omega$

Вероятность события A – $\sum P(\omega_i),\ \omega_i \in A$

Свойства вероятности:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Пошаговое задание распределения:

Если эксперимент состоит из нескольких шагов, распределение задаётся через дерево событий.

На каждом уровне дерева — возможные исходы текущего шага с условными вероятностями.

Вероятность пути в дереве – произведение вероятностей вдоль рёбер пути.

Вероятность исхода – вероятность соответствующего пути от корня до листа.

15 Формула включений-исключений для вероятностей. Задача о беспорядках.

15.1 Формула включений-исключений для вероятностей

$(\Omega, P) : A_1, \ldots, A_n :$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

15.2 Задача о беспорядках

Вероятностное пространство Ω, $P = \dfrac{1}{n!}$ (все равновероятны)

Беспорядок $(p_1, \ldots, p_n)$ – $\forall i : p_i \neq i$

Пусть $Y_i = \{p \in S_n \mid p_i = i\}$ – i-ый элемент на своем месте

$P(p \text{ не беспорядок}) \Leftrightarrow \exists i : p \in Y_i \Leftrightarrow P(Y_1 \cup \ldots \cup Y_n)$

$P(Y_1 \cap \ldots \cap Y_k) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$

$P(\geq 1 \text{ неподвижной точки}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

16 Условные вероятности, независимые события. Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)

Условная вероятность $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Условная вероятность – вероятность A после B

События A и B независимые, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Независимость $A_1, \ldots, A_n$ в совокупности:

$$\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\} : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Попарная независимость $A_1, \ldots, A_n$:

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Попарная независимость не означает независимость в совокупности

Пример:

17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.

18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Дисперсия случайной величины.

19 Неравенства Маркова и Чебышёва.

20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

21.1 Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Подбросим $n = 2k$ раз монету. Чему равна вероятность выпадения ровно $\dfrac{n}{2}$ орлов?

$$P\left(=\frac{n}{2}\text{ орлов}\right) = \binom{n}{n/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n\cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

22 Оценки для биномиальных коэффициентов.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$