

Коллоквиум 2

1 Мыщельскиан графа. Пример Зыкова–Мыщельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

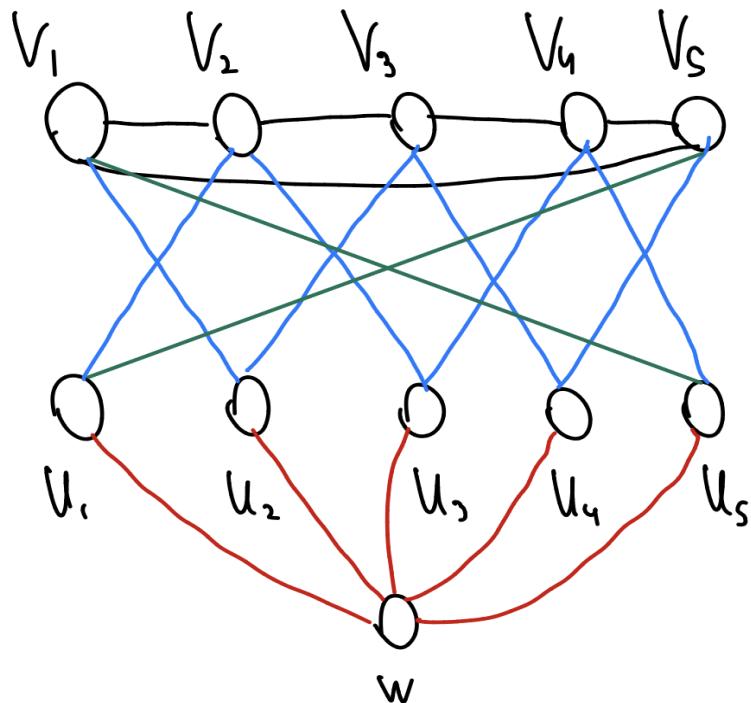
1.1 Мыщельскиан графа.

Мыщельскиан графа G – граф $\mu(G) = (V', E')$:

$$V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n, w\}$$

$$E' = E \cup \{(v_i, u_j) \mid \text{если } (v_i, v_j) \in E\} \cup \{(w, u_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Пример: G – цикл длины 5 (чёрные ребра – исходные):



1.2 Пример Зыкова–Мыщельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Пусть $G_2 = K_2$, $G_3 = \mu(G_2), \dots, G_t = \mu(G_{t-1})$

Тогда G_t – граф без треугольников с $\chi(G_t) = t$

Доказательство:

Полная индукция по t :

1) G_t без треугольников:

Вершина w не может быть в треугольнике, также не могут быть две вершины u_i, u_j в треугольнике (по опр.). По предположению индукции треугольника v_i, v_j, v_k тоже не может быть:

Пусть v_i, v_j, v_k – треугольник $\Rightarrow k \neq i, j$:

$$\begin{cases} v_j \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_j \rightarrow v_k \\ v_i \rightarrow u_k \Rightarrow \exists v_i \rightarrow v_k \end{cases} \Rightarrow \text{есть треугольник } v_i, v_j, v_k \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) а) $\chi(G_t) \leq t$:

$\chi(G_{t-1}) = t - 1$. Красим u_i в цвет v_i . w красим в новый цвет \Rightarrow покрасили в t цветов.

б) $\chi(G_t) \geq t$:

От противного: $\chi(G_t) = t - 1$:

Пусть раскрасили в $t - 1$ цвет и w имеет цвет $t - 1$. Тогда u_i раскрашены в цвета $(1, \dots, t - 2)$. Перекрашиваем v_i :

$$\text{цвет } v_i = \begin{cases} \text{прежний, если он не } t - 1 \\ \text{цвет } u_i, \text{ если он } t - 1 \end{cases}$$

Вершины v_i цвета $t - 1$ найдутся по предположению индукции.

Тем самым G_{t-1} раскрашен в $t - 2$ цвета и для подграфа G_{t-1} раскраска правильная:

(Иначе были $v_i \leftrightarrow v_j$ с одинаковым цветом x , поменяли цвет одной из вершин \Rightarrow раньше в v_i был цвет $t - 1$ но поменяли на цвет x который у u_i . Между u_i и v_j есть ребро \Rightarrow противоречие (они одного цвета до изменений цветов))

Получается мы раскрасили G_{t-1} в $t - 2$ цвета \Rightarrow противоречие

2 Паросочетания и вершинные покрытия в графе.

Утверждение о связи максимального размера паросочетания и минимального размера вершинного покрытия в произвольном графе. Теорема Кёнига.

Паросочетание в $G - M \subseteq E : \forall m_1, m_2 \in E : m_1 \cap m_2 = \emptyset$

Вершинное покрытие в $G - U \subseteq V : \forall \{a, b\} \in E : (a \in U) \vee (b \in U)$

В произвольном графе:

$$|M_{max}| \leq |U_{min}|$$

Если достигается равенство $\Leftrightarrow \exists$ парсоч. и мин. покр равного размера

Доказательство:

Пусть M' – парсоч, U' – вершин. покрытие и $|M'| = |U'|$:

$$|M'| \leq |M_{max}| \leq |U_{min}| \leq |U'|$$

\Downarrow

$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

Чтобы покрыть все ребра из M нужно как минимум $|M|$ вершин

2.1 Теорема Кёнига

В двудольном графе G выполняется равенство:

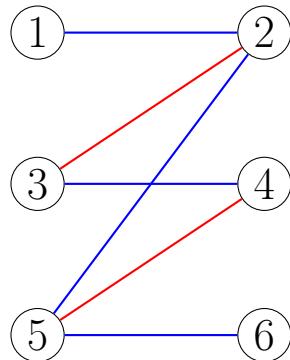
$$|M_{max}| = |U_{min}|$$

3 Чередующийся и увеличивающий пути относительно паросочетания в двудольном графе.

Пусть $G = (L \cup R, E)$ – двудольный граф и M – паросочетание.

Чередующийся путь относительно M – путь (без повторений по ребрам), начинающийся в $a \in L$ не покрытой M и в котором ребра чередуются по принадлежности M

Увеличивающий путь относительно M – чередующийся путь из a в b :
 b тоже не покрыта M



1-2-3-4 – чередующийся путь

1-2-3-4-5-6 – увеличивающийся путь

Если относительно M есть увеличивающийся путь $\Rightarrow M$ – не максимальное паросочетание

4 Условие Холла для двудольного графа, теорема Холла

4.1 Теорема Холла

В двудольном графе $G = (L \cup R, E)$:

$$\exists \text{ паросочетание размера } |L| \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq L : |N(S)| \geq |S|}_{\text{условие Холла}}$$

Для $S \subseteq L : N(S) = \{y \in R \mid \exists x \in S : \{x, y\} \in E\}$

Доказательство:

5 Клика и независимое множество в графе. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея

Размер наибольшей клики в $G - \omega(G)$

Размер наибольшего нез. мн-ва в $G - \alpha(G)$

Пусть $n, k \geq 1 : R(n, k)$ – наименьшее N такое, что $\forall G$ на N вершинах найдется либо клика размером k , либо нез. мн-во размера n

Свойства:

- $R(n, k) = R(k, n)$ (дополнение \overline{G})
- $R(1, k) = 1$
- $R(2, k) = k$

5.1 Теорема Рамсея

$\forall n, k \geq 2 : R(n, k)$ – конечно

$$R(n, k) \leq R(n - 1, k) + R(n, k - 1)$$

Верхняя оценка:

$$R(n, k) \leq \binom{n+k-2}{n-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

6 Частично упорядоченные множества: строгий и нестрогий частичные порядки, линейный порядок.

Утверждение о связи строгого и нестрогого порядков.

Пусть $A \neq \emptyset$ – мн-во:

Отношение R на A является отношением **строгого** частичного порядка, если:

1. $\neg aRa$ – Иррефлексивность
2. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Отношение R на A является отношением **нестрогого** частичного порядка, если:

1. aRa – Рефлексивность
2. $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ – Антисимметричность
3. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ – Транзитивность

Линейный порядок – частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы

6.1 Связь строгого и нестрогого порядков

Из строгого порядка можно получить нестрогий и наоборот:

1. Пусть \leq – нестрогий порядок. Тогда

$$< := \leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$$

2. Пусть $<$ – строгий порядок. Тогда

$$\leq := < \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

7 Операции с частично упорядоченными множествами: сумма порядков, покоординатный порядок, лексикографический порядок.

Частично упорядоченное множество (ЧУМ) – мн-во с заданным отн. порядка: $(A, <)$ или (A, \leq)

Пример:

1. $(\mathbb{N}, |)$ $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$
2. $(\mathbb{Z}, |)$ – не ЧУМ $(-1 \mid 1) \wedge (1 \mid -1) \not\Leftrightarrow 1 = -1$
3. $(2^A, \subseteq)$ – ЧУМ

7.1 Операции с ЧУМ

1. Сумма порядков:

Пусть (A, \leq_A) , (B, \leq_B) – ЧУМ. Сумма $A + B = A \sqcup B$:

- Внутри A порядок \leq_A
- Внутри B порядок \leq_B
- Все элементы из A меньше всех элементов из B

2. Покоординатный порядок:

$$(A \times B, \leq) : (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{cases}$$

3. Лексикографический порядок:

$$(A \times B, <) : (a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \vee \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 <_B b_2 \end{cases}$$

8 Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства. Примеры порядков: с бесконечным числом минимальных элементов, с единственным минимальным элементом, но не наименьшим.

Пусть (P, \leq_P) – ЧУМ:

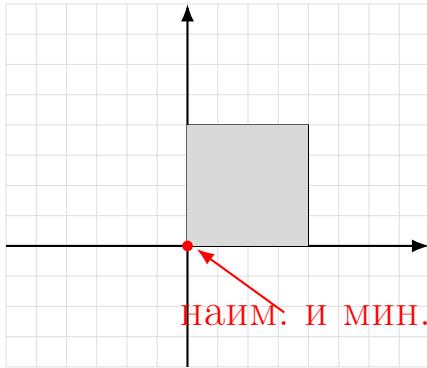
$$\begin{cases} a \in P - \text{минимальный, если } \nexists b \in P : b < a \\ a \in P - \text{наименьший, если } \forall b \in P : a \leq b \\ a \in P - \text{максимальный, если } \nexists b \in P : b > a \\ a \in P - \text{наибольший, если } \forall b \in P : a \geq b \end{cases}$$

Наименьший/наибольший – единственный, если существует

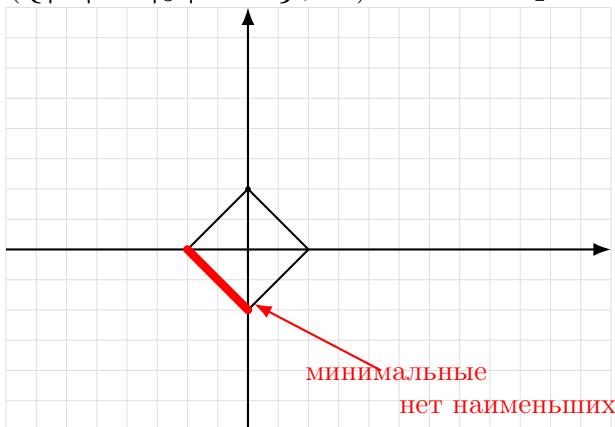
Наименьший/наибольший является минимальным/максимальным

Примеры:

- $(\mathbb{Z} \cup \{*\}, \leq)$: минимальный – $*$, наименьшего – нет
- $([0, 1]^2, \leq)$ – покоординатный:



- $(\{|x| + |y| = 1\}, \leq)$ – пооординатный:



9 Изоморфизм порядков, примеры. Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

9.1 Изоморфизм порядков, примеры

Пусть $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ – ЧУМ. $P \simeq Q$, если \exists биекция $h : P \rightarrow Q$:

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow h(x) \leq_Q h(y)$$

Примеры:

- $(\mathbb{N}, \leq) \simeq (\{2, 4, 6, \dots\}, \leq)$ – биекция $f(n) = 2n$
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{R}, \leq)$ – нет биекции между \mathbb{Q} и \mathbb{R}

Инварианты:

- Мощность (из счетного нет биекции в континуум и т.д.)
- $(\mathbb{Q}, \leq) \not\simeq (\mathbb{Z}, \leq)$ – \mathbb{Q} – плотный, \mathbb{Z} – нет
- $([0, 1], \leq) \not\simeq ((0, 1), \leq)$ – в интервале нет наименьшего/наибольшего
- Наличие непосредственных предшественников/последователей

9.2 Отрезки в частично упорядоченных множествах, их образы при изоморфизме

Если $\varphi : P \rightarrow Q$ – изоморфизм $P, Q \Rightarrow \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$

9.3 Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента

Плотный порядок: $\forall a < b : \exists c : a < c < b$

Теорема: Любые два счётных плотных линейных порядка без наим/наиб элемента изоморфны

10 Бесконечно убывающие цепи. Принцип математической индукции для частично упорядоченных множеств. Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Бесконечно убывающая цепь в ЧУМ $(A, <)$ – последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

10.1 Фундированные множества, теорема об эквивалентности трех определений фундированного множества.

Для ЧУМ (P, \leq) следующие определения эквивалентны:

1. P – фундированное ($\forall S \subseteq P : \exists \min(S)$)
2. \nexists бесконечно убывающих цепей
3. Для P справедлив принцип индукции:

Для \forall семейства подмножеств:

$$\{A(p) \mid p \in P\}$$

$$\forall p \in P (\forall q < p : A(q) = 1) \Rightarrow A(p) = 1$$

База индукции – проверить утверждения на минимальных элементах

11 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах. Теорема Мирского. Теорема Дилуорса.

(P, \leq) – ЧУМ

11.1 Цепи и антицепи в частично упорядоченных множествах

Цепь в P – $C \subseteq P : \forall x, y \in C : (x \leq y \vee y \leq x)$

Антицепь в P – $A \subseteq P : \forall x \neq y \in A : x, y$ – несравнимы

$|A \cap C| \leq 1$ – (если как минимум 2 элемента есть, то они не могут быть сравнимы и несравнимы одновременно)

11.2 Теорема Мирского

Наименьшее кол-во антицепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе

11.3 Теорема Дилуорса

Наименьшее кол-во цепей, покрывающих ЧУМ равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе

- 12 LYM-неравенство, теорема Шпернера о размере максимальной антицепи в булевом кубе.**
- 13 Граф сравнимости частично упорядоченного множества. Совершенные графы. Когда граф является совершенным?**

13.1 Граф сравнимости частично упорядоченного множества.

Пусть (P, \leq) – ЧУМ. Граф сравнимости P – простой неор. граф G :

$$G = (V, E), V = P : (x, y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \\ x > y \end{cases}$$

13.2 Совершенные графы. Когда граф является совершенным?

Граф G совершенный, если для любого индуцированного подграфа:

$$\forall H \subseteq G : \chi(H) = \omega(H)$$

Граф является совершенным, если он не содержит ни C_{2k+1} , ни $\overline{C_{2k+1}}$ в качестве индуцированного подграфа при $k > 1$

Граф G совершенный \Leftrightarrow граф \overline{G} совершенный

Для любого конечного ЧУМ P его граф сравнимости G :

G и \overline{G} – совершенные

14 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры. Свойства вероятности. Пошаговое задание распределения, дерево событий

Вероятностное пространство – ($\underbrace{\Omega}_{\text{эл. исходы}}$, $\underbrace{P}_{\text{ф-я вероятности}}$)

Функция вероятности/вероятностное распределение – $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$:

$$\begin{cases} 0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1 \end{cases}$$

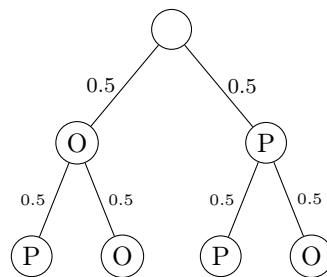
Событие A – подмн-во $A \subseteq \Omega$

Вероятность события A – $\sum P(\omega_i), \omega_i \in A$

Свойства вероятности:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Пошаговое задание распределения:



Если эксперимент состоит из нескольких шагов, распределение задаётся через дерево событий.

На каждом уровне дерева — возможные исходы текущего шага с условными вероятностями.

Вероятность пути в дереве – произведение вероятностей вдоль рёбер пути.

Вероятность исхода – вероятность соответствующего пути от корня до листа.

15 Формула включений-исключений для вероятностей.

Задача о беспорядках.

15.1 Формула включений-исключений для вероятностей

$(\Omega, P) : A_1, \dots, A_n :$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

15.2 Задача о беспорядках

Вероятностное пространство Ω , $P = \frac{1}{n!}$ (все равновероятны)

Беспорядок $(p_1, \dots, p_n) - \forall i : p_i \neq i$

Пусть $Y_i = \{p \in S_n \mid p_i = i\}$ – i -ый элемент на своем месте

$P(p \text{ не беспорядок}) \Leftrightarrow \exists i : p \in Y_i \Leftrightarrow P(Y_1 \cup \dots \cup Y_n)$

$$P(Y_1 \cap \dots \cap Y_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$P(\geq 1 \text{ неподвижной точки}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

16 Условные вероятности, независимые события.

Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)

Условная вероятность $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Условная вероятность – вероятность A после B

События A и B независимые, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Независимость A_1, \dots, A_n в совокупности:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Попарная независимость A_1, \dots, A_n :

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

Попарная независимость не означает независимость в совокупности

Пример:

Подбросим 2 монеты. Пусть событие A – первая монета О, B – вторая монета О, C – монеты выпали одинаковой стороной:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Попарная независимость:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/4, & \text{выпало 'OO'} \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/4, & 2\text{-ая 'O'} \Rightarrow 1\text{-ая 'O'} \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/4, & 1\text{-ая 'O'} \Rightarrow 2\text{-ая 'O'} \end{cases}$$

Независимость в совокупности:

$$P(A \cap B \cap C) = ? P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$P(A \cap B \cap C)$ – первая и вторая 'О' и они равны

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}, \quad \text{выпало 'OO'}$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

⇓

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

17 Формулы Байеса и полной вероятности. Пример с тестом на выявление болезни.

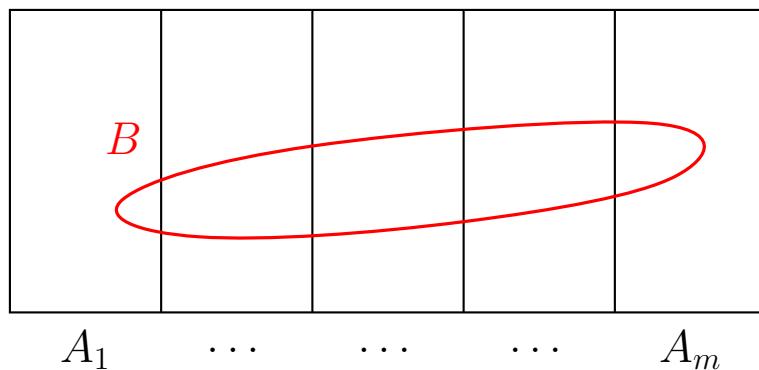
17.1 Формула полной вероятности

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$, $P(A_i) > 0$

Тогда для любого события B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Графическая интерпретация:



17.2 Формула Байеса

Для любых событий $A, B : P(A) > 0, P(B) > 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Пример с тестом на выявление болезни:

Предположим, что некоторый тест правильно предсказывает наличие или отсутствие определенного заболевания с вероятностью 0,95 (если человек действительно болен, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,95 и наоборот)

1% населения имеет это заболевание. Предположим, что чел X прошел тестирование и получил положительный результат. Какова вероятность того, что X действительно болен?

Пусть события $A - X$ здоров, $\bar{A} - X$ болен, B – тест положительный:

$$P(B|\bar{A}) = 0.95, P(\bar{A}) = 0.01$$

$$P(B|A) = 0.05, P(A) = 0.99$$

По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.059$$

Тогда ответ (вероятность болезни после теста):

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.059} \simeq 0.161$$

Несмотря на положительный тест, вероятность наличия болезни 16%

18 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Дисперсия случайной величины.

Пусть (Ω, P) – вероятностное пространство:

Случайная величина – функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}, f(w_i) = a_i \in \mathbb{R}$$

18.1 Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания.

Мат. ожидание $f - \mathbb{E}(f) = p_1 \cdot f(w_1) + \dots + p_n \cdot f(w_n) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(w_i)$

Свойства:

1. $f = c \Rightarrow \mathbb{E}(f) = c$, $c - \text{const}$
2. $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)$ – линейность

Доказательство:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f + g) &= \sum_{i=1}^n p_i(f(w_i) + g(w_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i f(w_i) + \sum_{i=1}^n p_i g(w_i) = \mathbb{E}(f) + \mathbb{E}(g)\end{aligned}$$

3. $\mathbb{E}(f \cdot c) = c \cdot \mathbb{E}(f)$, $c - \text{const}$

$$4. A - \text{событие}, I_A(w_i) = \begin{cases} 1, & w_i \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(I_A) = \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot I_A(w) = \sum_{w \in A} P(w) = P(A)$$

$$5. \mathbb{E}(f) = \sum_{x \in Range(f)} x \cdot P(f = x)$$

18.2 Дисперсия случайной величины.

Дисперсия $f - \mathbb{D}(f) = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) \geq 0$

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2) &= \mathbb{E}(f^2 - 2 \cdot f \cdot \mathbb{E}(f) + (\mathbb{E}(f))^2) = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}(f)\mathbb{E}(f) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(f))^2) = \\ &= \mathbb{E}(f^2) - 2(\mathbb{E}(f))^2 + (\mathbb{E}(f))^2 = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2\end{aligned}$$

19 Неравенства Маркова и Чебышёва.

19.1 Неравенство Маркова

Пусть f – **неотрицательная** случ. величина, $\alpha > 0$:

$$P(f \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(f)}{\alpha}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f) &= \sum_{x \in \text{Range}(f)} x \cdot P(f = x) \\ \mathbb{E}(f) &= \underbrace{\sum_{x < \alpha} x \cdot P(f = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbb{E}(f) &\geq \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) \\ \sum_{x \geq \alpha} x \cdot P(f = x) &\geq \sum_{x \geq \alpha} \alpha \cdot P(f = x) = \alpha \cdot P(f \geq \alpha) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbb{E}(f) &\geq \alpha \cdot P(f \geq \alpha) \end{aligned}$$

19.2 Неравенство Чебышёва

Пусть f – случ. величина, $\alpha > 0$:

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{D}(f)}{\alpha^2}$$

Доказательство:

Пусть $g = (f - \mathbb{E}(f))^2 \geq 0$:

$$P(|f - \mathbb{E}(f)| \geq \alpha) = P(g \geq \alpha^2) \leq \underbrace{\frac{\mathbb{D}(g)}{\alpha^2}}_{\text{по Маркову}}$$

20 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Случайные величины f, g независимые, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : P(f = x \wedge g = y) = P(f = x) \cdot P(g = y)$$

Случ. величины f_1, \dots, f_n независимы \Leftrightarrow независимы в совокупности

20.1 Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Пусть f, g – независимые случ. величины.

Мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(f \cdot g) = \mathbb{E}(f) \cdot \mathbb{E}(g)$$

Дисперсия:

$$\mathbb{D}(f + g) = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g)$$

21 Формула Стирлинга. Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

21.1 Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

21.2 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Подбросим $n = 2k$ раз монету. Чему равна вероятность выпадения ровно $\frac{n}{2}$ орлов?

$$P\left(= \frac{n}{2} \text{ орлов}\right) = \binom{n}{n/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\pi n \left(\frac{n}{2e}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

22 Оценки для биномиальных коэффициентов.

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$$

23 Вероятностный метод: общая формулировка и оценка объединения. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

Пусть вер. пространство (Ω, P) , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f) = c$

Лемма:

$$\begin{cases} \exists w_{min} \in \Omega : f(w_{min}) \leq c \\ \exists w_{max} \in \Omega : f(w_{max}) \geq c \end{cases}$$

Оценка объединения:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

23.1 Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

$$R(k, k) \leq \binom{2k - 1}{k - 1} < 2^{2k-2}$$

$$\left[\frac{k \cdot 2^{k/2}}{2e} \right] < R(k, k), \quad \text{при } k \geq 3$$

24 Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры. Когда производящая функция обратима?

$(a_0, a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – производящая функция ($\Pi\Phi$) (a_0, a_1, \dots)

Переменная x – формальная (вместо нее может быть например )

Мн-во всех $\Pi\Phi$: $\mathbb{C}[[x]]$ (кольцо формальных степенных рядов)

Операции:

$$1. A(x) \pm B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$$

$$2. c \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n)x^n, \quad c - \text{const}$$

$$3. A(x) \cdot B(x) = (a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{где}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Константные $\Pi\Phi$: $c = (c, 0, 0, \dots) \leftrightarrow C(x) = c$

Свойства операций:

$$1. (A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$$

$$2. A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$$

$$3. c \cdot A(x) = C(x) \cdot A(x), c - \text{const}$$

$$4. A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$$

$$5. A(x)(B(x) + C(x)) = A(x)B(x) + A(x)C(x)$$

$$6. (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x) = A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x))$$

ПФ $B(x)$ обратная к $A(x)$, если $A(x) \cdot B(x) = 1$, $B(x) = A^{-1}(x)$

Пример: $A(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

$$A(x) \cdot \overbrace{(1-x)}^{A^{-1}(x)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Свойства:

$$1. \frac{1}{A(x)} \cdot \frac{1}{B(x)} = \frac{1}{A(x) \cdot B(x)}$$

$$2. \frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + B(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

ПФ $A(x)$ обратима $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

25 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница. Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n -го коэффициента производящей функции с использованием производных.

25.1 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница

Формальная производная $\Pi\Phi A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \Pi\Phi A'(x)$:

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Свойства:

1. $(A(x) \pm B(x))' = A'(x) \pm B'(x)$
2. $(c \cdot A(x))' = c \cdot A'(x)$, c – const
3. $(A(x) \cdot B(x))' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$ – правило Лейбница

25.2 Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n -го коэффициента производящей функции с использованием производных.

Пусть $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \Pi\Phi$:

$$\begin{cases} A(0) = a_0 \\ A'(0) = a_1 \\ A''(0) = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow A^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$

Преф. суммы $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots = A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

26 Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть S, T – мн-ва, $S \cap T = \emptyset$

Пусть $A(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из S , $B(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из T . Тогда $A(x) \cdot B(x)$ – ПФ неупорядоч. выборок из $S \cup T$

Примеры:

1. Бином Ньютона:

$\{a_1, \dots, a_n\} : \binom{n}{k}$ – способы выбрать k элементов

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \quad | \quad \{a_1, \dots, a_n\} \leftrightarrow \underbrace{\{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}}_{1+x}^{(1+x)^n}$$

2. Кол-во салатов:

- Перец – 0 или 1
- Редиска – 0, 2, 4, ...
- Баклажан – любое
- Помидор – ≤ 3

Кол-во салатов из n овощей = ?

Перец: $1+x$

$$\text{Редиска: } 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{Баклажан: } 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Помидор: $1 + x + x^2 + x^3$



Ответ на задачу – коэф. $[x^n]$:

$$(1+x)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+x^3) = \\ = \frac{(1+x)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x^2)(1-x)}$$

26.1 Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$
- $\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Пусть $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

27 Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами. Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами? Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.

(a_0, a_1, \dots) – линейное рекурентное соотношение порядка k с постоянными коэффициентами, если $\exists c_1, \dots, \overbrace{c_k}^{\neq 0} : \forall n \geq 0 :$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} \dots + c_k a_n$$

Пример: $F_n = 1 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2}$ – Фибоначчи порядка 2

Через c_1, \dots, c_k и a_0, \dots, a_{k-1} однозначно определяется a_n

27.1 Как устроена производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами?

Теорема: $A(x)$ – ПФ линейной рекурентны порядка k . Тогда \exists многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg P < k, \deg Q = k$:

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

27.2 Явная формула для общего члена такой последовательности, метод ее вывода.

Пусть a_1, \dots, a_s – различные корни со степенью вхождения c_1, \dots, c_s .

Разложим ПФ на сумму дробей:

$$A(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{c_i} \frac{B_{i,j}}{(1 - a_i x)^j}$$

Тогда по обобщенному биному Ньютона:

$$\begin{aligned} [x^n] : \sum_{i=1}^s & \left(\sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{-j}{n} \cdot (-a_i)^n \right) = \\ & = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \cdot \binom{n+j-1}{j-1} \cdot a_i^n \right) \end{aligned}$$

28 Числа Фибоначчи: их производящая функция и явная формула (формула Бине).

Пусть ПФ Фибоначии – $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$



$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$F(x) - F_0 - F_1 x = x(F(x) - F_0) + x^2 \cdot F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = F_0 + F_1 x - F_0 x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Разложим на сумму дробей:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\underbrace{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}_A} - \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}_B} \right)$$

$$\begin{cases} A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \\ B = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \end{cases} \Rightarrow F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}$$

29 Правильные скобочные последовательности. Критерий того, что скобочная последовательность является правильной. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Правильные скобочные последовательности определяются следующим образом:

1. \emptyset – ПСП
2. Π – ПСП $\Rightarrow (\Pi)$ – ПСП
3. Π_1, Π_2 – ПСП $\Rightarrow \Pi_1 \Pi_2$ – ПСП

29.1 Критерий того, что скобочная последовательность является правильной.

Последовательность из '(' и ')' – ПСП, если и только если

1. Кол-во '(' равно кол-ву ')'
2. Разность кол-ва '(' и кол-ва ')' для любого префикса неотрицательна

29.2 Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей.

Пусть C_n – кол-во ПСП с n скобками '(':

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

Доказательство:

$$\Pi = \overbrace{(\underbrace{\Pi_1}_k)}^n \overbrace{\Pi_2}^{n-k-1}$$

30 Числа Каталана: их производящая функция и явная формула

Числа Каталана C_n :

- Кол-во ПСП длины $2n$
- Кол-во способов соединить $2n$ точек на окружности непересек. хордами

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1, C_1 = 1$$

ПФ чисел Каталана:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ xC^2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1} \\ &\quad \Downarrow \\ xC^2(x) &= c_1 x + c_2 x^2 + \dots = C(x) - 1 \\ &\quad \Downarrow \\ xC^2(x) - C(x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Решим уравнение:

$$\begin{aligned} xC^2(x) - C(x) + 1 &= x \left(C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 - \frac{1}{4x} + 1 = \\ &= x \left(C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 + \frac{4x - 1}{4x} = 0 \\ 4x^2 \left(C(x) - \frac{1}{2x} \right)^2 &= 1 - 4x \\ \left(\underbrace{2xC(x) - 1}_{Y(x)} \right)^2 &= 1 - 4x \\ Y^2(x) &= 1 - 4x \end{aligned}$$

$$Y(x) = \pm(2xC(x) - 1)$$

Так как $C(0) = 1 \Rightarrow Y(x) = -(2xC(x)) - 1$:

$$2xC(x) - 1 = -\sqrt{1 - 4x}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

30.1 Явная формула

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} 1 - (1 - 4x)^{1/2} &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} (-4x)^k = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(-1)(-3)\dots(-(2k-3))}{k! \cdot 2^k} (-4x)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \cdot 4^k \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)! \cdot 4^k}{k! \cdot 2^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1!)} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot \binom{2k-2}{k-1} x^k \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned}C(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \\&\quad \Downarrow \\C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}\end{aligned}$$