

Лабораторная работа №2

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Постановка задачи. Подготовьте программу для построения, визуализации и анализа кубических сплайнов $S(x)$, интерполирующих функции $F(x)$ при следующих условиях:

а) тестовая функция $F(x) = \varphi(x)$, заданная формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x \in [-1; 0] \\ -x^3 + 3x^2, & x \in [0; 1] \end{cases} \quad (1)$$

на отрезке $x \in [-1, 1]$, сетка равномерная, граничные условия

$$S''(a) = \varphi''(-1) = 0, S''(b) = \varphi''(1) = 0 \quad (2)$$

(совпадение вторых производных);

б) основную функцию $F(x) = f(x)$ (см. табл. 6) на отрезке $x \in [a, b]$, сетка равномерная, граничные условия

$$S''(a) = 0, S''(b) = 0. \quad (3)$$

(естественные граничные условия);

с) осциллирующую функцию $F(x) = f(x) + \cos 10x$ при тех же $x \in [a, b]$, сетка равномерная, граничные условия вида (3).

Размерность сетки, то есть число участков n , является параметром программы.

Используя тестовую функцию а), проверьте и аргументируйте правильность работы программы.

Для каждой из функций б) и с)

- проверьте **наличие сходимости** при сгущении сетки;
- постройте кубический сплайн, интерполирующий указанные функции с **погрешностью не более $\varepsilon = 10^{-6}$** ;
- проведите **анализ сходимости**: сходимость сплайна к исследуемой функции, сходимость первой и второй производной сплайна к первой и второй производной исследуемой функции соответственно. Оцените **порядки сходимости**.

Сравните полученные результаты.

Требования к программе

1) Для построения сплайнов используйте каноническую запись

$$S(x) = \{S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

2) Коэффициенты $c_i, i = 1 \dots n$, найдите методом прогонки.

3) Коэффициенты сплайнов нужно выводить в таблицу

Таблица 1

i	x_{i-1}	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	$x_0 = a$	x_1				
...				
...				
n	x_{n-1}	$x_n = b$				

Здесь n – число участков, i – номер участка, $[x_{i-1}, x_i]$ – границы участка с номером i ; a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты сплайна, $i = 1, \dots, n$.

4) *Погрешностью* интерполирующего сплайна в точке x называют разность $F(x) - S(x)$.

Погрешностью производной (первой производной) в точке x называют разность $F'(x) - S'(x)$.

Погрешностью второй производной в точке x называют разность $F''(x) - S''(x)$.

Для изучения погрешностей при $x \in [a, b]$ используют их нормы

$$\max_{x \in [a, b]} |F(x) - S(x)|, \quad (5)$$

$$\max_{x \in [a, b]} |F'(x) - S'(x)|, \max_{x \in [a, b]} |F''(x) - S''(x)|, \quad (6)$$

Чтобы программа могла оценить значения (5) и (6), используют *контрольную (дополнительную) сетку*, включающую, кроме узлов основной сетки, промежуточные узлы. Например, контрольная сетка может быть равномерной с числом участков N , кратным числу n .

Тогда нормы погрешностей (5) и (6) можно оценить значениями

$$\max_{j=0, \dots, N} |F(x_j) - S(x_j)|, \quad (7)$$

$$\max_{j=0,\dots,N} |F'(x_j) - S'(x_j)|, \max_{j=0,\dots,N} |F''(x_j) - S''(x_j)| \quad (8)$$

5) Результаты сравнения $F(x)$ и сплайна $S(x)$ нужно выводить в таблицу (таблицы) и справку:

Таблица 2

j	x_j	$F(x_j)$	$S(x_j)$	$F(x_j) - S(x_j)$	$F'(x_j)$	$S'(x_j)$	$F'(x_j) - S'(x_j)$
0	$x_0 = a$						
...	...						
N	$x_N = b$						

Таблица 3 (опция)

j	x_j	$F''(x_j)$	$S''(x_j)$	$F''(x_j) - S''(x_j)$
0	$x_0 = a$			
...	...			
N	$x_N = b$			

Справка

Сетка сплайна: $n = \langle _ \rangle$

Контрольная сетка: $N = \langle _ \rangle$

Погрешность сплайна на контрольной сетке

$$\max_{j=0,\dots,N} |F(x_j) - S(x_j)| = \langle _ \rangle \text{ при } x = \langle _ \rangle$$

Погрешность производной на контрольной сетке

$$\max_{j=0,\dots,N} |F'(x_j) - S'(x_j)| = \langle _ \rangle \text{ при } x = \langle _ \rangle$$

Погрешность второй производной на контрольной сетке (опция)

$$\max_{j=0,\dots,N} |F''(x_j) - S''(x_j)| = \langle _ \rangle \text{ при } x = \langle _ \rangle$$

6) На графиках программа должна показывать:

- функцию $F(x)$ и сплайн $S(x)$;
- их первые (первые и вторые) производные;
- погрешность сплайна $F(x) - S(x)$;
- погрешность производных (первых и вторых производных).

Задания

а) В случае $F(x) = \varphi(x)$, $x \in [-1, 1]$

– постройте с помощью программы сплайн $S(x)$ на равномерной сетке для некоторого небольшого значения n (например, от 2 до 5);

– в отчет включите таблицу 1 (коэффициенты сплайна) полностью, покажите график функции и сплайна; запишите построенный сплайн (от руки!) в каноническом виде и выкладками подтвердите правильную работу программы. (Для проверки программы совпадения графиков недостаточно).

При выполнении заданий для функций б) и с) должны быть поэтапно заполнены таблицы 4 и 5.

б) В случае $F(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$

– постройте с помощью программы сплайн $S(x)$ с граничными условиями (3) при каком-либо значении n . Укажите погрешности в ячейках таблицы 4 (от руки).

– проверьте наличие сходимости (с целью тестирования программы): отслеживайте поведение погрешности при изменении n ;

– размерность сетки (число n) подберите так, чтобы на *контрольной сетке* сплайн интерполировал функцию с погрешностью не более $\varepsilon = 10^{-6}$, т.е.

$$\max_{j=0, \dots, N} |F(x_j) - S(x_j)| \leq \varepsilon \quad (9)$$

В отчет включите таблицу 1 (коэффициенты сплайна) и таблицу 2 (сравнение функции и сплайна) (фрагментами, скрин); покажите графики функции и сплайна, а также их производных (скрин); подобранное Вами число n и погрешности запишите (от руки!) в таблицу 4.

– исследуйте с помощью программы порядок сходимости. Для $F(x) = f(x)$ с граничными условиями (3) постройте интерполирующий кубический сплайн при разных значениях n . Закономерность выбора n должна быть такой, чтобы оценка порядка сходимости была достаточно убедительной. Результаты запишите в таблицу 5, оцените порядок сходимости сплайна и его производных, итоги запишите в таблицу 4.

с) Повторите исследование, указанное в случае б), для осциллирующей функции $F(x) = f(x) + \cos 10x$,

при $x \in [a, b]$ с граничными условиями (3). По его результатам заполните новую таблицу, аналогичную таблице 4. Порядок сходимости подтвердите таблицами, аналогичными таблице 5.

Сравните результаты, полученные для $F(x) = f(x)$ и осциллирующей функций.

Оформление отчета

- 1) Отчет должен быть оформлен на бланке.
- 2) В отчете должны быть приведены:
 - сведения по теоретическим вопросам сплайн–интерполяции
 - скриншоты таблиц коэффициентов сплайна (таблица 1);
 - скриншоты таблиц сравнения функции и сплайна (таблица 2);
 - скриншоты графиков;
- 3) Приведите результаты проверки программы (задание а))
- 4) По результатам выполнения заданий b), c) отчет должен содержать таблицы, аналогичные таблице 4 и таблице 5 для подтверждения оценки порядка сходимости.
- 5) В отчет включите наблюдения и выводы. В приложении к отчету приведите код программы.

Таблица 4

$$f(x) = \quad , [a, b] = [\quad ; \quad]$$

$$S''(a) = 0, S''(b) = 0 \quad (\text{строки и столбцы с заливкой – опция})$$

	Выбор функции $F(x)$		
	$f(x)$	$f(x) + \cos 10x$	$\varphi(x)$
При $n = \quad$ »			
$\max_{j=0, \dots, N} F(x) - S(x) $			
$\max_{j=0, \dots, N} F'(x) - S'(x) $			
$\max_{j=0, \dots, N} F''(x) - S''(x) $			
При достижении погрешности сплайн-интерполяции не более $\varepsilon = 10^{-6}$			
Число участков сетки сплайна n			
$\max_{j=0, \dots, N} F(x) - S(x) $			
$\max_{j=0, \dots, N} F'(x) - S'(x) $			
$\max_{j=0, \dots, N} F''(x) - S''(x) $			
Оценка порядка сходимости			
Сходимость к функции (оценка порядка)			
Сходимость к производной (оценка порядка)			
Сходимость к второй производной (оценка порядка)			
«Остановка» сходимости: число участков, начиная с которого в силу накопления вычислительной погрешности «меняется» сходимость (опция)			
n^*			

Таблица 5

$$F(x) = \quad , [a, b] = [\quad ; \quad]$$

$$S''(a) = 0, S''(b) = 0$$

(столбец с заливкой – опция)

n	$\max_{j=0,\dots,N} F(x_j) - S(x_j) $	$\max_{j=0,\dots,N} F'(x_j) - S'(x_j) $	$\max_{j=0,\dots,N} F''(x_j) - S''(x_j) $
n_1			
n_2			
...			
Порядок сходимости			

Таблица 6

Варианты заданий

№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	2	4	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	13	1	π	$\frac{\sin^2(x)}{x}$
2	0	1	$\sqrt[3]{1+x^2}$	14	0	1	$\sqrt{1+x^4}$
3	0	2	$\frac{\sin(x+1)}{x+1}$	15	0	π	$\cos \frac{x^2}{4}$
4	0.2	2	$\frac{\ln(x+1)}{x+1}$	16	1	π	$\sqrt{x} \sin(x)$
5	2	4	$\frac{\ln(x+1)}{x}$	17	0	5	e^{x-3}
6	1	π	$\frac{\sin(x+1)}{x}$	18	0	1	$\frac{\sin(x)}{1+x^2}$
7	0	1	$\sin(\cos x)$	19	0	$\pi/2$	$\frac{\cos(x)}{1+x^2}$
8	0	1	$\sin(e^x)$	20	0	π	$\frac{x \sin(x)}{3}$
9	1	3	$\sqrt{e^x-1}$	21	0	2	$\sqrt{1+3x^2}$
10	1	π	$\cos(e^x)$	22	0	π	$\sqrt{1+3(\sin x)^2}$
11	1	π	$\sqrt{x} \cos(x)$	23	0	$\pi/2$	$\sqrt{4-2\sin(x)}$
12	1	3	$\frac{\sin(x)}{x}$	24	0	3	$e^{x-3} \cos(x)$