Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -f(x,y), (x,y) \in G \\ u(x,y) = \mu(x,y), (x,y) \in \partial G \end{cases}$$

Тестовая задача:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{1}{2}\exp(\sin^2 \pi xy)\pi^2(x^2+y^2)(-1-4\cos 2\pi xy + \cos 4\pi xy) \\ \mu(x,y) = \exp(\sin^2 \pi xy) \\ G = [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Для неё известно точное решение:

$$u^*(x,y) = \exp(\sin^2 \pi xy)$$

Основная задача:

$$\begin{cases} f(x,y) = \sin^2 \pi xy \\ \mu(0,y) = \mu(1,y) = \sin \pi y \\ \mu(x,0) = \mu(x,1) = x - x^2 \\ G = [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Для неё точное решение неизвестно.

Вводим сетку (n, m)

Шаги сетки $h = \frac{1}{n}, k = \frac{1}{m}$

$x_i = ih, i = \overline{0,n}; y_j = jk, j = \overline{0,m}$

Узлы (i,j)

Лапласиан аппроксимируем суммой центральных разностных операторов второго порядка на трёхточечном шаблоне

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{k^2} = -f_{i,j}, (i,j) \in \omega_{h,k} \\ v_{i,j} = \mu(x_i, y_j), (i,j) \in \gamma_{h,k} \end{cases}$$

$v_{i,j} = v(x_i, y_j)$ – сеточная функция. Упорядочим значения $v_{i,j}$ в вектор $\mathcal{V}$

Получим СЛАУ $\mathcal{AV} = \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ включает в себя ГУ и $f_{i,j}$

$\mathcal{A}$ – разреженная и предполагается большой размерности.

Для систем $Ax = b, A = A^T > 0$ можно использовать метод сопряжённых градиентов (МСГ)

$$\begin{cases} r^{(s)} = Ax^{(s)} - b \\ h^{(s)} = -r^{(s)} + \beta_s h^{(s-1)} \\ x^{(s+1)} = x^{(s)} + \alpha_s h^{(s)} \\ \alpha_s = -\frac{(r^{(s)}, h^{(s)})}{(Ah^{(s)}, h^{(s)})} \\ \beta_s = \frac{(Ah^{(s-1)}, r^{(s)})}{(Ah^{(s-1)}, h^{(s-1)})} \\ h^{(0)} = -r^{(0)} \\ x^{(0)} - \text{"удобное"} \end{cases}$$

Смысл метода – использование A-сопряжённых направлений h_s

$$(Ah_s, h_{s-1}) = 0$$

и минимизация на каждом шаге функционала

$$(Ax^{(s)}, x^{(s)}) - 2(b, x^{(s)}) \to min_{\alpha_{s-1}}$$

Для исходной системы известно $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T < 0$.
Поэтому для метода берём $A = -\mathcal{A}; b = -\mathcal{F}$.
Решение будет то же.