Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для линейной автономной системы ОДУ 2-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = -500.005u_1 + 499.995u_2 \\ \frac{du_2}{dx} = 499.995u_1 - 500.005u_2 \\ u_1(0) = 7; u_2(0) = 13 \end{cases}$$

Для решения используется неявный метод РК2 (из-за того, что система жёсткая):

$$\begin{cases} x_0, v_0 = u_0 \\ x_{n+1} = x_n + h_n \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, v_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, v_n + \frac{h_n}{2}(k_1 + k_2)) \end{cases}$$

Где

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

В нашем случае $x_0 = 0, f(x, u) = Au$, где

$$A = \begin{pmatrix} -500.005 & 499.995 \\ 499.995 & -500.005 \end{pmatrix}$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2 Получение формул метода

Решим систему на коэффициенты:

$$k_1 = Av_n$$

$$k_2 = A(v_n + \frac{h_n}{2}(k_1 + k_2)) = A(v_n + \frac{h_n}{2}k_1) + \frac{h_n}{2}Ak_2$$

Для простоты обозначим $p = A(v_n + \frac{h_n}{2}k_1)$. Тогда получим

$$k_2 = p + \frac{h_n}{2}Ak_2$$

$$Ek_2 = p + \frac{h_n}{2}Ak_2$$

$$(E - \frac{h_n}{2}A)k_2 = p$$

$$k_2 = (E - \frac{h_n}{2}A)^{-1}p$$

$$E - \frac{h_n}{2}A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h_n}{2}500.005 & -\frac{h_n}{2}499.995 \\ -\frac{h_n}{2}499.995 & 1 + \frac{h_n}{2}500.005 \end{pmatrix}$$

Определитель

$$D_n = (1 + \frac{h_n}{2}500.005)^2 - (\frac{h_n}{2}499.995)^2$$

Обратная матрица

$$(E - \frac{h_n}{2}A)^{-1} = \frac{1}{D_n}\begin{pmatrix} 1 + \frac{h_n}{2}500.005 & \frac{h_n}{2}499.995 \\ \frac{h_n}{2}499.995 & 1 + \frac{h_n}{2}500.005 \end{pmatrix}$$

Получаем формулы для компонент векторов:

$$\begin{cases} k_1^{(1)} = -500.005v_n^{(1)} + 499.995v_n^{(2)} \\ k_1^{(2)} = 499.995v_n^{(1)} - 500.005v_n^{(2)} \\ p^{(1)} = -500.005(v_n^{(1)} + \frac{h_n}{2}k_1^{(1)}) + 499.995(v_n^{(2)} + \frac{h_n}{2}k_1^{(2)}) \\ p^{(2)} = 499.995(v_n^{(1)} + \frac{h_n}{2}k_1^{(1)}) - 500.005(v_n^{(2)} + \frac{h_n}{2}k_1^{(2)}) \\ D_n = (1 + \frac{h_n}{2}500.005)^2 - (\frac{h_n}{2}499.995)^2 \\ k_2^{(1)} = \frac{1}{D_n}\{(1 + \frac{h_n}{2}500.005)p^{(1)} + \frac{h_n}{2}499.995p^{(2)}\} \\ k_2^{(2)} = \frac{1}{D_n}\{\frac{h_n}{2}499.995p^{(1)} + (1 + \frac{h_n}{2}500.005)p^{(2)}\} \end{cases}$$

Соответственно имеем:

$$\begin{cases} v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} + \frac{h_n}{2}(k_1^{(1)} + k_2^{(1)}) \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} + \frac{h_n}{2}(k_1^{(2)} + k_2^{(2)}) \end{cases}$$

3 Аналитическое решение

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = -500.005u_1 + 499.995u_2 \\ \frac{du_2}{dx} = 499.995u_1 - 500.005u_2 \\ u_1(0) = 7; u_2(0) = 13 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -500.005 - \lambda & 499.995 \\ 499.995 & -500.005 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(500.005 + \lambda)^2 - 499.995^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1000; \lambda_2 = -0.01$$

Собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0; \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Получаем:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1\exp\{-1000t\} \\ C_2\exp\{-0.01t\} \end{pmatrix}$$

Система на начальные условия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Она элементарно решается сложением и вычитанием строк. Получим $C_1 = \frac{7-13}{2} = -3; C_2 = \frac{7+13}{2} = 10$. Решение:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\exp\{-1000t\} + 10\exp\{-0.01t\} \\ 3\exp\{-1000t\} + 10\exp\{-0.01t\} \end{pmatrix}$$