

Math 341: Homework 1

Daniel Ko

Spring 2020

§1 A

a. $p \Rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

b. $p \vee F \Leftrightarrow F$

p	F	$p \vee F$	$p \vee F \Leftrightarrow F$
T	F	T	T
F	F	F	T

c. $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$
T	F	F	T
F	T	F	T

§2 B

a. $(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) && \text{(Transitivity)} \\
 & [(p \vee q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow p \vee q)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) && \text{(Def. of biconditional)} \\
 & \neg[(p \vee q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow p \vee q)] \vee (\neg p \vee r) && \text{(Material Implication)} \\
 & \neg[\neg(\neg(p \vee q) \vee (p \wedge r)) \wedge (\neg(p \vee r) \vee (p \vee q))] \vee (\neg p \vee r) && \text{(Material Implication)} \\
 & [\neg(\neg(p \vee q) \vee (p \wedge r)) \vee \neg(\neg(p \vee r) \vee (p \vee q))] \vee (\neg p \vee r) && \text{(De Morgan's Law)} \\
 & (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \vee (\neg\neg(p \vee r) \wedge \neg(p \vee q)) \vee (\neg p \vee r) && \text{(De Morgan's Law)} \\
 & ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \vee q)) \vee (\neg p \vee r) && \text{(Double negation)} \\
 & (\neg p \vee r) \vee ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \vee q)) && \text{(Commutative)} \\
 & ((\neg p \vee r) \vee (p \vee q)) \wedge ((\neg p \vee r) \vee \neg(p \wedge r)) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \vee q)) && \text{(Distributive)} \\
 & (True \wedge True) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \vee q)) && \text{(Excluded middle)} \\
 & True
 \end{aligned}$$

b. $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

$$\begin{aligned}
 & \neg[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \wedge q)] \vee \neg p \vee \neg r && \text{(Material Implication)} \\
 & \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r \wedge q) \vee \neg p \vee \neg r && \text{(De Morgan's Law)} \\
 & (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \vee \neg p \vee \neg r && \text{(De Morgan's Law)} \\
 & \neg p \vee (p \wedge q) \vee \neg r \vee (r \wedge \neg q) && \text{(Commutative)} \\
 & [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)] \vee [(\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q)] && \text{(Distributive)} \\
 & [(True) \wedge (\neg p \vee q)] \vee [(True) \wedge (\neg r \vee \neg q)] && \text{(Excluded middle)} \\
 & \neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg q && \text{(Excluded middle)} \\
 & True
 \end{aligned}$$

c. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\neg(q \wedge r) \Rightarrow \neg(p \wedge r)]$

$$\begin{aligned}
 & \neg(\neg p \vee q) \vee [\neg\neg(q \wedge r) \vee \neg(p \wedge r)] && \text{(De Morgan's Law)} \\
 & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r) && \text{(De Morgan's Law + Negation)} \\
 & \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee (q \wedge r) && \text{(Commutative)} \\
 & [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee [(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee r)] && \text{(Distributive)} \\
 & [(True) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee [(\neg r \vee q) \wedge (True)] && \text{(Excluded middle)} \\
 & \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee q && \text{(Excluded middle)} \\
 & True
 \end{aligned}$$

d. $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \neg p$

$\neg[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge r] \vee \neg p$	(Material Implication)
$\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r \vee q) \vee \neg r \vee \neg p$	(De Morgan's Law)
$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \vee \neg r \vee \neg p$	(De Morgan's Law)
$\neg p \vee (p \wedge q) \vee \neg r \vee (r \wedge \neg q)$	(Commutative)
$[(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)] \vee [(\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q)]$	(Distributive)
$[(True) \wedge (\neg p \vee q)] \vee [(True) \wedge (\neg r \vee \neg q)]$	(Excluded middle)
$\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg q$	(Excluded middle)
$True$	(Excluded middle)