高等代数（上册）

——大学高等代数课程创新教材

丘维声 著

序

高等代数是大学数学科学学院（或数学系，应用数学系）最主要的基础课程之一。本套教材是作者在北京大学进行高等代数课程建设和教学改革的成果，它具有下述鲜明特色。

1．明确主线：以研究线性空间和多项式环的结构及其态射（线性映射，多项式环的通用性质）为主线。自从1832年伽罗瓦（Galois）利用一元高次方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件之后，在数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统的结构及其态射（即保持运算的映射）成为现代代数学研究的中心问题。20世纪，代数学研究结构及其态射的观点已经渗透到现代因此在数学的各个分支中。因此，高等代数课程的教学中贯彻研究线性空间和多项式环的结构及其态射拍摄这条主线，就是把握住了代数学的精髓。

本套教材上册的第1,2,3章研究线性方程组的解法、解的情况的判别和解集的结构时，贯穿了研究数域上维向量空间及其子空间的结构这条主线。线性方程组是数学中最基础、最有用的知识，维向量空间是维线性空间的一个具体模型，元齐次线性方程组的解空间的维数公式本质上是线性映射的核与值域的维数公式。因此把线性方程组和维向量空间作为高等代数课程的开始部分的内容，既符合学生的认知规律，又是高等代数知识的内在规律的体现。上册的第4,5,6章研究矩阵的运算，矩阵的相抵、相似、合同关系及与它们有关的矩阵的特征值和特征向量、二次型。研究矩阵的运算为研究线性映射打下了基础。矩阵的相抵关系在解决有关矩阵的秩的问题中起着重要作用，而矩阵的秩本质上是相应的线性映射的值域的维数。研究矩阵的相似标准形本质上是研究线性变换在一个合适的基下的矩阵具有最简单的形式。研究对称矩阵的合同标准形与研究二次型的化简密切相关，而二次型与线性空间上的双线性函数有密切联系。

本套教材下册的第7章，研究一元和元多项式环的结构及其态射（多项式环的通用性质），第8章研究线性空间的结构，第9章研究线性映射，第10章研究具有度量的线性空间的结构及与度量有关的线性变换，第11章研究多重线性代数时，基础概念是多重线性映射，主要工具是线性空间的张量积。

2.内容全面。本套教材包括线性代数，多项式理论，环、域、群的概念及重要例子，多重线性代数，共四部分，在下册第7章从数域上所有一元多项式组成的集合、整数集、数域上所有级矩阵组成的集合都有加法和乘法运算，自然而然地引出了环的概念；从数域上所有分式组成的集合、模剩余类（是素数）组成的集合，水到渠成地引出了域的概念。于是我们在下册第8章讲的是任意域上的线性空间，而不只是数域上的线性空间。这是当今信息时代的需要，因为在信息的安全与可靠中大量使用二元域上的线性空间理论。我们不仅着重研究有限维的线性空间，也研究无限维的线性空间，因为许多函数空间都是无限维线性空间。我们在第9章不仅研究线性变换的Jordan标准形，而且研究线性变换的有理标准形。我们在第10章不仅研究欧几里得空间和酉空间，而且研究正交空间和辛空间；不仅研究欧几里得空间上的正交变换、对称变换，酉空间上的酉变换，而且研究酉空间上的Hermite变换、正规变换。在第10章讲了欧几里得空间上的正交变换，酉空间上的酉变换，正交空间上的正交变换，辛空间上的辛变换之后，水到渠成地引出群的概念，介绍了正交群、酉群、辛群。我们在第11张研究了线性空间的张量积，张量及张量代数，外代数（或格拉斯曼（Grassmann）代数），它们在微分几何、现代分析、群表示论和量子力学等领域中有重要应用。

本套教材的第一、二、三个组成部分，内容之间的内在联系可以用下述框图来表示：