1　整数の集合 $\mathbb{Z}$ の定義について

今から行いたいのは, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ が加法に関して群をなすことの証明である. そのためには加法の定義がないといけない. そのため少々面倒であるが, 以下のような定式化を行う.
$\mathbb{Z}$ の元 z を, 二つの自然数 (0 以上の整数) の組 (x, y) で表す.($z = x - y$ と書ける)
(i) 同値

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \Longleftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

より, 二つの $\mathbb{Z}$ の元の等しさをこれを使って判定できる.
(ii) 足し算, 引き算

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 + y_2, y_1 + x_2)$$

で良いだろう.
(iii) 反数
ある数に対して,(-1) 倍の数を反数という.(加法群における逆元になっているためだろうか. それほど一般的でない)

$$-(x_1, y_1) = (y_1, x_1)$$

このとき, 以下のことを示す.
(1) 反射律, 対称律, 推移律を示す
反射律:

$$\forall z \in \mathbb{Z}, z = z$$

対称律:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, z_1 = z_2 \Longrightarrow z_2 = z_1$$

推移律:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}, z_1 = z_2 \wedge z_2 = z_3 \Longrightarrow z_1 = z_3$$

(2) 足し算の定義が well-defined である

$$\forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{Z}; z_1 = z_2, z_3 = z_4 \Rightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

(3) 足し算に単位元 $0_{\mathbb{Z}}$ が存在する (これは (0,0) である)

$$\forall z \in \mathbb{Z}, z + 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} + z = z$$

(4) 任意の $z \in \mathbb{Z}$ に対して逆元 $\mathrm{inv}(z)$ が存在し以下を満たす

$$\forall z \in \mathbb{Z}, z + \mathrm{inv}(z) = \mathrm{inv}(z) + z = 0_{\mathbb{Z}}$$

(5) 結合法則が満たされる

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

以上の定理は自然数に関する定理によって証明できる. 試してみるとよいだろう.