1　レムニスケートサイン/コサイン函数

1.1　実函数としてのレムニスケートサイン函数

定義 1.1.1　レムニスケートサイン函数 (lemniscate sine function)sl(u) を、以下の関数 $u(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ の逆関数として定義する.

$$u(s) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr$$

また, レムニスケート周率 (lemniscate constant) を,

$$\varpi := 2u(1) = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr$$

で定める.(約 2.6221)

$\mathrm{sl}(u)$ は $0 \leq u \leq \varpi/2$ で定義された関数である. また $\mathrm{sl}(u)$ は以下の性質を持っている.(証明略)

命題 1.1.2　$\mathrm{sl}(u)(0 \leq u \leq \varpi/2)$ は以下を満たす.

$$\begin{gathered} \mathrm{sl}(0) = 0 \\ \mathrm{sl}'(u) = \sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4} \qquad (1) \\ \mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 1 \end{gathered}$$

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(v)^4} + \mathrm{sl}(v)(1+\mathrm{sl}(v)^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+\mathrm{sl}(v)^2) - \mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}\sqrt{1-\mathrm{sl}(v)^4}} \quad \text{(加法公式)}$$

$\mathrm{sl}(u)$ の定義域を以下のようにして $0 \leq u \leq 2\varpi$ に拡張することができる.

$$\begin{cases} \mathrm{sl}(u) = \mathrm{sl}(\varpi - u) & (\text{if } \frac{\varpi}{2} \leq u \leq \varpi) \\ \mathrm{sl}(u) = -\mathrm{sl}(u-\varpi) & (\text{if } \varpi \leq u \leq 2\varpi) \end{cases}$$

またこのようにして拡張した $\mathrm{sl}(u)$ を周期 2ϖ の周期函数と見ることによって定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張することができる. 以降 $\mathrm{sl}(u)$ はこのようにして定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張した函数のことを指すものとする.

命題 1.1.3　函数 $\mathrm{sl} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で, 微分可能であり, 周期 2ϖ である. またこれに対しても加法定理は成り立つ ($\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}$ などに適切に符号をつければ).

注意 1.1.4　このとき (1) 式は必ずしも成り立たない ($\mathrm{sl}'(u)$ が負になることもある) ことに注意すること.
なお (1) 式の両辺を 2 乗した

$$\mathrm{sl}'(u)^2 = 1 - \mathrm{sl}(u)^4$$

は $\mathbb{R}$ 全体で成り立つ.

このままでは加法定理に根号が入っており $0 \leq u \leq \varpi$ の場合を扱うときに困るので, これを消去することを考える. そのために函数 $\mathrm{cl}(u)$ を定義する.

加法公式に $v=\varpi/2$ を代入する.$(0\leq u\leq\varpi/2)$

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)&=\frac{\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)\sqrt{1-1^4}+1(1+1^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+1^2)-\mathrm{sl}(u)\cdot1\cdot\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}\sqrt{1-1^4}}\\&=\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{1+\mathrm{sl}(u)^2}\end{aligned}$$

$0\leq u\leq\varpi/2$ かつ $v=\varpi/2$ であるため根号の中身は負にはならない. これをレムニスケートコサイン函数 (lemniscate cosine function) と呼ぶことにする.

定義 1.1.5 レムニスケートコサイン函数 (lemniscate cosine function) $\mathrm{cl}(u)$ $(u\in\mathbb{R})$ を以下のように定義する.

$$\mathrm{cl}(u):=\mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)$$

また,$0\leq u\leq\varpi/2$ とすると

$$\mathrm{cl}(u)=\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{1+\mathrm{sl}(u)^2}$$

が成立する.

これを用いると加法公式は $(0\leq u,v\leq\varpi/2$ の範囲では) 以下のように書き直せる.

定理 1.1.6 (加法定理)
$0\leq u,v\leq\varpi/2$ のとき, 以下が成立する. またこの式は一般に $u,v\in\mathbb{R}$ のとき成立する.

$$\mathrm{sl}(u+v)=\frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)}$$

以上により, 周期 2ϖ の周期函数 $\mathrm{sl}(u),\mathrm{cl}(u)$ が定義された.
レムニスケートサイン/コサイン函数は以下の性質を持つ.

命題 1.1.7 以下が成立する.

1. sl,cl の特殊値
$$\mathrm{sl}(0)=0,\ \mathrm{cl}(0)=1,\ \mathrm{sl}(\varpi/2)=1,\ \mathrm{cl}(\varpi/2)=0$$
2. 導関数
$$\mathrm{sl}'(u)=\mathrm{cl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2),\mathrm{cl}'(u)=-\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{cl}(u)^2)$$
3. 両者の間の恒等式
$$(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+\mathrm{cl}(u)^2)=2\quad(\forall u\in\mathbb{R})$$
4. 両者の間の恒等式 (2)
$$\mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)=\mathrm{cl}(u),\ \mathrm{cl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)=-\mathrm{sl}(u)$$
5. 対称性
$$\mathrm{sl}(-u)=-\mathrm{sl}(u),\ \mathrm{cl}(-u)=\mathrm{cl}(u)$$

6. 加法定理

$$\mathrm{sl}(u+v)=\frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)}$$
$$\mathrm{cl}(u+v)=\frac{\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1+\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)}$$

7. 2 倍角の公式

$$\mathrm{sl}(2u)=\frac{2\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)}{1+\mathrm{sl}(u)^4},\ \mathrm{cl}(2u)=\frac{1-2\mathrm{sl}(u)^2-\mathrm{sl}(u)^4}{1+2\mathrm{sl}(u)^2-\mathrm{sl}(u)^4}=-\frac{1-2\mathrm{cl}(u)^2-\mathrm{cl}(u)^4}{1+2\mathrm{cl}(u)^2-\mathrm{cl}(u)^4}$$

1.2 複素函数としてのレムニスケートサイン/コサイン

$\mathrm{sl}(u)$ の Taylor 展開

$\mathrm{sl}'(u)$ は $\mathrm{sl}(u)$ と $\mathrm{cl}(u)$ で表せるので,$\mathrm{sl}(u)$ は無限回微分可能である. よって $z=0$ の周りにおける Taylor 展開が存在する. 関係式

$$\mathrm{sl}'(u)=\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}$$

を用いて,

$$\mathrm{sl}(u)=u+O(u^2)\longrightarrow \mathrm{sl}'(u)=\sqrt{1-(u^4+O(u^5))}=1-\frac{1}{2}u^4+O(u^5)\longrightarrow \mathrm{sl}(u)=u-\frac{1}{10}u^5+O(u^6)$$
$$\longrightarrow \mathrm{sl}'(u)=\sqrt{1-\left(u^4-\frac{2}{5}u^8+O(u^9)\right)}=1-\frac{1}{2}u^4+\frac{3}{40}u^8+O(u^9)\longrightarrow \mathrm{sl}(u)=u-\frac{1}{10}u^5+\frac{1}{120}u^9+O(u^{10})$$

を得る. ここで, 以下の命題が成り立つ.

命題 1.2.1 $\mathrm{sl}(u)$ の Taylor 展開を

$$\mathrm{sl}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nu^n$$

とする. このとき,

$$b_n=0 \quad (\text{if } n\not\equiv 1 \pmod 4)$$

である.(証明略)

この事実から,$\mathrm{sl}(u)$ の Taylor 展開に $u=it$ を形式的に代入することで,

$$\mathrm{sl}(it)=i\mathrm{sl}(t)$$

が得られる. またこのとき,

$$\mathrm{cl}(it)=\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(it)^4}}{1+\mathrm{sl}(it)^2}=\frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(t)^4}}{1-\mathrm{sl}(t)^2}=\frac{1}{\mathrm{cl}(t)}$$

も導かれる. この式を元にして $\mathrm{sl}(u),\mathrm{cl}(u)$ の定義域を複素数全体に拡張する.

定義 1.2.2 $u,v\in\mathbb{R}$ について,

$$\mathrm{sl}(it)=i\mathrm{sl}(t),\ \mathrm{cl}(it)=\frac{1}{\mathrm{cl}(t)}$$

と定め, $u+iv \in \mathbb{C}$ については, 加法定理を形式的に用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(u+iv) &:= \frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(iv)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(iv)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(iv)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(iv)} \\ &= \frac{\mathrm{sl}(u)/\mathrm{cl}(v)+i\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1-i\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)/\mathrm{cl}(v)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(u+iv) &:= \frac{\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(iv)-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(iv)}{1+\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(iv)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(iv)} \\ &= \frac{\mathrm{cl}(u)/\mathrm{cl}(v)-i\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1+i\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)/\mathrm{cl}(v)}\end{aligned}$$

と定める. このとき $\mathrm{sl}, \mathrm{cl} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は (一部の点を除いて定義される) 複素函数であり, 加法定理と

$$\mathrm{sl}(iz) = i\mathrm{sl}(z),\ \mathrm{cl}(iz) = \frac{1}{\mathrm{cl}(z)} \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

および関係式

$$(1+\mathrm{sl}(z)^2)(1+\mathrm{cl}(z)^2) = 2 \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

を満たす.(証明略)

注意 1.2.3 sl, cl は ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の写像としてみたとき) 定義されない点を持つ. その場合は $\mathrm{sl}(z) = \infty$ と定める.

以降は引数が複素数であることを強調するために引数として文字 z を使う.

$\mathrm{sl}(z), \mathrm{cl}(z)$ の特殊値を求める.

命題 1.2.4

$$\mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = i,\ \mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi(1+i)\right) = \infty,\ \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = \infty,\ \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi(1+i)\right) = -i$$

(証明)

$$\mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = i\mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi\right) = i \cdot 1 = i$$

$$\mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = \frac{1}{\mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi\right)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi(1+i)\right) = \mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = \infty$$

$$\mathrm{cl}\left(\frac{1}{2}\varpi(1+i)\right) = -\mathrm{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi i\right) = -i$$

□

命題 1.2.5

$$\mathrm{sl}(\varpi(1+i)) = 0,\ \mathrm{cl}(\varpi(1+i)) = 1$$

(証明)

2 倍角の公式を用いる.$c := \mathrm{cl}(\varpi(1+i)/2) = -i$ とおく.

$$\mathrm{cl}(\varpi(1+i)) = -\frac{1-2c^2-c^4}{1+2c^2-c^4} = -\frac{1+2-1}{1-2-1} = 1$$

また, 関係式 (2)

$$(1+\mathrm{sl}(z)^2)(1+\mathrm{cl}(z)^2)=2 \quad (\forall z\in\mathbb{C})$$

より

$$(1+\mathrm{sl}(\varpi(1+i))^2)(1+\mathrm{cl}(\varpi(1+i))^2)=2$$
$$(1+\mathrm{sl}(\varpi(1+i))^2)(1+1)^2)=2$$
$$1+\mathrm{sl}(\varpi(1+i))^2=1$$
$$\mathrm{sl}(\varpi(1+i))=0$$

□

以上より,$z=\varpi(1+i)$ での sl,cl の値は $z=0$ での値に等しい. また,sl, cl の導関数はすべて sl,cl の式で表せるので,$z=\varpi(1+i)$ での sl,cl の任意の階数の微分の値は $z=0$ での値に等しい. よって $z=\varpi(1+i)$ 近傍の振る舞いと $z=0$ 近傍の振る舞いは同じであり,sl, cl は周期 $\varpi(1+i)$ の周期函数である. これを直接的に示す.

定理 1.2.6

$$\mathrm{sl}(z+\varpi(1+i))=\mathrm{sl}(z),\ \mathrm{cl}(z+\varpi(1+i))=\mathrm{cl}(z)$$

(証明) 加法定理より明らか.

□

以上より $\mathrm{sl}(z),\mathrm{cl}(z)$ は**二重周期函数**である.

2 ヴァイエルシュトラスの $\wp$ 函数

(大幅に省略. 格子,$\wp_L(z)$,$G_n(L)$ を定義する.)

3 $\mathrm{sl}(z),\mathrm{cl}(z)$ と $\wp_L(z)$ のアヤシイ関係

$L:=\varpi\{1-i,1+i\}$ とおく.
$\mathrm{sl}(z)$ の零点は $0+L,\varpi+L$(どちらも 1 位), 極は $\varpi(1-i)/2+L,\varpi(1+i)/2+L$(どちらも 1 位) にある.
$\wp_L(z)$ の零点は $\varpi+L$(2 位), 極は L(2 位) にある.
$\wp'_L(z)$ の零点は $\varpi+L,\varpi(1-i)/2+L,\varpi(1+i)/2+L$(各 1 位), 極は L(3 位) にある.
よって, 函数

$$f(z):=\frac{\mathrm{sl}(z)\wp'_L(z)}{\wp_L(z)}$$

は極も零点も持たない.
$\mathrm{sl},\wp_L,\wp'_L$ はすべて周期函数で周期は L であるため,$f(z)$ も周期 L の周期函数である. よって $f(\mathbb{C})$ は有界であり,Liouville の定理より $f(z)$ は定数である. ここで $f(z)$ の $z\to 0$ での挙動を考えると,

$$\mathrm{sl}(z)=z+O(z^5),\wp'_L(z)=-2z^{-3}+O(z),\wp_L(z)=z^{-2}+O(z^2)$$

より,

$$f(z)=-2+O(z^4)$$

である. よって,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = -2$$

である. よって,

$$f(z) = \frac{\mathrm{sl}(z)\wp_L'(z)}{\wp_L(z)} = -2$$

であるから,

$$\mathrm{sl}(z) = -\frac{2\wp_L(z)}{\wp_L'(z)}$$

である.

参考文献

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Lemniscatic_elliptic_function

[2] http://ja.wikipedia.org/wiki/レムニスケート周率