1 $\mathbb{Q}(\sqrt{-199})$ の類数

Minkowski Bound は

$$\sqrt{|D|}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}\cdot\frac{n!}{n^n}=\sqrt{199}\cdot\frac{2}{\pi}\sim 8.980627$$

より、Norm が 8 以下のイデアルを調べればよい.(もっぱら素イデアルを調べる).

$$\theta=\frac{-1+\sqrt{-199}}{2}$$

とおく.(最小多項式は $f(x)=x^2+x+50$)

(i)$p=2$

$$f(x)=x^2+x+50\equiv x(x+1)\pmod 2$$

より,

$$(2)=(2,\theta)(2,\theta+1)\tag{1}$$

($\mathfrak{p}_0=(2,\theta),\mathfrak{p}_1=(2,\theta+1)$ とおく)

(ii)$p=3$

$f(x)$ は mod3 で既約なので,(3) は prime である.

(iii)$p=5$

$$f(x)\equiv x(x+1)\pmod 5$$

より,

$$(5)=(5,\theta)(5,\theta+1)\tag{2}$$

($\mathfrak{p}_2=(5,\theta),\mathfrak{p}_3=(5,\theta+1)$ とおく)

同様にして

$$(7)=(7,\theta-2)(7,\theta+3)\tag{3}$$

($\mathfrak{p}_4=(7,\theta-2),\mathfrak{p}_5=(7,\theta+3)$ とおく)

ここで,$\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_5$ の関係を調べたいと思う.

$f(0)=50$ より,$N(\theta)=50=2\cdot 5^2$ である. また,

$$\mathfrak{p}_0|\theta,\mathfrak{p}_2|\theta,\mathfrak{p}_3\nmid\theta$$

であるため,

$$(\theta)=\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_2^2\tag{4}$$

である. 同様にして,

$$(\theta-2)=\mathfrak{p}_0^3\mathfrak{p}_4\quad(f(2)=56=2^3\cdot 7\text{ より})\tag{5}$$

$$(\theta - 4) = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5 \quad (f(4) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ より}) \tag{6}$$

$$(\theta - 5) = \mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2 \quad (f(5) = 80 = 2^4 \cdot 5 \text{ より}) \tag{7}$$

以上 7 本の式から,

$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \sim (1) \tag{8}$$
$$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \sim (1) \tag{9}$$
$$\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5 \sim (1) \tag{10}$$
$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_2^2 \sim (1) \tag{11}$$
$$\mathfrak{p}_0^3\mathfrak{p}_4 \sim (1) \tag{12}$$
$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5 \sim (1) \tag{13}$$
$$\mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2 \sim (1) \tag{14}$$

がいえる.((1) は環 $\mathbb{Z}[\theta]$ 自身を表す.)
ここから,

$$\mathfrak{p}_0^9 \sim (1), \mathfrak{p}_0^3 \not\sim (1)$$

$$\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p}_0^8, \mathfrak{p}_2 \sim \mathfrak{p}_0^4, \mathfrak{p}_3 \sim \mathfrak{p}_0^5, \mathfrak{p}_4 \sim \mathfrak{p}_0^6, \mathfrak{p}_5 \sim \mathfrak{p}_0^3,$$

が示される (計算省略). よって,

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-199})) \simeq \mathbb{Z}/(9)$$

である. (それぞれの ideal が単項であるないを判定するのが難しい)

2 $\mathbb{Q}(\mu_5) = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ の類数

μ_5 の最小多項式は,$f(x) = (x^5 - 1)/(x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ である.
ここで,$\mathbb{Z}_{Q(\zeta_5)} = \mathbb{Z}[\zeta_5]$ が成り立つので, 整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ 上のイデアルの分解は簡単である.

$$D(\mathbb{Q}(\zeta_5)) = 5^3 = 125, n = 4, r_1 = 0, r_2 = 2$$

であるので,Minkowski Bound は

$$\sqrt{125}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{4!}{4^4} \sim 1.6992$$

よって, 調べるまでもなく類数は 1 である.

3 $\mathbb{Q}(\mu_{23}) = \mathbb{Q}(\zeta_{23})$ の類数

ζ_{23} の最小多項式は,$f(x) = (x^{23} - 1)/(x - 1)$ である.
ここで,$\mathbb{Z}_{Q(\zeta_{23})} = \mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ が成り立つので, 整数環 $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ 上のイデアルの分解は簡単である.