1　レムニスケートサイン/コサイン函数

1.1　実函数としてのレムニスケートサイン函数

定義 1.1.1　レムニスケートサイン函数 (lemniscate sine function)$\mathrm{sl}(u)$ を、以下の関数 $u(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ の逆関数として定義する.

$$u(s) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr$$

また, レムニスケート周率 (lemniscate constant) を,

$$\varpi := 2u(1) = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr$$

で定める.(約 2.6221)

$\mathrm{sl}(u)$ は $0 \leq u \leq \varpi/2$ で定義された関数である. また $\mathrm{sl}(u)$ は以下の性質を持っている.(証明略)

命題 1.1.2　$\mathrm{sl}(u)(0 \leq u \leq \varpi/2)$ は以下を満たす.

$$\mathrm{sl}(0) = 0$$

$$\mathrm{sl}'(u) = \sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4} \tag{1}$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 1$$

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(v)^4} + \mathrm{sl}(v)(1+\mathrm{sl}(v)^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+\mathrm{sl}(v)^2) - \mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}\sqrt{1-\mathrm{sl}(v)^4}} \quad \text{(加法公式)}$$

$\mathrm{sl}(u)$ の定義域を以下のようにして $0 \leq u \leq 2\varpi$ に拡張することができる.

$$\begin{cases} \mathrm{sl}(u) = \mathrm{sl}(\varpi - u) & (\text{if } \frac{\varpi}{2} \leq u \leq \varpi) \\ \mathrm{sl}(u) = -\mathrm{sl}(u - \varpi) & (\text{if } \varpi \leq u \leq 2\varpi) \end{cases}$$

またこのようにして拡張した $\mathrm{sl}(u)$ を周期 2ϖ の周期函数と見ることによって定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張することができる. 以降 $\mathrm{sl}(u)$ はこのようにして定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張した函数のことを指すものとする.

命題 1.1.3　函数 $\mathrm{sl} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で, 微分可能であり, 周期 2ϖ である. またこれに対しても加法定理は成り立つ ($\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}$ などに適切に符号をつければ).

注意 1.1.4　このとき (1) 式は必ずしも成り立たない ($\mathrm{sl}'(u)$ が負になることもある) ことに注意すること.
なお (1) 式の両辺を 2 乗した

$$\mathrm{sl}'(u)^2 = 1 - \mathrm{sl}(u)^4$$

は $\mathbb{R}$ 全体で成り立つ.

このままでは加法定理に根号が入っており $0 \leq u \leq \varpi$ の場合を扱うときに困るので, これを消去することを考える. そのために函数 $\mathrm{cl}(u)$ を定義する.

加法公式に $v=\varpi/2$ を代入する.$(0 \le u \le \varpi/2)$

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right) &= \frac{\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)\sqrt{1-1^4}+1(1+1^2)\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+1^2)-\mathrm{sl}(u)\cdot 1\cdot\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}\sqrt{1-1^4}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{1+\mathrm{sl}(u)^2}\end{aligned}$$

$0 \le u \le \varpi/2$ かつ $v=\varpi/2$ であるため根号の中身は負にはならない. これをレムニスケートコサイン函数 (lemniscate cosine function) と呼ぶことにする.

定義 1.1.5 レムニスケートコサイン函数 (lemniscate cosine function) $\mathrm{cl}(u)$ $(u \in \mathbb{R})$ を以下のように定義する.

$$\mathrm{cl}(u) := \mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)$$

また,$0 \le u \le \varpi/2$ とすると

$$\mathrm{cl}(u) = \frac{\sqrt{1-\mathrm{sl}(u)^4}}{1+\mathrm{sl}(u)^2}$$

が成立する.

これを用いると加法公式は $(0 \le u, v \le \varpi/2$ の範囲では) 以下のように書き直せる.

定理 1.1.6 (加法定理)
$0 \le u, v \le \varpi/2$ のとき, 以下が成立する. またこの式は一般に $u, v \in \mathbb{R}$ のとき成立する.

$$\mathrm{sl}(u+v) = \frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)}$$

以上により, 周期 2ϖ の周期函数 $\mathrm{sl}(u), \mathrm{cl}(u)$ が定義された.
レムニスケートサイン/コサイン函数は以下の性質を持つ.

命題 1.1.7 以下が成立する.

1. sl, cl の特殊値
$$\mathrm{sl}(0)=0,\ \mathrm{cl}(0)=1,\ \mathrm{sl}(\varpi/2)=1,\ \mathrm{cl}(\varpi/2)=0$$
2. 導関数
$$\mathrm{sl}'(u)=\mathrm{cl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2), \mathrm{cl}'(u)=-\mathrm{sl}(u)(1+\mathrm{cl}(u)^2)$$
3. 両者の間の恒等式
$$(1+\mathrm{sl}(u)^2)(1+\mathrm{cl}(u)^2)=2 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$$
4. 両者の間の恒等式 (2)
$$\mathrm{sl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)=\mathrm{cl}(u),\ \mathrm{cl}\left(u+\frac{\varpi}{2}\right)=-\mathrm{sl}(u)$$
5. 対称性
$$\mathrm{sl}(-u)=-\mathrm{sl}(u),\ \mathrm{cl}(-u)=\mathrm{cl}(u)$$

6. 加法定理

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sl}(u+v) &= \frac{\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(v)+\mathrm{cl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)} \\
\mathrm{cl}(u+v) &= \frac{\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)-\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)}{1+\mathrm{sl}(u)\mathrm{sl}(v)\mathrm{cl}(u)\mathrm{cl}(v)}
\end{aligned}
$$

7. 2 倍角の公式

$$
\mathrm{sl}(2u) = \frac{2\mathrm{sl}(u)\mathrm{cl}(u)(1+\mathrm{sl}(u)^2)}{1+\mathrm{sl}(u)^4},\ \mathrm{cl}(2u) = \frac{1-2\mathrm{sl}(u)^2-\mathrm{sl}(u)^4}{1+2\mathrm{sl}(u)^2-\mathrm{sl}(u)^4} = -\frac{1-2\mathrm{cl}(u)^2-\mathrm{cl}(u)^4}{1+2\mathrm{cl}(u)^2-\mathrm{cl}(u)^4}
$$

参考文献

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Lemniscatic_elliptic_function

[2] http://ja.wikipedia.org/wiki/レムニスケート周率