木幅チュートリアル I

説明 1：木分解と木幅の定義

- 問題 1, 2: 木分解の条件 1 の確認
- 問題 3, 4: 木分解の条件 2 の確認
- 問題 5–8: 木分解の条件 3 の確認

木幅チュートリアル II

説明 1. グラフのセパレーション

- 問題 1–3: セパレーションの定義確認

説明 2. セパレーションとセパレータ

- 問題 4–6: セパレーションとセパレータの理解

説明 3. 木分解とセパレーション

- 問題 7–8: 木分解の辺に対応するセパレーションの確認
- 問題 9–12: 木分解のセパレーションと条件 3 との関係の確認

説明 4.「セパレーション定理」の証明

- 問題 13–15: セパレーション定理の証明の理解

木幅チュートリアル III

説明：木分解上の動的計画法

- 例：グラフの 3 彩色問題
- 問題 1–4: 木分解によって定義される部分問題の理解
- 問題 5–10: 木分解上の動的計画法の実行例

説明 I: 木分解と木幅の定義

グラフ G の木分解とは、木 T と T のノードへのバッグ割り当て $\{X_p\}_{p\in V(G)}$ の対で, 次の 3 条件を満たすものを言う. ここで,X_p は T のノード p に割り当てられた G の頂点集合で,「バッグ」と呼ばれる.

- **条件 1:** $\bigcup_{p\in V(T)} X_p = V(G)$
- **条件 2:** G のどの辺 $\{u,v\}$ に対しても,$u,v \in X_p$ であるような $p \in V(T)$ が存在する.
- **条件 3:** T において p と q を結ぶパス上のどのノード r においても $v \in X_r$ に属す.

説明（続き）

木分解の「幅」は, もし $v \in V(G)$ が X_p と X_q に属するならば, バッグの大きさ（頂点数）の最大値-1($\max_{p\in V(T)} |X_p| - 1$) と定義される.
グラフ G の「木幅」は,G の幅 k の木分解が存在するような k の最小値と定義される.

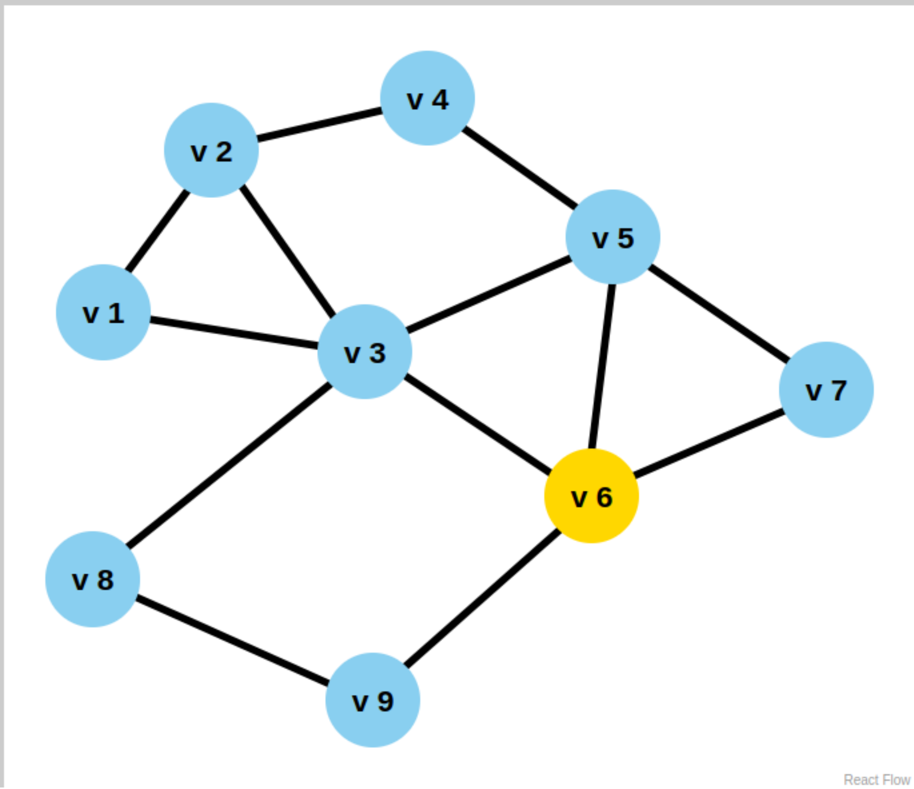

Figure 1: 図 G

問題 1-1

右図のグラフ G に対して、木 T と T の頂点へのバッグ割り当て $\{X_p\ p \in V(T)\}$ が図のように与えられている.
問い：このバッグ割り当ては木分解の条件 1 を満たしているか？

- $X_1 = \{a, b, c\}$
- $X_2 = \{b, c, d, e\}$
- $X_3 = \{c, e, f\}$
- $X_4 = \{\}$
- $X_5 = \{c, h, i\}$

解答候補：

1. 満たしている
2. 頂点 b を含むバッグが 2 つ以上あるので満たしていない
3. 頂点 g がどのバッグにも含まれないので満たしていない
4. バッグ X_4 に属す頂点がないので満たしていない

問題 1-3

- $X_1 = \{a, b, c\}$
- $X_2 = \{b, c, d, e\}$

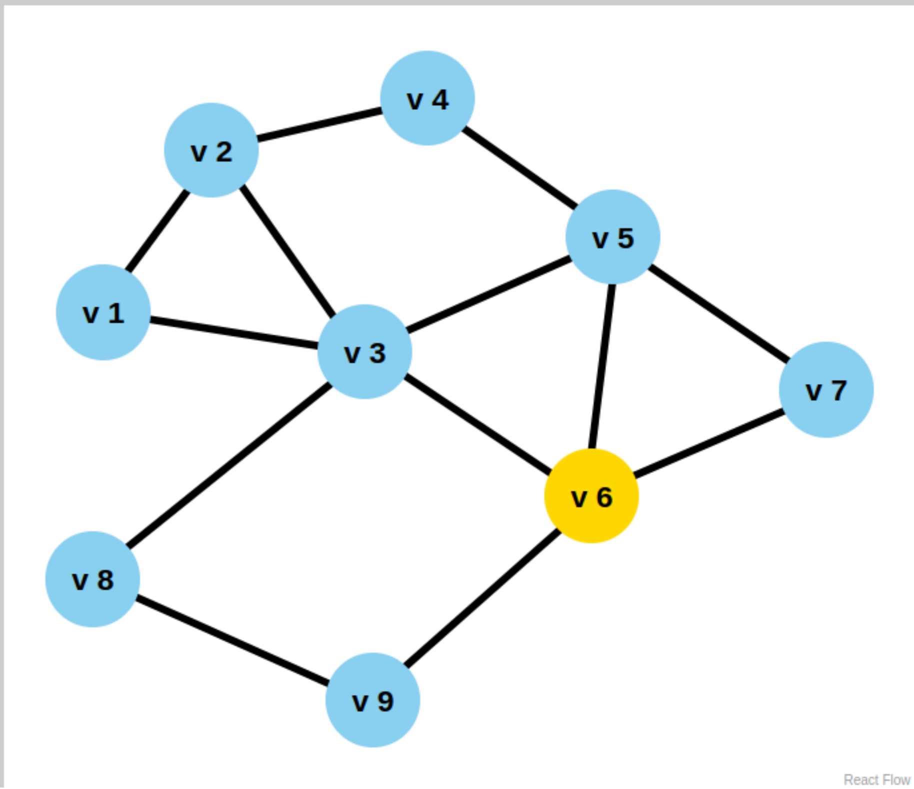

Figure 2: 図 G

- $X_3 = \{c, e, f\}$
- $X_4 = \{f, g\}$
- $X_5 = \{c, h, i\}$

グラフ G に対して木 T と T の頂点へのバッグ割り当て $X_p p \in V(T)$ が図のように与えられている．
問い：このバッグ割り当ては木分解の条件 2 を満たしているか？（中略：X_p の構成）

1. 満たしている
2. 辺 (f, g) の両端点を含むバッグがないので満たしていない
3. 辺 (c, f) の両端点を含むバッグがないので満たしていない
4. バッグ X_2 に属す頂点 c, d の間に辺があるので満たしていない

問題 1-5

- $X_1 = \{a, b, c\}$
- $X_2 = \{b, d, e\}$
- $X_3 = \{c, e, f\}$
- $X_4 = \{e, f, g\}$
- $X_5 = \{c, h, i\}$

右図のグラフ G に対して，木 T と T の頂点へのバッグの割り当て $\{X_p\}$ が図のように与えられている．
問い： このバッグ割り当ては**木分解の条件 3** を満たしているか？
木のエッジ：$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)$
選択肢と判定:

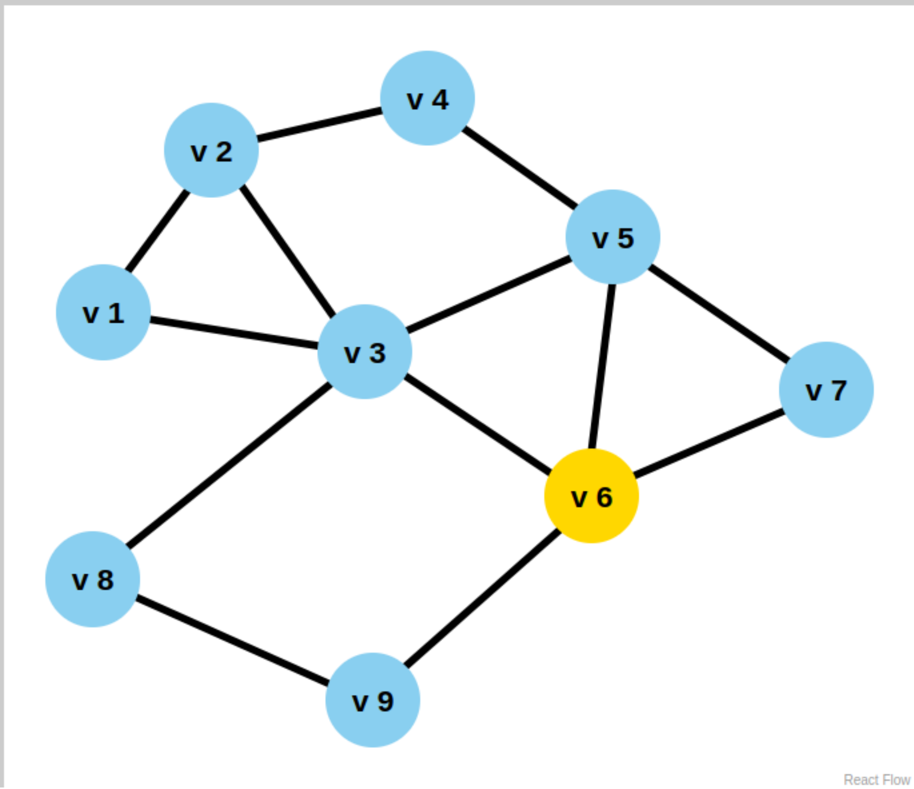

Figure 3: 図 G

1. 満たしている
2. 頂点 c が X_1 と X_5 に属しているのに,X_4 に属していないので, 満たしていない
3. 頂点 c が X_1 と X_5 に属しているのに,X_2 に属していないので、満たしていない
4. 頂点 g は X_4 にしか属していないので, 満たしていない

説明 II-1：グラフのセパレーション

グラフ G の**セパレーション**とは,G の頂点集合の対 (U,V) で, 次の 2 条件を満たすものを言う：

1. $U \cup V = V(G)$
2. $U \setminus V$ と $V \setminus U$ の間に辺はない

問題 II-1

右図のグラフ G において,$U = \{a,b,c,d,e\}$, $V = \{d,e,f,g,h\}$ とおく.
問い： (U,V) は G のセパレーションか？

1. セパレーションである
2. $U \cap V$ が空でないからセパレーションでない
3. U にも V にも属さない頂点があるからセパレーションでない
4. $c \in V \setminus U$ と $h \in V \setminus U$ の間に辺がないからセパレーションでない
5. $c \in U \setminus V$ と $f \in V \setminus U$ の間に辺があるからセパレーションでない

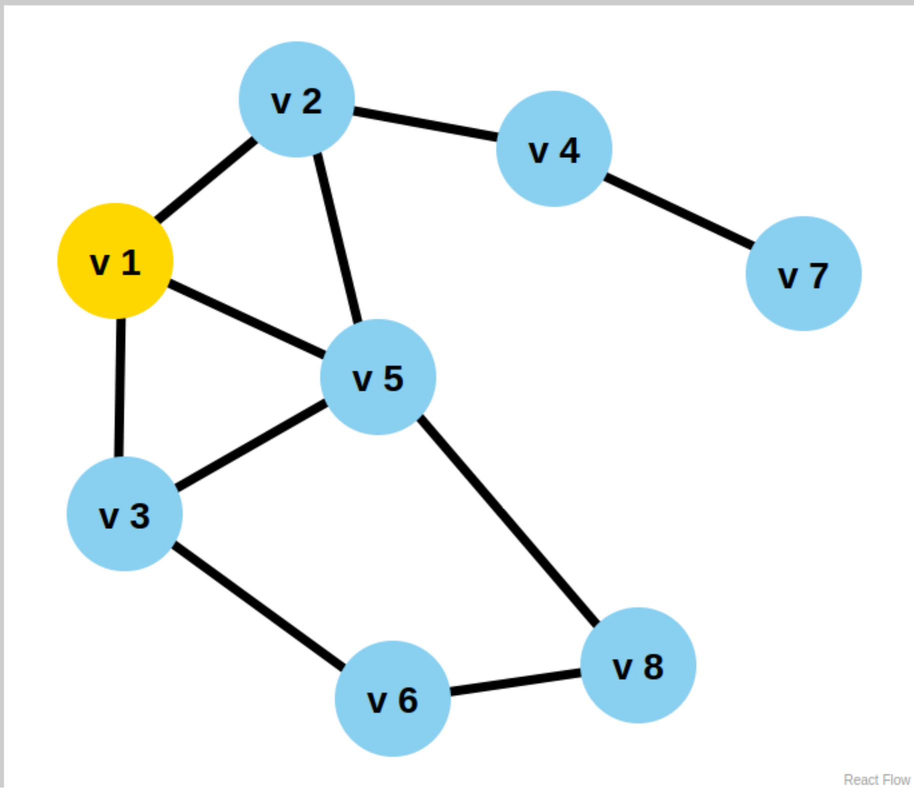

Figure 4: 図 G

説明 II-2：セパレーションとセパレータ

(U, V) が G のセパレーションであるとき,$U \cap V$ をこのセパレーションの**セパレータ**と呼ぶ.
$U \setminus V \neq \emptyset$ かつ $V \setminus U \neq \emptyset$ であるとき, セパレータ $U \cap V$ を G から取り除くと,G は 2 つ以上の連結成分に分かれる.

問題 II-3

右図のグラフ G において,$U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $V = \{e, f, g, h, i\}$ とおく.
セパレーション (U, V) のセパレータは次のいずれか？

1. $\{a, c, g, h\}$
2. $\{c, d, e\}$
3. $\{b, e, f\}$ (e,f) では？
4. $\{d, e, h\}$

説明 II-3：木分解とセパレーション

G の木分解を $(T, \{X_p\}_{p \in V(T)})$ とする.(p, q) を T の辺とする.
T からこの辺を取り除いてできる 2 つの部分木を T_{pq}, T_{qp} と呼ぶ（T_{pq} は p を含む方,T_{qp} は q を含む方）.
$U_{pq} = \bigcup_{r \in V(T_{pq})} X_r$, $U_{pq} = \bigcup_{r \in V(T_{qp})} X_r$ とおくと,
(U_{pq}, U_{qp}) は G のセパレーションであり,$X_p \cap X_q$ はそのセパレータである.

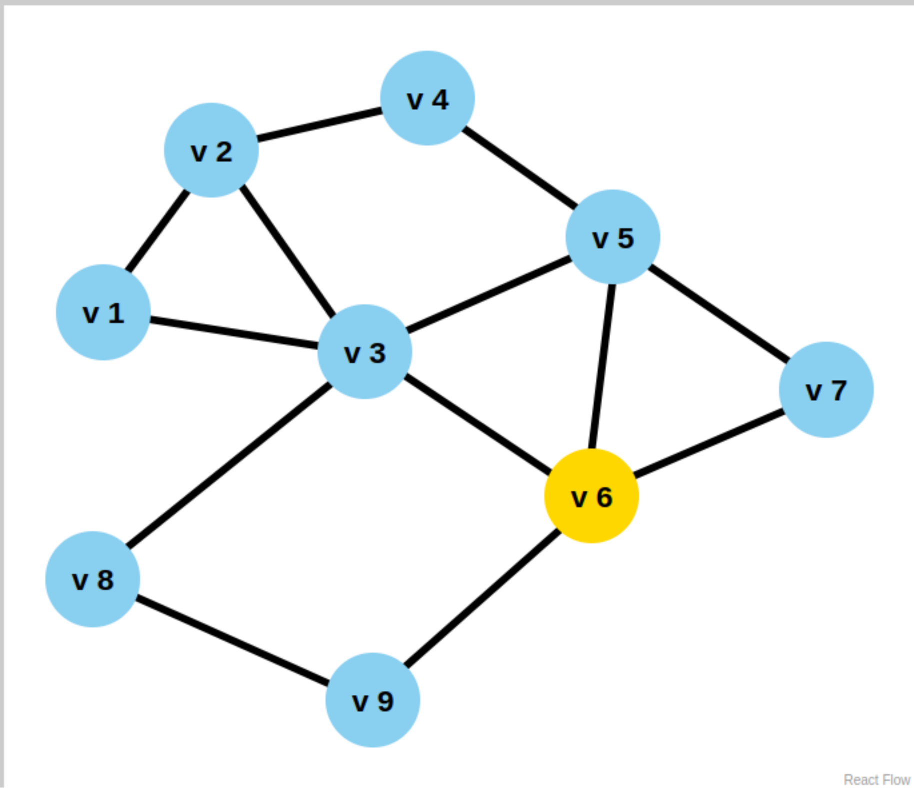

Figure 5: 図 G

問題 II-7

グラフ G とその木分解 $(T, \{X_p\}p \in V(T))$ が与えられている. 辺 $(2,3)$ に対応するセパレーション (U_{23}, U_{32}) は次のいずれか？

- $X_1 = \{a,b,c\}, X_2 = \{b,c,d,e\}, X_3 = \{c,e,f\}, X_4 = \{e,f,g\}, X_5 = \{c,g,h,i\}$
- 辺: $(1,2),(2,3),(3,4),(3,5)$

1. $(\{a,b,c\},\{b,c,d,e,f,g,h,i\})$
2. $(\{a,b,c,d,e\},\{b,d,c,e,f,g,h,i\})$
3. $(\{a,b,c,d,e,f,g\},\{b,c,d,e,f,g,h,i\})$
4. $(\{a,b,c,d,e,f,g\},\{c,e,g,h,i\})$

問題 II-8

右図のグラフ G において, 与えられた $\{X_p\}$ は条件 3 を満たさないため木分解ではない.
そのため,$U_{pq} \cap V_{qp} \neq X_p \cap X_q$ であるような辺 (p,q) が存在する. それはどれか？（複数選択）

1. $(1,2)$
2. $(2,3)$
3. $(2,4)$
4. $(3,5)$

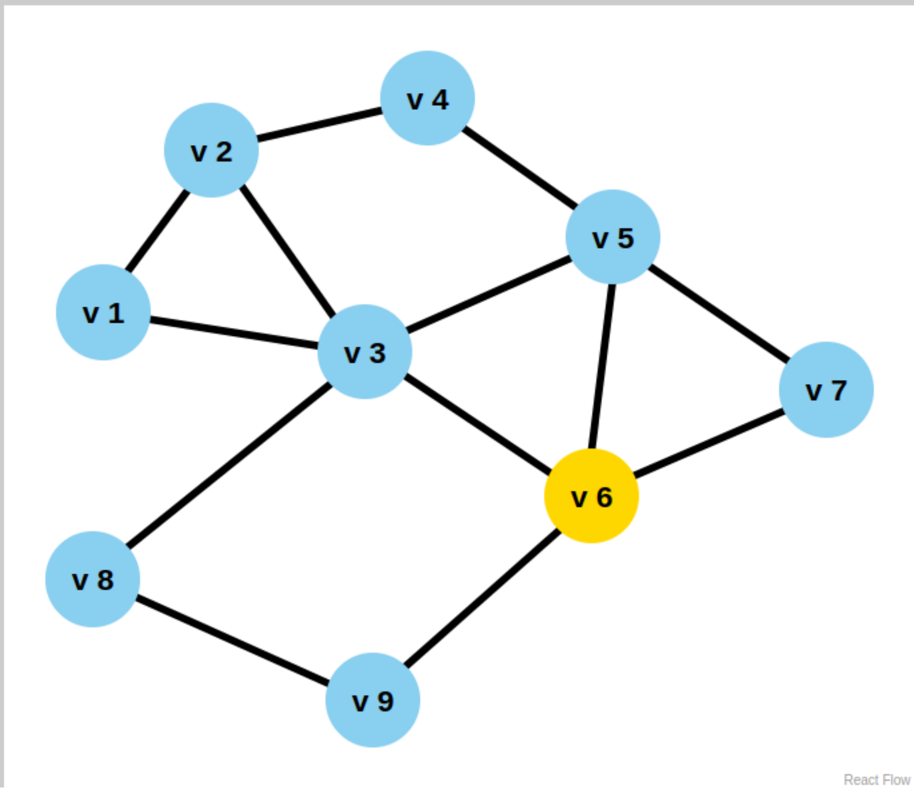

Figure 6: 図 G

説明 II-4：「セパレーション定理」の証明

定理： $(T, \{X_p\} p \in V(T))$ が G の木分解であるとき,T のすべての辺 (p, q) に対して (U_{pq}, V_{pq}) は G のセパレーションであり, そのセパレータ $U_{pq} \cap V_{pq}$ は $X_p \cap X_q$ に等しい.

証明：

$X_p \cap X_q \subseteq U_{pq} \cap V_{pq}$ は明らかである. もし $U_{pq} \cap U_{pq}$ に属し, $X_p \cap X_q$ に属さない頂点 v があったとすると, それは木分解の条件 3 に矛盾する. ゆえに $X_p \cap X_q = U_{pq} \cap V_{pq}$ である.

次に (U_{pq}, V_{pq}) が G のセパレーションであることを示す.
$U_{pq} \cup V_{pq} = V(G)$ は木分解の条件 1 より成り立つ.
次に G の辺 (u, v) で、$v, u \in U_{pq} \setminus V_{pq}$ かつ $v \in V_{pq} \setminus U_{pq}$ であるものが存在すると仮定して矛盾を導く.
$u \in X_r$ となる T_{pq} のノード r を r_u と,$v \in X_r$ であるような T_{qp} のノード r を r_v とおく.
木分解の条件 2 より $\{u, v\} \subseteq X_r$ となる T のノード r が存在する. もし $r \in T_{pq}$ に属すならば, 辺 (p, q) は r と r_v を結ぶパス上にある.
木分解の条件 3 より $v \in X_p \cap X_q = U_{pq} \cup U_{qp}$ であり,$v \in V_{pq} \setminus V_{qp}$ という仮定に矛盾する.$r \in T_{qp}$ の場合も同様である.