Report on the Experiment

No. 4

Subject 過度現象

Date 2019. 06. 24

Weather 晴れ Temp 25.8 ℃ Wet 55.9 %

Class	**E3**	
Group	**6**	
Chief		
Partner	大橋	りさ
	二重谷	光輝
	森	和哉
	DANDAR	**TUGULDUR**

No	**15**
Name	小畠 一泰

Kure National College of Technology

1　目的

過渡現象について回路シミュレーションと実験を行うことで, 過渡現象を理解することを目的とする.

2　理論

2.1　RC 直列回路

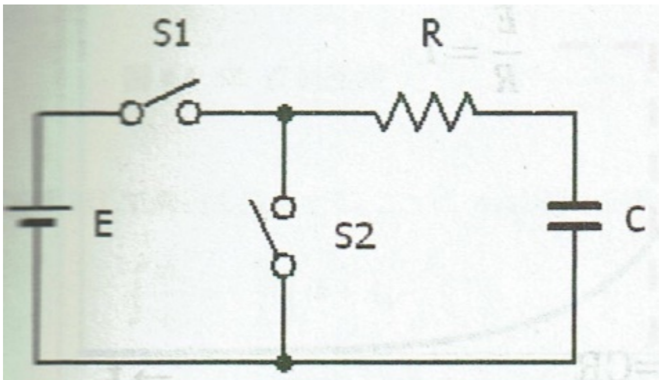

図 1: RC 直列回路

図 1 の直列回路において, $t = 0$ でスイッチ S_1 を閉じて直流電圧 E を加えるとき, 回路を流れる電流 i および電荷 q を求める. この回路の方程式は次式となる.

$$Ri + \frac{1}{C}\int idt = R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \tag{1}$$

この式は定数係数線形微分方程式になっており, この式の一般解は定常解 q_s と過度解 q_t の和となる. まず E=0 とした過渡解 q_t を求める.

式 12 より,

$$R\frac{dq_t}{dt} + \frac{1}{C}q_t = 0 \tag{2}$$

変数分離するため式を変形して,

$$\frac{dq_t}{q_t} = -\frac{1}{RC}dt \tag{3}$$

両辺を積分する．ここで A_1 は積分定数である．

$$\int \frac{dq_t}{q_t} = -\frac{1}{RC}\int dt + A_1 \tag{4}$$

$$\ln q_t = -\frac{1}{RC}t + A_1 \tag{5}$$

$$q_t = e^{-\frac{1}{RC}t+A_1} = e^{A_1}e^{-\frac{1}{RC}t} = A_2 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{6}$$

定常解 q_s は十分長い時間経過した後コンデンサに蓄えられる電荷であるから, $q_s = CE$ である．

よって一般解 q は,

$$q = q_s + q_t = CE + A_2 e^{\frac{1}{RC}t} \tag{7}$$

ここで初期条件, $t=0$ で $q=0$ とするならば, $A_2 = -CE$ である．したがって,

$$q = CE(1 - e^{\frac{1}{RC}t}) \tag{8}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -(-\frac{1}{RC})CEe^{\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{R}e^{\frac{1}{RC}t} = Ie^{\frac{1}{RC}t} \tag{9}$$

また, 抵抗 R とコンデンサ C に生ずる電圧はそれぞれ,

$$\begin{aligned} V_R &= Ri = Ee^{\frac{1}{RC}t} \\ V_C &= \frac{q}{C} = E(1 - e^{\frac{1}{RC}t}) \end{aligned} \tag{10}$$

電流の曲線に $t=0$ で引いた接線が時間軸と交わる時刻を時定数 τ という．式 9 を $t=0$ で微分すると,

$$\frac{di}{dt}|_{t=0} = I(-\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}0}) = -\frac{I}{RC} \tag{11}$$

したがって, $t=0$ のときの接線の傾きが $-\frac{I}{RC}$ であり, 式 9 から, $t=0$ のときの電流は I となる. そのため, 時間軸の交点は RC となるので, $\tau = RC$ となる．図 2 にこれらの関係を図示する．

次に 図 1 において電源 E で充電が完了し, スイッチ S_1 を開くと同時に S_2 を閉じて放電する場合を考える. 回路の方程式は次式となる．

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

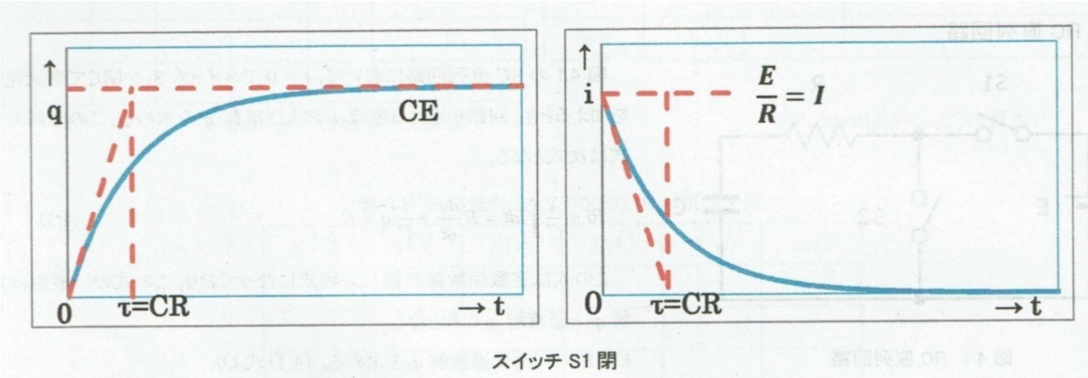

図 2: RC 直列回路の充電電流と電荷

定常解 q_s は, 十分長い時間経過した後コンデンサに残された電荷が 0 として, $q_s = 0$ となる. したがって一般解は,

$$q = q_s + q_t = A_3 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

ここで, 初期条件, $t = 0$ のとき q = CE であるから, $A_3 = CE$ となって,

$$q = CEe^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = CE(-\frac{1}{RC})e^{-\frac{1}{RC}t} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = -Ie^{-\frac{1}{RC}t}$$

となる. 図 3 にこれらの関係を図示する.

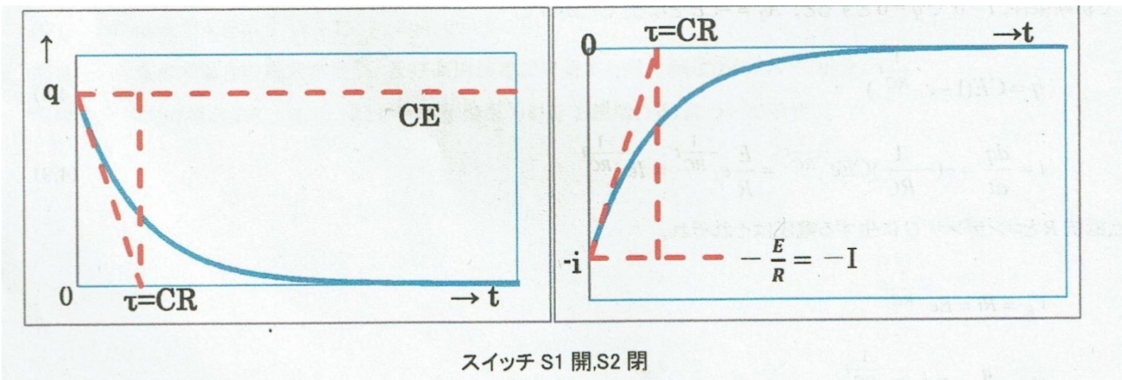

図 3: RC 直列回路の放電電流と電荷

2.2　RL 直列回路

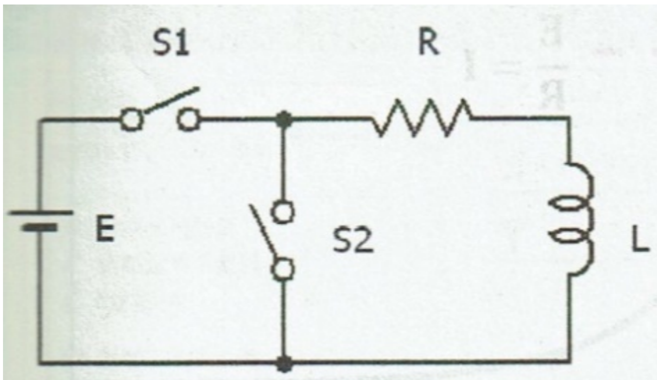

図 4: RL 直列回路

図 4 の RL 直列回路において, 時刻 t = 0 でスイッチ S_1 を閉じたとき流れる電流を求める．この回路の方程式は次式となる．

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

まず, E = 0 とした過度解 i_t を求める．

$$L\frac{di_t}{dt} + Ri_t = 0$$

式を変形して両辺を積分する．ここで, A_4 は積分定数である．

$$\int \frac{di_t}{i_t} = -\frac{R}{L}\int dt + A_4 \tag{12}$$

$$\ln i_t = -\frac{R}{L}t + A_4$$

$$i_t = e^{-\frac{R}{L}t + A_4} = e^{A_4}e^{-\frac{R}{L}t} = A_5 e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常解 i_S は, 十分長い時間経過した後コイルに流れる電流であるから $i_S = \frac{E}{R}$, よって一般解 i は,

$$i = i_S + i_t = \frac{E}{R} + A_5 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ここで, 初期条件, t = 0 で i = 0 を用いて, $A_5 = -\frac{E}{R}$ であるから,

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

抵抗 R とインダクタンス L の端子電圧はそれぞれ,

$$V_R = Ri = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = L(-\frac{E}{R})(-\frac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t} = Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

次に, 図 4 おいて十分長い時間経過した後, スイッチ S_1 を開くと同時に S_2 を閉じた場合を考える. 回路の方程式は次式となる.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

定常解 i_S は, 十分長い時間経過した後 $i_S = 0$. したがって一般解は,

$$i = i_S + i_t = A_6 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ここで, 初期条件 t = 0 のとき $i = \frac{E}{R}$ を用いれば $A_6 = \frac{E}{R}$ であるから,

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = Ie^{-\frac{R}{L}t}$$

図 5 にこれらの関係を図示する.

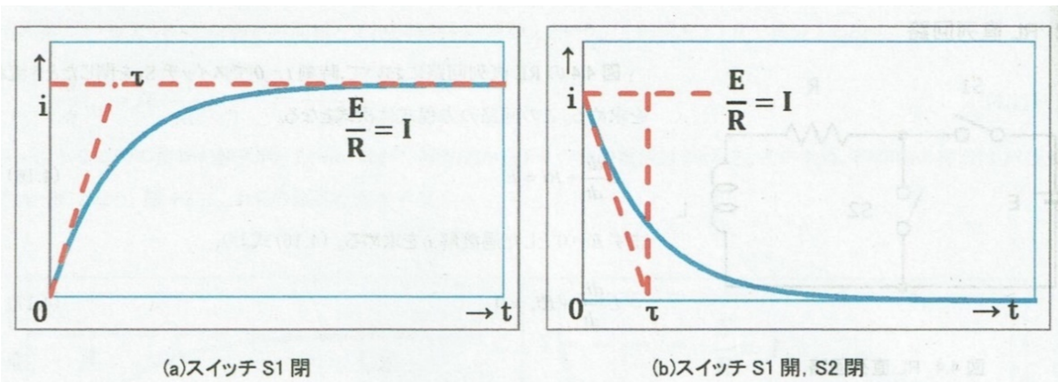

図 5: RL 直列回路の電流

3　実験方法と結果の整理

3.1　使用器具

1. PC (TOSHIBA) (管理番号: E-000-B-005)
2. ディジタルオシロスコープ (RIGOL DS1064B) (SERIAL NO. DS1BE121000022)
3. 直流電源 (5V 定電圧) (F-4)
4. 発振器 (AFG-2005) (SERIAL NO. GEQ844987)
5. 実験キット (R: 0.995[kΩ], C: 107.75[nF], L: 1014.0[nF], 9.867[mF])
6. LCR メーター (H9021212)

3.2 回路シミュレーション

3.2.1 RC 直列回路のシミュレーション (過渡現象)

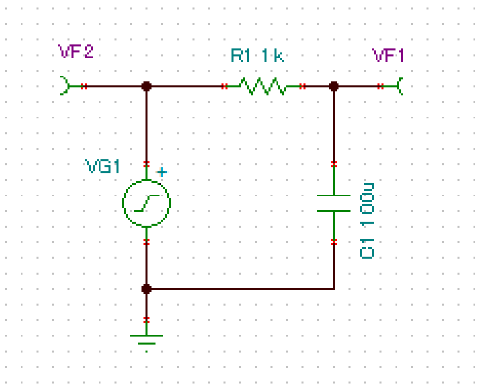

図 6: RC 直列回路

$R_1 = 1[\mathrm{k\Omega}], C_1 = 100[\mathrm{\mu F}]$ として, 図 6 の回路を TINA で作成した. 電圧ジェネレータは, プロパティで 図 ?? のように DC レベルを 0V に設定し, シグナルをクリックして「...」を表示させた後, それをクリックしてシグナル・エディタを開き, 図 ?? のように「単位ステップ」(2 番目のボタン), 振幅 $= 5[\mathrm{V}]$, エッジ開始 $= 0[\mathrm{s}]$ とした. 電圧ピンを電源とコンデンサの電位が測れるように配置した.

「解析」―「過渡解析」を選び, 図 7 のように表示開始 $= 0[\mathrm{s}]$, 表示終了 $= 0.5[\mathrm{s}]$ として過渡解析を実行した. 表示された結果を,「ファイル」―「エクスポート」―「Windows メタファイル」を選択し, 画像ファイルを保存した.

回路定数を $R_1 = 1[\mathrm{k\Omega}], C_1 = 33[\mathrm{\mu F}]$ に変更した. 表示終了時間を適当に変更し, 過渡解析結果の画像ファイルを保存した.

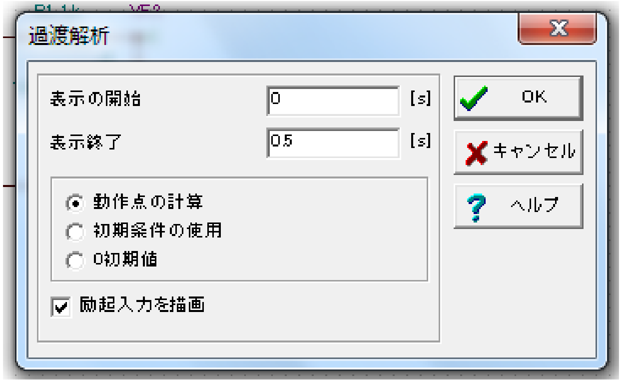

図 7: 過渡解析

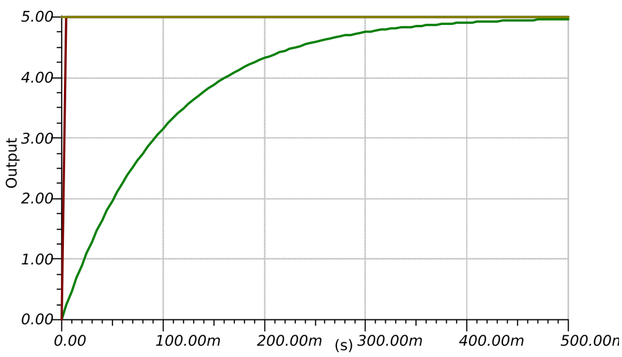

図 8: $C_1 = 100[\mu\mathrm{F}]$

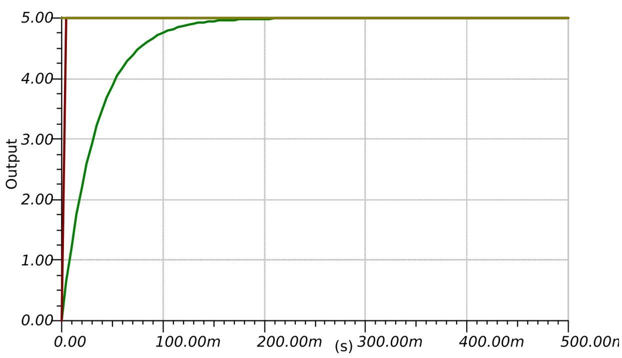

図 9: $C_1 = 33[\mu\mathrm{F}]$

3.2.2　RL 直列回路のシミュレーション (連続波形の応答)

$R_1 = 1[\mathrm{k}\Omega], C_1 = 0.1[\mathrm{\mu F}]$ に設定し, 電圧ジェネレータを DC レベル 2.5[V] とし, シグナルを方形波, 振幅 2.5[V], 周波数を 1[kHz] とした. 表示終了を適当にして過渡解析を行い, 結果を保存した. 次に, 抵抗とコンデンサの位置を取り替えて過渡解析を行い, 結果を保存した.

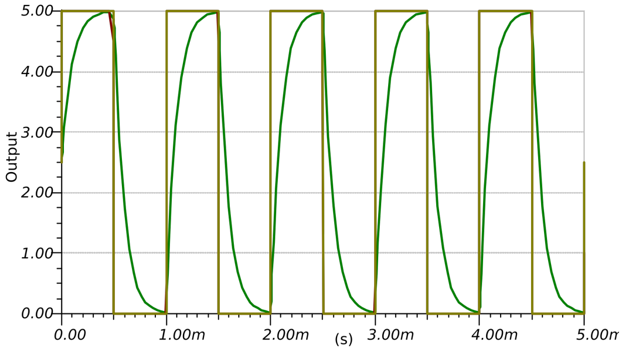

図 10: 抵抗間

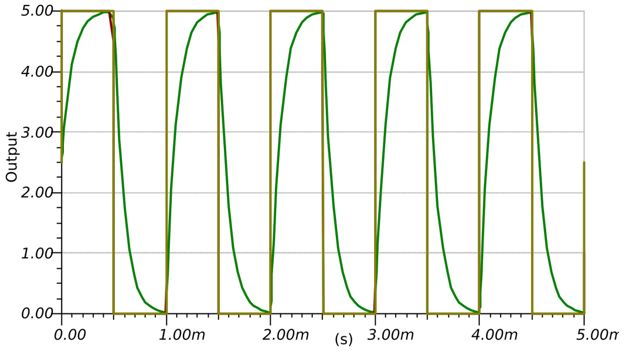

図 11: コンデンサ間

3.2.3 RL 直列回路のシミュレーション (連続波形の応答)

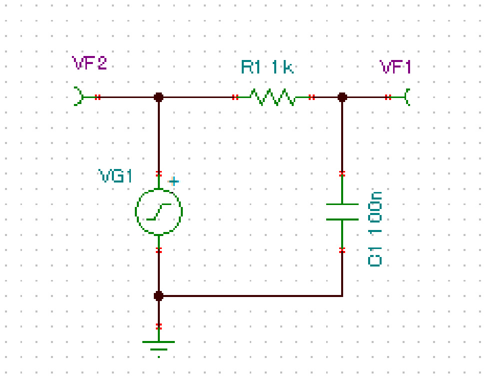

図 12: RL 直列回路

図 12 の回路を $R_1 = 1[\mathrm{k\Omega}], L_1 = 1[\mathrm{mH}]$ として TINA で作成した．電圧ジェネレータは DC レベル 2.5[V], シグナルを方形波, 振幅 2.5[V], 周波数を 50[kHz] とした. 電圧ピンを電源とインダクタンスの電位が測れるように配置した．表示終了を適当にして過渡解析を行い, 結果を保存した．次に抵抗とインダクタンスの位置を入れ替えて過渡解析を行い, 結果を保存した．$L_1 = 10[\mathrm{mH}]$, 周波数10[kHz] について同様に解析を行った．

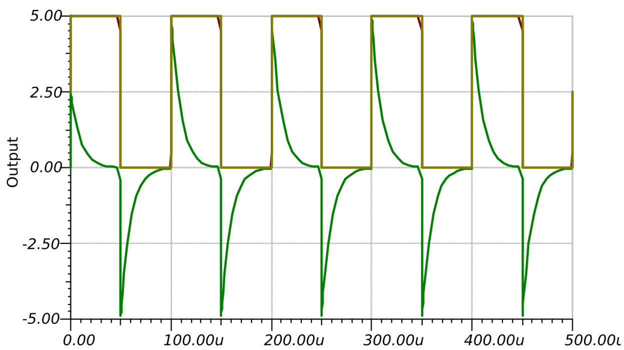

図 13: $L_1 = 1[\mathrm{mH}]$ - 抵抗間

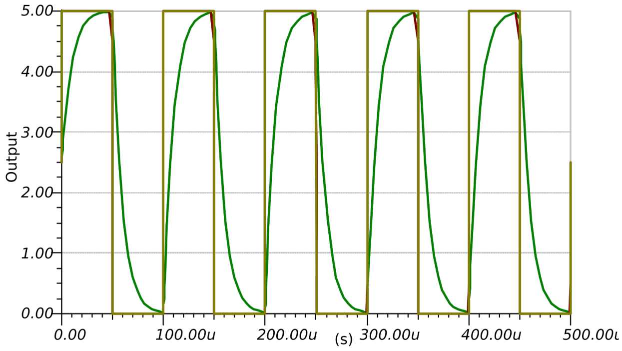

図 14: $L_1 = 1$[mH] - インダクタンス間

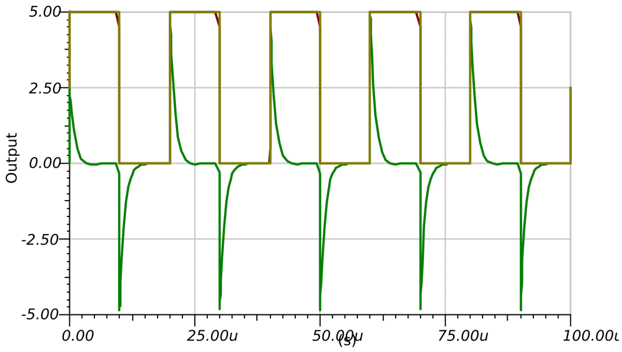

図 15: $L_1 = 10$[mH] - 抵抗間

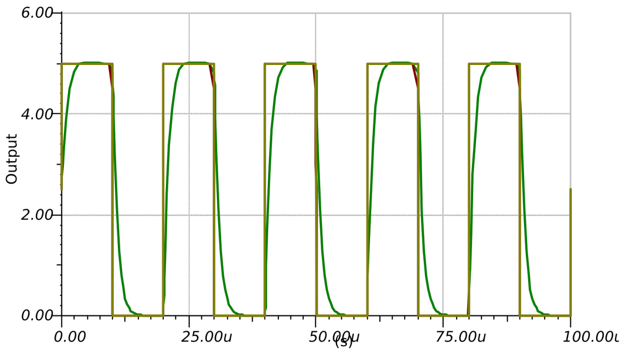

図 16: $L_1 = 10$[mH] - インダクタンス間

3.3　RC 直列回路の過渡現象 (過渡現象)

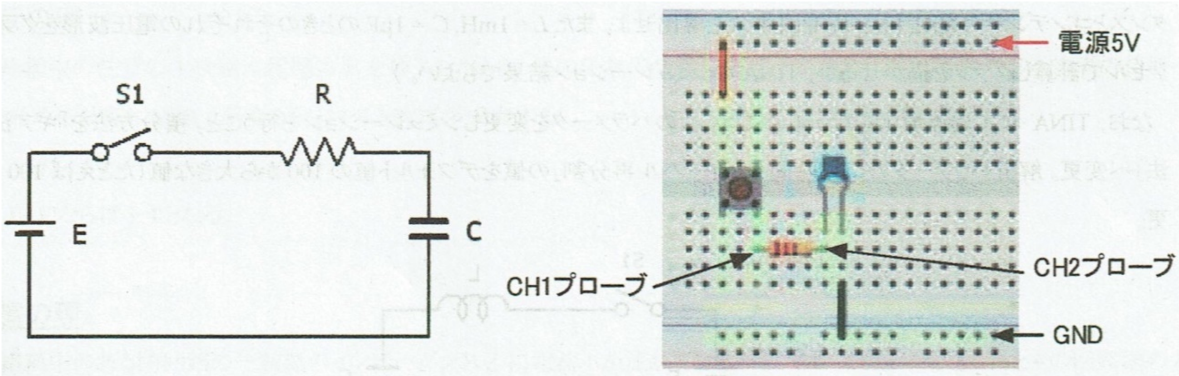

図 17: RC 直列回路の実験回路

R, C を LCR メーターで計測しておいた．$R = 1[\mathrm{k\Omega}], C = 100[\mathrm{\mu F}]$ について，図 17 のようにブレッドボードを組み，タクト・スイッチを押し下げてオシロスコープで波形を観測した．波形を図 18 に示す．また，コンデンサ 33[μF] についても同様の実験を行い，波形を図 19 に示す．

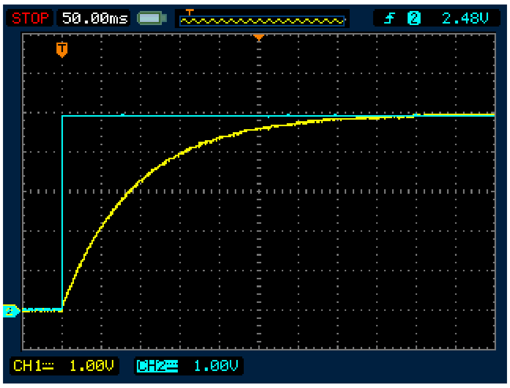

図 18: $C100[\mathrm{\mu F}]$

数値データを Excel で読み取り，充電電流の時間変化を算出し，片対数グラフを用いて横軸に時間 t，縦軸 (対数軸) に充電電流 I をとりグラフを描いた．このグラフから次式より時定数を求める．

$$\tau = \frac{1}{2.3\frac{\log_1 0i_1 - \log_1 0i_2}{t_2 - t_1}}$$

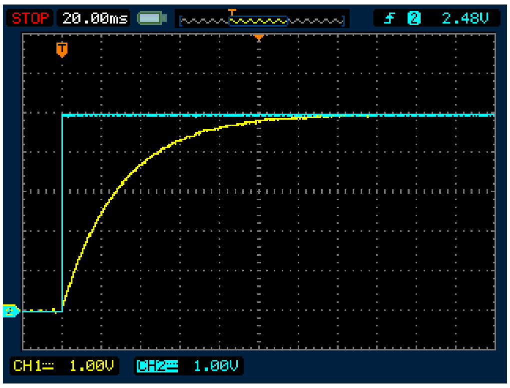

図 19: C33[μF]

3.4　RC 直列回路の過渡現象 (連続波形)

$R_1 = 1[\mathrm{k\Omega}], C_1 = 0.1[\mathrm{\mu F}]$ の素子を LCR メーターで測定し, 図 17 の回路の電源を発信器に代えて, 出力を 5[V], 周波数 1[kHz] の矩形波にして, オシロスコープで波形を観測し, 波形データを保存した. 抵抗とコンデンサの位置を入れ替えて波形を観測し, 波形データを保存した.

結果をそれぞれ図 20, 21 に示す.

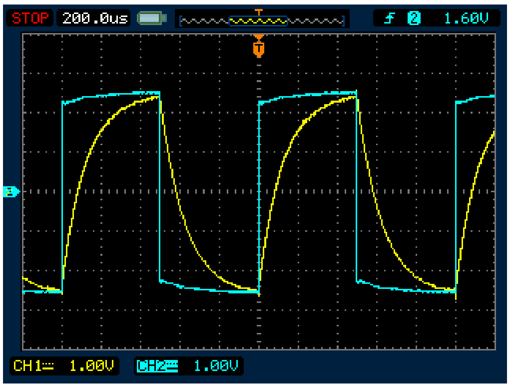

図 20: 抵抗間

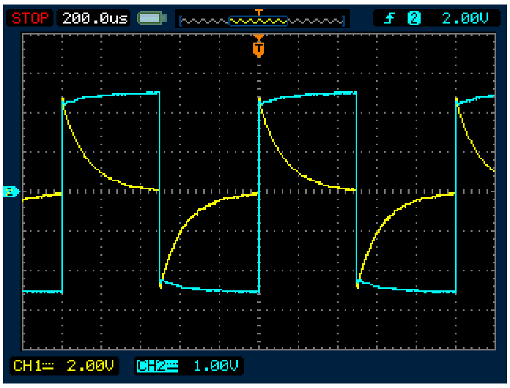

図 21: コンデンサ間

3.5　RL 直列回路の過渡現象 (連続波形)

$R_1 = 1[\mathrm{k\Omega}], L_1 = 1[\mathrm{mH}]$ の素子を LCR メーターで測定し, 図 12 の回路を組み, 発振器の出力を 5[V], 周波数 50[kHz] について, オシロスコープで波形を観測し, 波形データを保存した. 抵抗とインダクタンスの位置を入れ替えて波形を観測し, 波形データを保存した. 結果をそれぞれ図 22, 23 に示す.

また, $L_1 = 10[\mathrm{mH}]$ についても周波数を 10[kHz] にして同様に実験を行った. 結果をそれぞれ図 24, 25 に示す.

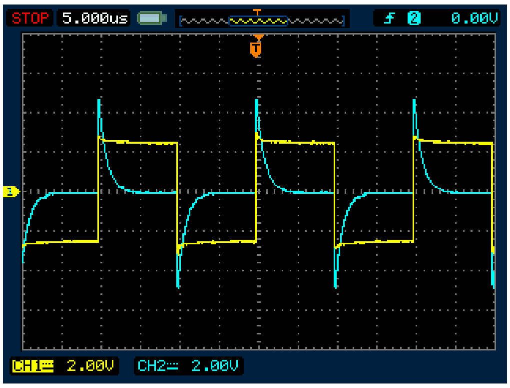

図 22: $L_1 = 1[\mathrm{mH}]$ - 抵抗間

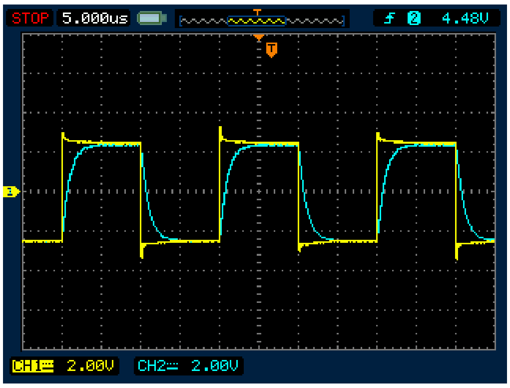

図 23: $L_1 = 1[\mathrm{mH}]$ - インダクタンス間

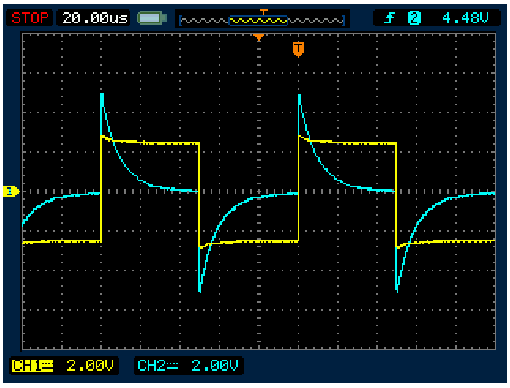

図 24: $L_1 = 10$[mH] - 抵抗間

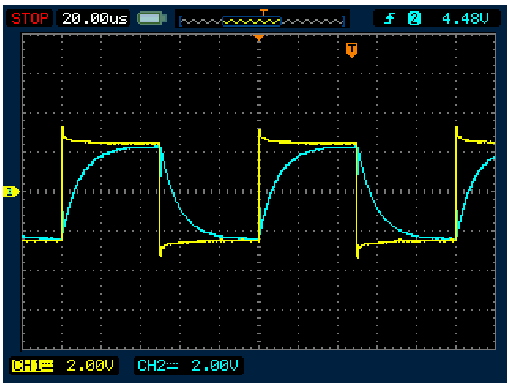

図 25: $L_1 = 10$[mH] - インダクタンス間

4　考察

1. 各実験の理論式と, シミュレーション結果および実測結果を比較検討せよ.
2. 時定数について, 理論式より求められたものと, (4.27) 式により求められたものを比較し検討せよ.
3. 総合的考察を行え.

5　研究

1. RL 直列回路の時定数の式を求めよ.
2. (4.27) 式を導出せよ.

$$
\begin{aligned}
i &= Ie^{-\frac{1}{RC}t} \\
\log_{10} i &= \log_{10} Ie^{-\frac{1}{RC}t} \\
&= -\frac{1}{RC}t\log_{10} e + \log_{10} I \\
&= (-\frac{1}{RC}\log_{10} e)t + \log_{10} I
\end{aligned}
$$

$-\frac{1}{RC}\log_{10} e$ は傾きとなり, $\log_{10} I$ は切片である. 傾きについてのみ考えると,

$$
\begin{aligned}
\log_{10} i &= (-\frac{1}{RC}\log_{10} e)t \\
-\frac{1}{RC} &= \frac{\log_{10} i}{t\log_{10} e} \\
t &= RC\text{より} \\
-\frac{1}{t} &= \frac{\log_{10} i}{t\log_{10} e} \\
t &= -\frac{t\log_{10} e}{\log_{10} i} \\
&= -\frac{1}{\log_{10} i} \times \frac{1}{\frac{1}{t\log_{10} e}} \\
&= -\frac{1}{\frac{\log_{10} i_2 - \log_{10} i_1}{t_2 - t_1} \times \log_{10} e} \\
\frac{1}{\log_{10} e} &\simeq 2.3\text{より} \\
&= -\frac{1}{2.3\frac{log_{10} i_1 - log_{10} i_2}{t_2 - t_1}}
\end{aligned}
$$

3. 図 26 の LC 直列回路について, 時刻 $t = 0$ で S1 を閉じ, 電源電圧 E を印加するとき, 回路に流れる電荷 q と電流 i, インダクタンスとコンデンサの電位 V_L と V_C を表す式を導出せよ．また $L = 1[\mathrm{mH}], C = 1[\mu\mathrm{F}]$ のときのそれぞれの電圧波形をグラフに描け (Excel で計算しグラフを描かせるか, TINA のシミュレーション結果でもよい)．なお, TINA にて過渡解析を行う場合には, 次のパラメータを変更しシミュレーションを行うこと．積分方法を「ギア法」から「台形法」へ変更．解析パラメータの「TR 時間インターバル再分割」の値をデフォルト値の 100 から大きな値 (たとえば 100 万など) へ変更.

6 参考文献

- 大阪

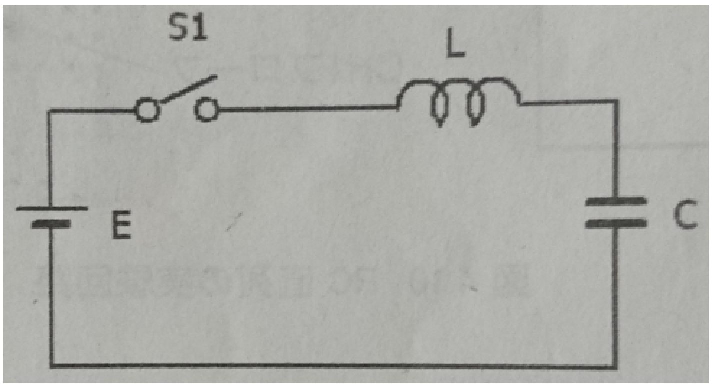

図 26: LC 直列回路