

Report on the Experiment

No. 5

Subject 回路網定理に関する実験

Date 2019. 07. 01

Weather 晴れ Temp 24.9 °C Wet 47 %

Class	E3	
Group	6	
Chief		
Partner	大橋	りさ
	二重谷	光輝
	森	和哉
	DANDAR	TUGULDUR

No	15
Name	小畠 一泰

Kure National College of Technology

1 目的

各種回路網の定理と実験が一致することを確認し、合わせて知識を確実にする。

2 理論

回路の素子として、抵抗 R 、自己インダクタンス L 、相互インダクタンス M 、静電容量 C が電圧電流によって変化することなく、また、時間的にも一定であるような回路を線形回路 (linear electric circuit) という。これに対してそうでないもの、たとえば鉄心を有するコイルとかネオン管などを含む回路では一般に電流・電圧の線形性が成り立たないから非線形回路 (non-linear electric circuit) といい、その取り扱いについては通常、特別な難しさがある。線形回路を任意に結合した回路を一般に線形回路網 (linear network) といい、これに関する基本的な諸法則として、つぎに述べるようなものがある。

2.1 キルヒホッフの法則

第一法則 (電流測) 回路網中の任意の接続点に流入する電流の総和は等しい。

第二法則 (電圧測) 回路網中の 1 つの閉回路 (網路, 網目ともいう) を一巡するときその各枝路の電圧降下の総和は、その閉路中の起電力の総和に等しい。

2.2 重ねの理

回路網中に多数の起電力が同時に存在するときの電流分布は、それらの起電力が 1 つずつ別々に存在するときの電流分布の総和に等しい。

2.3 テブナンの定理

内部に起電力を含む回路があり、その回路網中のある 2 端子間に V なる電位差があるとき、その 2 端子間に Z なるインピーダンスに接続すれば、その Z には、

$$I = \frac{V}{Z + Z_0}$$

なる電流が流れる. ただし Z_0 はその 2 端子からもとの回路網をみたときの内部インピーダンスである. (このとき, 回路網中の起電力はすべて 0 と考える.)

2.4 相反の理

線形回路網中の任意の 1 枝路に起電力 E を挿入したとき, 他の任意の枝路に電流 I が流れ, 逆に起電力 E' を後者の枝路へ挿入したときに始めの枝路に電流 I' が流れたとすると次式が成立する.

$$EI' = E'I$$

特別に $E = E'$ ならば $I = I'$ となる.

2.5 補償の理

線形回路網中のある閉回路の 1 枝路のインピーダンス Z に電流 I が流れているとき, Z が $Z + Z_0$ に変化したときの回路網の各成分の電流の変化分は, 始めにあった起電力を全部取り除き, $Z + Z_0$ と直列に新たに $Z_0 I$ に等しい起電力を始めの I と反対向きに挿入したときの各部分の直流和に等しい.

以上の諸法則の内キルヒホッフの法則は非線形回路も含めた一般回路網において成り立つが, それ以外の法則は線形回路網に限り成り立つことに注意する必要がある. 本実験では抵抗のみで構成された直流回路網についてこれら諸法則を実験的に確認する.

3 使用器具

1. 供試抵抗
2. 直流電流計 $A_0 : 37, A_1 : 38, A_2 : 39, A_3 : 40$
3. 蓄電池 $E_1 : 3.6 \text{ [V]}, E_2 : 2.4 \text{ [V]}, E_3 : 4.8 \text{ [V]}$ (規格)
4. SW: 3 極スイッチ
5. デジタルマルチメーター (備品番号: 3)
6. R_0 : スライド抵抗器 $330 \text{ }[\Omega]$ または $750 \text{ }[\Omega]$ (TYPE: D-3 NO.K-212)
7. LCR メーター (HIOKI No.100208518)

4 実験方法とその結果

4.1 実験準備

実験に入る前に, デジタルマルチメーターによって $E_1 \sim E_3$ を, LCR メーターによって $R_1 \sim R_3, R$ を測定した. これらは理論計算のときにデータとして使った. 蓄電池の内部抵抗は $10^{-2} \sim 10^{-1}$ と小さいので無視した. 電流計の内部抵抗は $1 [\Omega]$ 以上のものについては理論計算において考慮した.

表 1: 電圧, 抵抗実測値

E_1 [V]	E_2 [V]	E_3 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R [Ω]
3.907	2.665	5.221	98.920	74.110	218.500	49.690

4.2 キルヒホッフの法則

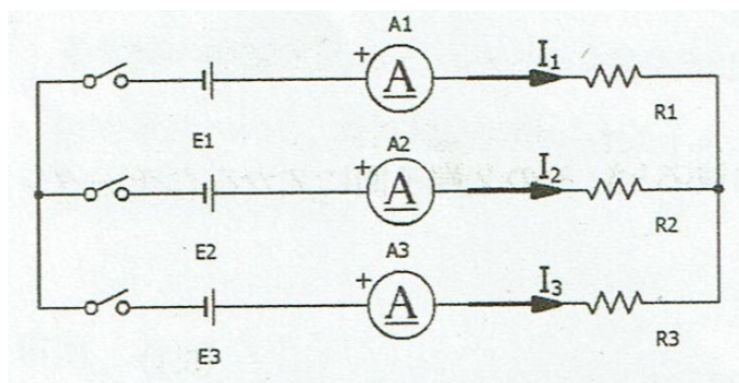


図 1: キルヒホッフの法則の実験回路図

表 2: キルヒホッフの法則の実験結果

	I_1 [mA]	I_2 [mA]	I_3 [mA]	$I_1 + I_2 + I_3$ [mA]
理論値	3.7	-11.3	7.6	0
実測値	3.6	-11.1	7.5	0

4.3 重ねの理

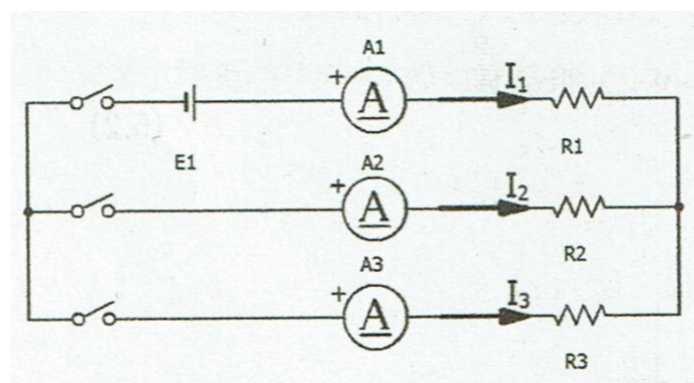


図 2: 重ねの理の実験回路図

表 3: 重ねの理の実験結果

	I_1 [mA]	I_2 [mA]	I_3 [mA]	$I_1 + I_2 + I_3$ [mA]
E_1 のみ	23.8	-17.61	-6.2	-0.01
E_2 のみ	-12.4	18.22	-5.9	-0.08
E_3 のみ	-7.7	-11.24	19.0	0.06
合成電流	3.7	-10.63	6.9	-0.03

4.4 テブナンの定理

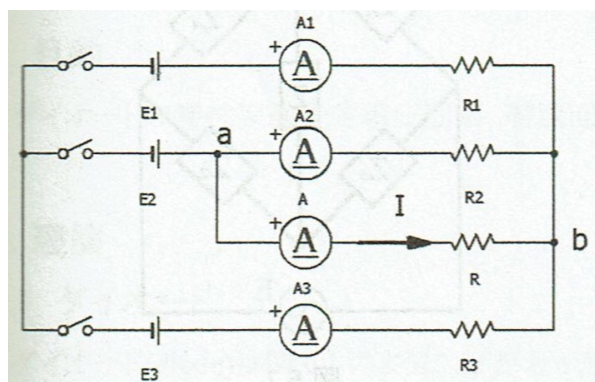


図 3: テブナンの定理の実験回路図

$$V_{ab} = 0.847 \text{ [V]}$$

$$Z_0 = 36.13 \text{ } [\Omega] \quad Z = 51.36 \text{ } [\Omega]$$

表 4: テブナンの定理の実験結果

	理論値	実測値
I [mA]	9.68	9.64

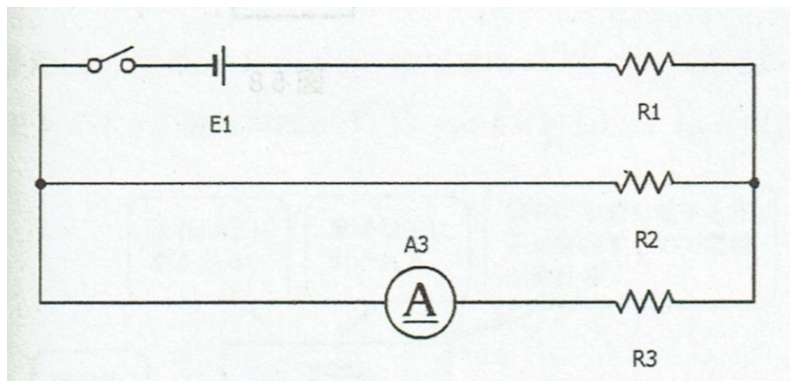


図 4: 相反の理の実験回路図

4.5 相反の理

$$E_1 = 3.90 \text{ [V]}$$

表 5: 相反の理の法則の実験結果

	図 4 の回路	E_1 と A_3 を入れ替えた回路
$I_3 \text{ [mA]}$	-6.38	-6.40

4.6 補償の理

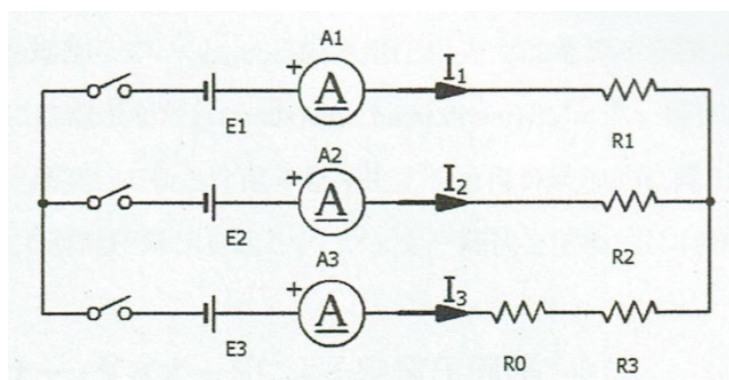
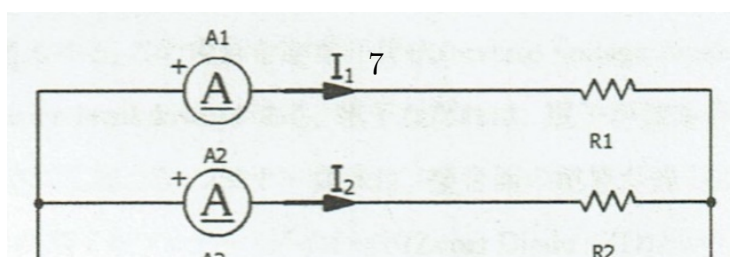


図 5: 補償の理の実験回路図 (図 1 + R_0)



$$R_0 = 346.76 \text{ } [\Omega] \text{ } E_0 = 2.67 \text{ } [\text{V}]$$

表 6: 補償の理の法則の実験結果

	$I_1 \text{ } [\text{mA}]$	$I_2 \text{ } [\text{mA}]$	$I_3 \text{ } [\text{mA}]$
図 1 の測定	3.59	-11.10	7.60
図 5 の測定	5.42	-8.76	3.30
変化後 - 変化前	1.83	2.34	-4.30
図 5 の結果	1.74	2.50	-4.40

5 研究

1. 重ねの理を証明せよ.

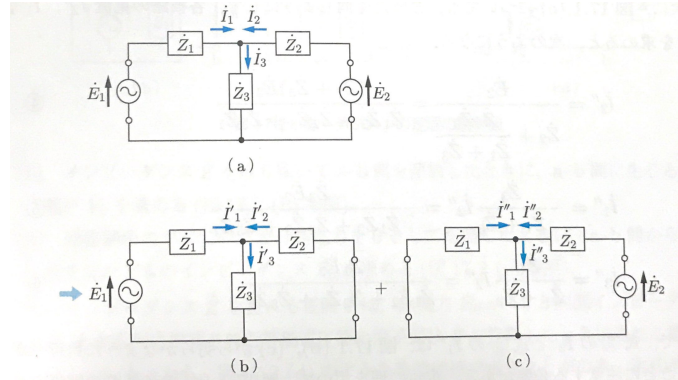


図 7: 重ねの理

重ねの理とは、電源が 2 つ以上ある回路の各枝路の電流は、電源がそれぞれ 1 つだけあって他の電源の起電力を 0 とし、短絡させた時に流れる電流を重ね合わせたものと等しくなる、というものである。

今回は重ねの理をキルヒホッフの法則を用いて証明する。

はじめに図 7 をキルヒホッフの法則で解く。

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$Z_1 I_1 + Z_3 I_3 = E_1$$

$$Z_2 I_2 + Z_3 I_3 = E_2$$

クラメルの公式より、

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 & 0 & Z_3 \\ E_2 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ Z_1 & 0 & Z_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{E}_1 - \dot{Z}_3\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ Z_1 & E_1 & Z_3 \\ 0 & E_2 & Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ Z_1 & 0 & Z_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{E}_2 - \dot{Z}_3\dot{E}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ Z_1 & 0 & E_1 \\ 0 & Z_2 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ Z_1 & 0 & Z_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1 + \dot{Z}_1\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

次に図 7 の (b) について考える.

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}} = \frac{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{E}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

また, \dot{Z}_2 と \dot{Z}_3 の並列部分の端子電圧は, $\dot{V}_{23} = \dot{Z}_{23}\dot{I}_1'$ となり, 分流式より, \dot{I}_2, \dot{I}_3 は次のようになる.

$$\dot{I}_2' = -\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}\dot{I}_1' = -\frac{\dot{Z}_3\dot{E}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$\dot{I}_3' = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}\dot{I}_1' = \frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

また図 7 の (c) についても同様に計算すると,

$$\dot{I}_2'' = \frac{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$\dot{I}_1'' = -\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}\dot{I}_2'' = -\frac{\dot{Z}_3\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$\dot{i}_3'' = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} \dot{i}_2'' = \frac{\dot{Z}_1 \dot{E}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_3 \dot{Z}_1}$$

したがって重ね合わせると次のとおりになる.

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_1' + \dot{i}_1'' = \frac{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{E}_1 - \dot{Z}_3\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_2' + \dot{i}_2'' = \frac{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{E}_2 - \dot{Z}_3\dot{E}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

$$\dot{i}_3 = \dot{i}_3' + \dot{i}_3'' = \frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1 + \dot{Z}_1\dot{E}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

キルヒホッフの法則で解いた各電流と重ねの理で解いた各電流が等しいことより証明終了.

1. テブナンの定理を重ねの理を用いて証明せよ.

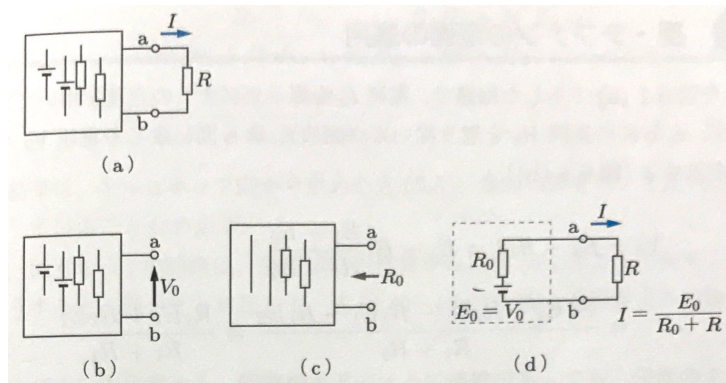


図 8: テブナンの定理の説明 1

1. 図 8 の回路は, 点 a で $-E_0$ の起電力をもった電源と $+E_0$ の起電力をもった電源が図 9(a) のように挿入されたとしても, 回路の状態には何ら変化はない. ただし, E_0 の値は次で述べる端子電圧 V_0 の値と等しくとる.
2. 挿入した $+E_0$ の電源だけを起電力 0 として短絡し, $-E_0$ と回路網中のすべての電源を考える (図 9(b)). そうすると, 回路網中のすべての電源による a-b 間

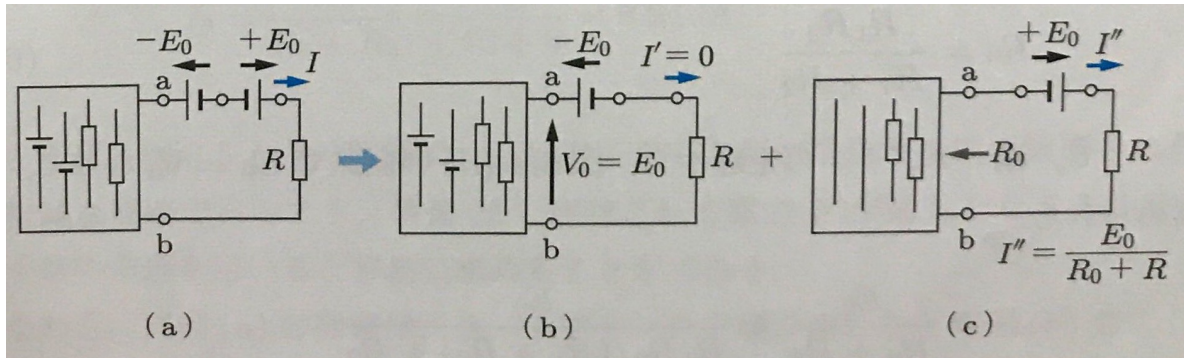


図 9: テブナンの定理の説明 2

- の電源 V_0 と、挿入した $-E_0$ の電源による起電力は、 $V_0 = E_0$ とすると打ち消しあうので、 R に流れる電流は $I' = 0$ である。
3. 挿入した $-E_0$ の電源と回路網中のすべての電源の起電力を 0 として短絡し、挿入した $+E_0$ の電源の起電力だけを残す (図 9(c)). そうすると、 R に流れる電流は $I'' = \frac{E_0}{R_0 + R}$ となる。
4. 2.(図 9(b)) と 3.(図 9(c)) に重ねの理を適用すると、もとの回路図 8(a) の R を流れる電流は、 $I = I' + I'' = \frac{E_0}{R_0 + R}$ となる。
2. 図 10 の Z に流れる電流をテブナンの定理を使って求めよ。ただし、各インピーダンス $Z_1 \sim Z_4$ は抵抗分として扱ってよい。

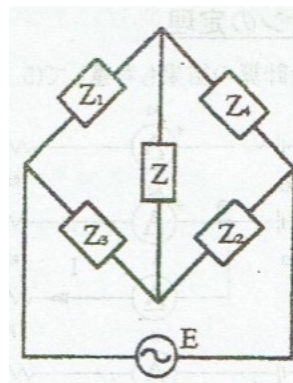


図 10: 図 5.7

まずは Z の端子間のインピーダンス Z_0 を求める。

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_4} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}$$

次に Z の端子間の電圧 V_{ab} を求める.

$$V_a = E - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_4} E$$

$$V_b = E - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} E$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_4} E + \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} E$$

したがって Z に流れる電流 I は,

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_{ab}}{Z + Z_0} \\ &= \frac{-EZ_1(Z_2 + Z_3) + EZ_3(Z_1 + Z_4)}{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} = \frac{EZ_3 Z_4 - EZ_1 Z_2}{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \end{aligned}$$

3. 図 11 のような回路において, 1-1' に 100V の起電力を加えた時に, 2-2' に 5A の電流が流れた. 同じ回路で 2-2' に 50V の起電力を加えた時 1-1' に流れる電流は何 A か.

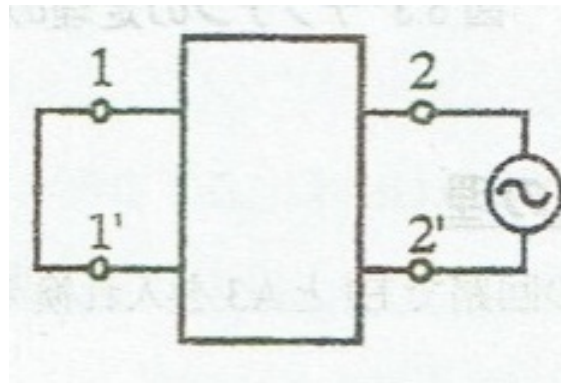


図 11: 図 5.8

1-1' に 100V の起電力を加えた時に, 2-2' に 5A の電流が流れたということは, 回路の総インピーダンス Z は,

$$Z = \frac{100}{5} = 20 \text{ } [\Omega]$$

である. したがって 2-2' に 50V の起電力を加えた時に 1-1' に流れる電流 I は,

$$I = \frac{50}{20} = 2.5 \text{ } [\text{A}]$$

となる.

4. 図 10 で Z_4 が $Z_4 + \delta Z_4$ に変化したとき, Z に流れる電流を求めなさい. ただし, このとき始めはブリッジがバランス状態であったとする.

Z_4 が $Z_4 + \delta Z_4$ に変化するということは, 3. で求めた電流の式の Z_4 に $Z_4 + \delta Z_4$ を代入する. したがって電流の値 I は,

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_{ab}}{Z + Z_0} \\ &= \frac{-EZ_1(Z_2 + Z_3) + EZ_3(Z_1 + Z_4 + \delta Z_4)}{Z_1(Z_4 + \delta Z_4)(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4 + \delta Z_4) + Z(Z_1 + Z_4 + \delta Z_4)(Z_2 + Z_3)} \\ &= EZ_3(Z_4 + \delta Z_4) - EZ_1Z_2 \text{ [A]} \end{aligned}$$

6 考察

測定誤差や読み取り誤差によって測定値と理論値の間に誤差が生まれたが, いずれも誤差の範囲内であったため, 回路網定理は正しいことが確認できた.

7 参考文献

- 電気回路の基礎 森北出版 pp.43 ~ 47