

# Report on the Experiment

No. 1

Subject 共振回路の測定

Date 2019. 06. 03

Weather 晴れ Temp 24.5 °C Wet 74.2 %

Class	E3	
Group	6	
Chief		
Partner	大橋	りさ
	二重谷	光輝
	森	和哉
	DANDAR	TUGULDUR

No	15
Name	小畠 一泰

Kure National College of Technology

## 1 目的

抵抗 (器)・誘導コイル・コンデンサーの直列及び並列回路に交流電圧を加えた場合の電流及び各端子電圧を測定して、直列及び並列共振現象を理解する。

## 2 理論

### 2.1 直列共振

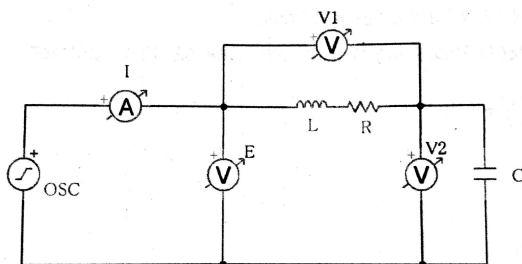


図 1: LRC 直列回路

図 1 のような RLC 直列回路に電圧  $E$  を加えたとき、流れる電流を求めると次式となる。

$$I = \frac{E}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{-j\varphi} \quad (1)$$

ただし、

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2)$$

式 1 において、 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$  のような条件が満足されれば、電圧、電流は同相となり、電流は極大となる。このような状態を直列共振といい、そのときの角周波数  $\omega_0$  および電流の極大値  $I_0$  は式 3、式 4 となる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3)$$

$$I_0 = \frac{E}{R} \quad (4)$$

この  $\omega_0$  と  $I_0$  とで式 1 を表示すれば式 15 となる.

$$I = \frac{I_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} e^{-j\varphi} \quad (5)$$

ただし,

$$\varphi = \tan^{-1} \{Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})\} \quad (6)$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7)$$

式 7 の  $Q$  は共振尖鋭度という. 共振時の電流値  $I_0$  の  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  に対する角周波数を  $\omega_1, \omega_2$  とすれば, 式 7 の  $Q$  は式 8 によっても表示できる.

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (8)$$

ここで  $f_0$  は共振周波数,  $f_1, f_2$  は  $\omega_1, \omega_2$  の周波数である. この  $f_0, f_1, f_2$  との間には式 9 の関係がある.

$$f_0^2 = f_1 f_2 \quad (9)$$

式 7 と式 8 および式 9 から次式が得られる.

$$R = \frac{1}{\omega_0 Q C} = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 C} \quad (10)$$

よって, この  $f_1, f_2$  を図式的に求めると  $R$  を求めることも可能となる. 次に 式 15 を利用して,  $L, R$  および  $C$  の端子電圧  $V_L, V_R$  および  $V_C$  を求めると次式のようなになる.

$$V_L = \frac{\omega L I_0}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \quad (11)$$

$$V_R = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-j\varphi} \quad (12)$$

$$V_C = \frac{\frac{I_0}{\omega C}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \quad (13)$$

式 11 ～ 式 13 の関係をベクトル図に示すと図 2 となる．電源電圧  $E$  を一定にし，その周波数  $f$  を変化した場合の電流の大きさおよび位相角  $\varphi$  を示すと図 3 および図 4 のようになる．

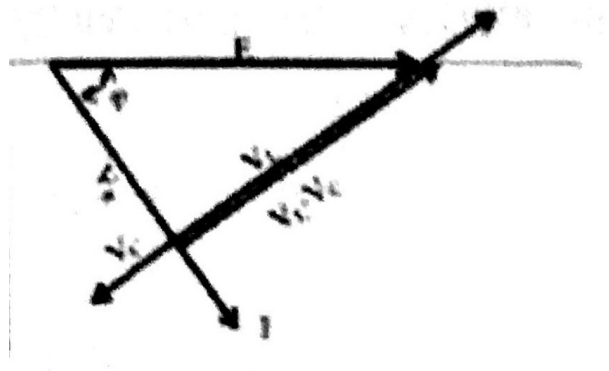


図 2: ベクトル図

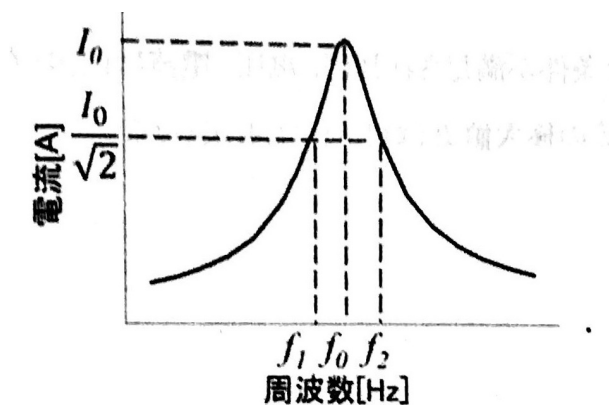


図 3: 共振曲線

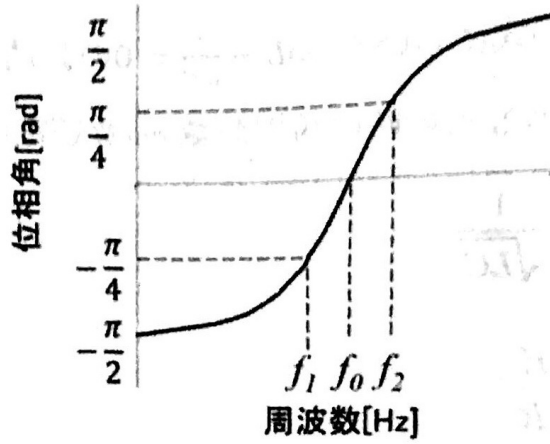


図 4: 位相角の周波数特性

次に、周波数を一定にし、 $C$  を変化した場合を考える。  $C$  を変化させ  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  とすることを同調をとるといい、そのときの  $C$  の値を  $C_0$  とすれば  $C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$  となり、この  $C_0$  を用いて、式 15 を書き改めると式 14 になる。

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2(1 - \frac{C_0}{C})^2}} e^{-j\varphi} \quad (14)$$

ただし、

$$\varphi = \tan^{-1} \left\{ Q \left( 1 - \frac{C_0}{C} \right) \right\} \quad (15)$$

この場合、電源電圧  $E$  および周波数を一定にし、 $C$  を変化させたときの電流  $I$  の大きさおよび位相角  $\varphi$  を示すと図 5 および図 6 のようになる。

図 5 および図 6 において、電流が共振時  $I_0$  の  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  となる容量の値を  $C_1, C_2$  とすれば、位相角は  $\varphi = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$  であり、この  $C_0, C_1, C_2$  の間には次式の関係がある。

$$C_0 = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} \quad (16)$$

上式および 式 7, 式 8 から類推して次式が得られる。

$$R = \frac{1}{\omega C_0 Q} = \frac{C_2 - C_1}{2\omega C_1 C_2} \quad (17)$$

よって、 $C_1, C_2$  を図式的に求めると、 $R$  を算出できる。

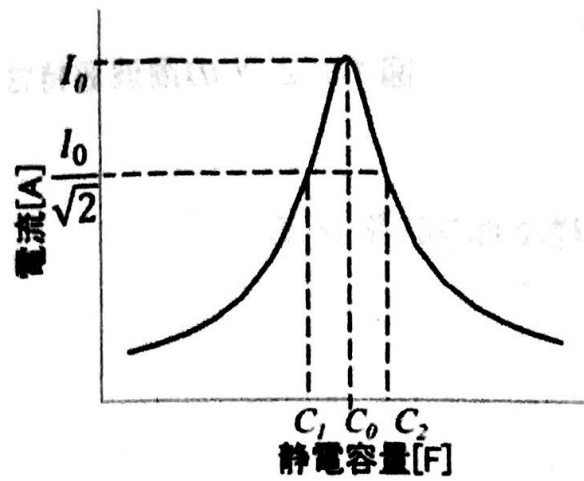


図 5: 共振曲線

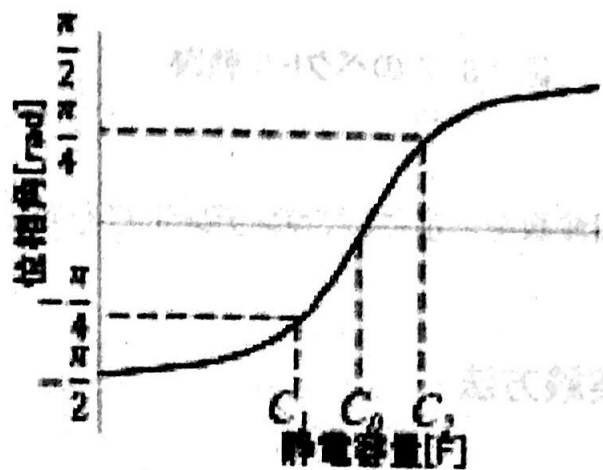


図 6: 位相角の周波数特性

## 2.2 並列共振

並列共振の共振現象の解明には電流，電圧関係のベクトル図を用いて説明するよりも直感的に考えやすいインピーダンスのベクトルによって考えられる場合が多いので，本章でもインピーダンスによる解法を試みる．図 7 の回路のインピーダンスを求めると 式 18 になる．

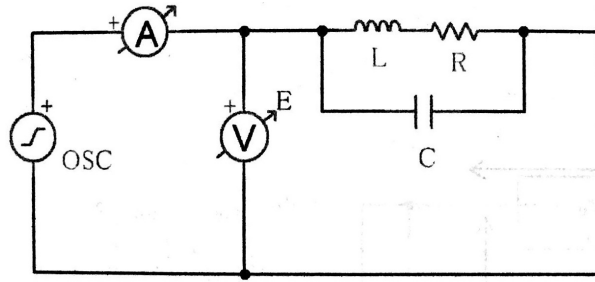


図 7: LR-C 並列回路

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega CR - \omega^2 LC} = \frac{R + j\omega\{L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C\}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} \quad (18)$$

式 18 において共振現象の生じる条件は虚数部が零となる周波数であるから次式を得る.

$$L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C = 0 \quad (19)$$

式 19 より共振周波数  $f_0$  を求めると 式 20 となる.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (20)$$

共振時のインピーダンスの値を  $Z_0$  とすれば 式 18 より, 式 21 を得る.

$$Z_0 = \frac{L}{CR} \quad (21)$$

$Z_0$  は共振インピーダンスといい, 一般的に  $\frac{L}{CR}$  がインピーダンス  $Z$  の最大値を等しくないが  $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$  のとき  $Z_0$  は最大値に等しくなり, 共振周波数は  $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  にほぼ等しくなる. 周波数を変化した時の  $Z$  のベクトル軌跡を描くと 図 8 になり,  $R$  が小さいほど円に近い形をとる. また, インピーダンス  $Z$  およびアドミッタンス  $Y$  の大きさの周波数特性は図 9 となる.

次に電圧および周波数を一定にしてコンデンサ  $C$  を変化しても図 9 と同じような曲線が得られる.

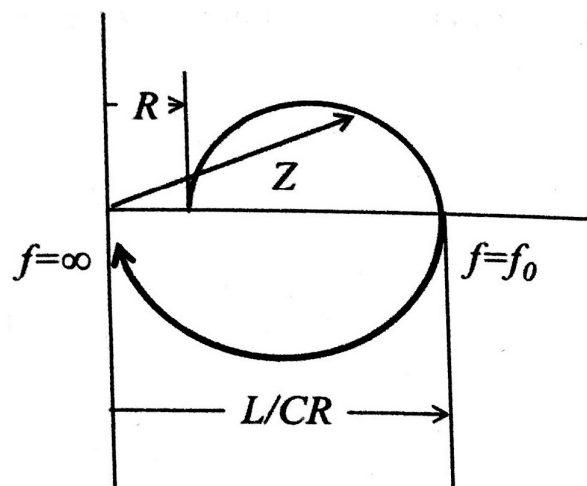


図 8:  $Z$  のベクトル軌跡

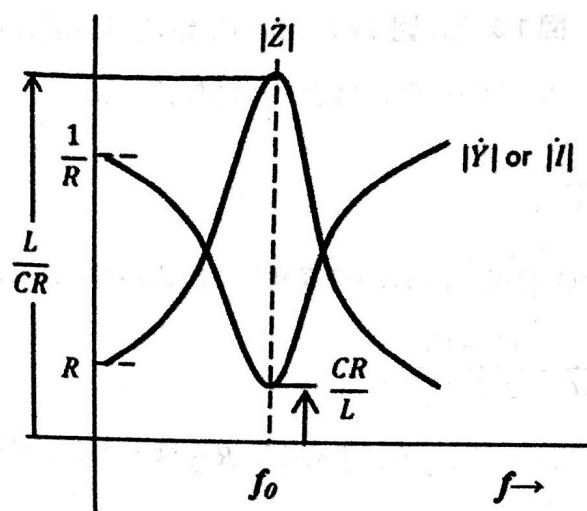


図 9:  $Z, Y$  の周波数特性



### 3 実験方法と結果の整理

#### 3.1 使用器具

1. OSC: 発振器 (NF1915) (管理番号: BH37H16S00000114)
2. V: マルチメーター (IWATSU: 757) (は.34-19)
3. A: マルチメーター (IWATSU: SC-7403) (は・い-297)
4. L: 固定自己インダクタンス L; Si-10 形 - 横河電機 (実測値  $L = 9.873[\text{mH}]$ ,  $R = 14.550[\Omega]$ ) (い・8-3)
5. C: 4 ダイアルコンデンサ; CD-41 形 - 横河電機 (2・B-4-23)
6. SW: 切替スイッチ
7. LCR メーター (共用)

## 3.2 直列共振

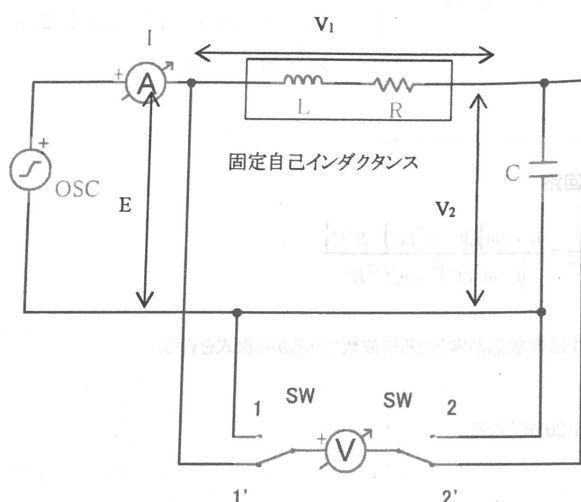


図 10: 直列共振測定回路

1. 固定自己インダクタンスのインダクタンス  $L$  と内部抵抗  $R$  を測定する．次式より直列共振周波数  $f_0$  を算出する．( $C = 0.5[\mu\text{F}]$  とする．)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2265.2209[\text{Hz}]$$

2. 図 10 の回路を結線する．ここで，電圧計と電流計はマルチメーターを利用する．
3.  $E = \text{一定}(100[\text{mV}])$  で周波数を変化して電流  $I$ ，電圧  $V_1, V_2$  を測定する．測定にあたってまず，周波数を共振周波数  $f_0$  に設定し，そのときの電流  $I_0$  から電流計のレンジを設定する．図 3 の共振曲線がかけるよう，周波数を大体  $f_0 - 700[\text{Hz}] \sim f_0 + 700[\text{Hz}]$  の範囲で 20 点以上データをとる．特に共振周波数  $f_0$  及び周波数  $f_1, f_2$  の近辺はデータを密にとること．なお，コンデンサ  $C$  は  $0.5[\mu\text{F}]$  で一定である．
4.  $E = \text{一定}(100[\text{mV}])$  で周波数  $f = f_0$  一定として，コンデンサ  $C$  を変化して，電流  $I$ ，電圧  $V_1, V_2$  を測定する．また，図 5 の共振曲線が描けるよう，コンデンサ  $C$  の変化は  $0.2 \sim 0.8[\mu\text{F}]$  の範囲で 20 点以上データをとる．特にコンデンサ  $C$  が  $C_0$  および  $C_1, C_2$  近辺のデータを密にとること．

### 3.3 並列共振

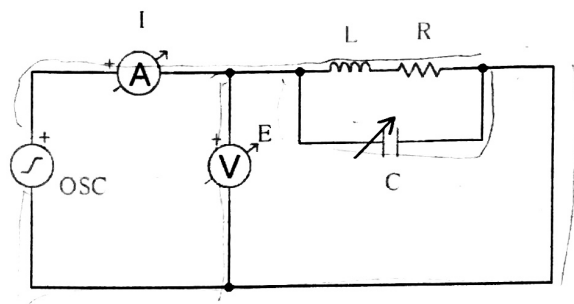


図 11: 並列共振測定回路

1. 図 11 の回路を結線する．ここで，電圧計と電流計はマルチメーターを利用する．
2. 式 20 より並列共振周波数  $f_0$  を算出する．( $C = 0.5[\mu\text{F}]$  とする.)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 2253.0451[\text{Hz}]$$

3.  $E = \text{一定} (100[\text{mV}])$  で 3.2(3) と同様に行う．
4.  $E = \text{一定} (100[\text{mV}])$  で 3.2(4) と同様に行う．

## 4 測定結果と処理

### 4.1 直列共振の測定結果と処理

表 1: 直列共振 周波数変化  $f_0 = 2265.2209[\text{Hz}]$

$f[\text{Hz}]$	$V_1[\text{V}]$	$V_2[\text{V}]$	$I[\text{mA}]$	$Z[\Omega]$	$\varphi[\text{rad}]$
1500.0000	0.0790	0.1773	0.841	304.7562	-1.449288781
1600.0000	0.1001	0.1976	1.000	297.7000	-1.425866412
1700.0000	0.1290	0.2260	1.254	283.0941	-1.394729744
1800.0000	0.1696	0.2654	1.508	288.4615	-1.351162059
1900.0000	0.2331	0.3248	1.947	286.5434	-1.285819642
2000.0000	0.3314	0.4207	2.653	283.4904	-1.177697861
2100.0000	0.5128	0.5909	3.910	282.2762	-0.971612534
2120.0000	0.5646	0.6384	4.265	282.0633	-0.907862288
2150.0000	0.6543	0.7195	4.874	281.8629	-0.789785973
2200.0000	0.8253	0.8669	6.008	281.6578	-0.513817875
2240.0000	0.9357	0.9484	6.692	281.5451	-0.212988962
2265.2209	0.9635	0.9550	6.816	281.4701	0.000000044
2280.0000	0.9574	0.9369	6.729	281.5129	0.124958393
2300.0000	0.9303	0.8946	6.481	281.5769	0.286236761
2350.0000	0.8070	0.7436	5.505	281.6712	0.617320132
2400.0000	0.6735	0.5951	4.500	281.9111	0.840604721
2420.0000	0.6284	0.5462	4.165	282.0168	0.906680544
2450.0000	0.5701	0.4835	3.733	282.2395	0.987739534
2500.0000	0.4907	0.3997	3.150	282.6667	1.088038682
2600.0000	0.3866	0.2913	2.388	283.8777	1.212543777
2700.0000	0.3225	0.2255	1.920	285.4167	1.285448808
2800.0000	0.2804	0.1823	1.611	287.2129	1.332937646
2900.0000	0.2511	0.1522	1.393	289.5190	1.366244457

表 2: 直列共振 コンデンサ変化  $C_0 = 0.5[\mu\text{F}]$

$C[\mu\text{F}]$	$V_1[\text{V}]$	$V_2[\text{V}]$	$I[\text{mA}]$	$Z[\Omega]$	$\varphi[\text{rad}]$
0.200	0.0674	0.1665	0.483	484.2650	-1.501876563
0.250	0.1009	0.1996	0.720	417.3611	-1.467620365
0.300	0.1503	0.2480	1.068	372.9401	-1.416711983
0.350	0.2305	0.3260	1.635	340.3670	-1.333737311
0.400	0.3748	0.4642	2.654	316.1266	-1.178130536
0.430	0.5280	0.6081	3.738	303.9326	-1.004287679
0.450	0.6693	0.7368	4.736	296.8961	-0.820637721
0.460	0.7513	0.8092	5.316	293.5478	-0.698545797
0.475	0.8693	0.9063	6.149	288.7624	-0.470268202
0.500	0.9593	0.9510	6.785	281.5475	0.000000000
0.525	0.8671	0.8183	6.133	274.8084	0.431050842
0.550	0.7167	0.6458	5.071	268.6847	0.720514456
0.560	0.6626	0.5863	4.688	266.4036	0.802479786
0.570	0.6144	0.5341	4.350	264.0230	0.870297728
0.600	0.5056	0.4177	3.580	257.9050	1.014889644
0.650	0.3926	0.2994	2.782	248.7419	1.149033075
0.700	0.3282	0.2323	2.324	241.1790	1.223115306
0.750	0.2860	0.1891	2.028	234.2702	1.269615155
0.800	0.2568	0.1592	1.821	228.4459	1.301392529

## 4.2 並列共振の測定結果と処理

表 3: 並列共振 周波数変化  $f_0 = 2253.0451[\text{Hz}]$

$f[\text{Hz}]$	$I[\text{mA}]$	$Z[\Omega]$	$Y[\text{S}]$
1500.0000	0.5979	167.2520	0.005979
1600.0000	0.5018	199.2826	0.005018
1700.0000	0.4150	240.9639	0.004150
1800.0000	0.3335	299.8501	0.003335
1900.0000	0.2584	386.9969	0.002584
2000.0000	0.1896	527.4262	0.001896
2100.0000	0.1291	774.5933	0.001291
2200.0000	0.0843	1186.2396	0.000843
2240.0000	0.0760	1315.7895	0.000760
2250.0000	0.0752	1329.7872	0.000752
2253.0451	0.0750	1333.3333	0.000750
2260.0000	0.0749	1335.1135	0.000749
2270.0000	0.0750	1333.3333	0.000750
2300.0000	0.0787	1270.6480	0.000787
2400.0000	0.1129	885.7396	0.001129
2500.0000	0.1611	620.7325	0.001611
2600.0000	0.2125	470.5882	0.002125
2700.0000	0.2637	379.2188	0.002637
2800.0000	0.3146	317.8640	0.003146
2900.0000	0.3655	273.5978	0.003655
3000.0000	0.4132	242.0136	0.004132

表 4: 直列共振コンデンサ変化  $C_0 = 0.5[\mu\text{F}]$

$C[\mu\text{F}]$	$I[\text{mA}]$	$Z[\Omega]$	$Y[\text{S}]$
0.200	0.4295	232.8289	0.004295
0.250	0.3594	278.2415	0.003594
0.300	0.2914	343.1709	0.002914
0.350	0.2233	447.8280	0.002233
0.400	0.1585	630.9148	0.001585
0.430	0.1224	816.9935	0.001224
0.450	0.1017	983.2842	0.001017
0.460	0.0925	1081.0811	0.000925
0.475	0.0819	1221.0012	0.000819
0.500	0.0749	1335.1135	0.000749
0.525	0.0841	1189.0606	0.000841
0.550	0.1051	951.4748	0.001051
0.560	0.1156	865.0519	0.001156
0.570	0.1267	789.2660	0.001267
0.600	0.1627	614.6281	0.001627
0.650	0.2278	438.9816	0.002278
0.700	0.2956	338.2950	0.002956
0.750	0.3654	273.6727	0.003654
0.800	0.4342	230.3086	0.004342

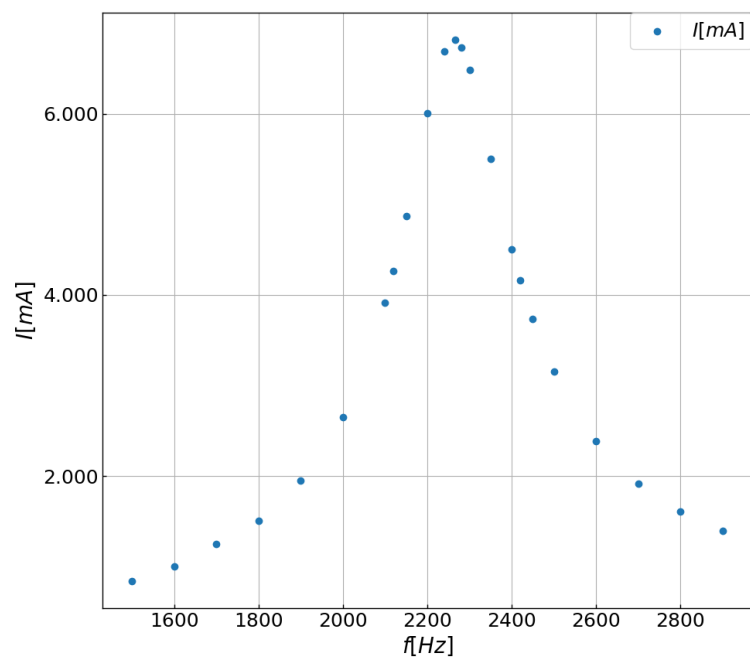


图 12: 共振曲线



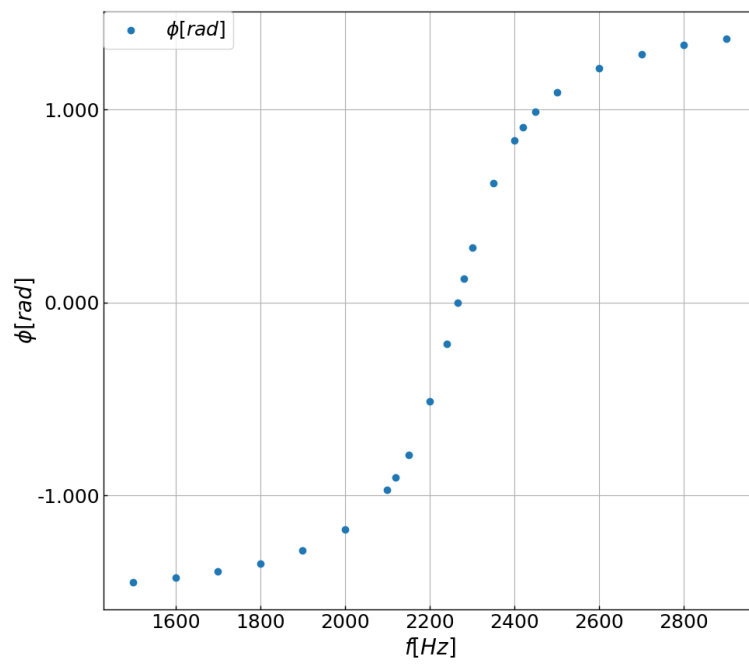


図 13: 位相角の周波数特性

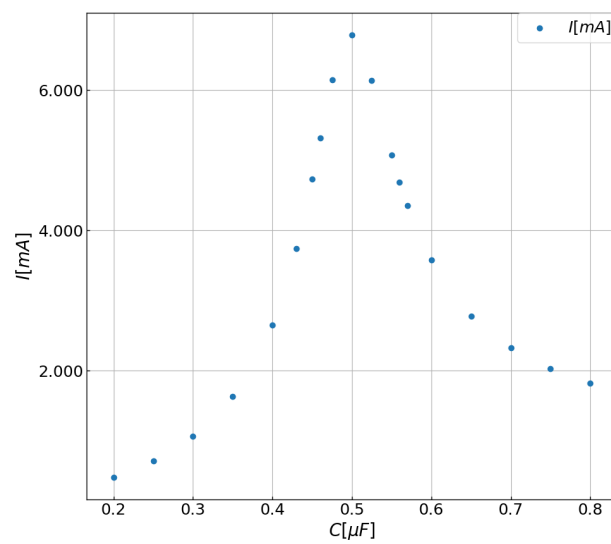


図 14: 共振曲線

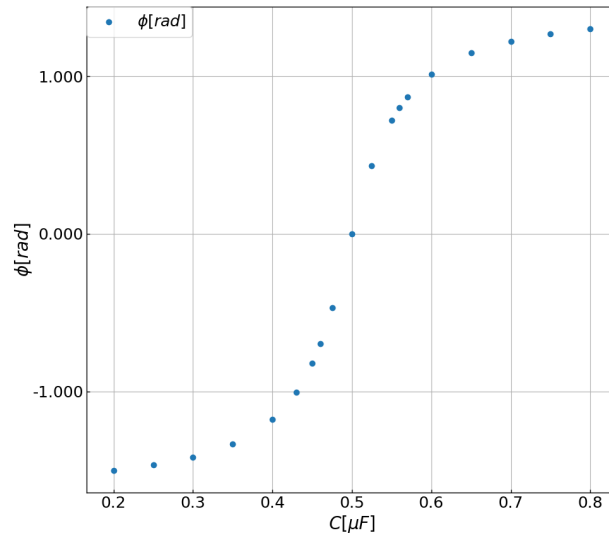


図 15: 位相角の周波数特性

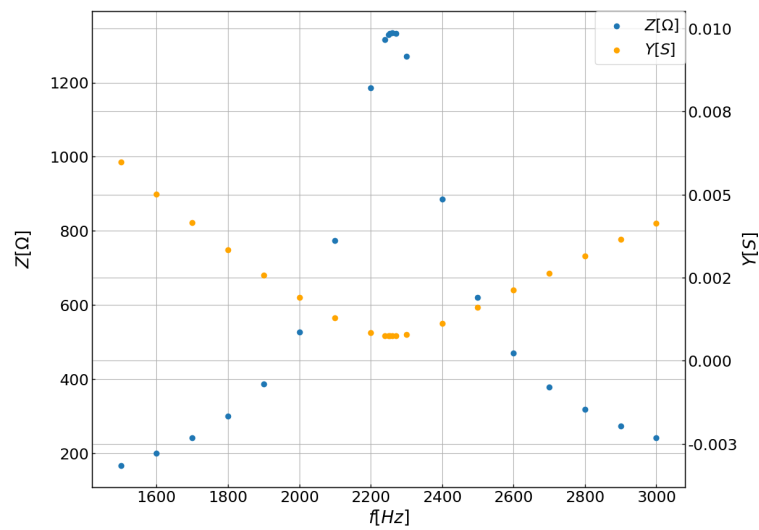


図 16: Z, Y の周波数特性

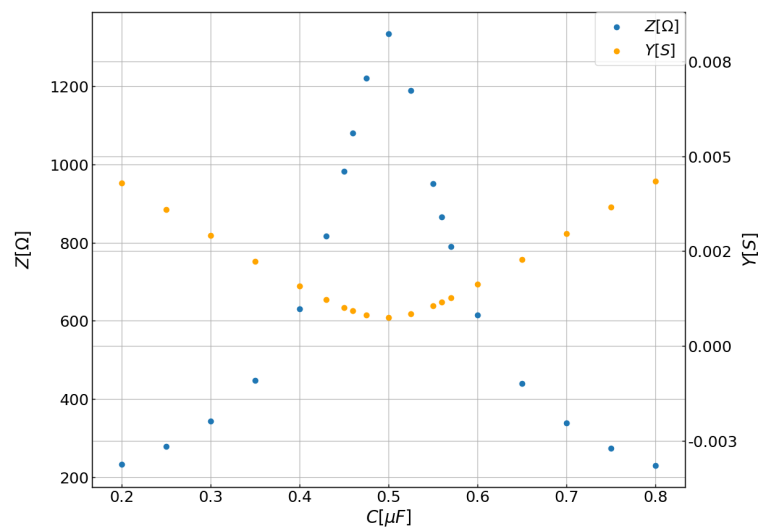


図 17:  $Z$ ,  $Y$  のコンデンサ特性

## 5 考察

### 5.1 直列共振

1. 理論値  $Q$  を式 7 により算出し、共振曲線より  $f_0, f_1, f_2$  を求めて式 8 より算出した  $Q$  と比較検討せよ.

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{6.186}{\sqrt{2}} = 4.820[\text{mA}]$$

共振曲線より  $f_1 = 2140[\text{Hz}]$ ,  $f_2 = 2380[\text{Hz}]$  付近である.

式 7 より,

$$Q = \frac{2\pi \times 2265.2209 \times 9.873 \times 10^{-3}}{14.550} = 9.6578 \quad (22)$$

また, 式 8 より,

$$Q = \frac{2265.2209}{2380 - 2140} = 9.4384$$

仮に  $f_1 = 2140 + 10 = 2150[\text{Hz}]$  だとすると,

$$Q = \frac{2265.2209}{2380 - 2150} = 9.8488$$

このように  $10[\text{Hz}]$  違うと  $Q$  値は  $9.8488 - 9.4384 = 0.4104$  となり, 約  $0.4$  違うこととなる. よってこの  $Q$  値は誤差の範囲と考えてよい.

2. LCR メーターで測定した理論値  $R$  を式 10 及び式 17 で算出したものと比較検討せよ.

測定値  $= 14.550[\Omega]$

式 10 より,

$$R = \frac{1}{\omega_0 Q C} = \frac{1}{2\pi \times 2265.2209 \times 9.6578 \times 0.5 \times 10^{-6}} = 14.550[\Omega]$$

また, 式 17 より,

$$R = \frac{1}{\omega C_0 Q} = \frac{1}{2\pi \times 2265.2209 \times 0.5 \times 10^{-6} \times 9.6578} = 14.550[\Omega]$$

よって, 理論値および算出結果が等しくなったため, 本実験は成功である.

3. 直列共振時には  $V_L$  及び  $V_C$  の大きさは  $E$  の  $Q$  倍になるが, 測定結果から確認せよ.

測定結果  $V_L = 0.9635[\text{V}]$ ,  $V_C = 0.9550[\text{V}]$

式 22 より,  $E \times Q = 100 \times 10^{-3} \times 9.6578 = 0.96578[\text{V}]$

よって, 理論値および測定結果がほぼ等しくなったため, 本実験は成功である,

## 5.2 並列共振

1. 測定結果から得られるインピーダンス  $Z_0$  と 式 21 より算出される  $Z_0$  を比較検討せよ.

測定結果より算出した  $Z_0 = 1335.1135[\Omega]$

$$Z_0 = \frac{9.873 \times 10^{-3}}{0.5 \times 10^{-6} \times 14.550} = 1357.1134[\Omega]$$

$Z_0$  の差は約  $22[\Omega]$  なので, 誤差の範囲である.

## 6 研究

1. 理論にて示した各式の導出を行え. ただし, 簡単なもの, 自明のものについては省略する.  
式 1~式 4 は省略.

2.  $Q$  の物理的意味を示せ.

$Q$  値が大きいほど共振が鋭く, 素子の質の良さを表す.

3. 直列共振, 並列共振の応用例について調べよ.

- 直列共振

- ラジオのチューナー (同調回路) [文献 1]

- コンデンサの容量  $C[\text{F}]$ , もしくはコイルのインダクタンス  $L[\text{H}]$  を変えて放送局を変更する.

- 並列共振

- 

## 7 参考文献

- 大阪電気通信大学 工学部 電気電子工学科 松浦 秀治 教授:

- <http://www.osakac.ac.jp/labs/matsuura/japanese/lesson/ElectricCircuit/AlternativeCircuit/ExampleOfSeriesResonanceCircuit.pdf>