

ハート・ホーン
ハート

Chap. 1 多様体

1.1 アフィン多様体

k : 代数的閉体

k 上の アフィン n 空間 A^n_k 略

$P = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ 点

$f \in k[x_1, \dots, x_n] = A \cong \mathbb{Q}[x]$

n 変数の項式環

零点集合

$$Z(f) = \{P \in A^n \mid f(P) = 0\}$$

$$Z(T) = \{P \in A^n \mid \forall f \in T, f(P) = 0\} \quad T \subset A$$

T によつて生成される $\{f_1, \dots, f_n \in A \mid T = \langle f_1, \dots, f_n \rangle\}$

$$Z(T) = Z(a) = Z(f_1, \dots, f_n)$$

\uparrow a の生成元

代数的集合

$Y \subset A^n$ かつ $\exists T \subset A \quad Y = Z(T)$ のとき

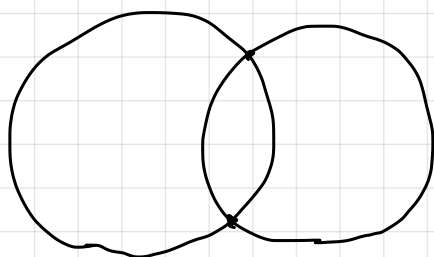
Y は 代数的集合という.

Prop. 1.1

2つの代数的集合の和は代数的.

代数的集合の任意の族の交わりは代数的.

空集合, 全空間は代数的.



A^n 上の Zariski 位相.

代数的集合と閉集合とを Zariski 位相.

例 1.1.1

A^1 上の Zariski 位相.

$A = \mathbb{C}[x]$ は PID. 任意のイデアル $a = (f)$

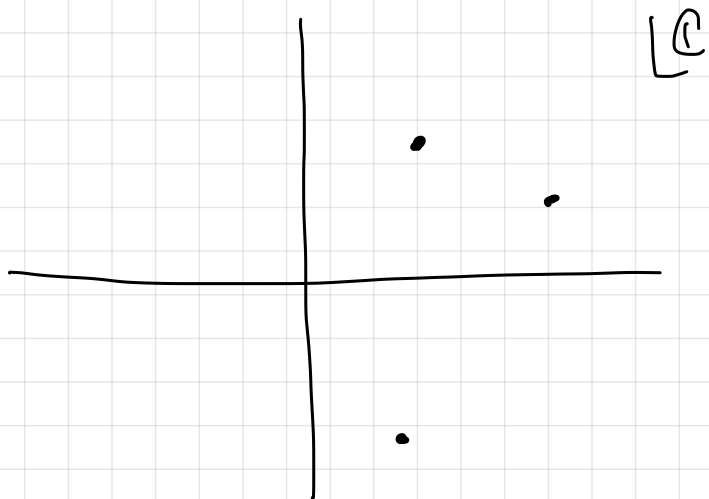
\mathbb{C} は代数的閉体だから $f = c(x-a_1) \cdots (x-a_n)$

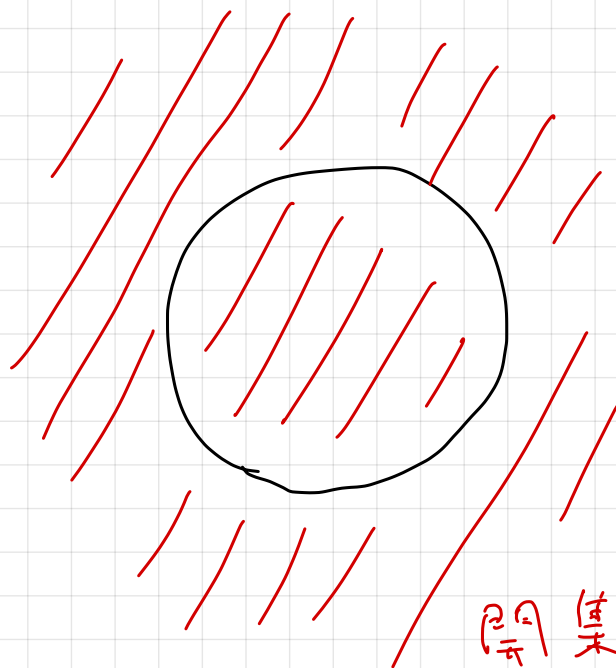
$$\therefore Z(a) = Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$Z(1) = \emptyset.$$

$$Z(0) = A^1$$

よって A^1 の閉集合は, \emptyset , 有限部分集合, 全体.





$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

閉集合

既約

位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約とは

Y において閉であるような 2 つの真部分集合

Y_1, Y_2 を使って $Y = Y_1 \cup Y_2$ と書けないということ.

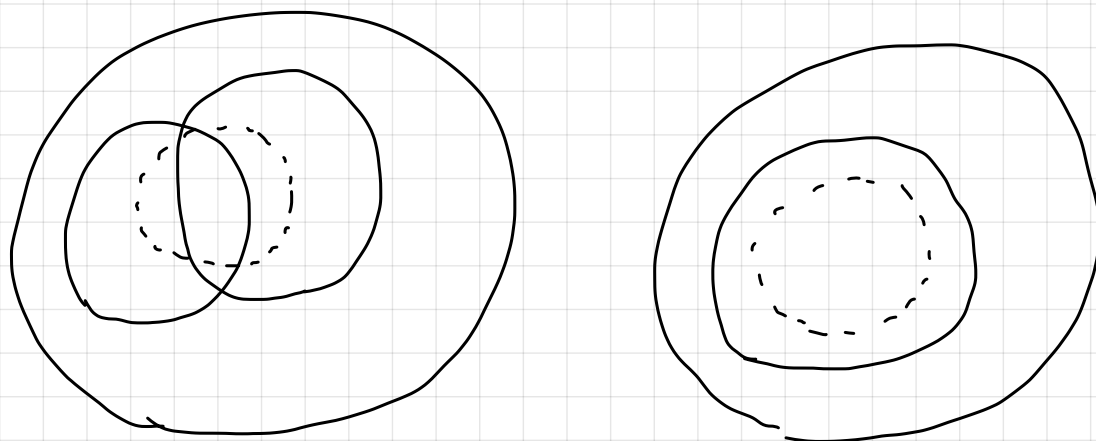
空集合は既約とみなさない.

例 1.1.2

$A \setminus'$ は既約

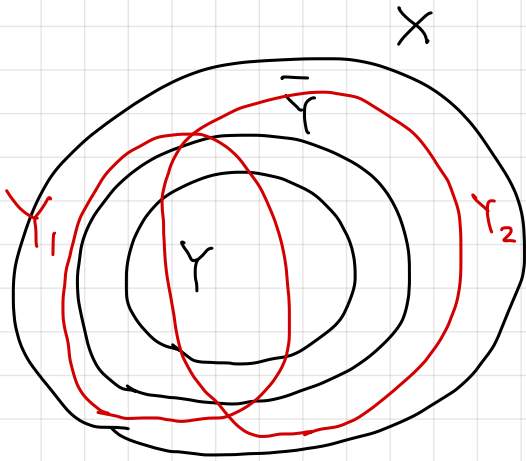
例 1.1.3

既約な空間の空でない開部分集合は
既約かつ稠密.



例 1.1.4

Y が X の 既約部分集合 ならば X に おける 閉包 \bar{Y} も 既約.



$$\bar{Y} = (Y_1 \cap \bar{Y}) \cup (Y_2 \cap \bar{Y}),$$

$$Y_1 \cap \bar{Y} \neq \bar{Y}, \quad Y_2 \cap \bar{Y} \neq \bar{Y} \quad \text{となる}$$

$$\therefore \text{よって } Y = (Y_1 \cap Y) \cup (Y_2 \cap Y) \quad \text{となる.}$$

$$Y_1 \cap Y = Y \quad \text{となる} \quad \bar{Y} \subset Y_1$$

↑ Y を含む 最小の開集合

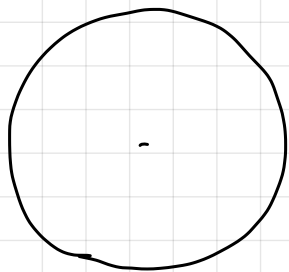
$$\text{これは } Y_1 \cap \bar{Y} \neq \bar{Y} \quad \text{となる.} \quad \text{よって } Y_1 \cap Y \neq Y$$

$$Y_2 \cap Y \neq Y \quad \text{も同様}$$

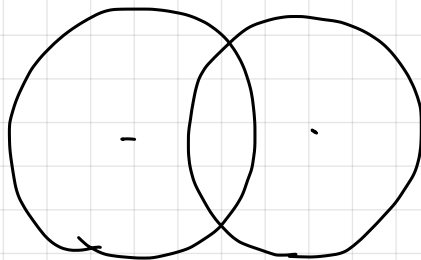
$$\text{よって } Y \text{ は 既約で なくなり } \bar{Y} \text{ となる.}$$

アフィン代数多様体

A^n の既約閉部分集合に誘導位相を
いれたもの.

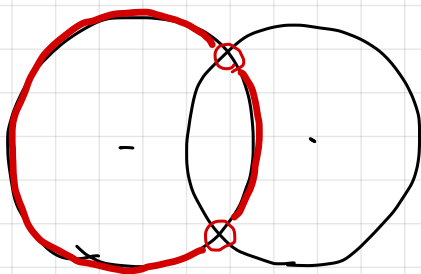


$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



既約でないから違う.

アフィン代数多様体の閉部分集合を
導アフィン代数多様体という.



$$Y \subset A^n \quad \vdash \exists ! I$$

$$I(Y) = \{ f \in A \mid \forall P \in Y \quad f(P) = 0 \} \quad \text{「理想」}$$

Prop. 1.2

$$(a) \quad T_1 \subset T_2 \subset A \Rightarrow Z(T_1) \supset Z(T_2)$$

$$(b) \quad Y_1 \subset Y_2 \subset A^n \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$$

$$(c) \quad Y_1, Y_2 \subset A^n \Rightarrow I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$$

$$(d) \quad a \subset A \quad \text{「理想」} \Rightarrow I(Z(a)) = \sqrt{a}$$

$$(e) \quad Y \subset A^n \Rightarrow Z(I(Y)) = \overline{Y}$$

(d) (1) Hilbert の 零点定理

$$(e) \quad \overline{Y} \subset Z(I(Y)) \quad \text{「明らか」}$$

$Y \subset W$ とする 閉集合 W があ. た. とす

Y を含む

$$W = Z(a) \quad Z(a) \supset Y$$

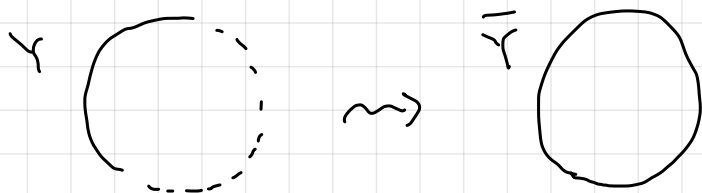
最小の

$$I(Z(a)) \subset I(Y)$$

閉集合

$$\therefore a \in I(Y)$$

$$\therefore Z(a) \supset Z(I(Y))$$



$a = \sqrt{a}$ のことを a は 根基 であるという.

$$\begin{array}{ccc}
 Y \subset A^n & \xleftrightarrow{\text{対応}} & a \subset A \\
 \text{代数的集合} & & \text{根基である}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\quad} & I(Y) \\
 Z(a) & \xleftarrow{\quad} & a
 \end{array}$$

$$Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$$

$$I(Z(a)) = \sqrt{a} = a.$$

$$\left(\begin{array}{l}
 \sqrt{I(Y)} = I(Z(I(Y))) = I(Y) \\
 Y \subset Z(I(Y)) \text{ かつ } I(Y) \supset I(Z(I(Y))) \\
 \text{---} \Rightarrow \boxed{I(Y)} \subset I(Z(\boxed{I(Y)})) \text{ (同値)}
 \end{array} \right)$$

$$Z(a) \text{ が既約} \Leftrightarrow a \in \text{Spec } A$$

↑

根基である

A の素イデアル.

Ex-1.4.1

A^n は既約

$$A^n = Z(0) \quad (0) \text{ は素イデアル}$$

Ex-1.4.2, 1.4.3

$f \in k[x, y]$ 既約多項式とする.
 A

A は UFD なのを (f) は素イデアル

よって $V = Z(f)$ は既約

$f(x, y) = 0$ を アフィン曲系線という.

f が d 次のを d 次曲系線という.

一般に $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ 既約多項式

$n=3$ のときは $Z(f)$ を曲面.

$n > 3$ 超曲面という.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{2次曲系線.}$$

既約

$$(a + b y + c) (x + b' y + c')$$

$$= a x^2 + a b' x y + a c' x + b b' y^2 + b x y + b c' y + c x + c b' y + c c'$$

$$= x^2 + y^2 - 1$$

$$a = 1.$$

$$b b' = 1$$

$$c c' = -1$$

$$b + b' = 0$$

$$c + c' = 0$$

$$b c' + c b' = 0$$

$$b = \pm i \quad b' = \mp i$$

$$c = \pm 1 \quad c' = \mp 1$$

不可能.

例 1.4.4

$A = k[x_1, \dots, x_n]$ の 極大イデアル m は

$m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ という形.

アフィン座標環

$$Y \subset A^n \quad A(Y) = A/I(Y)$$

Y が アフィンの様 (すなわち $A(Y)$ は 整域 かつ
有限生成 k 代数).

B が 整域 かつ 有限生成 k 代数 かつ

$$B = k[x_1, \dots, x_n]/a,$$

このとき $Y = Z(a)$ とおけば B は Y の 座標環

Noether 的位相空間

閉部分集合が降鎖律をみたすもの.

T_0 -空間 X 上の空でない閉集合 Y は既約な閉集合の有限和で表される.

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$$

$Y_i \not\subset Y_j$ とすると Y_i は一意的に決まる

これを Y の既約成分という.

A^n 内のすべての代数的集合は多様体の和となる.