# ハーツホーン
# ノート

# 準備

## 環

集合$R$が加法$+$，乗法$\cdot$をもつ

$+$に関して可換群(単位元$0$)で．

$\cdot$に関してモノイド(単位元$1$)で．

さらに次をみたすとき$R$は環という．

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$
$$(y+z)\cdot x = y\cdot z + z\cdot x$$

$1=0$のとき$R=\{0\}$であり零環という　0とも書く．

${}^{\forall}x, y \in R$で$x\cdot y = y\cdot x$が成り立つとき

$R$は可換環という

例　$\mathbb{Z}$は可換環

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

以下環は断わらない限り可換環のこととする．

## 整域

$R \neq \{0\}$ で $0$ 以外に零因子をもたない環を整域という。

## 環準同型写像

2つの環 $R$, $R'$ の間の写像 $f : R \to R'$ が

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(xy) = f(x) f(y)$

(3) $f(1) = 1'$　　$1 \in R$, $1' \in R'$

をみたすとき $f$ を環準同型写像という。

$f$ が全単射のとき $f$ を環同型写像という。

このとき $R \simeq R'$ と書く。

$f(0) = 0'$ である。

## イデアル

環 $R$ の部分集合 $I$ が

$$x, y \in I \Rightarrow x+y \in I$$

$$x \in I,\ a \in R \Rightarrow ax \in I$$

をみたすとき $I$ を $R$ のイデアルという.

例 $3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアル

## 剰余環

$x \in R$ に対し $\bar{x} = x + I$ とおき

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy}$$

とすると これは環になる.

これを $R$ の $I$ による剰余環といい $R/I$ と書く.

例 $\mathbb{Z}_3$ は環.

## イデアルの生成

環 $R$ の部分集合 $S$ に対して

$$RS = \{ \underset{\text{有限和}}{\sum} a_i x_i \mid a_i \in R,\ x_i \in S \}$$

は $R$ のイデアルになる。

これを $S$ が生成するイデアルという。

## 単項イデアル整域 PID

すべてのイデアルが1つの元で生成される整域。

例

- $\mathbb{Z}$

  イデアルはすべて $\mathbb{Z}m$ と書ける。

- $k[x]$　$k$ 体。

  イデアルはすべて $k[x]f$ と書ける。

# ネーター環

すべてのイデアルが(加群として)有限生成な環

例)

- 体,
- $\mathbb{Z}$
- PID
- $k[x_1, \ldots, x_n]$

## 素イデアル

$\mathfrak{p} \subset R$

$xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ or $y \in \mathfrak{p}$

例

- $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

  $xy \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow x \in 3\mathbb{Z}$ or $y \in 3\mathbb{Z}$

- $6\mathbb{Z}$ は 素イデアルではない.

## 根基

$\mathfrak{a} \subset R$ が イデアルのとき

$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in R \mid \exists n > 0 \quad x^n \in \mathfrak{a}\}$ 　$r(\mathfrak{a})$ とも

- $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は イデアル
- $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$

例

$\sqrt{9\mathbb{Z}} = 3\mathbb{Z}$

$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ のとき $\mathfrak{a}$ を根基イデアルという.

素イデアルは根基イデアル

## Ker, Im

環準同型写像 $f$ に対し $f^{-1}(0)$ はイデアルになる。

$f^{-1}(0)$ を $\mathrm{Ker} f$ と書く。

また $f(R)$ を $\mathrm{Im} f$ と書く。

## 準同型定理

$f : R \to R'$ が環準同型写像のとき

$$\bar{f} : R/\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$$
$$x + \mathrm{Ker} f \longmapsto f(x)$$

は同型写像

## 体

環Rで0以外の元が存在し，それらがすべて乗法に関する逆元をもつとき Rは体という．

例

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ は体．

$\mathbb{Z}$ は環だが体ではない

## 代数的閉体

$k$ を体とする．

$f \in k[X]$ に対し $f=0$ が必ず $k$ 内に解をもつとき $k$ を代数的閉体という．

$\mathbb{C}$ は代数的閉体．

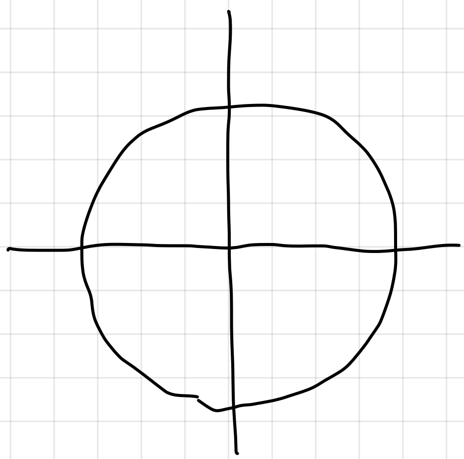
以下断わらない限り体は代数的閉体とする．

はじめに.

$\mathbb{C}$

$x^2+y^2-1 \in \mathbb{R}[x,y]$

$x^2+y^2-1=0 \rightsquigarrow$ 図形



$\mathbb{C}[x,y]$ 環

$\mathbb{C}[x,y](x^2+y^2-1)$ は $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル

# Chap. 1 多様体

## 1.1 アフィン多様体

$k$: 代数的閉体

$k$ 上のアフィン $n$ 空間 $\mathbb{A}^n_k$

略

$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ 点.

$f \in k[x_1, \ldots, x_n] = A$ と書く.

$n$ 変数多項式環　ネーター環

零点集合

$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$

$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid {}^\forall f \in T,\ f(P) = 0\}$　$T \subset A$

$AT = \mathfrak{a}$

$T$ によって生成されるイデアルを $\mathfrak{a}$ とすると

$Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, \ldots, f_n)$

$\mathfrak{a}$ の生成元

# 代数的集合

$Y \subset \mathbb{A}^n$ が $\exists T \subset A \quad Y = Z(T)$ のとき

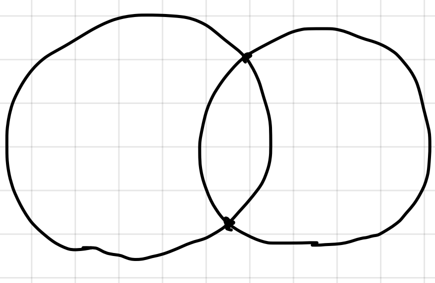
$Y$ は 代数的集合という.

Prop. 1.1

2つの代数的集合の和は代数的.

代数的集合の任意の族の交わりは代数的.

空集合, 全空間は代数的.



(証)

$Y_1 = Z(T_1)$, $Y_2 = Z(T_2)$ とすると.

$Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$

よって $Y_1 \cup Y_2$ も代数的集合.

$Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ とすると $\cap Y_\alpha = Z(\cup T_\alpha)$

よって $\cap Y_\alpha$ も代数的集合.

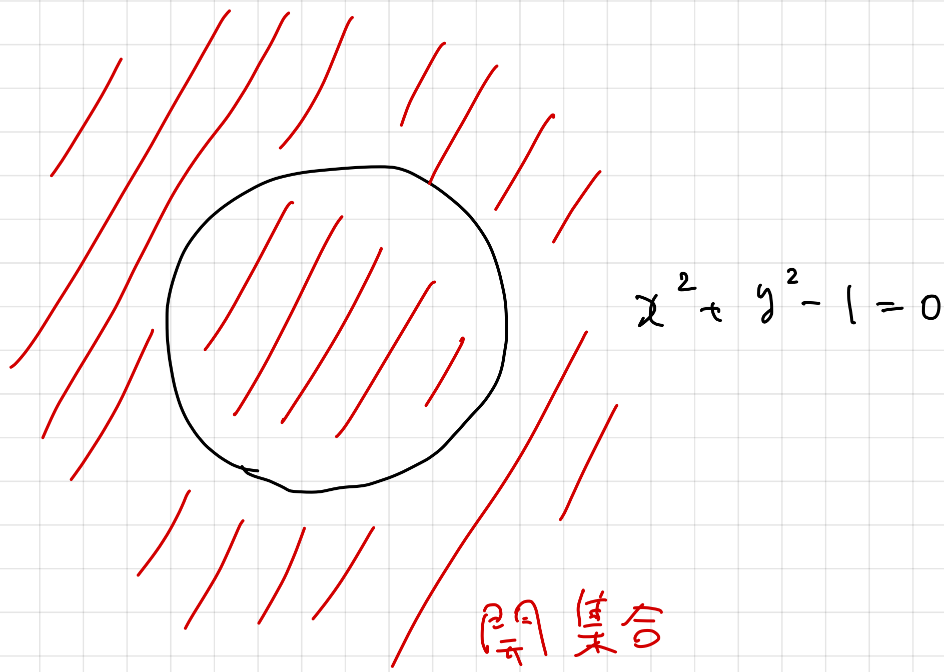
$\phi = Z(1)$, $A^n = Z(0)$ だから

$\phi$, $A^n$ も代数的集合.

## $\mathbb{A}^n$ 上の Zariski 位相.

代数的集合を閉集合とする位相.

イメージ



例 1.1.1

$\mathbb{A}^1$ 上の Zariski 位相.

$k[x]\ f$

$A = k[x]$ は PID. 任意のイデアル $\mathfrak{a} = (f)$

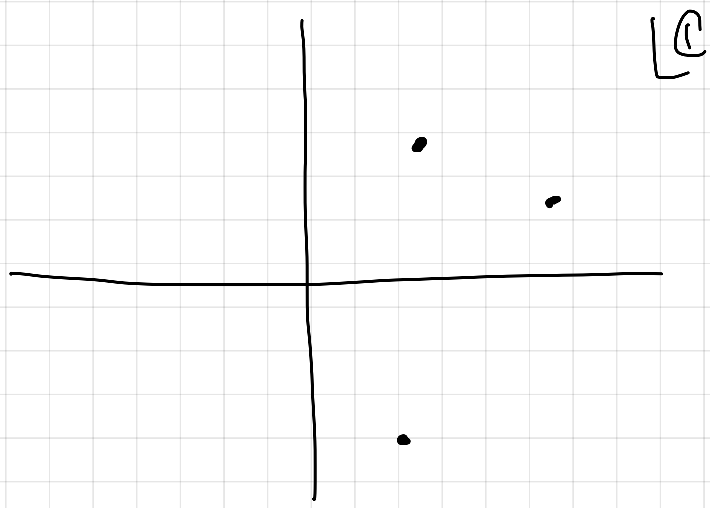
$k$ は代数的閉体だから $f = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

$\therefore Z(\mathfrak{a}) = Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$

$Z(1) = \phi$.

$Z(0) = \mathbb{A}^1$

よって $\mathbb{A}^1$ の閉集合は, $\phi$, 有限部分集合, 全体.



# 既約

位相空間 $X$ の空でない部分集合 $Y$ が既約とは

$Y$ において閉であるような2つの真部分集合

$Y_1, Y_2$ を使って $Y = Y_1 \cup Y_2$ と書けないということ.

空集合は既約とみなさない.

例 1.1.2

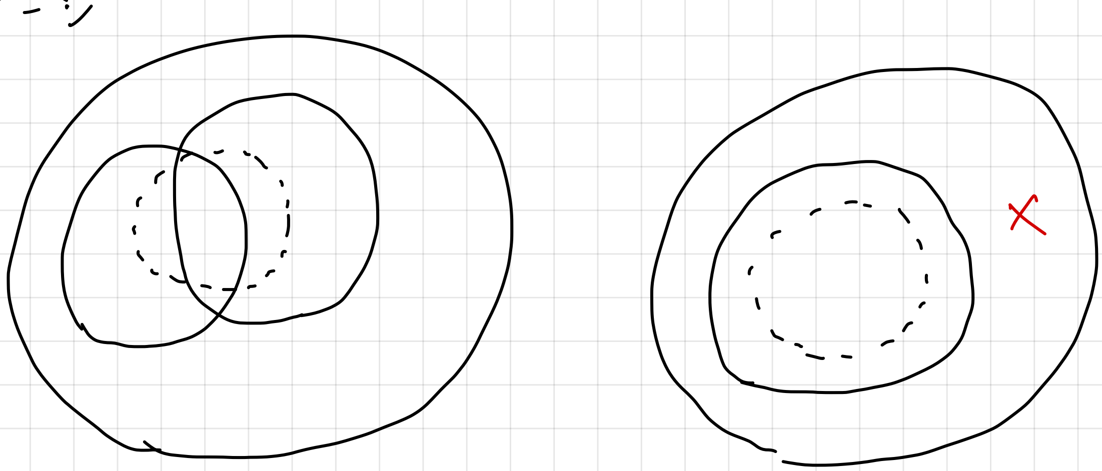
$\mathbb{A}^1$ は既約

例 1.1.3

既約な空間の空でない開部分集合は

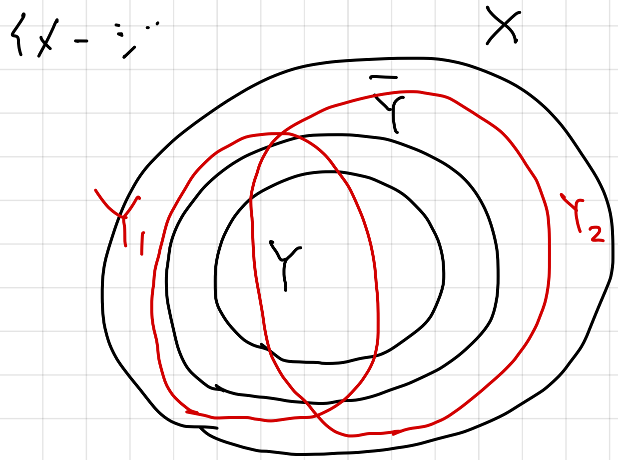
既約かつ稠密.

イメージ



例1.1.4

$Y$が$X$の既約部分集合なら$X$における閉包$\overline{Y}$も既約.




$\overline{Y} = (Y_1 \cap \overline{Y}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y})$,　$Y_1, Y_2$ 閉

$Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$, $Y_2 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ とする

このとき $Y = (Y_1 \cap Y) \cup (Y_2 \cap Y)$ となる.

$Y_1 \cap Y = Y$ とすると $\overline{Y} \subset Y_1$

$Y$を含む最小の閉集合

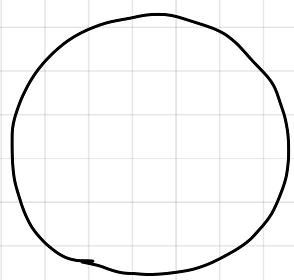
これは $Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ と矛盾. よって $Y_1 \cap Y \neq Y$

$Y_2 \cap Y \neq Y$ も同様

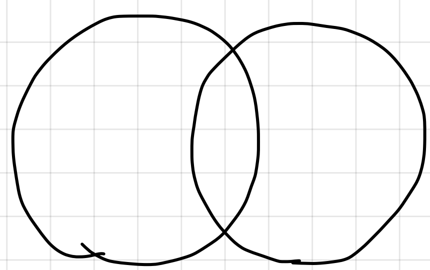
よって $Y$ は既約でなくなり矛盾

# アフィン代数多様体

$\mathbb{A}^n$ の既約閉部分集合に誘導位相をいれたもの.

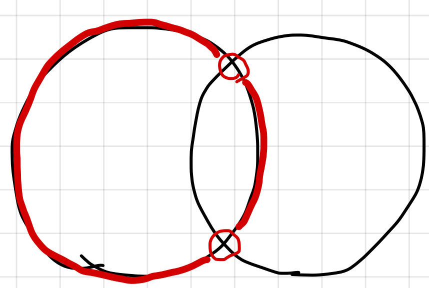


$x^2+y^2-1=0$



既約でないから違う.

アフィン多様体の開部分集合を準アフィン多様体という.



復習 1.

$k$ 上のアフィン $n$ 空間 $\mathbb{A}^n$

$k$ 上の $n$ 変数多項式環 $A = k[x_1, \ldots, x_n]$

$T \subset A$ の零点集合 $Z(T) = Z(AT)$

代数的集合

$\mathbb{A}^n$ 上の Zariski 位相

既約な位相空間

アフィン(代数)多様体

準アフィン多様体.

Prop. 1.1

代数的集合は閉集合の公理をみたす.

Exs.

- $\mathbb{A}^1$ は既約
- 既約な空間の空でない開部分集合は既約かつ稠密
- $Y$ が $X$ で既約なら $\overline{Y}$ も既約.

$Y \subset \mathbb{A}^n$ に対し

$I(Y) = \{ f \in A \mid \forall P \in Y \ f(P) = 0 \}$ イデアル.

Prop. 1.2

(a) $T_1 \subset T_2 \subset A \Rightarrow Z(T_1) \supset Z(T_2)$

(b) $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$

(c) $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

(d) $\mathfrak{a} \subset A$ イデアル $\Rightarrow I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

(e) $Y \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow Z(I(Y)) = \overline{Y}$

(d) は Hilbert の零点定理

(e) $\overline{Y} \subset Z(I(Y))$ は明らか

Yを含む最小の閉集合

$Y \subset W$ となる閉集合 $W$ があったとする

$W = Z(\mathfrak{a})$ $\quad Z(\mathfrak{a}) \supset Y$

$I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y)$

$\therefore \mathfrak{a} \subset I(Y)$

$\therefore Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y))$

$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ のとき $\mathfrak{a}$ を根基イデアルという.

Cor. 1.4 前半

$$Y \subset \mathbb{A}^n \xleftrightarrow{\text{1対1}} \mathfrak{a} \subset A$$

代数的集合　　　　根基イデアル

$$Y \longmapsto I(Y)$$
$$Z(\mathfrak{a}) \longleftarrow \mathfrak{a}$$

$$Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$$
$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

(証)

$Y = Z(\mathfrak{a})$ のとき $Z(\mathfrak{a}) = Z(\sqrt{\mathfrak{a}})$

$\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ だから $Z(\mathfrak{a}) \supset Z(\sqrt{\mathfrak{a}})$ は明らか.

$P \in Z(\mathfrak{a}) \Rightarrow f^n \in \mathfrak{a}$ となる $f$ で $f^n(P) = 0$

すると $f(P) = 0$ だから $P \in Z(\sqrt{\mathfrak{a}})$

よって はじめから $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ としてよい.

$$I(Y) = I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$$

$$Z(I(Y)) = Z(\mathfrak{a}) = Y$$

Cor. 1.4 後半

$Z(\mathfrak{a})$が既約 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$

根基イデアル

Aの素イデアルたち

(証)

$\Rightarrow$

代数的集合 $Y = Z(\mathfrak{a})$ が既約とする。

このとき $\mathfrak{a} = I(Y)$ が素イデアルであることを示す。

$fg \in I(Y)$ ならば $Y \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$

よって $Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$

$Y \cap Z(f)$, $Y \cap Z(g)$ は $Y$ の閉集合で

$Y$ が既約だから $Y = Y \cap Z(f)$ または $Y = Y \cap Z(g)$.

すなわち $Y \subset Z(f)$ または $Y \subset Z(g)$

よって $f \in I(Y)$ または $g \in I(Y)$

$\Leftarrow$

閉たる。

$\mathfrak{p}$ が素イデアルとし、$Z(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$ となったとする

すると $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

すると $\mathfrak{p} = I(Y_1)$ または $\mathfrak{p} = I(Y_2)$ ㊟次ページ

すなわち $Y = Z(\mathfrak{p}) = Y_1$ または $Y_2$

⊛

$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ が $R$ のイデアル、$\mathfrak{p}$ が $R$ の素イデアルで

$\cap \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$ のとき $\exists_i \ \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$

A. M. Prop. 1.11

(証)

まず $\cap \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p} \Rightarrow \exists_i \ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ を示す.

$\forall_i \ \mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}_i$ とすると $x_i \notin \mathfrak{p}$ かつ $x_i \in \mathfrak{a}_i$ となる $x_i$ がある.

$\prod_{i=1}^{n} x_i \in \prod \mathfrak{a}_i \subset \cap \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$

しかし, $\mathfrak{p}$ は 素イデアル だから $\cap \mathfrak{a}_i \notin \mathfrak{p}$ ⏌

もし $\mathfrak{p} = \cap \mathfrak{a}_i$ なら $\forall_i \ \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_i$

しかるに ある $\mathfrak{a}_i$ について $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ よって $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$

Ex. 1.4.1

$\mathbb{A}^n$ は既約

$\mathbb{A}^n = Z((0))$　　$(0)$ は素イデアル

Ex. 1.4.2, 1.4.3

$f \in \underset{A}{k[x, y]}$ 既約多項式とする.

$(f)$ は素イデアル　㊟ 次ページ

よって $Y = Z(f)$ は既約

$f(x, y) = 0$ をアフィン曲線という.

$f$ が $d$ 次のとき $d$ 次曲線という.

一般に $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 既約多項式

$n = 3$ のとき $Z(f)$ を曲面.

$n > 3$　　超曲面という.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$　2次曲線.

既約

# UFD

多項式環は一意分解整域

任意の単元でない元が既約元の積で一意的に書ける. 堀田 1.46

$f \in A \rightsquigarrow f = g_1 g_2 \cdots g_n$ $g_i$:既約多項式

UFDで既約元は素元.

$f$が既約 $\rightsquigarrow (f)$は素イデアル

例

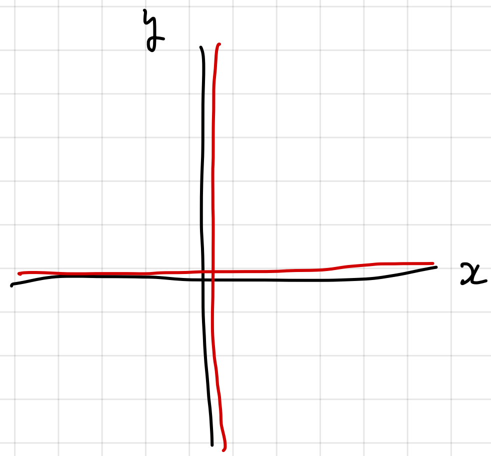
$x^2+y^2-1 \in \mathbb{C}[x,y]$ は既約多項式

よって $Z(x^2+y^2-1) = \{(x,y) \mid x^2+y^2-1=0\}$ は

アフィン多様体. ┘

$xy \in \mathbb{C}[x,y]$ は既約ではない

$Z(xy)$



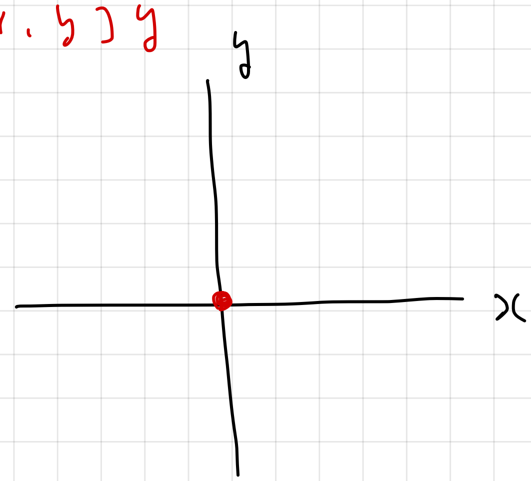
┘

cf.

$(x,y)$ は $\mathbb{C}[x,y]$ の素イデアル

$\mathbb{C}[x,y]x + \mathbb{C}[x,y]y$

$Z(x,y)$



┘

$(ax+by+c)(x+b'y+c')$

$$= ax^2 + ab'xy + ac'x + bb'y^2$$
$$+ bxy + bc'y$$
$$+ cx + cb'y + cc'$$

$$= x^2 + y^2 - 1$$

$a = 1.$

$bb' = 1$ $\quad$ $b = \pm i \quad b' = \mp i$

$cc' = -1$ $\quad$ $c = \pm 1 \quad c' = \mp 1$

$b + b' = 0$

$c + c' = 0$

$bc' + cb' = 0$ $\quad$ 不可能.

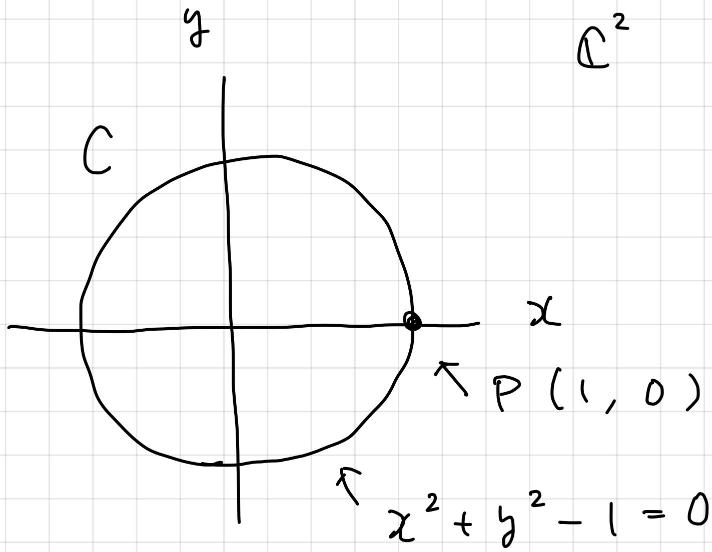
例. 1.4.4

$A = k[x_1, \dots, x_n]$ の極大イデアル $m$ は

$m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ という形.

$$A(x_1 - a_1) + \cdots + A(x_n - a_n)$$

例




$$I(C) = (x^2 + y^2 - 1) = A(x^2 + y^2 - 1)$$

$$I(P) = (x - 1, y) = A(x - 1) + Ay$$

$$C = Z(x^2 + y^2 - 1)$$

$$P = Z(x - 1, y)$$

$$P \subset C \longleftrightarrow I(P) \supset I(C)$$

## アフィン座標環

$Y \subset \mathbb{A}^n$　　　$A(Y) = A/I(Y)$

Yがアフィン多様体のとき $A(Y)$ は整域かつ
有限生成k代数.

Bが整域かつ有限生成k代数のとき

$B = k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ ,

このとき $Y = Z(\mathfrak{a})$ とおけば B は Y の座標環

cf.　環/素イデアルは整域