ハーツホーン

Chap. 1 多様体

1.1 アフィン多様体

k: 代数的閉体

k 上のアフィン n 空間 $\mathbb{A}_k^n$

略

$P=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n$ 点.

$f\in k[x_1,\dots,x_n]=A$ と書く.

n 変数多項式環

零点集合

$Z(f)=\{P\in\mathbb{A}^n \mid f(P)=0\}$

$Z(T)=\{P\in\mathbb{A}^n \mid {}^\forall f\in T,\ f(P)=0\}$ $T\subset A$

T によって生成されるイデアルを $\mathfrak{a}$ とすると

$Z(T)=Z(\mathfrak{a})=Z(f_1,\dots,f_n)$

$\mathfrak{a}$ の生成元

代数的集合

$Y \subset A^n$ が $\exists T \subset A$ $Y = Z(T)$ のとき

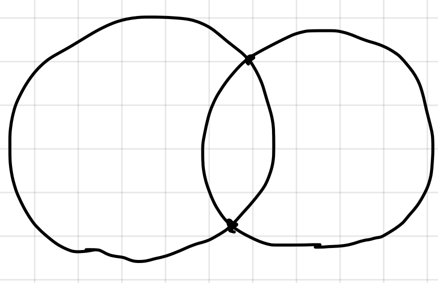
Yは代数的集合という.

Prop. 1.1

2つの代数的集合の和は代数的.

代数的集合の任意の族の交わりは代数的.

空集合, 全空間は代数的.



$\mathbb{A}^n$ 上の Zariski 位相.

代数的集合を閉集合とする位相.

例 1.1.1

$\mathbb{A}^1$ 上の Zariski 位相.

$A = k[x]$ は PID. 任意のイデアル $\mathfrak{a} = (f)$

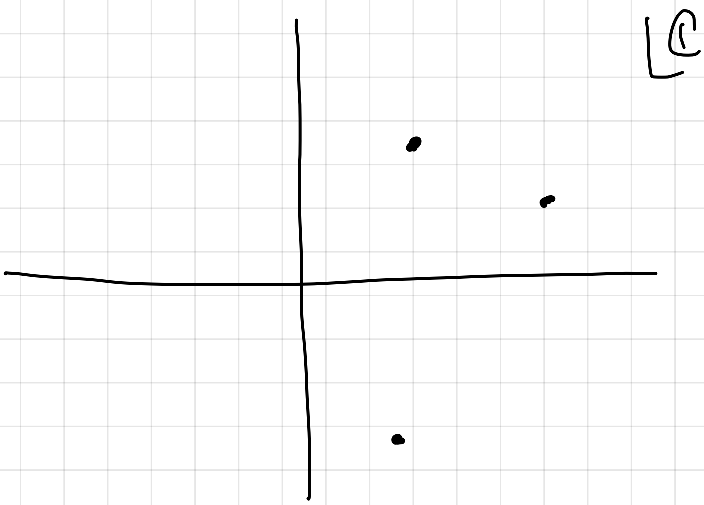
k は代数的閉体だから $f = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

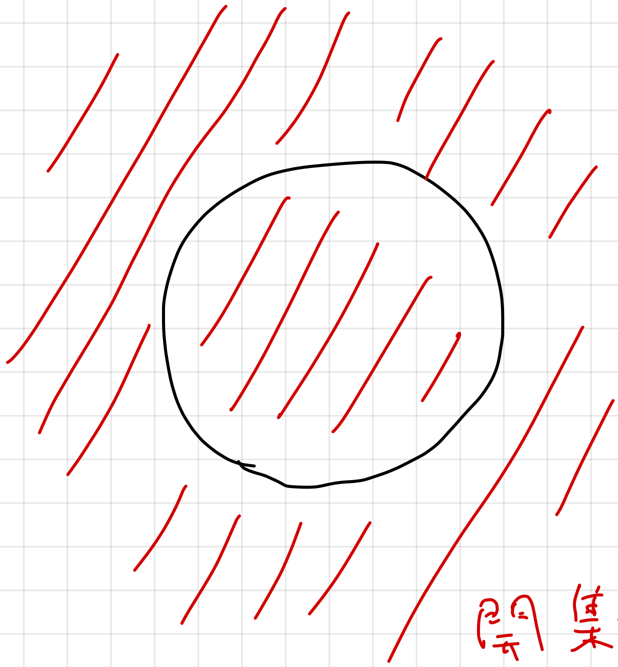
$\therefore Z(\mathfrak{a}) = Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$Z(1) = \phi.$

$Z(0) = \mathbb{A}^1$

よって $\mathbb{A}^1$ の閉集合は, ϕ, 有限部分集合, 全体.





$x^2+y^2-1=0$

閉集合

既約

位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約とは

Y において閉であるような 2つの真部分集合

Y_1, Y_2 を使って $Y = Y_1 \cup Y_2$ と書けないということ.

空集合は既約とみなさない.

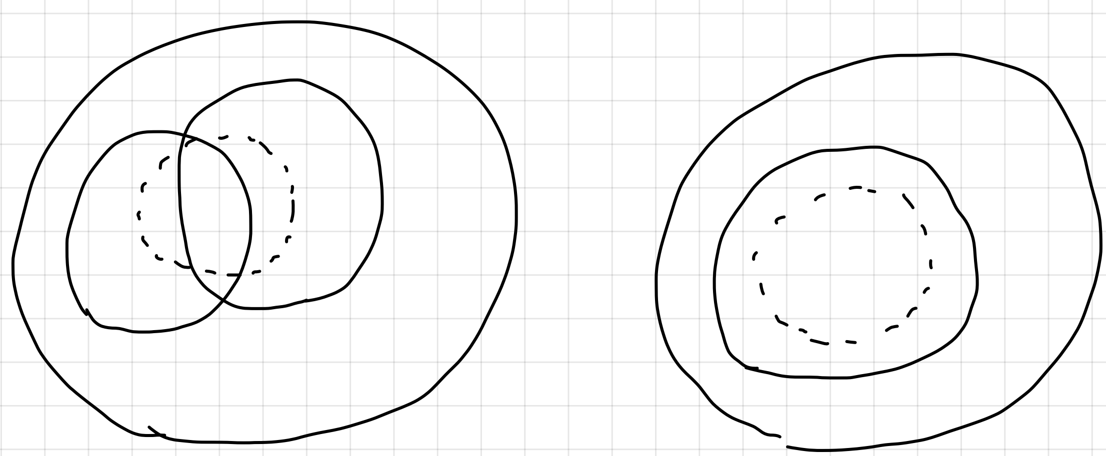
例 1.1.2

A^1 は既約

例 1.1.3

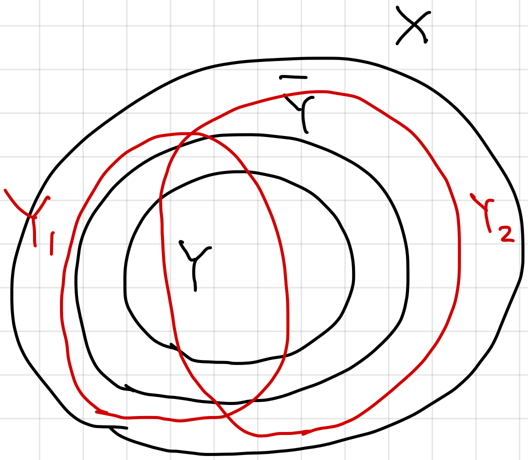
既約な空間の空でない開部分集合は

既約かつ稠密.



例1.1.4

YがXの既約部分集合ならXにおける閉包$\overline{Y}$も既約.



$\overline{Y} = (Y_1 \cap \overline{Y}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y})$,

$Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$, $Y_2 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ とする

このとき $Y = (Y_1 \cap Y) \cup (Y_2 \cap Y)$ となる.

$Y_1 \cap Y = Y$ とすると $\overline{Y} \subset Y_1$

↖ Yを含む最小の閉集合

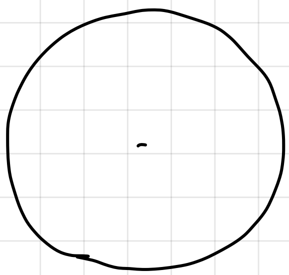
これは $Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ と矛盾. よって $Y_1 \cap Y \neq Y$

$Y_2 \cap Y \neq Y$ も同様

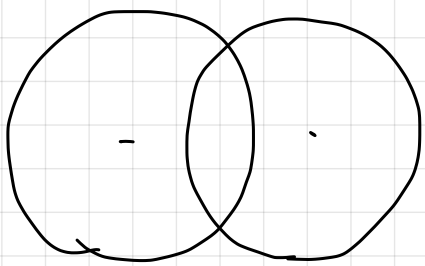
よってYは既約でなくなり矛盾.

アフィン代数多様体

$\mathbb{A}^n$ の既約閉部分集合に誘導位相をいれたもの.

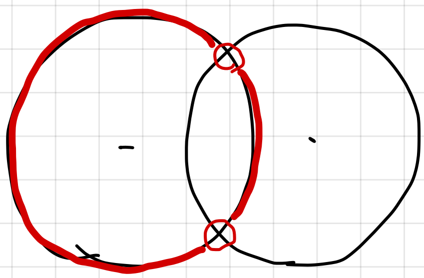


$x^2+y^2-1=0$



既約でないから違う.

アフィン多様体の開部分集合を準アフィン多様体という.



$Y \subset \mathbb{A}^n$ に対し

$I(Y) = \{ f \in A \mid {}^\forall P \in Y \ f(P) = 0 \}$ イデアル.

Prop. 1.2

(a) $T_1 \subset T_2 \subset A \Rightarrow Z(T_1) \supset Z(T_2)$

(b) $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$

(c) $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

(d) $\mathfrak{a} \subset A$ イデアル $\Rightarrow I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

(e) $Y \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow Z(I(Y)) = \overline{Y}$

(d) は Hilbert の零点定理

(e) $\overline{Y} \subset Z(I(Y))$ は明らか

Yを含む最小の閉集合

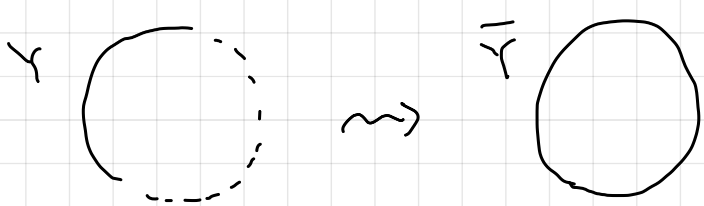
$Y \subset W$ となる閉集合 W があったとする

$W = Z(\mathfrak{a}) \quad Z(\mathfrak{a}) \supset Y$

$I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y)$

$\therefore \mathfrak{a} \subset I(Y)$

$\therefore Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y))$



$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ のとき $\mathfrak{a}$ を根基イデアルという.

$$\underset{\text{代数的集合}}{Y \subset \mathbb{A}^n} \overset{1対1}{\longleftrightarrow} \underset{\text{根基イデアル}}{\mathfrak{a} \subset A}$$

$$Y \longmapsto I(Y)$$
$$Z(\mathfrak{a}) \longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{a}$$

$$Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$$
$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

$\left(\sqrt{I(Y)} = I(Z(I(Y))) = I(Y) \right.$

$Y \subset Z(I(Y))$ より $I(Y) \supset I(Z(I(Y)))$

$\left. 一方, \boxed{I(Y)} \subset I(Z(\boxed{I(Y)})) \text{ は明らか} \right)$

$Z(\mathfrak{a})$ が既約 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$

↑ 根基イデアル　　　　Aの素イデアルたち.

Ex. 1.4.1

$\mathbb{A}^n$ は既約

$\mathbb{A}^n = Z((0))$　　(0) は素イデアル

Ex. 1.4.2

$f \in \underset{A}{k[x, y]}$ 既約多項式とする.

A は UFD なので (f) は素イデアル

よって $Y = Z(f)$ は既約

$f(x, y) = 0$ をアフィン曲線という.

f が d 次のとき d 次曲線という.

一般に $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 既約多項式

$n = 3$ のとき $Z(f)$ を曲面.

$n > 3$　　超曲面という.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$　2次曲線.

既約

$(\cancel{a}x + by + c)(x + b'y + c')$

$= \cancel{a}x^2 + \cancel{a}b'xy + \cancel{a}c'x + bb'y^2$

$\quad + bxy + bc'y$

$\quad + cx + cb'y + cc'$

$= x^2 + y^2 - 1$

$a = 1.$

$bb' = 1$ $\qquad b = \pm i \quad b' = \mp i$

$cc' = -1$ $\qquad c = \pm 1 \quad c' = \mp 1$

$b + b' = 0$

$c + c' = 0$

$bc' + cb' = 0$ $\qquad$ 不可能.