コホモロジー計算

Chap. 1　$\mathbb{R}^n$ 上のドラームコホモロジー

ドラーム複体

$\mathbb{R}^n$ の座標を $x_1, \ldots, x_n$ とする.

微分形式

$$1, \quad dx_i, \quad dx_i dx_j \cdots, dx_1 \cdots dx_n$$

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad i \neq j$$

$$\omega = \sum f_{i_1 \cdots i_q} dx_{i_1} \cdots dx_{i_q} = \sum f_I dx_I \qquad q\text{フォーム}$$

$\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 関数　　略記法

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(\mathbb{R}^n)$$

qフォームたち.

微分演算

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ のとき $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

$\omega = \sum f_I dx_I \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ のとき $df = \sum df_I dx_I$

$$d(\tau \cdot \omega) = d\tau \cdot \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \cdot d\omega$$

$\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ と d をあわせて $\mathbb{R}^n$ 上のドラーム複体という.

Ex. 1

$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$

$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$

$\tau = g_1 dx_1 dx_2 + g_2 dx_2 dx_3 + g_3 dx_3 dx_1$ のとき

$df =$

$d\omega =$

$d\tau =$

コホモロジー

$\ker d$ の元を closed フォーム

$\mathrm{im}\, d$ の元を exact フォームという.

$$H^q_{DR}(\mathbb{R}^n) = \ker d \cap \Omega^q(\mathbb{R}^n) / \mathrm{im}\, d \cap \Omega^q(\mathbb{R}^n)$$

を q 次の(ドラーム)コホモロジーという.

$\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$

$$\rightsquigarrow \quad [\omega] = \omega + \mathrm{im}\, d \cap \Omega^q(\mathbb{R}^n) \in H^q(\mathbb{R}^n)$$

コホモロジークラスという

類

$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U におきかえて

$\Omega^q(U)$, $H^q_{DR}(U)$ も定義される.

以下 DR は略

Ex. 2

$\mathbb{R}^0$ に対する複体を書け.

そのコホモロジーを計算せよ.

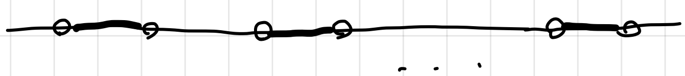
Ex. 3

$\mathbb{R}^1$ に対する複体を書け.

そのコホモロジーを計算せよ.

Ex. 4

$\mathbb{R}^1$ の m 個の（交わらない）開区間の和を U とする



m 個

このとき $H^0(U) =$

$H^1(U) =$