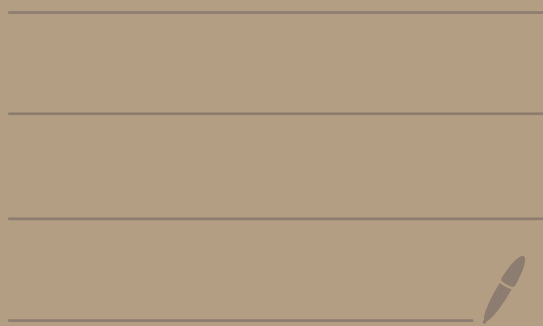


物理授業

2022 後期



すべて「約」です。

重力加速度 9.8 m/s^2

万有引力定数 $6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2$

地球の質量 $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$

地球の半径 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$

光速 $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$

プランク定数 $6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$

$$\frac{\text{万有引力定数} \times \text{地球の質量}}{\text{地球の半径}} \approx 6.3 \times 10^7 \text{ J}$$

関数

$$x \longmapsto y$$

x が 与えられれば y が決まる.

$$y = 2x + 1$$

x を与えれば $x = 3$

$$y = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$\underset{x}{3} \longmapsto \underset{y}{7}$$

$$y = x^2 - 1$$

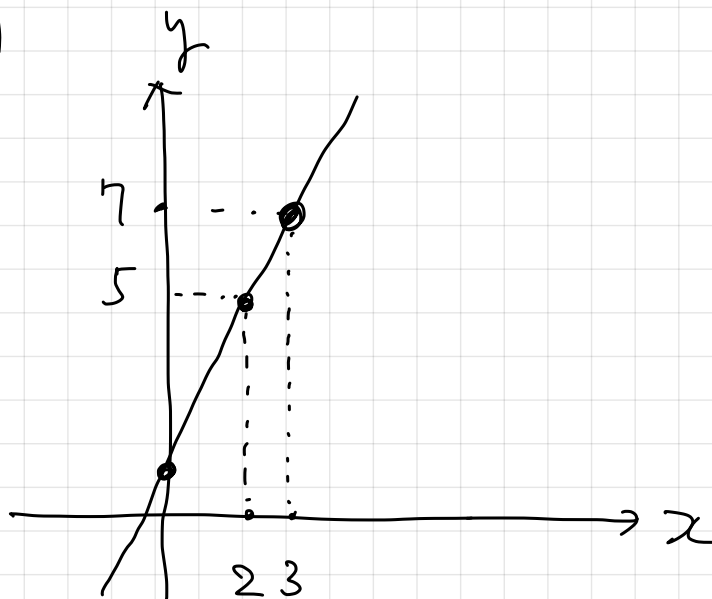
x を与えれば $x = 4$

$$y = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

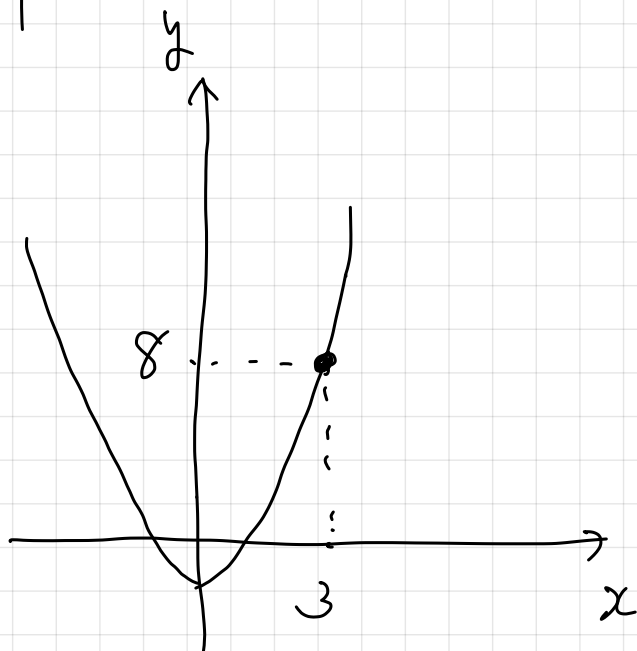
$$\underset{x}{4} \longmapsto \underset{y}{15}$$

グラフ

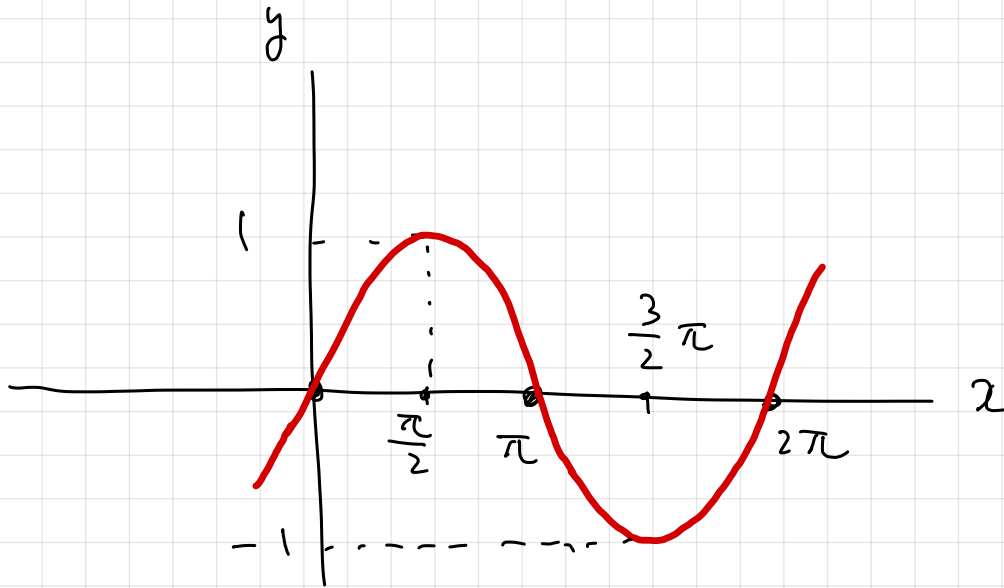
$$y = 2x + 1$$



$$y = x^2 - 1$$

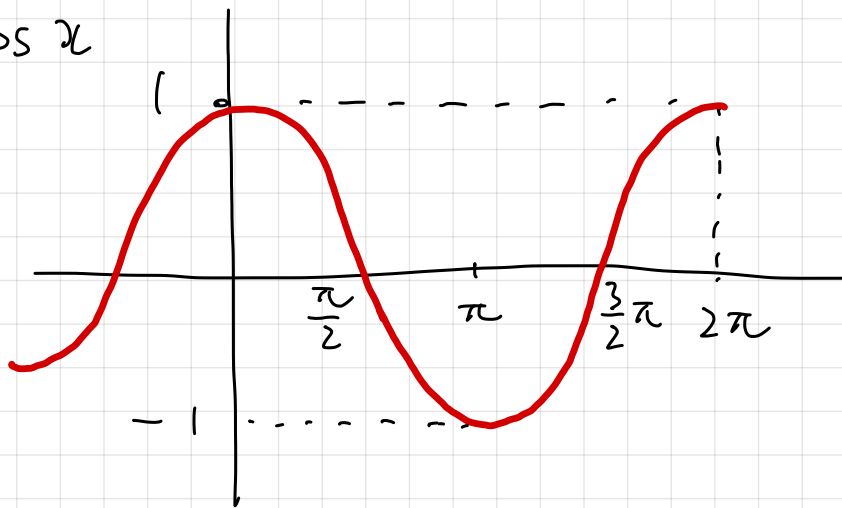


$$y = \sin x$$



$$\pi = 3.14 \dots$$

$$y = \cos x$$



$$y = e^x$$

エクスポネンシャル

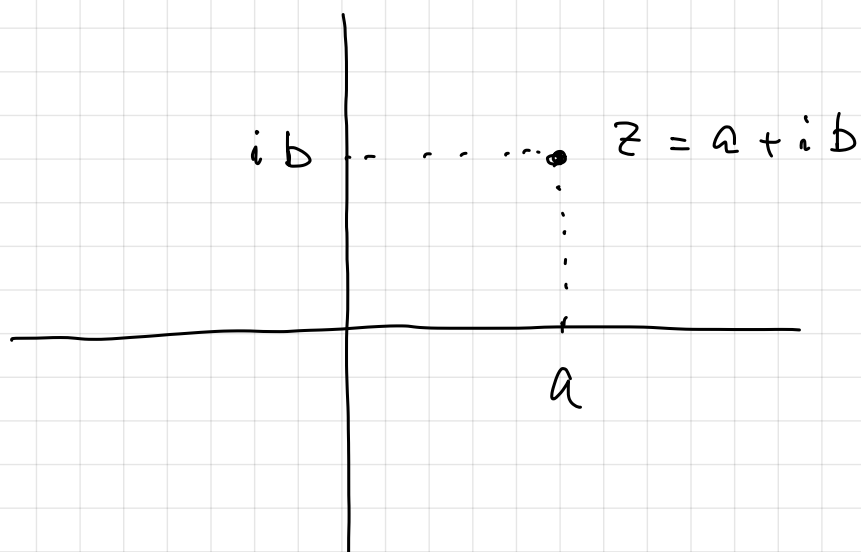


$$e = 2.7 \dots$$

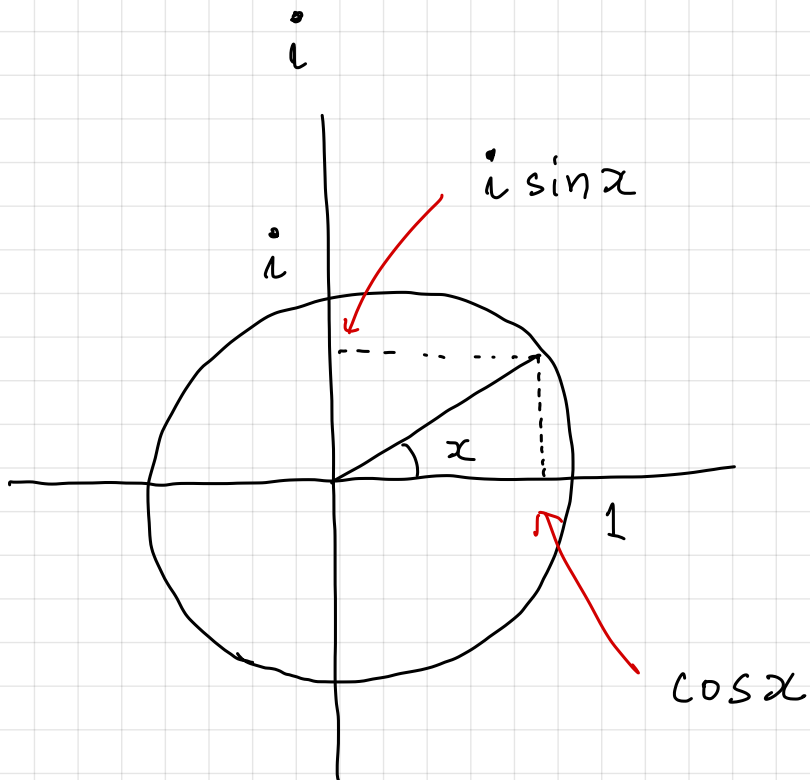
複素数

$$i^2 = -1$$

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

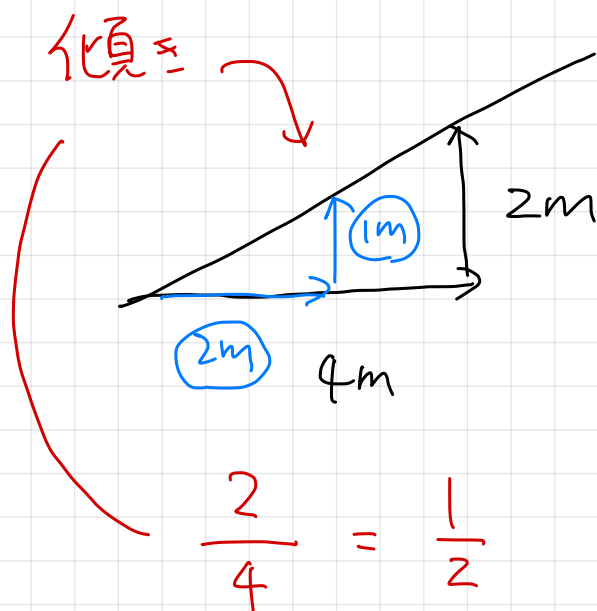


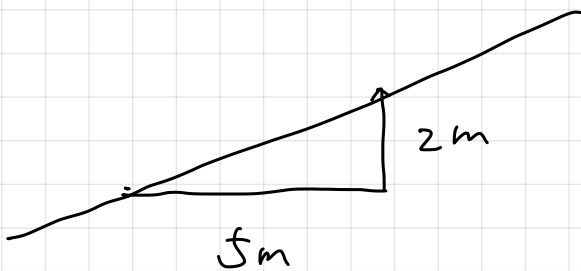
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad x \in \mathbb{R}$$



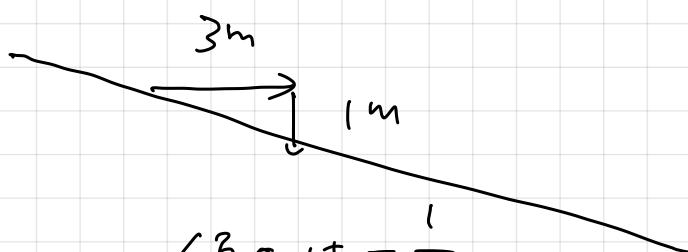
傾き

$$\text{傾き} = \frac{\text{y 方向の変化}}{\text{x 方向の変化}} = \frac{\overset{\text{デルタ}}{\Delta y}}{\Delta x}$$



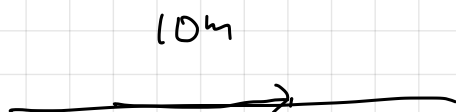


傾きは $\frac{2}{5}$

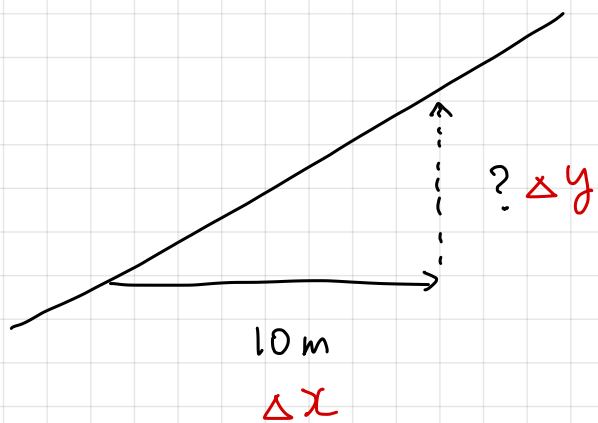


傾きは $-\frac{1}{3}$

↑
下がっている



傾きは 0



傾斜 a

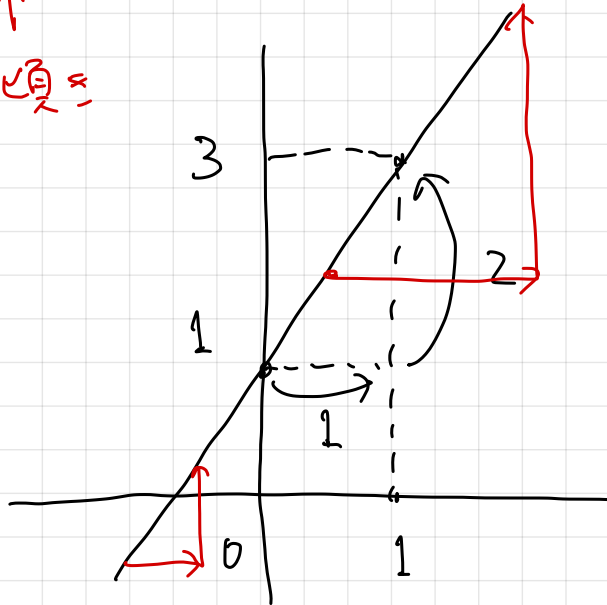
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{10}$$

$$\Delta y = 10a$$

$$\Delta y = \text{傾斜} \times \Delta x$$

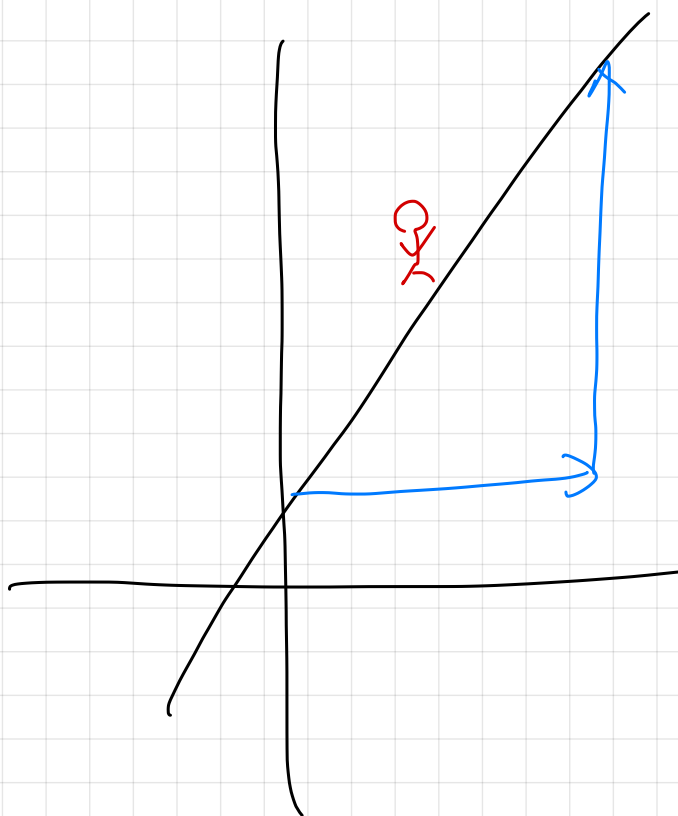
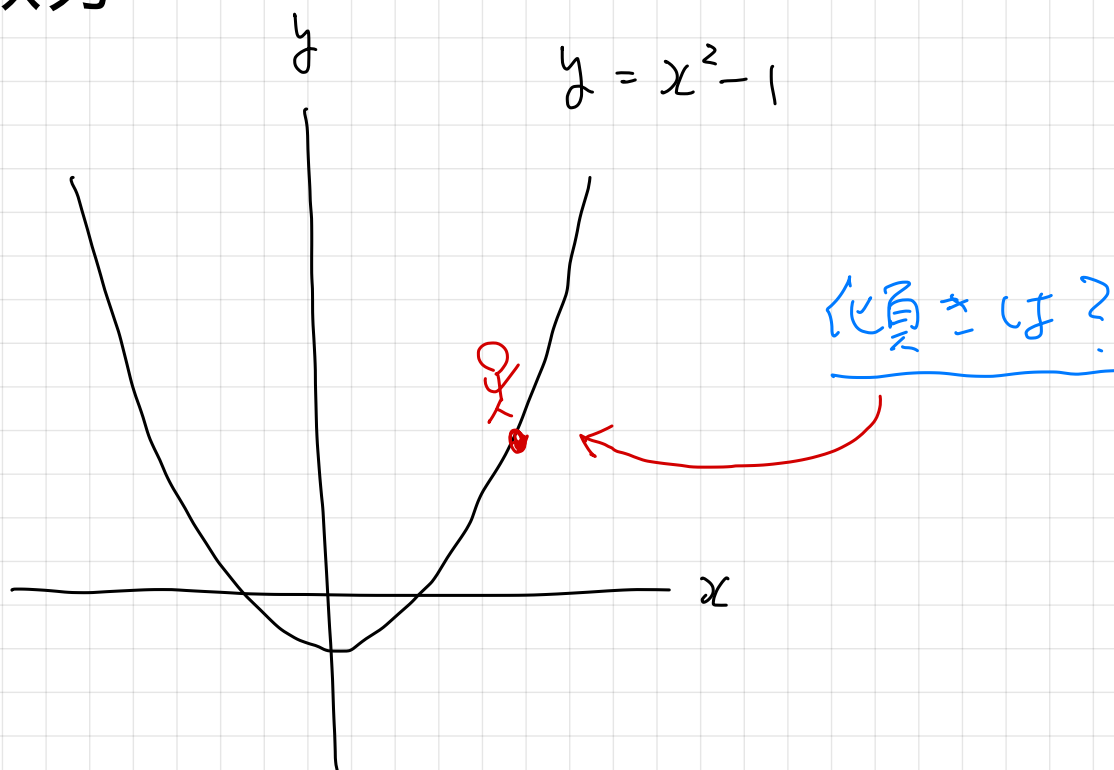
$$y = 2x + 1$$

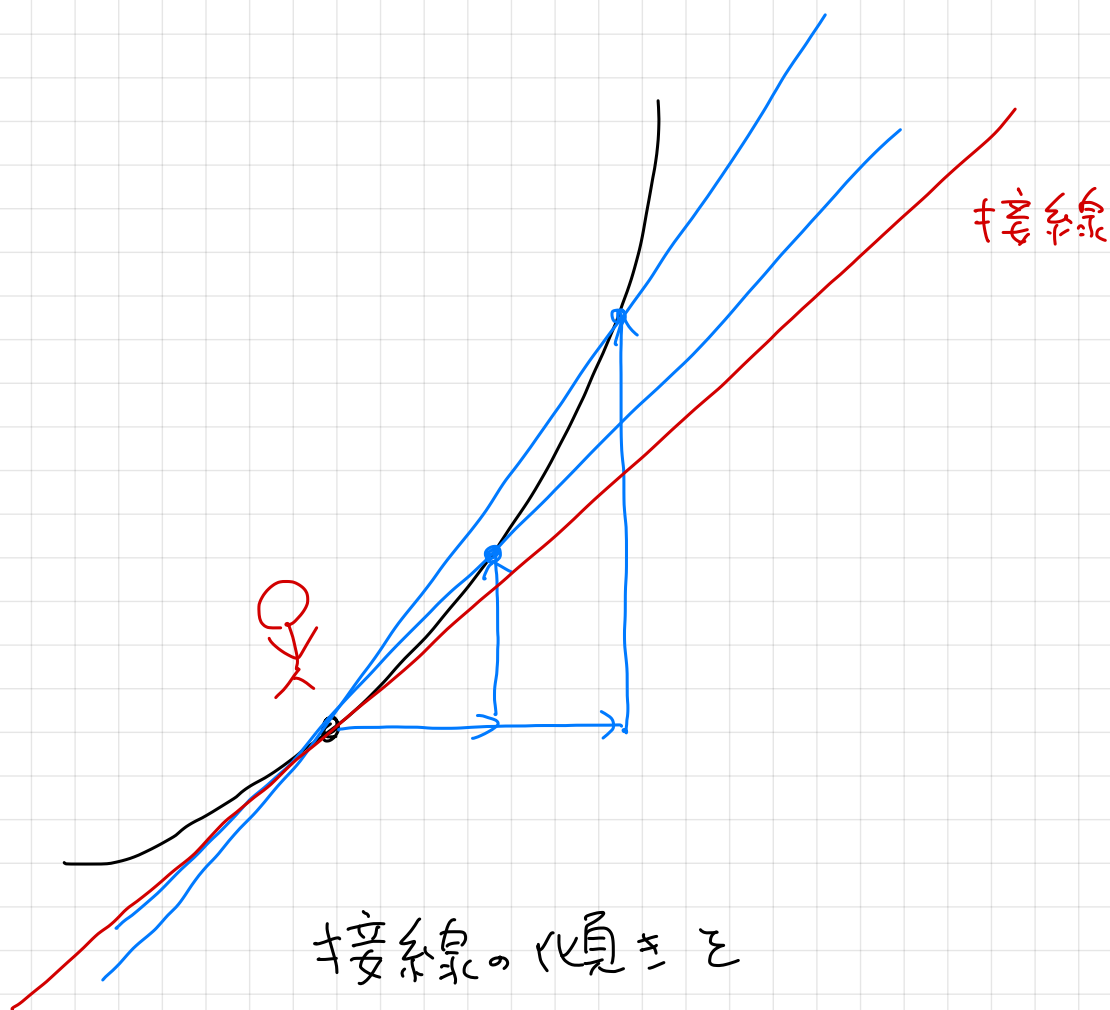
↑
傾き



傾きは $\frac{2}{1} = 2$

微分



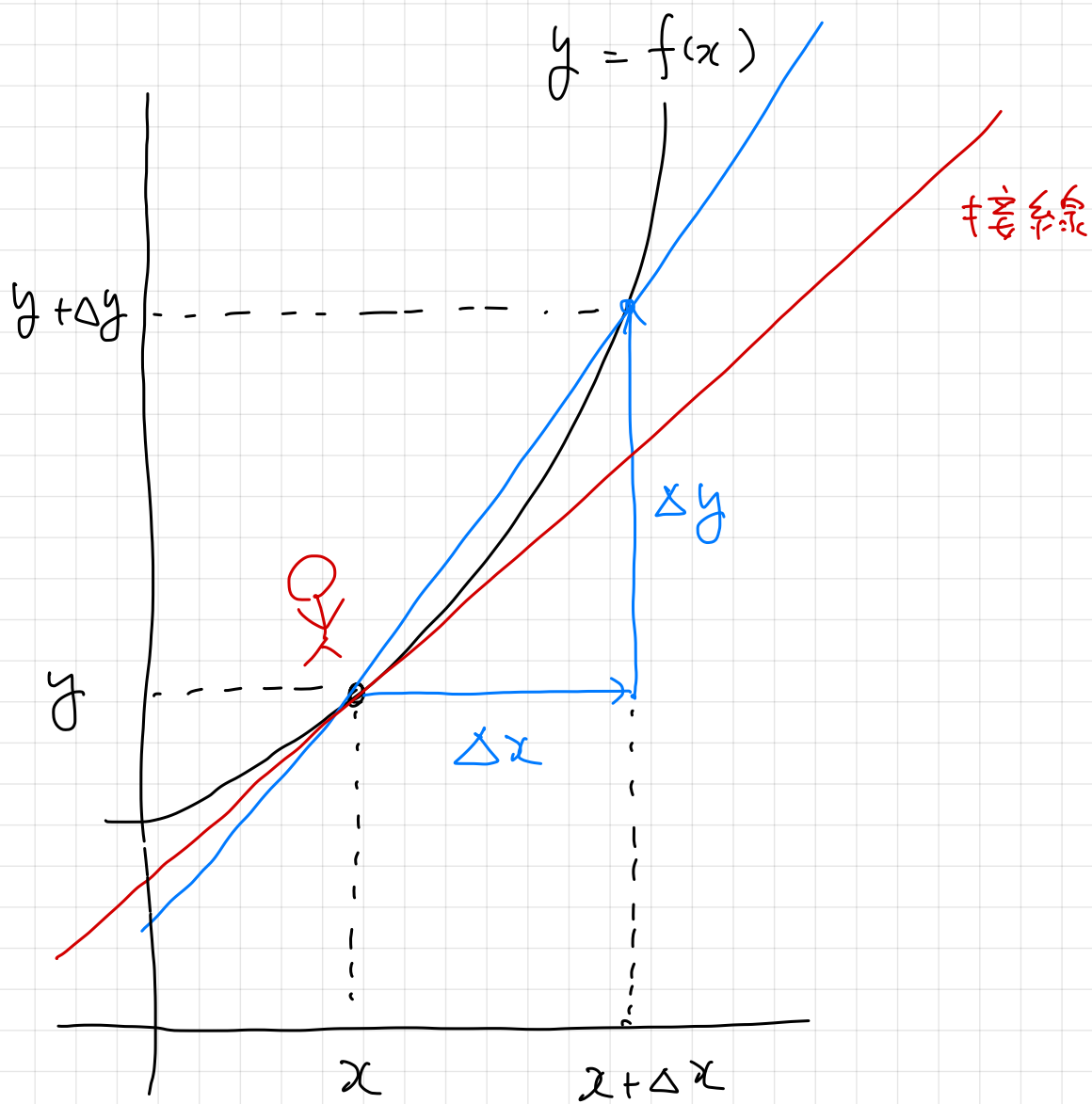


接線の傾きを

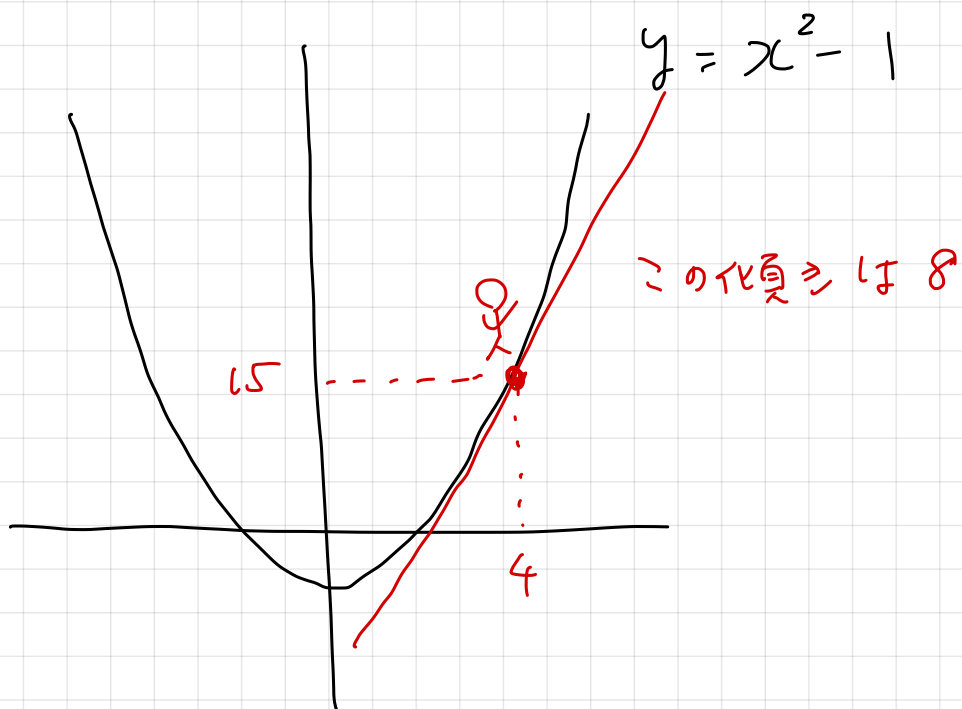
この点での傾きと考える.

↓

接線の傾きは微分で出せる.



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$y = x^2 - 1$ の微分

$$y' = 2x$$

$x = 4$ を代入. $y' = 2 \times 4 = 8$

微分の公式

$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$

ただし x は x^1 , 1 は x^0 と $\frac{x}{x}$ と 3.
 $x' = 1$ $1' = (x^0)' = 0$

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$

$$\begin{aligned} y' &= 3 \times 2x^{3-1} - 2 \times 5x^{2-1} + 1 \times 2x^{1-1} - 0 \\ &= 6x^2 - 10x + 2 \end{aligned}$$

$$y = x^5 - 4x^4 + x^3 + 7x^2 + 5x + 1$$

$$\begin{aligned} y' &= 5x^4 - 4 \times 4x^3 + 3x^2 + 2 \times 7x + 5 \\ &= 5x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 14x + 5 \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

積分

微分の逆 \leadsto 不定積分

$$y' = 3x^2$$

\downarrow

$$y = ?$$

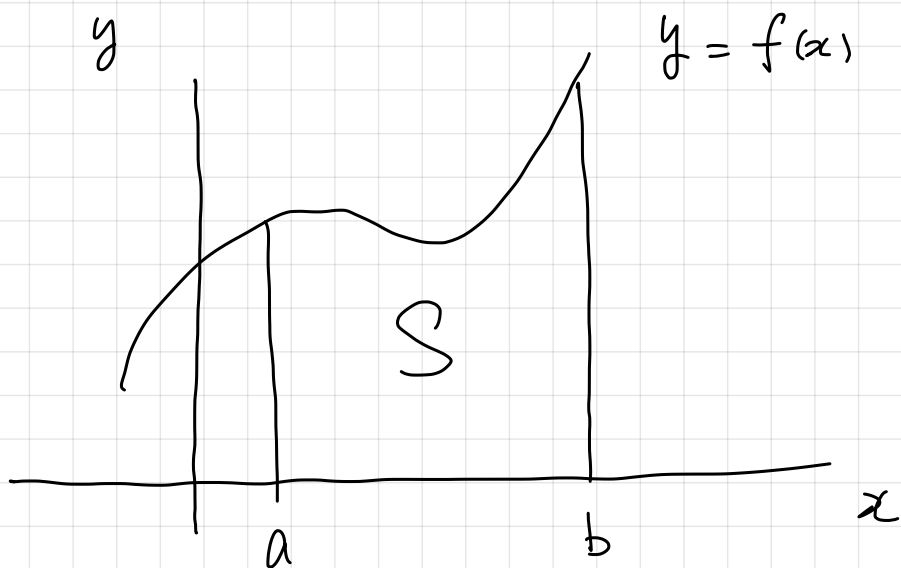
$$y = x^3 + C$$

\uparrow 積分定数

$3x^2$ の 原始関数

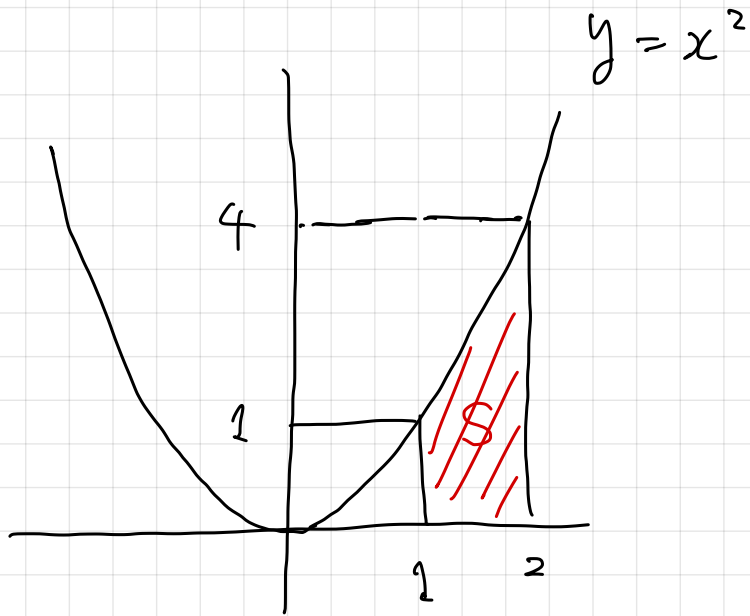
$3x^2$ の 不定積分

面積や体積を出す \sim 定積分

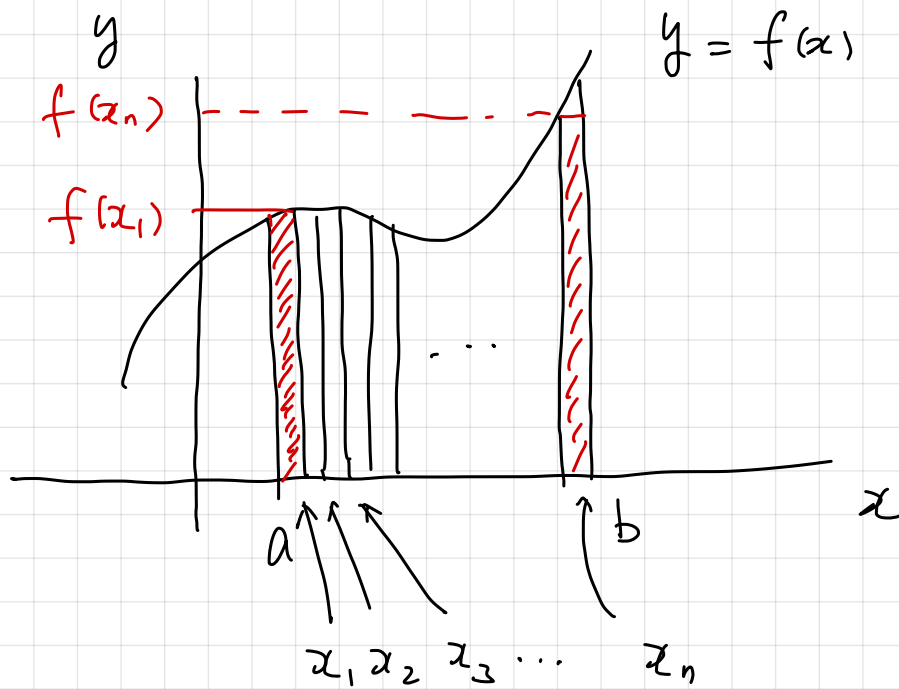


$$S = \int_a^b f(x) dx = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{原始関数}}}{F(x)} \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

13.)

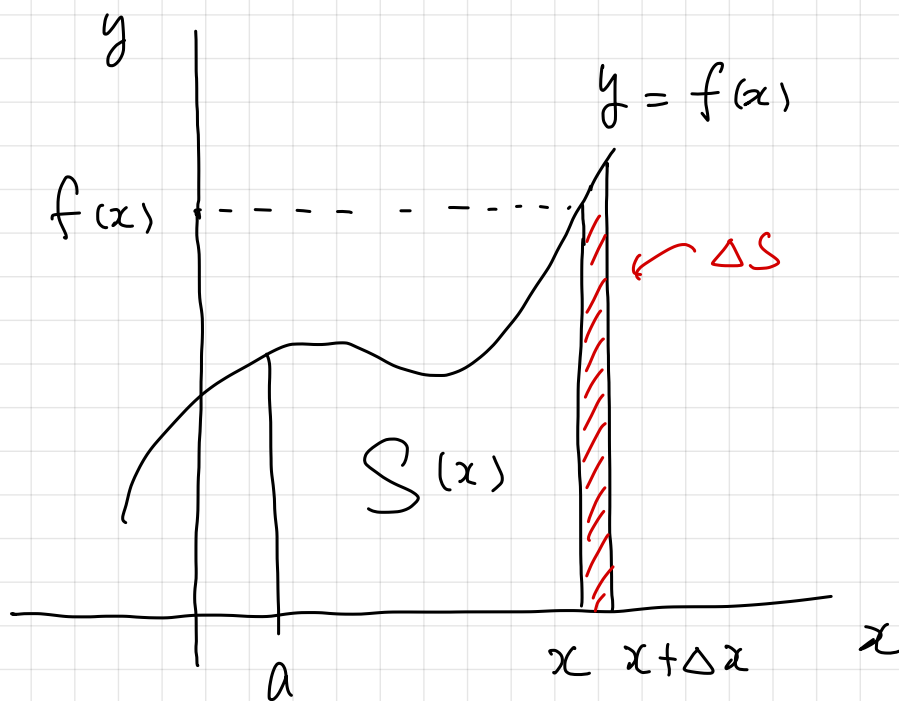


$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 S &\stackrel{\text{近似}}{=} f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx \\
 &\quad \text{シグマ}
 \end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ のとき正しい S
 九九の場合



$$S(x) = \int_a^x f(x) dx$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$$

$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数 かつ $S(a) = 0$.

→ $x=a$ での 0 になる $f(x)$ の原始関数を見つけたらそれが $S(x)$

$$S(x) = \int_a^x f(x) dx = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{原始関数 (つじつとよい)}}}{F(x)} \right]_a^x = F(x) - F(a)$$

部分積分

$$(f g)' = f' g + f g' \quad \text{⑤}$$

$$f' g = (f g)' - f g'$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$= [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

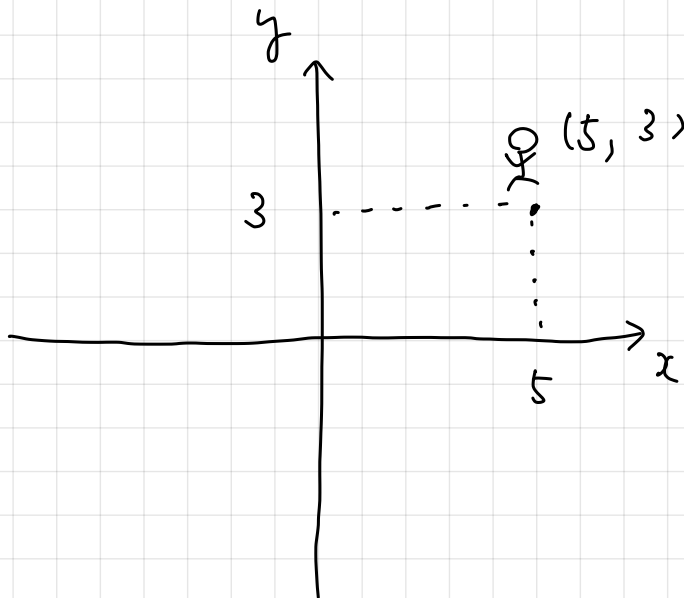
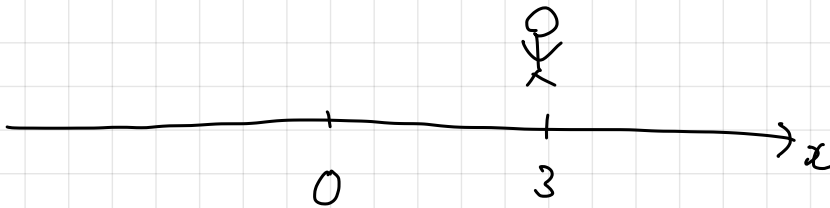
$$\int_a^b \{ (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \} dx$$

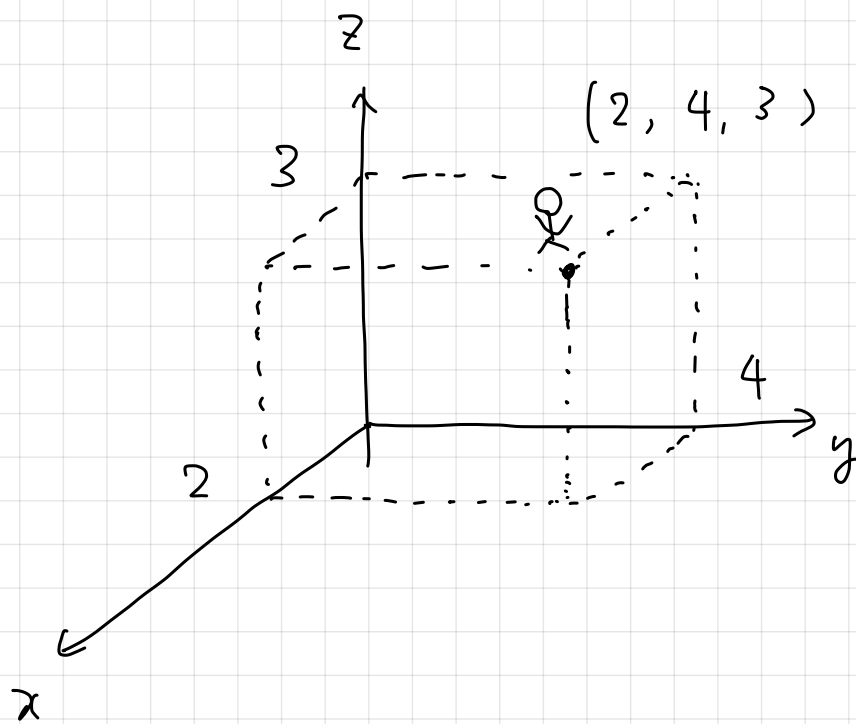
1. 古典力学

Newton 力学

1.1 座標と速度

位置は座標で表わされる.



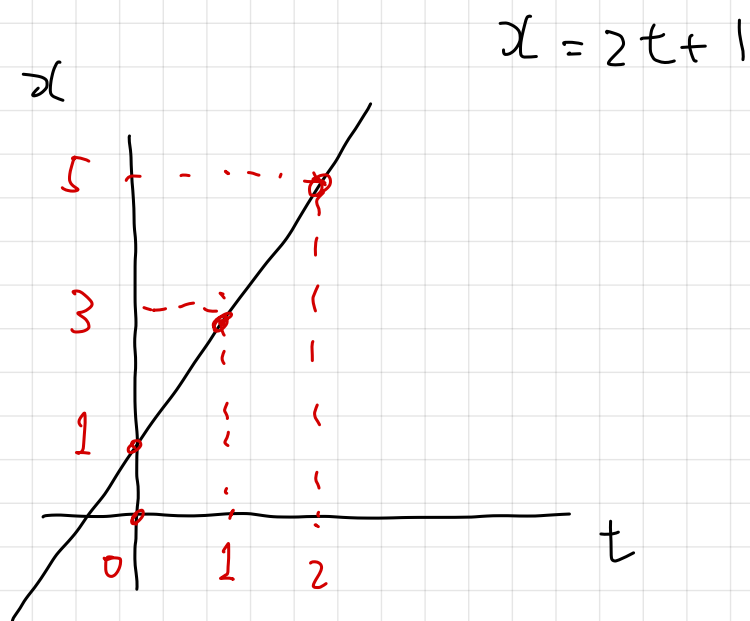
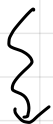


一般に座標は時間の関数

例

$$x = 2t + 1$$

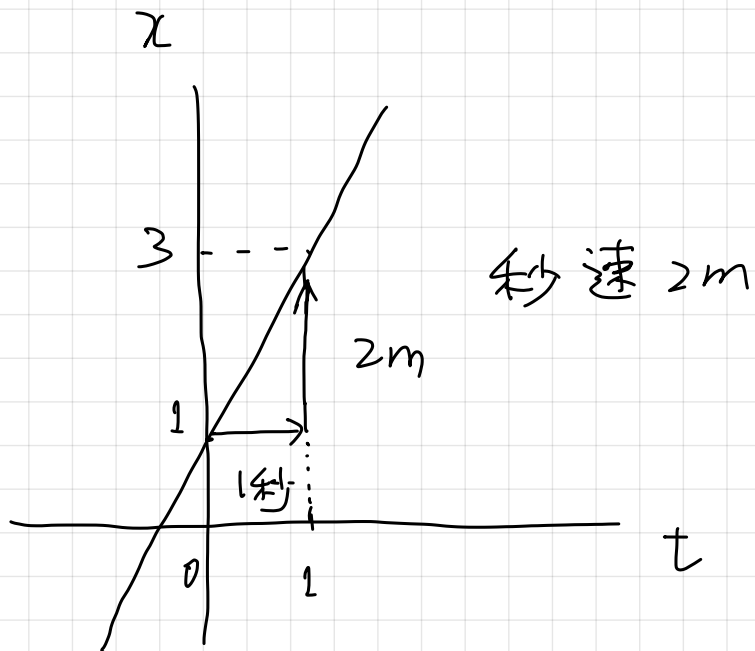
t	0	1	2	...
x	1	3	5	...



速度 = 座標の時間微分

(= 1秒間での座標の変化)

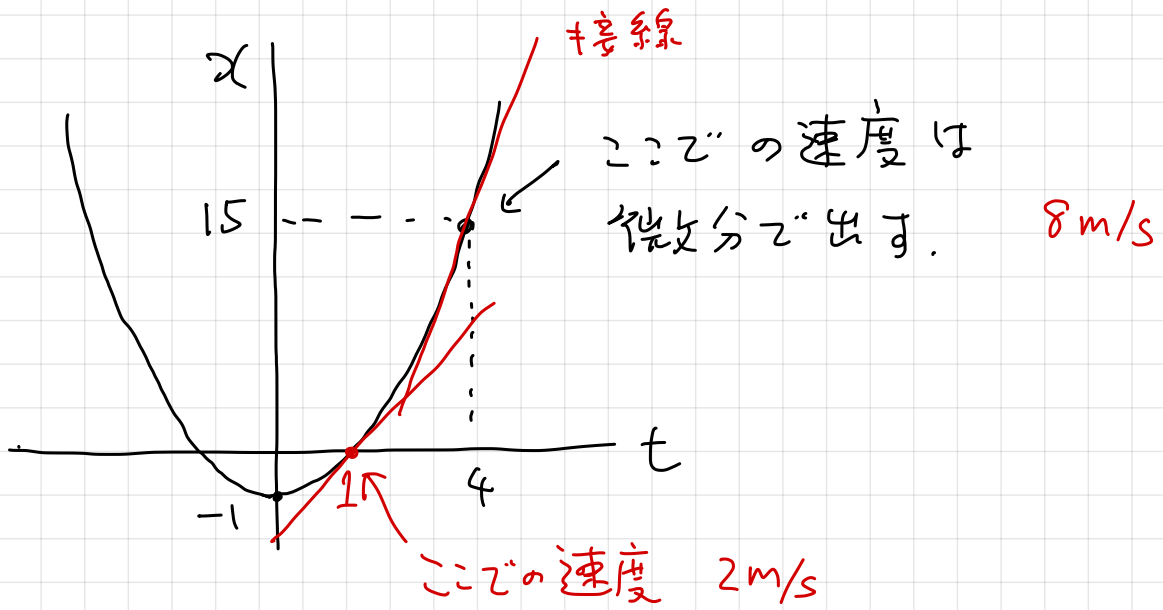
$$x = 2t + 1$$



$$\frac{2m}{1\text{秒}} = 2 \text{ m/s}$$

\uparrow
秒

$$x = t^2 - 1$$



時間によろ微分

ドット

$$\dot{x} = 2t$$

$$t = 4 \text{ のとき } \dot{x} = 8 \text{ (秒速 8m)}$$

1.2 Newtonの運動方程式



$$F = m a$$

力 N
 $= 2 - 1 \%$

質量 kg

加速度 m/s^2

$$\dot{v} = a$$
$$\dot{x} = v$$

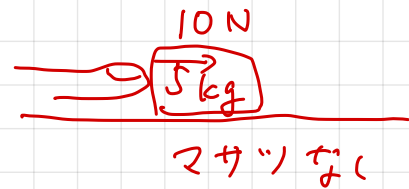
加速度は 速度の時間微分
よって 座標の 2 階微分

例

だいたい 1 kg のものをささえる力 (より正確には 9.8 N)

10 N の力を受けている 5 kg の物体の

力の速度は?



$$10 = 5a$$

$$\therefore a = 2\text{ m/s}^2$$

速度 v は?

初速度.

↓

$$\dot{v} = 2$$

$$\therefore v = 2t + v_0$$

座標 x は?

初期座標

↓

$$\dot{x} = 2t + v_0$$

$$\therefore x = t^2 + v_0 t + x_0$$

普通は $x_0 = 0, v_0 = 0 \rightsquigarrow v = 2t,$
 $x = t^2$

速さについて ...

100m を 10秒で走った \leadsto

秒速 10m 10m/s

分速 $10 \times 60 \text{ m}$

時速 $10 \times 60 \times 60 \text{ m}$

$= 36000 \text{ m}$

$= 36 \text{ km}$

36 km/h
↑
P2-

風速 30m \leadsto

秒速 30m

分速 $30 \times 60 \text{ m}$

時速 $30 \times 60 \times 60 \text{ m}$

$= 108000 \text{ m}$

$= 108 \text{ km}$

音速は秒速約 330m \leadsto 分速 $330 \times 60 \text{ m}$

時速 $330 \times 60 \times 60 \text{ m}$

$= 1188000 \text{ m}$

$\therefore 1200 \text{ km}$

光速は秒速約 30万 km

例

← x - t の m と区別するため.

地球上では質量 $M \text{ kg}$ の物体は

$$1 \text{ kg} \rightarrow 9.8 \text{ N}$$

約 $9.8M \text{ N}$ の力を受ける.

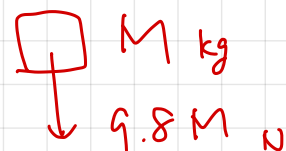
$$2 \text{ kg} \rightarrow 9.8 \times 2 \text{ N}$$

高い所から静かに手を放したとす.

$$3 \text{ kg} \rightarrow 9.8 \times 3 \text{ N}$$

3秒後にはどれだけ落しているか?

そのときの速さは?



$$f = Ma$$

$$9.8M = Ma$$

→ 重力加速度と書く.

$$\therefore a = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \leftarrow \text{質量に依らない!}$$

$$v = 9.8t \quad \text{+ } v_0 \text{ (crossed out)}$$

$$x = 4.9t^2 \quad \text{+ } v_0 t \text{ (crossed out)} \quad \text{+ } x_0 \text{ (crossed out)}$$



$$t = 3 \text{ のとき}$$

$$x = 4.9 \times 3^2 \approx 43 \text{ m}$$

$$v = 9.8 \times 3 \approx 29 \text{ m/s} \approx 100 \text{ km/h}$$