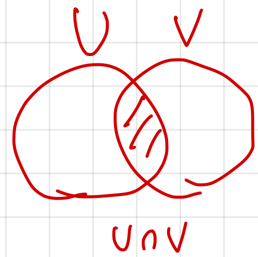
Chap. II　チェック・ドラーム複体

§8　一般化されたマイヤー・ヴィートリス原理

マイヤー・ヴィートリス列の形式を変える.

U, V が多様体の開集合のとき

$$U\cup V \leftarrow U\amalg V \leftleftarrows U\cap V$$



から, マイヤー・ヴィートリス列

$$0\to \Omega^*(U\cup V)\to \Omega^*(U)\oplus\Omega^*(V)\xrightarrow{\delta}\Omega^*(U\cap V)\to 0$$

$$(\omega,\tau)\longmapsto \tau-\omega$$

が導かれ, これから

$$\cdots\to H^q(U\cup V)\xrightarrow{\alpha}H^q(U)\oplus H^q(V)\xrightarrow{\delta}H^q(U\cap V)$$

$$\xrightarrow{d^*}H^{q+1}(U\cup V)\to\cdots$$

が導かれた.

これを拡張するため, 形をかえる.

$\mathfrak{U} = \{U, V\}$ とし

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \oplus C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \oplus K^{p,q}$$

$$K^{0,q} = C^0(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$$

$$K^{1,q} = C^1(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U \cap V)$$

$$K^{p,q} = 0 \qquad p \geq 2$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
q & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
\Omega^2(M) \xrightarrow{r} & \Omega^2(U) \oplus \Omega^2(V) & \Omega^2(U \cap V) & 0 & \\
\hline
d \uparrow \quad \Omega^1(M) \xrightarrow{r} & \Omega^1(U) \oplus \Omega^1(V) & \Omega^1(U \cap V) & 0 & \\
\hline
d \uparrow \quad \Omega^0(M) \xrightarrow{r} & \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V) & \Omega^0(U \cap V) & 0 & \\
\hline
\xrightarrow{\delta} & K^0 & \xrightarrow{D} K^1 & \xrightarrow{D} K^2 \cdots & p
\end{array}$$

$M = U \cup V$

$$d\delta = \delta d$$

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \text{ として 複体が定義できる.}$$

$$D = \delta + (-1)^p d \quad \text{on } K^{p,q}$$

$$D\omega = \delta\omega + (-1)^p d\omega$$

$$\begin{tikzcd}
(-1)^p d\omega \in K^{p,q+1} & \\
\omega \in K^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{p+1,q} \ni \delta\omega
\end{tikzcd}$$

$$D^2\omega = D(\delta\omega + (-1)^p d\omega)$$
$$= \delta^2\omega + (-1)^{p+1} d\delta\omega + (-1)^p \delta d\omega + (-1)^p(-1)^p d^2\omega = 0$$

$\rightsquigarrow$ コホモロジー $H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$

$r : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \subset C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ とする.

$\omega \longmapsto (\omega|_U , \omega|_V)$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*(M) \arrow[r, "r"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \\
\Omega^*(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"'] & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \arrow[u, "D"']
\end{tikzcd}$$

$d\omega$ $\quad$ $p=0$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{q+1}(M) \arrow[r, "r"] & \left(\Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V)\right) \oplus \Omega^{q}(U \cap V) \\
\Omega^{q}(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"'] & \Omega^{q}(U) \oplus \Omega^{q}(V) \arrow[u, "D"']
\end{tikzcd}$$

$((d\omega, d\omega), 0)$

ω $\quad$ (ω, ω)

$$Dr = (\delta + (-1)^0 d) r = dr = rd$$

よって $\quad$ $\Omega^*(M)$ $\quad$ $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$

$$r^* : H^*_{DR}(M) \to H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$$

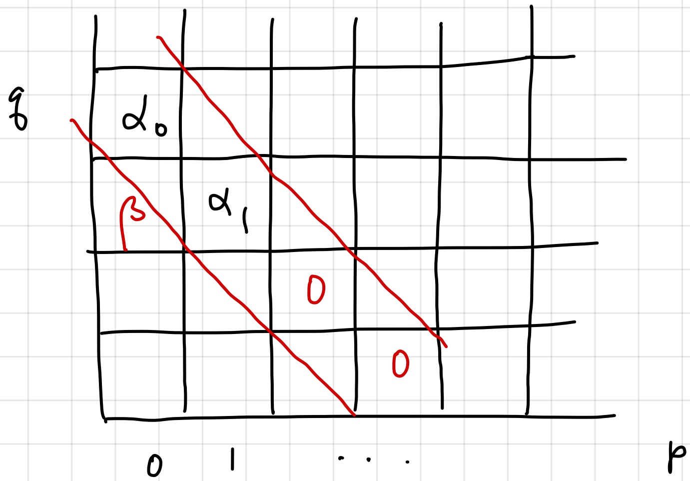
が導かれる.

r は Ker は Ker に
Im は Im にうつす

Theo. 8.1

$$H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} \cong H^*_{DR}(M)$$

(証)



$\alpha \in K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ とすると

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \quad \alpha_0 \in K^{0,n}, \quad \alpha_1 \in K^{1,n-1}$

δ は全射なので $^\exists \beta \quad \delta\beta = \alpha_1$

このとき $\alpha - D\beta = \alpha - (\delta + d)\beta = \alpha_0 - d\beta \in K^{0,n}$

よって $H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$ の元は

$(0, *)$ の形の元で表すことができる.

r^* が同型であることを示す.

(1) 全射性

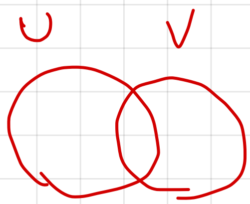
$\phi \in H^n(U) \oplus H^n(V)$

$\forall \phi \in H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$ は $p=0$ と考えてよい.

このとき $D\phi = 0 \iff d\phi = 0,\ \delta\phi = 0$

$\iff \phi$ はグローバル closed フォーム

$(\omega|_U, \omega|_V)$ $\quad$ ω $\quad$ $H^*_{DR}(M)$



(2) 単射性 $\quad$ 0 in コホモロジー

$r(\omega)$	
$\phi_{(\alpha,\tau)}$	
	0
⋮	⋮

$r(\omega) = D\phi$ とする.

ϕ も $p=0$ 成分のみとできる.

$r(\omega) \quad = \quad d\phi \qquad \delta\phi = 0$

$(\omega|_U, \omega|_V) \quad (d\alpha, d\tau)$ $\quad$ α と τ は $U \cap V$ 上で一致.

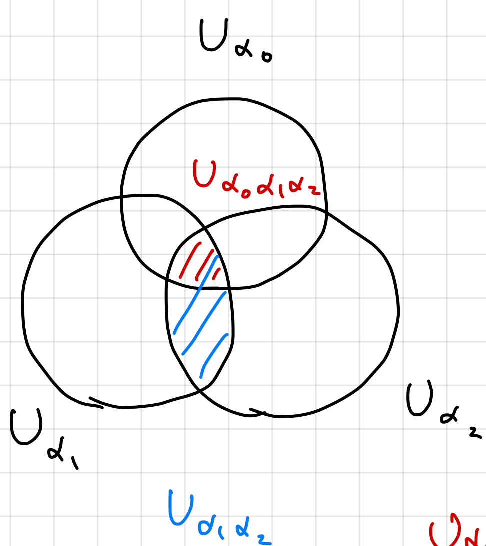
ω はグローバル exact フォーム

可算個の開集合への拡張

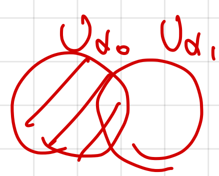
$U_\alpha \cap U_\beta \rightsquigarrow U_{\alpha\beta}$ と書く.

$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightsquigarrow U_{\alpha\beta\gamma}$

$$
\begin{tikzcd}
M & \coprod U_{\alpha_0} \arrow[l] & \coprod\limits_{\alpha_0<\alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \arrow[l, shift right, "\partial_0"'] \arrow[l, shift left, "\partial_1"] & \coprod\limits_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \arrow[l, shift right=2, "\partial_0"'] \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[l, shift left=2, "\partial_2"] & \cdots \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift left=3]
\end{tikzcd}
$$



$\partial_0 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1\alpha_2}$



ω

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^*(M) \arrow[r] & \prod \Omega^*(U_{\alpha_0}) \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] \arrow[r, bend right, "制限"'] & \prod\limits_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, shift left=2, "\delta_0"] \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[r, shift right=2, "\delta_2"'] \arrow[r, bend right] & \prod\limits_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \cdots
\end{tikzcd}
$$

$\delta_0, \delta_1, \ldots \rightsquigarrow \delta$ 差.

Def. 8.2

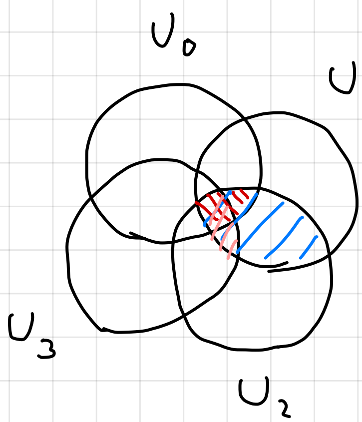
$\omega \in \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ とすると、その成分は

$\omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ のように書ける。

このとき

$$\underbrace{(\delta \omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}}}_{\text{足 } p+1 \text{ 個}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \cdots \overset{\text{トル}}{\hat{\alpha}_i} \cdots \alpha_{p+1}}$$

例



$(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23})$

$\omega \in \Omega^*(U_{01}) \times \Omega^*(U_{02}) \times \Omega^*(U_{03})$
$\times \Omega^*(U_{12}) \times \Omega^*(U_{13}) \times \Omega^*(U_{23})$

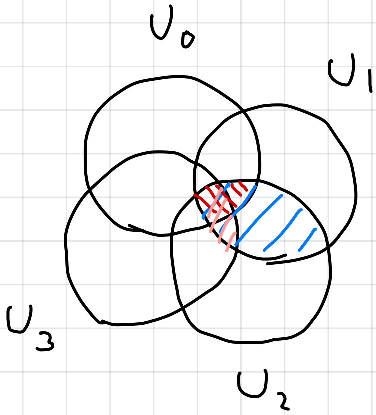
$\downarrow$

$\delta \omega \in \Omega^*(U_{012}) \times \Omega^*(U_{013})$
$\Omega^*(U_{023}) \times \Omega^*(U_{123})$

$(\delta \omega)_{012} = \omega_{12} - \omega_{02} + \omega_{01}$

$(\delta \omega)_{013} = \omega_{13} - \omega_{03} + \omega_{01}$

$\vdots \qquad \vdots$



$(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$\omega \in \Omega^*(U_0) \times \cdots \times \Omega^*(U_3)$$

$$\delta\omega \in \Omega^*(U_{01}) \times \Omega^*(U_{02}) \times \Omega^*(U_{03}) \times \Omega^*(U_{12}) \times \Omega^*(U_{13}) \times \Omega^*(U_{23})$$

$$(\delta\omega)_{01} = \omega_1 - \omega_0$$

$$(\delta\omega)_{02} = \omega_2 - \omega_0$$

Prop. 8.3

$$\delta^2 = 0$$

(証)

$$(\delta^2 \omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+2}} = \sum_i (-1)^i (\delta\omega)_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \omega_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \omega_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$= 0$$

$\lrcorner$

$\delta\omega = 0$ ω は cocycle

$\omega = \delta\tau$ ω は coboundary

という.

これまで $\omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$ は $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ としていた。

これからは自由とする。

ただし $\omega_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots} = -\omega_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots}$ とする。

Ex. 8.4

$$\underbrace{(\delta\omega)_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots}}_{\shortparallel} = -\underbrace{(\delta\omega)_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots}}_{\shortparallel}$$

$$\sum (-1)^i \omega_{\cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha \cdots \beta \cdots}$$

$$\sum (-1)^i \omega_{\cdots \hat{\alpha}_i \cdots \beta \cdots \alpha \cdots} + \sum (-1)^i \omega_{\cdots \alpha \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \beta \cdots}$$

$$+ \sum (-1)^i \omega_{\cdots \beta \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha \cdots} + \sum (-1)^i \omega_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots \hat{\alpha}_i \cdots}$$

$$+ \sum (-1)^i \omega_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots \hat{\alpha}_i \cdots}$$

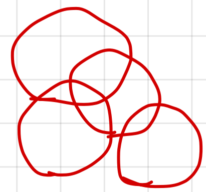
Prop. 8.5 一般化されたマイヤー・ヴィートリス列

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \to \cdots$$

$\omega \mapsto (\omega|_{U_{\alpha_0}}, \omega|_{U_{\alpha_1}}, \cdots)$

は完全列.

(証)



$\Omega^*(M) = \ker \delta$

$\{\rho_\alpha\}$ を $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ に従う1の分割とする.

$\omega \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ 　$\delta\omega = 0$ とする.

$\tau_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}}$ とおく.

$$(\delta\tau)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_i (-1)^i \tau_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$
$$= \sum_{i,\alpha} (-1)^i \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$

$(\delta\omega)_{\alpha\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} + \sum (-1)^{i+1} \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p} = 0$ だから

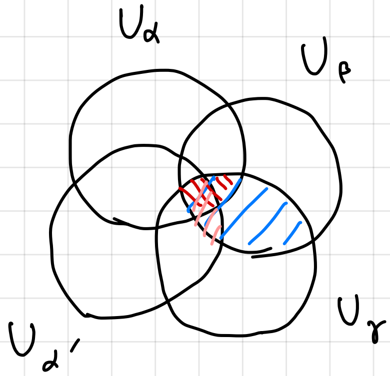
$$(\delta\tau)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$
$$= \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$$

┘

$$(K\omega)_{\underbrace{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}_{p}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \overset{(p)}{\omega_{\alpha\underbrace{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}_{p-1}}}$$ とすると

$$K : \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}) \longrightarrow \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-2}})$$

例



$$\omega \in \Omega^*(U_{\alpha\beta\gamma}) \times \Omega^*(U_{\alpha'\beta\gamma}) \times \Omega^*(U_{\alpha\alpha'\beta}) \times \Omega^*(U_{\alpha\alpha'\gamma})$$

$$(K\omega)_{\beta\gamma} = \rho_\alpha \omega_{\alpha\beta\gamma} + \rho_{\alpha'}\omega_{\alpha'\beta\gamma} \in \Omega^*(U_{\beta\gamma})$$

$$\delta K + K\delta = 1$$ p.94 Prop. 8.5 の下.

$$\begin{array}{l|c|c|c|l}
 & & & & \\
\hline
0 \to \Omega^2(M) \xrightarrow{r} & K^{0,2} & K^{1,2} & K^{2,2} & \\
\hline
0 \to \Omega^1(M) \xrightarrow{r} & K^{0,1} & K^{1,1} & K^{2,1} & \\
\hline
0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{r} & K^{0,0} & K^{1,0} & K^{2,0} & \\
\hline
\end{array}$$

q p

$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$ の元を

qフォームに値をもつ被覆$\mathfrak{U}$上のpコチェインという.

$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d$$

$D\phi = 0$ となるϕをDコサイクルという.

$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
a \arrow[u] \arrow[r] & 0 & & \\
& b \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
& & c \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\phi = a + b + c$$

$\phi = D\omega$ のときϕをDコバンダリーという.

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{p,q \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$$ を

Čech-de Rham 複体という.