§17 ホモトピー論のまとめ.

ホモトピー群

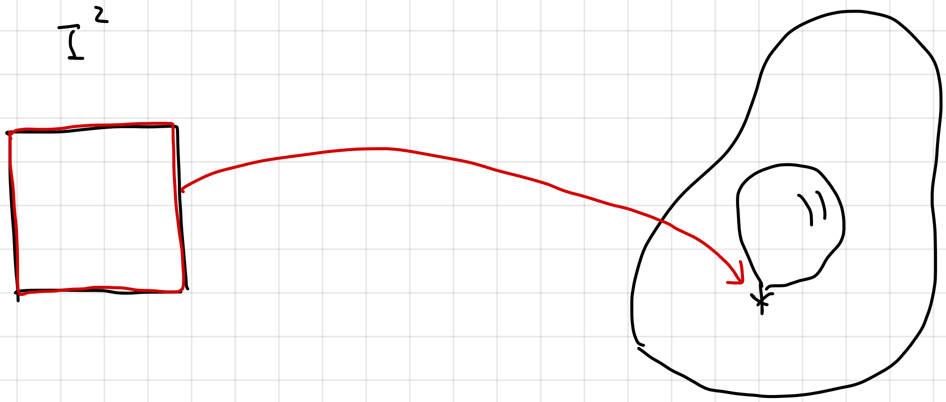
X : 基点 $*$ 付きの位相空間

π_q $(q \geq 1)$

$I^q \to X$ ただし $\dot{I}^q \to *$ のホモトピー類

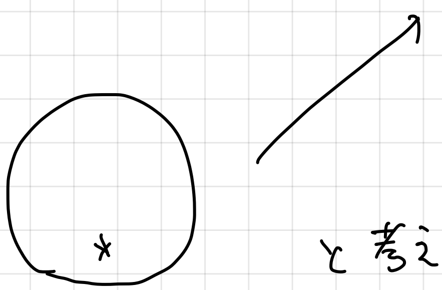
この条件を基と書く.

I^2



X

ふろしき・・・



と考えてもよい

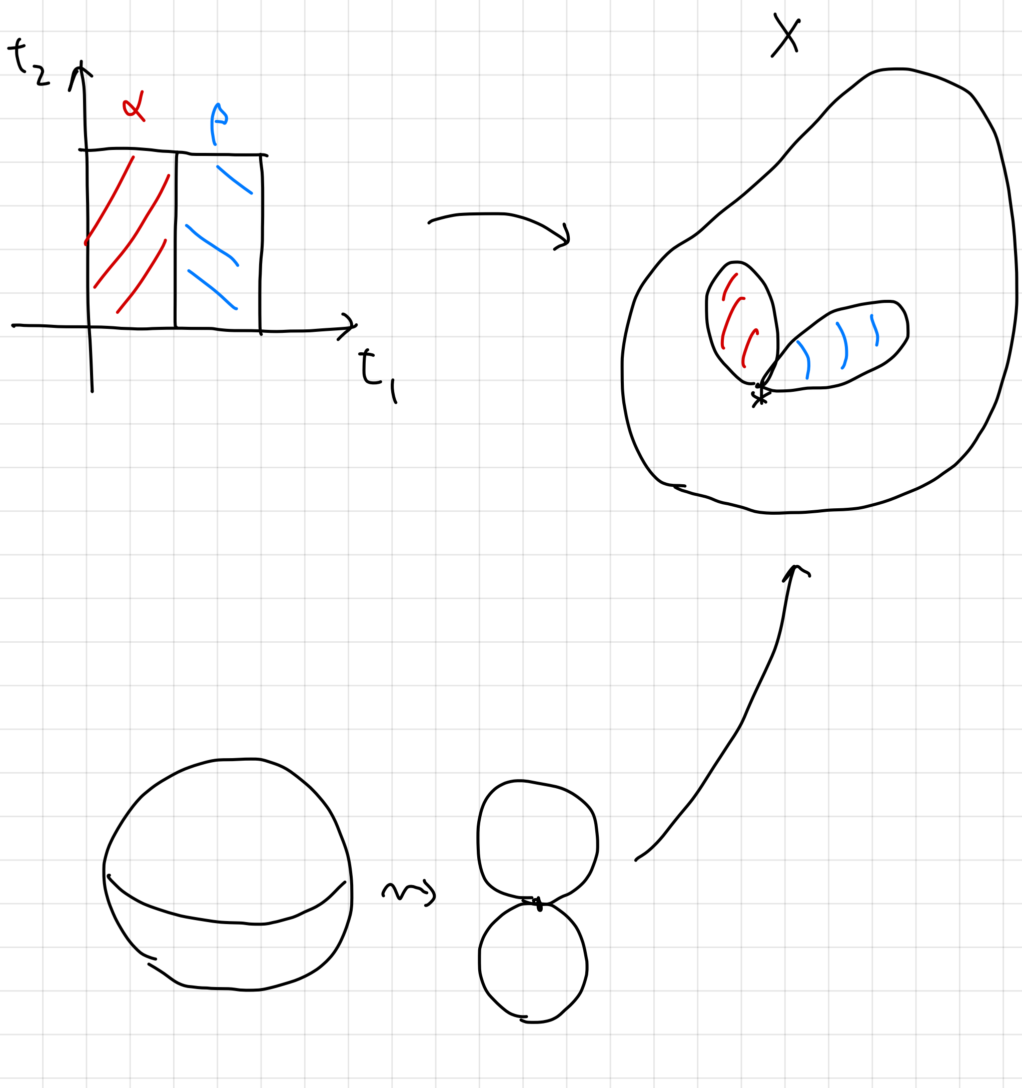
S_2

$\alpha, \beta : I^q \to X$ 基

$[\alpha], [\beta] \in \pi_q(X)$

$[\alpha][\beta] = [\gamma] \in \pi_q(X)$

$$\gamma(t_1, \ldots, t_q) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_q) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_q) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$



Prop. 17.1

(a) $\pi_q(X \times Y) = \pi_q(X) \times \pi_q(Y)$

(b) $q > 1$ で $\pi_q(X)$ はアーベル群

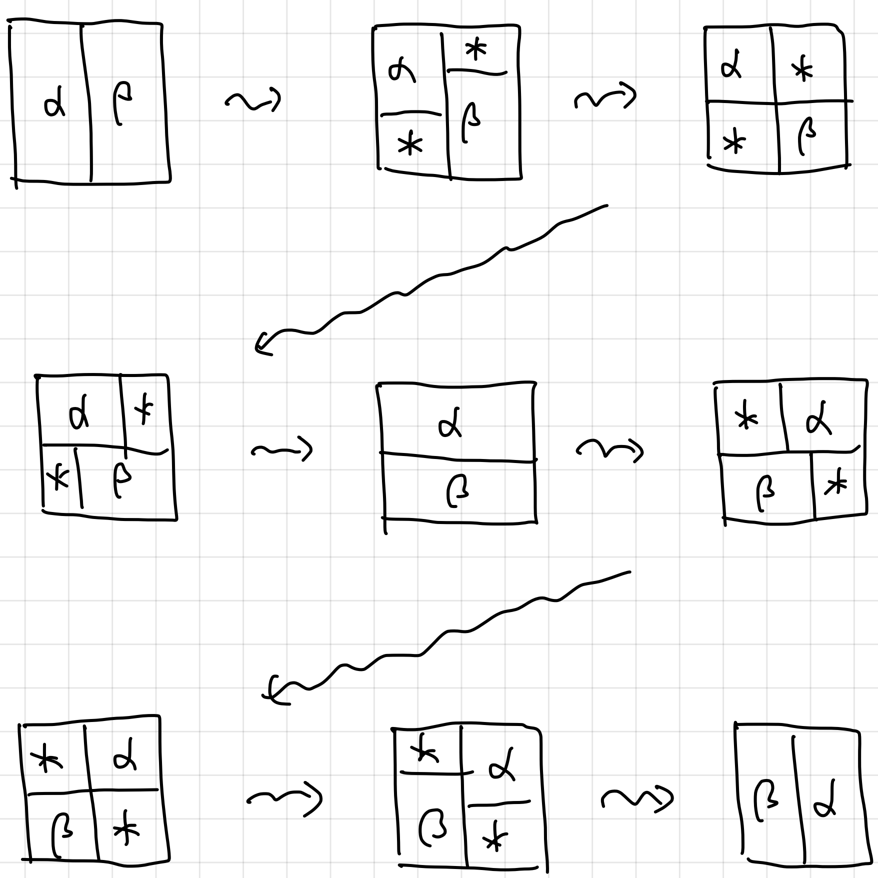
(証)

(a) $f : I^q \longrightarrow X \times Y$

$f = (f_1, f_2)$ $\quad f_1 : I^q \to X, \quad f_2 : I^q \to Y$

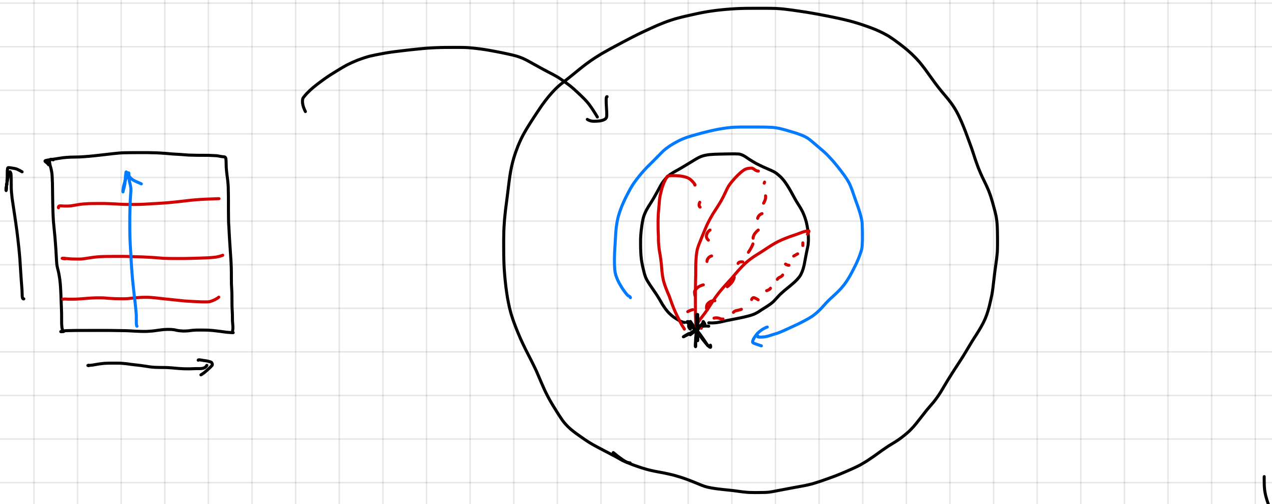
1対1

(b)

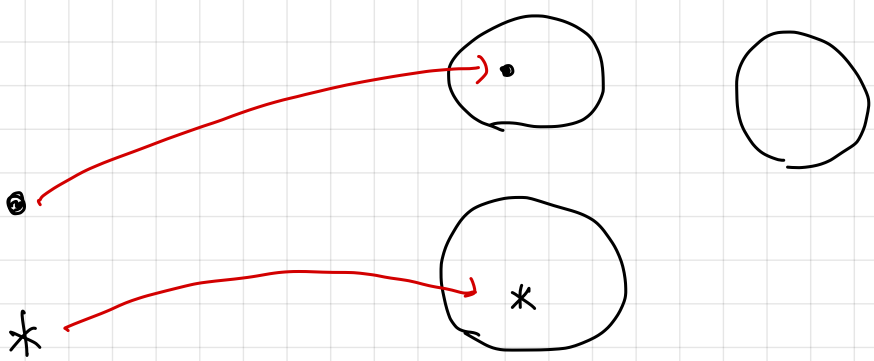


Prop. 17.2

$$\pi_{q-1}(\Omega X) = \pi_q(X) \quad q \geq 2$$



$\pi_0(X) \cong \{X\text{の弧状連結成分}\}$



Lie群 G

群である多様体

$g_1, g_2 \in G$　　$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2$　　C^∞級.

$g_1 \longmapsto g_1^{-1}$

一般に $\pi_0(X)$ は群ではないが

$\pi_0(G)$ は群.

Prop. 17.3

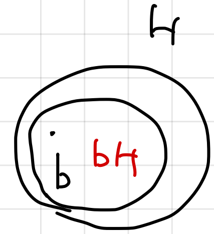
Lie群 G の 1 を含む連結成分 H は G の正規部分群

$\pi_0(G) = G/H$

$a, b \in H$ とする

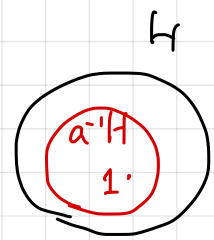
連結集合の連続写像による像は連結.

よって bH は連結.



$bH \underset{b}{\cap} H \neq \phi$ だから $bH \subset H$

同様に $abH \underset{ab}{\subset} aH \subset H$ だから $ab \in H$



$a^{-1}H$ は連結で $a^{-1}H \underset{1}{\cap} H \neq \phi$

$1 \in a^{-1}H$ だから $a^{-1}H \subset H$ $\therefore a^{-1} \in H$

よって H は G の部分群

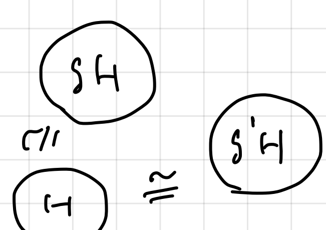
$^\forall g \in G$ $\quad 1 \in gHg^{-1}$

よって $gHg^{-1} \subset H$ よって H は正規.

gH は連結

$gH \neq g'H$ のとき gH と $g'H$ は連結ではない.

よって $\pi_0(G) = G/H$.



$\pi : E \to B$ 基点を保つファイバリング

ファイバー $F = \pi^{-1}(\{*\})$

に対し、ファイバリングのホモトピー列

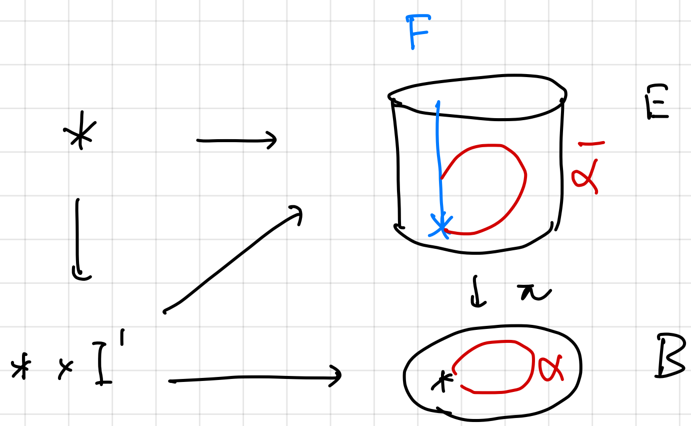
$$\to \pi_q(F) \xrightarrow{i_*} \pi_q(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_q(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{q-1}(F) \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\pi_0(E) \to \pi_0(B)}_{\text{これ以外は群準同型}} \to 0 \quad ex.$$

ker は基点の逆像とする。

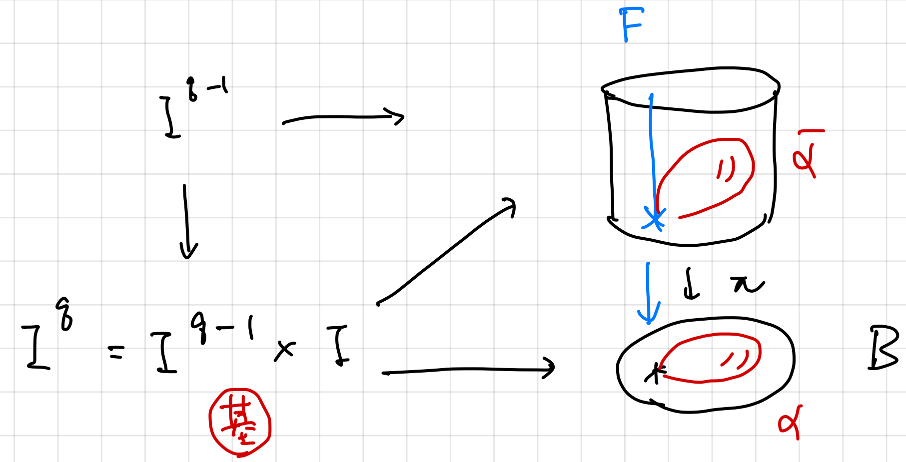
がある。

i_*, π_* は $i : F \hookrightarrow E$, $\pi : E \to B$ から導びかれるもの.



$\partial[\alpha] = [\bar{\alpha}(1)]$ in $\pi^0(F)$

$I^q = I^{q-1} \times I$



α は $\alpha|_{I^{q-1}}$ のホモトピーと考えられる.

$*: I^{q-1} \to E$

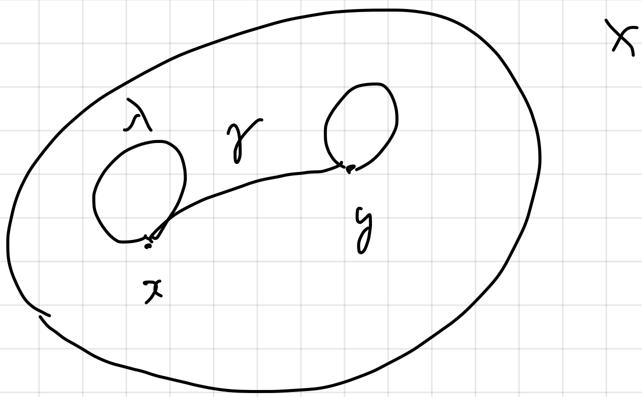
すべて $\longmapsto *$

$t_q = 0$

$\bar{\alpha}|_{I^{q-1}} = *$

$\partial[\alpha] = [\bar{\alpha}|_{t_q=1}]$

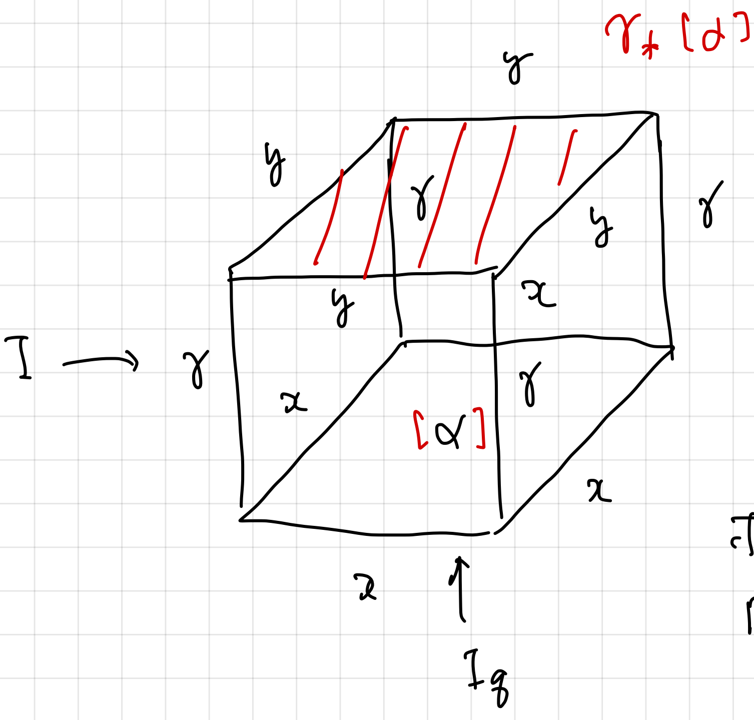
Warning 17.6



$$\gamma_*: \pi_{q-1}(\Omega_x X, \bar{x}) \xrightarrow{\text{iso.}} \pi_{q-1}(\Omega_y X, \bar{y})$$

$$\pi_{q-1}(\Omega_x X, \bar{x}) = \pi_q(X, x) \ni [\alpha]$$

$$\pi_{q-1}(\Omega_y X, \bar{y}) = \pi_q(X, y) \ni [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$$



the box principle

ホモトピー同値なγでは同じものができる。

これはγの$\pi_1(X, x)$への作用と考えることができる。

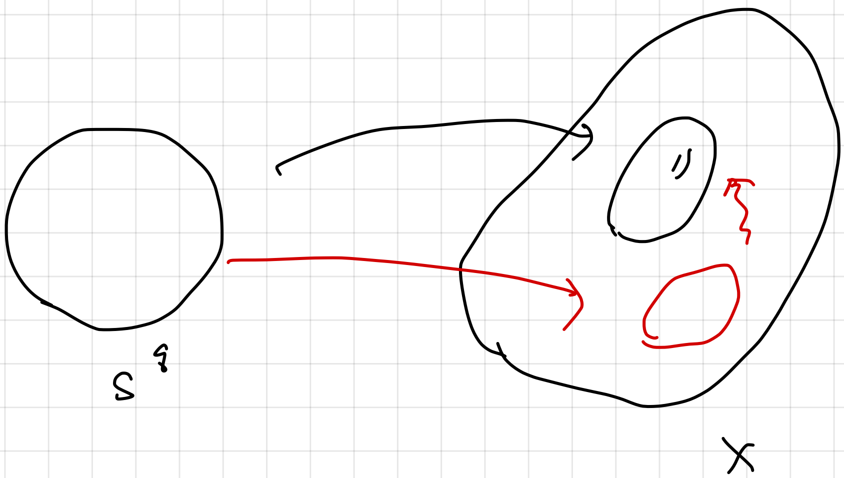
$$[\alpha] \mapsto \gamma_*[\alpha]$$

γの作用が自明なら

$\pi_q(X, x)$はxに依らず $\pi_q(X)$と書ける.

$[S^q, X]$を考える.

($S^q \to X$の写像の自由ホモトピー類)



ただし $[S^q, X]$は群ではない.

Prop. 17.6.1

X : 弧状連結

$$\pi_q(X, x)/\pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} [S^q, X]$$

$[\alpha] \sim \gamma_*[\alpha]$

$\gamma \in \pi_1(X, x)$

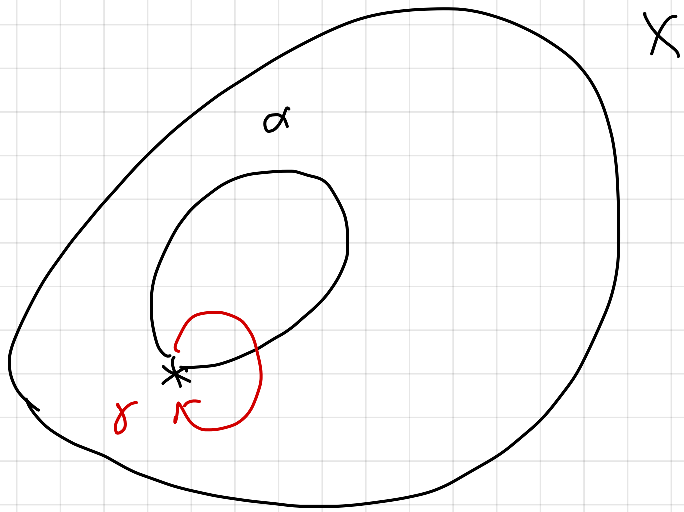
(証)

$h: \pi_q(X, x) \to [S^q, X]$　基点のことを忘れる.

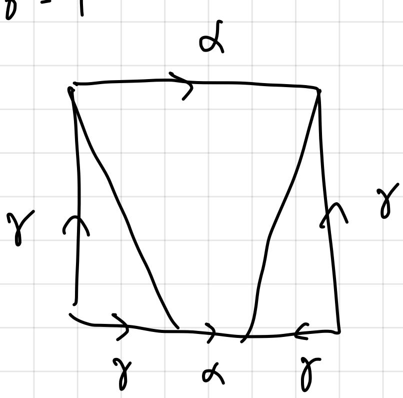
$[\alpha] \in \pi_q(X, x)$

$[\gamma] \in \pi_1(X, x)$　のとき

α と $\gamma_* \alpha$ の自由ホモトピーが作れる.



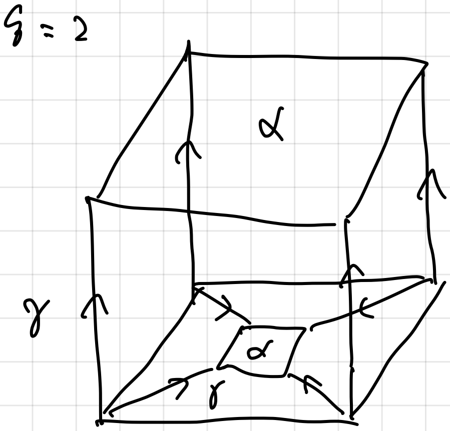
$q = 1$



$\gamma^{-1}\alpha\gamma$

自由ホモトピー

$q = 2$



$h(\gamma^*[\alpha]) = h([\alpha])$　たぶん‥

よって

$$H : \pi_q(X, x)/\pi_1(X, x) \longrightarrow [S^q, X]$$

が導びかれる.

Xが弧状連結なので $[S^q, X]$ の代表元は

基点を保つものにとれる.

よって H は全射.

単射性は次のように示される

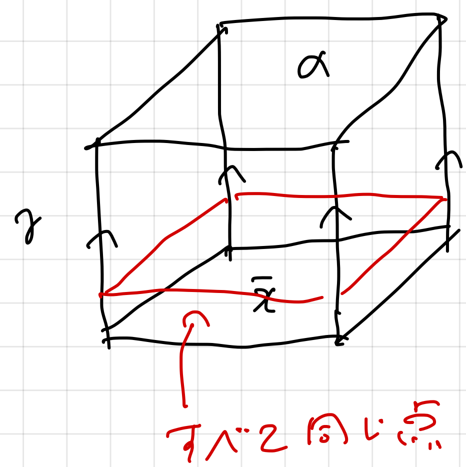
$[\alpha]$ in $\pi_q(X, x)$ が $[S^q, X]$ で 0 に等しいとする.

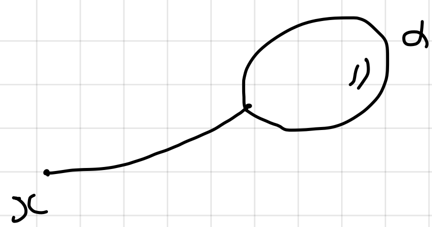
すなわち

$\exists F : I^{q+1} \to X$

$F|_{\text{top face}} = \alpha$

$F|_{\text{bottom face}} = \bar{x}$





$\alpha = \gamma_*(\bar{x})$　　0 in $\pi_q(X, x)/\pi_1(X, x)$

$\alpha \sim \bar{x}$　　$\bar{x}$ は 0 と考えている.

相対ホモトピー列

X : 基点付き 弧状連結

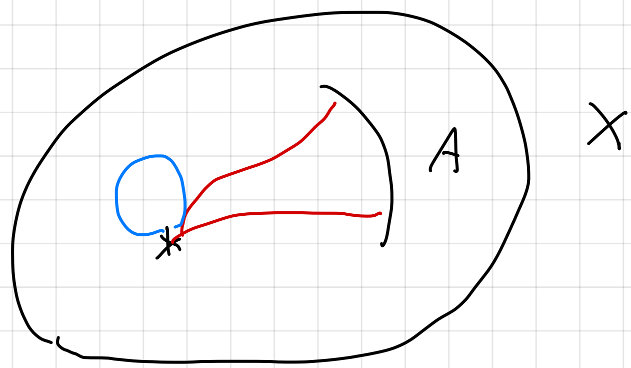
$A \subset X$

Ω_*^A : $*$ から A へのすべてのパスの空間

$$e : \Omega_*^A \to A$$
$$\gamma \mapsto \gamma(1)$$

ファイバリング

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \to & \Omega_*^A \\ & & \downarrow \\ & & A \end{array}$$



このときのホモトピー列

$$\to \pi_q(A) \to \pi_{q-1}(\Omega X) \to \underset{\color{red}{\pi_q(X, A)}}{\pi_{q-1}(\Omega_*^A)} \to \pi_{q-1}(A) \to$$

$$\cdots \to \underset{\color{red}{\pi_1(X, A)}}{\pi_0(\Omega_*^A)} \to \pi_0(A) \to 0$$

$\pi_{q-1}(\Omega_*^A)$ を $\pi_q(X, A)$ とする.

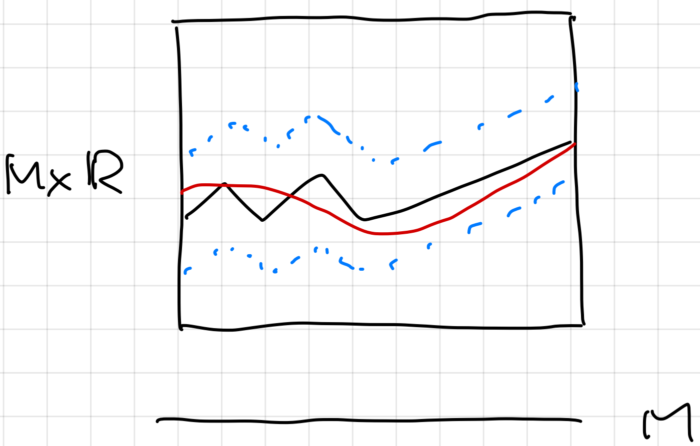
$q \geq 3$ で $\pi_q(X, A)$ は可換　$\pi_1(X, A)$ は群ではない.

球面の例

Prop. 17.8

$f: M \to N$ 多様体間の連続写像

$\Rightarrow$ 微分可能写像に連続的にホモトピック



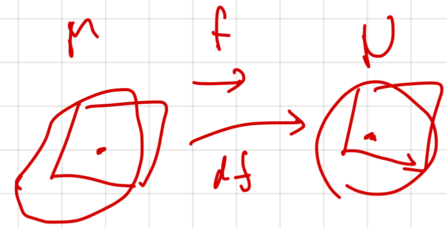
Cor. 17.8.1

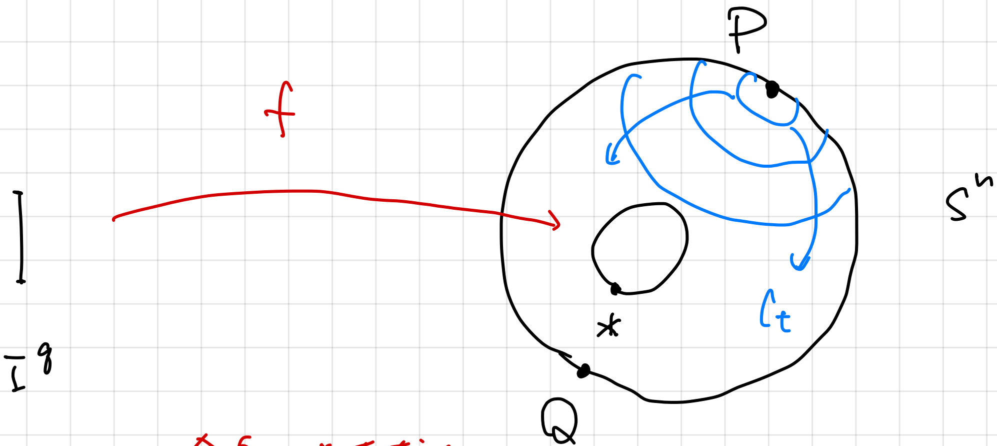
Mが多様体のとき M の C^∞ のホモトピー群は

連続写像のホモトピー群に等しい.

Prop. 17.9

$\pi_q(S^n) = 0 \qquad q < n$





全射ではない

Sardの定理

P を I^q の像の点　その反対の点を Q とする

$c_t : S^n - \{P\} \longrightarrow S^n - \{P\} \qquad t \in [0,1]$

$c_0 = id$

$c_1 =$ Q 上の定値写像

$c_t f$ は f から Q 上の定値写像へのホモトピー

よって $\pi_q(S^n) = 0 \qquad q < n$

Prop. 17.10

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

Lem. 17.10.1

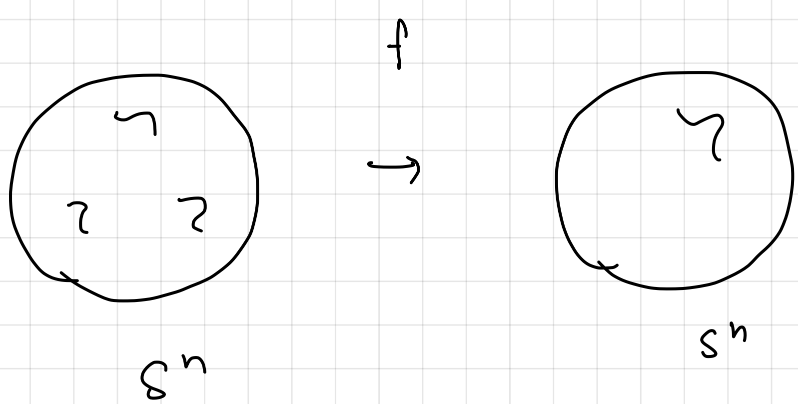
$$\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$$

$$\deg([f][g]) = \deg[f] + \deg[g]$$

Lem. 17.10.2

互いに変形可能

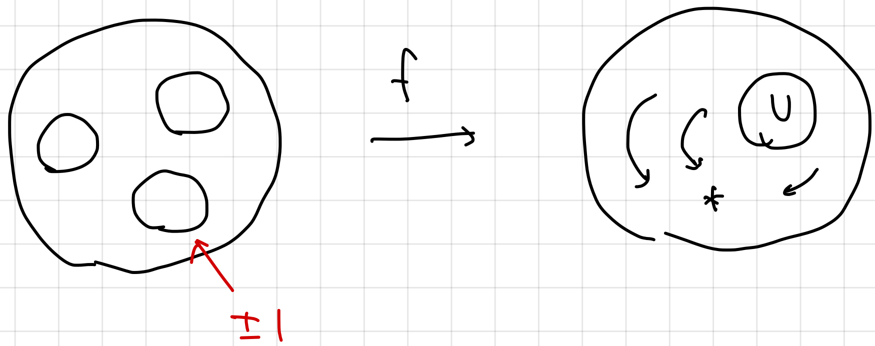
$S^n \to S^n$ が同じ deg を持てば ホモトピック.

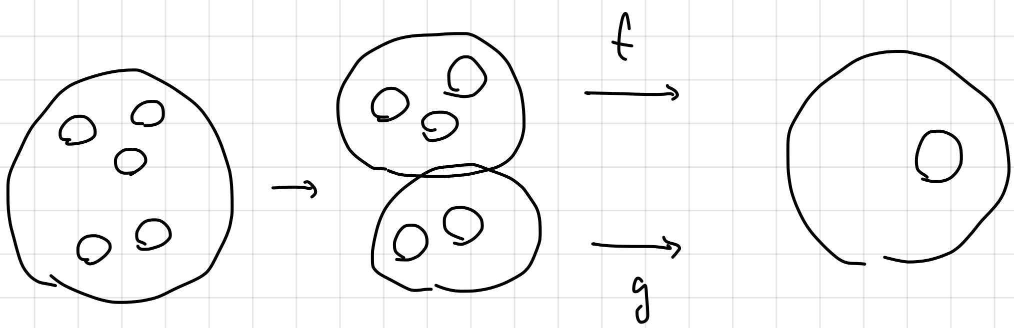


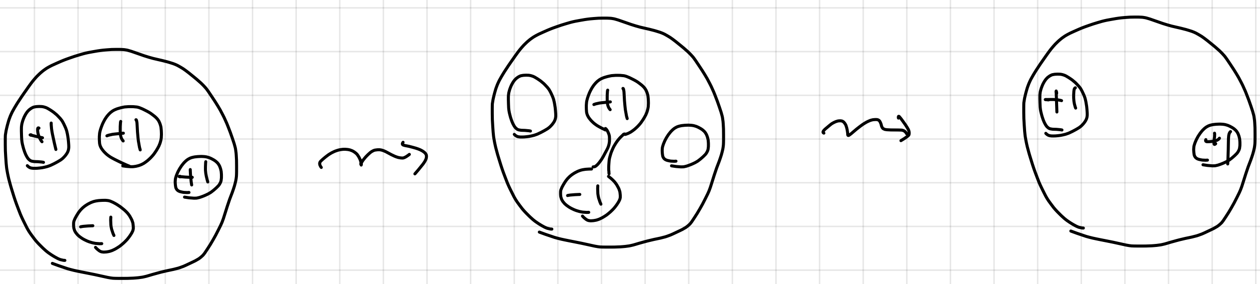
$$\deg f = \int f^* \alpha$$

§4 終わり近く.

$f : S^n \to S^n$ を標準形にする.







すべて$+1$かすべて-1にできる.

セルの貼り付け

e^n : S^{n-1} を境界とする n 次元円盤

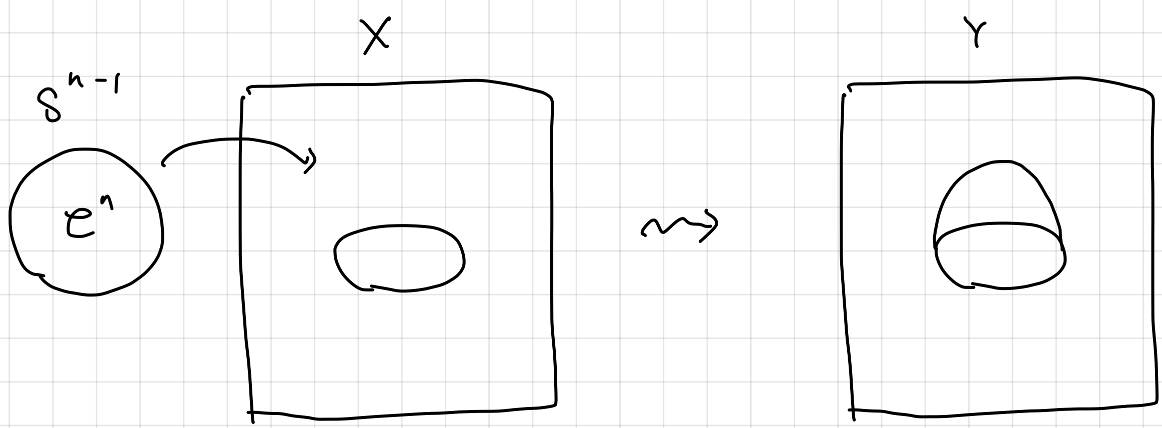
X : 位相空間

$f : S^{n-1} \to X$

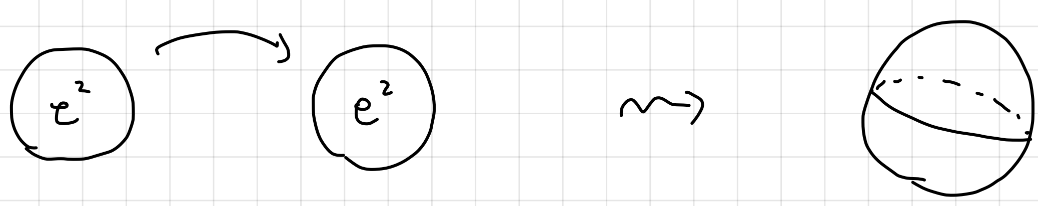
このとき

X に n セルを貼り付けて作った空間 Y

$$Y = X \cup_f e^n = X \sqcup e^n / f(u) \sim u \quad \text{for } u \in S^{n-1}$$



例1



f と g がホモトピックなら

$X \cup_f e^n$ と $X \cup_g e^n$ は同じホモトピー型をもつ.

Prop. 17.11

$X \hookrightarrow X \cup e^n$ のとき

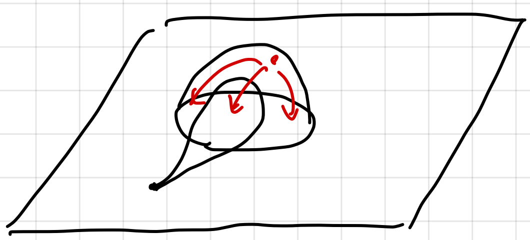
$\pi_q(X) \xrightarrow{\sim} \pi_q(X \cup e^n)$ $\quad q < n-1$

$\pi_{n-1}(X) \longrightarrow \pi_{n-1}(X \cup e^n)$ $\quad$ 全射

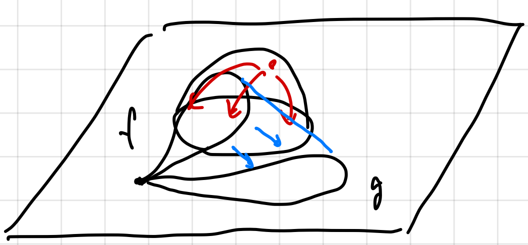
(略証)

$q \leq n-1$ $\quad f : S^q \to X \cup e^n$ 基点を保つ.

$f(S^q)$ は e^n をおおわない Sard の定理



$q>2$ $\quad f : S^q \to X$ に変形できる $\leadsto$ 全射.



$q<n-1$ のとき $f \simeq g$ のホモトピー $F : X \times I \to X \cup e^n$ を X 上に変形できる $\leadsto$ 単射

Prop. 17.12

$X_f = X \cup_f e^n$ に対し

$H_q(X) = H_q(X_f) \quad q \neq n-1, n$

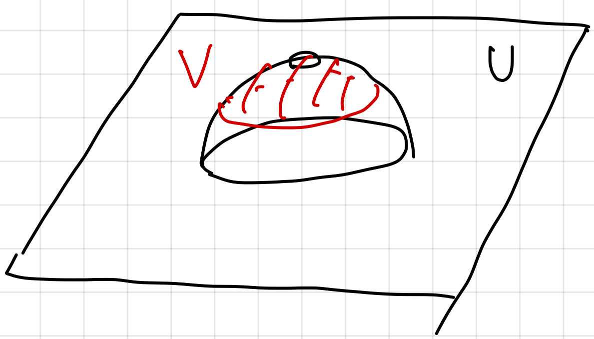
$$0 \to H_n(X) \to H_n(X_f) \to \overset{H_{n-1}(S^{n-1})}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X_f) \to 0$$

ex.

$f_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(X)$ は

$f : S^{n-1} \to X$ から導かれる写像

(証)



$U = X_f - \{p\}$ 原点 $\qquad U \simeq X$

$V = \{x \in e^n \mid \|x\| < \frac{1}{2}\}$ $\qquad V$ は可縮

$\{U, V\}$ は X_f のオープンカバー

マイヤー・ヴィートリス列より

Cor 15.6 より

$$\to \underset{\substack{\cong \\ U \cap V}}{H_q(S^{n-1})} \to \underset{\substack{\cong \\ U}}{H_q(X)} \oplus H_q(V) \to H_q(X_f) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \to$$

ex.

cf. (2.4)

$q \neq n-1, n$ のとき

$$0 \to H_q(X) \to H_q(X_f) \to 0$$

$q = n$ のとき

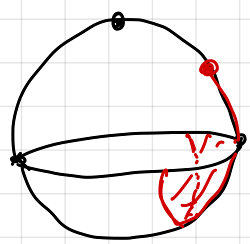
$$0 \to H_n(X) \to H_n(X_f) \to \mathbb{Z}$$

$$\to H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X_f) \to 0$$

CW複体

セルを次元の低いものから貼り合わせたもの

すべてのセルとの交わりが閉のときその部分集合を閉とする位相（弱位相という）



CW複体の n 次元以下セルたちすべてをまとめたものを X の n スケルトンという.

Prop. 17.13

CW複体はグッドカバーをもつ空間にホモトピー同値である.

モース理論

$f : M \to \mathbb{R}$　　C^∞
多様体

$df = 0$ の点を f の臨界点という.
局所座標を $x_1, \ldots, x_n$ とすると

$$df(p) = \sum \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)}_{0} dx^i = 0$$

$f(p)$ を臨界値という

ヘッセ行列 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$ が正則のとき

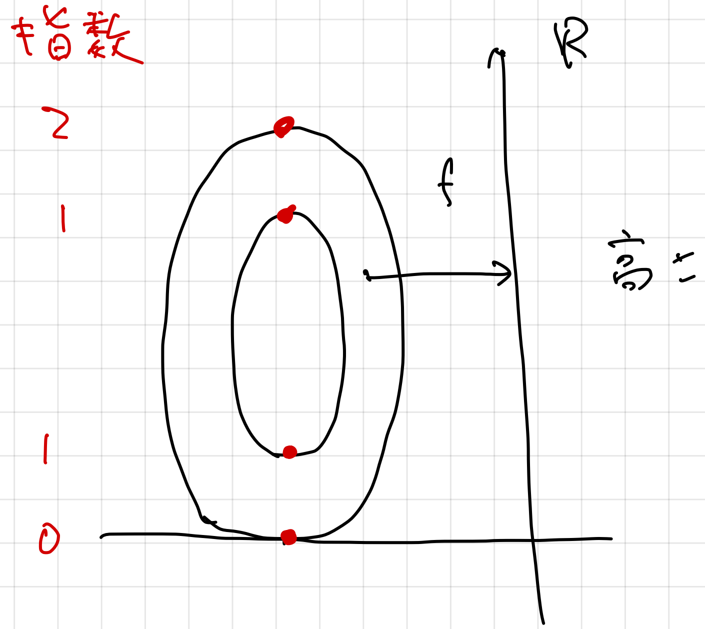
p は非縮退な臨界点という.

これは座標によらない

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l}$$

$$H(y) = J^t H(x) J$$

ヘッセ行列の負の固有値の数をpの指数という.

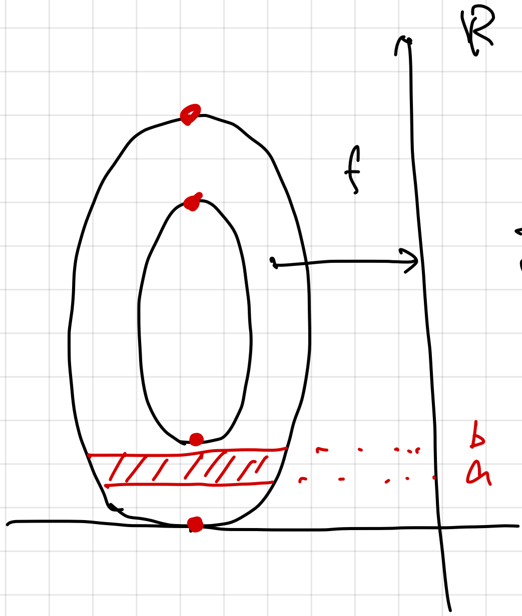


Theo. 17.15

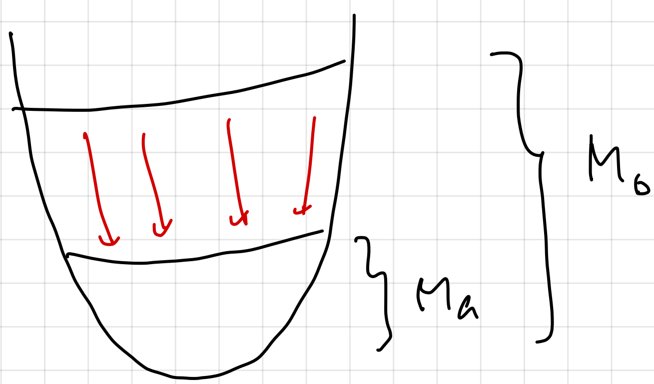
f: M上の微分可能関数

$M_a = f^{-1}((-\infty, a])$ とする.

$f^{-1}([a, b])$ がコンパクトで臨界点を含まなければ M_a と M_b は同じホモトピー型になる



説明



微分が0でないので対応するベクトル場ができる

それは低い方に向いている.

そのベクトルの方向にレトラクトがある.

∎

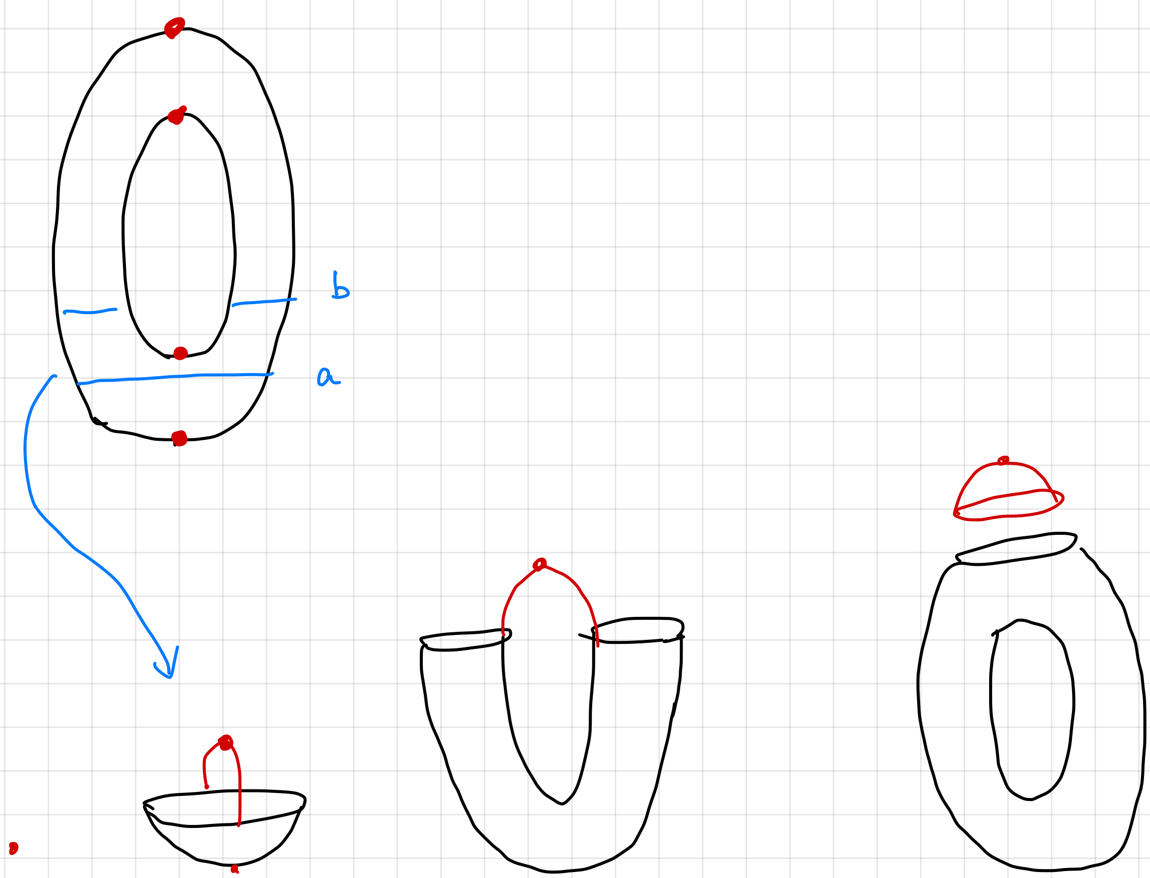
Theo. 17.16

$f^{-1}([a,b])$がコンパクトで

内部に唯一つ非縮退な臨界点をもち、

その指数がkなら　M_bは$M_a \cup e^k$と

同じホモトピー型をもつ。



モースの補題

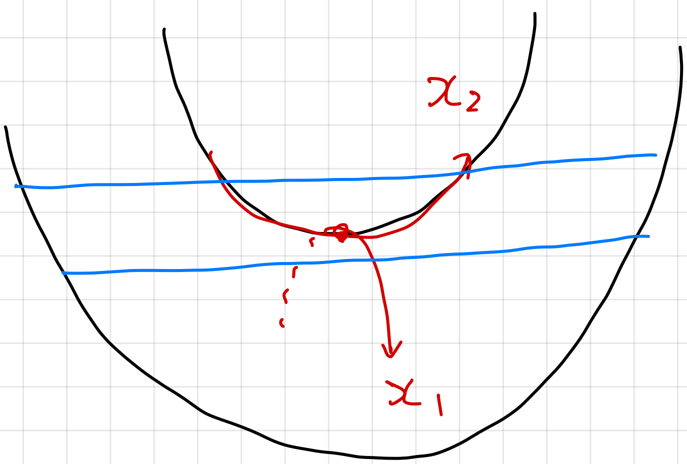
pが非縮退な指数kの臨界点のとき

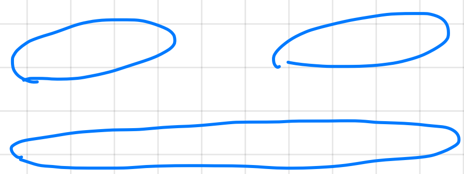
適当な座標で

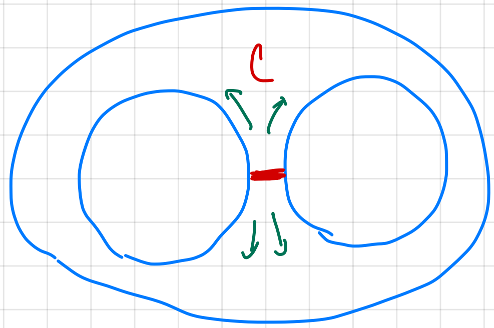
$$f = f(p) - x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots x_n^2$$

とできる.

Theo. 17.16 の説明







$$C = \{ f \leq f(p),\ x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq \delta \}$$

$$\simeq e^k$$

多様体上の微分可能な実数値関数で
その臨界点が非縮退なものをモース関数という.

Lem. 17.17

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする.
f を U 上の任意の微分可能な実数値関数とする.
するとほとんどすべての $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ で
$f_a(x) = f(x) + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ はモース関数である.

(証)

$g(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ とすると

f のヘッセ行列 $= D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$

ヤコビ行列

$g_a(x) = \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_i} \right) = g(x) + a$

$D(g_a) = D(g)$

臨界点は $g(x) = -a$ の点

これが非縮退 $\Leftrightarrow$ $D(g)$ が正則

$\Leftrightarrow$ $-a$ が g の非臨界値

Sard の定理よりほとんどすべての a がそう.

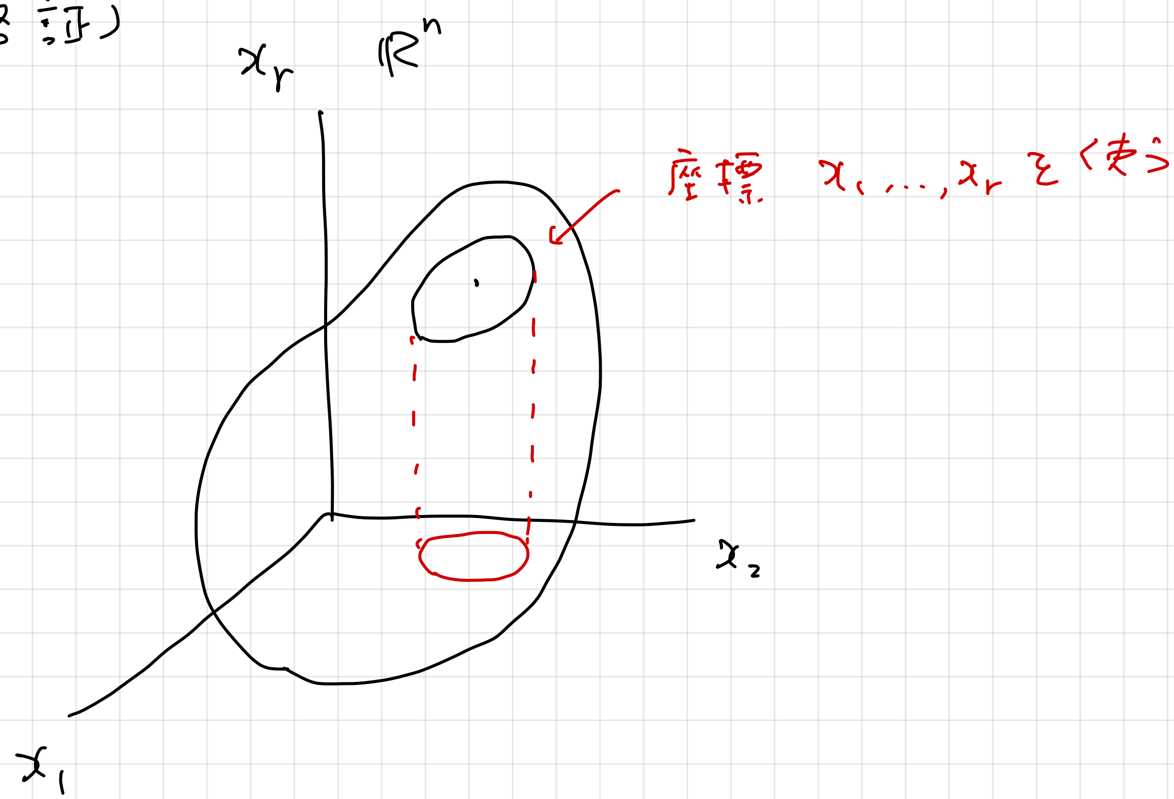
Prop. 17.18

$M \subset \mathbb{R}^r$ 次元 n の多様体 $n \le r$

ほとんどすべての $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ で

$f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r$ は M 上のモース関数.

(略証)



可算個のこのような座標近傍で M を覆う.

$(a_{n+1}, \dots, a_r)$ を1つ固定して.

$f(x) = a_{n+1} x_{n+1} + \cdots + a_r x_r$ とする.

Lem. 17.17 より ほとんどすべての $(a_1, \dots, a_n)$ で

$f(x) + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ は U 上でモース関数

よって $f_a(x) = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r$ は

ほとんどすべての $(a_1, \ldots, a_r)$ で U 上のモース関数

$A_i = \{a \in \mathbb{R}^r \mid f_a(x)$ が U_i 上モース関数でない$\}$ とする

$a \in \mathbb{R}^r - \cup A_i$ なら $f_a(x)$ は M 上のモース関数.

$\cup A_i$ は測度 0 なので証明された.

i 可算

Theo. 17.19

コンパクト多様体 M は 有限 CW 複体と同じ ホモトピー型をもつ.

(証)

ホイットニーの定理により M は ユークリッド空間の部分多様体と考えてよい.

よって モース関数 f がある.

モースの補題より f の臨界点は 孤立している.

M がコンパクトなので 臨界点は 有限個 $p_1, \cdots, p_n$

また $\forall a \in \mathbb{R}$ $M_a = f^{-1}([-\infty, a])$ は コンパクト集合の閉集合だから コンパクト.

Theo. 17.15, 17.16 より

ホモトピー同値の範囲で M は $p_1, \cdots, p_r$ に セルを貼り付けたものになる.

次元が低い順の貼り付けでない場合, すなわち e^k が $f: S^{k-1} \to X$ で $(k-1)$ スケルトンの中に貼り付けられない場合を考える (e^n へとする)

$n > k-1$ なので f は nセルへの全射ではないため、

$e^n - f(S^{k-1})$ 外の点を取りそこから e^n の境界への

変形を考えればよい。

$\square$