ジョルダン標準形

1. Intro.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 行列を線形写像として扱う

以下、Aはn×n行列

$x_1, \ldots, x_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底のとき

$$A x_j = \lambda_{1j} x_1 + \lambda_{2j} x_2 + \cdots + \lambda_{nj} x_n$$

$$\Downarrow$$

$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$ として

$p_{ij} = x_{ji}$

$$P = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

λ_{ij}

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ とおくと

$$AP = P\Lambda \qquad P^{-1}AP = \Lambda$$

$$Ax_j = \sum_i \lambda_{ij} \, x_i$$

$$(AP)_{ij} = (Ax_1, \; .. \; Ax_n)_{ij}$$

$$= (Ax_j)_i$$

$$= (\lambda_{1j} x_1 + \lambda_{2j} x_2 + \cdots + \lambda_{nj} x_n)_i$$

$$= \left(\sum_k \lambda_{kj} x_k\right)_i$$

$$= \sum_k \lambda_{kj} \, x_{ki}$$

$$= \sum_k P_{ik} \lambda_{kj}$$

$$= (P \Lambda)_{ij}$$

cf.

内積

$$Ax = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad\qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad\qquad\qquad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\;} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= (Ab_1, \cdots, Ab_n)$$

1次独立な固有ベクトル

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

が n 個あれば

$$P = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

これが行列の対角化.

しかし. 一般には n 個ない..

2. 固有値、広義固有空間

固有値、固有ベクトル

$Ax = \lambda x \quad x \neq 0$ のとき

λ は A の固有値、x は λ の固有ベクトルという

λ の固有ベクトルたちのなす空間を V_λ と書く。

単位行列

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = \lambda x = \lambda I x$

$\rightsquigarrow (A - \lambda I)x = 0$

最小多項式

$F \in \mathbb{C}[X]$ 多項式環

$F(A) = 0$ となる最小次の多項式で

最高次係数が1の多項式を

A の最小多項式とよんで φ と書く。

$F(x) = X^n + aX^{n-1} + \cdots + b$

$\rightsquigarrow F(A) = A^n + aA^{n-1} + \cdots + bI$

例)

$\tilde{V}_{-1} = \ker(A-(-1)I)^1 = \ker(A+I) = V_{-1}$

$\tilde{V}_3 = \ker(A-3I)^1 = \ker(A-3I) = V_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(x) = x - 1$$

$$A - 1 \cdot I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(x) = \underline{x^2 - 2x - 3}$$

$$= (x+1)^1 (x-3)^1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(x) = \underline{(x-1)^{2}}$$

$$\det(xI - A) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

λ が A の固有値 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(\lambda) = 0$

$\tilde{V}_1 = \ker(A-I)^2 \supset V_1 = \ker(A-I)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A x_1 = 3 x_1 = 3 x_1 + 0 x_2$$

$$A x_2 = -x_2 = 0 x_1 - x_2$$

$$(A - 3I) x = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + I) x = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \overset{P}{\underset{x_1 \ \ x_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I) x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル（1次独立なものは）1つ

固有多項式

ケーリー・ハミルトンの定理

$\Phi(x) = \det(xI - A)$ とすると

$\Phi(A) = 0$

$\Phi(x)$ を固有多項式という

$\varphi(x)$ は $\Phi(x)$ を割りきる.

$\Phi(x)$ は $\varphi(x)^n$ を割りきる.

$\mathbb{C}$ は代数的閉体なので

任意の多項式は1次式に分割できる.

広義固有空間

$\varphi = (x-\lambda)^d (\quad) \cdots$

φの根λの重複度をdとする

$$\tilde{V}_\lambda = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^d$$

を広義固有空間という.

$$\mathbb{C}^n = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{V}_{\lambda_r}$$

$$V_\lambda \subset \tilde{V}_\lambda$$

$\phi = (x-\lambda)^m (\quad) \cdots$

固有値λのϕの根としての重複度mをλの重複度という.

$$\dim \tilde{V}_\lambda = m$$

Jordan 標準形

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$ Jordan 行列

Jordan 行列

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_i & \\ 0 & & & & A_r \end{pmatrix}$$ Jordan 標準形

A は $P^{-1}AP$ によって Jordan 標準形にできる

A_i 部分だけに着目すれば

A と書く。

$$Ax_1 = \lambda x_1 \qquad (A - \lambda I)x_1 = 0$$

$$Ax_2 = \lambda x_2 + x_1 \qquad (A - \lambda I)x_2 = x_1$$

$$Ax_3 = \lambda x_3 + x_2 \qquad (A - \lambda I)x_3 = x_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Ax_k = \lambda x_k + x_{k-1} \qquad (A - \lambda I)x_k = x_{k-1}$$

3. 例

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \det(XI - A) = (X-2)^4 (X-3)^3$$

$$\varphi(X) = (X-2)^3 (X-3)^2$$

$$\mathbb{C}^7 = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3$$

$$\tilde{V}_2 = \ker(A-2I)^3 \qquad \dim \tilde{V}_2 = 4$$

$$\tilde{V}_3 = \ker(A-3I)^2 \qquad \dim \tilde{V}_3 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)x_1 = 0$$

$$(A - \lambda I)x_2 = x_1$$

$$(A - \lambda I)x_3 = x_2$$

$$\vdots$$

$$(A - \lambda I)x_k = x_{k-1}$$

$$(A - 2I)x_1 = 0$$

$$(A - 2I)x_2 = x_1$$

$$(A - 2I)x_3 = x_2$$

$$(A - 2I)x_4 = 0$$

$$(A - 3I)x_5 = 0$$

$$(A - 3I)x_6 = x_5$$

$$(A - 3I)x_7 = 0$$

$$(A-2I)x = 0$$

$$x = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^3 y = 0$$

$$y = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)y = \begin{pmatrix}b-2d\\b-2d\\3d-2b+a\\-3d+2b-a\\5d-3b+a\\0\\b-2d\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2 y = \begin{pmatrix}d-a\\d-a\\2a-2d\\2d-2a\\3a-3d\\0\\d-a\end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = (A - 2I)x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = (A - 2I)^2 x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 2I)x_1 = 0$

$(A - 2I)x_2 = x_1$

$(A - 2I)x_3 = x_2$

$(A - 2I)x_4 = 0$

$$(A - 3I)x = 0$$

$$x = v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^2 y = 0$$

$$y = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-3I)y = \begin{pmatrix}-a-b-c\\0\\a+b+c\\-a-b-c\\2a+2b\\0\\-a-b-c\end{pmatrix}$$

$$x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_5 = (A - 3I)x_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)x_5 = 0$$

$$(A - 3I)x_6 = x_5$$

$$(A - 3I)x_7 = 0$$

$$
P = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-3 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7
\end{array}
\end{array}
$$

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & \\
 & & 2 & & & & \\
 & & & 2 & & & \\
 & & & & 3 & 1 & \\
 & & & & & 3 & \\
 & & & & & & 3
\end{pmatrix}
$$

例1. 有馬.浅枝 先生 p.152 より

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}^3 = \tilde{V}_2 \qquad \tilde{V}_2 = \mathrm{Ker}(A-2I)^3$$

$$\phi = (x-2)^3$$

$$\dim \tilde{V}_2 = 3$$

$$\varphi = (x-2)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)x_1 = 0$$

$$(A-2I)x_2 = x_1$$

$$(A-2I)x_3 = x_2$$

たとえば $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = (A-2I)x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 = (A-2I)x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例2. 有馬. 浅枝 先生 p.157 より

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -10 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi = (x-2)^2(x-3)^2$$

$$\varphi = (x-2)^2(x-3)^2$$

$$\mathbb{C}^4 = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3 \qquad \boxed{J}_2^2$$

$$\tilde{V}_2 = \ker(A-2I)^2$$

$$\tilde{V}_3 = \ker(A-3I)^2 \qquad \boxed{J}_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \tilde{V}_2 = 2$$

$$\dim \tilde{V}_3 = 2$$

$$(A-2I)x_1 = 0$$

$$(A-2I)x_2 = x_1$$

$$(A-2I)^2 x = 0 \qquad x = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_1 = (A-2I)x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 3I)x_3 = 0$

$(A - 3I)x_4 = x_3$

$(A - 3I)e = 0$

$$(A - 3I)^2 x = 0 \qquad x = a\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x_3 = (A - 3I)x_4 = \begin{pmatrix} -36 \\ 12 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -36 & 3 \\ 0 & -2 & 12 & 13 \\ -8 & 0 & 72 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

参考

斎藤毅　線形代数の世界、

高杉豊 馬場敬之　演習線形代数

有馬哲、浅枝陽　演習詳解 線型代数