ハーツホーン
ノート

Chap. 1 多様体

1.1 アフィン多様体

k: 代数的閉体

<u>k上のアフィンn空間 $\mathbb{A}^n_k$</u>　↖略

$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ 点.

$f \in k[x_1, \ldots, x_n] = A$ と書く.

n変数多項式環

<u>零点集合</u>

$Z(f) = \{ P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \}$

$Z(T) = \{ P \in \mathbb{A}^n \mid {}^\forall f \in T, f(P) = 0 \}$　$T \subset A$

Tによって生成されるイデアルを$\mathfrak{a}$とすると

$Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, \ldots, f_n)$

↖$\mathfrak{a}$の生成元

代数的集合

$Y \subset \mathbb{A}^n$ が $\exists T \subset A$ $Y = Z(T)$ のとき

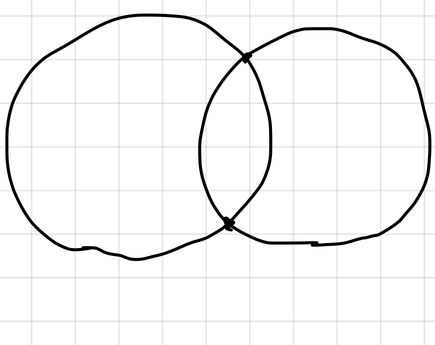
Y は 代数的集合という.

Prop. 1.1

2つの代数的集合の和は代数的.

代数的集合の任意の族の交わりは代数的.

空集合, 全空間は代数的.



$\mathbb{A}^n$ 上の Zariski 位相.

代数的集合を閉集合とする位相.

例 1.1.1

$\mathbb{A}^1$ 上の Zariski 位相.

$A = k[x]$ は PID. 任意のイデアル $\mathfrak{a} = (f)$

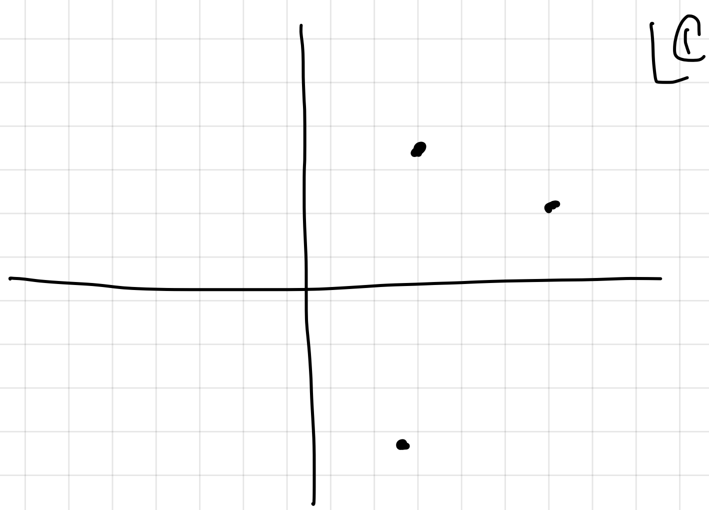
k は代数的閉体だから $f = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

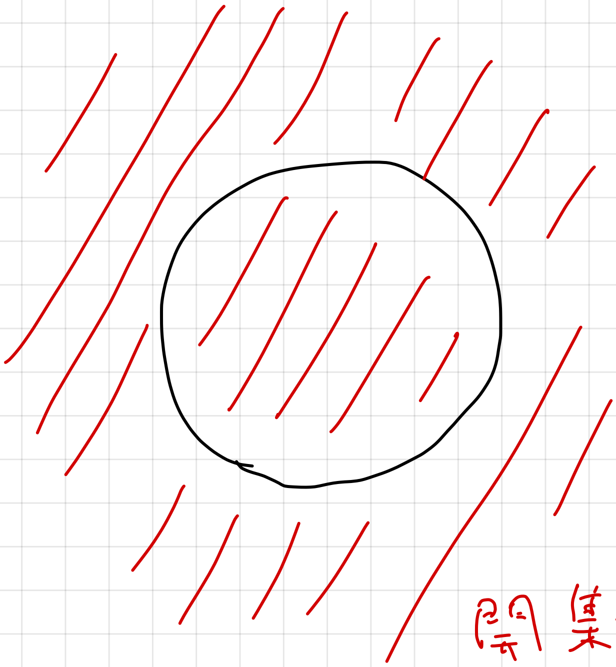
$\therefore Z(\mathfrak{a}) = Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$Z(1) = \phi$.

$Z(0) = \mathbb{A}^1$

よって $\mathbb{A}^1$ の閉集合は, ϕ, 有限部分集合, 全体.





$x^2+y^2-1=0$

開集合

既約

位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約とは

Y において閉であるような 2つの真部分集合

Y_1, Y_2 を使って $Y = Y_1 \cup Y_2$ と書けないということ.

空集合は既約とみなさない.

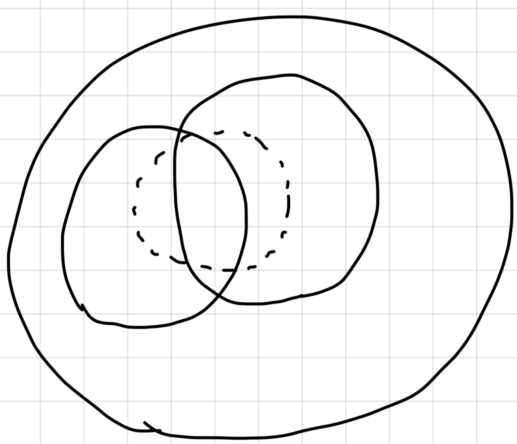
例 1.1.2

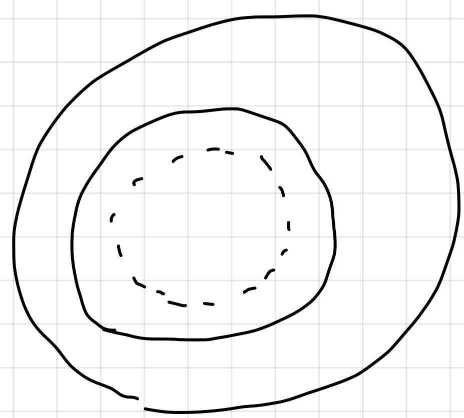
A^1 は既約

例 1.1.3

既約な空間の空でない開部分集合は

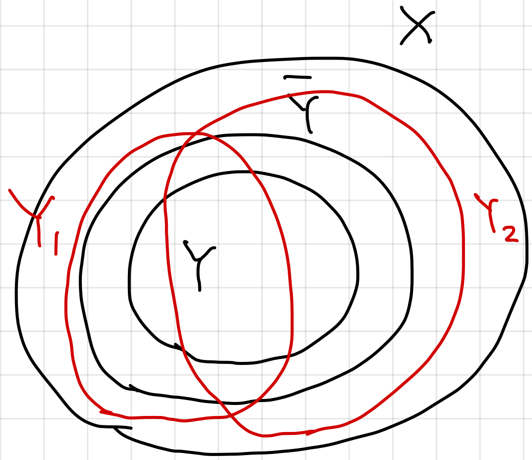
既約かつ稠密.





例1.1.4

YがXの既約部分集合ならばXにおける閉包$\overline{Y}$も既約.



$\overline{Y}=(Y_1\cap\overline{Y})\cup(Y_2\cap\overline{Y})$,

$Y_1\cap\overline{Y}\neq\overline{Y}$, $Y_2\cap\overline{Y}\neq\overline{Y}$ とする

このとき $Y=(Y_1\cap Y)\cup(Y_2\cap Y)$ となる.

$Y_1\cap Y=Y$ とすると $\overline{Y}\subset Y_1$

Yを含む最小の閉集合

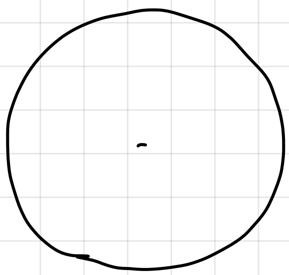
これは $Y_1\cap\overline{Y}\neq\overline{Y}$ と矛盾. よって $Y_1\cap Y\neq Y$

$Y_2\cap Y\neq Y$ も同様

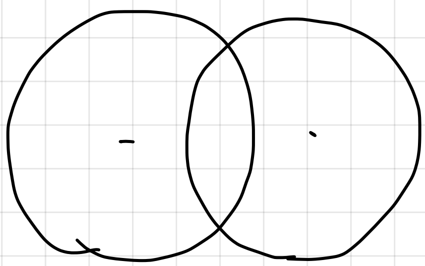
よって Y は既約でなくなり矛盾.

アフィン代数多様体

$\mathbb{A}^n$の既約閉部分集合に誘導位相をいれたもの.

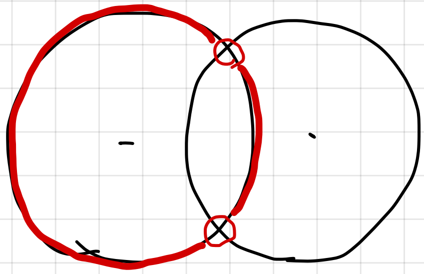


$x^2+y^2-1=0$



既約でないから違う.

アフィン多様体の開部分集合を準アフィン多様体という.



$Y \subset \mathbb{A}^n$ に対し

$I(Y) = \{ f \in A \mid \forall P \in Y \ f(P) = 0 \}$ イデアル.

Prop. 1.2

(a) $T_1 \subset T_2 \subset A \Rightarrow Z(T_1) \supset Z(T_2)$

(b) $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$

(c) $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

(d) $\mathfrak{a} \subset A$ イデアル $\Rightarrow I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

(e) $Y \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow Z(I(Y)) = \overline{Y}$

(d) は Hilbert の零点定理

(e) $\overline{Y} \subset Z(I(Y))$ は明らか

Yを含む最小の閉集合

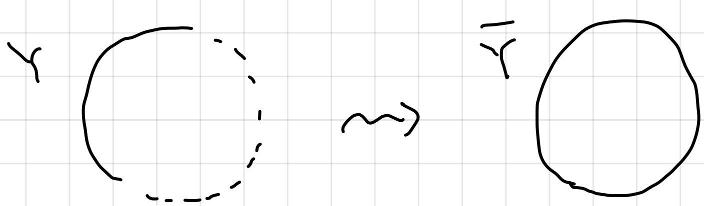
$Y \subset W$ となる閉集合 W があったとする

$W = Z(\mathfrak{a}) \quad Z(\mathfrak{a}) \supset Y$

$I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y)$

$\therefore \mathfrak{a} \subset I(Y)$

$\therefore Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y))$



$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ のとき $\mathfrak{a}$ を根基イデアルという.

$$Y \subset \mathbb{A}^n \quad \xleftrightarrow{1対1} \quad \mathfrak{a} \subset A$$

代数的集合　　　　　根基イデアル

$$\begin{array}{ccc} Y & \longmapsto & I(Y) \\ Z(\mathfrak{a}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a} \end{array}$$

$$Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$$

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{I(Y)} = I(Z(I(Y))) = I(Y) \\ \\ Y \subset Z(I(Y)) \text{ より } I(Y) \supset I(Z(I(Y))) \\ \\ \text{一方, } \boxed{I(Y)} \subset I(Z(\boxed{I(Y)})) \text{ は明らか} \end{array} \right)$$

$Z(\mathfrak{a})$ が既約 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$

↑

根基イデアル

Aの素イデアルたち.

Ex. 1.4.1

$\mathbb{A}^n$ は既約

$\mathbb{A}^n = Z((0))$ 　(0) は素イデアル

Ex. 1.4.2, 1.4.3

$f \in \underset{A}{k[x, y]}$ 既約多項式とする.

A は UFD なので (f) は素イデアル

よって $Y = Z(f)$ は既約

$f(x, y) = 0$ をアフィン曲線という.

f が d 次のとき d 次曲線という.

一般に $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 既約多項式

$n = 3$ のとき $Z(f)$ を曲面.

$n > 3$ 　超曲面という.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ 　2次曲線.

既約

$$(\cancel{a}x+by+c)(x+b'y+c')$$

$$= \cancel{a}x^2 + \cancel{a}b'xy + \cancel{a}c'x + bb'y^2$$
$$+ bxy + bc'y$$
$$+ cx + cb'y + cc'$$

$$= x^2 + y^2 - 1$$

$a = 1.$

$bb' = 1$ $\qquad b = \pm i \quad b' = \mp i$

$cc' = -1$ $\qquad c = \pm 1 \quad c' = \mp 1$

$b + b' = 0$

$c + c' = 0$

$bc' + cb' = 0$ $\qquad$ 不可能.

例1.1.4.4

$A = k[x_1, \ldots, x_n]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は

$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ という形.

アフィン座標環

$Y \subset \mathbb{A}^n \qquad A(Y) = A/I(Y)$

Y がアフィン多様体のとき $A(Y)$ は整域かつ

有限生成 k 代数.

B が整域かつ有限生成 k 代数のとき

$B = k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$,

このとき $Y = Z(\mathfrak{a})$ とおけば B は Y の座標環

Noether的位相空間

閉部分集合が降鎖律をみたすもの.

ネーター的空間 X で空でない閉集合 Y は

既約な閉集合の有限和で表される.

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$$

$Y_i \not\supset Y_j$ とすると Y_i は一意的に決まる

これらを Y の既約成分という.

$\mathbb{A}^n$ 内のすべての代数的集合は多様体の和となる.

次元

Xの異なる既約閉部分集合の鎖 $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$が存在する $n \in \mathbb{Z}$の上限をXの次元という

アフィン、準アフィン多様体の次元を位相空間としての次元で定義する。

例

$\dim \mathbb{A}^1 = 1 \qquad \{0\} \subsetneq \mathbb{A}^1$

Yがアフィン代数的集合ならばYの次元は$A(Y)$の次元に等しい。

$$\left(\begin{array}{l} Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n = Y \\ A \supset I(Y_0) \supsetneq I(Y_1) \supsetneq \cdots \supsetneq I(Y_n) = I(Y) \\ A/I(Y_n) \supsetneq I(Y_0)/I(Y_n) \supsetneq \cdots \supsetneq I(Y_n)/I(Y_n) \end{array}\right)$$

$\mathbb{A}^n$ の次元は n.

Y が準アフィン多様体 ならば $\dim Y = \dim \overline{Y}$

$\mathbb{A}^n$ 内の多様体 Y は

$Y = Z(f)$　　f: 既約多項式

$\Leftrightarrow$　$\dim Y = n-1$