§17 ホモトピー論のまとめ.

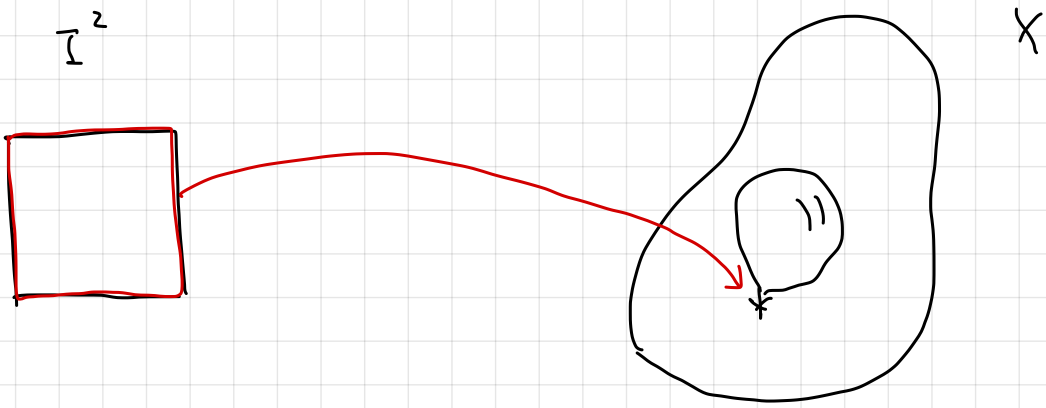
ホモトピー群

X: 基点$*$付きの位相空間

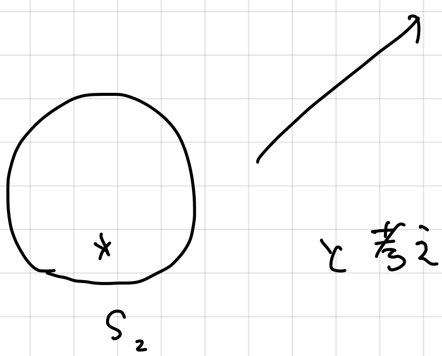
$\pi_q \quad (q \geq 1)$

$I^q \to X$ ただし $\dot{I}^q \to *$ のホモトピー類

この条件を基と書く.



ふろしき…



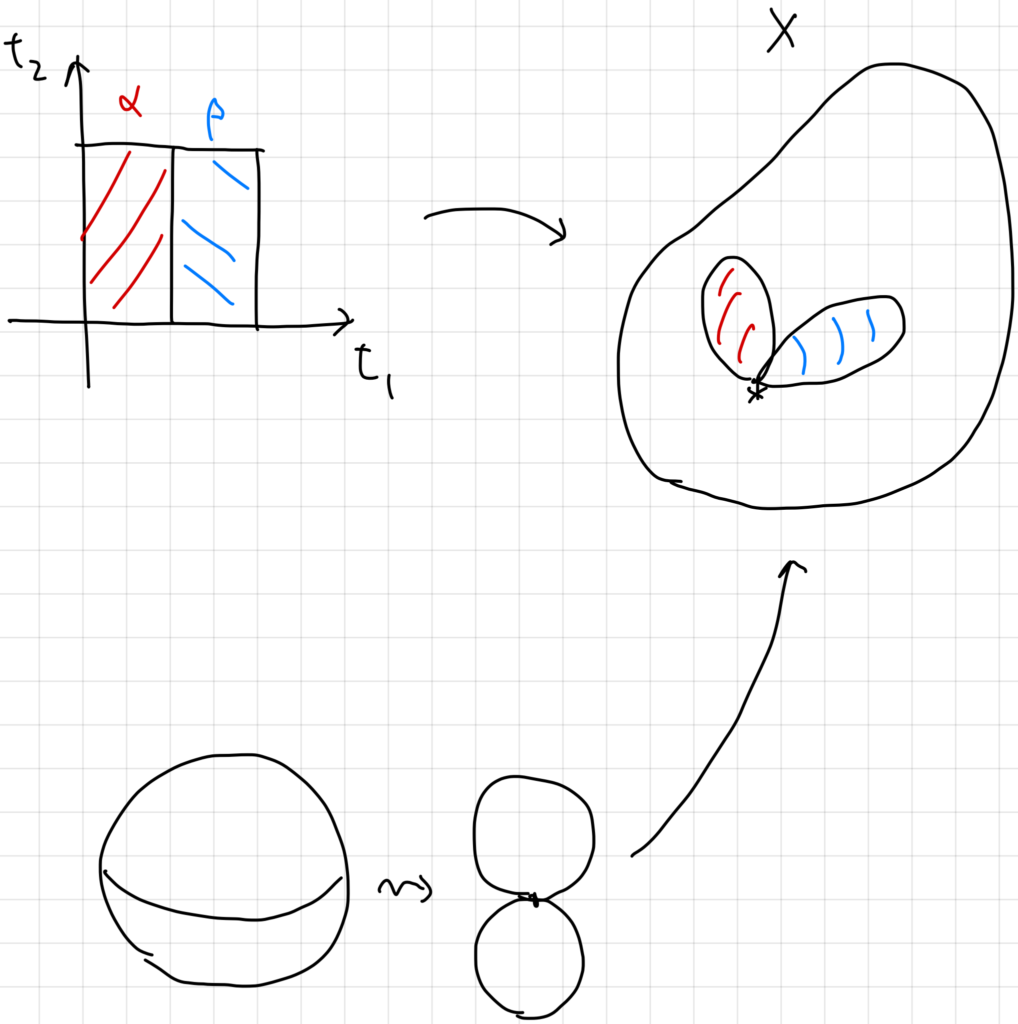
と考えてもよい

$\alpha, \beta : I^q \to X$ 基

$[\alpha], [\beta] \in \pi_q(X)$

$[\alpha][\beta] = [\gamma] \in \pi_q(X)$

$$\gamma(t_1, \ldots, t_q) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_q) & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_q) & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$



Prop. 17.1

(a) $\pi_q(X \times Y) = \pi_q(X) \times \pi_q(Y)$

(b) $q > 1$ で $\pi_q(X)$ はアーベル群

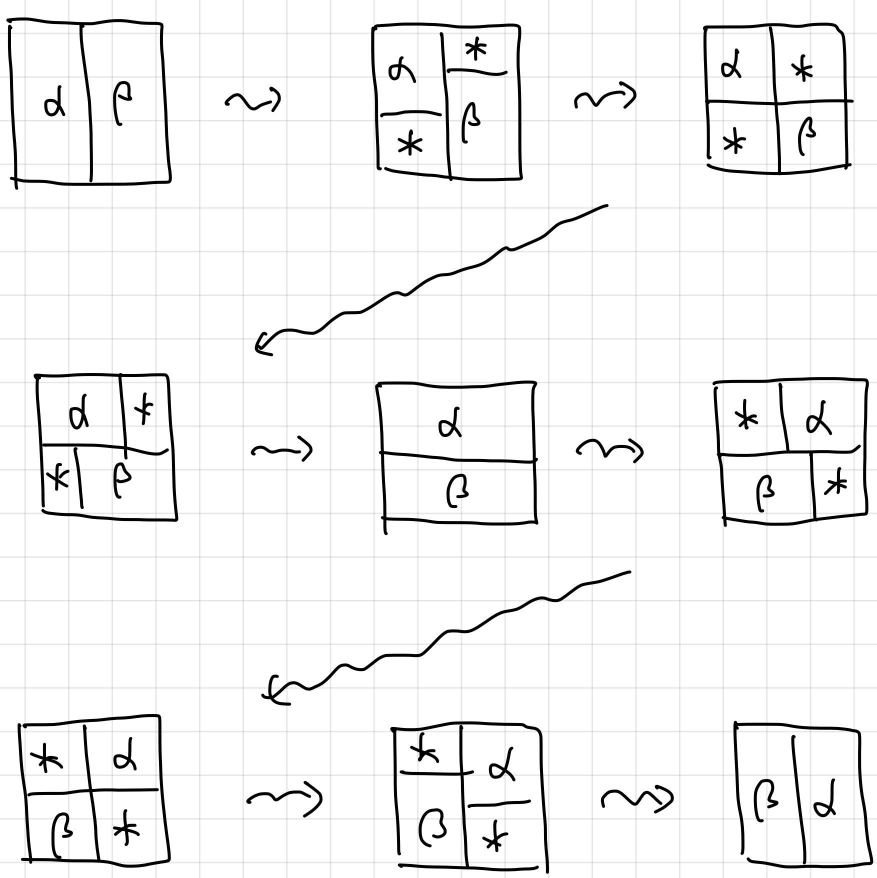
(証)

(a) $f : I^q \longrightarrow X \times Y$

$f = (f_1, f_2)$ $\quad f_1 : I^q \to X, \quad f_2 : I^q \to Y$

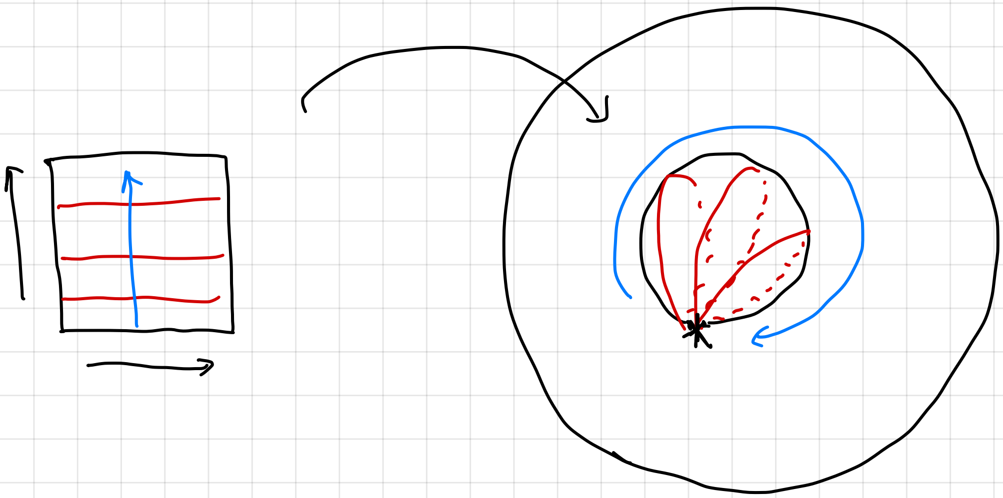
1対1

(b)

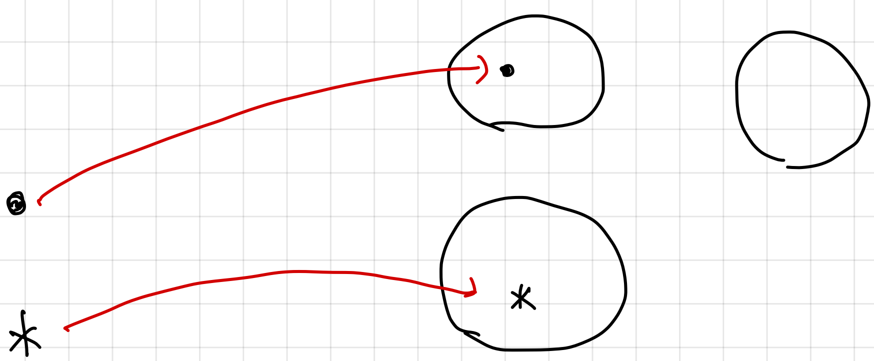


Prop. 17.2

$$\pi_{q-1}(\Omega X) = \pi_q(X) \quad q \geq 2$$



$\pi_0(X) \cong \{X$ の弧状連結成分$\}$



Lie群 G

群である多様体

$g_1, g_2 \in G$ $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2$ C^∞級.

$g_1 \longmapsto g_1^{-1}$

一般に $\pi_0(X)$ は群ではないが

$\pi_0(G)$ は群.

Prop. 17.3

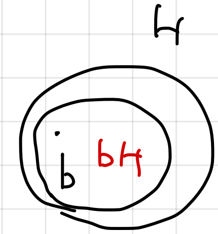
Lie群 G の 1 を含む連結成分 H は G の正規部分群

$\pi_0(G) = G/H$

$a, b \in H$ とする

連結集合の連続写像による像は連結.

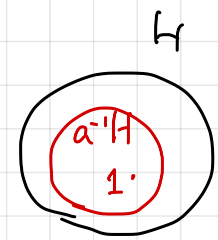
よって bH は連結.



$bH \underset{b}{\cap} H \neq \phi$ だから $bH \subset H$

同様に $abH \subset \underset{ab}{aH} \subset H$ だから $ab \in H$

$a^{-1}H$ は連結で $a^{-1}H \underset{1}{\cap} H \neq \phi$



$1 \in a^{-1}H$ だから $a^{-1}H \subset H$ $\therefore a^{-1} \in H$

よって H は G の部分群

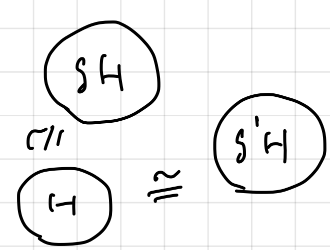
$^\forall g \in G$ $1 \in gHg^{-1}$

よって $gHg^{-1} \subset H$ よって H は正規.

gH は連結

$gH \neq g'H$ のとき gH と $g'H$ は連結ではない.

よって $\pi_0(G) = G/H$.



$\pi : E \to B$ 基点を保つファイバリング

ファイバー $F = \pi^{-1}(\{*\})$

に対し、ファイバリングのホモトピー列

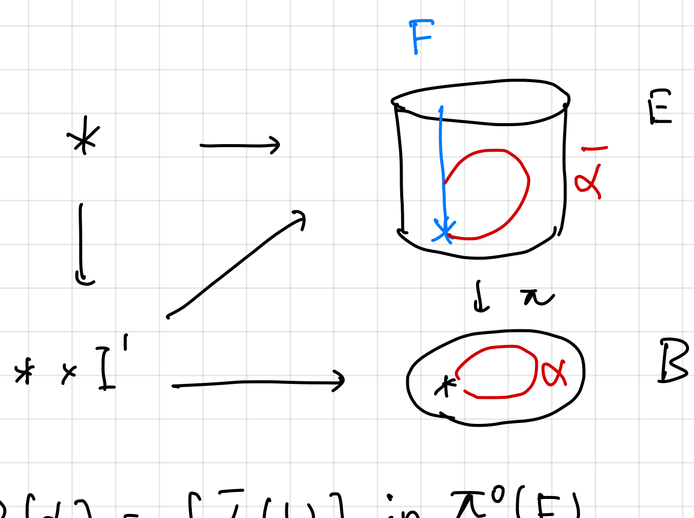
$$\to \pi_q(F) \xrightarrow{i_*} \pi_q(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_q(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{q-1}(F) \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\pi_0(E) \to \pi_0(B)}_{\text{ここ以外は群準同型}} \to 0 \quad ex.$$

kerは基点の逆像とする。

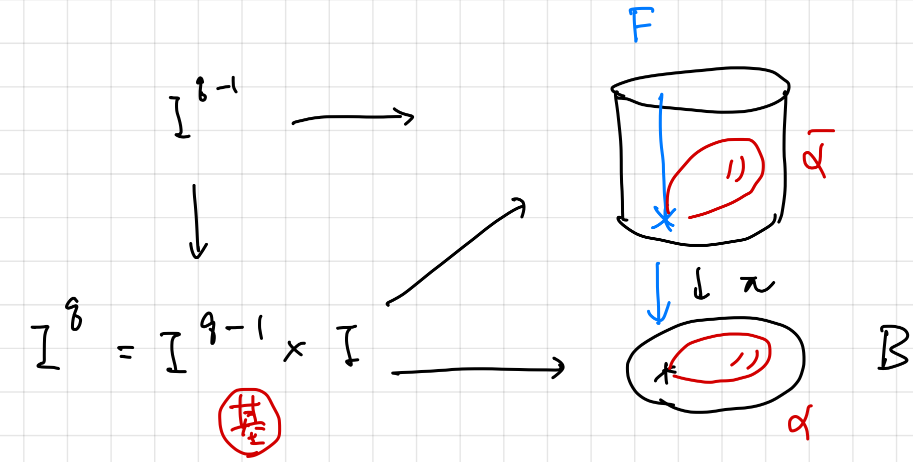
がある。

i_*, π_* は $i : F \hookrightarrow E$, $\pi : E \to B$ から導かれるもの。



$$\partial[\alpha] = [\bar{\alpha}(1)] \text{ in } \pi^0(F)$$

$I^q = I^{q-1} \times I$



α は $\alpha|_{I^{q-1}}$ のホモトピーと考えられる.

$* : I^{q-1} \to E$

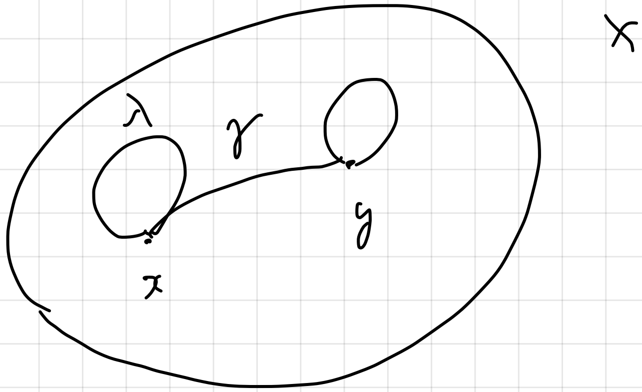
すべて $\longmapsto *$

$t_q = 0$

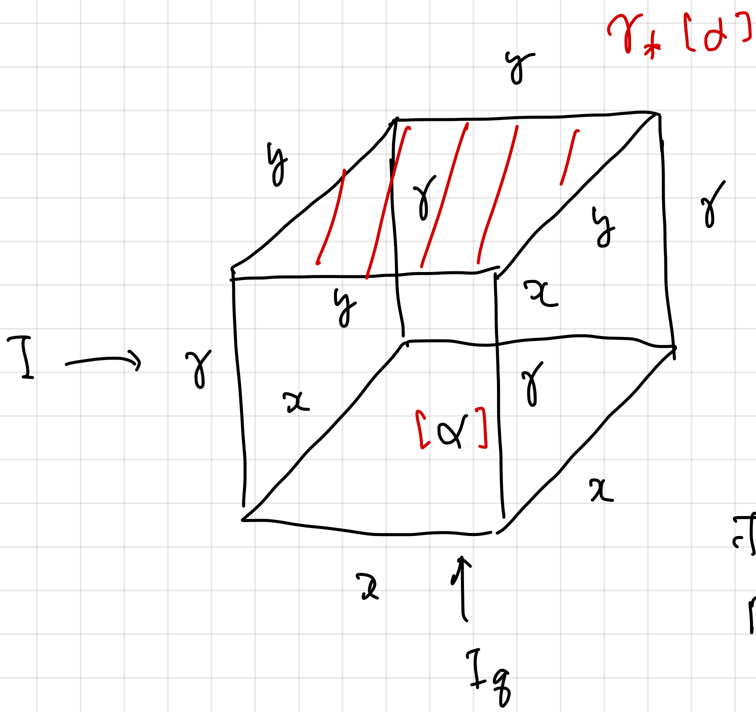
$\bar{\alpha}|_{I^{q-1}} = *$

$\partial[\alpha] = [\bar{\alpha}|_{t_q=1}]$

Warning 17.6



$$\begin{array}{ccc}
\gamma_* : \pi_{q-1}(\Omega_x X, \bar{x}) & \xrightarrow{\text{iso.}} & \pi_{q-1}(\Omega_y X, \bar{y}) \\
\parallel & & \parallel \\
\pi_q(X, x) & & \pi_q(X, y) \\
[\alpha] & & [\gamma \alpha \gamma^{-1}]
\end{array}$$



the box principle

ホモトピー同値なγでは同じものができる。

これは γ の $\pi_1(X, x)$ への作用と考えることができる。

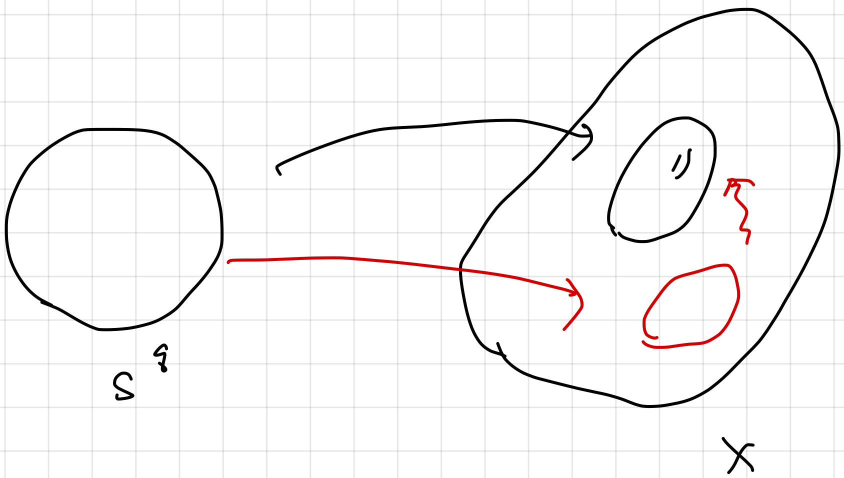
$$[\alpha] \mapsto \gamma_*[\alpha]$$

γ の作用が自明なら

$\pi_q(X, x)$ は x に依らず $\pi_q(X)$ と書ける.

$[S^q, X]$ を考える.

($S^q \to X$ の写像の自由ホモトピー類)



ただし $[S^q, X]$ は群ではない.

Prop. 17.6.1

X : 弧状連結

$$\pi_q(X, x)/\pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} [S^q, X]$$

$[\alpha] \sim \gamma_*[\alpha]$

$\gamma \in \pi_1(X, x)$

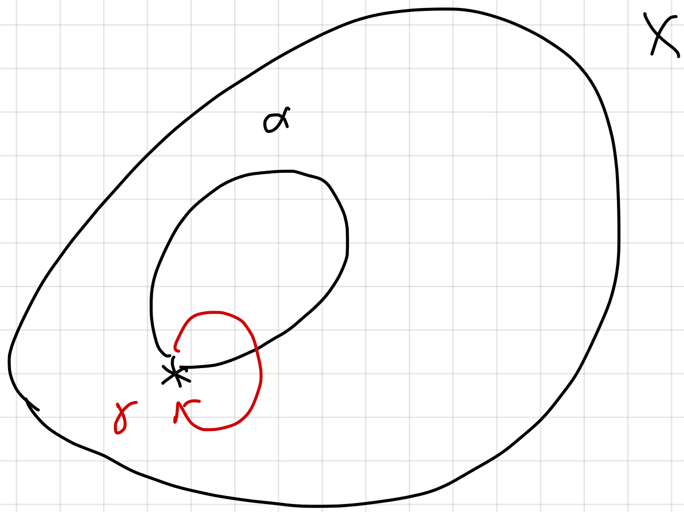
(証)

$h: \pi_q(X, x) \to [S^q, X]$ 基点のことを忘れる.

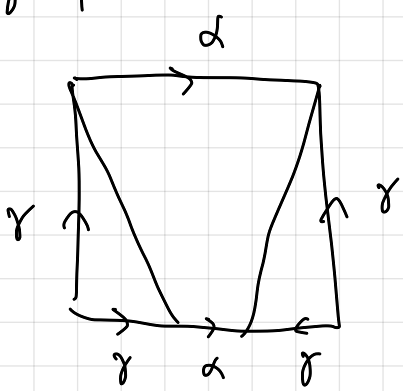
$[\alpha] \in \pi_q(X, x)$

$[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ のとき

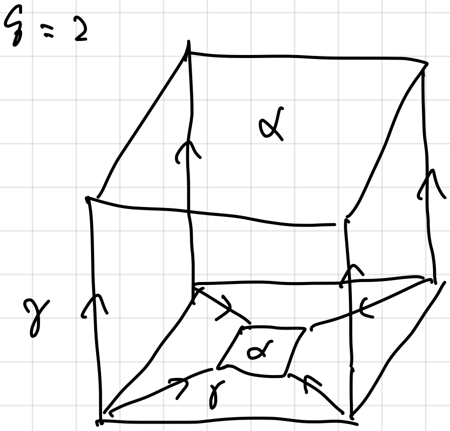
α と $\gamma_* \alpha$ の自由ホモトピーが作れる.



$q = 1$



$q = 2$



$\gamma^{-1} \alpha \gamma$

自由ホモトピー

$h(\gamma^*[\alpha]) = h([\alpha])$ たぶん‥

よって

$$H: \pi_q(X,x)/\pi_1(X,x) \longrightarrow [S^q, X]$$

が導びかれる.

Xが弧状連結なので $[S^q, X]$ の代表元は基点を保つものにとれる.

よってHは全射.

単射性は次のように示される

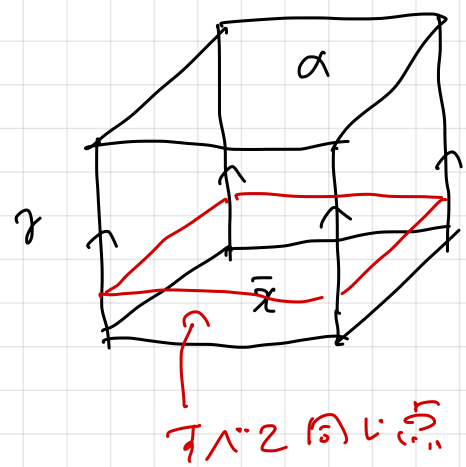
$[\alpha]$ in $\pi_q(X,x)$ が $[S^q, X]$ で 0 に等しいとする.

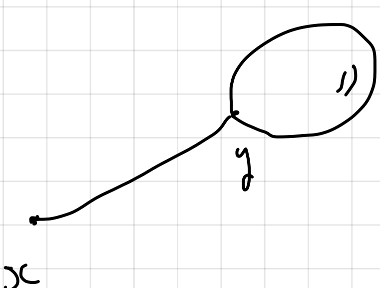
すなわち

$$\exists F: I^{q+1} \to X$$

$$F|_{\text{top face}} = \alpha$$

$$F|_{\text{bottom face}} = \bar{x}$$





$\alpha = \gamma_*(\bar{x})$ 0 in $\pi_q(X,x)/\pi_1(X,x)$

$\alpha \sim \bar{x}$ $\bar{x}$ は 0 と考えている.