Chap. III

スペクトル系列と応用

§14 フィルター付けされた複体のスペクトル系列

完全対 exact couple

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & B \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

A, B : Abelian gr.

i, j, k : gr. homo.

$d = j \circ k : B \to B$

$d^2 = 0$

$H(B) = \ker d / \mathrm{im}\, d$

導来対 derived couple

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & B' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & B \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

(a) $A' = i(A)$, $B' = H(B)$

(b) $i'(ia) = i(ia)$

(c) $a' = ia \in A'$ のとき $j'a' = [ja]$

[ ] $H(B)$ の元の表し方.

・ j' は well-defined　　(c) $a' = ia \in A'$ のとき $j'a' = [ja]$

(i) $d(ja) = j(kj)a = 0$

よって $[ja]$ として良い.

(ii) $a' = ia = i\bar{a}$ のとき

$i(a - \bar{a}) = 0$

$\exists b \in B \quad kb = a - \bar{a}$

$ja - j\bar{a} = jkb = db$

よって $[ja] = [j\bar{a}]$

(d) $[b] \in H(B)$ とする

$jkb = 0$ だから $\exists a \in A \quad kb = ia$

$k'[b] = kb \in i(A) = A'$

$k'[db'] = kdb' = \underbrace{kj}kb' = 0$

これは完全対

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & B' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

・ at B'

・ $\mathrm{im}\, j' \subset \ker k'$　　$ia = a'$

$k'j'(a') = k'[ja] = kja = 0$

・ $\ker k' \subset \mathrm{im}\, j'$

$k'([b]) = 0$ とすると $kb = 0$

$\exists a \in A \quad b = ja$　　　$a' = ia$

$[b] = [ja] = j'a' \in \mathrm{im}\, j'$

- at T_1 A'
  - $\operatorname{im} i' \subset \ker j'$

$$j' i'(a) = j'(i \underbrace{i a'}_{a})$$
$$= (j i a') = 0$$

  - $\ker j' \subset \operatorname{im} i'$

$j' a' = 0$ とする.　　$a' = i a$

$(j a) = 0$　　$ja = jk \overset{\exists}{b}$　　$j(a - kb) = 0$

$a - kb = \overset{\exists}{i} a''$　　$a = i a'' + kb$

$a' = i i a'' + i \cancel{k} b \subset \operatorname{im} i'$

- at T_2 A'

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & B' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

  - $\operatorname{im} k' \subset \ker i'$

$i' k'((b)) = i' k b = i k b = 0.$

  - $\ker i' \subset \operatorname{im} k'$

$i'(i a) = 0$ とする　　$i i a = 0$

$\exists b \in B$　　$i a = k b = k'(b) \subset \operatorname{im} k'$

フィルター付けされた複体のスペクトル系列

The Spectral Sequence of a Filtered Complex

K: 複体

$D: K \to K$ 微分 $\left(K = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k \quad \text{grade} \right)$

グレード

必須ではない

K' が K の部分複体

$DK' \subset K'$

$K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$

filtration

フィルター付け

$GK = \bigoplus_{p=0}^{\infty} K_p / K_{p+1}$ 付随するグレードされた複体

associated graded complex

$p < 0$ のとき $K_p = K$ と定義する。

$$A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_p$$

とするとAも微分複体。

$i : A \to A$ を $K_{p+1} \xhookrightarrow{\text{incl.}} K_p$ とする。

$B = A / \operatorname{im} i = GK$

$K_p > K_{p+1}$

$i : A = \oplus K_{p+1} \xrightarrow{\text{incl.}} A = \oplus K_p$

$0 \to A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \to 0$ ex.

$\operatorname{cok} i = \oplus K_p / K_{p+1}$

$\wr$

K が… グレード付きなら

$\cdots \to H^k(A) \xrightarrow{i_1} H^k(A) \xrightarrow{j_1} H^k(B) \xrightarrow{k_1} H^{k+1}(A) \to \cdots$

これを

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr, "i_1"] & & H(A) \arrow[dl, "j_1"] \\ & H(B) \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

$d_1 = j_1 \circ k_1$

または

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "i"] & & A_1 \arrow[dl, "j_1"] \\ & B_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

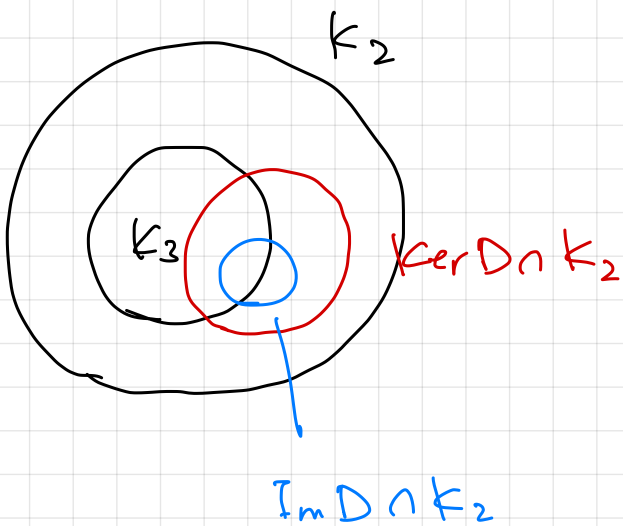
と書く。

これは完全対 $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} A_r \arrow[rr, "i"] & & A_r \arrow[dl, "j_r"] \\ & B_r \arrow[ul, "k_r"] & \end{tikzcd}$$

$$\cdots = K_{-1} = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset 0$$ の場合

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{i} H(K_1) \xleftarrow{i} H(K_2) \xleftarrow{i} H(K_3) \leftarrow 0$$



$$H(K_2) = (\mathrm{Ker}\, D \cap K_2)/(\mathrm{Im}\, D \cap K_2)$$

$$H(K_3) = (\mathrm{Ker}\, D \cap K_3)/(\mathrm{Im}\, D \cap K_3)$$

$$a + \mathrm{Im}\, D \cap K_3 \in H(K_3) \qquad a \in \mathrm{Ker}\, D \cap K_3$$

K_2

$$i \downarrow$$

$$a + \mathrm{Im}\, D \cap K_2 \in H(K_2)$$

$$A_1 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(K_p)$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \xleftarrow{i} iH(K_2) \xleftarrow{i} iH(K_3) \leftarrow 0$$

$$A_2 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \supset iiH(K_2) \xleftarrow{i} iiH(K_3) \leftarrow 0$$

$$A_3 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \supset iiH(K_2) \supset iiiH(K_3) \underset{\supset}{\leftarrow} 0$$

$$A_4 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$A_4 = A_5 = A_6 = \cdots$ $= A_\infty$ と書く.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A_4 \arrow[rr, "i", "\text{incl.}"'] & & A_4 \arrow[dl] \\
& B_4 \arrow[ul, "k_4"] &
\end{tikzcd}$$

ex. coupl. $\rightsquigarrow$ $\operatorname{im} k_4 = \ker i = 0$

$\therefore\ k_4 = 0$

$$B_5 = \ker(jk)_{B_4} / \operatorname{im}(jk)_{B_4} = B_4$$

$\therefore\ B_4 = B_5 = \cdots \qquad = B_\infty$ と書く.

よって

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A_\infty \arrow[rr, "\text{incl.}"] & & A_\infty \arrow[dl] \\
& B_\infty \arrow[ul, "0"] &
\end{tikzcd}$$

ができる.

$$B_\infty = \bigoplus_p (A_\infty)_p / (A_\infty)_{p+1}$$

一般の場合

$= K = K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{i} H(K_1) \xleftarrow{i} H(K_2) \leftarrow \cdots$$

$H(K_p)$ の $H(K)$ 内の像を F_p とすると

$$H(K) = F_0 \supset \underset{iH(K_1)}{F_1} \supset \underset{iiH(K_2)}{F_2} \supset \underset{iiiH(K_3)}{\cdots}$$

これを $H(K)$ 上の誘導されたフィルター付けという。

一般に、$K_l \neq 0$, $K_p = 0$ $p > l$ のとき

K は有限の長さをもつという

このとき先と同様に A_r, B_r はいずれ

変化しなくなる。

特に $B_\infty = \bigoplus_p F_p / F_{p+1}$

$E_1 = H(B)$ $\quad d_1 = j_1 \circ k_1$

$E_2 = H(E_1)$ $\quad d_2 = j_2 \circ k_2$

$\vdots$ と書き、

この $\{E_r, d_r\}$ を スペクトル系列という.

E_rは 大きな rで 一定になる. $\rightsquigarrow E_\infty$

E_∞が フィルター付けされた群 Hに

付随するグレードされた複体 となるとき

このスペクトル系列は Hに収束するという.

Kにグレードがあるとき $K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$

nを次元とよび $K_p^n = K^n \cap K_p$ と書く.

Theo. 14.6

$K = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K^n$, $\{K_p\}$ がフィルター付け

$H_D^*(K)$ が K のコホモロジーで

$$H_D^*(K) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots$$

とフィルター付けされているとする.

n ごとに $\{K_p^n\}$ が有限の長さとすると

$$0 \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} K_{p+1} \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} K_p \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} K_p/K_{p+1} \to 0$$

は $H_D^*(K)$ に収束するスペクトル系列を導く.

(証)

$$A_r = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} i^{r-1} H(K_p)$$

$r \geq p+1$ のとき $i^r H(K_p) = F_p$

$i : i^r H(K_{p+1}) \to i^r (K_p)$ は包含

i, j は次元を変えず

k は1つあげる.

$l(n)$ を $\{K_p^n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ の長さとし $r \geq l(n+1)+1$ とする.

すると $i^r H^{n+1}(K_{p+1}) = F_{p+1}^{n+1}$

$i: i^r H^{n+1}(K_{p+1}) \to i^r H^{n+1}(K_p)$ は包含.

よって $i_r: A_r^{n+1} \to A_r^{n+1}$ も包含

よって $k_r: B_r^n \to A_r^{n+1}$ はゼロ写像

よって r を十分大きくすると B_r は一定になる.

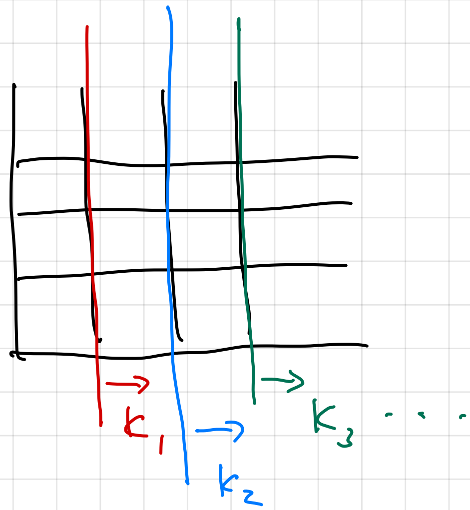
それを B_∞^n とする.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\color{red}F_{p+1}^n}{\bigoplus F_p^n} = A_\infty^n \arrow[rr, "i_\infty"] & & A_\infty^n = \overset{\color{red}F_p^n}{\bigoplus F_p^n} \arrow[dl] \\
& B_\infty^n = \bigoplus F_p^n / F_{p+1}^n \arrow[ul, "0"] &
\end{tikzcd}
$$

2重複体のスペクトル系列

$K = \bigoplus K^{p,q}$, $D = \underset{\delta}{D'} + \underset{(-1)^p d}{D''}$

$K_p = \bigoplus_{i \geq p} \bigoplus_{q \geq 0} K^{i,q}$



$A = \bigoplus_p K_p$ フィルター

$p+q$

$A = \bigoplus_k A^k$ グレード

$i : A^k \cap K_{p+1} \to A^k \cap K_p$ より

$i : A^k \to A^k$ を定義する.

$B = \bigoplus K_p / K_{p+1}$, $D = \underset{\delta}{D'} + \underset{(-1)^p d}{D''}$ を考える.

D on B は $(-1)^p d$ だから

$E_1 = H_D(B) = H_d(K)$

$k_1 : H(B) \longrightarrow H(A)$ の具体的な形

$$\delta b \qquad\qquad Db = \delta b + (-1)^r db = \delta b$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & A^{k+1}\cap K_{p+1} & \longrightarrow & A^{k+1}\cap K_p & \longrightarrow & B^{k+1}\cap K_p/K_{p+1} & \longrightarrow \\
 & \uparrow D & & \uparrow D & & \uparrow D & \\
\longrightarrow & A^{k}\cap K_{p+1} & \longrightarrow & A^{k}\cap K_p & \longrightarrow & B^{k}\cap K_p/K_{p+1} & \longrightarrow \\
 & & & b & & b + K_{p+1} & \\
 & & & & & db = 0 &
\end{array}$$

$A^{k+1}\cap H_D(A)$

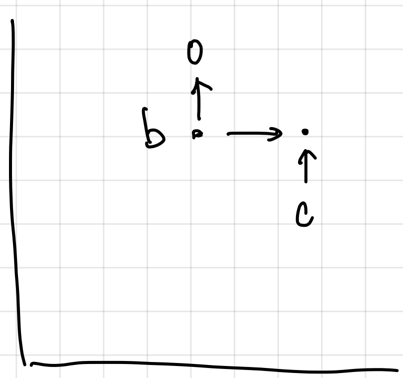
$$k_1 [b + K_{p+1}]_{\underset{d}{D}} = [\delta b]_D$$

$$d_1 [b + K_{p+1}]_D = j_1 k_1 [b + K_{p+1}]_D$$

$$= j_1 [\delta b]_D = [\delta b + K_{p+1}]_{\underset{d}{D}} \qquad \text{in } H_D(B)$$

$$E_2 = H_\delta(E_1) = H_\delta H_d(K)$$

E_2 の元は 次のような $b \in K$ で表せる.



$$db = 0$$

$$\delta b = -D'' \;{}^{\exists}c$$

$$D'' = (-1)^r d$$

$[\ ]_1 = [\ ]_d$
$[\ ]_2 = [[\ ]_d]_\delta$

E_r の元を $[b]_r$ のように表す

$d_2[b+K_{p+1}]_2 = j_2 k_2 [b+K_{p+1}]_2 = j_2 k_1 [b+K_{p+1}]_1$

$j_2(k_1[b+K_{p+1}]_1)$ を出すために

$k'[b] = kb$
$a' = ia$
$j'a' = [ja]$

$k_1[b+K_{p+1}]_1 = i[a]_1$ となる a がほしい．

$k_1 b \in A^{k+1} \cap K_{p+1}$ だから $a \in A^{k+1} \cap K_{p+2}$ であるべき．

ところで $[b+K_{p+1}]_2 = [b+c+K_{p+1}]_2$

$b \in K^{p,q}$ $c \in K^{p+1,q-1}$

$c \in A^k \cap K_p$ だが $c \in K_{p+1}$

$d_2[b+c+K_{p+1}]_2 = j_2 k_2 [b+c+K_{p+1}]_2 = j_2 k_1 [b+c+K_{p+1}]_1$

$$
\begin{aligned}
k_1[b+c+K_{p+1}]_1 &= D(b+c) \\
&= \delta b + D''c + \delta c \\
&= \delta c \\
&= i\,\delta c
\end{aligned}
$$

$\delta c \in K_{p+2}$

$$d_2[b+\cancel{K_{p+1}}]_2 = d_2[b+c+K_{p+1}]_2$$

$$= j_2(i[\delta c]_1)$$

$$= [j'_1 \delta c]_2$$

$$= [\delta c + \cancel{K_{p+1}}]_2$$

しばしば書かない

$dc \neq 0$

$$d\delta c = \delta d c = (-1)^* \delta\delta b = 0$$

cのえらび方をかえる ⇝ 差はdで0 ⇝ $[\ ]=0$

$d_2[b]_2 = 0$ のとき

$\exists c_1, c_2$ s.t. $D''b = 0$

$\delta b = -D''c_1$, $\delta c_1 = -D''c_2$

$$\left\{\begin{array}{l}
d_2[b]_2 = [\delta c]_2 = [[\delta c]_d]_\delta = 0 \\
[b]_2 \in H_\delta H_d(K) \\
db = 0, \quad \delta b = -D''c \\
\exists c' \quad dc' = 0 \quad \delta c = \delta c' + D''c'' \\
c_1 = c - c', \ c_2 = -c'' \text{ とおくと} \\
\delta b = -D''c_1 \quad \delta c_1 = -D''c_2
\end{array}\right.$$

$[[x]_d]_\delta = 0$

$x = \delta y + dz$

$$\begin{array}{ccccc}
b & \to & \cdot & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & c_1 & \to & \cdot \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & c_2
\end{array}$$

$$D(b+c_1+c_2) = \delta b + \overset{\delta c_1}{D c_1} + D''c_1 + \overset{\delta c_2}{D c_2} + D''c_2 = \delta c_2$$

$$d_3[b]_3 = [\delta c_2]_3$$

同様にして.

$$
\begin{tikzcd}
0 & & & \\
b \arrow[u] \arrow[r] & {} & & \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& & c_2 \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & {} \\
& & & c_{r-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$d_r[b]_r = [\delta c_{r-1}]_r$$

$E_r = \bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$ とおくと

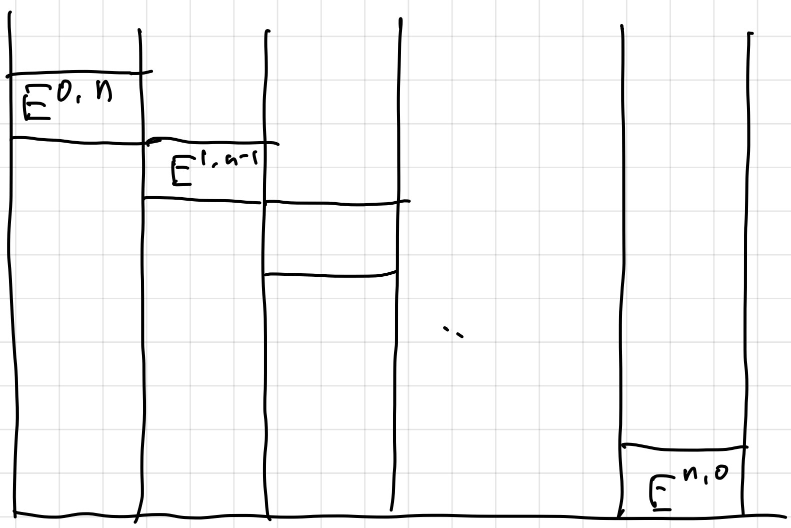
$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

$H(K) = \oplus H^n(K)$

$H(K) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots$ としたので…

$$H^n(K) = \underbrace{(F_0 \cap H^n) \supset (F_1 \cap H^n)}_{E_\infty^{0,n}} \supset \cdots \supset \underbrace{(F_n \cap H^n)}_{E_\infty^{n,0}} \supset 0$$

E_∞



Theo. 14.14

$K = \bigoplus_{p,q \geq 0} K^{p,q}$ に対し、次のような

$H_D(K)$ に収束するスペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ がある.

$$E_r = \bigoplus E_r^{p,q}$$
$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

特に $E_1^{p,q} = H_d^{p,q}(K)$

$$E_2^{p,q} = H_\delta^{p,q} H_d(K).$$

$$G H_D^n(K) = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}(K)$$

Rem 14.15

$d \leftrightarrow \delta$ でも同じことができる.