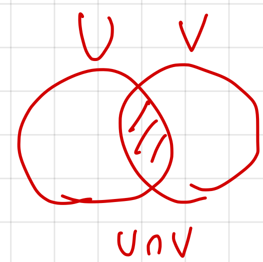
Chap. II チェック・ドラーム複体

§8 一般化されたマイヤー・ヴィートリス原理

<u>マイヤー・ヴィートリス列の形式を変える.</u>

U, V が多様体の開集合のとき

$$U \cup V \leftarrow U \amalg V \leftleftarrows U \cap V$$



から、マイヤー・ヴィートリス列

$$0 \to \Omega^*(U \cup V) \to \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\delta} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

$$(\omega, \tau) \longmapsto \tau - \omega$$

が導かれ、これから

$$\cdots \to H^q(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{\delta} H^q(U \cap V)$$

$$\xrightarrow{d^*} H^{q+1}(U \cup V) \to \cdots$$

が導かれた.

これを拡張するため、形をかえる.

$\mathfrak{U} = \{U, V\}$ として

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \oplus C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \oplus K^{p,q}$$

$$K^{0,q} = C^0(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$$

$$K^{1,q} = C^1(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U \cap V)$$

$$K^{p,q} = 0 \qquad p \geq 2$$

$$\begin{array}{rc|c|c|c|}
q & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \Omega^2(U) \oplus \Omega^2(V) & \Omega^2(U \cap V) & 0 \\
d \uparrow & & & & \\
\hline
\Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \Omega^1(U) \oplus \Omega^1(V) & \Omega^1(U \cap V) & 0 \\
d \uparrow & d \uparrow & & & \\
\hline
\Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V) & \Omega^0(U \cap V) & 0 \\
\hline
 & \xrightarrow{\delta} & K^0 & \xrightarrow{D} K^1 & \xrightarrow{D} K^2 \quad \cdots \quad p
\end{array}$$

$$d\delta = \delta d$$

$M = U \cup V$

$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ として 複体が定義できる.

$$D = \delta + (-1)^p d \quad \text{on } K^{p,q}$$

$$D\omega = \delta\omega + (-1)^p d\omega$$

$$\begin{tikzcd}
(-1)^p d\omega \quad K^{p,q+1} & \\
\omega \quad K^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{p+1,q} \quad \delta\omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
D^2\omega &= D(\delta\omega + (-1)^p d\omega) \\
&= \delta^2\omega + (-1)^{p+1} d\delta\omega + (-1)^p \delta d\omega + (-1)^p(-1)^p d^2\omega = 0
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ コホモロジー $H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$

$r : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \subset C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ とする.

$\omega \longmapsto (\omega|_U , \omega|_V)$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*(M) \arrow[r, "r"] & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \\
\Omega^*(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \arrow[u, "D"']
\end{tikzcd}$$

$d\omega$ $\qquad\qquad$ $p = 0$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{q+1}(M) \arrow[r, "r"] & \left(\Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V)\right) \oplus \Omega^{q}(U \cap V) \\
\Omega^{q}(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "r"'] & \Omega^{q}(U) \oplus \Omega^{q}(V) \arrow[u, "D"']
\end{tikzcd}$$

$((d\omega, d\omega), 0)$

ω $\qquad\qquad$ (ω, ω)

$$Dr = (\delta + (-1)^0 d) r = dr = rd$$

よって $\qquad \Omega^*(M) \qquad C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$

$$r^* : H^*_{DR}(M) \to H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$$

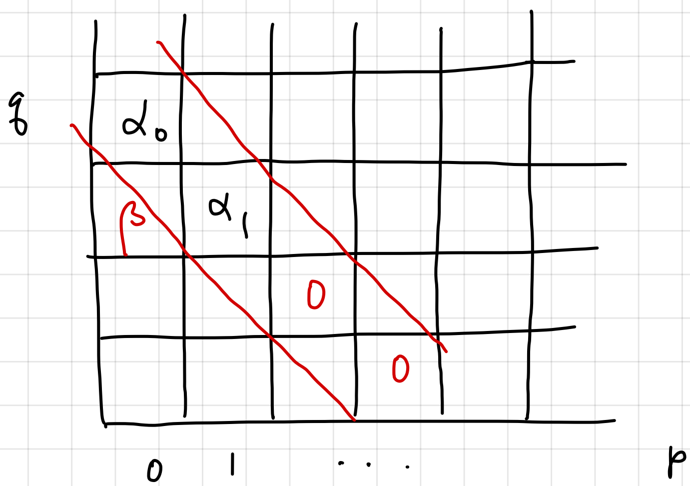
が導かれる.

r は ker は ker に
Im は Im にうつす

Theo. 8.1

$$H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} \simeq H^*_{DR}(M)$$

(証)



$\alpha \in K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ とすると

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \quad \alpha_0 \in K^{0,n}, \quad \alpha_1 \in K^{1,n-1}$

δ は全射的なので $^\exists\beta \quad \delta\beta = \alpha_1$

このとき $\alpha - D\beta = \alpha - (\delta + d)\beta = \alpha_0 - d\beta \in K^{0,n}$

よって $H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$ の元は

$(0, *)$ の形の元で表すことができる.

r^* が同型であることを示す.

(1) 全射性

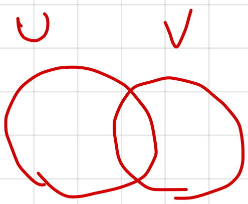
$\phi \in H^n(U) \oplus H^n(V)$

$\forall \phi \in H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$ は $p=0$ と考えてよい.

このとき $D\phi = 0 \iff d\phi = 0, \ \delta\phi = 0$

$\iff \phi$ はグローバル closed フォーム

$(\omega|_U, \omega|_V)$ $\qquad \omega \qquad H^*_{DR}(M)$



(2) 単射性 $\quad$ 0 in コホモロジー

$r(\omega)$	
$\phi_{(\alpha,\tau)}$	
	0
⋮	⋮

$r(\omega) = D\phi$ とする.

ϕ も $p=0$ 成分のみとできる.

$r(\omega) = d\phi \qquad \delta\phi = 0$

$(\omega|_U, \omega|_V) \qquad (d\alpha, d\tau) \qquad$ α と τ は $U \cap V$ 上で一致.

ω は グローバル exact フォーム

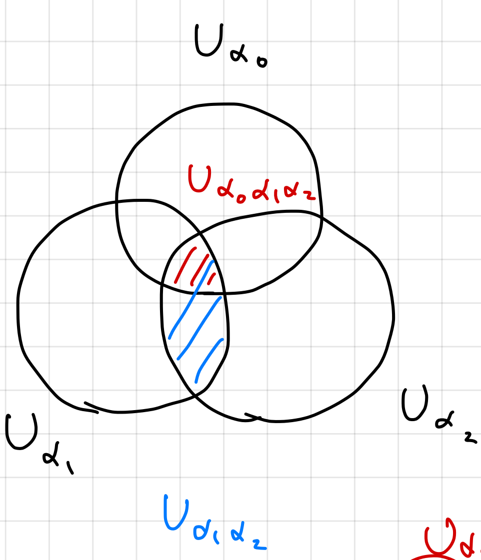
∎

可算個の開集合への拡張

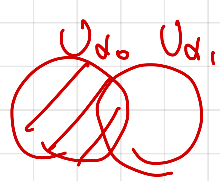
$U_\alpha \cap U_\beta \rightsquigarrow U_{\alpha\beta}$ と書く.

$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightsquigarrow U_{\alpha\beta\gamma}$

$$M \leftarrow \coprod U_{\alpha_0} \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\leftleftarrows}} \coprod_{\alpha_0<\alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \overset{\partial_0, \partial_1}{\underset{\partial_2}{\leftleftarrows \leftarrow}} \coprod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \leftleftarrows\leftleftarrows \cdots$$



$\partial_0 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1\alpha_2}$



ω

$$\Omega^*(M) \to \prod \Omega^*(U_{\alpha_0}) \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \overset{\delta_0, \delta_1}{\underset{\delta_2}{\rightrightarrows \rightarrow}} \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \cdots$$

制限

$\delta_0, \delta_1, \ldots \rightsquigarrow \delta$ 差.

Def. 8.2

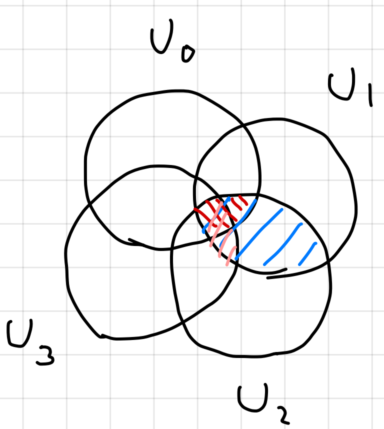
$\omega \in \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ とすると、その成分は

$\omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ のように書ける.

このとき

$$\underbrace{(\delta\omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}}}_{\text{足 } p+1 \text{ 個}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \cdots \overset{\text{とる}}{\hat{\alpha_i}} \cdots \alpha_{p+1}}$$

例

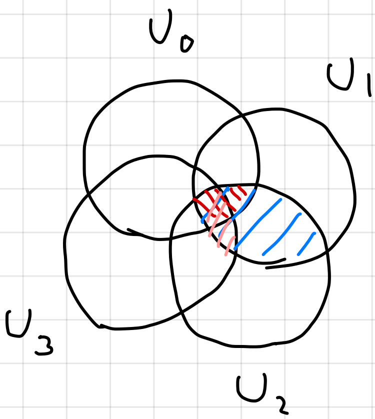


$$\omega \in \overset{(\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)}{\Omega^*(U_0) \times \cdots \times \Omega^*(U_3)}$$

$$\delta\omega \in \Omega^*(U_{01}) \times \Omega^*(U_{02}) \times \Omega^*(U_{03}) \times \Omega^*(U_{12}) \times \Omega^*(U_{13}) \times \Omega^*(U_{23})$$

$$(\delta\omega)_{01} = \delta_0 \omega_1 - \delta_1 \omega_0$$
$$(\delta\omega)_{02} = \delta_0 \omega_2 - \delta_2 \omega_0$$

$(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23})$



$$\omega \in \Omega^*(U_{01}) \times \Omega^*(U_{02}) \times \Omega^*(U_{03}) \times \Omega^*(U_{12}) \times \Omega^*(U_{13}) \times \Omega^*(U_{23})$$

$$\delta$$

$$\delta\omega \in \Omega^*(U_{012}) \times \Omega^*(U_{013}) \times \Omega^*(U_{023}) \times \Omega^*(U_{123})$$

$$(\delta\omega)_{012} = \omega_{12} - \omega_{02} + \omega_{01}$$

$$(\delta\omega)_{013} = \omega_{13} - \omega_{03} + \omega_{01}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Prop. 8.3

$$\delta^2 = 0$$

(証)

$$(\delta^2 \omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+2}} = \sum_i (-1)^i (\delta \omega)_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \omega_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \omega_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_{p+2}}$$

$$= 0$$

$\delta\omega = 0$ ω は cocycle

$\omega = \delta\tau$ ω は coboundary

という.

これまで $\omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$ は $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ としてた。

これからは自由とする。

ただし $\omega_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots} = -\omega_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots}$ とする。

Ex. 8.4

$$\underbrace{(\delta\omega)_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots}}_{\shortparallel} = -\underbrace{(\delta\omega)_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots}}_{\shortparallel}$$

$$\sum (-1)^i \omega_{\cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha \cdots \beta \cdots}$$

$$\sum (-1)^i \omega_{\cdots \hat{\alpha}_i \cdots \beta \cdots \alpha \cdots} \qquad + \sum (-1)^i \omega_{\cdots \alpha \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \beta \cdots}$$

$$+ \sum (-1)^i \omega_{\cdots \beta \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha \cdots} \qquad + \sum (-1)^i \omega_{\cdots \alpha \cdots \beta \cdots \hat{\alpha}_i \cdots}$$

$$+ \sum (-1)^i \omega_{\cdots \beta \cdots \alpha \cdots \hat{\alpha}_i \cdots}$$

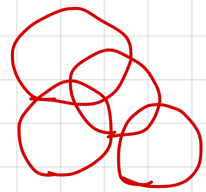
Prop. 8.5　一般化されたマイヤー・ヴィートリス列

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \to \cdots$$

ω　　$(\omega|_{U_{\alpha_0}}, \omega|_{U_{\alpha_1}}, \cdots)$

は完全列.

(証)



$$\Omega^*(M) = \ker \delta$$

$\{\rho_\alpha\}$ を $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ に従う1の分割とする.

$\omega \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$　　$\delta\omega = 0$ とする.

$\tau_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}}$ とおく.

$$(\delta\tau)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_i (-1)^i \tau_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$

$$= \sum_{i,\alpha} (-1)^i \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$

$$(\delta\omega)_{\alpha\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} + \sum (-1)^{i+1} \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p} = 0$$

だから

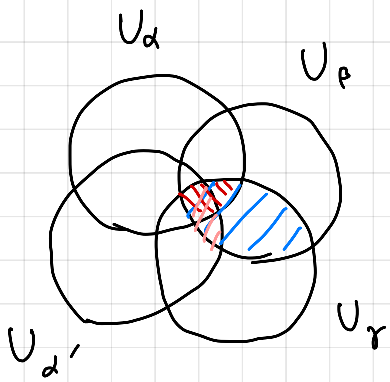
$$(\delta\tau)_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_p}$$

$$= \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$$

$(K\omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}}$ とすると

$K : \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}) \to \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}})$

例



$\omega \in \Omega^*(U_{\alpha\beta\gamma}) \times \Omega^*(U_{\alpha'\beta\gamma})$
$\times \Omega^*(U_{\alpha\alpha'\beta}) \times \Omega^*(U_{\alpha\alpha'\gamma})$

$(K\omega)_{\beta\gamma} = \rho_\alpha \omega_{\alpha\beta\gamma} + \rho_{\alpha'} \omega_{\alpha'\beta\gamma} \subset \Omega^*(U_{\beta\gamma})$

$\delta K + K \delta = 1$

p.94 Prop. 8.5 の下.

$$\begin{array}{rcccc}
 & q & & & \\
0 \to \Omega^2(M) \xrightarrow{r} & K^{0,2} & K^{1,2} & K^{2,2} & \\
0 \to \Omega^1(M) \xrightarrow{r} & K^{0,1} & K^{1,1} & K^{2,1} & \\
0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{r} & K^{0,0} & K^{1,0} & K^{2,0} & \\
 & & & & p
\end{array}$$

$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$ の元を

qフォームに値をもつ被覆$\mathfrak{U}$上のpコチェインという.

$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d$$

$D\phi = 0$ となるϕをDコサイクルという.

$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
a \arrow[u] \arrow[r] & 0 & & \\
 & b \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
 & & c \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\phi = a + b + c$$

$\phi = D\omega$ のとき ϕをDコバンダリーという.

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{p,q \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q)$$ を

チェック

Čech-de Rham 複体という.

$Dr = (\delta + d) r = dr = rd$ より
r^* が導かれる.

Prop. 8.8

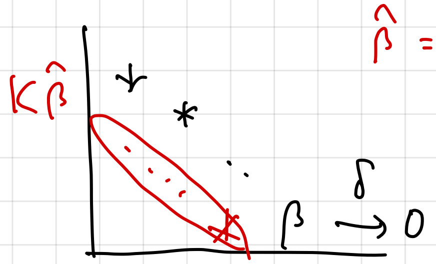
$r^* : H^*_{DR}(M) \longrightarrow H_0\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$ は同型.

(証)

(1) 全射性

$D\phi = 0$ とする.

$\hat{\beta} = (0, 0 \cdots, 0, \beta)$

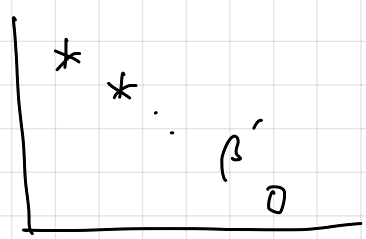


ϕ の1番下の成分 β は
δ を作用させると 0

$\delta K + K\delta = 1$ より $\delta K\hat{\beta}$ の1番下は β

よって $\phi - DK\hat{\beta}$ の1番下の成分は 0

$\delta + (-1)^p d$



このとき $\phi - D\beta$ の1番下の成分に同じことをして
それをくりかえすと $\phi - DX = \phi'$ で
ϕ' は1番上の成分のみにできる.
このとき $D\phi' = 0 \Leftrightarrow d\phi' = 0,\ \delta\phi' = 0$
$\Leftrightarrow \phi'$ はグローバル closed フォーム.

(2) 単射性

$r(\omega) = D\phi$ とする。

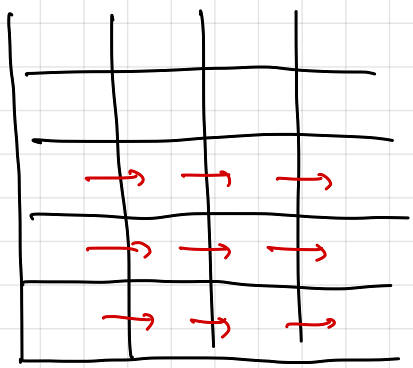
ϕ は1番上の成分のみ non zero とできる。

このとき $\delta\phi = 0$ だから $r(\omega) = d\phi$ で

ω は グローバル exact フォームであることがわかる。 $\lrcorner$

一般に2重複体で横方向が完全なら

全複体のコホモロジーは右端のコホモロジーと同じ



$$
\begin{tikzcd}
 & & q & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^2(M) \arrow[r, "r"] & \prod \Omega^2(U_{\alpha_0}) & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[r] & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0}) & \prod(\Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1})) & \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0}) \arrow[r, phantom, "\delta"] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, phantom, "\delta"] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \arrow[r, phantom, "\delta"] & p \\
 & & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u] \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u] \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, "i"'] \arrow[r] & {} \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

ex. ではない

$C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ は $U_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ 上の局所定数関数たち.

$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to$ の

コホモロジー $H^*(\mathcal{U},\mathbb{R})$ をこの被覆の

チェックコホモロジーという.

もし縦方向の列が完全なら

$$H^*(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_D(C^*(\mathcal{U},\Omega^*)) \simeq H^*_{DR}(M)$$

縦方向の完全性は

$$\prod_{\substack{q \geq 1 \\ \alpha_0 < \cdots < \alpha_p}} H^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$$

が0かどうかで決まる.

Theo. 8.9

$\mathfrak{U}$が多様体Mのgood coverのとき

$$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$$

Cor. 8.9.1

$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$は$\mathfrak{U}$がgood coverなら

任意の$\mathfrak{U}$について同じ$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$を与える.

Cor. 8.9.2

コンパクト多様体Mに対し, $H^*_{DR}(M)$は有限次元.

Cor. 8.9.3

Mが有限なgood coverをもつなら$H^*_{DR}(M)$は

有限次元.

§9 マイヤー・ヴィートリス原理の応用

$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ を多様体 M の good cover とする.

$\mathfrak{U}$ の nerve を次のように定義する.

各 U_α に 頂点 α を対応させ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき

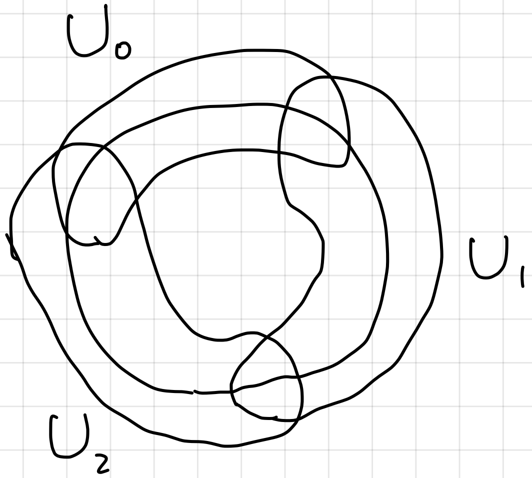
α と β を辺でつなぐ.

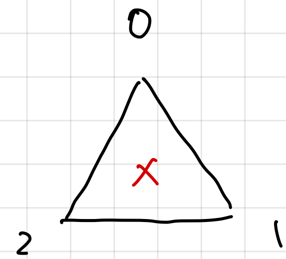
$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$ とき 三角形 $\alpha\beta\gamma$ の面があるとする.

有限の共通部分に対し これをくりかえしたものを

$\mathfrak{U}$ の nerve とよび $N(\mathfrak{U})$ と書く.

Ex. 9.1 円 S^1





nerve

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \mid \omega_\alpha \text{ は } U_\alpha \text{ 上の定数}\}$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{(\eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{12}) \mid \eta_{\alpha\beta} \text{ は } U_{\alpha\beta} \text{ 上の定数}\}$$

$$\delta : C^0 \to C^1$$

$$(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \mapsto (\omega_1 - \omega_0,\ \omega_2 - \omega_0,\ \omega_2 - \omega_1)$$

$$\ker \delta = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \mid \omega_0 = \omega_1 = \omega_2\} = \mathbb{R}$$

$$H^0(S^1) = \mathbb{R}$$

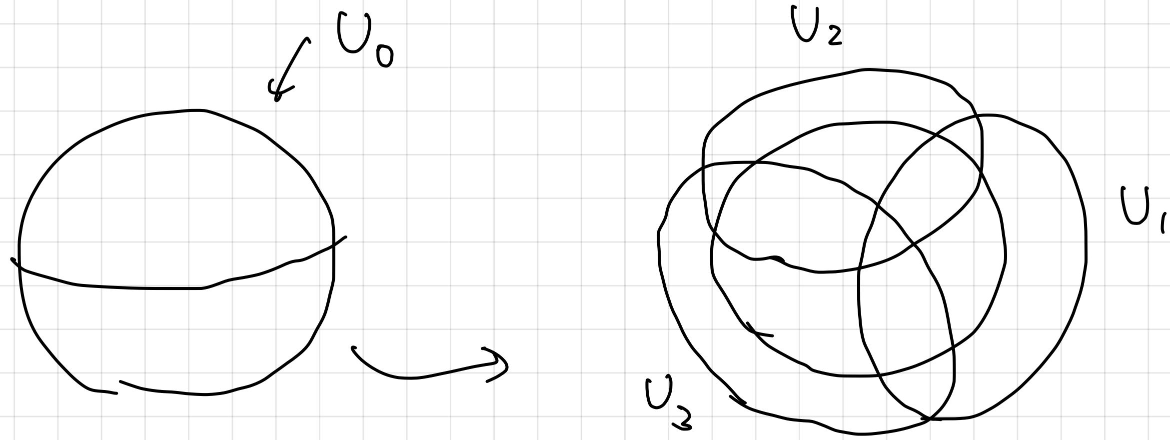
$$\operatorname{im} \delta = \mathbb{R}^2 \qquad H^1(S^1) = \mathbb{R}^3 / \operatorname{im} \delta = \mathbb{R}$$

Ex. 9.2 nontrivial 1-cocycle on S^1

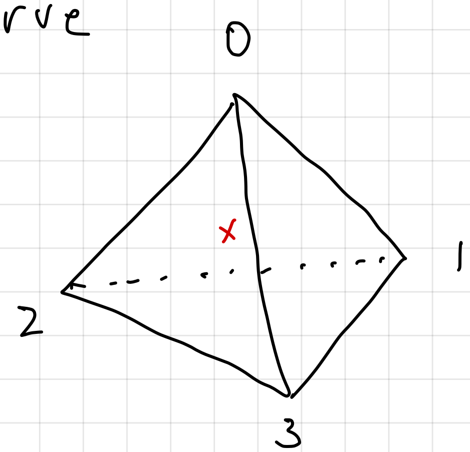
$$\delta \eta = \eta_{01} - \eta_{02} + \eta_{12} = 0$$

$(1, 0, 0)$ は nontrivial 1-cocycle

Ex. 9.3 S^2



nerve



$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

$$\underset{0}{\mathbb{R}} \oplus \underset{1}{\mathbb{R}} \oplus \underset{2}{\mathbb{R}} \oplus \underset{3}{\mathbb{R}} \qquad \underset{01}{\mathbb{R}} \oplus \underset{02}{\mathbb{R}} \oplus \underset{03}{\mathbb{R}} \oplus \underset{12}{\mathbb{R}} \oplus \underset{13}{\mathbb{R}} \oplus \underset{23}{\mathbb{R}} \qquad \underset{012}{\mathbb{R}} \oplus \underset{013}{\mathbb{R}} \oplus \underset{023}{\mathbb{R}} \oplus \underset{123}{\mathbb{R}}$$

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$$

$$\underset{0}{\mathbb{R}}\oplus\underset{1}{\mathbb{R}}\oplus\underset{2}{\mathbb{R}}\oplus\underset{3}{\mathbb{R}} \qquad \underset{01}{\mathbb{R}}\oplus\underset{02}{\mathbb{R}}\oplus\underset{03}{\mathbb{R}}\oplus\underset{12}{\mathbb{R}}\oplus\underset{13}{\mathbb{R}}\oplus\underset{23}{\mathbb{R}} \qquad \underset{012}{\mathbb{R}}\oplus\underset{013}{\mathbb{R}}\oplus\underset{023}{\mathbb{R}}\oplus\underset{123}{\mathbb{R}}$$

δ_0

$$\begin{array}{c} \\ 01 \\ 02 \\ 03 \\ 12 \\ 13 \\ 23 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

δ_1

$$\begin{array}{c} \\ 012 \\ 013 \\ 023 \\ 123 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 01 & 02 & 03 & 12 & 13 & 23 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\operatorname{rank} \delta_1 = 3$

$\operatorname{rank} \delta_0 = 3$

$\ker \delta_0 = \mathbb{R}$

$\operatorname{im} \delta_0 = \mathbb{R}^3$

$\ker \delta_1 = \mathbb{R}^3$

$\operatorname{im} \delta_1 = \mathbb{R}^3$

$H^0(S^2) = \ker \delta_0 = \mathbb{R}$

$H^1(S^2) = \ker \delta_1 / \operatorname{im} \delta_0 = 0$

$H^2(S^2) = \mathbb{R}^4 / \operatorname{im} \delta_1 = \mathbb{R}$