ハーツホーン
ノート

準備

環

集合 R が 加法 $+$，乗法 $\cdot$ をもつ

$+$ に関して可換群（単位元 0）で，

$\cdot$ に関してモノイド（単位元 1）で，

さらに次をみたすとき R は環という．

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

$1 = 0$ のとき $R = \{0\}$ であり 零環という　0とも書く．

$^\forall x, y \in R$ で $x \cdot y = y \cdot x$ が成り立つとき

R は可換環という

例　$\mathbb{Z}$ は可換環

$$\mathbb{R}[X] = \{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

以下 環は断わらない限り可換環のこととする．

整域

$R \neq \{0\}$ で 0 以外に零因子をもたない環を整域という.

環準同型写像

2つの環 R, R' の間の写像 $f: R \to R'$ が

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(xy) = f(x)f(y)$

(3) $f(1) = 1'$　　$1 \in R$, $1' \in R'$

をみたすとき f を環準同型写像という.

f が全単射のとき f を環同型写像という.

このとき $R \simeq R'$ と書く.

$f(0) = 0'$ である.

イデアル

環 R の部分集合 I が

$$x, y \in I \Rightarrow x+y \in I$$

$$x \in I, a \in R \Rightarrow ax \in I$$

をみたすとき I を R のイデアルという.

例 $3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアル

剰余環

$x \in R$ に対し $\bar{x} = x + I$ とおき

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy}$$

とすると これは環になる.

これを R の I による剰余環といい R/I と書く.

例 $\mathbb{Z}_3$ は環.

イデアルの生成

環 R の部分集合 S に対して

$$RS = \{ \underset{\text{有限和}}{\sum} a_i x_i \mid a_i \in R,\ x_i \in S \}$$

は R のイデアルになる。

これを S が生成するイデアルという。

単項イデアル整域 PID

すべてのイデアルが1つの元で生成される整域。

例

- $\mathbb{Z}$

  イデアルはすべて $\mathbb{Z}m$ と書ける。

- $k[x]$　k 体。

  イデアルはすべて $k[x]f$ と書ける。

ネーター環

すべてのイデアルが(加群として)有限生成な環

例)

- 体.
- $\mathbb{Z}$
- PID
- $k[x_1, \ldots, x_n]$

Ker, Im

環準同型写像 f に対し $f^{-1}(0)$ はイデアルになる.

$f^{-1}(0)$ を $\mathrm{Ker} f$ と書く.

また $f(R)$ を $\mathrm{Im} f$ と書く.

準同型定理

$f : R \to R'$ が環準同型写像のとき

$$\bar{f} : R/\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$$
$$x + \mathrm{Ker} f \longmapsto f(x)$$

は同型写像

体

環Rで0以外の元が存在し、それらがすべて乗法に関する逆元をもつときRは体という。

例

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$や$\mathbb{C}$は体。

$\mathbb{Z}$は環だが体ではない

代数的閉体

kを体とする。

$f \in k[X]$に対し$f=0$が必ずk内に解をもつときkを代数的閉体という。

$\mathbb{C}$は代数的閉体。

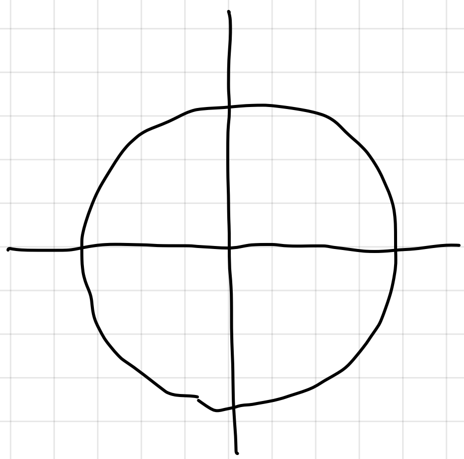
以下断わらない限り体は代数的閉体とする。

はじめに．

$\mathbb{C}$

$$x^2+y^2-1 \in \mathbb{R}[x,y]$$

$x^2+y^2-1=0 \rightsquigarrow$ 図形



$\mathbb{C}[x,y]$ 環

$\mathbb{C}[x,y](x^2+y^2-1)$ は $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル

Chap. 1 多様体

1.1 アフィン多様体

k : 代数的閉体

<u>k 上のアフィン n 空間　$\mathbb{A}^n_k$</u>
略

$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ 点、

$f \in k[x_1, \ldots, x_n] = A$ と書く。
n 変数多項式環　ネーター環

<u>零点集合</u>

$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$

$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid {}^\forall f \in T, f(P) = 0\}$　$T \subset A$

$AT = \mathfrak{a}$

T によって生成されるイデアルを $\mathfrak{a}$ とすると

$Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(f_1, \ldots, f_n)$

$\mathfrak{a}$ の生成元

代数的集合

$Y \subset A^n$ が $\exists T \subset A$　$Y = Z(T)$ のとき

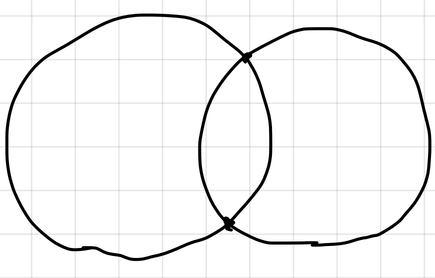
Y は 代数的集合という.

Prop. 1.1

2つの代数的集合の和は代数的.

代数的集合の任意の族の交わりは代数的.

空集合, 全空間は代数的.



(証)

$Y_1 = Z(T_1)$, $Y_2 = Z(T_2)$ とすると.

$Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$

よって $Y_1 \cup Y_2$ も代数的集合.

$Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ とすると $\cap Y_\alpha = Z(\cup T_\alpha)$

よって $\cap Y_\alpha$ も代数的集合.

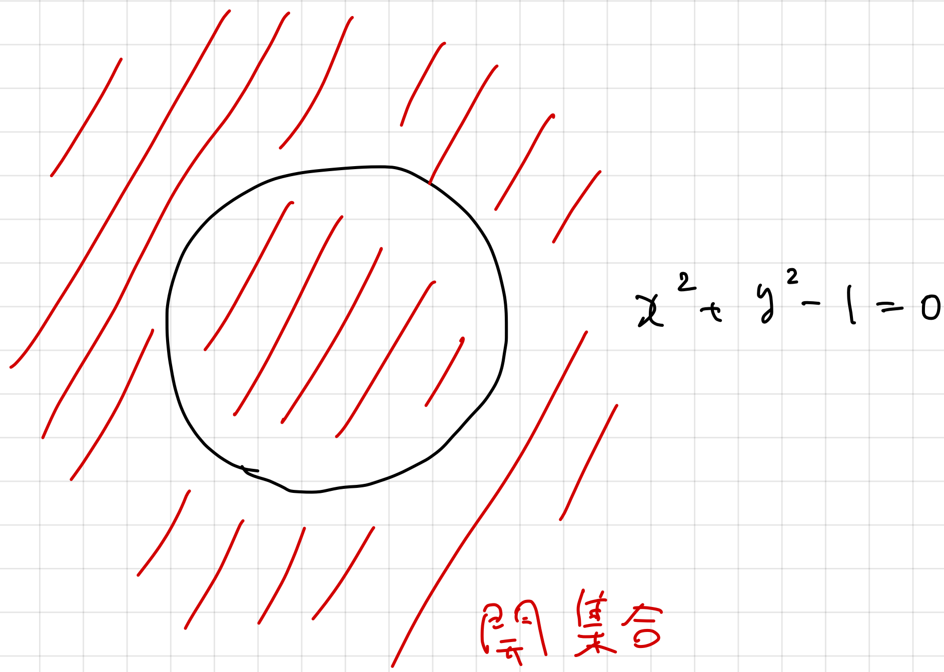
$\phi = Z(1)$, $A^n = Z(0)$ だから

ϕ, A^n も代数的集合.

$\mathbb{A}^n$ 上の Zariski 位相.

代数的集合を閉集合とする位相.

イメージ



例 1.1.1

$\mathbb{A}^1$ 上 の Zariski 位相.

$k[x]\ f$

$A = k[x]$ は PID. 任意のイデアル $\mathfrak{a} = (f)$

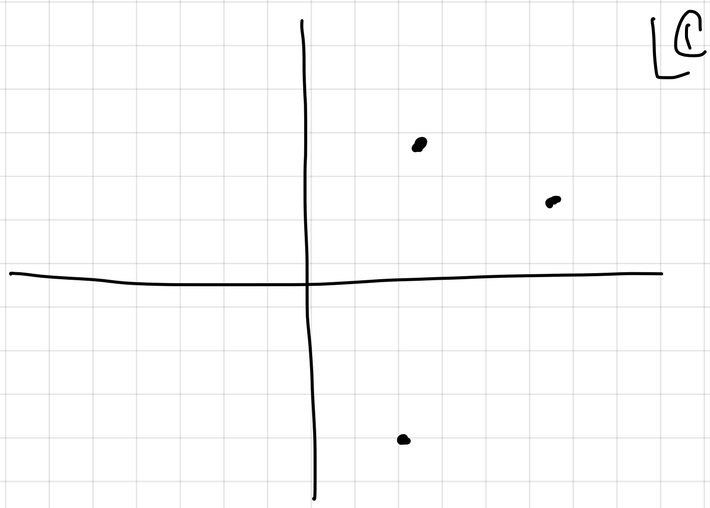
k は代数的閉体だから $f = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

$\therefore\ Z(\mathfrak{a}) = Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$Z(1) = \phi$.

$Z(0) = \mathbb{A}^1$

よって $\mathbb{A}^1$ の閉集合は, ϕ, 有限部分集合, 全体.



既約

位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約とは

Y において閉であるような2つの真部分集合

Y_1, Y_2 を使って $Y = Y_1 \cup Y_2$ と書けないということ.

空集合は既約とみなさない.

例 1.1.2

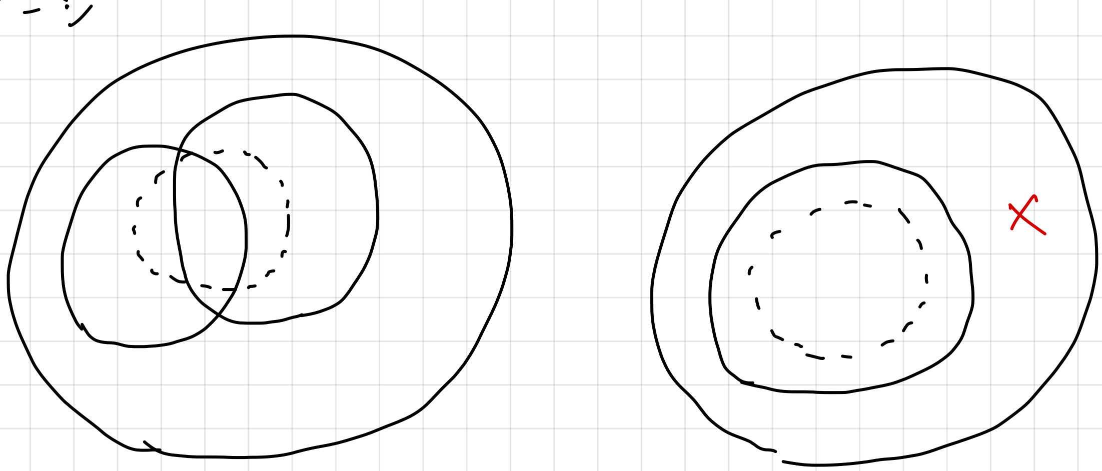
A^1 は既約

例 1.1.3

既約な空間の空でない開部分集合は

既約かつ稠密.

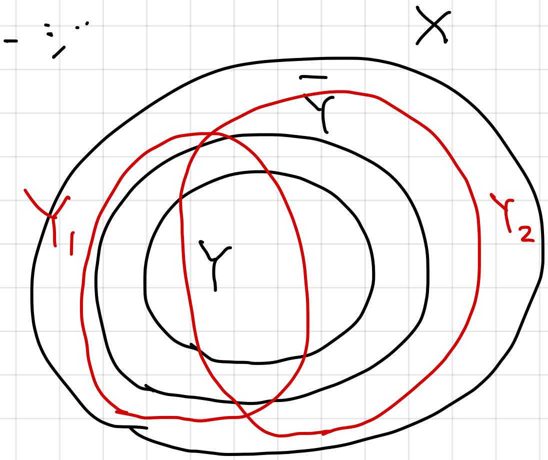
イメージ



例1.1.4

YがXの既約部分集合なら Xにおける閉包 $\overline{Y}$ も既約.

イメージ



$\overline{Y} = (Y_1 \cap \overline{Y}) \cup (Y_2 \cap \overline{Y})$, Y_1, Y_2 閉

$Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$, $Y_2 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ とする

このとき $Y = (Y_1 \cap Y) \cup (Y_2 \cap Y)$ となる.

$Y_1 \cap Y = Y$ とすると $\overline{Y} \subset Y_1$

← Yを含む最小の閉集合

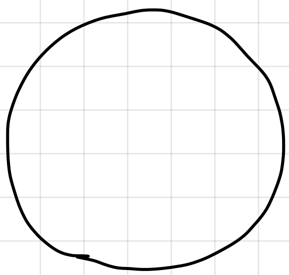
これは $Y_1 \cap \overline{Y} \neq \overline{Y}$ と矛盾. よって $Y_1 \cap Y \neq Y$

$Y_2 \cap Y \neq Y$ も同様

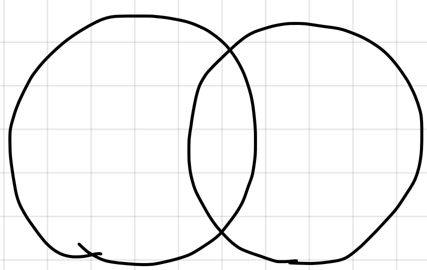
よって Y は既約でなくなり矛盾

アフィン代数多様体

$\mathbb{A}^n$の既約閉部分集合に誘導位相をいれたもの.



$x^2+y^2-1=0$



既約でないから違う.

アフィン多様体の開部分集合を準アフィン多様体という.