Chap. III
スペクトル系列と応用

§14 フィルター付けされた複体のスペクトル系列

完全対 exact couple

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\
& B \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}
$$

A, B : Abelian gr.

i, j, k : gr. homo.

$d = j \circ k : B \to B$

$d^2 = 0$

$H(B) = \ker d / \operatorname{im} d$

導来対 derived couple

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\
& B' \arrow[ul, "k'"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\
& B \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}
$$

(a) $A' = i(A)$, $B' = H(B)$

(b) $i'(ia) = i(ia)$

(c) $a' = ia \in A'$ のとき $j'a' = [ja]$

[ ] H(B)の元の表し方.

・j' は well-defined　　(c) $a' = ia \in A'$ のとき $j'a' = [ja]$

(i) $d(ja) = j(kj)a = 0$

よって $[ja]$ として良い.

(ii) $a' = ia = i\bar{a}$ のとき

$i(a - \bar{a}) = 0$

$^\exists b \in B \quad kb = a - \bar{a}$

$ja - j\bar{a} = jkb = db$

よって $[ja] = [j\bar{a}]$

(d) $[b] \in H(B)$ とする

$jkb = 0$ だから $^\exists a \in A \quad kb = ia$

$k'[b] = kb \in i(A) = A'$

$k'[db'] = kdb' = \underbrace{kj}kb' = 0$

これは完全対

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & B' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

・<u>at B'</u>

・$\mathrm{im}\, j' \subset \ker k'$　　$ia = a'$

$k'j'(a') = k'[ja] = kja = 0$

・$\ker k' \subset \mathrm{im}\, j'$

$k'([b]) = 0$ とすると $kb = 0$

$^\exists a \in A \quad b = ja$　　　$a' = ia$

$[b] = [ja] = j'a' \in \mathrm{im}\, j'$

- at 右 A'
  - $\operatorname{im} i' \subset \ker j'$

    $j'i'(a) = j'(i \underbrace{i a'}_{a})$

    $= (j i a') = 0$

  - $\ker j' \subset \operatorname{im} i'$

    $j'a' = 0$ とする. $a' = i a$

    $(j a) = 0$ $ja = j k \overset{\exists}{b}$ $j(a - kb) = 0$

    $a - kb = \overset{\exists}{i} a''$ $a = i a'' + kb$

    $a' = i i a'' + i \cancel{k} b \subset \operatorname{im} i'$

- at 左 A'

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & B' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

  - $\operatorname{im} k' \subset \ker i'$

    $i'k'([b]) = i'kb = ikb = 0$.

  - $\ker i' \subset \operatorname{im} k'$

    $i'(ia) = 0$ とする $i i a = 0$

    $\exists b \in B$ $ia = kb = k'[b] \subset \operatorname{im} k'$

フィルター付けされた複体のスペクトル系列

The Spectral Sequence of a Filtered Complex

K: 複体

$D: K \to K$ 微分 $\left(K = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k \quad \text{grade} \right)$

グレード

必須ではない

K'がKの部分複体

$DK' \subset K'$

$K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$

filtration
フィルター付け

$GK = \bigoplus_{p=0}^{\infty} K_p / K_{p+1}$ 付随するグレードされた複体
associated graded complex

$p < 0$ のとき $K_p = K$ と定義する.

$$A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_p$$

とするとAも微分複体.

$i : A \to A$ を $K_{p+1} \xhookrightarrow{\text{incl.}} K_p$ とする.

$K_p > K_{p+1}$

$i : A = \bigoplus K_{p+1} \xrightarrow{\text{incl.}} A = \bigoplus K_p$

$B = A / \mathrm{im}\, i = GK$

$0 \to A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \to 0$ ex.

$\mathrm{cok}\, i = \bigoplus K_p / K_{p+1}$

$\rightsquigarrow$

K がグレード付きなら

$$\cdots \to H^k(A) \xrightarrow{i_1} H^k(A) \xrightarrow{j_1} H^k(B) \xrightarrow{k_1} H^{k+1}(A) \to \cdots$$

これを

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr, "i_1"] & & H(A) \arrow[dl, "j_1"] \\ & H(B) \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

または

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "i"] & & A_1 \arrow[dl, "j_1"] \\ & B_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

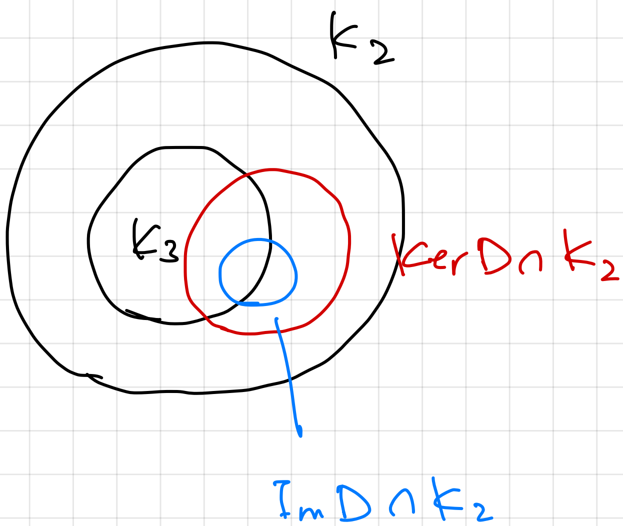
と書く.

これは完全対 $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} A_r \arrow[rr, "i"] & & A_r \arrow[dl, "j_r"] \\ & B_r \arrow[ul, "k_r"] & \end{tikzcd}$$

$\cdots = K_{-1} = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset 0$ の場合

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{i} H(K_1) \xleftarrow{i} H(K_2) \xleftarrow{i} H(K_3) \leftarrow 0$$



$$H(K_2) = (\mathrm{Ker}\,D \cap K_2)/(\mathrm{Im}\,D \cap K_2)$$

$$H(K_3) = (\mathrm{Ker}\,D \cap K_3)/(\mathrm{Im}\,D \cap K_3)$$

$a + \mathrm{Im}\,D \cap K_3 \in H(K_3)$ $\qquad$ $a \in \mathrm{Ker}\,D \cap K_3$

K_2

$i \downarrow$

$a + \mathrm{Im}\,D \cap K_2 \in H(K_2)$

$$A_1 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H(K_p)$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \xleftarrow{i} iH(K_2) \xleftarrow{i} iH(K_3) \leftarrow 0$$

$$A_2 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \supset iiH(K_2) \xleftarrow{i} iiH(K_3) \leftarrow 0$$

$$A_3 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \supset iH(K_1) \supset iiH(K_2) \supset iiiH(K_3) \underset{\supset}{\leftarrow} 0$$

$$A_4 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\text{上の項})$$

$A_4 = A_5 = A_6 = \cdots \qquad = A_\infty$ と書く.

$$\begin{tikzcd} A_4 \arrow[rr, "i" {above}, "\color{red}{\text{incl.}}" {yshift=12pt}] & & A_4 \arrow[dl] \\ & B_4 \arrow[ul, "k_4"] & \end{tikzcd}$$

ex. coupl. $\rightsquigarrow$ $\mathrm{im}\, k_4 = \ker i = 0$

$\therefore k_4 = 0$

$$B_5 = \ker(jk)_{B_4} / \mathrm{im}(jk)_{B_4} = B_4$$

$\therefore B_4 = B_5 = \cdots \qquad = B_\infty$ と書く.

よって

$$\begin{tikzcd} A_\infty \arrow[rr, "\text{incl.}"] & & A_\infty \arrow[dl] \\ & B_\infty \arrow[ul, "0"] & \end{tikzcd}$$

ができる.

$$B_\infty = \bigoplus_p (A_\infty)_p / (A_\infty)_{p+1}$$

一般の場合

$= K = K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$

$$H(K) \xleftarrow{\sim} H(K) \xleftarrow{i} H(K_1) \xleftarrow{i} H(K_2) \leftarrow \cdots$$

$H(K_p)$ の $H(K)$ 内の像を F_p とすると

$$H(K) = F_0 \supset \underset{i\,H(K_1)}{F_1} \supset \underset{ii\,H(K_2)}{F_2} \supset \underset{iii\,H(K_3)}{\cdots}$$

これを $H(K)$ 上の誘導されたフィルター付けという.

一般に. $K_l \neq 0$, $K_p = 0$ $p > l$ のとき

K は有限の長さをもつという

このとき 先と同様に A_r, B_r は いずれ

変化しなくなる.

特に $B_\infty = \bigoplus_p F_p / F_{p+1}$

$E_1 = H(B)$ $d_1 = j_1 \circ k_1$

$E_2 = H(E_1)$ $d_2 = j_2 \circ k_2$

$\vdots$ と書き、

この $\{E_r, d_r\}$ をスペクトル系列という.

E_r は大きな r で一定になる. $\rightsquigarrow E_\infty$

E_∞ がフィルター付けされた群 H に

付随するグレードされた複体となるとき

このスペクトル系列は H に収束するという.

K にグレードがあるとき $K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$

n を次元とよび $K_p^n = K^n \cap K_p$ と書く.

Theo. 14.6

$K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$, $\{K_p\}$ がフィルター付け

$H_D^*(K)$ が K のコホモロジーで

$$H_D^*(K) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots$$

とフィルター付けされているとする。

n ごとに $\{K_p^n\}$ が有限の長さとすると

$$0 \to \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_{p+1} \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_p \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} K_p / K_{p+1} \to 0$$

は $H_D^*(K)$ に収束するスペクトル系列を導く。

(証)

$$A_r = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} i^{p-1} H(K_p)$$

$r \geq p+1$ のとき $i^r H(K_p) = F_p$

$i : i^r H(K_{p+1}) \to i^r (K_p)$ は包含

i, j は次元を変えず

k は1つあげる.

$\ell(n)$ を $\{K_p^n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ の長さとし $r \geq \ell(n+1)+1$ とする.

すると $i^r H^{n+1}(K_{p+1}) = F_{p+1}^{n+1}$

$$i: i^r H^{n+1}(K_{p+1}) \to i^r H^{n+1}(K_p) \text{ は全単.}$$

よって $i_r: A_n^{n+1} \to A_r^{n+1}$ も全単

よって $k_r: B_r^n \to A_r^{n+1}$ はゼロ写像

よって r を十分大きくすると B_r は一定になる.

それを B_∞^n とする.

$$\begin{tikzcd}
\oplus F_p^n = \overset{F_{p+1}^n}{A_\infty^n} \arrow[rr, "i_\infty"] & & \overset{F_p^n}{A_\infty^n} = \oplus F_p^n \arrow[dl] \\
& B_\infty^n = \oplus F_p/F_{p+1} \arrow[ul, "0"] &
\end{tikzcd}$$