群（有限群）

Ver. 0.10

Chap. 1 群

§1 群の定義

群

集合 G が次をみたすとき G は群という。

・演算が定義されている

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

・この演算が次をみたす。

結合則

$${}^\forall x, y, z \in G \quad (xy)z = x(yz)$$

単位元 (e と書く) がある。

$${}^\forall x \in G \quad xe = ex = x$$

任意の元にその逆元 (x に対し x^{-1} と書く) がある。

$${}^\forall x \in G \quad {}^\exists x^{-1} \in G$$

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

演算はしばしば積とよばれる。

対称群 S_n

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ のいれかえを考える.

たとえば $n = 3$ として

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

これを $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と書く.

これらのすべてを集めたものを S_n と書く.

$n = 3$ の場合

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

S_3 には積がある.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

結合則をみたす.

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

同じ

単位元がある $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

逆元がある

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\leadsto\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}\leadsto\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

S_n は群.

これを対称群(n次対称群)という.

一般に群の演算は可換ではない.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

違う

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

演算がすべて可換な群を可換群

とかアーベル群という.

$\mathbb{Z}$ は $+$ に関してアーベル群

$x, y \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow xy = x + y$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

xy

結合則 OK.

単位元　0

逆元　$x \rightsquigarrow -x$

アーベル群では演算の記号に $+$ を使うことが多い

群の位数

群 G の濃度を G の位数といい $\#G$ と書く．

有限群のときは個数

$\#S_3 = 6$

$\#S_n = n!$

§2 部分群

部分群

Gの部分集合Hがeを含みGの演算で群となるときHをGの部分群という.

これはHが次をみたすとき. ということもできる.

$$^\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$$
$$^\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$$

このとき$e \in H$は

$x, x^{-1} \in H$ $xx^{-1} \in H$から いえる.

例)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset S_3$$

Prop.

$H \subset G$ が G の部分群

$\Leftrightarrow$ 「$x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$」

(証)

$\Rightarrow$ は明らか

$\Leftarrow$

$x \in H$ に対して $xx^{-1} \in H$ だから $e \in H$

${}^\forall y \in H$ に対して $e \in H$ だから $ey^{-1} = y^{-1} \in H$

${}^\forall x, y \in H$ に対して $y^{-1} \in H$ だから

$$xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$$

$\langle S \rangle$

群 G の元を任意に選んでそのすべてを S とする.

$$x = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \in G$$

$$x_1, \ldots, x_n \in S$$

そのもの

逆元

$$m_1 \ldots m_n = 1, -1$$

となる x たちのすべてを集めると G の部分群になる.

これを $\langle S \rangle$ と書く.

生成元

$G = \langle S \rangle$ のとき G は S で生成される,

S は G の生成系などといい

S の元を G の生成元という.

例

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ は S_n の生成系

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

他の選び方もある。また、ムダがあってもよい。

巡回群

唯一つの元で生成される群．すなわち

$G = \langle g \rangle$ となる群を巡回群という．

$\langle \{g\} \rangle$

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

交代群

A_3 は S_3 の部分群で巡回群

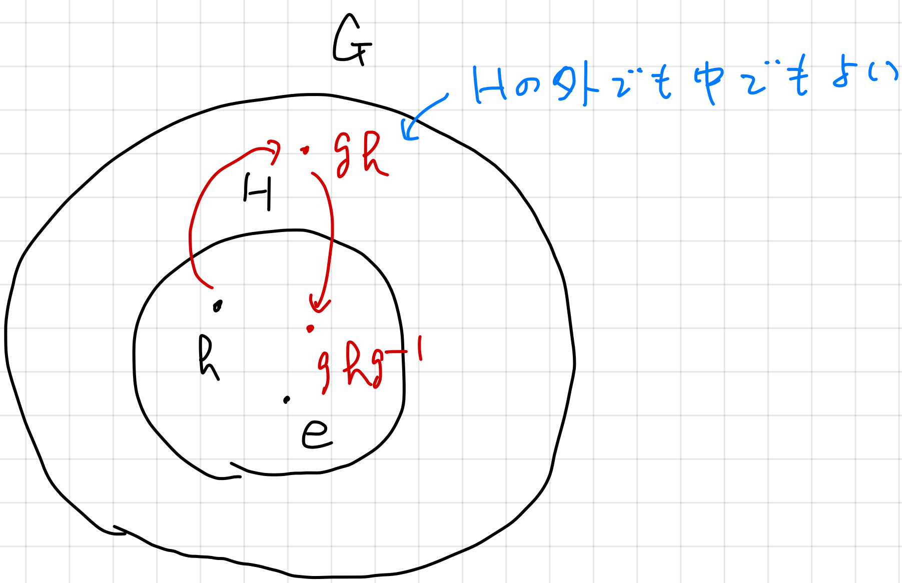
$$A_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset S_3$ も巡回群

正規部分群

Gの部分群Hが次をみたすとき正規部分群という

$$\forall g \in G \quad H = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$$



このとき $H \triangleleft G$ と書く.

アーベル群の部分群はすべて正規.

$$gHg^{-1} \rightsquigarrow g + H + (-g) = H$$

一般の場合は正規とは限らない.

元の位数

$x \in G \quad x^n = e$ となるとき

n を x の位数という.

このような n がないとき x の位数は無限という.

例 S_3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の位数は 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の位数は 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

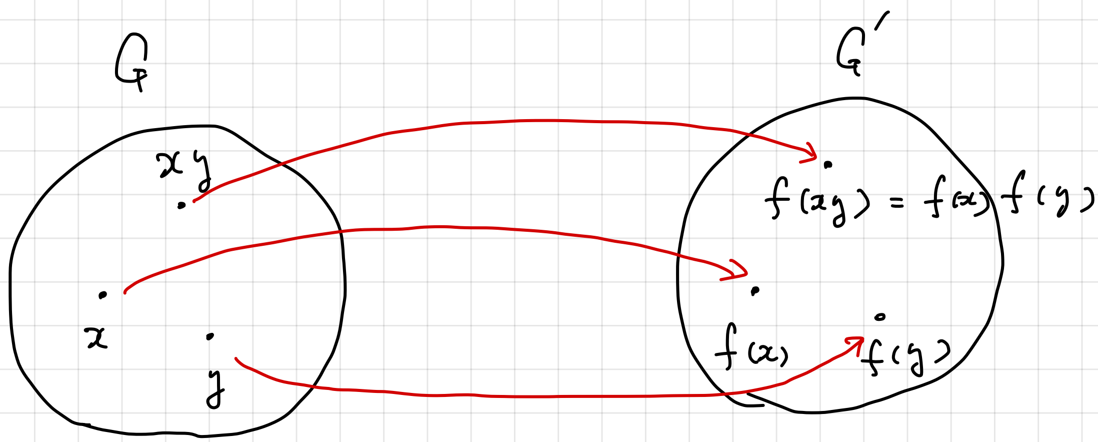
§3 準同型写像

準同型写像

群 G, G' に対し 写像 $f: G \to G'$ が…

次をみたすとき f は G から G' への 準同型写像という

$$\forall x, y \in G \quad f(xy) = f(x)f(y)$$



f が 全単射のとき f を 同型写像という.

このとき G と G' は 同型といい $G \simeq G'$ と書く

Prop.

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \qquad f(e) = e'$$

e'：G の単位元

(証)

$$f(e^2) = f(e)f(e) = f(e)$$

$f(e)^{-1}$ をかけると $f(e) = e'$

$$f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = e'$$

例

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$$

$$n \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$n=0$ のときは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と考える.

$$f(n+m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{n+m}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^m$$

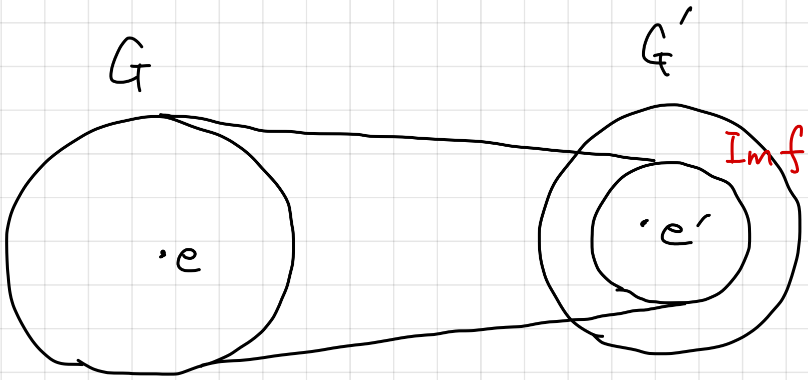
$$= f(n) f(m)$$

Im

$f : G \to G'$ に対し

$$\mathrm{Im} f = f(G) = \{ f(x) \in G' \mid x \in G \}$$

を f の像という



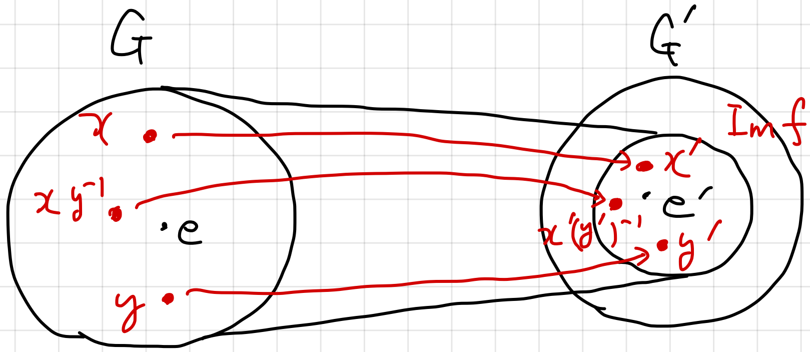
Im G は G' の部分群となる.

(証)

$x', y' \in \mathrm{Im}\, G$ とすると

$\exists x, y \in G \quad f(x) = x', \ f(y) = y'$

$$x'(y')^{-1} = f(x) f(y)^{-1} = f(x) f(y^{-1})$$
$$= f(x y^{-1}) \in \mathrm{Im} f$$

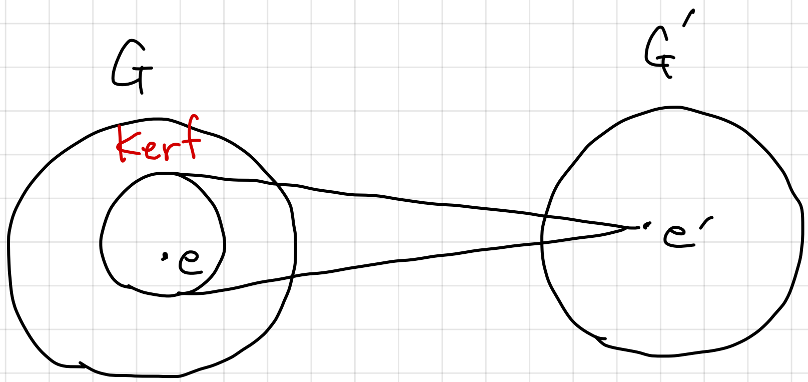


Ker

$f : G \to G'$ に対し

$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e') = \{ x \in G \mid f(x) = e' \}$

を f の核という



$\operatorname{Ker} f$ は G の正規部分群になる.

(証)

$x \in \operatorname{Ker} f$ とする. $(f(x) = e')$

$\forall g \in G \quad f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g^{-1})$

$= f(g)e'f(g^{-1}) = e'$

$\therefore \quad gxg^{-1} \in \operatorname{Ker} f$

例 $f: \mathbb{Z} \to S_3$

$$n \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im} f = A_3$ ⇜ S_3 の部分群

$\mathrm{Ker} f = 3\mathbb{Z}$ ⇜ $\mathbb{Z}$ の(正規)部分群

§4 剰余群

剰余類

群Gとその部分群H, $x \in G$に対し

$$xH = \{xh \in G \mid h \in H\}$$

をxが定めるHによる左剰余類という

同値類の一種.

xHの任意の元をxHの代表現という.

$y \in xH$のとき　$^\exists h$　$y = xh$だから

$x = yh^{-1} \in yH$

よって　$xH = yH$

$G/H = \{xH \mid x \in G\}$て書く.

同様に. $Hx = \{hx \in G \mid h \in H\}$

をxが定めるHによる右剰余類といい

$H \backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$て書く

例

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

A_3

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_3 / A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A_3 , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} A_3 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A_3 = A_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

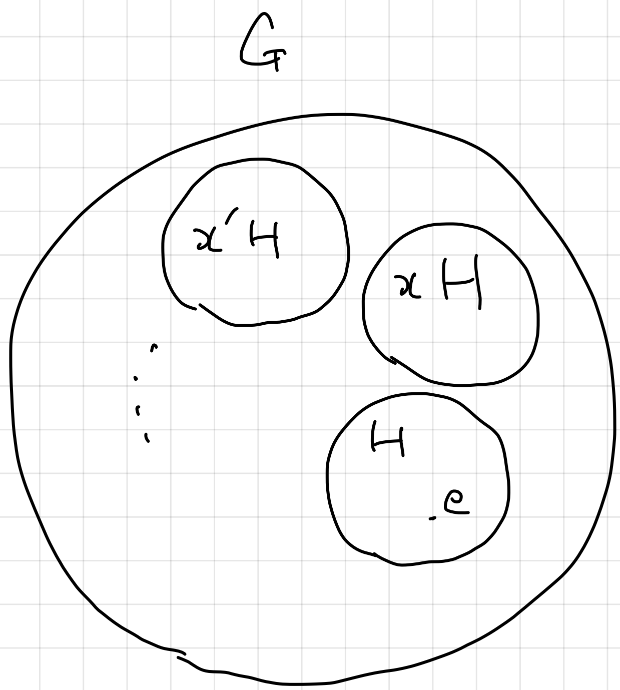
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} A_3$$

指数

G/H の濃度 ($= H\backslash G$ の濃度) を

H の G における指数といい. $(G:H)$ と書く.



ラグランジュの定理

$$\#G = (G:H)\#H$$

よって 有限群 G において 部分群の位数, 指数,
元の位数は G の位数の約数.

$\#S_3 = 6$ だから 位数 4 の部分群はない.

剰余群

$H \triangleleft G$ のとき

$$(xH)(yH) = xyH$$

によって G/H は群になる.

これを剰余群という.

$$\left[\; \begin{aligned} &\begin{cases} xH = x'H \\ yH = y'H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = xh \\ y' = yh' \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad x'y' = xhyh' \\ &\qquad\qquad = xy\underbrace{y^{-1}hy}_{\in H}\underset{\substack{\cap \\ H}}{h'} = xyh'' \\ &\Rightarrow \quad xyH = x'y'H \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} p : G &\longrightarrow G/H \\ x &\longmapsto xH \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ker} p = H$$

例

$3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の（正規）部分群

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

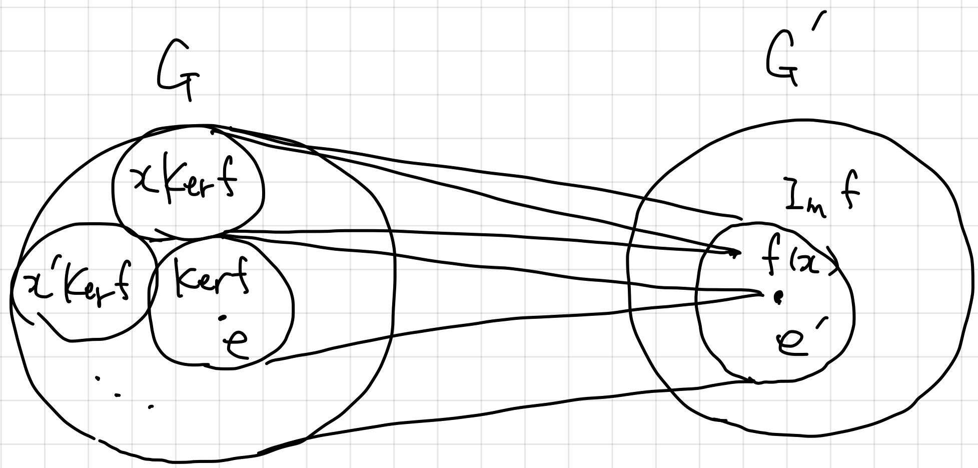
§5 準同型定理

準同型定理

$f: G \to G'$ 準同型写像のとき

$$\bar{f}: G/\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$$
$$x\,\mathrm{Ker} f \longmapsto f(x)$$

は同型写像である.



(証)

・代表元のとり方によらないこと.

$x\,\mathrm{Ker} f = x'\,\mathrm{Ker} f$ のとき

${}^{\exists} k \in \mathrm{Ker} f \quad x = x'k$ だから

$f(x) = f(x'k) = f(x')\underbrace{f(k)}_{e'} = f(x')$

よって $\bar{f}(x\,\mathrm{Ker} f)$ が定まる.

・全射性

$x' \in \mathrm{Im} f$ のとき $\exists x \quad f(x) = x'$

$\bar{f}(x\mathrm{Ker}f) = f(x) = x'$ だから $\bar{f}$ は全射

・単射性

$\bar{f}(x\mathrm{Ker}f) = \bar{f}(x'\mathrm{Ker}f)$ とする.

$f(x) = \bar{f}(x')$ $\quad f(x)^{-1}\bar{f}(x') = e'$

$f(x^{-1}x') = e$

$\therefore x^{-1}x' \in \mathrm{Ker}f \quad x' \in x\mathrm{Ker}f$

$\therefore x\mathrm{Ker}f = x'\mathrm{Ker}f$

・準同型性

$\bar{f}(x\mathrm{Ker}f\, x'\mathrm{Ker}f) = \bar{f}(xx'\mathrm{Ker}f)$

$= f(xx') = f(x)f(x') = \bar{f}(x\mathrm{Ker}f)\bar{f}(x'\mathrm{Ker}f)$

例 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$

$$n \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$\mathrm{Im}\, f = A_3$$

$$\mathrm{Ker}\, f = 3\mathbb{Z}$$

$$A_3 \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{Ker} f$$