模擬授業（20 分）

東京理科大学理学研究科　小林 穂乃香

山口大学面接 於
2022 年 9 月 5 日

今まで習ってきた幾何学は，全てユークリッド幾何学

$\cdots$ “$\underbrace{\text{真っ直ぐな物差し}}_{\text{(ユークリッド計量)}}$” が定義された真っ直ぐな空間

- $X = (X_1, \ldots, X_n),\ Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$,

  $\langle\,,\,\rangle$: $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド計量 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$

- $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle)$ をユークリッド空間という

リーマン幾何学では，空間や計量が真っ直ぐとは限らない

$\cdots$ リーマン多様体とは，$\underline{\text{リーマン計量}}$が定義された多様体のこと

1. ユークリッド幾何学とリーマン幾何学

M ：C^∞ 多様体

T_pM : 点 $p \in M$ における M の接空間

$X, Y \in T_pM$

- $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$

  g : M 上のリーマン計量 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
  (i) g : 双線型
  (ii) $g(X, Y) = g(Y, X)$（対称）
  (iii) $g(X, X) \geq 0$ かつ
  $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$（正定値）

- このとき，組 (M, g) をリーマン多様体という

$\mathbb{R}^n$ は C^∞ 多様体であり，ユークリッド計量はリーマン計量である

⟹ ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ はリーマン多様体のひとつ

2. なぜ曲がった空間を考えるのか

例 1.　東京–ニューデリー間の最短距離は？

例 2.　重力場における光の軌跡

例 3.　$\mathbb{R}^n$ における非ユークリッド計量

$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ 上のリーマン計量 g を，次のように定義する：

$$g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \frac{1}{x_2^2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_pX,\ \ p \in X)$$

問．(X, g) 上の曲線 c_i の長さを求めよ．

$$c_1(t) = (t, 1),\ \ c_2(t) = (t, 2),\ \ c_3(t) = (1, t),\ \ c_4(t) = (1, 2t)$$

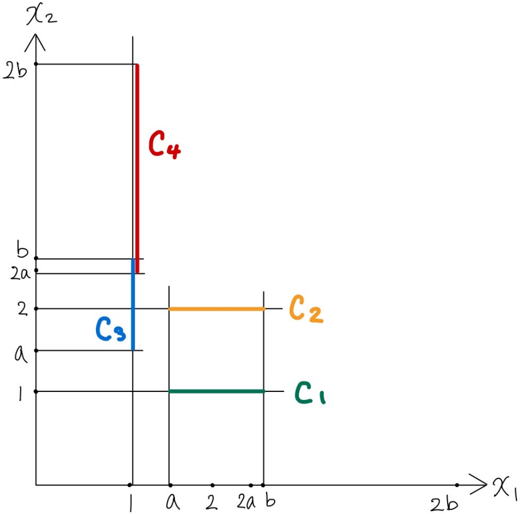
Definition

曲線 $c : [a, b] \to (M, g)$ の長さ $L_g(c)$ は次のように定義される：

$$\|\dot{c}(t)\|_g := \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$$

$$L_g(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_g \, dt$$

$$c_1(t) = (t, 1),\quad c_2(t) = (t, 2),\quad c_3(t) = (1, t),\quad c_4(t) = (1, 2t)$$



2. なぜ曲がった空間を考えるのか

- $c_1(t) = (t, 1),\ \ \dot{c}_1(t) = (1, 0)$

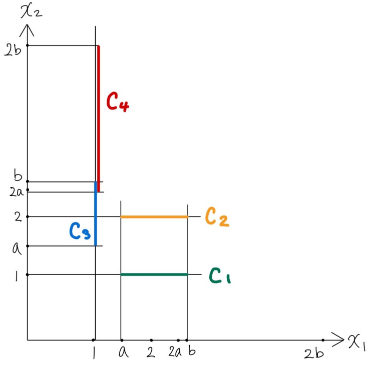
$$g(\dot{c}_1(t), \dot{c}_1(t)) = \frac{1}{1^2}\langle \dot{c}_1(t), \dot{c}_1(t)\rangle = 1$$

$$\therefore\ L_g(c_1) = \int_a^b dt = \underline{b - a}$$

- $c_2(t) = (t, 2),\ \ \dot{c}_2(t) = (1, 0)$

$$g(\dot{c}_2(t), \dot{c}_2(t)) = \frac{1}{2^2}\langle \dot{c}_2(t), \dot{c}_2(t)\rangle = \frac{1}{2^2}$$

$$\therefore\ L_g(c_2) = \int_a^b \frac{1}{2} dt = \underline{\frac{1}{2}(b - a)}$$



ユークリッド空間では c_1 と c_2 の長さは同じだが，
(X, g) 上では異なる！

- $c_3(t) = (1, t),\ \dot{c}_3(t) = (0, 1)$

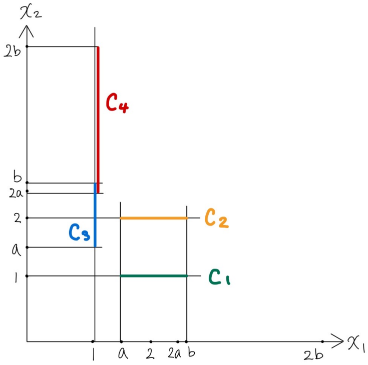
$$g(\dot{c}_3(t), \dot{c}_3(t)) = \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore\ L_g(c_3) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \underline{\log \frac{b}{a}}$$

- $c_4(t) = (1, 2t),\ \dot{c}_4(t) = (0, 2)$

$$g(\dot{c}_4(t), \dot{c}_4(t)) = \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore\ L_g(c_4) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \underline{\log \frac{b}{a}}$$



⇒ ユークリッド空間では c_3 と c_4 の長さは異なるが，
(X, g) 上では同じ長さ！

3. 曲がった空間における“真っ直ぐ”とは？

ユークリッド空間における直線 $\cdots$ 2 階微分がゼロ

⬇ 拡張

リーマン多様体における測地線 $\cdots$ 2 階微分がゼロ

まずは，曲がった空間における微分を定義する．

Definition

M : C^∞ 多様体

TM : M の接束

$\nabla : TM \times TM \to TM$: M の接続 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(i) $\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

ここで，$X, Y, Z \in TM$, $f \in C^\infty(M)$, $a \in \mathbb{R}$.

$\nabla_X Y$ を，X についての Y の共変微分という．

3. 曲がった空間における“真っ直ぐ”とは？

Theorem

リーマン多様体 (M, g) に対して，次を満たすような接続 ∇ は唯一定まる：

(iv) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(v) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

ここで，$X, Y, Z \in TM$.

(i)〜*(v)* を満たす接続 ∇ を，M の *Levi-Civita* 接続という．

Definition

$c : (M, g, \nabla)$ 上の C^∞ 曲線

$$c : M \text{ 上の測地線} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$$

3. 曲がった空間における“真っ直ぐ”とは？

実際に $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ を計算するために，いくつか準備をする．

Definition

(M, g, ∇) : n 次元リーマン多様体，$(x_1, \ldots, x_n)$: M の座標

$\partial_i := \partial/\partial x_i$ とする．

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\,\partial_k$$

によって定義される Γ_{ij}^{k} を，∇ の接続係数という．

Proposition

(M, g, ∇) がユークリッド空間のとき，$\Gamma_{ij}^{k} = 0$

3. 曲がった空間における“真っ直ぐ”とは？

Proposition

(M, g, ∇) : n 次元リーマン多様体，$(x_1, \ldots, x_n)$: M の座標

$c : [a, b] \to M$: M 上の C^∞ 曲線

とする．このとき，

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^2(x_k \circ c)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{d(x_i \circ c)}{dt} \frac{d(x_j \circ c)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ここで，$x_i \circ c$ は c の第 i 成分．

Corollary

(M, g, ∇) がユークリッド空間のとき，$\Gamma_{ij}^{k} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d^2(x_k \circ c)}{dt^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c(t) = at + b \quad (a, b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

3. 曲がった空間における“真っ直ぐ”とは？

Corollary

$M \subset \mathbb{R}^n$ のとき

$$(\nabla_{\dot{c}}\dot{c})_t = \mathrm{pr}_{(Tc(t))}\left(\frac{d^2c}{dt^2}\right)$$

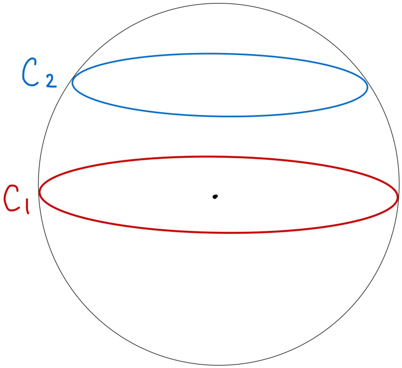
ここで，$\mathrm{pr}_{(Tc(t))}$ は $c(t)$ の接空間 $T_{c(t)}M$ への直交射影．

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を考える．

問．

- $c_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$
- $c_2(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}})$

c_1, c_2 は S^2 の測地線か？



Proposition

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の場合，

点 $c(t)$ における S^n の単位法ベクトル $N_{c(t)} \quad = \quad$ 位置ベクトル $c(t)$

- $\underline{c_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)}$

$$\begin{aligned}(\nabla_{\dot{c}_1}\dot{c}_1)_t &= \mathrm{pr}_{(Tc_1(t))}\left(\frac{d^2 c_1}{dt^2}\right)\\ &= \mathrm{pr}_{(Tc_1(t))}(-\cos t, -\sin t, 0)\\ N_{c_1(t)} &= c_1(t)\\ &= (\cos t, \sin t, 0)\end{aligned}$$

$$\therefore\ (\nabla_{\dot{c}_1}\dot{c}_1)_t = \mathrm{pr}_{(Tc_1(t))}(-N_{c_1(t)}) = 0$$

$\therefore\ c_1$ は S^2 の測地線

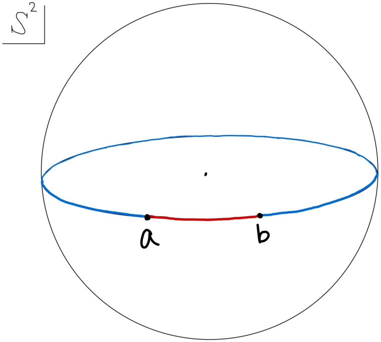
- $\underline{c_2(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}})}$

$$\begin{aligned}&(\nabla_{\dot{c}_2}\dot{c}_2)_t\\ &\quad = \mathrm{pr}_{(Tc_2(t))}((-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t, 0))\\ &N_{c_2(t)} = c_2(t)\\ &\qquad = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

$$\therefore\ (\nabla_{\dot{c}_2}\dot{c}_2)_t \neq \mathrm{pr}_{(Tc_2(t))}(-N_{c_2(t)}) = 0$$

$\therefore\ c_2$ は S^2 の測地線でない．

注.



a と b を結ぶ測地線は２つある.

リーマン多様体において,

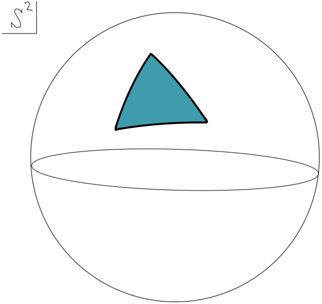
２点間を結ぶ曲線で長さが最短であるもの $\Rightarrow$ 測地線

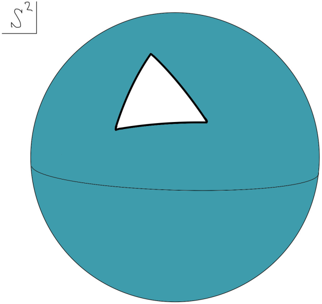
$\not\Leftarrow$

一般に言えない！

球面における三角形

三角形 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 3 つの測地線によって囲まれたコンパクト閉領域





また，リーマン多様体では，三角形の内角の和が 180° とは限らない！