

研究内容の紹介 (20 分)

東京理科大学理学研究科 小林 穂乃香

山口大学面接 於
2022 年 9 月 5 日

擬リーマン多様体とは

g : M 上の対称 $(0, 2)$ テンソル場
 $X, Y \in TM$

(M, g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量
... 正定値

i. e. $g(X, X) \geq 0$ for all X , and
 $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M, g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量
... 非退化

i. e. $g(X, Y) = 0$ for all $Y \in TM$
 $\Rightarrow X = 0$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m+1}), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathbb{E}_s^{m+1} \quad \begin{cases} s = 0 : \text{リーマン多様体} \\ s = 1 : \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := - \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j \quad s : \text{指数}$

擬リーマン多様体とは

1905 特殊相対性理論 (A. Einstein)
この世界を, 空間 3 次元と時間 1 次元の"時空"として考える
正定値とは限らない計量を持つ多様体を導入

1908 ミンコフスキー幾何学 (H. Minkowski)
特殊相対性理論を幾何学として再構成
時空は 4 次元の空間として記述される

1915-1916 一般相対性理論 (A. Einstein)
重力を時空の曲がりとして捉える, リーマン幾何学を応用



擬リーマン幾何学

これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle, \rangle)$: 擬球面 \mathbb{S}_s^m または 擬双曲空間 \mathbb{H}_s^m

(M, \langle, \rangle) : \tilde{M} の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : \tilde{M} の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part I ... 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

Part II ... generalizations of B-scroll in \tilde{M}_s^m

- generalized umbilical hypersurface in \tilde{M}_1^{n+1} ... 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in \tilde{M}_2^{n+1} ... 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in \mathbb{S}_2^5 or \mathbb{H}_2^5 ... 指数及び余次元一般化

Part I

擬双曲的ガウス写像による分類

部分多様体の平均曲率 H と部分多様体の type number の関係

- 1970 年代
- $\Delta H = \lambda H$ となるリーマン部分多様体の type number
 - null 2-type かつ $H : \text{const}$ なローレンツ曲面の完全分類
- 1980 年代
- 部分多様体のガウス写像の type number
- 2007 年
- 球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^m$: 等長はめ込み

$(e_1^p, \dots, e_n^p) : M$ の向きと適合する $T_p M$ の正規直交フレーム

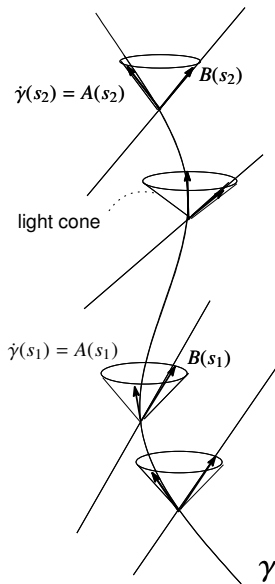
ガウス写像 $\nu \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nu := e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

球面的ガウス写像 $\tilde{\nu} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tilde{\nu} := \mathbf{x}(p) \wedge e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

 $M_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$ (または \mathbb{H}_1^3) : 向きづけられたローレンツ超曲面形作用素が対角化不可能 かつ H, K が一定 M_1^2 は B -scroll または $complex\ circle$ どちらかの開部分

	M_1^2		$\tilde{\nu}$	K	H
in \mathbb{H}_1^3	(Main Result 1) $S_{\mathbb{C}}^1(\kappa)$ complex circle	$\kappa = -1$	1-type	0	0
		$\kappa \neq -1$	∞ -type	0	$\neq 0$
	(Main Result 2) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll	$k_2 = \pm 1$	∞ -type	0	$\neq 0$
		$k_2 \neq \pm 1$	null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$
in \mathbb{S}_1^3	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$



$\gamma : \mathbb{S}_1^3$ または \mathbb{H}_1^3 の null 曲線
 $(A, B, C) : \gamma$ 上の **Cartan frame field**

$$\text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, B \rangle = -1, \\ \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{array} \right.$$

Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする：

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}_1^3 \text{ or } \mathbb{H}_1^3 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の } \textcolor{red}{B}\text{-scroll} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \textcolor{red}{k}_2 : \text{const}$$

Part II

generalizations of B-scroll in \tilde{M}_2^m

\tilde{M}_1^{n+1} : ローレンツ多様体, $\dim \tilde{M} = n + 1$

M_1^n : \tilde{M}_1^{n+1} のローレンツ超曲面, $\dim M = n$

A : M_1^n の形作用素, 対角化不可能

Definition

M_1^n : *generalized umbilical hypersurface* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A が 0 でない唯一の実固有値を持つ

A の最小多項式が $P(x) = (x - a)^2$ のとき, M_1^n を *degree 2 の generalized umbilical hypersurface* という ($a \in \mathbb{R} : \text{const}$).

Cartan frame (E. Cartan) : \mathbb{E}_1^3 における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム



一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)



よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)



特殊なパラメータをとることでさらにシンプルに

Cartan frame (A. Ferrández–A. Giménez–P. Lucas)

- これらは構成の際に screen vector bundle などの概念が必要

一方, H. Kobayashi–N. Koike による構成方法は

- general Frenet frame を経由せず構成
- 高度な概念必要なし
- γ のパラメータに条件なし

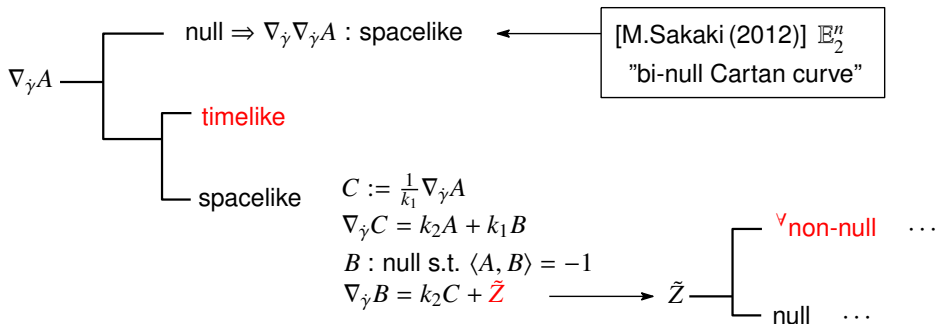


- $s = 1$ のとき $\gamma : \tilde{M}_1^n$ の null 曲線, $A := \dot{\gamma}$.

$$\nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{space like} \quad C := \frac{1}{k_1} \nabla_{\dot{\gamma}} A \quad \text{---} \quad \nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B \quad \text{---} \quad \nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z} \quad \dots$$

$B : \text{null s.t. } \langle A, B \rangle = -1 \quad \quad \tilde{Z} : \text{spacelike}$

- $s = 2$ のとき $\gamma : \tilde{M}_2^n$ の null 曲線, $A := \dot{\gamma}$.



Cartan frame (E. Cartan) : \mathbb{E}_1^3 における null 曲線に沿う

Frenet 型フレーム



一般次元ローレンツ多様体 M_1^n に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)



よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)



指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

別証明

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{non-null のとき, Cartan frame (H. Kobayashi)} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{null のとき, bi-null Cartan frame (M. Sakaki–A. Uçum–K. Ilarslan)} \end{array} \right.$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

degree 2 の generalized umbilical hypersurface in \mathbb{S}_2^{n+1} or \mathbb{H}_2^{n+1} の具体例を構成

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

$M : \mathbb{E}_1^m$ の null scroll

※ M は 2 次元非退化ローレンツ線織面

$H : M$ の平均曲率ベクトル場

$A_H : M$ の H 方向の形作用素

$$M : \mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$$

\Updownarrow def

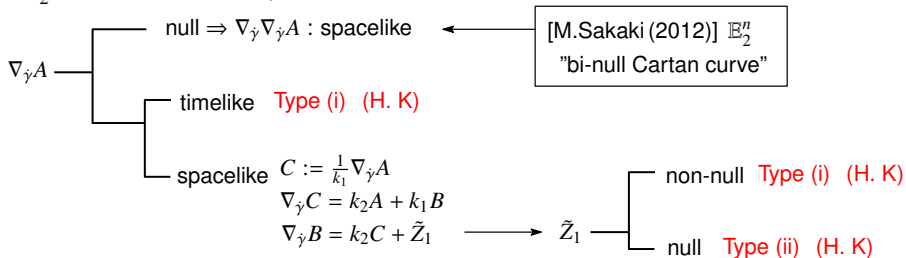
$$A_H \text{ の最小多項式が } (x - a^2)^2 \Rightarrow M : \text{generalized B-scroll} \\ (a \in \mathbb{R} : \text{const})$$

$$A_H \text{ の最小多項式が } (x - k_2^2)^2 \Leftarrow M : \text{generalized B-scroll}$$

$\gamma \subset \mathbb{E}_1^m$ に沿う Cartan frame field

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 \\ \dot{Z}_1 = k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = -k_4 Z_1 + k_5 Z_3 \\ \vdots \end{cases}$$

$\gamma : \tilde{M}_2^5$ の null 曲線, $A := \dot{\gamma}$.



Type (i) (H. Kobayashi)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \varepsilon_C & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \quad (2)$$

Type (ii) (H. Kobayashi)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \quad (4)$$

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : \mathbb{S}_2^5 or \mathbb{H}_2^5 の null 曲線

$(A, B, C, Z_1, Z_2) : \gamma$ に沿う \mathbb{S}_2^5 or \mathbb{H}_2^5 の Cartan frame field s.t. $k_2 : \text{const}$

M が次の条件を満たすとする :

- (*) $\begin{cases} M : \gamma \text{ と } \gamma \text{ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される null scroll} \\ M : 2 \text{ 次元非退化ローレンツ線織面} \end{cases}$

$\Rightarrow M$ は $\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ によりパラメータづけされる.

さらに, A_H の最小多項式 $P(x)$ は

$$(i) \quad Z_1 : \text{non-null} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2,$$

$$(ii) \quad Z_1 : \text{null} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - k_2^2)^2.$$

つまり, \mathbb{S}_2^5 または \mathbb{H}_2^5 における generalized B-scroll は

(i), (ii) のどちらかである.