

## 研究内容の紹介 (20 分)

東京理科大学理学研究科 小林 穂乃香

山口大学面接 於  
2022 年 9 月 5 日

# 擬リーマン多様体とは

$g$  :  $M$  上の対称  $(0, 2)$  テンソル場  
 $X, Y \in TM$

$(M, g)$  : リーマン多様体

$g$  :  $M$  上のリーマン計量  
... 正定値

i. e.  $g(X, X) \geq 0$  for all  $X$ , and  
 $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$(M, g)$  : 擬リーマン多様体

$g$  :  $M$  上の擬リーマン計量  
... 非退化

i. e.  $g(X, Y) = 0$  for all  $Y \in TM$   
 $\Rightarrow X = 0$

## Definition

$X$  : *spacelike*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle > 0$  or  $X = 0$

$X$  : *timelike*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle < 0$

$X$  : *null*  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle = 0$  and  $X \neq 0$

# 擬リーマン多様体とは

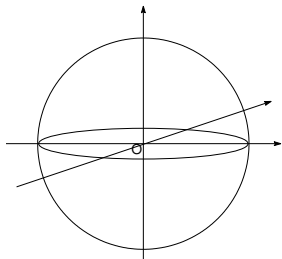
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathbb{E}_s^{m+1} \quad \begin{cases} s = 0: \text{リーマン多様体} \\ s = 1: \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := - \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j \quad s: \text{指数}$$

## リーマン多様体

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

$$\mathbb{H}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$

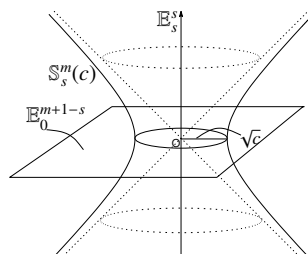


$\mathbb{S}_s^n$  と  $\mathbb{H}_{n-s}^n$  は  
反等長

## 擬リーマン多様体

$$\mathbb{S}_1^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

$$\mathbb{H}_1^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_2^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$



# 擬リーマン多様体とは

1905      特殊相対性理論 (A. Einstein)  
この世界を, 空間 3 次元と時間 1 次元の"時空"として考える  
正定値とは限らない計量を持つ多様体を導入

1908      ミンコフスキー幾何学 (H. Minkowski)  
特殊相対性理論を幾何学として再構成  
時空は 4 次元の空間として記述される

1915-1916    一般相対性理論 (A. Einstein)  
重力を時空の曲がりとして捉える, リーマン幾何学を応用



擬リーマン幾何学

## 例 2. 重力場における光の軌跡



a の位置にある天体が, b 地点から見える (重力レンズ効果)

- 光は常に “真っ直ぐ” 進む
- 光の粒子の軌跡は null 測地線

## 例 2. 重力場における光の軌跡



$a$  の位置にある天体が、 $b$  地点から見える（重力レンズ効果）

- 光は常に“真っ直ぐ”進む
- 光の粒子の軌跡は null 測地線

## これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle, \rangle)$ : 擬球面  $\mathbb{S}_s^m$  または 擬双曲空間  $\mathbb{H}_s^m$

$(M, \langle, \rangle)$ :  $\tilde{M}$  の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

$\gamma$  :  $\tilde{M}$  の null 曲線 i.e.  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$  かつ  $\dot{\gamma} \neq 0$

### Part 1 ... 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

### Part 2 ... generalizations of B-scroll in $\tilde{M}_s^m$

- generalized umbilical hypersurface in  $\tilde{M}_1^{n+1}$  ... 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in  $\tilde{M}_2^{n+1}$  ... 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in  $\mathbb{S}_2^5$  or  $\mathbb{H}_2^5$  ... 指数及び余次元一般化

部分多様体の平均曲率  $H$  と部分多様体の type number の関係

- 1970 年代
- $\Delta H = \lambda H$  となるリーマン部分多様体の type number
  - null 2-type かつ  $H : \text{const}$  なローレンツ曲面の完全分類
- 1980 年代
- 部分多様体のガウス写像の type number
- 2007 年
- 球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^m$  : 等長はめ込み

$(e_1^p, \dots, e_n^p) : M$  の向きと適合する  $T_p M$  の正規直交フレーム

ガウス写像  $\nu \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nu(p) := e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

球面的ガウス写像  $\tilde{\nu} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tilde{\nu}(p) := \mathbf{x}(p) \wedge e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$



Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

 $M_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$  (または  $\mathbb{H}_1^3$ ) : 向きづけられたローレンツ超曲面形作用素が対角化不可能 かつ  $H, K$  が一定 $M_1^2$  は  $B$ -scroll または  $complex\ circle$  どちらかの開部分

	$M_1^2$		$\tilde{\nu}$	$K$	$H$
in $\mathbb{H}_1^3$	(Main Result 1) $S_{\mathbb{C}}^1(\kappa)$ complex circle	$\kappa = -1$	1-type	0	0
		$\kappa \neq -1$	$\infty$ -type	0	$\neq 0$
	(Main Result 2) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll	$k_2 = \pm 1$	$\infty$ -type	0	$\neq 0$
		$k_2 \neq \pm 1$	null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$
in $\mathbb{S}_1^3$	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

$\gamma : \mathbb{S}_1^3$  または  $\mathbb{H}_1^3$  の null 曲線  
 $(A, B, C) : \gamma$  上の **Cartan frame field**

$$\text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, B \rangle = -1, \\ \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{array} \right.$$

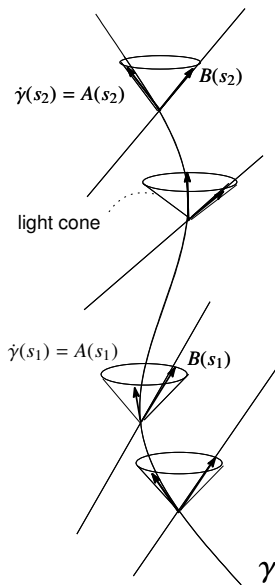
### Definition

$M$  を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする：

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}_1^3 \text{ or } \mathbb{H}_1^3 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の } \textcolor{red}{B}\text{-scroll} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \textcolor{red}{k}_2 : \text{const}$$



$$\tilde{M}_1^{n+1} = \mathbb{E}_1^{n+1} \text{ or } \mathbb{S}_1^{n+1} \text{ or } \mathbb{H}_1^{n+1}$$

$M_1^n$  :  $\tilde{M}_1^{n+1}$  のローレンツ超曲面, isoparametric

$A$  :  $M_1^n$  の形作用素, 対角化不可能

$P(x)$  :  $A$  の最小多項式

### Theorem (M. A. Magid)

$A$  の固有値の個数が 1 or 2 個 かつ 0 でない固有値が 1 つ以下



$M_1^n$  は次のいずれか：

- ①  $M_1^n$  : *generalized cylinder* ... ゼロ固有値を持つ
- ②  $M_1^n$  : *generalized umbilical hypersurface* ... ゼロ固有値を持たない

$$\begin{cases} \text{degree 2} & P(x) = (x - a)^2 \quad \leftarrow \text{B-scroll はこの型} \\ \text{degree 3} & P(x) = (x - a)^3 \end{cases}$$

## Part 2-1 B-scroll の次元一般化

$\tilde{M}$  が指数 1 のとき, 形作用素  $A$  はある基底に関して次の 4 つのいずれかの形をとる.

$$(I) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

$$(II) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & & \\ 1 & a_0 & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$(III) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 1 \\ -1 & 0 & a_0 \\ & & & a_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (IV) \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & \\ -b_0 & a_0 & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

ここで,  $b_0 \neq 0$ .

$\tilde{M}_2^m$  の形作用素

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \lambda & 0 & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \lambda & 1 & \lambda \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & 0 \\ & & \lambda & 1 & \lambda \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \lambda & \lambda \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Cartan frame (E. Cartan) :  $\mathbb{E}_1^3$  における null 曲線に沿う

Frenet 型フレーム



一般次元ローレンツ多様体  $M_1^n$  に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)



よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)



指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

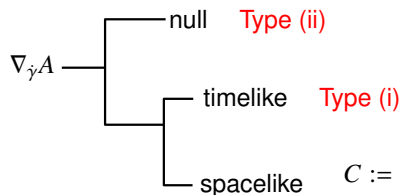
### 別証明

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{non-null かつ } \exists Z_i : \text{non-null のとき, Cartan frame (H. Kobayashi)} \\ \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{null のとき, bi-null Cartan frame (M. Sakaki–A. Uçum–K. Ilarslan)} \end{array} \right.$

### Main Result 4 (H. Kobayashi)

degree 2 の generalized umbilical hypersurface in  $\mathbb{S}_2^{n+1}$  or  $\mathbb{H}_2^{n+1}$  の具体例を構成

$s = 2$  のとき  $\gamma : \tilde{M}_2^m$  の null 曲線,  $A := \dot{\gamma}$ .



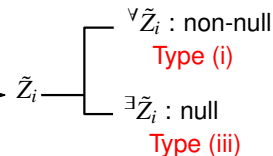
$$C := \frac{1}{k_1} \nabla_{\dot{\gamma}} A$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$$

$$B : \text{null s.t. } \langle A, B \rangle = -1$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1$$

[M.Sakaki (2012)]  $\mathbb{E}_2^n$   
 "bi-null Cartan curve"



$\gamma \subset \tilde{M}_2^m$  に沿う Frenet 型フレーム場

別証明

- |   |  |                                   |
|---|--|-----------------------------------|
| { | Type (i) : Cartan frame field          | ... H. Kobayashi                  |
|   | Type (ii) : bi-null Cartan frame field | ... M. Sakaki–A. Uçum–K. Ilarslan |
|   | Type (iii)                             | ... $m = 5$ のとき, H. Kobayashi     |



## Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

 $M : \mathbb{E}_1^m$  の null scroll $H : M$  の平均曲率ベクトル場 $A_H : M$  の  $H$  方向の形作用素

$$A_H \text{ の最小多項式が } (x - a^2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad M : \text{generalized B-scroll} \\ (a \in \mathbb{R} : \text{const})$$

ここで,

 $(A, B, C, Z_1, \dots, Z_{m-3}) : \gamma$  に沿う Cartan frame field

$$M : \text{generalized B-scroll} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} M : \mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$$

Note  $M$  は 2 次元非退化ローレンツ曲面

## Main Result 5 (H. Kobayashi)

$M$  :  $\mathbb{S}_2^5$  or  $\mathbb{H}_2^5$  における null scroll

$H$  :  $M$  の平均曲率ベクトル場

$A_H$  :  $M$  の  $H$  方向の形作用素

$P(x)$  :  $A_H$  の最小多項式

$M$  が generalized B-scroll のとき,  $P(x)$  は次のいずれかである :

$$\textcircled{1} \quad Z_1 : \text{non-null} \Rightarrow P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$$

$$\textcircled{2} \quad Z_1 : \text{null} \Rightarrow P(x) = (x - k_2^2)^2$$

## Type (i) (H. Kobayashi)

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \quad (1)$$

## Type (iii) (H. Kobayashi)

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \quad (2)$$