研究内容の紹介（20 分）

東京理科大学理学研究科　小林 穂乃香

山口大学面接 於
2022 年 9 月 5 日

擬リーマン多様体とは

g : M 上の対称 $(0,2)$ テンソル場
$X, Y \in TM$

(M,g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量 i. e. $g(X,X) \geq 0$ *for all* X, *and*
$\cdots$ 正定値 $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M,g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量 i. e. $g(X,Y) = 0$ *for all* $Y \in TM$
$\cdots$ 非退化 $\Rightarrow X = 0$

擬リーマン多様体とは

g ：M 上の対称 $(0,2)$ テンソル場

$X, Y \in TM$

(M,g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量 $\cdots$ 正定値

i. e. $g(X,X) \geq 0$ *for all* X, *and*

$g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M,g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量 $\cdots$ 非退化

i. e. $g(X,Y) = 0$ *for all* $Y \in TM$

$\Rightarrow X = 0$

Definition

X : *spacelike* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle X,X\rangle > 0$ or $X = 0$

X : *timelike* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle X,X\rangle < 0$

X : *null* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\langle X,X\rangle = 0$ and $X \neq 0$

擬リーマン多様体とは

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \ \in \mathbb{E}_s^{m+1}$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j$$

擬リーマン多様体とは

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \quad \in \mathbb{E}_s^{m+1} \qquad \begin{cases} s = 0: \text{リーマン多様体} \\ s = 1: \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j \qquad s: \text{指数}$$

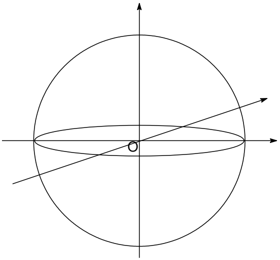
擬リーマン多様体とは

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}),\quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \in \mathbb{E}_s^{m+1} \qquad \begin{cases} s = 0 : \text{リーマン多様体} \\ s = 1 : \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j \qquad s : \text{指数}$$

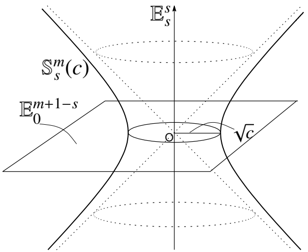
リーマン多様体

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$



擬リーマン多様体

$$\mathbb{S}_1^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$



擬リーマン多様体とは

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \quad \in \mathbb{E}^{m+1}_s$
$\begin{cases} s = 0: \text{リーマン多様体} \\ s = 1: \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j$$

s：指数

リーマン多様体

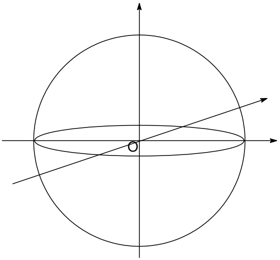
$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$

$\mathbb{H}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3_1 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$

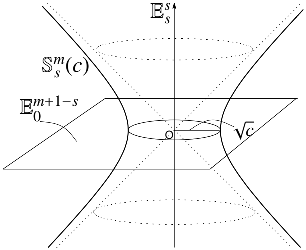
擬リーマン多様体

$\mathbb{S}^2_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3_1 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$

$\mathbb{H}^2_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3_2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$



$\mathbb{S}^n_s$ と $\mathbb{H}^n_{n-s}$ は
反等長



擬リーマン多様体とは

1905　**特殊相対性理論**（A. Einstein）

この世界を, 空間 3 次元と時間 1 次元の”時空”として考える

正定値とは限らない計量を持つ多様体を導入

1908　**ミンコフスキー幾何学**（H. Minkowski）

特殊相対性理論を幾何学として再構成

時空は 4 次元の空間として記述される

1915-1916　**一般相対性理論**（A. Einstein）

重力を時空の曲がりとして捉える, リーマン幾何学を応用

擬リーマン幾何学

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\,,\rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\,,\rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part 1 $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像
- B-scroll の定義

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\,,\rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\,,\rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part 1 $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像
- B-scroll の定義

Part 2 $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$ $\cdots$ 次元一般化

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part 1 $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像
- B-scroll の定義

Part 2 $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$ $\cdots$ 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_2$ $\cdots$ 指数及び次元一般化

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\,,\rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\,,\rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part 1 $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像
- B-scroll の定義

Part 2 $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$ $\cdots$ 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_2$ $\cdots$ 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in $\tilde{M}^5_2$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

本日の発表の流れ

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part 1 $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像
- B-scroll の定義

Part 2 $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$ $\cdots$ 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_2$ $\cdots$ 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in $\tilde{M}^5_2$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{H}^m_s$：等長はめ込み

$(e_1^p, \ldots, e_n^p)$：M の向きと適合する T_pM の正規直交フレーム

ガウス写像 ν $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\nu(p) := e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

擬双曲的ガウス写像 $\tilde{\nu}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{\nu}(p) := \mathbf{x}(p) \wedge e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{H}^m_s$: 等長はめ込み

$(e^p_1, \ldots, e^p_n)$: M の向きと適合する T_pM の正規直交フレーム

$$\text{ガウス写像 } \nu \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \nu(p) := e^p_1 \wedge \cdots \wedge e^p_n$$

$$\text{擬双曲的ガウス写像 } \tilde{\nu} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \tilde{\nu}(p) := \mathbf{x}(p) \wedge e^p_1 \wedge \cdots \wedge e^p_n$$

$\phi : M \to \mathbb{S}^m_s \subset \mathbb{E}^{m+1}_s$ (or $\mathbb{H}^m_s \subset \mathbb{E}^{m+1}_{s+1}$) : C^∞ 級写像

$$\phi : k\text{-type} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k, \quad \Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{H}^m_s$: 等長はめ込み

$(e^p_1, \ldots, e^p_n)$: M の向きと適合する T_pM の正規直交フレーム

ガウス写像 ν $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\nu(p) := e^p_1 \wedge \cdots \wedge e^p_n$

擬双曲的ガウス写像 $\tilde{\nu}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{\nu}(p) := \mathbf{x}(p) \wedge e^p_1 \wedge \cdots \wedge e^p_n$

$\phi : M \to \mathbb{S}^m_s \subset \mathbb{E}^{m+1}_s$ (or $\mathbb{H}^m_s \subset \mathbb{E}^{m+1}_{s+1}$) : C^∞ 級写像

$$\phi : k\text{-type} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_k, \quad \Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

部分多様体の平均曲率ベクトル場 H と部分多様体の type number の関係

1970 年代
- $\Delta H = \lambda H$ となるリーマン部分多様体の type number
- null 2-type かつ H : const なローレンツ曲面の完全分類

1980 年代
- 部分多様体のガウス写像の type number

2007 年
- 球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M^2_1 \subset \mathbb{S}^3_1$ (または $\mathbb{H}^3_1$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H, K が一定

$$\Updownarrow$$

M^2_1 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M^2_1 \subset \mathbb{S}^3_1$ (または $\mathbb{H}^3_1$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H,K が一定

$$\Updownarrow$$

M^2_1 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

	M^2_1		$\tilde{\nu}$	K	H
in $\mathbb{S}^3_1$	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M^2_1 \subset \mathbb{S}^3_1$ (または $\mathbb{H}^3_1$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H,K が一定

$\Updownarrow$

M^2_1 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

	M^2_1		$\tilde{\nu}$	K	H
in $\mathbb{H}^3_1$	(Main Result 1) $S^1_{\mathbb{C}}(\kappa)$ complex circle	$\kappa = -1$	1-type	0	0
		$\kappa \neq -1$	∞-type	0	$\neq 0$
	(Main Result 2) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll	$k_2 = \pm 1$	∞-type	0	$\neq 0$
		$k_2 \neq \pm 1$	null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$
in $\mathbb{S}^3_1$	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A,B,C) : γ 上の Cartan frame field

$$\text{i.e.}\quad \begin{cases} \langle A,A\rangle = \langle B,B\rangle = 0, \quad \langle A,B\rangle = -1, \\ \langle A,C\rangle = \langle B,C\rangle = 0, \quad \langle C,C\rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A, B, C) : γ 上の Cartan frame field

$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1, \\ \dot\gamma(s) = A(s), \\ \dot A(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot C(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot B(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする:

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^3_1 \text{ or } \mathbb{H}^3_1 \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の B-scroll} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad k_2 : \text{const}$$

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A, B, C) : γ 上の Cartan frame field

i.e.
$$\begin{cases} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

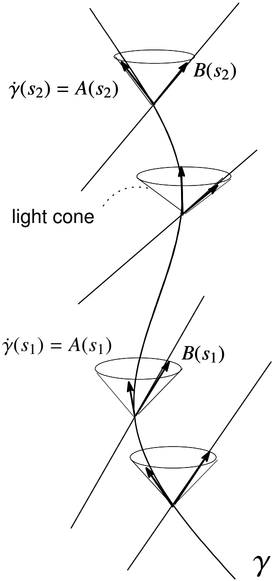
Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする:

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^3_1 \text{ or } \mathbb{H}^3_1 \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の } \textit{B-scroll} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad k_2 : \text{const}$$



<u>Note</u>

- null 曲線 γ と γ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される線織面
- 2 次元非退化ローレンツ曲面
- 形作用素は対角化不可能，実固有値

$\tilde{M}_1^{n+1} = \mathbb{E}_1^{n+1}$ or $\mathbb{S}_1^{n+1}$ or $\mathbb{H}_1^{n+1}$

M_1^n : $\tilde{M}_1^{n+1}$ のローレンツ超曲面

A : M_1^n の形作用素, 対角化不可能, 実固有値

$P(x)$: A の最小多項式

Theorem (M. A. Magid)

A の固有値の個数が *1 or 2* 個 かつ 0 でない固有値が *1* つ以下

$$\Downarrow$$

M_1^n は次のいずれか：

1. M_1^n *: generalized cylinder*
2. M_1^n *: generalized umbilical hypersurface*

$\tilde{M}_1^{n+1} = \mathbb{E}_1^{n+1}$ or $\mathbb{S}_1^{n+1}$ or $\mathbb{H}_1^{n+1}$
M_1^n : $\tilde{M}_1^{n+1}$ のローレンツ超曲面
A : M_1^n の形作用素, 対角化不可能, 実固有値
$P(x)$: A の最小多項式

Theorem (M. A. Magid)

A の固有値の個数が *1 or 2* 個 かつ 0 でない固有値が *1* つ以下

$$\Downarrow$$

M_1^n は次のいずれか：

1. M_1^n *: generalized cylinder* $\cdots$ ゼロ固有値を持つ
2. M_1^n *: generalized umbilical hypersurface* $\cdots$ ゼロ固有値を持たない

$\tilde{M}_1^{n+1} = \mathbb{E}_1^{n+1}$ or $\mathbb{S}_1^{n+1}$ or $\mathbb{H}_1^{n+1}$

M_1^n : $\tilde{M}_1^{n+1}$ のローレンツ超曲面

A : M_1^n の形作用素, 対角化不可能, 実固有値

$P(x)$: A の最小多項式

Theorem (M. A. Magid)

A の固有値の個数が *1 or 2* 個 かつ 0 でない固有値が *1* つ以下

$$\Downarrow$$

M_1^n は次のいずれか：

1. M_1^n : *generalized cylinder*　$\cdots$ ゼロ固有値を持つ
2. M_1^n : *generalized umbilical hypersurface*　$\cdots$ ゼロ固有値を持たない

$$\begin{cases} \textit{degree}\,2 & P(x) = (x-a)^2 \\ \textit{degree}\,3 & P(x) = (x-a)^3 \end{cases}$$

$\tilde{M}^{n+1}_1 = \mathbb{E}^{n+1}_1$ or $\mathbb{S}^{n+1}_1$ or $\mathbb{H}^{n+1}_1$

M^n_1 : $\tilde{M}^{n+1}_1$ のローレンツ超曲面

A : M^n_1 の形作用素, 対角化不可能, 実固有値

$P(x)$: A の最小多項式

Theorem (M. A. Magid)

A の固有値の個数が *1 or 2* 個 かつ 0 でない固有値が *1* つ以下

$$\Downarrow$$

M^n_1 は次のいずれか：

1. M^n_1 : *generalized cylinder* $\cdots$ ゼロ固有値を持つ
2. M^n_1 : *generalized umbilical hypersurface* $\cdots$ ゼロ固有値を持たない

$$\begin{cases} \textit{degree}\,2 & P(x) = (x-a)^2 \quad \leftarrow \text{B-scroll はこの型} \\ \textit{degree}\,3 & P(x) = (x-a)^3 \end{cases}$$

$\tilde{M}$ が指数 1 のとき, 形作用素 A はある基底に関して次の 4 つのいずれかの形をとる.

(I) $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, (II) $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & & & \\ 1 & a_0 & & & \\ & & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix}$,

(III) $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & a_0 & & & \\ & & & a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-3} \end{pmatrix}$, (IV) $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ -b_0 & a_0 & & & \\ & & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix}$,

ここで, $b_0 \neq 0$.

Part 2-2 B-scroll の次元及び指数一般化 $\cdots$ in $\mathbb{S}^{n+1}_2$ or $\mathbb{H}^{n+1}_2$

$\tilde{M}^m_2$ の形作用素

$$
\color{red}{\left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda & 0 & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ \hline & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{array}\right)},
\quad
\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} \lambda & 0 & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & \\ \hline & & \lambda & 0 & & & \\ & & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & & \lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda \end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ \hline & & & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda \end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda & 0 & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & \\ & 1 & \lambda & 0 & & & \\ & & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & & \lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda \end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \lambda & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & \\ \hline & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda \end{array}\right)
$$

$\tilde{M}^m_2$ の形作用素

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc}
\lambda & 0 & & & \\
1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & \lambda & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \lambda
\end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{cc|cc|ccc}
\lambda & 0 & & & & & \\
1 & \lambda & & & & & \\
\hline
 & & \lambda & 0 & & & \\
 & & 1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & \lambda
\end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\lambda & & & & & \\
1 & \lambda & & & & \\
 & 1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & & \lambda & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \lambda
\end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\lambda & & & & & & & & \\
1 & \lambda & & & & & & & \\
 & 1 & \lambda & & & & & & \\
\hline
 & & & \lambda & & & & & \\
 & & & 1 & \lambda & & & & \\
 & & & & 1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\lambda & 0 & & & & & \\
1 & \lambda & & & & & \\
 & 1 & \lambda & 0 & & & \\
 & & 1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & \lambda
\end{array}\right),
\quad
\left(\begin{array}{ccccc|ccc}
\lambda & & & & & & & \\
1 & \lambda & & & & & & \\
 & 1 & \lambda & & & & & \\
 & & 1 & \lambda & & & & \\
 & & & 1 & \lambda & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \lambda
\end{array}\right)
$$

Main Result 3 (H. Kobayashi)

degree 2 の generalized umbilical hypersurface in $\mathbb{S}^{n+1}_2$ or $\mathbb{H}^{n+1}_2$ の具体例を構成

γ : $\mathbb{E}^m_1$ の null 曲線

$(A, B, C, Z_1, \ldots, Z_{m-3})$: γ に沿う Cartan frame field

M : generalized B-scroll $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M : $\mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$

γ : $\mathbb{E}^m_1$ の null 曲線

$(A, B, C, Z_1, \ldots, Z_{m-3})$: γ に沿う Cartan frame field

M : generalized B-scroll $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M : $\mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$

Note

- null 曲線 γ と γ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される線織面
- 2 次元非退化ローレンツ曲面
- 形作用素は対角化不可能，実固有値

γ : $\mathbb{E}^m_1$ の null 曲線

$(A, B, C, Z_1, \ldots, Z_{m-3})$: γ に沿う Cartan frame field

$$M : \text{generalized B-scroll} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} M : \mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$$

Note

- null 曲線 γ と γ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される線織面
- 2 次元非退化ローレンツ曲面
- 形作用素は対角化不可能，実固有値

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$$A_H \text{ の最小多項式が } (x - a^2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad M : \textit{generalized B-scroll}$$

($a \in \mathbb{R}$: const)

null 曲線 $\gamma \subset \tilde{M}^m_2$ に沿う Frenet 型フレーム場,

$A := \dot{\gamma}$

null 曲線 $\gamma \subset \tilde{M}^m_2$ に沿う Frenet 型フレーム場,

$A := \dot{\gamma}$

$\nabla_{\dot{\gamma}} A$
- null Type (ii)
- timelike Type (i)
- spacelike

[M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$
"bi-null Cartan frame"

$C := \frac{1}{k_1} \nabla_{\dot{\gamma}} A$

$\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$

B : null s.t. $\langle A, B \rangle = -1$

$\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1 \longrightarrow \tilde{Z}_i$

- $^{\forall}\tilde{Z}_i$: non-null Type (i)
- $^{\exists}\tilde{Z}_i$: null Type (iii)

Part 2-3 B-scroll の指数及び余次元一般化 $\cdots$ in $\mathbb{S}^5_2$ or $\mathbb{H}^5_2$

null 曲線 $\gamma \subset \tilde{M}^m_2$ に沿う Frenet 型フレーム場,

$A := \dot{\gamma}$

$\nabla_{\dot{\gamma}} A$
- null Type (ii) $\leftarrow$ [M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$ "bi-null Cartan frame"
- timelike Type (i)
- spacelike
  $C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot{\gamma}} A$
  $\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$
  B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$
  $\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1 \longrightarrow \tilde{Z}_i$
  - $^\forall \tilde{Z}_i$: non-null Type (i)
  - $^\exists \tilde{Z}_i$: null Type (iii)

別証明

$$\begin{cases} \text{Type (i) : Cartan frame field} & \cdots \text{H. Kobayashi} \\ \text{Type (ii) : bi-null Cartan frame field} & \cdots \text{M. Sakaki–A. Uçum–K. İlarslan} \\ \text{Type (iii)} & \cdots m = 5 \text{ のとき，H. Kobayashi} \end{cases}$$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

M : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ における *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$P(x)$: A_H の最小多項式

M が *generalized B-scroll* のとき，$P(x)$ は次のいずれかである：

Main Result 4 (H. Kobayashi)

M : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ における *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$P(x)$: A_H の最小多項式

M が *generalized B-scroll* のとき，$P(x)$ は次のいずれかである：

1. Z_1 : *non-null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$

Type (i) $\cdots Z_1$ が non-null のとき

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon\gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \tag{1}$$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

M : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ における *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$P(x)$: A_H の最小多項式

M が *generalized B-scroll* のとき，$P(x)$ は次のいずれかである：

1. Z_1 : *non-null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$
2. Z_1 : *null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - k_2^2)^2$

Type (i) $\cdots Z_1$ が non-null のとき

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon\gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \tag{1}$$

Type (iii) $\cdots Z_1$ が null のとき

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon\gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \tag{2}$$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

M : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ における *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$P(x)$: A_H の最小多項式

M が *generalized B-scroll* のとき，$P(x)$ は次のいずれかである：

1. Z_1 : *non-null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$
2. Z_1 : *null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - k_2^2)^2$

Type (i) $\cdots Z_1$ が non-null のとき

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \tag{1}$$

Type (iii) $\cdots Z_1$ が null のとき

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \tag{2}$$