

研究内容の紹介 (20 分)

東京理科大学理学研究科 小林 穂乃香

山口大学面接 於
2022 年 9 月 5 日

擬リーマン多様体とは

g : M 上の対称 $(0, 2)$ テンソル場
 $X, Y \in TM$

(M, g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量
... 正定値

i. e. $g(X, X) \geq 0$ for all X , and
 $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M, g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量
... 非退化

i. e. $g(X, Y) = 0$ for all $Y \in TM$
 $\Rightarrow X = 0$

Definition

X : *spacelike* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle > 0$ or $X = 0$

X : *timelike* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle < 0$

X : *null* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle X, X \rangle = 0$ and $X \neq 0$

擬リーマン多様体とは

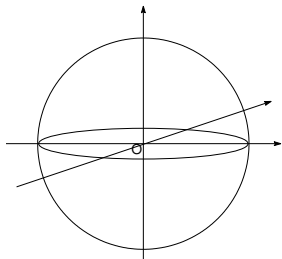
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m+1}), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathbb{E}_s^{m+1} \quad \begin{cases} s = 0: \text{リーマン多様体} \\ s = 1: \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := - \sum_{i=1}^s x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j \quad s: \text{指数}$$

リーマン多様体

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

$$\mathbb{H}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$

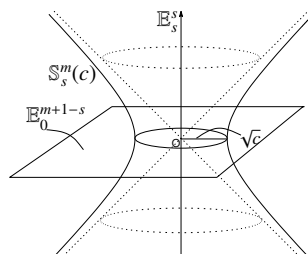


\mathbb{S}_s^n と \mathbb{H}_{n-s}^n は
反等長

擬リーマン多様体

$$\mathbb{S}_1^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

$$\mathbb{H}_1^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_2^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$



擬リーマン多様体とは

1905 特殊相対性理論 (A. Einstein)
この世界を, 空間 3 次元と時間 1 次元の"時空"として考える
正定値とは限らない計量を持つ多様体を導入

1908 ミンコフスキー幾何学 (H. Minkowski)
特殊相対性理論を幾何学として再構成
時空は 4 次元の空間として記述される

1915-1916 一般相対性理論 (A. Einstein)
重力を時空の曲がりとして捉える, リーマン幾何学を応用



擬リーマン幾何学

擬リーマン多様体とは

例 2. 重力場における光の軌跡



これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle, \rangle)$: 擬球面 \mathbb{S}_s^m または 擬双曲空間 \mathbb{H}_s^m

(M, \langle, \rangle) : \tilde{M} の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : \tilde{M} の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part I ... 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

Part II ... generalizations of B-scroll in \tilde{M}_s^m

- generalized umbilical hypersurface in \tilde{M}_1^{n+1} ... 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in \tilde{M}_2^{n+1} ... 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in \mathbb{S}_2^5 or \mathbb{H}_2^5 ... 指数及び余次元一般化

部分多様体の平均曲率 H と部分多様体の type number の関係

- 1970 年代
 - $\Delta H = \lambda H$ となるリーマン部分多様体の type number
 - null 2-type かつ $H : \text{const}$ なローレンツ曲面の完全分類
- 1980 年代
 - 部分多様体のガウス写像の type number
- 2007 年
 - 球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^m$: 等長はめ込み

$(e_1^p, \dots, e_n^p) : M$ の向きと適合する $T_p M$ の正規直交フレーム

ガウス写像 $\nu \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nu(p) := e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

球面的ガウス写像 $\tilde{\nu} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tilde{\nu}(p) := \mathbf{x}(p) \wedge e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$ (または \mathbb{H}_1^3) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H, K が一定



M_1^2 は B -scroll または $complex\ circle$ どちらかの開部分



	M_1^2		$\tilde{\nu}$	K	H
in \mathbb{H}_1^3	(Main Result 1) $S_{\mathbb{C}}^1(\kappa)$ complex circle	$\kappa = -1$	1-type	0	0
		$\kappa \neq -1$	∞ -type	0	$\neq 0$
	(Main Result 2) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll	$k_2 = \pm 1$	∞ -type	0	$\neq 0$
		$k_2 \neq \pm 1$	null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$
in \mathbb{S}_1^3	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

$\gamma : \mathbb{S}_1^3$ または \mathbb{H}_1^3 の null 曲線
 $(A, B, C) : \gamma$ 上の **Cartan frame field**

$$\text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, B \rangle = -1, \\ \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = \textcolor{red}{k}_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{array} \right.$$

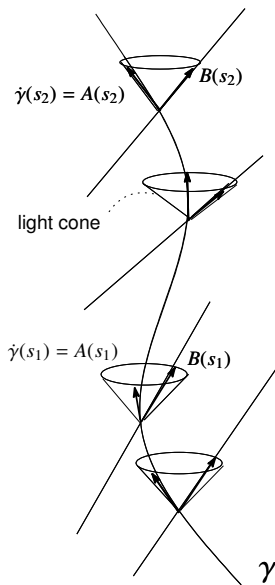
Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする：

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}_1^3 \text{ or } \mathbb{H}_1^3 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の } \textcolor{red}{B}\text{-scroll} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \textcolor{red}{k}_2 : \text{const}$$



$$\tilde{M}_1^{n+1} = \mathbb{E}_1^{n+1} \text{ or } \mathbb{S}_1^{n+1} \text{ or } \mathbb{H}_1^{n+1}$$

M_1^n : \tilde{M}_1^{n+1} のローレンツ超曲面, isoparametric

A : M_1^n の形作用素, 対角化不可能

$P(x)$: A の最小多項式

Theorem (M. A. Magid)

A の固有値の個数が 1 or 2 個 かつ 0 でない固有値が 1 つ以下



M_1^n は次のいずれか：

- ① M_1^n : *generalized cylinder* ... ゼロ固有値を持つ
- ② M_1^n : *generalized umbilical hypersurface* ... ゼロ固有値を持たない

$$\begin{cases} \text{degree 2} & P(x) = (x - a)^2 \quad \leftarrow \text{B-scroll はこの型} \\ \text{degree 3} & P(x) = (x - a)^3 \end{cases}$$

generalizations of B-scroll in \tilde{M}_s^m

\tilde{M} が指数 1 のとき, 形作用素 A はある基底に関して次の 4 つのいずれかの形をとる.

$$(I) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

$$(II) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & & \\ 1 & a_0 & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$(III) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 1 \\ -1 & 0 & a_0 \\ & & & a_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (IV) \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & \\ -b_0 & a_0 & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

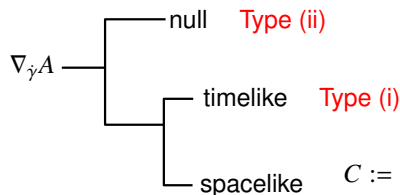
ここで, $b_0 \neq 0$.

M_2^n の形作用素

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \lambda & 0 & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \lambda & 1 & \lambda \\ & & & 1 & \lambda & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$$

$s = 2$ のとき $\gamma : \tilde{M}_2^m$ の null 曲線, $A := \dot{\gamma}$.



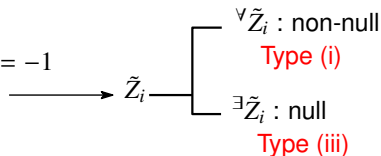
[M.Sakaki (2012)] \mathbb{E}_2^n
"bi-null Cartan curve"

$$C := \frac{1}{k_1} \nabla_{\dot{\gamma}} A$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$$

$$B : \text{null s.t. } \langle A, B \rangle = -1$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1$$



$\gamma \subset \tilde{M}_2^m$ に沿う Frenet 型フレーム場

別証明

- | | | |
|---|--|-----------------------------------|
| { | Type (i) : Cartan frame field | ... H. Kobayashi |
| | Type (ii) : bi-null Cartan frame field | ... M. Sakaki–A. Uçum–K. Ilarslan |
| | Type (iii) | ... $m = 5$ のとき, H. Kobayashi |

Cartan frame (E. Cartan) : \mathbb{E}_1^3 における null 曲線に沿う

Frenet 型フレーム



一般次元ローレンツ多様体 M_1^n に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)



よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)



指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

別証明

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{non-null かつ } \exists Z_i : \text{non-null のとき, Cartan frame (H. Kobayashi)} \\ \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{null のとき, bi-null Cartan frame (M. Sakaki–A. Uçum–K. Ilarslan)} \end{array} \right.$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

degree 2 の generalized umbilical hypersurface in \mathbb{S}_2^{n+1} or \mathbb{H}_2^{n+1} の具体例を構成

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

 $M : \mathbb{E}_1^m$ の null scroll $H : M$ の平均曲率ベクトル場 $A_H : M$ の H 方向の形作用素

$$A_H \text{ の最小多項式が } (x - a^2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad M : \text{generalized B-scroll} \\ (a \in \mathbb{R} : \text{const})$$

ここで,

 $(A, B, C, Z_1, \dots, Z_m) : \gamma$ に沿う Cartan frame field

$$M : \text{generalized B-scroll} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} M : \mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$$

Note M は 2 次元非退化ローレンツ曲面

Main Result 5 (H. Kobayashi)

M : \mathbb{S}_2^5 or \mathbb{H}_2^5 における null scroll

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

$P(x)$: A_H の最小多項式

M が generalized B-scroll のとき, $P(x)$ は次のいずれかである :

$$(i) \quad Z_1 : \text{non-null} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2,$$

$$(ii) \quad Z_1 : \text{null} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - k_2^2)^2.$$

Type (i) (H. Kobayashi)

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \quad (1)$$

Type (iii) (H. Kobayashi)

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon \gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \quad (2)$$