研究内容の紹介（20 分）

東京理科大学理学研究科　小林 穂乃香

山口大学面接 於
2022 年 9 月 5 日

擬リーマン多様体とは

g : M 上の対称 $(0,2)$ テンソル場
$X, Y \in TM$

<u>(M,g) : リーマン多様体</u>

g : M 上のリーマン計量 i. e. $g(X,X) \geq 0$ *for all* X*, and*
$\cdots$ 正定値 $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

擬リーマン多様体とは

g ：M 上の対称 $(0,2)$ テンソル場
$X, Y \in TM$

(M, g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量 i. e. $g(X,X) \geq 0$ *for all* X, *and*
$\cdots$ 正定値 $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M, g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量 i. e. $g(X,Y) = 0$ *for all* $Y \in TM$
$\cdots$ 非退化 $\Rightarrow X = 0$

擬リーマン多様体とは

g : M 上の対称 $(0,2)$ テンソル場
$X,\ Y \in TM$

(M, g) : リーマン多様体

g : M 上のリーマン計量 ··· 正定値　　i. e.　$g(X,X) \geq 0$ *for all* X, *and* $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(M, g) : 擬リーマン多様体

g : M 上の擬リーマン計量 ··· 非退化　　i. e.　$g(X,Y) = 0$ *for all* $Y \in TM$ $\Rightarrow X = 0$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1}),\quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \in \mathbb{E}^{m+1}_s$$

$\begin{cases} s = 0 : \text{リーマン多様体} \\ s = 1 : \text{ローレンツ多様体} \end{cases}$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := -\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{j=s+1}^{m+1} x_j y_j$$

s : 指数

擬リーマン多様体とは

1905　**特殊相対性理論**（A. Einstein）

この世界を, 空間 3 次元と時間 1 次元の”時空”として考える

正定値とは限らない計量を持つ多様体を導入

1908　**ミンコフスキー幾何学**（H. Minkowski）

特殊相対性理論を幾何学として再構成

時空は 4 次元の空間として記述される

1915-1916　**一般相対性理論**（A. Einstein）

重力を時空の曲がりとして捉える, リーマン幾何学を応用

↓

擬リーマン幾何学

これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線　i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線　i.e. $\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part I $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,

形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part I $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

Part II $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$
- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_2$
- generalized B-scroll in $\mathbb{S}^5_2$ or $\mathbb{H}^5_2$

これまでの研究の概要

$(\tilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$: 擬球面 $\mathbb{S}^m_s$ または 擬双曲空間 $\mathbb{H}^m_s$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$: $\tilde{M}$ の擬リーマン曲面,
形作用素が対角化不可能, 平均曲率とスカラー曲率が一定

γ : $\tilde{M}$ の null 曲線 i.e. $\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0$ かつ $\dot{\gamma} \neq 0$

Part I $\cdots$ 擬双曲的ガウス写像による分類

- B-scroll または complex circle の擬双曲的ガウス写像

Part II $\cdots$ generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$

- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_1$ $\cdots$ 次元一般化
- generalized umbilical hypersurface in $\tilde{M}^{n+1}_2$ $\cdots$ 指数及び次元一般化
- generalized B-scroll in $\mathbb{S}^5_2$ or $\mathbb{H}^5_2$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

Part I

擬双曲的ガウス写像による分類

部分多様体の平均曲率 H と部分多様体の type number の関係

1970 年代
- $\Delta H = \lambda H$ となるリーマン部分多様体の type number
- null 2-type かつ H : const なローレンツ曲面の完全分類

1980 年代
- 部分多様体のガウス写像の type number

2007 年
- 球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

部分多様体の平均曲率 H と部分多様体の type number の関係

1970 年代　・$\Delta H = \lambda H$ となるリーマン部分多様体の type number
　　　　　・null 2-type かつ H : const なローレンツ曲面の完全分類

1980 年代　・部分多様体のガウス写像の type number

2007 年　・球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像

$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^m$: 等長はめ込み

$(e_1^p, \ldots, e_n^p)$: M の向きと適合する T_pM の正規直交フレーム

ガウス写像 ν $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\nu := e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

球面的ガウス写像 $\tilde{\nu}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{\nu} := \mathbf{x}(p) \wedge e_1^p \wedge \cdots \wedge e_n^p$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M_1^2 \subset \mathbb{S}_1^3$ (または $\mathbb{H}_1^3$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H,K が一定

$\Updownarrow$

M_1^2 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

擬双曲的ガウス写像による分類　… 修士課程における結果

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M^2_1 \subset \mathbb{S}^3_1$ (または $\mathbb{H}^3_1$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

形作用素が対角化不可能 かつ H, K が一定

$$\Updownarrow$$

M^2_1 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

	M^2_1		$\tilde{\nu}$	K	H
in $\mathbb{S}^3_1$	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

擬双曲的ガウス写像による分類　　$\cdots$ 修士課程における結果

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim)

$M^2_1 \subset \mathbb{S}^3_1$ (または $\mathbb{H}^3_1$) : 向きづけられたローレンツ超曲面

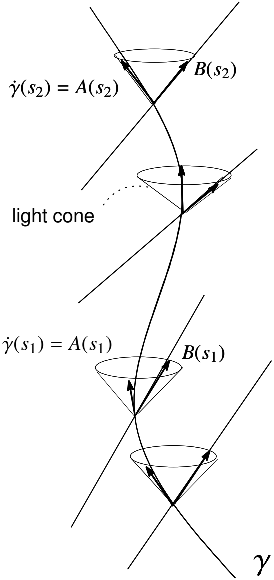
形作用素が対角化不可能 かつ H, K が一定

$$\Updownarrow$$

M^2_1 は *B-scroll* または *complex circle* どちらかの開部分

	M^2_1		$\tilde{\nu}$	K	H
in $\mathbb{H}^3_1$	(Main Result 1) $S^1_{\mathbb{C}}(\kappa)$ complex circle	$\kappa = -1$	1-type	0	0
		$\kappa \neq -1$	∞-type	0	$\neq 0$
	(Main Result 2) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll	$k_2 = \pm 1$	∞-type	0	$\neq 0$
		$k_2 \neq \pm 1$	null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$
in $\mathbb{S}^3_1$	(B–C–D 2017) $\mathcal{B}(k_2)$ B-scroll		null 2-type	$\neq 0$	$\neq 0$

擬双曲的ガウス写像による分類 ··· B-scroll



擬双曲的ガウス写像による分類 $\cdots$ B-scroll

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A, B, C) : γ 上の Cartan frame field

i.e.
$$\begin{cases} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A, B, C) : γ 上の Cartan frame field

$$\text{i.e.}\quad \begin{cases} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする:

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^3_1 \text{ or } \mathbb{H}^3_1 \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の B-scroll} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad k_2 : \text{const}$$

γ : $\mathbb{S}^3_1$ または $\mathbb{H}^3_1$ の null 曲線
(A, B, C) : γ 上の Cartan frame field

i.e.
$$\begin{cases} \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = -1, \\ \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \quad \langle C, C\rangle = 1, \\ \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s). \end{cases}$$

Definition

M を，次のようにパラメータづけされたローレンツ曲面とする:

$$\mathbf{x} : M \hookrightarrow \mathbb{S}^3_1 \text{ or } \mathbb{H}^3_1 \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{x}(s, t) := \gamma(s) + tB(s)$$

このとき，

$$M : \gamma \text{ 上の } \textit{B-scroll} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad k_2 : \text{const}$$

Part II

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}_2^m$

$\tilde{M}^{n+1}_1$: ローレンツ多様体，$\dim\tilde{M} = n+1$
M^n_1 : $\tilde{M}^{n+1}_1$ のローレンツ超曲面，$\dim M = n$
A : M^n_1 の形作用素, 対角化不可能

Definition

M^n_1 : *generalized umbilical hypersurface* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A が 0 でない唯一の実固有値を持つ

A の最小多項式が $P(x) = (x-a)^2$ のとき，M^n_1 を degree 2 の generalized umbilical hypersurface という ($a \in \mathbb{R}$: const)．

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

$\Downarrow$ 一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}_s^m$ $\cdots$ 次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}_1^3$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

$\Downarrow$ 一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

$\Downarrow$ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

$\Downarrow$ 特殊なパラメータをとることでさらにシンプルに

Cartan frame (A. Ferrández–A. Giménez–P. Lucas)

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}_s^m$ $\cdots$ 次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}_1^3$ における null 曲線に沿う Frenet 型フレーム

↓ 一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

↓ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

↓ 特殊なパラメータをとることでさらにシンプルに

Cartan frame (A. Ferrández–A. Giménez–P. Lucas)

- これらは構成の際に screen vercor bundle などの概念が必要

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う Frenet 型フレーム

↓ 一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

↓ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

↓ 特殊なパラメータをとることでさらにシンプルに

Cartan frame (A. Ferrández–A. Giménez–P. Lucas)

- これらは構成の際に screen vercor bundle などの概念が必要

一方，H. Kobayashi–N. Koike による構成方法は

- general Frenet frame を経由せず構成
- 高度な概念必要なし
- γ のパラメータに条件なし

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

↓ 一般次元ローレンツ多様体に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

↓ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

↓ 特殊なパラメータをとることでさらにシンプルに

Cartan frame (A. Ferrández–A. Giménez–P. Lucas)

- これらは構成の際に screen vercor bundle などの概念が必要

一方，H. Kobayashi–N. Koike による構成方法は

- general Frenet frame を経由せず構成
- 高度な概念必要なし
- γ のパラメータに条件なし

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び次元一般化

- $s = 1$ のとき　$\gamma : \tilde{M}^n_1$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot{\gamma}} A$: space like　$C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot{\gamma}} A$ —— $\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$ —— $\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}$ $\cdots$

B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$　　$\tilde{Z}$: spacelike

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び次元一般化

- $s = 1$ のとき　$\gamma : \tilde{M}^n_1$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot\gamma} A$: space like　$C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot\gamma} A$ — $\nabla_{\dot\gamma} C = k_2 A + k_1 B$ — $\nabla_{\dot\gamma} B = k_2 C + \tilde{Z}$ $\cdots$

B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$　　$\tilde{Z}$: spacelike

- $s = 2$ のとき　$\gamma : \tilde{M}^n_2$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot\gamma} A$
- null $\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} A$: spacelike ← $\boxed{\text{[M.Sakaki (2012)] } \mathbb{E}^n_2 \text{ "bi-null Cartan curve"}}$
- timelike
- spacelike
  $C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot\gamma} A$
  $\nabla_{\dot\gamma} C = k_2 A + k_1 B$
  B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$
  $\nabla_{\dot\gamma} B = k_2 C + \tilde{Z}$ ⟶ $\tilde{Z}$
    - non-null $\cdots$
    - null $\cdots$

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び次元一般化

- $s = 1$ のとき　$\gamma : \tilde{M}^n_1$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot\gamma} A$: space like　$C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot\gamma}A$ — $\nabla_{\dot\gamma} C = k_2 A + k_1 B$ — $\nabla_{\dot\gamma} B = k_2 C + \tilde{Z}$ $\cdots$

B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$　　$\tilde{Z}$: spacelike

- $s = 2$ のとき　$\gamma : \tilde{M}^n_2$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot\gamma} A$
- null $\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} A$: spacelike ← [M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$ "bi-null Cartan curve"
- timelike
- spacelike
  - $C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot\gamma}A$
  - $\nabla_{\dot\gamma} C = k_2 A + k_1 B$
  - B : null s.t. $\langle A, B\rangle = -1$
  - $\nabla_{\dot\gamma} B = k_2 C + \tilde{Z}$ → $\tilde{Z}$
    - $^\forall$non-null $\cdots$
    - null $\cdots$

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び次元一般化

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

$\Downarrow$ 一般次元ローレンツ多様体 M^n_1 に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

$\Downarrow$ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

↓ 一般次元ローレンツ多様体 M^n_1 に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

↓ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

↓ 指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

⇓ 一般次元ローレンツ多様体 M^n_1 に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

⇓ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

⇓ 指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

別証明

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{non-null のとき，Cartan frame (H. Kobayashi)} \\ \nabla_{\dot{\gamma}} A : \text{null のとき，bi-null Cartan frame (M. Sakaki–A. Uçum–K. İlarslan)} \end{cases}$$

Cartan frame (E. Cartan) : $\mathbb{E}^3_1$ における null 曲線に沿う
Frenet 型フレーム

⬇ 一般次元ローレンツ多様体 M^n_1 に拡張

general Frenet frame (K. L. Duggal–A. Bejancu)

⬇ よりシンプルな形に再構成

natural Frenet frame (D. H. Jin)

⬇ 指数 2 に拡張

natural Frenet frame with index 2 (K. L. Duggal–A. Bejancu–D. H. Jin)

<u>別証明</u>

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}A : \text{non-null のとき，Cartan frame (H. Kobayashi)} \\ \nabla_{\dot\gamma}A : \text{null のとき，bi-null Cartan frame (M. Sakaki–A. Uçum–K. İlarslan)} \end{cases}$$

Main Result 4 (H. Kobayashi)

degree 2 の generalized umbilical hypersurface in $\mathbb{S}^{n+1}_2$ or $\mathbb{H}^{n+1}_2$ の具体例を構成

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

A_H の最小多項式が $(x-a^2)^2$ $\Rightarrow$ M : *generalized B-scroll*

($a \in \mathbb{R}$: *const*)

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

※ M は 2 次元非退化ローレンツ線織面

$$\boxed{M : \mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)}$$

$\Updownarrow$ def

A_H の最小多項式が $(x - a^2)^2$ $\Rightarrow$ M : *generalized B-scroll*

($a \in \mathbb{R}$: *const*)

$\gamma \subset \mathbb{E}^m_1$ に沿う Cartan frame field

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 \\ \dot{Z}_1 = k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = -k_4 Z_1 + k_5 Z_3 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

※ M は 2 次元非退化ローレンツ線織面

$$\boxed{M:\ \mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)}$$

$\Updownarrow$ def

A_H の最小多項式が $(x - a^2)^2$ $\Rightarrow$ M : *generalized B-scroll*

($a \in \mathbb{R}$: *const*)

A_H の最小多項式が $(x - k_2^2)^2$ $\Leftarrow$ M : *generalized B-scroll*

$\gamma \subset \mathbb{E}^m_1$ に沿う Cartan frame field

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 \\ \dot{Z}_1 = k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = -k_4 Z_1 + k_5 Z_3 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

※ M は 2 次元非退化ローレンツ線織面

$$M:\ \mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$$

$\Updownarrow$ def

A_H の最小多項式が $(x-a^2)^2$ $\Rightarrow$ M : *generalized B-scroll*

($a \in \mathbb{R}$: *const*)

A_H の最小多項式が $(x-k_2^2)^2$ $\Leftarrow$ M : *generalized B-scroll*

$\gamma \subset \mathbb{E}^m_1$ に沿う Cartan frame field

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 \\ \dot{Z}_1 = k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = -k_4 Z_1 + k_5 Z_3 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Theorem (D. S. Kim–Y. H. Kim–D. W. Yoon)

M : $\mathbb{E}^m_1$ の *null scroll*

H : M の平均曲率ベクトル場

A_H : M の H 方向の形作用素

※ M は 2 次元非退化ローレンツ線織面

$$\boxed{M :\ \mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)}$$

$\Updownarrow$ def

A_H の最小多項式が $(x - a^2)^2$ $\Rightarrow$ M : *generalized B-scroll*

($a \in \mathbb{R}$: *const*)

A_H の最小多項式が $(x - k_2^2)^2$ $\Leftarrow$ M : *generalized B-scroll*

$\gamma \subset \mathbb{E}^m_1$ に沿う Cartan frame field

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{A} &= k_1 C \\ \dot{C} &= k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} &= k_2 C + Z_1 \\ \dot{Z}_1 &= k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= -k_4 Z_1 + k_5 Z_3 \\ &\ \ \vdots \end{aligned} \right.$$

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

$\gamma : \tilde{M}^5_2$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

- $\nabla_{\dot{\gamma}} A$
  - null $\Rightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} A$: spacelike $\longleftarrow$ [M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$ "bi-null Cartan curve"
  - timelike Type (i) (H. K)
  - spacelike $C := \frac{1}{k_1} \nabla_{\dot{\gamma}} A$

    $\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$

    $\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1 \longrightarrow \tilde{Z}_1$
    - non-null Type (i) (H. K)
    - null Type (ii) (H. K)

generalizations of B-scroll in $\tilde{M}^m_s$ $\cdots$ 指数及び余次元一般化

$\gamma : \tilde{M}^5_2$ の null 曲線，$A := \dot{\gamma}$.

- $\nabla_{\dot{\gamma}} A$
  - null $\Rightarrow \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}} A$: spacelike $\leftarrow$ [M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$ "bi-null Cartan curve"
  - timelike Type (i) (H. K)
  - spacelike $C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot{\gamma}} A$
    $\nabla_{\dot{\gamma}} C = k_2 A + k_1 B$
    $\nabla_{\dot{\gamma}} B = k_2 C + \tilde{Z}_1 \longrightarrow \tilde{Z}_1$
    - non-null Type (i) (H. K)
    - null Type (ii) (H. K)

Type (i) (H. Kobayashi)

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & -1 & & & \\
-1 & 0 & & & \\
 & & \varepsilon_C & & \\
 & & & \varepsilon_1 & \\
 & & & & \varepsilon_2
\end{pmatrix}
\tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{A} = k_1 C \\
\dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\
\dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon\gamma \\
\dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\
\dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1
\end{cases}
\tag{2}
$$

$\gamma : \tilde{M}^5_2$ の null 曲線, $A := \dot{\gamma}$.

$\nabla_{\dot\gamma} A$
- null $\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} A$: spacelike $\longleftarrow$ [M.Sakaki (2012)] $\mathbb{E}^n_2$ "bi-null Cartan curve"
- timelike Type (i) (H. K)
- spacelike $C := \frac{1}{k_1}\nabla_{\dot\gamma} A$
  $\nabla_{\dot\gamma} C = k_2 A + k_1 B$
  $\nabla_{\dot\gamma} B = k_2 C + \tilde{Z}_1 \longrightarrow \tilde{Z}_1$
  - non-null Type (i) (H. K)
  - null Type (ii) (H. K)

Type (i) (H. Kobayashi)

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \varepsilon_C & & \\ & & & \varepsilon_1 & \\ & & & & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + \varepsilon_C k_1 B \\ \dot{B} = \varepsilon_C k_2 C + k_3 Z_1 + \varepsilon\gamma \\ \dot{Z}_1 = \varepsilon_1 k_3 A + k_4 Z_2 \\ \dot{Z}_2 = \varepsilon_C k_4 Z_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Type (ii) (H. Kobayashi)

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{A} = k_1 C \\ \dot{C} = k_2 A + k_1 B \\ \dot{B} = k_2 C + Z_1 + \varepsilon\gamma \\ \dot{Z}_1 = h Z_1 \\ \dot{Z}_2 = -A - h Z_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *null* 曲線

(A, B, C, Z_1, Z_2) : γ に沿う $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *Cartan frame field* *s.t.* k_2 : *const*

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *null* 曲線
(A, B, C, Z_1, Z_2) : γ に沿う $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *Cartan frame field* *s.t.* k_2 : *const*

M が次の条件を満たすとする：

$$(*) \quad \begin{cases} M : \gamma \text{ と } \gamma \text{ に沿う } \textit{Frenet} \text{ 型フレーム場から構成される } \textit{null scroll} \\ M : 2 \text{ 次元非退化ローレンツ線織面} \end{cases}$$

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *null* 曲線

(A, B, C, Z_1, Z_2) : γ に沿う $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *Cartan frame field* *s.t.* k_2 : *const*

M が次の条件を満たすとする：

$$(*) \quad \begin{cases} M : \gamma \text{ と } \gamma \text{ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される null scroll} \\ M : 2 \text{ 次元非退化ローレンツ線織面} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M は $\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ によりパラメータづけされる．

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *null* 曲線

(A, B, C, Z_1, Z_2) : γ に沿う $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *Cartan frame field* *s.t.* k_2 : *const*

M が次の条件を満たすとする：

$$(*) \quad \begin{cases} M : \gamma \text{ と } \gamma \text{ に沿う } \textit{Frenet} \text{ 型フレーム場から構成される } \textit{null scroll} \\ M : 2 \text{ 次元非退化ローレンツ線織面} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M は $\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ によりパラメータづけされる．

さらに，A_H の最小多項式 $P(x)$ は

(i) Z_1 : *non-null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$,

(ii) Z_1 : *null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - k_2^2)^2$.

Main Result 5 (H. Kobayashi)

γ : $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *null* 曲線

(A, B, C, Z_1, Z_2) : γ に沿う $\mathbb{S}^5_2$ *or* $\mathbb{H}^5_2$ の *Cartan frame field* *s.t.* k_2 : *const*

M が次の条件を満たすとする：

$$(*) \quad \begin{cases} M : \gamma \text{ と } \gamma \text{ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される null scroll} \\ M : 2 \text{ 次元非退化ローレンツ線織面} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M は $\mathbf{x}(s,t) = \gamma(s) + tB(s)$ によりパラメータづけされる．

さらに，A_H の最小多項式 $P(x)$ は

(i) Z_1 : *non-null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - (\varepsilon_C k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$,

(ii) Z_1 : *null* $\Rightarrow$ $P(x) = (x - k_2^2)^2$.

つまり, $\mathbb{S}^5_2$ または $\mathbb{H}^5_2$ における *generalized B-scroll* は *(i)*, *(ii)* のどちらかである．