Université Nangui Abrogoua

Année Universitaire 2019-2020

UFR-SFA

Licence 2 - MI

TD d'ALGÈBRE 3 - Fiche 4

Exercice 1

1) Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 30 & -20 \\ -9 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & -6 & 4 \\ -8 & -16 & 10 \end{pmatrix}$$

(*) Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de A

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 19-X & 30 & -20 \\ -9 & -14-X & 10 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 19-X & 30 \\ -9 & -14-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (1-X)\left[(19-X)(-14-X) + 9 \times 30\right]$$

$$P_A(X) = (1-X)(X^2 - 5X + 4)$$

$$P_A(X) = (1-X)\left[\left(X-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4\right]$$

$$P_A(X) = (1-X)\left[\left(X-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4\right]$$

$$P_A(X) = (1-X)\left[\left(X-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$$

$$P_A(X) = (1-X)\left[\left(X-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

$$P_A(X) = (1-X)\left(X-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(X-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$P_A(X) = (1-X)(X-4)(X-1)$$

$$P_A(X) = (4-X)(X-1)^2$$

Comme les valeurs propres de A sont les racines de P_A, alors les valeurs propres de A sont :

$\lambda_1 = 1$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = 4$ (valeur propre sim

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 1$.

$$u = (x; y; z) \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u=(x;y;z)\in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 30 & -20 \\ -9 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x+30y-20z=0 & (1) \\ -9x-15y+10z=0 & (2) \end{cases}$$

Comme $(-2)\times(2)=(1)$, alors :

$$u=(x;y;z)\in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow -9x-15y+10z=0$$

$$\Leftrightarrow 10z=9x+15y$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{9}{10}x+\frac{3}{2}y$$

$$\Leftrightarrow u=\left(x;y;\frac{9}{10}x+\frac{3}{2}y\right)$$

$$\Leftrightarrow u=\left(x;0;\frac{9}{10}x\right)+\left(0;y;\frac{3}{2}y\right)$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{10}x(10;0;9)+\frac{1}{2}y(0;2;3)$$

Donc $E_{\lambda_1}=\langle v_1;v_2\rangle$, où $v_1=(10;0;9)$ et $v_2=(0;2;3)$

D'où $\dim E_{\lambda_1}=2$ et l'ordre de multiplicité de 1 est 2

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à $\lambda_2=4$.

$$u=(x;y;z)\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow (A-\lambda_2 I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}15 & 30 & -20\\-9 & -18 & 10\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}15x+30y-20z=0 & (1)\\ -9x-18y+10z=0 & (2)\\ -3z=0 & (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}15x+30y=0\\ -9x-18y=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y\\ z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=(-2y;y;0)$$

$$\Leftrightarrow u=y(-2;1;0)$$

Donc, $E_{\lambda_2}=\langle v_3\rangle$, où $v_3=(-2;1;0)$.

(**) Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de B.

$$P_B(X)=\det(B-XI_3)=\begin{vmatrix}-X & -4 & 2\\-4 & -6-X & 4\\-8 & -16 & 10-X\end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -4 & 2 \\ 0 & -6-X & 4 \\ 2-X & -16 & 10-X \end{vmatrix}$$

$$P_B(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -6-X & 4 \\ 1 & -16 & 10-X \end{vmatrix}$$

$l_1 \leftarrow l_1 - l_3$

$$P_B(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 0 & 12 & -8+X \\ 0 & -6-X & 4 \\ 1 & -16 & 10-X \end{vmatrix}$$

$$P_B(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 12 & X-8 \\ -6-X & 4 \end{vmatrix}$$

$$P_B(X) = (2-X)\left[12 \times 4 + (6+X)(X-8)\right]$$

$$P_B(X) = (2-X)(48 + X^2 - 2X - 48)$$

$$P_B(X) = (2-X)(X^2 - 2X)$$

$$P_B(X) = -X(X-2)^2$$

Comme les valeurs propres de B sont les racines de P_B, alors les valeurs propres de B sont :

$\lambda'_1 = 0$ (valeur propre simple) et $\lambda'_2 = 2$ (valeur propre double).

Soit E_1 le sous-espace propre associé à $\lambda'_1 = 0$.

$$u = (x; y; z) \in E_1 \Leftrightarrow (B - \lambda'_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & -6 & 4 \\ -8 & -16 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y + 2z = 0 \\ -4x - 6y + 4z = 0 \\ -8x - 16y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ -4x - 6y + 8z = 0 \\ -8x - 16y + 20y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ -4x + 2y = 0 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \end{cases}$$

$u=(x;y;z)\in E_1 \iff u=(x;2x;4x)$

$\iff u = x(1;2;4)$

Donc $E_1 = \langle w_1 \rangle$, où $w_1=(1;2;4)$

D'où $\dim E_1 = 1$.

Soit E_2 le sous-espace propre associé à $\lambda_2' = 2$.

$$u=(x;y;z)\in E_2 \iff (B-\lambda_2' I_3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2\\ -4 & -8 & 4\\ -8 & -16 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x-4y+2z=0\\ -4x-8y+4z=0\\ -8x-16y+8z=0\end{cases}$$

$\iff -x-2y+z=0$

$\iff z = x+2y$

$\iff u=(x;y;x+2y)$

$\iff u = x(1;0;1)+y(0;1;2)$

91 Donc, $E_2 = \langle w_2, w_3\rangle$, où $w_2=(1;0;1)$ et

$w_3 = (0;1;2)$.

D'où $\dim E_2 = 2$ et l'ordre de multiplicité de λ'_2 est 2.

2) (•) Comme $\dim E_{\lambda_1} = 2$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda_1 = 1$ est 2 et $\dim E_{\lambda_2} = 1$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda_2 = 4$ est 1, alors la matrice A est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B}_1 = \{(10;0;9) ; (0;2;3) ; (-2;1;0)\}$ la base des vecteurs propres de A.

La matrice de passage P de la base canonique B_0 à $\mathcal{B}_1$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(P) = (-3)\left(10\times 1 - 6\times 2\right) = (-3)\times(-2) = 6 \neq 0$$

alors P est inversible.

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -18 \\ -6 & 18 & -30 \\ 4 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times {}^{t}\mathrm{Com}(P) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 9 & 18 & -10 \\ -18 & -30 & 20 \end{pmatrix}$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{3} \\ -3 & -5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

Calculons $D_1 = P^{-1} A P$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{3} \\ -3 & -5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 30 & -20 \\ -9 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{3} \\ -3 & -5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = P^{-1} A P \iff A = P D_1 P^{-1}$$

(••) Comme $\dim E_1 = 1$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda'_1 = 0$ est 1 et $\dim E_2 = 2$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda'_2 = 2$ est 2, alors la matrice B est diagonalisable.

Soit $\mathcal{B}_2 = \{(1;2;4) ; (1;0;1) ; (0;1;2)\}$ la base des vecteurs propres de B.

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_2$ est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0$$

donc Q est inversible.

$$\mathrm{com}(Q) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Com}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \times {}^t\operatorname{com}(Q) = - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ainsi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons $D_2 = Q^{-1} B Q$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & -6 & 4 \\ -8 & -16 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$D_2 = Q^{-1} B Q \Leftrightarrow B = Q D_2 Q^{-1}.$

3) Calculons A^n

Comme $D_1 = P^{-1}AP$, alors $A = PD_1P^{-1}$

d'où $A^n = (PD_1P^{-1})^n = (PD_1P^{-1})(PD_1P^{-1})\dots(PD_1P^{-1})$

ainsi $A^n = PD_1^nP^{-1}$

or $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

alors $A^n = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{3} \\ -3 & -5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{3} \\ -3\times4^n & -5\times4^n & \frac{10}{3}\times4^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 6\times4^n-5 & 10(4^n-1) & \frac{20}{3}(1-4^n) \\ 3(1-4^n) & 6-5\times4^n & \frac{10}{3}(4^n-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$