Exercice 4

Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G.

Montions que l'ordre de $f(G')$ divise l'ordre de G' et de H

Comme G' est un sous-groupe de G et que f est un morphisme de groupes, alors $f(G')$ est un sous-groupe de H.

Et comme H est un groupe fini et que $f(G')$ est un sous-groupe de H, alors d'aprè le Théorème de LAGRANGE l'ordre de $f(G')$ divise l'ordre de H.

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{f} : G' &\longrightarrow f(G') \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Donc $\tilde{f}$ est la restriction de f à G'.

Et $\tilde{f}$ est bel et bien un morphisme de groupes.

Ainsi d'aprè le Premier Théorème d'isomorphisme

$$G'/_{\mathrm{Ker}\,\tilde{f}} \simeq \mathrm{Im}\,\tilde{f}$$

or $\operatorname{Im} \tilde{f} = f(G')$ d'après la définition de $\tilde{f}$;

donc $G'/_{\ker \tilde{f}} \simeq f(G')$

ainsi $\left| G'/\ker \tilde{f} \right| = |f(G')|$

or $\left| G'/\ker \tilde{f} \right| = \dfrac{|G'|}{|\ker \tilde{f}|}$

alors, $\dfrac{|G'|}{|\ker \tilde{f}|} = |f(G')|$

d'où $|G'| = |\ker \tilde{f}|\,|f(G')|$

Par conséquent, $|f(G')|$ divise $|G'|$.

or $\mathrm{Im}\,\tilde{f} = f(G')$ d'après la définition de $\tilde{f}$;

donc $G'/_{\mathrm{Ker}\tilde{f}} \simeq f(G')$

ainsi $\left| G'/\mathrm{Ker}\,\tilde{f} \right| = |f(G')|$

or $\left| G'/\mathrm{Ker}\,\tilde{f} \right| = \dfrac{|G'|}{|\mathrm{Ker}\,\tilde{f}|}$

alors, $\dfrac{|G'|}{|\mathrm{Ker}\,\tilde{f}|} = |f(G')|$

d'où $|G'| = |\mathrm{Ker}\,\tilde{f}|\,|f(G')|$

Par conséquent, $|f(G')|$ divise $|G'|$.