Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

P_n : 3 divise $4^n - 1$ et Q_n : 3 divise $4^n + 1$.

1) Montrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit n un entier naturel.

On sait que : $4 \equiv 1\ [3]$

alors $4^n \equiv 1^n\ [3]$

donc $4^n \equiv 1\ [3]$ (car $1^n = 1$).

d'où $4^n - 1 \equiv 0\ [3]$

ainsi $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.) Donnons notre avis sur l'assertion :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, Q_n est vraie

D'après la question 1°), on a:

$$4^n - 1 \equiv 0 \, [3] \ , \forall n \in \mathbb{N} ;$$

alors $4^n \equiv 1 \, [3] \ , \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $4^n + 1 \equiv 2 \, [3] , \forall n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, cette assertion est fausse.