Exercice 6

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) $n^3 - n$ est divisible par 6

On sait que $6 = 2 \times 3$.

Soit n un entier naturel ;

d'après le Petit Théorème de Fermat, on a:

$$n^2 \equiv n\,[2] \Rightarrow n^3 \equiv n^2\,[2]$$

$$\Rightarrow n^3 \equiv n\,[2] \quad (\text{Car } n^2 \equiv n\,[2]).$$

$$\Rightarrow n^3 - n \equiv 0\,[2]$$

D'autre part, on a: $n^3 \equiv n\,[3]$

d'où $n^3 - n \equiv 0\,[3]$.

Or 2 et 3 sont premiers entre eux ;

alors $n^3 - n \equiv 0\,[6]$

Par conséquent, $n^3 - n$ est divisible par 6.

2) $n^5 - n$ est divisible par 30.

On sait que : $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Soit n un entier naturel.

Alors d'après le Petit Théorème de Fermat, on a : $n^2 \equiv n\,[2]$; $n^3 \equiv n\,[3]$ et $n^5 \equiv n\,[5]$.

(*) $n^2 \equiv n\,[2] \Rightarrow n^3 \equiv n^2\,[2]$

$\Rightarrow n^3 \equiv n\,[2]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n^3\,[2]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n\,[2]$

$\Rightarrow n^5 - n \equiv 0\,[2]$

(**) $n^3 \equiv n\,[3] \Rightarrow n^5 \equiv n^3\,[3]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n\,[3]$

$\Rightarrow n^5 - n \equiv 0\,[3]$

(***) $n^5 \equiv n\,[5] \Rightarrow n^5 - n \equiv 0\,[5]$

Comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux,

alors $n^5 - n \equiv 0\ [30]$

d'où $n^5 - n$ est divisible par 30.

3-) <u>$n^7 - n$ est divisible par 42</u>

On sait que : $42 = 2 \times 3 \times 7$

Soit n un entier naturel. Alors d'après le Petit Théorème de Fermat, on a :

$n^2 \equiv n\ [2]$; $n^3 \equiv n\ [3]$ et $n^7 \equiv n\ [7]$.

(i) $n^2 \equiv n\ [2] \Rightarrow n^3 \equiv n^2\ [2]$

$\Rightarrow n^3 \equiv n\ [2]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n^3\ [2]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n\ [2]$

$\Rightarrow n^7 \equiv n^3\ [2]$

$\Rightarrow n^7 \equiv n\ [2]$

$\Rightarrow n^7 - n \equiv 0\ [2]$

(ii) $n^3 \equiv n\ [3] \Rightarrow n^5 \equiv n^3\ [3]$

$\Rightarrow n^5 \equiv n\ [3]$

$\Rightarrow n^7 \equiv n^3\ [3]$

$\Rightarrow n^7 \equiv n\ [3]$

$\Rightarrow n^7 - n \equiv 0\ [3]$

(iii) $n^7 \equiv n\ [7] \Rightarrow n^7 - n \equiv 0\ [7]$

Comme 2, 3 et 7 sont premiers entre eux,

alors $n^7 - n \equiv 0\ [42]$

D'où $n^7 - n$ est divisible par 42.