Exercice 2

Calculons, à l'aide du Théorème de Hamilton - Cayley, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -5 & 2 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 7 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -3-X & -5 & 2 \\ 0 & -X & -1 \\ 3+X & 7 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = (3+X) \begin{vmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -X & -1 \\ 1 & 7 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$l_3 \leftarrow l_3 + l_1$$

$$P_M(X) = (3+X) \begin{vmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = -(3+X) \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 2 & -X \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = -(3+X)(X^2+2) = -X^3 - 3X^2 - 2X - 6$$

Comme P_M est le polynôme caractéristique de M, alors d'après le Théorème de Hamilton-Cayley $P_M(M) = 0$, où 0 est la matrice nulle.

$$P_M(M) = 0 \Leftrightarrow -M^3 - 3M^2 - 2M - 6I_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -M^3 - 3M^2 - 2M = 6I_3$$

$$\Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{6}M^2 - \frac{1}{2}M - \frac{1}{3}I_3\right) = I_3$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} = -\frac{1}{6}M^2 - \frac{1}{2}M - \frac{1}{3}I_3$$

or $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -10 & -19 & -1 \end{pmatrix}$

alors $M^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 19 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -10 & -19 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{19}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{19}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Par conséquent, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$