Exercice 2

Soit G un groupe tel que l'application $x \mapsto x^{-1}$ soit un morphisme.

Montrons que G est commutatif

Soit $\varphi : G \longrightarrow G$
$\quad\quad x \longmapsto x^{-1}$.

Soient a et b deux éléments de G.

Comme G est un groupe, alors : $a, b \in G \Rightarrow a.b \in G$;

donc $(ab)^{-1} \in G$ et $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Donc $\varphi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ $(*)$

Et comme φ est un morphisme de groupe, alors

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a^{-1}b^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi(ab) = a^{-1}b^{-1} \quad (**)$$

D'après $(*)$ et $(**)$, on a: $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Or $a, b \in G \Rightarrow a^{-1}, b^{-1} \in G$;

alors $(a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$

c'est c'est-à-dire : $ab = ba$

Par conséquent, G est commutatif.

5 **NB**: En théorie des groupes, si on ne donne pas la loi d'un groupe, on prend la loi . pour ce groupe.