Exercice 3

Réduisons sur $\mathbb{C}$ les matrices suivantes

1) $$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3}-X & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1-X & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3}-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-1-X)\begin{vmatrix} -\frac{4}{3}-X & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-1-X)\left[\left(\frac{4}{3}+X\right)\left(\frac{5}{3}+X\right) - \frac{2}{9}\right]$$

$$P_A(X) = -(1+X)\left(X^2 + 3X + \frac{20}{9} - \frac{2}{9}\right)$$

$$P_A(X) = -(1+X)\left(X^2+3X+2\right)$$

$$P_A(X) = -(1+X)(X+1)(X+2) = -(X+1)^2(X+2)$$

Donc les valeurs propres de A sont :

$\lambda_1 = -2$ (valeur simple) et $\lambda_2 = -1$ (valeur propre double)

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -2$.

$$u = (x; y; z) \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}z = 0 \\ y = 0 \\ -\frac{1}{3}x - 2y + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (z; 0; z)$$

$$\Leftrightarrow u = z(1; 0; 1)$$

Donc $E_{\lambda_1} = \langle v_1 \rangle$, où $v_1 = (1; 0; 1)$.

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = -1$.

$$u = (x; y; z) \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u=(x;y;z)\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x+y-\frac{2}{3}z=0 & (1) \\ -\frac{1}{3}x-2y-\frac{2}{3}z=0 & (2) \end{cases}$$

or $(1)-(2) \Rightarrow 3y=0$

alors $-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}z=0 \Rightarrow x=-2z$

d'où $u=(x;y;z)\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow u=(-2z;0;z)$

$$\Leftrightarrow u=z(-2;0;1)$$

Donc $E_{\lambda_2}=\langle v_2\rangle$, où $v_2=(-2;0;1)$.

Ainsi $\dim E_{\lambda_2}=1<2$ et comme 2 est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda_2=-1$ alors la matrice A n'est pas diagonalisable.

Mais comme $\lambda_1=-2\in\mathbb{R}$ et $\lambda_2=-1\in\mathbb{R}$, alors la matrice A est triangularisable

Soit $V_3 = (a;b;c)$ tel que $AV_3 = V_2 - V_3$

$$AV_3 = V_2 - V_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}a + b - \frac{2}{3}c = -2 - a \\ -b = -b \\ -\frac{1}{3}a - 2b - \frac{5}{3}c = 1 - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c - 2 \\ 2b = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c - 2 \\ 3b = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a + 2c = 3 \end{cases}$$

103 Prenons $c = 0 \Rightarrow a = 3$ et $b = -1$

$V_3 = (3; -1; 0)$

Soit $\mathcal{B}_1 = \{V_1; V_2; V_3\}$ une base de $\mathbb{C}^3$.

la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base canonique $\mathcal{B}_0$ est : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(P_1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0$$

donc P_1 est inversible.

$$\mathrm{Com}(P_1) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1^{-1} = \frac{1}{\det(P_1)} \times {}^t\mathrm{Com}(P_1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $T = P_1^{-1} A P_1$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 2/3 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad A = P_1 T P_1^{-1}.$$

2.) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -4 & -3-X & -1 \\ 0 & -2 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -3-X & -1 \\ -2 & -1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$P_B(X) = (1-X)\left[(3+X)(1+X) - 2\right] + 4(1+X)$$

$P_B(X) = -X^3 - 3X^2 - X - 3$

$P_B(X) = -(X+3)(X^2+1) = -(X+3)(X-i)(X+i)$

Alors les valeurs propres de B sont :

$\lambda'_1 = -3$; $\lambda'_2 = i$ et $\lambda'_3 = -i$

Comme les valeurs de B appartiennent à $\mathbb{C}$ et sont simples, alors B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Soit E_1 le sous-espace propre associé à $\lambda'_1 = -3$.

$$u = (x; y; z) \in E_1 \Leftrightarrow (B - \lambda'_1 I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \\ -4x - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ z = -4x \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (x; -4x; -4x) = x(1; -4; -4)$$

Donc $E_1 = \langle w_1 \rangle$ où $w_1 = (1; -4; -4)$

Soit E_2 le sous-espace propre associé à $\lambda_2' = i$

$u = (x; y; z) \in E_2 \Leftrightarrow (B - \lambda_2' I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ -4 & -3-i & -1 \\ 0 & -2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)x + y = 0 \\ -4x - (3+i)y - z = 0 \\ -2y - (1+i)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (i-1)x \\ z = -4x - (3+i)y \\ y = \frac{1}{2}(1+i)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (i-1)x \\ z = -2ix \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (x; (i-1)x; -2ix)$$

$$\Leftrightarrow u = x(1; i-1; -2i)$$

107 D'où $E_2 = \langle w_2 \rangle$, où $w_2 = (1; i-1; -2i)$.

Soit E_3 le sous-espace propre associé à $\lambda_3' = -i$

$$u = (x; y; z) \in E_3 \iff (B - \lambda_3' I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ -4 & -3+i & -1 \\ 0 & -2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (1+i)x + y = 0 \\ -4x - (3-i)y - z = 0 \\ -2y - (1+i)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -(1+i)x \\ z = -4x - (3-i)y \\ y = -\frac{1}{2}(1+i)z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -(1+i)x \\ z = 2ix \end{cases}$$

$$\iff u = (x; (-1-i)x; 2ix)$$

$$\iff u = x(1; -1-i; 2i)$$

Donc $E_3 = \langle w_3 \rangle$, où $w_3 = (1; -1-i; 2i)$

Soit $\mathcal{B}_2 = \{w_1 ; w_2 ; w_3\}$ la base des vecteurs propres de B. Et soit P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base canonique $\mathcal{B}_0$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & i-1 & -1-i \\ 4 & -2i & 2i \end{pmatrix}$$

$$D_2 = P_2^{-1} B P_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

3.) $$C = \begin{pmatrix} 5+3i & -6+8i & 12-4i \\ 6+4i & -7+11i & 16-6i \\ 5-2i & 4+11i & 5-14i \end{pmatrix}$$

On montre que les valeurs propres de C sont :

$\lambda_1'' = 1$; $\lambda_2'' = 1-i$ et $\lambda_3'' = 1+i$.

Comme les valeurs propres de C appartiennent à $\mathbb{C}$ et sont toutes simples, alors C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.