Exercice 3

Soient G un groupe d'ordre n et H un sous-groupe de G.

Montrons que l'ensemble $N(H)$ des éléments x de G tels que $xHx^{-1} = H$, appelé normalisateur de H, est un sous-groupe distingué de G

① $N(H) = \{x \in G \,;\, xHx^{-1} = H\}$

(i) Comme $1_G \in G$, et $1_G H 1_G^{-1} = H 1_G = H$

alors $1_G \in N(H)$.

D'où $N(H)$ est non vide.

(ii) Soient x_1 et x_2 deux éléments de $N(H)$.

alors $x_1 H x_1^{-1} = H$ et $x_2 H x_2^{-1} = H$

50 Comme $x_1, x_2 \in G$, alors $x_1 x_2 \in G$

et $(x_1 x_2)^{-1} = x_2^{-1} x_1^{-1}$

$(x_1 x_2) H (x_2^{-1} x_1^{-1}) = x_1 (x_2 H x_2^{-1}) x_1^{-1}$

$(x_1 x_2) H (x_2^{-1} x_1^{-1}) = x_1 H x_1^{-1}$

$(x_1 x_2) H (x_2^{-1} x_1^{-1}) = H$

donc $(x_1 x_2) H (x_1 x_2)^{-1} = H$

ainsi $x_1 x_2 \in N(H)$.

(iii) Soit x un élément de $N(H)$.

alors $x H x^{-1} = H$ et $x x^{-1} = x^{-1} x = 1_G$

donc $(x H x^{-1}) x = H x$

d'où $x^{-1} (x H x^{-1}) x = x^{-1} H x$

c'est-à-dire, $(x^{-1} x) H (x^{-1} x) = x^{-1} H (x^{-1})^{-1}$

51 alors, $H = x^{-1} H (x^{-1})^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in N(H)$

Comme $x x^{-1} = x^{-1} x = 1_G$ et $x^{-1} \in N(H)$;

alors x^{-1} est le symétrique de x dans $N(H)$

Ainsi tous les éléments de $N(H)$ sont symétrisables

D'après (i), (ii) et (iii), $N(H)$ est un sous-groupe

de G.

<u>Montrons que H est distingué dans $N(H)$</u>

(i) Soit h un élément de H ;

alors $h H h^{-1} = H h^{-1} = H$

donc $h \in N(H)$

d'où $H \subseteq N(H)$

Ainsi H est un sous-groupe de $N(H)$.

(ii) Soit x un élément de $N(H)$.

alors $x H x^{-1} = H$

Donc $xH = Hx$;

D'où $H \lhd N(H)$

Montrons que si H n'est pas distingué dans G alors $N(H) \neq G$

Supposons que $N(H) = G$.

Soit $g \in G$; alors $g \in N(H)$

donc $gHg^{-1} = H$

d'où $gH = Hg$

Ainsi $H \lhd G$

Donc, $N(H) = G \Longrightarrow H \lhd G$

Alors : si H n'est pas distingué dans G, alors $N(H) \neq G$

Réciproquement, Supposons que $H \lhd G$.

Soit $g \in G$; alors $gH = Hg$

c'est-à-dire $gHg^{-1} = H$

d'où $g \in N(H)$

donc $G \subseteq N(H)$

or $N(H) \subseteq G$

Alors $N(H) = G$

Ainsi : $H \lhd G \Longrightarrow N(H) = G$

Par conséquent, si $N(H) \neq G$, alors

H n'est pas distingué dans G.