Exercice 3

On considère, pour le paramètre réel α le système :

$$(\Sigma_n)\quad \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n-2} + \alpha x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + \alpha x_n = 0 \end{cases}$$

et $\Delta_n(\alpha)$ le déterminant de la matrice de (Σ_n)

1) Ecrivons la matrice de (Σ_n) et exprimons $\Delta_n(\alpha)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(\alpha)$ et de $\Delta_{n-2}(\alpha)$

$$(\Sigma_n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de (Σ_n) est : $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}_n$

$$\Delta_n(\alpha) = \det(A_n) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_n$$

En developpant suivant la première ligne, on a:

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1}$$

or
$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1} = \Delta_{n-1}(\alpha)$$

et
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-2} = \Delta_{n-2}(\alpha)$$ en développant suivant la 1ère colonne

alors $\Delta_n(\alpha) = \alpha \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

2) Si $\Delta_n(\alpha) \neq 0$, déterminons x_k en fonction de $\Delta_{n-k}(\alpha)$ et $\Delta_n(\alpha)$ pour tout k en convenant que $\Delta_0(\alpha) = 1$

On convient que $\Delta_0(\alpha) = 1$.

Supposons que $\Delta_n(\alpha) \neq 0$. Alors le système (Σ_n) est un système de CRAMER ;

d'où (Σ_n) admet une solution unique $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$, où $x_k = \dfrac{\Delta_{x_k}}{\Delta_n(\alpha)}$

pour tout $k = 1; 2; \dots; n$;

où Δ_{x_k} est égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice de (Σ_n) la k-ième colonne par les éléments respectifs $1; 0; \dots; 0$. Ainsi

$$\Delta_{x_k} = (-1)^{k+1} \Delta_{n-k}(\alpha), \text{ pour tout } k = 1; 2; \dots; n.$$

D'où $$x_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_{n-k}(\alpha)}{\Delta_n(\alpha)}, \quad k = 1; 2; \dots; n.$$

On suppose que $|\alpha|<2$ et on pose $\alpha = 2\cos\theta$

3) Calculons $\Delta_n(\alpha)$ et x_k pour $n=3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$\Delta_0(\theta) = 1$.

On sait que : $\Delta_1(\alpha) = \alpha \Rightarrow \Delta_1(\theta) = 2\cos\theta$

D'après la question 1), on a: $\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha)$

Donc, $\Delta_n(\theta) = 2\cos\theta\,\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.

Ainsi, $\Delta_2(\theta) = 2\cos\theta\,\Delta_1(\theta) - \Delta_0(\theta)$

c'est-à-dire, $\Delta_2(\theta) = 4\cos^2\theta - 1 = 2\cos(2\theta)+1$.

$$\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta)\cos\theta + \cos(2\theta)\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \cos(2\theta)$$

$$\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta} = 2\cos^2\theta + \cos(2\theta)$$

or $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow 2\cos^2\theta = \cos(2\theta)+1$

donc, $\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta} = 2\cos(2\theta)+1$;

ainsi, $\Delta_2(\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin[(2+1)\theta]}{\sin\theta}$.

Montrons que : $\Delta_n(\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Comme $\Delta_0(\theta) = 1$ et $\frac{\sin[(0+1)\theta]}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$

alors $\Delta_0(\theta) = \frac{\sin[(0+1)\theta]}{\sin\theta}$.

On sait que : $\Delta_1(\theta) = 2\cos\theta$

et $\frac{\sin[(1+1)\theta]}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$.

donc, $\Delta_1(\theta) = \frac{\sin[(1+1)\theta]}{\sin\theta}$.

Comme, en plus, $\Delta_2(\theta) = \frac{\sin[(2+1)\theta]}{\sin\theta}$

alors c'est vrai pour $n = 0; 1; 2$.

(ii) Soit n un entier naturel supérieur à 2.

Supposons que : $\Delta_k(\theta) = \frac{\sin[(k+1)\theta]}{\sin\theta}$, $\forall k \in [\![0; n]\!]$.

D'après la question 1), on a : $\Delta_{k+1}(\theta) = 2\cos\theta\,\Delta_k(\theta) - \Delta_{k-1}(\theta)$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$\Delta_k(\theta) = \frac{\sin[(k+1)\theta]}{\sin\theta}$ et $\Delta_{k-1}(\theta) = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}$

Donc $\Delta_{k+1}(\theta) = 2\cos\theta \left(\dfrac{\sin[(k+1)\theta]}{\sin\theta}\right) - \dfrac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}$;

ainsi $\Delta_{k+1}(\theta) = \dfrac{2\cos\theta \sin[(k+1)\theta] - \sin(k\theta)}{\sin\theta}$ $(*)$

$\sin[(k+2)\theta] = \sin[((k+1)+1)\theta] = \sin[(k+1)\theta + \theta]$

$\sin[(k+2)\theta] = \sin\theta \cos[(k+1)\theta] + \cos\theta \sin[(k+1)\theta]$

$\sin[(k+2)\theta] = \sin\theta \left[\cos\theta \cos(k\theta) - \sin\theta \sin(k\theta)\right] + \cos\theta \sin[(k+1)\theta]$

$\sin[(k+2)\theta] = \sin\theta \cos\theta \cos(k\theta) - \sin^2\theta \sin(k\theta) + \cos\theta \sin[(k+1)\theta]$

or $\sin[(k+1)\theta] = \sin(k\theta + \theta) = \sin\theta \cos(k\theta) + \cos\theta \sin(k\theta)$

$\Rightarrow \cos\theta \sin[(k+1)\theta] = \cos\theta \sin\theta \cos(k\theta) + \cos^2\theta \sin(k\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta \cos\theta \cos(k\theta) = \cos\theta \sin[(k+1)\theta] - \cos^2\theta \sin(k\theta)$;

alors $\sin[(k+2)\theta] = 2\cos\theta \sin[(k+1)\theta] - \sin^2\theta \sin(k\theta) - \cos^2\theta \sin(k\theta)$

d'où $\sin[(k+2)\theta] = 2\cos\theta \sin[(k+1)\theta] - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin(k\theta)$

ainsi $\sin[(k+2)\theta] = 2\cos\theta \sin[(k+1)\theta] - \sin(k\theta)$ $(**)$

D'après $(*)$ et $(**)$, on a : $\Delta_{k+1}(\theta) = \dfrac{\sin[(k+2)\theta]}{\sin\theta}$

Donc $\Delta_{k+1}(\theta) = \dfrac{\sin([(k+1)+1]\theta)}{\sin\theta}$

D'après (i) et (ii), $\Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $n=3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a:

$$x_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_{3-k}(\pi/3)}{\Delta_3(\pi/3)}, \quad k = 1;2;3.$$

$$\Delta_{3-k}(\pi/3) = \frac{\sin\left[(3-k+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin(\pi/3)} = \frac{\sin\left[(4-k)\frac{\pi}{3}\right]}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, \quad k = 1;2;3$$

$$\Delta_{3-k}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left[\frac{(4-k)\pi}{3}\right], \quad k = 1;2;3.$$

$$\text{et } \Delta_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left[(3+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -1$$

$$\text{alors } x_k = (-1)^{k+2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left[\frac{(4-k)\pi}{3}\right], \quad k = 1;2;3.$$

4) Donnons alors les solutions de (Σ_3) et comparons au résultat de (Σ)

$$\text{avec } (\Sigma) : \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + \alpha x_3 & = 0 \end{cases}$$

(*) D'après la question 3), les solutions de (Σ_3) sont $x_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-1)^{k+2}\sin\left[\frac{(4-k)\pi}{3}\right]$, $k=1;2;3$.

D'où, $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-1)^{1+2} \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\pi) = 0$ (car $\sin\pi = 0$)

$$x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-1)^{2+2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-1)^{3+2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

Ainsi les solutions de (Σ_3) sont : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$.

(**) Pour $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, on a:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_2 + x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) - (3) \Rightarrow x_1 = 0$

En remplaçant x_1 par sa valeur dans (1), on a: $x_2 = 1$

$(3) \Rightarrow x_3 = -x_2$; d'où $x_3 = -1$.

D'après (*) et (**), les solutions de (Σ_3) et (Σ) sont identiques.