CHAPITRE 1

Théorie des Groupes

I) Structures de Groupes

1.1 Définitions

On appelle groupe tout couple $(G;*)$ composé d'un ensemble G et d'une *loi de composition interne* $*$ (stabilité) satisfaisant aux propriétés suivantes :

P_1 : $*$ est *associative* :

$$\forall x,y,z \in G,\ (x*y)*z = x*(y*z)\,.$$

P_2 : Il existe un *élément neutre* e pour $*$ (dans G):

$$\exists e \in G \ / \ \forall\ x \in G,\ \text{ on a : } \ x*e = x = e*x$$

P_3 : Tout élément de G est *symétrisable par* $*$:

$$\forall x \in G,\ \exists x' \in G \ / \ x*x' = e = x'*x$$

où e est l'élément neutre de $*$ dans G.
x' est alors appelé le *symétrique* de x dans G.

On appelle *groupe abélien* ou *groupe commutatif* tout groupe dont la loi est commutative c'est à dire

$\forall x, y \in G$, $x*y = y*x.$

on appelle *groupe fini* tout groupe dont l'ensemble est fini.

Le cardinal de l'ensemble est alors appelé *l'ordre du groupe.*

La loi sera *notée multiplicativement*: on écrira xy au lieu de $x*y$,

l'élément neutre de G sera *noté* 1_G et le symétrique de x sera *noté* x^{-1}.

Mais lorsque le groupe est commutatif la loi peut être notée additivement et dans ce cas l'élément neutre de G sera noté 0 et le symétrique de x sera noté $-x$.

Le groupe $(G;*)$	l'élément neutre e	x' : l'élément symétrique de x	$x*y$	$x*y'$ où y' est le symétrique de y
$(G;\cdot)$	1_G	inverse de x noté : x^{-1}	$x\cdot y$ ou $x\ y$	$x\cdot y^{-1}$ ou $x\ y^{-1}$
$(G;+)$	0	opposé de x noté : $-x$	$x+y$	$x-y$

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

UNION – DISCIPLINE – TRAVAIL

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Nangui Abrogoua

UFR SCIENCES FONTAMENTALES ET APPLIQUÉES

L2

Algèbre 3 : Groupes, déterminants

Tome 1

Cours et épreuves corrigées

Année 2015 – 2016

Prof. DIAGANA Youssouf

Remarques: *Si G est un groupe, alors*
i) l'elt neutre de G est unique.
ii) pour tout $x \in G$, le symétrique de x est unique.

Preuve :

i) Supposons que e et e' sont des éléments neutres du groupe G.

Alors comme e est élément neutre de G, $ee' = e'$ et comme e' est élément neutre de G, $ee' = e$ donc $e' = e$.

ii) soit $x \in G$, supposons que x' et x" sont des éléments symétriques de x.

Alors comme x' est élément symétrique de x, $x'xx" = 1_G x" = x"$ et comme $x"$ est élément symétrique de x, $x'xx" = x'1_G = x'$ donc $x' = x"$.

1.2 Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens d'élément neutre 0.

$(\mathbb{Q}^*, \times)$; $(\mathbb{R}^*, \times)$; $(\mathbb{R}^*_+, \times)$; $(\mathbb{C}^*, \times)$; $(\{-1; 1\}; \times)$ sont des groupes abéliens d'élément neutre 1.

2) L'ensemble des translations du plan muni de la composition des applications, notée $\circ$, est un groupe abélien, l'elt neutre est $id_{\mathcal{P}} = t_{\vec{o}}$.

L'ensemble des rotations de centre O muni de la composition des applications est un groupe abélien
l'elt neutre est $id_{\mathcal{P}} = r(O; 0)$ rotation de centre O et d'angle nul.

3) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}^*, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{R}^*_-, \times)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ ne sont pas des groupes.

Dans $(\mathbb{N}, +)$, 0 est l'élément neutre et le seul élément symétrisable;

Dans $(\mathbb{Z}^*, \times)$ et $(\mathbb{Z}, \times)$, 1 et -1 sont les seuls éléments symétrisables

$(\mathbb{R}^*_-, \times)$ n'est pas stable: $-1 \in \mathbb{R}^*_-$ mais $(-1) \times (-1) \notin \mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_-$ n'a pas d'élément neutre.

Dans $(\mathbb{R}, \times)$ 1 est l'élément neutre mais 0 n'est pas symétrisable.

4) Soit G l'ensemble des matrices carrées de déterminants non nuls de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

* la multiplication est interne dans G : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in G$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \in G$ car le déterminant étant le produit de déterminants non nuls il est non nul.

* la multiplication matricielle est associative

* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ est l'élément neutre

* Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, M a pour déterminant $ad - bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad - bc}{ad - bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et}$$

$$\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

donc M est symétrisable.

Conclusion : G est donc *un groupe*.

Mais G n'est pas abélien.

En effet, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des éléments de G. Mais

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq AB$

5) Groupe produit :

Soient $(E_1; *_1)$ et $(E_2; *_2)$ deux groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2.

Dans $E_1 \times E_2 = \{(x_1;\ x_2) : x_1 \in E_1 \ \text{ et } \ x_2 \in E_2\}$ définissons la loi $*$ par :

$$(x_1;\ x_2) * (y_1;\ y_2) = (x_1 *_1 y_1;\ x_2 *_2 y_2)\,.$$

$E_1 \times E_2$ admet pour élément neutre $(e_1\ ;\ e_2)$ et le symétrique de $(x_1; x_2)$ par la loi $*$ est : $\left(x_1^{-1}; x_2^{-1}\right)$ où x_i^{-1} est le symétrique de x_i par la loi $*_i$.

$(x_1; x_2) * (e_1; e_2) = (x_1 *_1 e_1;\ x_2 *_2 e_2) = (x_1; x_2)$ et $(e_1; e_2) * (x_1; x_2) = (e_1 *_1 x_1;\ e_2 *_2 x_2) = (x_1; x_2)$

$(E_1 \times E_2;\ *)$ est un groupe appelé *groupe produit* (de $(E_1; *_1)$ par $(E_2; *_2)$).

Exemple

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un goupe (abélien), $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est le groupe produit (qui est abélien) muni de la composition définie par :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^2$.

6) Si $(F; *)$ est un groupe alors $\left(F^E; *\right)$ est un groupe où F^E est *l'ensemble des applications de* E *dans* F avec

$$f * g : E \longrightarrow F\ :\ x \mapsto f(x) * g(x) \qquad \forall f,\ g \in F^E.$$

Recherche de l'élément neutre g:

$f * g = f$ ssi $(f * g)(x) = f(x)\ \forall x \in E$
ssi $f(x) * g(x) = f(x)\ \forall x \in E$
il suffit que $g(x) = 1_F\ \forall x \in E$ c-a-d $g = \varphi : E \longrightarrow F\ :\ x \mapsto 1_F$
$\forall\ f \in F^E$
$\varphi * f : x \mapsto \varphi(x) * f(x) = 1_F * f(x) = f(x)$

donc $\varphi * f = f$.

En exercice : Montrer que la loi $*$ est associative dans F^E et que tout élément est symétrisable dans $\left(F^E;*\right)$.

1.3 Règles de calcul dans un groupe :

$(G,*)$ un groupe	Notation $*$	Notation additive	Notation multiplicative
$\forall a,b \in G$	$a * b \in G$	$a+b \in G$	$a \cdot b \in G$
elt neutre : $\exists e \in G$	$\forall x \in G$ $x * e=e * x=x$	$\forall x \in G$ $x+0=0+x=x$	$\forall x \in G$ $x \cdot 1_G=1_G \cdot x=x$
elt sym de x $\forall x \in G$	$\exists x' \in G$: $x * x'=x' * x=e$	$opp(x)=-x$ $x+(-x)=-x+x=0$	$\exists\ x^{-1} \in G$: $x\,x^{-1}=x^{-1}x=1_G$
$*$ est *associative:* $\forall x,y,z \in G,$	$(x*y)*z=x*(y*z)$	$(x+y)+z=x+(y+z)$	$(xy)\,z=x\,(yz)$
sym de $a*b$	$(a*b)'=b'*a'$	$opp(a+b)=-b+(-a)$	$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$
$\forall a \in G$: $\forall n \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \text{si } n>0, \\ *^n a=\underbrace{a*...*a}_{n \text{ termes}} \\ *^0 a=e \\ \text{si } n>0, \\ *^{-n}a=*^n(a') \\ =\underbrace{a'*...*a'}_{n \text{ termes}} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } n>0, \\ na=\underbrace{a+...+a}_{n \text{ termes}} \\ \text{si } n=0,\ 0\,a=0 \\ \text{si } n>0, \\ -na=n\,(-a)= \\ \underbrace{-a+...+(-a)}_{n \text{ termes}} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } n>0, \\ a^n=\underbrace{a...a}_{n \text{ termes}} \\ a^0=1_G \\ \text{si } n>0, \\ a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n \\ =\underbrace{a^{-1}...a^{-1}}_{n \text{ termes}} \end{cases}$
si G est abélien , $\forall a,b \in G$	$*^{m+n}a=(*^m a)*(*^n a)$ $*^n(a*b)=(*^n a)*(*^n b)$ $*^{2n}a=(*^n a)*(*^n a)$	$(m+n)\,a=ma+na$ $n\,(a+b)=na+nb$ $(2n)\,a=na+na=n\,(2a)$	$a^{m+n}=a^m a^n$ $(ab)^n=a^n b^n$ $a^{2n}=(a^n)^2=\left(a^2\right)^n$

1.4 Propriétés fondamentales d'un groupe :

1.4.1 Théorème :

Pour tout élément a d'un groupe G, les applications définies par :

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & \gamma_a(x) = ax \end{array} \quad \text{et} \quad \delta_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & xa \end{array}$$

sont bijectives.

Preuve

$\delta_a : x \mapsto xa$

Injectivité:

$\delta_a(x)=\delta_a(y) \Longrightarrow xa=ya \Longrightarrow (xa)\,a^{-1}=(ya)\,a^{-1}$
$\Longrightarrow x\left(aa^{-1}\right)=y\left(aa^{-1}\right) \Longrightarrow x1_G=y1_G \Longrightarrow x=y$
donc δ_a est injective.

Surjectivité:

Soit $z \in G$, admet-il un antécédent y?

$\delta_a(y)=z$ ssi $ya=z$ ssi $yaa^{-1}=za^{-1}$ssi

$y1_G = za^{-1}$ssi $y = za^{-1} \in G$
$\delta_a\left(za^{-1}\right) = za^{-1}a = z$
$z \in G$ admet un antécédent qui est $za^{-1} = \delta_{a^{-1}}(z)$
δ_a est surjective.

Elle est donc bijective

* Montrons que γ_a est injective :
Soit e l'élément neutre de G, noté 1_G.

$\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$

$\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow \left(a^{-1}a\right)x = \left(a^{-1}a\right)y \Rightarrow 1_G x = 1_G y \Rightarrow x = y.$

* Montrons que γ_a est surjective :
$\forall z \in G$, existe-t-il $x \in G \;/\; \gamma_a(x) = z$?
$\gamma_a(x) = z \Leftrightarrow ax = z \Leftrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}z \Leftrightarrow$
$\left(a^{-1}a\right)x = a^{-1}z \Leftrightarrow x = 1_G x = a^{-1}z.$
$a^{-1}z$ est (le seul) antécédent de z par γ_a.

Conclusion : γ_a est bijective et l'application réciproque de γ_a est $(\gamma_a)^{-1} = \gamma_{a^{-1}} : z \mapsto a^{-1}z.$

Pour les mêmes raisons δ_a est bijective et l'application réciproque de δ_a est $(\delta_a)^{-1} = \delta_{a^{-1}} : x \mapsto xa^{-1}$.

Si G n'est pas abélien les solutions aux équations : $ax = z$ et $xa = z$ sont en général distinctes.

Si G est abélien alors les équations :

$ax = b$ et $xa = b$ admettent la même solution $x = a^{-1}b = ba^{-1}$ que l'on note $\dfrac{b}{a}$.

Avec la notation : $\dfrac{1}{a} = a^{-1}1_G = a^{-1}$.

On écrit : $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \geq 0 \\ 1_G \text{ si } m = n \text{ i.e. } a^0 = 1_G \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m \geq 0 \end{cases}$.

En notation additive, si G est abélien, les équations : $a + x = b$ et $x + a = b$ admettent la même solution $x = -a + b = b - a$.

Remarque: le symétrique de ab est $b^{-1}a^{-1}$.

En effet, $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = \left(a\left(bb^{-1}\right)\right)a^{-1} = (a1_G)a^{-1} = aa^{-1} = 1_G$

et $\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}1_G b = b^{-1}b = 1_G$.

1.4.2 Corollaire :

Tout élément a d'un groupe G est régulier:

$\forall x, y \in G : \begin{cases} ax = ay \Rightarrow x = y \quad et \\ xa = ya \Rightarrow x = y \end{cases}$

Preuve :

$\gamma_a : G \longrightarrow G : x \mapsto ax$ étant injective, $ax = ay \Rightarrow \gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow x = y.$

La dernière partie s'obtient de la même manière avec δ_a.

II) Sous-groupes

2.1 Définitions

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit H un sous-ensemble non vide de G.

On dit que $(H, \cdot)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$ si $(H, \cdot)$ est stable

(i.e. $\forall a, b \in H$ on a : $a \cdot b \in H$) et si $(H, \cdot)$ est aussi un groupe.

Exemples :

G et $\{1_G\}$ sont des sous-groupes de G dits *triviaux*.

Tout sous-groupe de G différent de G et de $\{1_G\}$ est appelé *sous-groupe propre* de G.

2.2 Proposition

Tout sous-groupe H de G a le même élément neutre que G : $1_H = 1_G$.

Preuve :

Soit 1_G l'élément neutre de G et H un sous-groupe de G d'élément neutre 1_H. Alors

$1_G 1_H = 1_H = 1_H 1_H$.

Comme tout élément de G est régulier, en particulier, 1_H étant élément de G on a : $1_G 1_H = 1_H 1_H \Rightarrow 1_G = 1_H$.

2.3 Proposition

Si H est un sous-groupe de G le symétrique de $x \in H$ est le même dans H que dans G.

Preuve :

Soit $x \in H$. Soit x^{-1} le symétrique de x dans G .
Soit x' le symétrique de x dans H : $xx' = 1_H = 1_G = xx^{-1}$.

Alors $xx' = xx^{-1}$ d'où , x étant régulier, $x' = x^{-1}$.

2.4 Caractérisation d'un sous-groupe :

Théorème :

Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble de G.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
a) H est un sous-groupe de G.
b) H est stable, $1_G \in H$ et $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.
c) H est stable, $H \neq \emptyset$ et $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.
d) $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2$, $xy^{-1} \in H$.
e) $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2$, $y^{-1}x \in H$.

Preuve : a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b) H est stable par définition; d'après la proposition 2.2 $1_G = 1_H \in H$ et d'après la proposition 2.3, $\forall x \in H$,le symétrique x^{-1} de x dans G étant celui de x dans H, il appartient à H c-a-d $x^{-1} \in H$.

b) $\Rightarrow$ c) : immédiat

c) $\Rightarrow$ d) $\forall (x, y) \in H^2$,

$\begin{cases} x \in H \\ y \in H \end{cases}$ donc d'après c), $\begin{cases} x \in H \\ y^{-1} \in H \end{cases}$ et $xy^{-1} \in H$.

d)$\Rightarrow$ b)

* d) $\Rightarrow H \neq \varnothing$ donc $\exists h \in H$; d'après d), $hh^{-1} \in H$ c-a-d $1_G \in H$.

* D'autre part, $\forall x \in H$, on a :

$\begin{cases} 1_G \in H \\ x \in H \end{cases}$ d'après d), $1_G\, x^{-1} \in H$ c-a-d $x^{-1} \in H$.

* Enfin $\forall x, y \in H$,

$xy = x\left(y^{-1}\right)^{-1}$; or, d'après ce qui précède, $x \in H$ et $y^{-1} \in H$ d'où, d'après d), $x\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$ par consqt, $xy \in H$

H est stable.

b) $\Rightarrow$ a)

* H étant stable, la loi est interne dans H.

* L'associativité: elle est vraie dans G donc

$$\forall x, y, z \in H,\ (xy)\,z = x\,(yz) \text{ d'où l'associativité dans } H.$$

* $1_G \in H$ alors 1_G est élément neutre dans H :

$\forall x \in H$, $1_G\, x = x$ et $x 1_G = x$.

* $\forall x \in H$, on a $x^{-1} \in H$ donc $xx^{-1} = 1_G = x^{-1}x$ où 1_G est élément neutre de H donc x est symétrisable dans H.

Conclusion: H est un sous-groupe de G.

Remarque : on peut remplacer *d*) par *e*) et les preuves sont similaires.

Notation :

Soient H et K deux sous-ensembles de G. On *note* :

$$HK = \{xy;\ x \in H \ \text{ et } \ y \in K\} \quad \text{et} \quad H^{-1} = \left\{x^{-1};\ x \in H\right\}$$

Pour tout $a \in G$, on note $aH = \{ay,\ \ y \in H\}$ et $Ha = \{ya,\ \ y \in H\}$.

Remarque :

Si H est un sous-groupe de G alors

$$\begin{cases} HH = H \\ H^{-1} = H \\ hH = H = Hh,\ \forall h \in H \end{cases}$$

Preuve:

* $HH = H$?

* $HH \subseteq H$?
$HK = \{xy;\ x \in H \text{ et } y \in K\}$
$\forall a \in HH = \{xy; x \in H \text{ et } y \in H\}$,
$\exists x \in H$ et $\exists y \in H$ tels que $a = xy$
comme $xy \in H$ on a $a \in H$.
$\forall a \in HH$ on a $a \in H$
$HH \subseteq H$.
$H \subseteq HH$?
$\forall h \in H$, $h = 1_G h \in HH$
donc $H \subseteq HH$
$HH = H$.
* $H^{-1} = H$?
$H^{-1} \subseteq H$?
d'après le théorème précédent (voir c)),
$\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$; donc
$H^{-1} = \left\{t^{-1}, t \in H\right\} \subseteq H$.

$H \subseteq H^{-1}$?
$\forall a \in H$, $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$ comme $a^{-1} \in H$, on a : $a = \left(a^{-1}\right)^{-1} \in H^{-1}$
donc $H \subseteq H^{-1}$.
* $\forall y \in H,\ yH = H$?
$yH \subseteq HH = H = 1_G H = y\left(y^{-1}H\right) \subseteq yH$

car $y^{-1} \in H$ donc $y^{-1}H \subseteq H$
d'où $y\left(y^{-1}H\right) \subseteq yH$
$yH \subseteq HH = H \subseteq yH$ d'où l'égalité: $yH = H$

De même, $Hy = H$ pour tout $y \in H$.
Remq: $H^{-1}H = HH = H$.

2.5 Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$, lui même sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ lui même sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

3) $(\{-1; 1\}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

4) $(\mathbb{R}^*_+, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
5) Soit G l'ensemble des matrices carrées de déterminants non nuls de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

Soit H l'ensemble des matrices s'écrivant $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$.

Soit K l'ensemble des matrices s'écrivant $M_{a,0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

G est un groupe.

a) Montrons que H est un sous-groupe de G :

* $H \subseteq G$ car $\forall M \in H, \exists a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que
$M = M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$ donc $\det M = a^2 - b^2 \neq 0$ d'où $M \in G$.

* $H \neq \emptyset$ car $I_2 = M_{1,0} \in H$

* $\forall M \in H, \exists a,\ b \in \mathbb{R},\ M = M_{a,b}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$.

L'inverse de M dans G est $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = M_{a_1,b_1}$ avec $a_1 = \dfrac{a}{a^2 - b^2}$ et $b_1 = \dfrac{-b}{a^2 - b^2}$ et $a_1^2 - b_1^2 = \dfrac{1}{a^2 - b^2} \neq 0$ donc $M^{-1} \in H$.

* $\forall M,\ N \in H, \exists a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ tels que $M = M_{a,b}$ et $N = M_{c,d}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$ et $c^2 - d^2 \neq 0$.

$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & bc+ad \\ bc+ad & ac+bd \end{pmatrix} = M_{a_2,b_2}$
où $a_2^2 - b_2^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(c^2 - d^2\right) \neq 0$ car
$a^2 - b^2 \neq 0$ et $c^2 - d^2 \neq 0$ donc $MN \in H$

Conclusion : H est un sous-groupe de G.

b) Montrons que K est un sous-groupe de H et de G.
* $K \subseteq H$ car $\forall M \in K, \exists a \in \mathbb{R}^* :\ M = M_{a,0}$ donc $a^2 - 0^2 = a^2 \neq 0$ d'où M appartient à H.

* $K \neq \emptyset$ car $I_2 = M_{1,0} \in K$

* $\forall M,\ N \in K, \exists a, c \in \mathbb{R}$ tels que $M = M_{a,0}$ et $N = M_{c,0}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/c & 0 \\ 0 & a/c \end{pmatrix} = M_{a/c,0}$
et $a/c \neq 0$ car $a \neq 0$ et $c \neq 0$ donc $MN^{-1} \in K$

Conclusion : K est un sous-groupe de H

Comme H est un sous-groupe de G , alors K est aussi un sous-groupe de G.

2.6 Proposition

Soient H et K deux sous-groupes de G . Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Preuve
* $H \cap K \neq \emptyset$ car $1_G = 1_H \in H$ et $1_G = 1_K \in K \Rightarrow 1_G \in H \cap K$.
* Soient M et $N \in H \cap K$.
Comme H et K sont des sous-groupes de G, $MN^{-1} \in H$ et à K donc aussi à $H \cap K$.
D'où $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Remarques
1) La Proposition précédente s'étend au cas d'une famille quelconque de sous-groupes de G.

2) $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de G en général.

Par exemple, soient $H = 2\mathbb{Z}$ et $K = 3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ mais $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ car 2 et 3 appartiennent à $H \cup K$ mais $2 + 3 = 5 \notin H \cup K$ qui n'est donc pas stable.

2.7 Sous-groupe engendré

Soit G un groupe.

2.7.1 Définition

Soit A une partie de G. On appelle *sous-groupe engendré par A* et on note $< A >$, le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) de G contenant A.

Si $a \in G$, $< \{a\} >$ est noté $< a >$.

Exemples:

$< G >= G$

$< 1_G >= \{1_G\} =< \emptyset >= \{1_G\}$

Si $a \in G$, $< a >= \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \left(a^{-1}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
$= \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$

avec la convention $a^0 = 1_G$.

III) Classes selon un sous-groupe- Groupe quotient-Sous-groupes distingués:

3.1 Classes selon un sous-groupe :

Soit $(G; \cdot)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et soit H un sous-groupe de $(G; \cdot)$.

3.1.1 Relation à gauche

a) Soit $\mathcal{R}_g$ la relation définie par :
$x \; \mathcal{R}_g \; y \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$.

$\boxed{\text{Alors } \mathcal{R}_g \text{ est une relation d'équivalence.}}$

En effet,

1) $\mathcal{R}_g$ est réflexive : $\forall x \in G$ on a :
$x \; \mathcal{R}_g \; x$ car $x^{-1}x = e \in H$

2) $\mathcal{R}_g$ est symétrique : $\forall (x, y) \in G \times G$: Si $x \; \mathcal{R}_g \; y$ a-t-on $y\mathcal{R}_g x$?
$x \; \mathcal{R}_g \; y \Rightarrow y^{-1}x \in H \Rightarrow \left(y^{-1}x\right)^{-1} \in H$ or, $\left(y^{-1}x\right)^{-1} = x^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} = x^{-1}y \in H$
d'où $y\mathcal{R}_g x$.

3) $\mathcal{R}_g$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$:

Si $\begin{cases} x \; \mathcal{R}_g \; y & \text{et} \\ y \; \mathcal{R}_g \; z \end{cases}$ a-t-on $x \; \mathcal{R}_g \; z$?

$\begin{cases} x \; \mathcal{R}_g \; y \\ y \; \mathcal{R}_g \; z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{-1}x \in H \\ z^{-1}y \in H \end{cases} \Rightarrow$
$\left(z^{-1}y\right)\left(y^{-1}x\right) \in H \Rightarrow z^{-1}x = z^{-1}\left(yy^{-1}\right)x \in H$
d'où $x\mathcal{R}_g z$.

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{R}_g$ est une relation d'équivalence.

b) Classe à gauche d'un élément $x \in G$.
La classe à gauche d'un élément $x \in G$ est : $cl_g(x) = xH$.

En effet,
$cl_g(x) = \{y \in G;\ y\mathcal{R}_g x\} = \{y \in G;\ x^{-1}y \in H\}$
or, $x^{-1}y \in H \Longleftrightarrow xx^{-1}y \in xH \Longleftrightarrow y \in xH$ donc $\{y \in G;\ x^{-1}y \in H\} = xH$.

$cl_g(x) = xH$.

c) Compatibilité à gauche
$\mathcal{R}_g$ est *compatible avec la composition à gauche*: $\forall z \in G$,

$$x\mathcal{R}_g y \Leftrightarrow (zx)\,\mathcal{R}_g\,(zy)$$

En effet, $\forall z \in G$

$x\mathcal{R}_g y \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow y^{-1}z^{-1}zx = y^{-1}x \in H \Leftrightarrow (zy)^{-1}\,zx \in H \Leftrightarrow (zx)\,\mathcal{R}_g\,(zy)$

d) Réciproquement: Relation d'équivalence compatible à gauche:

<u>Proposition:</u>

Si dans un groupe G, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition à gauche c-à-d $\forall z \in G$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow zx\mathcal{R}zy$ alors
$cl_{\mathcal{R}}\ e$ est un sous-groupe de G.

En effet,
a) Soit $K = cl_{\mathcal{R}}\ e = \{x \in G\ /\ x\mathcal{R}e\} \subseteq Ge \in cl_{\mathcal{R}}e$

b) $e \in K$ car $\mathcal{R}$ étant réflexive, $e\mathcal{R}e$
donc $cl_{\mathcal{R}}e \neq \emptyset$.

c) si $(x; y) \in\ (cl_{\mathcal{R}}e) \times (cl_{\mathcal{R}}e)$ a-t-on $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$?

$\begin{cases} x \in cl_{\mathcal{R}}e \\ y \in cl_{\mathcal{R}}e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ \mathcal{R}\ e \\ y\ \mathcal{R}\ e \end{cases}$ La compatibilité à gauche entraine : $\begin{cases} x\ \mathcal{R}\ e \\ y^{-1}y\ \mathcal{R}\ y^{-1}e \end{cases}$ i.e, $e\ \mathcal{R}\ y^{-1}$

$\mathcal{R}$ est symétrique donc $\begin{cases} x\ \mathcal{R}\ e \\ y^{-1}\ \mathcal{R}\ e \end{cases}$

La compatibilité à gauche entraine : $\begin{cases} x\ \mathcal{R}\ e \\ xy^{-1}\ \mathcal{R}\ x \end{cases}$

$\mathcal{R}$ est transitive donc $xy^{-1}\ \mathcal{R}\ e$ i.e., $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$.

Conclusion : $cl_{\mathcal{R}}e$ est un sous-groupe de G.

Remarque:
comme $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à gauche,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow y^{-1}x\mathcal{R}y^{-1}y \Leftrightarrow y^{-1}x\mathcal{R}e \Leftrightarrow y^{-1}x \in K = cl_{\mathcal{R}}e \\ &\Leftrightarrow x\mathcal{R}_g y \text{ selon le sous-groupe } K. \end{aligned}$$

3.1.2 Relation à droite

a) Soit $\mathcal{R}_d$ la relation définie par :
$x\ \mathcal{R}_d\ y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$. Alors

$\boxed{\mathcal{R}_d \text{ est une relation d'équivalence.}}$

En effet, 1) $\mathcal{R}_d$ est refléxive : $\forall x \in G$ on a : $x\ \mathcal{R}_d\ x$ car $xx^{-1} = e \in H$

2) $\mathcal{R}_d$ est symétrique : $\forall (x, y) \in G \times G$: Si $x\ \mathcal{R}_d\ y$ a-t-on $y\mathcal{R}_d x$?

$x\mathcal{R}_d y \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow \left(xy^{-1}\right)^{-1} \in H \Rightarrow yx^{-1} = \left(xy^{-1}\right)^{-1} \in H \Rightarrow y\mathcal{R}_d x.$

3) $\mathcal{R}_d$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$: Si $\left\{\begin{array}{l} x\ \mathcal{R}_d\ y \\ \text{et} \\ y\ \mathcal{R}_d\ z \end{array}\right.$ a-t-on $x\ \mathcal{R}_d\ z$?

$$\left\{\begin{array}{l} x\ \mathcal{R}_d\ y \\ \text{et} \\ y\ \mathcal{R}_d\ z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xy^{-1} \in H \\ \text{et} \\ yz^{-1} \in H \end{array}\right. \Rightarrow \left(xy^{-1}\right)\left(yz^{-1}\right) \in H \Rightarrow xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in H \Rightarrow x\mathcal{R}_d z.$$

Conclusion : $\mathcal{R}_d$ est une relation d'équivalence.

b) Classe à droite d'un élément $x \in G$.

La classe à droite d'un élément $x \in G$ est : $cl_d x = Hx = \{hx : h \in H\}$

En effet,

$cl_d x = \{y \in G : x\mathcal{R}_d y\} = \left\{y \in G : xy^{-1} \in H\right\} = \left\{y \in G : \left(xy^{-1}\right)^{-1} \in H\right\}$

$cl_d x = \left\{y \in G : yx^{-1} \in H\right\} = \{y \in G : y \in Hx\} = Hx.$

En particulier, la classe à droite de e est : $cl_{\mathcal{R}} e = He = H.$

c) Compatibilité à droite

$\mathcal{R}_d$ est compatible avec la composition à droite : $\forall z \in G$,

$x\mathcal{R}_d y \Leftrightarrow (xz)\,\mathcal{R}_d\,(yz)$

En effet, $\forall z \in G$,

$x\mathcal{R}_d y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow xzz^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H \Leftrightarrow xz\,(yz)^{-1} \in H$
$\Leftrightarrow (xz)\,\mathcal{R}_d\,(yz)$

d) Réciproquement: Relation d'équivalence compatible à droite:

Proposition:

Si dans un groupe G, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition à droite c-à-d $\forall z \in G$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xz\mathcal{R}yz$ alors $cl_{\mathcal{R}}\,e$ est un sous-groupe de G.

En effet, a) $e \in cl_{\mathcal{R}}e$ donc $cl_{\mathcal{R}}e \neq \emptyset$

b) si $(x;y) \in (cl_d e) \times (cl_{\mathcal{R}}e)$ a-t-on $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$?

$$\begin{cases} x \in cl_{\mathcal{R}}e \\ \text{et} \\ y \in cl_{\mathcal{R}}e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mathrel{\mathcal{R}} e \\ \text{et} \\ y \mathrel{\mathcal{R}} e \end{cases} \quad \text{La compatibilité à droite entraine :} \begin{cases} xy^{-1} \mathrel{\mathcal{R}} y^{-1} \\ \text{et} \\ yy^{-1} \mathrel{\mathcal{R}} y^{-1} \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique et transitive donc $xy^{-1} \mathrel{\mathcal{R}} yy^{-1}$ i.e., $xy^{-1} \mathrel{\mathcal{R}} e$ et $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$.

Conclusion : $cl_{\mathcal{R}}e$ est un sous-groupe de G.

Remarque comme $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à droite,

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad xy^{-1}\mathcal{R}yy^{-1} \Leftrightarrow xy^{-1}\mathcal{R}e \Leftrightarrow xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e \Leftrightarrow$$
$$x\mathcal{R}_d y \text{ selon le sous-groupe } cl_{\mathcal{R}}e.$$

3.1.3 Proposition

Dans un groupe G une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à gauche et avec la composition à droite ssi

$$\forall x,y,x',y' \in G, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ x'\mathcal{R}y' \end{cases} \Rightarrow (xx') \mathrel{\mathcal{R}} (yy').$$

Preuve en exercice.

3.1.4 Théorème

Il existe une bijection entre l'ensemble des classes à gauche et l'ensemble des classes à droite: $\varphi : xH \mapsto Hx^{-1}$

Preuve:

a) Montrons que φ est bien définie c-a-d que φ est bien une application:
Si $a = xH$ et $a = yH$, (c-a-d $xH = yH$) a-t-on

$$Hx^{-1} = Hy^{-1}?$$

$aR_d b \Longleftrightarrow ab^{-1} \in H$

$xH = yH \Rightarrow yR_g x \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H \Rightarrow$
$x^{-1}R_d y^{-1} \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$

Reprise $xH = yH \Rightarrow x^{-1}xH = x^{-1}yH \Rightarrow H = x^{-1}yH \Rightarrow$
$H^{-1} = H^{-1}y^{-1}x \Rightarrow H = Hy^{-1}x \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}xx^{-1}$
$\Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$
on en déduit que φ est bien définie.

b) $\varphi : xH \mapsto Hx^{-1}$ est injective :

$$\varphi(xH) = \varphi(yH) \Leftrightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \Leftrightarrow x^{-1}\mathcal{R}_d y^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$
$$y^{-1}x \in H \Leftrightarrow x\mathcal{R}_g y \Leftrightarrow xH = yH$$

c) φ est surjective.
$\forall z \in G$ existe-t-il $x \in G$ tel que : $\varphi(xH) = Hz$?

On a : $\varphi\left(z^{-1}H\right) = H\left(z^{-1}\right)^{-1} = Hz$. Il suffit donc de prendre $x = z^{-1}$.

3.1.5 Proposition

Soit G un groupe. Si G est fini alors xH, H et Hx ont le même cardinal

En effet, $\left\{\begin{array}{ll} \gamma_x : & G \longrightarrow G \\ & z \mapsto xz \\ \delta_x : & G \longrightarrow G \\ & x \mapsto zx \end{array}\right.$ étant bijectives pour tout $x \in G$, alors $xH = \gamma_x(H)$ et $Hx = \delta_x(H)$ ont le même cardinal que H.

Conclusion : Si G est fini alors toutes les classes ont le même cardinal que $H = cl_g e = cl_d e$.

Soit $p = card\ H$. Alors

$card\ G = pq$ où q est le nombre de classes appelé *l'indice de H dans G*, noté : $[G : H]$

$$\boxed{card\ G = [G : H] \times card\ H} \text{ formule de Lagrange}$$

$$\boxed{[G : H] = \frac{\text{card } G}{\text{card } H}}.$$

D'où le Théorème :

3.1.6 Théorème de Lagrange:

Lorsqu'un groupe est fini alors l'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

Remarques

a) Le Théorème de Lagrange s'interprête aussi dans sa forme *contraposée* :

Si k ne divise pas $|G|$, alors il n'existe pas de sous-groupe de G d'ordre k.

b) La réciproque est toutefois fausse en général, c'est-à-dire qu'il n'existe pas forcément de sous-groupe de G d'ordre k lorsque k divise $|G|$.

c) Si K est un sous-groupe de H, alors on a
$\boxed{[G : K] = [G : H] \times [H : K]}$
(transitivité des indices).

Preuve

$$\begin{aligned} [G : H] &= |G|/|H| = ([G : K] \times |K|)/([H : K] \times |K|) \\ &= [G : K]/[H : K]. \end{aligned}$$

Définition:
Dans un groupe fini G on appelle *ordre* d'un élément g le plus petit entier strictement positif n tel que $g^n = 1_G$. Dans ce cas
$\langle g \rangle = \left\{ 1_G = g^0,\ g,\ g^2,\ \cdots,\ g^{n-1} \right\} = H$; il a n éléments. Donc *l'ordre* de g est $|\langle g \rangle|$, noté $|g|$.
G est fini
$1_G = g^0, g, g^2, \cdots, g^p, \cdots \in G.$
$\exists m < q$ tels que $g^m = g^q$

$$1_G = g^{-m}g^m = g^{-m}g^q = g^{q-m} = g^n.$$

3.1.7 Corollaire

Soit G un groupe d'ordre fini. Soit g un élément de G. Alors l'ordre de g divise l'ordre de G.

Preuve

Soit n l'ordre de g. Alors $\langle g \rangle = \left\{ g^k : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$ est un sous-groupe de G.

De plus, par définition de l'ordre d'un élément dans un groupe, ce sous-groupe est de cardinal n.

Par application du Théorème de Lagrange, n est un diviseur de l'ordre de G.

3.1.8 Groupe quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur le groupe G, compatible avec la composition à gauche et à droite.

Soit $G/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Pour tout $x \in G$, notons $\overline{x} = cl\ x$ la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

$$\overline{x} = \{t \in G : t\mathcal{R}x\}$$

Définition:

La loi de $G/\mathcal{R}$ est définie par : $clx\ cly = cl(xy)$ i.e.

$$\overline{x}\ \overline{y} = \overline{xy}.$$

Cette loi est appelée la loi quotient de G par $\mathcal{R}$.

Proposition:

$\boxed{G/\mathcal{R} \text{ muni de la loi quotient est un groupe.}}$

Preuve
Soit e l'élément neutre de G.

* La loi de $G/\mathcal{R}$ est bien définie:

Si x_1, x_2, y_1 et $y_2 \in G$ avec $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ et $\overline{y_1} = \overline{y_2}$ alors $x_1y_1\mathcal{R}x_2y_2$ c'est à dire, $\overline{x_1y_1} = \overline{x_2y_2}$.

En effet,

$$\begin{cases} \overline{x_1} = \overline{x}_2 \\ \overline{y_1} = \overline{y_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \mathcal{R} x_2 \\ y_1 \mathcal{R} y_2 \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ étant compatible avec la composition à gauche et à droite, on a :

$\begin{cases} x_1 y_1 \mathcal{R} x_2 y_1 \\ x_2 y_1 \mathcal{R} x_2 y_2 \end{cases}$ d'où $x_1 y_1 \mathcal{R} x_2 y_2$.

De plus la loi quotient est stable dans $G/\mathcal{R}$, c'est donc une loi de composition interne dans $G/\mathcal{R}$.

* la loi quotient est associative dans $G/\mathcal{R}$:

$$\forall x, y, z \in G,\ (\overline{x}\ \overline{y})\ \overline{z} = (\overline{xy})\ \overline{z} = \overline{(xy)z} = \overline{x(yz)} = \overline{x}\overline{(yz)} = \overline{x}\ (\overline{y}\ \overline{z}).$$

* $\overline{e}$ est l'élément neutre de $G/\mathcal{R}$:

$$\forall x \in G,\ \overline{x}\ \overline{e} = \overline{xe} = \overline{x} \text{ et } \overline{e}\ \overline{x} = \overline{ex} = \overline{x}$$

* Tout élément $\overline{x}$ de $G/\mathcal{R}$ est symétrisable:

$\forall x \in G$, on a : $x^{-1} \in G$ et $\overline{x^{-1}} \in G/\mathcal{R}$ et l'on a :

$\overline{x}\ \overline{x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \overline{e}$ et $\overline{x^{-1}}\ \overline{x} = \overline{x^{-1}x} = \overline{e}$ l'élément neutre de $G/\mathcal{R}$.

Donc $\overline{x^{-1}}$ est le symétrique de $\overline{x}$.

3.2 Sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe de G.

3.2.1 Définition

On dit que H est distingué dans G, ou que H est normal, ou invariant dans G, si pour tout $x \in G$, $xH = Hx$

c'est à dire que la classe de x à gauche dans G modulo H s'identifie à sa classe à droite.

Conséquence : $R_g = R_d$

Si H est distingué dans G on note $H \lhd G$

3.2.2 Caractérisation des sous-groupes distingués

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est distingué dans G : Pour tout $x \in G$, $xH = Hx$

(ii) Pour tout $x \in G$, $xH \subseteq Hx$

(iii) Pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} = H$

(iv) Pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} \subseteq H$.

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii) : trivial car $xH = Hx \Rightarrow xH \subseteq Hx$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : évident car
$xH = Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} = Hxx^{-1} = H$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) : évident car
$xH \subseteq Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} \subseteq Hxx^{-1} = H$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si pour tout $x \in G$, $xH \subseteq Hx$ alors pour tout $x \in G$, comme $x^{-1} \in G$, on a :

$$\begin{cases} x^{-1}H \subseteq Hx^{-1} \\ xHx^{-1} \subseteq Hxx^{-1} \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} xx^{-1}H \subseteq xHx^{-1} \\ xHx^{-1} \subseteq H \end{cases}$ donc $H \subseteq xHx^{-1} \subseteq H$. D'où l'égalité.

3.2.3 Remarques

Supposons que $H \lhd G$.

1) Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur le groupe G définie par :

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.Alors $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}_g y \Leftrightarrow y \in xH = Hx \Leftrightarrow yx^{-1} \in H \Leftrightarrow x\mathcal{R}_d y$.
Donc $\mathcal{R} = \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$.

$\mathcal{R}$ est compatible avec la composition (à gauche et à droite).

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, $G/\mathcal{R}$ est noté G/H.

$$G/H = \{xH : x \in G\} = \{Hx : x \in G\}.$$

Pour tout $x \in G$, $\overline{x} = cl\ x = xH = Hx$ appelée la classe de x modulo H.
$\overline{x} = \{t \in G : \exists h \in H \text{ avec } t = xh\} = \{xh : h \in H\}$
$\overline{x} = \{t \in G : \exists h \in H \text{ avec } t = hx\} = \{hx : h \in H\} = Hx$

La loi de G/H est définie par : $(xH)(yH) = (xy)H$.

C'est la loi quotient de G modulo H.

L'élément neutre de G/H est $\overline{e} = H$.

Le symétrique de xH est $x^{-1}H$ c'est à dire $(xH)^{-1} = x^{-1}H = Hx^{-1}$.

Proposition:

G/H muni de la loi quotient est un groupe.

2) Réciproquement, si $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$ alors cette valeur commune $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition et soit $H = cl(e)$.

a) H est un sous-groupe de G.

b) $\forall x, t \in G,\ t \in xH \Leftrightarrow x\mathcal{R}_g t \Leftrightarrow x\mathcal{R}_d t \Leftrightarrow t \in Hx$

donc $\forall x \in G,\ xH = Hx$ d'où $H \lhd G$.

3) Si G est fini alors toutes les classes ont le même cardinal que H. Alors si $H \lhd G$ soit $p = card\ H$; on a :

$card\ G = pq$ où q est le nombre de classes $card\ G/H$;

c'est <u>*l'indice de H dans G*</u> : $\boxed{[G:H] = card\ G/H}$

$$\boxed{card\ G = card\,(G/H\ ) \times card\ H}$$

$$\boxed{card\,(G/H) = \frac{card\ G}{card\ H}}.$$

D'où le Théorème de Lagrange:

<u>Théorème :</u>

Lorsqu'un groupe est fini l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

3) Si K est un sous-groupe de H distingué dans G, alors on a

$$\boxed{card\,(G/K\ ) = card\,(G/H\ ) \times card\,(H/K\ )}$$

<u>3.2.4 Exemples</u>

1) Soit G un groupe d'élément neutre 1_G. Alors G et $\{1_G\}$ sont des sous-groupes distingués dans G.

2) Le centre d'un groupe G est un sous-groupe distingué dans G.

Preuve

a) Soit $Z(G)$ le centre de G d'élément neutre 1_G.

* $Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G,\ xg = gx\} \subseteq G$

* $1_G \in Z(G)$ car $1_G g = g = g 1_G\ \forall g \in G$,
* $\forall x, y \in Z(G),\ \forall g \in G,\ (xy^{-1})g = y^{-1}gx = (g^{-1}y)^{-1}x$
$= (yg^{-1})^{-1}x = gy^{-1}x = g(xy^{-1})$

donc $xy^{-1} \in Z(G)$

Conclusion : $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

b) $\forall g \in G, \quad gZ(G) = Z(G)g$ car
$\forall x \in Z(G),\ gx = xg$

$Z(G) \lhd G.$

3) Soit G l'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

Soit H l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0.$

Soit K l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0.$

H est un sous-groupe de G et K est un sous-groupe de G et de H. (voir 2.5 exemple 8).

Montrons que K est un sous-groupe distingué dans G et que H n'est pas un sous-groupe distingué dans G :

a) $K \lhd G$: $\forall M \in G$, a-t-on $MKM^{-1} \subseteq K$?

Soient $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $ad - bc \neq 0.$

$\forall\ N \in K, \exists \alpha \in \mathbb{R}^* :\ N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2$
$MNM^{-1}{=}M\,(\alpha I_2)\,M^{-1} = \alpha M\,(I_2)\,M^{-1} = \alpha MM^{-1} = \alpha I_2{=}N \in K$
d'où MKM^{-1} est contenu dans K.

Conclusion: $K \lhd G$.

b) $\forall M \in G$, a-t-on $MHM^{-1} \subseteq H$?

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M \in G$

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a = 1$ et $b = 2$ et $a^2 - b^2 = -3 \neq 0$ donc $N \in H$

$$\begin{aligned} MNM^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \notin H \end{aligned}$$

MHM^{-1} n'est pas contenu dans H

donc H n'est pas distingué dans G.

3.2.5 Exercice

Montrer dans l'exemple 3 de 3.2.4 que K est le centre de G.

3.3 Cas commutatif :

Si G est un groupe abélien, notons $+$ la loi de G. Soit H un sous-groupe de G. Alors

$$x\mathcal{R}_g y \Leftrightarrow -y+x \in H \Leftrightarrow x-y \in H \Leftrightarrow x\mathcal{R}_d y$$

d'où $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$ que l'on note $\mathcal{R}$.

La classe de x à gauche est égale à sa classe à droite : $cl\ x = x+H = H+x$.

Conséquences :

Par définition :

$\overline{x}+\overline{z} = \overline{(x+z)}$ i.e. $cl\ x + cl\ z = cl\ (x+z)$

Congruence :

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y \in H$. On écrit : $x \equiv y \pmod{H}$ et on lit : *x congru à y modulo H*.

Exemples :

* Soit $G=\mathbb{Z}$. Soit $H=n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ la relation définie par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y\in n\mathbb{Z}$

$\overline{x}=\overline{y} \Leftrightarrow x\equiv y \pmod{Hn\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x-y\in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de x par n est le même que celui de y par n.

L'ensemble des classes est donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0};\ \overline{1};\ \overline{2};\ \overline{3};\ \ldots\ ;\overline{n-1}\right\}$ qui est donc d'ordre n lorsque $n>0$.

* $G=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\overline{0};\ \overline{1};\ \overline{2};\ \overline{3};\ \overline{4};\ \overline{5}\ \right\}$ est d'ordre 6.

$\overline{5} = \overline{6-1} = \overline{6} - \overline{1} = \overline{-1}$

D'après le Théorème (3.1.6) , tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est d'ordre p où p est un diviseur de 6.

$H_1 = \left\{\overline{0}\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$H_2 = \left\{\overline{0};\ \overline{3}\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'ordre 2 :

$\overline{3}+\overline{3}=\overline{0}$; $\overline{0}+\overline{3}=\overline{3}$

$H_3 = \left\{\overline{0};\ \overline{2};\ \overline{4}\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'ordre 3 :

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{4}$

$\overline{4}+\overline{2}=\overline{0}$

$\overline{4}+\overline{4}=\overline{2}$

Table d'addition de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

Remarque La table de multiplcation de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est :

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe :

il y a un élément neutre qui est $\overline{1}$ mais $\overline{2}$ n'a pas de symétrique.

On peut aussi voir que les seuls éléments réguliers (et inversibles) sont $\overline{1}$ et $\overline{5}$.

IV) Morphismes de groupes

4.1 Définition

Soient G et G' deux groupes.

Une application $f : G \to G'$ est un **homomorphisme** de groupes ou un **morphisme** de groupes si

$$\forall x, y \in G, \;\; f(xy) = f(x)f(y).$$

L'ensemble des morphismes de G dans G' est noté $Hom(G, G')$.

4.2 Exemples

1) L'application f de $(\mathbb{Z}; +)$ dans $(2\mathbb{Z}; +)$ définie par $f(n) = 2n$ est un morphisme de groupes.

2) $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$ est un morphisme de groupes.

4.3 Proposition

Soient G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e'.
Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Alors

1) $f(e) = e'$

2) Pour tout élément $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3) Pour tout entier non nul n, $f(x^n) = (f(x))^n$ et, en définissant x^{-n} par $(x^n)^{-1}$, $f(x^{-n}) = (f(x))^{-n}$.

Preuve

1) $f(e)e' = f(e) = f(e.e) = f(e)f(e)$. D'où, $f(e)$ étant régulier dans G' on a : $f(e) = e'$.

2) $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e' = f(x)\,(f(x))^{-1}$ donc $f(x)$ étant régulier dans G' on a : $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3) Pour $f(x^n)$ on peut procéder par récurrence sur n.

Pour $f(x^{-n})$ on utilise la Propriété 2 et le cas n positif ou encore:

$f(x^{-n})\ f(x^n) = f\left(x^{-n}x^n\right) = f\left(e\right) = e' = [f(x^n)]^{-1}\, f(x^n)$
donc $f(x^{-n}) = [f(x^n)]^{-1}$.

4.4 Proposition

Soient H un groupe, $f : G \to G'$ et $g : G' \to G"$ des morphismes de groupes.
Alors, $gof : G \to G"$ est un morphisme de groupes.

4.5 Noyau et image d'un morphisme

Soient G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e' et soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

4.5.1 Définitions

On appelle noyau de f, et on note $\ker f$, l'ensemble $\{x \in G : f(x) = e'\}$.

On appelle image de f, et on note $Im\ f$, l'ensemble $\{f(x) :\ x \in G\}$.

4.5.2 Proposition

(i) Pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
En particulier, $f(G) = \operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G' et $f(H)$ est un sous-groupe de $f(G)$.

(ii) Pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous groupe de G.

(iii) En particulier, $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Preuve

(i) * $e \in H$ (car H est un sous-groupe de G) et $f(e) = e'$ donc $f(H)$ est non vide.

* $\forall h_1 \in H$ et $\forall h_2 \in H$, $h_1h_2^{-1} \in H$, $f(h_1)f(h_2)^{-1} = f(h_1)f(h_2^{-1}) = f(h_1h_2^{-1}) \in f(H)$.

D'où $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

(ii) * $f^{-1}(H') = \{x \in G : f\left(x\right) \in H'\} \subseteq G$
$z \in f^{-1}(H')$ ssi $z \in G$ et $f\left(z\right) \in H'$

* $e' \in H'$ et $f(e) = e' \Rightarrow e \in f^{-1}(H')$ qui est donc non vide.

* $\forall y_1,\, y_2 \in f^{-1}(H')$, $\exists h_1'$ et h_2' dans H' tels que $f(y_1) = h_1'$ et $f(y_2) = h_2'$.
Donc $f(y_1y_2^{-1}) = f(y_1)f(y_2^{-1}) = f(y_1)\left(f(y_2)\right)^{-1} = h_1'\left(h_2'\right)^{-1} \in H'$

car H' est un sous-groupe de G'.
D'où $y_1y_2^{-1} \in f^{-1}(H')$ et par conséquent, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G'.

(iii) d'après (ii), comme $\{e'\}$ est un sous-groupe de G', $\ker f = f^{-1}(\{e'\})$ est un sous-groupe de G.

4.5.3 Proposition

$\ker f = \{1_G\}$ *si et seulement si* f *est injective.*

Preuve

* Supposons que $\ker f = \{1_G\}$.
Soient x et y appartenant à G tels que $f(x) = f(y)$.
On a alors $f(x)\,(f(y))^{-1} = 1_{G'}$ c'est à dire $f(xy^{-1}) = 1_{G'}$ car f est un morphisme.

D'où xy^{-1} appartient à $\ker f = \{1_G\}$.

Par conséquent, $xy^{-1} = 1_G$ et $xy^{-1}y = 1_G y$ et donc $x = y$; f est donc injective.

* Réciproquement : supposons que f est injective.

Soit z appartenant à $\ker f$.

On a alors $f(z) = 1_{G'} = f(1_G)$.

D'où, comme f est injective, $z = 1_G$ et $\ker f$ est par conséquent inclus dans $\{1_G\}$.

Comme 1_G appartient à $\ker f$, $\ker f = \{1_G\}$.

4.5.4 Proposition

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Alors on a:
1) L'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

2) L'image réciproque par f d'un sous-groupe distingué de G' est un sous groupe distingué de G. En particulier, $\ker f$ *est un sous-groupe distingué de G.*

Preuve

1) Soit H un sous-groupe de G.

D'après la Proposition 4.5.2 (i), l'image par f de H est un sous-groupe de $f(G)$.

Si H est distingué dans G, montrons que $f(H)$ est alors distingué dans $f(G)$:

$\forall y \in f(G)$, $yf(H)y^{-1}$ est-il inclus dans $f(H)$?

$y \in f(G) \Rightarrow \exists\, x \in G \;/\; f(x) = y$;

$\forall z \in f(H)$, $\exists\, t \in H \;/\; f(t) = z$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} yzy^{-1} & = & f(x)f(t)\,[f(x)]^{-1} = f(x)f(t)f(x^{-1}) = f(xtx^{-1}) \in f(H) \\ \text{car } H \lhd G & \Rightarrow & xtx^{-1} \in H \end{array}$$

donc $yf(H)y^{-1} \subseteq f(H)$ et $f(H)$ est distingué dans $f(G)$.

2) Soit H' un sous-gropue de G'.

D'après la Proposition 4.5.2 (ii), l'image réciproque par f de H' est un sous-groupe de G.

Si H' est distingué dans G', montrons que $f^{-1}(H')$ est alors distingué dans G :

$\forall x \in G$, $xf^{-1}(H')x^{-1}$ est-il inclus dans $f^{-1}(H')$?

$y \in f^{-1}(H') \iff (y \in G$ et $f(y) \in H')$;

$\forall y \in f^{-1}(H')$, on a:

$$\begin{aligned} f(xyx^{-1}) &= f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1} \\ &\in f(x)H'(f(x))^{-1} \subseteq H' \end{aligned}$$

car $H' \lhd G'$. On a alors :

$$f(xyx^{-1}) \in H' \text{ d'où } xyx^{-1} \in f^{-1}(H')$$

Conclusion: $\forall x \in G$, $xf^{-1}(H')x^{-1} \subseteq f^{-1}(H')$;

donc $f^{-1}(H')$ est distingué dans G (lorsque H' est distingué dans G').

Cas particulier : $H' = \{1_{G'}\} \Rightarrow H'$ est un sous-groupe distingué dans G'

d'où $f^{-1}(H')$ est distingué dans G.

Or $f^{-1}(H') = f^{-1}(\{1_{G'}\}) = \ker f$, $\ker f$ est donc un sous-groupe distingué de G.

4.5.5 Proposition et définition

Soit $H \lhd G$. Soit φ l'application qui à $x \in G$ associe sa classe d'équivalence dans G/H.
Alors φ est un morphisme de groupe et φ est surjectif, appelé surjection canonique de G sur G/H.

Preuve

Soient x et y deux éléments de G alors $\varphi(xy) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(x)\varphi(y)$

donc φ est un homomorphisme de groupe.

$\forall z \in G/H$, $\exists x \in G$ tel que $z = xH$ d'où $z = \varphi(x)$.

Donc φ est surjectif.

4.5.6 Théorème Théorème d'isomorphisme

Soit f un morphisme de groupes de G vers G'. Alors il existe un isomorphisme $\tilde{f} : G/\ker f \to \operatorname{Im} f$ tel que $f = i \text{ o } \tilde{f} \text{ o } p$ où p est le morphisme surjectif de G sur $G/\ker f$ qui, à tout élément de G associe sa classe d'équivalence dans $G/\ker f$ et où i est l'injection canonique de $\operatorname{Im}\ f$ dans G': $y \mapsto y$.

C'est à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ p\downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker f & \underset{\simeq}{\xrightarrow{\tilde{f}}} & \operatorname{Im} f \end{array}$$

Décomposition canonique
d'un morphisme de groupes.

Preuve

* D'après 4.5.4, $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G d'où $G/\ker f$ a une structure de groupe pour la loi induite de celle de G.

* D'après 4.5.2, l'image d'un groupe par un morphisme est un sous-groupe du groupe image.

Posons $N = \ker f$.

* Construction de $\widetilde{f}$: On pose :

$\forall \overline{x} \in G/N$, $\widetilde{f}(\overline{x}) = f(x)$ où x est un représentant de la classe d'équivalence $\overline{x}$.

* Montrons que $\widetilde{f}$ est bien définie c'est à dire que lorsque x et y sont dans la même classe alors $f(x) = f(y)$

Si y est un autre représentant de la classe d'équivalence $\overline{x}$ associée à x, alors $xN = yN$

d'où $xy^{-1} \in N = \ker f$.

On a alors $f(xy^{-1}) = 1_{G'}$ et $f(x)f(y^{-1}) = 1_{G'} \Rightarrow f(x)f(y)^{-1} = 1_{G'}$ d'où $f(x) = f(y)$ donc $\widetilde{f}$ est bien une application.

* $\widetilde{f}(\overline{x}\,\overline{y}) = \widetilde{f}(xNyN) = \widetilde{f}(xyN) = f(xy) = f(y) = f(y)$

$\widetilde{f}$ est donc un homomorphisme de groupe.

* Montrons que $\widetilde{f}$ est injective.

Soient $\overline{x} = xN$ et $\overline{y} = yN \in G/N$ on a:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\overline{x}) = \widetilde{f}(\overline{y}) &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x)\,(f(y))^{-1} = f\left(xy^{-1}\right)\\ &\Leftrightarrow xy^{-1} \in N = \ker f \Leftrightarrow xN = yN \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}\end{aligned}$$

d'où $\widetilde{f}$ est injective.

* Montrons que $\widetilde{f}$ est surjective.

Soient $z \in Im\ f$ alors $\exists x \in G$ tel que $z = f(x)$.

On a alors : $z = \widetilde{f}(xN) = \widetilde{f}(\overline{x})$.

Conclusion : $\widetilde{f}$ est un isomorphisme de groupes et $G/\ker f \simeq Im\ f$.

* l'application $i : Imf \to G' : x \mapsto x$ est évidemment un morphisme injectif appelé l'injection canonique de Imf sur G'.

* $io\widetilde{f}op$ est l'application de G vers G' qui, à tout x de G, associe

$io\widetilde{f}op(x) = io\widetilde{f}(xN) = i\left(\widetilde{f}(xN)\right) = i\left(f(x)\right) = f(x)$.

Cela montre que $io\widetilde{f}op = f$.

4.5.7 Endomorphismes et isomorphismes

Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

Définitions

Si $(G, .) = (G', .)$, on dit que f est un endomorphisme de G.

L'ensemble des endomorphismes de G est noté $End(G)$ ou $Hom(G)$.

Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de G dans G'.

Dans ce cas, on dit que G et G' sont isomorphes (ou que G' est isomorphe à G).

Si f est un endomorphisme bijectif de G , on dit que f est un automorphisme de G.

L'ensemble des automorphismes de G est noté $Aut(G)$.

4.5.8 Proposition

Soient G et G' deux groupes isomorphes.
Alors, G est abélien ssi G' est abélien.
Preuve

Soit f un isomorphisme de G dans G'.

a) Supposons que G est abélien.

Soient x'_1 et x'_2 appartenant à G'.

f étant bijective, il existe x_1 et x_2 dans G tels que $x'_1 = f(x_1)$ et $x'_2 = f(x_2)$.

f étant un morphisme, on a $x'_1 x'_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1 x_2)$.

$$x'_1 x'_2 = f(x_1 x_2) = f(x_2 x_1) = f(x_2)f(x_1) = x'_2 x'_1$$

donc G' est abélien.

b) Supposons que G' est abélien.

Soient x_1 et x_2 appartenant à G.

$$f(x_1 x_2) = f(x_1)f(x_2) = f(x_2)f(x_1) = f(x_2 x_1)$$

comme f est injective, on a : $x_1 x_2 = x_2 x_1$ et par conséquent G est abélien.

4.5.9 Proposition

$Aut(G)$ est un groupe pour la composition.

Preuve

* $Aut(G)$ n'est pas vide car il contient l'identité.

* La composée de deux éléments de $End(G)$, donc en particulier de deux éléments de $Aut(G)$, est un élément de $End(G)$.

En outre, si f_1 et f_2 sont des applications bijectives alors f_1of_2 est bijective d'inverse

$(f_1of_2)^{-1} = f_2^{-1}of_1^{-1}$.

D'où, la composée de deux automorphismes de G est aussi un automorphisme de G.

$Aut(G)$ est donc stable pour la composition des applications.

Soit f appartenant à $Aut(G)$. Posons $h = f^{-1}$.

Montrons que h appartient à $Hom(G)$: soient x et x' deux éléments de G.

f étant un morphisme, $f(h(x)h(x')) = f(h(x))f(h(x')) = xx' = f(h(xx'))$ car $h = f^{-1} \Rightarrow foh = Id_G$.

D'où, f étant injective, $h(x)h(x') = h(xx')$.

De plus, h est bijective d'inverse f donc h appartient à $Aut(G)$.

$(Aut(G), o)$ est un groupe.

UFR SFA	EXAMEN D'ALGEBRE 1 DE $2^{ème}$ SESSION	SFA 2 MIA + TCI	2004-2005

Durée: 2 h 30 mn

Exercice 1:

On considère le système de n équations à n inconnues

$$(\textstyle\sum_n)\quad \begin{cases} 2ax_1 + x_2 & = \quad 2 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 & = \quad 0 \\ x_2 + 2ax_3 + x_4 & = \quad 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_{n-2} + 2ax_{n-1} + x_n & = \quad 0 \\ x_{n-1} + 2ax_n & = \quad 0 \end{cases}$$

où a est un paramètre réel. Soit $\Delta_n(a)$ le déterminant de $(\sum_n)$.

1) Ecrire la matrice de $(\sum_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Exprimer $\Delta_n(a)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(a)$ et de $\Delta_{n-2}(a)$.

2) Etablir que si $\Delta_n(a) \neq 0$, en convenant que $\Delta_0(a) = 1$ alors $x_k = (-1)^{k+1}\dfrac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} \quad \forall k \in [1; n]$

3) On suppose que $|a| < 1$ et on pose $a = \cos\theta$.

Calculer si possible $\Delta_n(a)$ et x_k pour $n = 4$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Résoudre alors $(\sum_4)$.

Exercice 2

Soit G l'ensemble des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

b) Soit H l'ensemble des applications $f_{1,b}$. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G et que G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3

Soit u l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Montrer que $\lambda = 2$ est une valeur propre de u.

2) Montrer que le noyau N_1 de $(u - 2Id_E)$ est contenu dans le noyau N_2 de $(u - 2Id_E)^2$ et que

dim N_1 = dim N_2 où Id_E est l'application identique de E.

Montrer que M n'est pas semblable à une matrice diagonale.

3) M est-elle trigonalisable? si oui trigonaliser M.

4) Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Résoudre le système : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2 + e^t \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - t \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

$\boxed{\text{Corrigé de l'examen de } 2^{ème} \text{ session d'Algèbre 1 MIA-TCI SFA}_2}$ $\boxed{2004\text{-}2005}$

Exercice 1:

On considère le système de n équations à n inconnues

$$1)\ (\textstyle\sum_n) \begin{cases} 2ax_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2ax_3 + x_4 & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & x_{n-2} + 2ax_{n-1} + x_n \\ x_{n-2} + 2ax_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} + 2ax_n & = & 0 \end{cases} \qquad M_n(a) = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a\Delta_{n-1}(a) - \Delta_{n-2}(a)$$

2) Si $\Delta_n(a) \neq 0$, en convenant que $\Delta_0(a) = 1$ alors

$$\Delta_{x_k} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & 2a & 0 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 2a & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & & & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2(-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & 2a & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 2a & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_k} = 2(-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 & & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & 2a & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & 2a & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 2a & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & 2a & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & 1 & 2a & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & & \ddots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & & & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{k+1}\,\Delta_{n-k}(a)$$

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta_n(a)} = 2(-1)^{k+1}\frac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} \quad \forall k \in [1; n]$$

3) On suppose que $|a| < 1$ et on pose $a = \cos\theta$.

$\Delta_n(a) = \Delta_n(\cos\theta)$

$\Delta_1(a) = 2a = 2\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$

$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2 - 1 = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$

$\Delta_3(a) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 8a^3 - 4a = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta = \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$

Montrons que $\Delta_n(a) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \cos n\theta + \dfrac{\sin n\theta \cos\theta}{\sin\theta}$

1) C'est vrai pour $n = 0,\ 1,\ 2$

2) Supposons que $\Delta_n(a) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ $\forall n \in [1; k]$

Alors $\Delta_{k+1}(a) = 2a\Delta_k(a) - \Delta_{k-1}(a)$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\Delta_k(a) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ et $\Delta_{k-1}(a) = \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

donc $\Delta_{k+1}(a) = 2\cos\theta\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\cos\theta\sin(1+k)\theta - \sin k\theta}{\sin\theta}$

$2\cos\theta\sin(1+k)\theta - \sin k\theta = ?$

$\sin(2+k)\theta = \sin\theta\cos(1+k)\theta + \cos\theta\sin(1+k)\theta = \sin\theta\cos\theta\cos k\theta - \sin^2\theta\sin k\theta + \cos\theta\sin(1+k)\theta$

$\sin\theta\cos k\theta = \sin(1+k)\theta - \cos\theta\sin k\theta$

$\sin(2+k)\theta = \sin(1+k)\theta\cos\theta - \cos^2\theta\sin k\theta$

$\sin(2+k)\theta = (\cos\theta)\left([\sin(1+k)\theta - \cos\theta\sin k\theta]\right) - \sin^2\theta\sin k\theta + \cos\theta\sin[(1+k)\theta] = 2\cos\theta\sin(1+k)\theta - \sin k\theta$

$$\Delta_{k+1}(a) = \frac{\sin(2+k)\theta}{\sin\theta}$$

3) Conclusion : $\forall n \geq 1,\ \Delta_n(a) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

$$x_k = 2(-1)^{k+1}\frac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} = 2\left[(-1)^{k+1}\right]\frac{\dfrac{\sin(n-k+1)\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}} = \left[(-1)^{k+1}\right]\frac{\sin(n-k+1)\theta}{\sin(n+1)\theta}$$

pour $n = 4$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $x_k = 2\left[(-1)^{k+1}\right]\dfrac{\sin(4-k+1)\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{5\pi}{6}} = 2\left[(-1)^{k+1}\right]\sin(4-k+1)\dfrac{\pi}{6}$.

$(\sum_4)$:

$x_1 = 2\sin\dfrac{4\pi}{6} = 2\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$; $x_2 = -2\sin\dfrac{3\pi}{6} = -2\sin\dfrac{\pi}{2} = -2$

$x_3 = 2\sin\dfrac{2\pi}{6} = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $x_3 = -2\sin\dfrac{\pi}{6} = -1$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{3};\ -2;\ \sqrt{3};\ -1\right\}}$$

Méthode directe $(\sum_4)$: $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \sqrt{3}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + \sqrt{3}x_4 = 0 \end{cases}$,

$$\boxed{S = \left\{x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -2;\ x_3 = \sqrt{3};\ x_4 = -1\right\}}$$

Exercice 2

Soit G l'ensemble des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_{a,b}(x) = ax+b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) * $\forall a, c \in \mathbb{R}^*$ et $b, d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_{a,b} o f_{c,d}(x) = a(cx+d)+b = acx+ad+b = f_{ac,ad+b}(x)$.

$f_{a,b} o f_{c,d} = f_{ac,ad+b} \in G$ car $ac \in \mathbb{R}^*$. La loi o est donc stable dans G.

* La composition des applications est associative en général.

* $f_{1,0} \in G$ et $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $f_{a,b} o f_{1,0} = f_{a,b} = f_{1,0} o f_{a,b}$. donc $f_{1,0}$ est l'élément neutre de G.

* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $f_{a,b} o f_{1/a,-b/a} = f_{a/a,-b+b} = f_{1,0}$ donc $f_{1/a,-b/a}$ est l'élément symétrique de $f_{a,b}$ dans G.

Conclusion : (G, o) est un groupe.

$f_{2,0} o f_{1,1} = f_{2,2}$ et $f_{1,1} o f_{2,0} = f_{2,1} \neq f_{2,2}$ car $f_{2,1}(0) = 1$, mais $f_{2,2}(0) = 2$

(G, o) est un groupe.non abélien.

b) Soit H l'ensemble des applications $H = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$

*$H \neq \emptyset$ car $f_{1,0} \in H$.

* $H \subseteq G$.

* $\forall f, h \in H$, soient b et $d \in \mathbb{R}$ / $f_{1,b} = f$ et $f_{1,d} = h$,

$$f o h^{-1} = f_{1,b} o f_{1,d}^{-1} = f_{1,b} o f_{1,-d} = f_{1,-d+b} \in H.$$

Conclusion : H est un sous-groupe de G

* $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, soient $a \in \mathbb{R}^*$ et b, $d \in \mathbb{R}$ / $f_{a,b} = g$ et $f_{1,d} = h$,

$$g^{-1} o h o g = f_{a,b}^{-1} o f_{1,d} o f_{a,b} = f_{a,b}^{-1} o f_{a,b+d} = f_{1/a,-b/a} o f_{a,b+d} = f_{1,d/a} \in H$$

donc H est un sous-groupe distingué de G.

* Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ f_{a,b} & \longmapsto & a \end{array}$

$$\varphi(f_{a,b} o f_{c,d}) = \varphi(f_{ac,ad+b}) = ac = \varphi(f_{a,b}) \times \varphi(f_{c,d})$$

donc φ est un morphisme de groupe; $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{1\}) = H$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme, $G/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^*$

donc G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

<u>Exercice 3</u> Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = -(X-3)(X-1)^2 = -X^3 + 5X^2 - 7X + 3$$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, les vecteurs propres: $3 \leftrightarrow e_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$, $1 \leftrightarrow e_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$, $e_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$; c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer A^n

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c) $(\sum)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + 2t \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - t \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX + \Phi$, où $\Phi = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix}$

Posons $Y = P^{-1}X$ et $\Psi = P^{-1}\Phi$.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\left(\sum\right) \Leftrightarrow Y' = P^{-1}AX + \Psi = DY + \Psi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 + \frac{1}{2}t \\ y_2 - \frac{1}{2}t \\ y_3 + t \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 3y_1 + \frac{1}{2}t \\ \\ y_2' = y_2 - \frac{1}{2}t \\ \\ y_3' = y_3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 3y_1 = \frac{1}{2}t \\ \\ y_2' - y_2 = -\frac{1}{2}t \\ \\ y_3' - y_3 = t \end{cases}$$

$$y_1' = 3y_1 \Leftrightarrow y_{1H} = C_1 e^{3t}; \quad y_{1p} = C_1(t)e^{3t}$$

$$y_{1p}' = C_1'(t)e^{3t} + ...$$

$$C_1'(t)e^{3t} = \frac{1}{2}t \Rightarrow C_1'(t) = \frac{1}{2}te^{-3t} \Rightarrow C_1(t) = \int \frac{1}{2}te^{-3t}dt = -\frac{1}{18}e^{-3t}(3t+1) \Rightarrow$$

$$y_{1p} = -\frac{1}{18}(3t+1)$$

$$y_1 = C_1 e^{3t} - \frac{1}{18}(3t+1)$$

$y_2' - y_2 = -\frac{1}{2}t$

$$y_2' - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2' = y_2 \Leftrightarrow y_{2H} = C_2 e^t; \quad y_{2p} = C_2(t)e^t$$

$$y_{2p}' = C_2'(t)e^t + ...$$

$$C_2'(t)e^t = -\frac{1}{2}t \Rightarrow C_2'(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} \Rightarrow C_2(t) = -\int \frac{1}{2}te^{-t}dt = \frac{1}{2}e^{-t}(t+1) \Rightarrow$$

$$y_{2p} = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$y_2 = C_2 e^t + \frac{1}{2}(t+1)$$

$y_3' - y_3 = t$

$$y_3' - y_3 = 0 \Leftrightarrow y_3' = y_3 \Leftrightarrow y_{3H} = C_3 e^t; \quad y_{3p} = C_3(t)e^t$$

$$y_{3p}' = C_3'(t)e^t + ...$$

$$C_3'(t)e^t = t \Rightarrow C_3'(t) = te^{-t} \Rightarrow C_3(t) = \int te^{-t}dt = (-t-1)e^{-t} \Rightarrow$$

$$y_{3p} = -(t+1)$$

$$y_3 = C_3 e^t - (t+1)$$

$$X = PY = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} - \frac{1}{18}(3t+1) \\ \\ C_2 e^t + \frac{1}{2}(t+1) \\ \\ C_3 e^t - (t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 e^{3t} + C_3 e^t - \frac{4}{3}t - \frac{10}{9} \\ \\ -C_3 e^t + t + 1 \\ \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^t + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

ii) 1) $P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = -X^3 + 5X^2 - 8X + 4 = -(X-1)(X-2)^2$

les vecteurs propres : $u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \quad v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2$

2 est une racine doube de $P_M(X)$, donc 2 est une valeur propre doube de M.

Mais le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1; donc M n'est pas diagonalisable.

2) les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{R}$ donc M est-elle trigonalisable.

Trigonalisons M: Cherchons une matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ semblable à M.

$$f(w) = v + 2w \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3x+y \\ -x+y \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2x \\ 1+2y \\ 2z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+y = -1+2x \\ -x+y = 1+2y \\ x+y+z = 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ x+y = -1 \\ x+y = z \end{cases} \Rightarrow \quad z = -1$$

Pour $x = 0$, $y = -1$ et $z = -1$ on a : $w = (0, -1, -1)$

$T = P_1^{-1} M P_1$

$$P_1 = M(\mathcal{B}_0; \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = P_1^{-1} M P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$M = P_1 T P_1^{-1} \Rightarrow M^n = P_1 T P_1^{-1} P_1 T P_1^{-1} \cdots P_1 T P_1^{-1} P_1 T P_1^{-1} = P_1 T^n P_1^{-1}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$T^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Montrons que $T^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\left(2^{n-1}\right) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \forall n \geq 0.$

a) C'est vrai pour $n = 0,\, 1,\, 2$

b) Supposons que $T^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k\left(2^{k-1}\right) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$ pour $k \geq 0$.

Alors $T^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k\left(2^{k-1}\right) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^k & 2^k + 2k\left(2^{k-1}\right) \\ 0 & 0 & 2 \times 2^k \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & (k+1)\, 2^{(k+1)-1} \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$

c) Conclusion : $\forall n \geq 0$, $T^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\left(2^{n-1}\right) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = P_1 T^n P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\left(2^{n-1}\right) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{M^n = \begin{bmatrix} (n+2)\, 2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n-1} & (-n+2)\, 2^{n-1} & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

UFR SFA | Examen de $2^{ème}$ session d'Algèbre 1 TCSM- SFA_2 | 2004-2005

Durée : 2 h 30 mn

Exercice 1

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

1) Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G

2) Montrer que l'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

Exercice 2

Soient $G = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$ et la loi de composition définie par : $(x; y)(x', y') = (xx', xy' + y)$.

a) Montrer que G, muni de cette loi de composition, est un groupe. Est-il abélien ?

b) Soit H la partie de G formée des couples $(x; y)$ tels que $x = 1$. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G et déterminer G/H.

Exercice 3

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2) Réduire la matrice A si possible.

3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Résoudre le système suivant : $(\sum)$ $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2t \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

II) Reprendre les questions 1) à 3) de I) pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ à la place de A.

Corrigé de l'examen de $2^{ème}$ session d'Algèbre 1 TCSM- SFA_2 | 2004-2005

Exercice 1

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

1) Montrons que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G

Soient e et e' les éléments neutres de G et G' respectivement.

a) Soit $H = \ker f = \{x \in G / f(x) = e'\}$.

$*$ $H \neq \emptyset$ car $f(e) = e' \Rightarrow e \in \ker f$.

$*$ $H \subseteq G$, trivial.

$*$ $\forall x, y \in H$, $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)\,[f(y)]^{-1} = e'\,(e')^{-1} = e'$

donc $xy^{-1} \in \ker f = H$.

Conclusion: $H = \ker f$ est un sous-groupe de G.

b) $\forall x \in G$, xHx^{-1} est-il inclus dans H?

$\forall h \in H$, $f(xhx^{-1}) = f(x)f(h)f\left(x^{-1}\right) = f(x)e'f(x)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e'$

donc $xhx^{-1} \in H$ et $xHx^{-1} \subseteq H$.

Conclusion: $H \lhd G$.

2) Montrons que l'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

a) Montrons que l'image par f d'un sous-groupe distingué E de G, c'est à dire $f(E)$, est un sous-groupe de G' :

* $f(E) \neq \emptyset$ car $f(e) = e' \in f(E)$.

* $f(E) \subseteq G'$, trivial.

* $\forall x, y \in f(E)$, $\exists a, b \in G$ / $f(a) = x$ et $f(b) = y$

$xy^{-1} = f(a)\,(f(b))^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(E)$ donc $xy^{-1} \in f(E)$.

Conclusion: $f(E)$ est un sous-groupe de G' et pour les mêmes raisons $f(G)$ est ausi un sous-groupe de G';

comme $f(G)$ contient $f(E)$, $f(E)$ est un sous-groupe de $f(G)$.

b) $f(E) \lhd f(G)$:

$\forall x \in f(G)$, $xf(E)x^{-1}$ est-il inclus dans $f(E)$?

$x \in f(G) \Rightarrow \exists a \in G/f(a) = x$;

$\forall y \in f(E)$, $\exists b \in E/f(b) = y$ on a alors :

$$xyx^{-1} = f(a)f(b)\left[f(a)\right]^{-1} = f(a)f(b)f(a^{-1}) = f(aba^{-1}) \in f(E) \text{ car } E \lhd G \Rightarrow aba^{-1} \in E$$

donc $xf(E)x^{-1} \subseteq f(E)$ et $f(E)$ est distingué dans $f(G)$.

Exercice 2

Soient $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$ et la loi de composition définie par :

$$(x,y)(x',y') = (xx', xy' + y).$$

a) Montrer que G, muni de cette loi de composition, est un groupe. Est-il abélien ?

* La loi est interne dans G (donc G est stable):

$\forall\,(x,y)\,,(x',y') \in G$, on a: $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ donc $xx' \neq 0$ et $(x,y)(x',y') = (xx', xy' + y) \in G$.

* La loi est associative dans G. En effet, $\forall\,(x,y)\,,(x',y'),(x'',y'') \in G$,

$$\left[(x,y)(x',y')\right](x'',y'') = (xx', xy' + y)(x'',y'') = \left(\left(xx'\right)x'', \left(xx'\right)y'' + xy' + y\right)$$

$$\left[(x,y)(x',y')\right](x'',y'') = \left[x\left(x'x''\right), x\left(x'y'' + y'\right) + y\right] = (x,y)\left[(x'x'', \left(x'y'' + y'\right)\right] = (x,y)\left[(x',y')\left(x'',y''\right)\right].$$

* $(1,0)$ est l'élément neutre de G: $(1,0) \in G$ et $\forall\,(x,y) \in G$,

$$(x,y)\,(1,0) = (x \times 1, x \times 0 + y) = (x,y) \text{ et } (1,0)\,(x,y) = (1 \times x, 1 \times y + 0) = (x,y)$$

* $\forall\,(x,y) \in G$, (x,y) est symétrisable dans G.

En effet, $x \neq 0$ et $(1/x, -y/x) \in G$ et l'on a:

$$\begin{cases} (x,y)\,(1/x, -y/x) = (x \times (1/x)\,, x \times (-y/x) + y) = (1,0) \\ (1/x, -y/x)\,(x,y) = ((1/x) \times x, (1/x) \times y + (-y/x)) = (1,0) \end{cases}$$

Conclusion : G est un groupe.

* Est-il abélien ?

$$(2,1)(1,1) = (2 \times 1, 2 \times 1 + 1) = (2,3)\,;\ (1,1)(2,1) = (1 \times 2, 1 \times 1 + 1) = (2,2) \neq (2,3) = (2,1)(1,1)$$

donc G n'est pas abélien.

b) Soit H la partie de G formée des couples $(x;y)$ tels que $x = 1$.

i) Montrons que H est un sous-groupe de G .

$H = \{(1,a) : a \in \mathbb{R}\}$.

$*$ $H \neq \emptyset$ car $(1,0) \in H$.

$*$ $H \subseteq G$, trivialement.

$*$ $\forall (1,a), (1,b) \in H$, $(1,a)(1,b)^{-1} = (1,a)(1,-b) = (1 \times 1, 1 \times (-b) + a) = (1, a-b) \in H$.

donc H est un sous-groupe de G.

ii) Montrons que H est distingué dans G :

$\forall (x,y) \in G$, $(x,y) H (x,y)^{-1}$ est-il inclus dans H?

$\forall (1,a) \in H$, on a :

$$(x,y)(1,a)(x,y)^{-1} = (x, xa+y)(1/x, -y/x) = (x \times 1/x, x \times (-y/x) + xa + y) = (1, xa) \in H$$

donc $(x,y) H (x,y)^{-1} \subseteq H$.

Conclusion: $H \lhd G$.

$\forall (x,y) \in G$, on a :

$$(x,y) H = \{(x,y)(1,b) : b \in \mathbb{R}\} = \{(x, xb+y) \ \text{ tels que } b \in \mathbb{R}\} = \{x\} \times \mathbb{R}$$

$$\boxed{G/H = \{\{x\} \times \mathbb{R} \text{ tels que } x \in \mathbb{R}^*\}}.$$

Exercice 3

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

1) Déterminer les sous-espaces propres de A

$P_A(X) = -\left(X^3 - X^2 - 5X - 3\right) = -(X-3)(X+1)^2$

Pour $\lambda_1 = 3$, $(x;y;z) \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - 2z = 3x \\ -y = 3y \\ -2x - 2y + z = 3z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -4y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ \\ z = -x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x;y;z) = (x;0;-x) = x(1;0;-1) = xv_1$$

où $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\{v_1\}$ est une base de E_{λ_1}.

Pour $\lambda_2 = -1$, $(x;y;z) \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - 2z = -x \\ -y = -y \\ -2x - 2y + z = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y - 2z = 0 \\ y = y \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = x + y \\ \\ z = x + y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x;y;z) = (x;y;x+y) = x(1;0;1) + y(0;1;1) = xv_2 + yv_3$$

où $v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\{v_2, v_3\}$ est une base de E_{λ_2},

$h_i = \dim E_{\lambda_i} = k_i$ l'ordre de multiplicité de $\lambda_i \forall i$ donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Réduisons la matrice A : Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A.

La matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est alors $D = P^{-1}AP$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n & -3^n + (-1)^n \\ 0 & 2(-1)^n & 0 \\ -3^n + (-1)^n & -3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}}$$

4) Résolvons le système suivant : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

$$(\sum) \Leftrightarrow X' = AX + \Phi, \text{ où } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{bmatrix}$$

et $\Phi = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{bmatrix}$

Posons $Y = P^{-1}X$ et $\Psi = P^{-1}\Phi$.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \\ \frac{3}{2}t \\ \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$(\sum) \Leftrightarrow Y' = P^{-1}AX + \Psi = DY + \Psi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \\ \frac{3}{2}t \\ \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 - \frac{1}{2}t \\ \\ -y_2 + \frac{3}{2}t \\ \\ -y_3 - 2t \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 3y_1 - \frac{1}{2}t \\ \\ y_2' = -y_2 + \frac{3}{2}t \\ \\ y_3' = -y_3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 3y_1 = -\frac{1}{2}t \\ \\ y_2' + y_2 = \frac{3}{2}t \\ \\ y_3' + y_3 = -2t \end{cases}$$

L'équation homogène associée à la première équation est

$$y_1' - 3y_1 = 0 \Leftrightarrow y_{1H} = C_1 e^{3t}; \quad y_{1p} = C_1(t)e^{3t}$$

$y_{1p}' = C_1'(t)e^{3t} + ...$

$C_1'(t)e^{3t} = -\frac{1}{2}t \Rightarrow C_1'(t) = -\frac{1}{2}te^{-3t} \Rightarrow C_1(t) = -\int \frac{1}{2}te^{-3t}dt = \frac{1}{18}e^{-3t}\left(3t+1\right) \Rightarrow$

$y_{1p} = \frac{1}{18}\left(3t+1\right)$

$$y_1 = C_1 e^{3t} + \frac{1}{18}\left(3t+1\right)$$

$y_2' + y_2 = \frac{3}{2}t$ a pour équation homogène associée :

$y_2' + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2' = -y_2 \Leftrightarrow y_{2H} = C_2 e^{-t}$; $y_{2p} = C_2(t)e^{-t}$

$y_{2p}' = C_2'(t)e^{-t} + ...$

$C_2'(t)e^{-t} = \frac{3}{2}t \Rightarrow C_2'(t) = \frac{3}{2}te^t \Rightarrow C_2(t) = \frac{3}{2}\int te^t dt = \frac{3}{2}(t-1)e^t \Rightarrow$

$y_{2p} = \frac{3}{2}(t-1)$

$$y_2 = C_2 e^{-t} + \frac{3}{2}(t-1)$$

$y_3' + y_3 = -2t$ a pour équation homogène associée :

$y_3' + y_3 = 0 \Leftrightarrow y_3' = -y_3 \Leftrightarrow y_{3H} = C_3 e^{-t}$; $y_{3p} = C_3(t)e^{-t}$

$y_{3p}' = C_3'(t)e^{-t} + ...$

$C_3'(t)e^{-t} = -2t \Rightarrow C_3'(t) = -2te^t \Rightarrow C_3(t) = -2\int te^t dt = -2(t-1)e^t \Rightarrow$

$y_{3p} = -2(t-1)$

$$y_3 = C_3 e^t - 2(t-1)$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} + \frac{1}{18}(3t+1) \\ \\ C_2 e^{-t} + \frac{3}{2}(t-1) \\ \\ C_3 e^t - 2(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{5}{3}t - \frac{13}{9} \\ \\ C_3 e^t - 2t + 2 \\ \\ -C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \left(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{5}{3}t - \frac{13}{9};\ C_3 e^t - 2t + 2;\ -C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \right) \right\}$$

II) Reprenons les questions 1) à 3) de I) pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminons les sous-espaces propres de B.

Le polynôme caractéristique est $P_B(X) = -\left(X^3 - X - X^2 + 1\right) = -(X+1)(X-1)^2$;

les valeurs propres sont $\gamma_1 = -1$ et $\gamma_2 = 1$.

Pour $\gamma_1 = -1$:

$$(x;y;z) \in E_{\gamma_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=-x \\ -y+2z=-y \\ -2x-2y+z=-z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 2z=0 \\ -2x-2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = (x;-x;0) = x\,(1;-1;0) = xu_1$$

où $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\{u_1\}$ est une base de E_{γ_1}.

Pour $\gamma_2 = -1$:

$$(x;y;z) \in E_{\gamma_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=x \\ -y+2z=y \\ -2x-2y+z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y \\ \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = (-y;y;y) = y\,(-1;1;1) = yu_2$$

où $u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\{u_2\}$ est une base de E_{γ_2},

$h_2 = \dim E_{\gamma_2} \neq k_i$ l'ordre de multiplicité de γ_2 donc la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Réduisons la matrice B :

B ayant toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est B.

Soit $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_3 = (\alpha;\beta;\delta)$ à déterminer de telle sorte que $\mathcal{M}(g;\mathcal{B}_1) = T = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g(u_3) = u_2 + u_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha+2\beta-2\delta \\ -\beta+2\delta \\ -2\alpha-2\beta+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta+1 \\ \delta+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta-2\delta=-1 \\ -2\beta+2\delta=1 \\ -2\alpha-2\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta-2\delta=-1 \\ -2\beta+2\delta=1 \\ -2\alpha-2\beta=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \beta = \delta - \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\delta$

Par exemple $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\dfrac{1}{2}$ et $\delta = 0$

Prenons $u_3 = \left(0; -\dfrac{1}{2}; 0\right)$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}$ est $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de g dans $\mathcal{B}_1$ est alors $T = P_1^{-1} B P_1$

$$T = P_1^{-1} B P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculons B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$T = P_1^{-1} B P_1 \Rightarrow B = P_1 T P_1^{-1} \Rightarrow B^n = \left(P_1 T P_1^{-1}\right)^n = P_1 T P_1^{-1} P_1 T P_1^{-1} \cdots P_1 T P_1^{-1} = P_1 T^n P_1^{-1}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = T^2 T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Raisonnons par récurrence sur n pour montrer la propriété :

$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \geq 0$$

* c'est vrai por $n = 0$; 1 et 2

* Supposons que la propriété est vraie pour k : $T^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

alors $T^{k+1} = T^kT = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

la propriété est donc vraie pour $k+1$.

On conclut que $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \geq 0$

$$B^n = P_1 T^n P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2n & 2n & (-1)^n - 1 \\ -2n + (-1)^{n+1} + 1 & -2n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 \\ -2n & -2n & 1 \end{pmatrix}}$$

UFR SFA | Examen de $1^{ère}$ session d'Algèbre 1 TCSM- SFA_2 | 2004-2005

Durée : 2 h 30

Exercice 1 (6 points)

On considère, dans le groupe multiplicatif $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 inversibles,

l'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^* \right\}$.

1) Montrer que G est un sous-groupe non abélien de $GL_2(\mathbb{R})$.

2) (i) Déterminer le centre de G.

(ii) Soit $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \text{ avec } b = 0 \right\}$, K est-il un sous-groupe de G? Est-il distingué dans G?

3) Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \text{ avec } a = c = 1 \right\}$ et f l'application de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$f\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right] = (a, c).$$

(i) Montrer que f est un homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(ii) En déduire que H est un sous-groupe distingué de G.

(iii) Montrer que le groupe G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 2 (7 points)

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer à l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de la matrice A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A. Que peut-on conclure?

3. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est A.

Déterminer une base de $ker(f - 2Id_E)$ et une base de $ker(f + Id_E)$.

4. Expliciter une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3 (7 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonaliser A.

2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Résoudre le système suivant : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_3 + t \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 - t \\[2ex] \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_3 \end{cases}$

CORRIGÉS ET INDICATIONS

Exercice 1

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^* \right\}.$

1) Montrons que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

$* \ G \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$

$* \ G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$,et $c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ est inversible $\forall b \in \mathbb{R}$.

$* \ \forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ et $\forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in G,$

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a'} & 0 \\ \dfrac{b}{a'} - \dfrac{cb'}{a'c'} & \dfrac{c}{c'} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{a}{a'} \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{b}{a'} - \dfrac{cb'}{a'c'} \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{c}{c'} \in \mathbb{R}^*$ donc $MN^{-1} \in G.$

donc G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

* Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq AB$

donc G n'est pas abélien

2) (i) Déterminons le centre de G:

$$Z(G) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G : \forall N = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \in G,\ MN = NM \right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in Z(G) \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \in G, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} au & 0 \\ bu+cv & cw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & 0 \\ va+wb & cw \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R},\ bu+cv = va+wb$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R},\ b(u-w)+(c-a)v = 0$$

Cela équivaut au fait que $b = 0$ et $c - a = 0$ c'est à dire $c = a$ et $b = 0$

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$Z(G) = \{aI_2 : a \in \mathbb{R}^*\}$$

(ii) Soit $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \text{et } c \in \mathbb{R}^* \right\}$,

Montrons que K est un sous-groupe de G.

$*$ $K \neq \emptyset$ car $I_2 \in K$.

$*$ $K \subseteq G$..

$*$ $\forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K$ et $\forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in K$,

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a'} & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{c'} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{a}{a'} \in \mathbb{R}^*$ et $\dfrac{c}{c'} \in \mathbb{R}^*$ donc $MN^{-1} \in K$.

donc K est un sous-groupe de G.

* Est-il distingué dans G?

$*$ $\forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in K$ et $\forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in K$, MNM^{-1} appartient-il à K?

$$MNM^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \dfrac{ba' - bc'}{a} & c' \end{pmatrix}.$$

Supposons que $b \neq 0$ $i, e.$, $M \in G - K$.

Alors $MNM^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \dfrac{b\,(a'-c')}{a} & c' \end{pmatrix}$ appartient à K si et seulement si $a' = c'$.

Comme il existe des éléments $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ de K tels que $a' \neq c'$, MNM^{-1} n'est pas toujours contenu dans K.

Par conséquent K n'est pas distingué dans G.

Par exemple si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$MNM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin K$$

3) Soit f l'application de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) = (a, c).$$

(i) $\mathbb{R}^*$ est un groupe multiplicatif et $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est un groupe muni de la loi produit:

$$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1 \times a_2, c_1 \times c_2)$$

Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in G$

$$MM' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix}$$
$$f\left(MM'\right) = (aa', cc') = (a, c)(a', c') = f\ (M)\, f\ \left(M'\right)$$

donc f est un homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(ii) On a : $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$ 'et l'élément neutre de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est $(1, 1)$.

On sait que $\ker f$ est un sous-groupe distingué dans G.

$\ker f = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G : (a, c) = (1, 1)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = H.$

donc H est un sous-groupe distingué de G.

(iii) On sait que $G/\ker f \simeq Im\ f = \{(a,c) : a \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R}^*\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

En fait, f est surjectif. Par conséquent, $G/H \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$:

le groupe G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

1. Le polynôme caracteristique de A est : $P_A(X) = -\left(X^3 - 3X - 2\right) = -(X-2)(X+1)^2$

   D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$ donc $-\left(A^3 - 3A - 2I_3\right) = 0$

   $A^3 - 3A - 2I_3 = 0 \Rightarrow A^3 - 3A = 2I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_3\right)A = I_3$

   D'où A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_3\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $P_A(X) = -\left(X^3 - 3X - 2\right) = -(X-2)(X+1)^2$ donc les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$.

   Les sous-espaces propres sont : $E_{\lambda_1} = \ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle$ et $E_{\lambda_2} = \ker(f + Id_E) = \langle e_2; e_3 \rangle$

   où $e_1 = (1;0;1)$, $e_2 = (2;1;0)$ et $e_3 = (2;0;1)$

3. $\ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle = \{\alpha\left((2;1;0)\right) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\left((2\alpha;\alpha;0)\right) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$\ker(f + Id_E) = \langle e_2; e_3 \rangle = \{\alpha\left((2;1;0)\right) + \beta\left((2;0;1)\right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\left((2\alpha + 2\beta; \alpha; \beta)\right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

4. $e_1 \in \ker(f - 2Id_E) \Rightarrow (f - 2Id_E)(e_1) = 0 \Rightarrow f(e_1) = 2e_1$

   $e_2 \in \ker(f + Id_E) \Rightarrow (f + Id_E)(e_2) = 0 \Rightarrow f(e_2) = -e_2$

   $e_3 \in \ker(f + Id_E) \Rightarrow (f + Id_E)(e_3) = 0 \Rightarrow f(e_3) = -e_3.$

   On a: $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit A' la matrice de f dans cette base où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_0$ est A.

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est alors $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ avec P inversible.

Or, $\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 = 2e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 \\ f(e_2) = -e_2 = 0 \times e_1 + (-1)e_2 + 0 \times e_3 \\ f(e_3) = -e_3 = 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1)e_3 \end{cases} \Rightarrow f(e_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $f(e_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $f(e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ obtenu en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_3) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale D.

<u>Exercice 3</u>

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caracteristique de A est : $P_A(X) = -\left(X^3 - 2X^2 - X + 2\right) = -(X-1)(X-2)(X+1)$;

les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$et $\lambda_3 = 1$.

Ce sont des valeurs prores simples donc A est diagonalisable.

Les sous-espaces propres sont : $E_{\lambda_1} = \ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle$, $E_{\lambda_2} = \ker(f + Id_E) = \langle e_2 \rangle$ et $E_{\lambda_3} = \ker(f - Id_E) = \langle e_3 \rangle$

où $e_1 = (2;1;1)$, $e_2 = (-1;1;-2)$ et $e_3 = (0;1;0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} ; P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calculer $A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n = PD^nP^{-1}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n & 0 & -\frac{2}{3}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n \\ \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n - 1 & 1 & -\frac{1}{3}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n + 1 \\ \frac{2}{3}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n & 0 & -\frac{1}{3}2^n + \frac{4}{3}(-1)^n \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - (-1)^n & 0 & -2 \times 2^n + 2(-1)^n \\ 2 \times 2^n + (-1)^n - 1 & 1 & -2^n - 2(-1)^n + 1 \\ 2 \times 2^n - 2(-1)^n & 0 & -2^n + 4(-1)^n \end{pmatrix}}$$

3) $(\sum)$ $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_3 + t \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 - t \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_3 \end{cases}$,

Résultat :

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(-2C_2 - \dfrac{1}{3}C_3\right) e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \dfrac{4}{3}C_3 e^{2t} - t \\ \\ x_2(t) = \left(C_2 + \dfrac{2}{3}C_3\right) e^{2t} + (C_1 - 3C_2 - C_3)\, e^{t} + \left(2C_2 + \dfrac{1}{3}C_3\right) e^{-t} + 2t + \dfrac{3}{2} \\ \\ x_3(t) = \left(\dfrac{4}{3}C_2 - \dfrac{2}{3}C_3\right) e^{-t} + \left(C_2 + \dfrac{2}{3}C_3\right) e^{2t} + t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1

Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1+a, a)$, $B = (0, 1+a)$ et $C = (a, 1-a)$ du plan.

a) A quelle condition les points A, B et C sont ils alignés ?

b) Quelle est l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont AB et AC ?

Quelle est l'aire du triangle ABC ?

c) En tournant autour du triangle dans le sens trigonométrique, quel point rencontre-t'on après A ?

d) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Soient $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.

Répondre aux questions a), b) et c) en remplaçant ABC par $A'B'C'$.

Exercice 2

Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1+a, a)$, $B = (0, 1+a)$ et $C = (a, 1-a)$ et $D = (1, a)$ du plan.

a) A quelle condition le quadrilatère $ABCD$ est-il convexe (i.e. tourne toujours dans le même sens) ?

b) Lorsque c'est le cas, calculer son aire de deux façons différentes en le partageant en triangles.

c) Soient t, u, v, w quatre vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $t + u + v + w = 0$.

$$\text{Montrer que} \quad \det(t, u) + \det(v, w) = \det(u, v) + \det(w, t).$$

Quel est le lien entre cette propriété et le partage d'un quadrilatère en triangles ?

Exercice 3

a) Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) En déduire le volume du parallélépipède de $\mathbb{R}^3$ construit sur les vecteurs

$u = (1, 1, 1)$ $v = (2, 3, 4)$ et $w = (3, 6, 10)$.

Exercice 4

Calculer le déterminant

$$D(a,b,c) = \det \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

en le factorisant.

On montrera qu'il vaut $(a+b+c)^3$.

Exercice 5

On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a,b,c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad D(a,b,c,d) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $D(a,b,c)$

b) Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c,d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par

$f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, montrer que $D(a,b,c,d) = (d-a)(d-b)(d-c)D(a,b,c)$.

c) En déduire la valeur de $D(a,b,c,d)$. Peut-on généraliser?

d) On considère la courbe γ dans l'espace paramétrée par $t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. A quelle condition trois points $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ et $\gamma(c)$ de la courbe sont ils contenus dans un même plan passant par l'origine ?

Exercice 6 Calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit le déterminant

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

a) Calculer directement $D(\alpha,\beta,\gamma)$

b) En utilisant la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, ramener ce calcul à celui d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 8

a) Ecrire l'équation du plan P_1 de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(2,1,-3)$.

b) Ecrire l'équation du plan P_2 de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur $(2,3,4)$.

c) Soit P_3 le plan orthogonal au vecteur $V = (\alpha,\beta,\gamma)$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) l'intersection des trois plans $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ contient-elle une droite ?

Exercice 9

Soit a un paramètre réel. Soient $A = (1,2,3)$, $B = (2,3,4)$ et $C = (3,4,a)$ trois points de l'espace.

Quelle est l'aire du triangle ABC ? A quelle condition les points A, B et C sont ils alignés ?

Exercice 10

Donner une équation de l'hyperplan engendré par les vecteurs $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,2,3,4)$ et $v_3 = (2,3,4,6)$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

a) Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice (n,n) dont tous les éléments sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1+x$.

Calculer $D_n(x)$ en le factorisant.

Quelles sont les racines de $D_n(x) = 0$ et leur multiplicités ?

(on pourra se contenter de traiter les cas $n = 2, 3, 4$).

b) Même question pour le déterminant $\Delta(x)$ de la la matrice (n,n) dont tous les éléments sont égaux à x sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1+x$.

Quel est le degré de $\Delta(x)$?

c) Calculer

$$\det\begin{pmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{pmatrix}$$

On pourra effectuer un calcul direct, ou vérifier que c'est un polynôme en x dont on estimera le degré.

Exercice 12

Calculer le "déterminant circulant"

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soient $D = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $D(x) = \det\begin{pmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{pmatrix}$.

Calculer D et factoriser $D(x)$.

UFR SFA	L 2	Fiche de T D N° 1 D'Algèbre 3	2015-2016

Exercice 1

Soient les quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}; \quad f_3(x) = -x; \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1; f_2; f_3; f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il abélien?

Exercice 2

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes?

1. $]-1;1[$ muni de la loi définie par $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pour la multiplication usuelle;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle;
4. $\{f_{a,b} : x \in \mathbb{C} \mapsto ax + b : \ a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\ ;\ b \in \mathbb{C}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 3

Soient G un groupe. Pour tout couple $(x, y) \in G \times G$, l'élément $x^{-1}y^{-1}xy$ est appelé le commutateur de x et y et un commutateur de G.

1) Montrer que l'inverse d'un commutateur est un commutatateur et que l'ensemble G' des produits des commutateurs de G est un sous-groupe distingué de G (on l'appelle le sous-groupe dérivé de G.)

2) Montrer que G/G' est un groupe abélien.

Exercice 4

Soient G le groupe des matrices complexes inversibles de type $(3, 3)$, G_1 l'ensemble des éléments de G qui sont des matrices scalaires, G_2 l'ensemble des éléments de G qui sont de déterminant 1.

a) Montrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G. Sont-ils abéliens ?

b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe exactement trois couples $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ / $g = g_1g_2 = g_2g_1$.

UNIVERSITE Nangui Abrogoua

UFR SFA	L 2	Fiche de T D N° 2 D'Algèbre 3	2015-2016

Exercice 1

Soit G un groupe contenant un élément non nilpotent u et soit n un entier strictement positif qui vérifie l'égalité : $(ab)^n = a^n b^n \ \forall a, b \in G$.
Soient $H_1 = \{x^n : x \in G\}$ et $H_2 = \{x \in G : x^n = 1_G\}$, où 1_G est l'élément neutre de G,

a) Montrer que H_1 contient une infinité d'éléments et que $H_1 \neq H_2$.

b) Montrer que H_1 et H_2sont des sous-groupes de G. Sont-ils distingués dans G? justifier.

Exercice 2

Soient G un groupe d'ordre n et H un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $N(H)$ des éléments s de G tels que $s^{-1}Hs = H$, appelé normalisateur de H, est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué et que, si H n'est pas un sous-groupe distingué de G, alors $N(H) \neq G$ et réciproquement.

Exercice 3

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.

2. Calculer le noyau et l'image de f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit un morphisme de groupes.

3. On suppose désormais que $\forall h \in H, \forall k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, \forall k \in K : f(h,k) = hk$ est un morphisme de groupes.

UNIVERSITE Nangui Abrogoua

UFR SFA	L 2	Fiche de T D N° 3 D'Algèbre 3	2015-2016

Exercice 1 1) Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix};\begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ c & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ b & x' & y' & z' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix} \text{ et } \Delta(a,b,c) =$$

$$\begin{vmatrix} 3a & 3a & 2a-b-c \\ 3b & 2b-c-a & 3b \\ 2c-a-b & 3c & 3c \end{vmatrix}$$

en les factorisant si possible.

2) Soit $D = \begin{vmatrix} n+1 & & & (3) \\ & n & & \\ & & \ddots & \\ (3) & & & 1 \end{vmatrix}$; Calculer D.

Exercice 2 On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \qquad D(a,b,c,d) = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $D(a,b,c)$

b) Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c,d)$, on peut remplacer sa dernière colonne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière colonne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, montrer que $D(a,b,c,d) = (d-a)(d-b)(d-c)D(a,b,c)$.

c) En déduire la valeur de $D(a,b,c,d)$. Peut-on généraliser?

Exercice 3 On considère, pour le paramètre réel a le système :

$$(\textstyle\sum_n)\left\{\begin{array}{ccc} \alpha x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + \alpha x_3 + x_4 & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ x_{n-2} + \alpha x_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} + \alpha x_n & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{Soit } \Delta_n(\alpha) \text{ le déterminant de } (\textstyle\sum_n).$$

1) Ecrire la matrice de $(\sum_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Exprimer $\Delta_n(\alpha)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(\alpha)$ et de $\Delta_{n-2}(\alpha)$.

2) si $\Delta_n(\alpha) \neq 0$, déterminer x_k en fonction de $\Delta_{n-k}(\alpha)$ et $\Delta_n(\alpha)$ pour tout $k \in [1;n]$, en convenant que $\Delta_0(\alpha) = 1$.

3) On suppose que $|\alpha| < 2$ et on pose $\alpha = 2\cos\theta$.

Calculer si possible $\Delta_n(\alpha)$ et x_k pour $n = 4$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Donner alors les solutions de $(\sum_4)$.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE Nangui Abrogoua

UFR SFA	L 2	Fiche de T D N° 4 D'Algèbre 3	2015-2016

Exercice 1

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Sont-elles semblables à des matrices diagonales?

3) Calculer A^n puis B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Calculer, à l'aide du Théorème de Hamilton-Cayley, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3

Réduire les matrices suivantes sur $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE Nangui Abrogoua

UFR SFA	L 2	Fiche de T D N° 5 D'Algèbre 3	2015-2016

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & 36 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ 9 & 36 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les sous-espaces propres de A. Que peut-on conclure?

2. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est A.

a) Determiner une base de $ker(f - Id_E)$ et une base de $ker(f + 2Id_E)$.

b) Expliciter une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit $M = \begin{bmatrix} 10 & 36 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ 9 & 36 & 1 \end{bmatrix}$

1) Réduire la matrice M.

2) Calculer M^n

3) Résoudre les systèmes : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 10x_1 + 36x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 11x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 9x_1 + 36x_2 + x_3 \end{cases}$ et $(\sum') \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 10x_1 + 36x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 11x_2 + t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 9x_1 + 36x_2 + x_3 + e^t \end{cases}$