Université Nangui Abrogoua

Année Universitaire 2019-2020

UFR - SFA

Licence 2 - MI

TD d'ALGÈBRE 3 - Fiche 5

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 2 \\ 8 & 9 & -4 \\ 12 & 18 & -9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les sous-espaces propres de A

Le polynôme caractéristique de A est : $P_A(X) = \det(A - XI_3)$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -7-X & -6 & 2 \\ 8 & 9-X & -4 \\ 12 & 18 & -9-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -3-X & -6 & 2 \\ 0 & 9-X & -4 \\ -6-2X & 18 & -9-X \end{vmatrix} \quad l_1 \leftarrow 2l_1 + l_2$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -6-2X & -3-X & 0 \\ 0 & 9-X & -4 \\ -6-2X & 18 & -9-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\begin{vmatrix} 1 & -3-x & 0 \\ 0 & 9-x & -4 \\ 1 & 18 & -9-x \end{vmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_3 - l_1$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\begin{vmatrix} 1 & -3-x & 0 \\ 0 & 9-x & -4 \\ 0 & 21+x & -9-x \end{vmatrix}$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\begin{vmatrix} 9-x & -4 \\ 21+x & -9-x \end{vmatrix}$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\left[(9-x)(-9-x)+4(21+x)\right]$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\left[-81+x^2+84+4x\right]$$

$$P_A(x) = -(6+2x)\left(x^2+4x+3\right)$$

$$P_A(x) = -2(3+x)\left[(x+2)^2-4+3\right]$$

$$P_A(x) = -2(3+x)\left[(x+2)^2-1\right]$$

$$P_A(x) = -2(3+x)(x+2-1)(x+2+1)$$

$$P_A(x) = -2(3+x)(x+1)(x+3)$$

donc $P_A(X) = -2(X+1)(X+3)^2$.

Comme les valeurs propres de A sont les racines de P_A, alors les valeurs propres de A sont :

$\lambda_1 = -3$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = -1$ (valeur propre simple)

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -3$.

$$u = (x; y; z) \in E_{\lambda_1} \iff (A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 8 & 12 & -4 \\ 12 & 18 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4x - 6y + 2z = 0 & (1) \\ 8x + 12y - 4z = 0 & (2) \\ 12x + 18y - 6z = 0 & (3) \end{cases}$$

Comme $-2 \times (1) = (2)$ et $-3 \times (1) = (3)$

alors, $u = (x; y; z) \in E_{\lambda_1} \iff -4x - 6y + 2z = 0$

$$\iff 2z = 4x + 6y$$

$$\iff z = 2x + 3y$$

Ainsi $u=(x;y;z) \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow u=(x;y;2x+3y)$

$\Leftrightarrow u=(x;0;2x)+(0;y;3y)$

$\Leftrightarrow u = x(1;0;2)+y(0;1;3)$

$\Leftrightarrow u \in \cancel{E_{\lambda_1}} \langle V_1;V_2 \rangle$

où $V_1=(1;0;2)$ et $V_2=(0;1;3)$

Par conséquent, $E_{\lambda_1} = \langle (1;0;2);(0;1;3) \rangle$

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à $\lambda_2=-1$

$$u=(x;y;z) \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow (A-\lambda_2 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -6 & 2 \\ 8 & 10 & -4 \\ 12 & 18 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x-6y+2z=0 & (1) \\ 8x+10y-4z=0 & (2) \\ 12x+18y-8z=0 & (3) \end{cases}$$

$2 \times (1) + (3) \Rightarrow 6y-4z=0$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}z$

$3\times(1)+(3) \Rightarrow -6x-2z=0$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}z$

$u=(x;y;z)\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow u=\left(-\frac{1}{3}z;\frac{2}{3}z;z\right)$

$\Leftrightarrow u=\frac{1}{3}z\,(-1;2;3)$

$\Leftrightarrow u\in\langle V_3\rangle$ où $V_3=(-1;2;3)$

Par conséquent, $E_{\lambda_2}=\langle(-1;2;3)\rangle$.

<u>Conclusion</u> : Les sous-espaces propres de A sont

$E_{\lambda_1}=\langle(1;0;2);(0;1;3)\rangle$ et $E_{\lambda_2}=\langle(-1;2;3)\rangle$.

Comme (-1) et (-3) sont des réels et que :

$\dim E_{\lambda_1}=2$ et $(-3)=\lambda_1$ est une valeur propre double et

$\dim E_{\lambda_2}=1$ et $(-1)=\lambda_2$ est une valeur propre simple

alors A est diagonalisable.

2. Soit f l'application linéaire de $E=\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la

base canonique est A.

a) <u>Déterminons une base de $\ker(f+3Id_E)$ et une base de $\ker(f+Id_E)$</u>

(i) $\ker(f+3Id_E)=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3;\ (f+3Id_E)(x;y;z)=(0;0;0)\}$

or la matrice associée à f par rapport à la base canonique est A et la matrice associée à Id_E par rapport à la canonique est I_3

alors $(f+3Id_E)(x;y;z)=(0;0;0) \Leftrightarrow (A+3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

d'où $\ker(f+3Id_E)=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3;\ (A+3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

or $(x;y;z)\in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow (A+3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

alors $\ker(f+3Id_E)=E_{\lambda_1}=\langle(1;0;2);(0;1;3)\rangle$.

Ainsi une base de $\ker(f+3Id_E)$ est $\{(1;0;2);(0;1;3)\}$.

(ii) $\ker(f+Id_E)=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3;\ (f+Id_E)(x;y;z)=(0;0;0)\}$

$=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3;\ (A+I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

or $(x;y;z) \in E_{\lambda_2} \iff (A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

alors $\ker(f + Id_E) = E_{\lambda_1} = \langle(-1;2;3)\rangle$

b) <u>Explicitons une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale</u>

Soit $\mathcal{B} = ((1;0;2);(0;1;3);(-1;2;3))$ la base des vecteurs propres de A.

La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Comme $\det(P) = -1 \neq 0$, alors P est inversible.

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \, {}^t\mathrm{com}(P) = - \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -6 & 2 \\ 8 & 9 & -4 \\ 12 & 18 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -6 & -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$