Exercice 8

Démontrons par récurrence que :

a) $2^{2\times 3^n} - 1$ est divisible par 3^{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) On sait que : $4 = 2^{2\times 3^0}$ et $4 \equiv 1 \, [3^{0+1}]$

donc $2^{2\times 3^0} \equiv 1 \, [3^{0+1}]$

d'où $2^{2\times 3^0} - 1 \equiv 0 \, [3^{0+1}]$.

ainsi $2^{2\times 3^0} - 1$ est divisible par 3^{0+1}.

(ii) Soit k un entier naturel.

Supposons que : $2^{2\times 3^k} - 1 \equiv 0 \, [3^{k+1}]$

Alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2^{2\times 3^k} - 1 = q\,3^{k+1}$$

donc $3\left(2^{2\times 3^k} - 1\right) = q\,3^{k+2} \quad (*)$

$$2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = 2^{2\times 3^k \times 3} - 1$$

$$2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = \left(2^{2\times 3^k}\right)^3 - 1$$

$$2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = \left(2^{2\times 3^k} - 1\right)\left(2^{2\times 3^k \times 2} + 2^{2\times 3^k} + 1\right)$$

$$2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = \left(2^{2\times 3^k} - 1\right)\left(16^{3^k} + 4^{3^k} + 1\right)$$

or $\begin{cases} 16 \equiv 1\,[3] \Rightarrow 16^{3^k} \equiv 1\,[3] \\ 4 \equiv 1\,[3] \Rightarrow 4^{3^k} \equiv 1\,[3] \end{cases}$

alors $16^{3^k} + 4^{3^k} + 1 \equiv 3\,[3]$;

c'est-à-dire $16^{3^k} + 4^{3^k} + 1 \equiv 0\,[3]$;

d'où il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$16^{3^k} + 4^{3^k} + 1 = 3\ell$$

ainsi $2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = 3\left(2^{2\times 3^k} - 1\right)\ell$

Et d'après $(*)$, on a : $2^{2\times 3^{k+1}} - 1 = 9\ell \times 3^{k+2}$

c'est-à-dire, $2^{2\times 3^{(k+1)}} - 1 \equiv 0 \left[3^{(k+1)+1}\right]$.

Donc $2^{2\times 3^{(k+1)}} - 1$ est divisible par $3^{(k+1)+1}$

(iii) Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$

$2^{2\times 3^{n}} - 1$ est divisible par 3^{n+1}.

b) $5^{3^n} + 1$ est divisible par 3^{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Comme $5^1 = 5^{3^0}$, alors $5^{3^0} + 1 = 6$

or $3^{0+1} = 3$ et 6 est divisible par 3

alors $5^{3^0} + 1$ est divisible par 3^{0+1}.

(ii) Soit k un entier naturel.

Supposons que $5^{3^k} + 1$ est divisible par 3^{k+1}.

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$5^{3^k} + 1 = \alpha\, 3^{k+1}.$$

D'où $3\left(5^{3^k} + 1\right) = \alpha\, 3^{k+2}$ (**)

$$5^{3^{k+1}} + 1 = 5^{3^k \times 3} + 1$$

$$5^{3^{k+1}} + 1 = \left(5^{3^k}\right)^3 + 1$$

donc $5^{3^{k+1}} + 1 = \left(5^{3^k} + 1\right)\left(5^{3^k \times 2} - 5^{3^k} + 1\right)$

or $5^{3^k \times 2} = \left(5^2\right)^{3^k} = 25^{3^k}$

et $25 \equiv 1 \, [3] \Longrightarrow 25^{3^k} \equiv 1 \, [3]$

$5 \equiv 2 \, [3] \Longrightarrow 5 \equiv -1 \, [3]$

$\Longrightarrow 5^{3^k} \equiv (-1)^{3^k} \, [3]$

$\Longrightarrow 5^{3^k} \equiv -1 \, [3]$ (car 3^k est impair)

$\Longrightarrow -5^{3^k} \equiv 1 \, [3]$

Alors $25^{3^k} - 5^{3^k} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \, [3]$

c'est-à-dire $5^{3^k \times 2} - 5^{3^k} + 1 \equiv 0 \, [3]$

ainsi il existe $\beta \in \mathbb{Z}$: $5^{3^k \times 2} - 5^{3^k} + 1 = 3\beta$.

D'où $5^{3^{k+1}} + 1 = 3\left(5^{3^k} + 1\right)\beta$

20

D'après (∗∗), on a:

$$5^{3^{k+1}} + 1 = \alpha\beta \times 3^{k+2}$$

c'est-à-dire, $5^{3^{(k+1)}} + 1 \equiv 0 \left[3^{(k+1)+1}\right]$

Donc $5^{3^{(k+1)}} + 1$ est divisible par $3^{(k+1)+1}$.

(iii) Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$

$5^{3^n} + 1$ est divisible par 3^{n+1}.