Examen d'Analyse 3 (Session 1)

ECUE : Intégrales généralisés et Séries de fonctions

Durée : 1 heure 15

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$. Puis calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

– Convergence de $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$:

La fonction $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ étant continue sur $]0, +\infty[$, les bornes impropres de l'intégrales sont 0 et $+\infty$. On étudie donc la convergence des intégrales $\int_0^1 t^\alpha e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.

⋆ Convergence de $\int_0^1 t^\alpha e^{-t} dt$:

Au voisinage de 0, on a $t^\alpha e^{-t} \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}} dt$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$. Donc $\int_0^1 t^\alpha e^{-t} dt$ si et seulement si $\alpha > -1$.

⋆ Convergence de $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$:

Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \left(t^\alpha e^{-t}\right) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha+2} e^{-t} = 0$, donc $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

En définitive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

– Calcul de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$:

On a $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$ En intégrant par partie, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n I_{n-1}.$$

Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

EXERCICE 2:

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ des réels strictement positifs. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{b^n+n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{a^n}{b^n+n}$.

• Premier cas : $b > 1$,

On a $u_n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \cdot \dfrac{1}{1+\frac{n}{b^n}} \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\dfrac{a}{b} < 1$ c'est-à-dire si et seulement si $0 < a < b$.

• Deuxième cas : $0 < b \leq 1$,

On a $u_n = \dfrac{a^n}{n} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{b^n}{n}} \sim \dfrac{a^n}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} a\frac{n}{n+1} = a$. Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge pour $0 < a < 1$ et diverge pour $a > 1$.

Losque $a = 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

En résumé lorsque $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels strictement positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{b^n+n}$ converge si et seulement si

$$(b > 1 \text{ et } 0 < a < b) \text{ ou } (0 < b \leq 1 \text{ et } 0 < a < 1)$$

EXERCICE 3:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{array}$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[-a, a]$?

1. Convergence simple sur $\mathbb{R}$:

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \sim n\dfrac{x}{n} = x$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$.

   Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

2. Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = n(1 - \sin(1)).$$

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-\sin(1)) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Par conséquent la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Convergence uniforme sur $[-a, a]$ où $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = f_n - f$ est dérivable sur $[-a, a]$ et on a pour tout $x \in [-a, a]$, $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0.$
Par suite g_n est strictement décroissante sur $[-a, a]$. D'où $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - a|$.
Comme $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} |f_n(a) - a| = 0$, donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

EXERCICE 4:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x + n(n+1)} \end{array}$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On note S sa somme.

2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} S(x) \mathrm{d}x$.

1. Convergence uniforme :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Or $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{(x + n(n+1))^2}$.
Comme pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^4}$ et $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Nature de $\int_0^{+\infty} S(x) \mathrm{d}x$.
Pour tout $x \geq 0$, on a

$$0 \leq S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq f_1(x) = \frac{1}{x+2}.$$

Comme $f_1(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x$ diverge, donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x+2} \mathrm{d}x$ diverge et par conséquent $\int_0^{+\infty} S(x) \mathrm{d}x$ diverge.