Exercice 20

Trouvons le reste de la division euclidienne de 10^{2020} par 42

$10 \equiv 10\,[42]$ $\quad 10^3 \equiv 34\,[42]$ $\quad 10^5 \equiv 40\,[42]$ $\quad 10^7 \equiv 10\,[42]$

$10^2 \equiv 16\,[42]$ $\quad 10^4 \equiv 4\,[42]$ $\quad 10^6 \equiv 22\,[42]$

Comme $2020 = 5\times 7^3 + 6\times 7^2 + 7 + 4$

alors $10^{2020} = 10^{5\times 7^3 + 6\times 7^2 + 7 + 4}$

donc $10^{2020} = 10^{5\times 7^3} * 10^{6\times 7^2} * 10^7 * 10^4$

C'est-à-dire, $10^{2020} = \left[\left(\left(10^7\right)^7\right)^7\right]^5 \left[\left(10^7\right)^7\right]^6 \times 10^7 \times 10^4$

or $10^7 \equiv 10\,[42]$

donc $10^{2020} \equiv 10^5 \times 10^6 \times 10 \times 10^4\,[42]$

d'où $10^{2020} \equiv 10^5 \times 10^7 \times 10^4\,[42]$

$\Rightarrow \quad 10^{2020} \equiv 10^5 \times 10 \times 10^4\,[42]$

$\Rightarrow \quad 10^{2020} \equiv 10^7 \times 10^3\,[42]$

$\Rightarrow \quad 10^{2020} \equiv 10 \times 10^3\,[42]$

ainsi $10^{2020} \equiv 10^4 \ [42]$

or $10^4 \equiv 4 \ [42]$

donc $10^{2020} \equiv 4 \ [42]$.