Exercice 5

Soit $f : X \longrightarrow Y$. Montrons que :

1°) $\forall B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$

($\subseteq$) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe

$x \in f^{-1}(B)$ tel que : $y = f(x)$

or $f^{-1}(B) \subseteq X$

donc $x \in X$ et $y = f(x) \in f(X)$

or $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow \exists z \in B : f(x) = z$

alors $z = y \Rightarrow y \in B$

D'où $y \in B$ et $y \in f(X)$

ainsi $y \in B \cap f(X)$

D'où $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(X)$.

9

($\supseteq$) Soit $y \in B \cap f(X)$. Donc $y \in B$ et $y \in f(X)$

Alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$;

d'où $f(x) \in B$

ainsi $x \in f^{-1}(B)$

donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$

c'est-à-dire, $y \in f(f^{-1}(B))$.

Alors $B \cap f(X) \subseteq f(f^{-1}(B))$.

D'aprè ($\supseteq$) et ($\subseteq$), $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

2.) <u>f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$</u>

($\Rightarrow$) Supposons que f est surjective. Soit $B \subset Y$.

D'aprè 1.), on a : $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$

alors $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, alors

10

il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$

Puisque $f(x) \in B$, alors $x \in f^{-1}(B)$.

D'où $f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

c'est-à-dire, $y \in f(f^{-1}(B))$.

Ainsi $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

Par conséquent, $f(f^{-1}(B)) = B$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Soit $y \in Y$. Pour $B = \{y\} \subset Y$, on a :

$$f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$$

Donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

Par suite, il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que : $f(x) = y$

D'où f est surjective.

f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

11

3) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$

($\Rightarrow$) Supposons que f est injective. Soit $A \subseteq X$.

(i) Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$.

Donc $x \in f^{-1}(f(A))$

Alors $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(ii) Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$.

Donc il existe $x' \in A$ tel que : $f(x) = f(x')$

or f est injective ;

donc $x = x' \Rightarrow x \in A$;

ainsi, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

D'après (i) et (ii), $f^{-1}(f(A)) = A$.

($\Leftarrow$) Supposons que : $\forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Soient x_1 et x_2 deux éléments de X

12

si $f(x_1)=f(x_2)$, alors en considérant $A=\{x_1\}$

on a: $f(A)=\{f(x_1)\}$

Ainsi $f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{f(x_1)\})=\{x_1\}$

et $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_2\in f^{-1}(f(A))=\{x_1\}$

D'où $x_1=x_2$.

Par suite f est injective.

Donc f est injective $\Leftrightarrow \forall A\subset X,\ f^{-1}(f(A))=A$.

4) f est bijective $\Leftrightarrow \forall A\subset X,\ f(C_X A)=C_Y f(A)$

($\Longrightarrow$) Supposons que f est bijective. Soit $A\subset X$.

alors $C_X A\neq \phi$;

ainsi $f(C_X A)\neq 0$ (car f est une bijection)

(i) Soit $y\in f(C_X A)$.

13

Alors il existe $x \in C_X A$ tel que $f(x) = y$

or $x \in C_X A \Leftrightarrow x \notin A$

donc $f(x) \notin f(A)$ (car f est bijective)

ainsi $y \notin f(A)$

d'où $y \in C_Y f(A)$

Alors $f(C_X A) \subseteq C_Y f(A)$

(ii) Soit $y \in C_Y f(A)$.

Alors $y \notin f(A)$

or f est bijection $\Leftrightarrow$ sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective

donc $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(f(A)) = A$

(Car f est injective et d'après la qt° 3.).

14

ainsi $f^{-1}(y) \in C_X A$

d'où $f(f^{-1}(y)) \in f(C_X A)$

or f étant bijective $\Rightarrow f(f^{-1}(y)) = y$

donc $y \in f(C_X A)$

Alors $C_Y f(A) \subseteq f(C_X A)$

D'après (i) et (ii), $f(C_X A) = C_Y f(A)$.

($\Leftarrow$) Supposons que : $\forall A \subset X$, $f(C_X A) = C_Y f(A)$

(i) Soient x_1 et x_2 deux éléments de X

tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Posons $A = \{x_1\}$. Alors $f(C_X A) = C_Y f(A)$

or $f(A) = \{f(x_1)\}$;

donc $f(C_X A) = C_Y \{f(x_1)\}$

si $x_2 \notin \{x_1\} = A$, alors $x_2 \in C_X A$

d'où $f(x_2) \in f(C_X A) = C_Y \{f(x_1)\}$

ainsi $f(x_2) \notin \{f(x_1)\}$

Ce qui contredit le fait que $f(x_1) = f(x_2)$.

Donc nécessairement, $x_2 = x_1$

D'où f est injective.

(ii) On sait que $\phi \subset X$ et $C_X \phi = X$

donc $f(C_X \phi) = C_Y f(\phi)$

$\Rightarrow f(X) = C_Y f(\phi)$

or $f(\phi) = \phi$, donc $f(X) = C_Y \phi = Y$.

16

D'où f est surjective.