

Université Nangui Abrogoua

UFR Sciences Fondamentales et Appliquées

Licence 2 : Maths-Info & Phys-Chimie | Année Universitaire : 2019–2020

Fiche N° 3 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

EXO 2 On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = x e^{-nx}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

EXO 3 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ est simplement convergente sur \mathbb{R} mais qu'elle n'est pas uniformément convergente sur \mathbb{R} .

EXO 4 Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$ où $A > 0$.
3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .