Université Nangui Abrogoua — **République de Côte d'Ivoire**

Licence 2 : MI — **Année Universitaire : 2021/2022**

Examen d'Analyse 3 (Session 1)

ECUE : Développement en série

Durée : 1 heure

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les deux exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

On considère la série entière réelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus. Puis étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.

2. a. Décomposer en éléments simples l'expression $\frac{1}{x(x+2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

   b. Calculer pour tout $x \in]-R, R[$ la somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$.

3. En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$.

1. Posons pour tout entier naturel non nul , $a_n(x) = \frac{1}{n(n+2)}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1.$$

Donc le rayon de converge de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ est $R = 1$.

Pour $x = -1$ ou $x = 1$, on a $|a_n x^n| = \frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, on conclut que la série converge pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

2. a. Décomposons en éléments simples $\frac{1}{x(x+2)}$:
Il existe a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$,

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}.$$

Par conséquent, $a = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$ et $b = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$,

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}.$$

b Calcul de la somme f :
On a $f(0)=0$ et pour tout $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}x^n\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right)\\
f(x) &= \frac{-1+x^2}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{2x+x^2}{4x^2}
\end{aligned}$$

Pour conclure, calculon $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

On sait que pour tout $t\in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$; par intégration, on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t\\
[\ln(1-t)]_0^x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x\\
-\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
-\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle f(x)=\frac{1-x^2}{2x^2}\ln(1-x)+\frac{2x+x^2}{4x^2}$.

Conclusion $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1-x^2}{2x^2}\ln(1-x)+\dfrac{2x+x^2}{4x^2} & \text{si } x\in]-1,1[\setminus\{0\}\end{cases}$

3 Déduisons les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$.
La convergence étant uniforme, on a

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\ln(1-x)+\frac{2x+x^2}{4x^2}\right)=-\frac{1}{4}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}==\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\ln(1-x)+\frac{2x+x^2}{4x^2}\right)=\frac{3}{4}$

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et paire, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

(1) Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

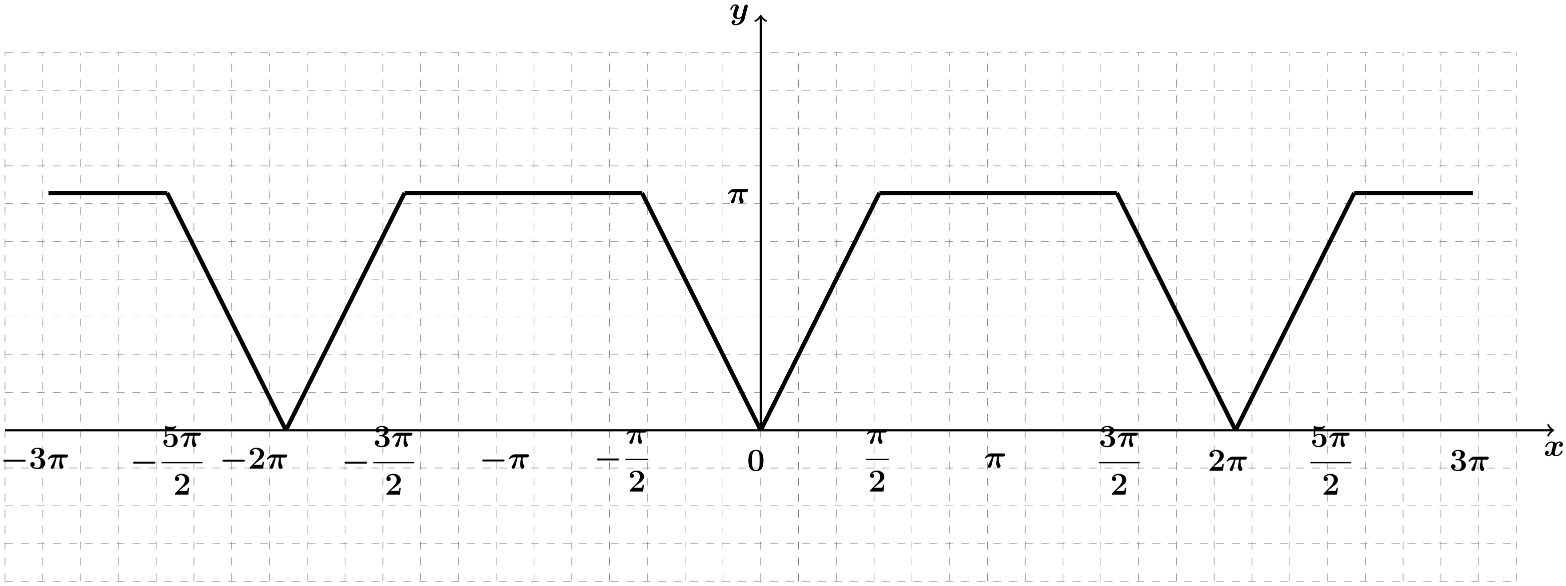
(2) Dire pourquoi la série de Fourier SF_f de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

(3) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis écrire la série de Fourier SF_f de f.

(4) Calculer les sommes $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}(-1)^n$.

(5) En déduire les sommes des séries : $S_3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(1) Graphe de la fonction f :



D'après le graphe, on constate et on peut démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ mais de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(2) Convergence de la série de Fourier de f :
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(3) Calcul des coefficients de Fourier de f :
La fonction f étant paire, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

- Calcul dans un premier temps a_0 :

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2x\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \pi\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\cdot\pi\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) \\
a_0 =& \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

- Calcul maintenant a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2x\cos(nx)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \pi\cos(nx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\mathrm{d}x + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a : $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

On a par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} \\
\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$a_n = \frac{2}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 4\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1\right) - \frac{2}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Finalement,

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1\right)$$

La série de Fourier SF_f de f s'écrit donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$SF_f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1}{n^2}\cos(nx)$$

4 Comme la série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ vers f, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1}{n^2}\cos(nx) \tag{1}$$

- Calcul de $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$;

En prenant $x = 0$ dans (3), on obtient $\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1}{n^2} = f(o) = 0,$ donc

$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{3\pi^2}{16}$

- $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}(-1)^n.$

En prenant $x = \pi$ dans (3), on obtient $\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)-1}{n^2}(-1)^n = f(\pi) = \pi,$ donc

$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}(-1)^n = -\frac{\pi^2}{16}.$

5 Déduisons les sommes des séries : $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

On a

$$S_1 - S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

En prenant regroupant les termes pairs d'une part et les termes impairs d'autre part, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}\left(1-\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Comme $\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(n\pi) = 0$, donc, $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

En séparant les termes pairs des termes impairs, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc $S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$