Exercice 15

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations : $x^2 = 2 \bmod 6$; $x^3 = 3 \bmod 9$

(i) $x^2 = 2 \bmod 6 \Leftrightarrow x^2 \equiv 2\,[6] \Leftrightarrow \dot{x}^2 = \dot{2}$ (dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$)

or $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3}; \dot{4}; \dot{5}\}$

et $\dot{0}^2 = \dot{0}$; $\dot{1}^2 = \dot{1}$; $\dot{2}^2 = \dot{4}$; $\dot{3}^2 = \dot{3}$; $\dot{4}^2 = \dot{4}$ et $\dot{5}^2 = 1$

donc cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$;

ainsi $S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

(ii) $x^3 = 3 \bmod 9 \Leftrightarrow x^3 \equiv 3\,[9] \Leftrightarrow \dot{x}^3 = \dot{3}$ (dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$)

donc $x \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3}; \dot{4}; \dot{5}; \dot{6}; \dot{7}; \dot{8}\}$

or $\dot{0}^3 = \dot{0}$; $\dot{1}^3 = \dot{1}$; $\dot{2}^3 = \dot{8}$; $\dot{3}^3 = \dot{0}$; $\dot{4}^3 = \dot{1}$; $\dot{5}^3 = \dot{8}$; $\dot{6}^3 = \dot{0}$; $\dot{7}^3 = \dot{1}$

et $\dot{8}^3 = \dot{8}$

alors l'équation $\dot{x}^3 = \dot{3}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$;

ainsi l'équation $x^3 = 3 \bmod 9$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

D'où $S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$5x^2+2xy-3=0 \quad \text{et} \quad y^2+4xy-2=0$$

(i) $5x^2+2xy-3=0 \iff 5x^2+2xy=3$

$\iff x(5x+2y)=3$

<u>1er Cas</u> : $x=1$ et $5x+2y=3$

alors $\begin{cases} x=1 \\ 2y=3-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

<u>2e Cas</u> : $x=-1$ et $5x+2y=-3$

donc $\begin{cases} x=-1 \\ 2y=-3+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

<u>3e Cas</u> : $x=3$ et $5x+2y=1$

alors $\begin{cases} x=3 \\ 2y=1-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2y=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-7 \end{cases}$

<u>4e Cas</u> : $x=-3$ et $5x+2y=-1$

donc $\begin{cases} x=-3 \\ 2y=-1+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$

Par conséquent, $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1;-1) ; (-1;1) ; (3;-7) ; (-3;7)\}$

(ii) $y^2 + 4xy - 2 = 0 \iff y^2 + 4xy = 2$

$$\iff y(y+4x) = 2$$

<u>1er Cas</u> : $y = 2$ et $y + 4x = 1$

alors $\begin{cases} y = 2 \\ y + 4x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 4x = -1 \end{cases}$ impossible (car $x \in \mathbb{Z}$)

<u>2e Cas</u> : $y = -2$ et $y + 4x = -1$

alors $\begin{cases} y = -2 \\ 4x = 1 \end{cases}$ impossible (car $x \in \mathbb{Z}$)

<u>3e Cas</u> : $y = -1$ et $y + 4x = -2$

donc $\begin{cases} y = -1 \\ 4x = -1 \end{cases}$ impossible (car $x \in \mathbb{Z}$)

<u>4e Cas</u> : $y = 1$ et $y + 4x = 2$

donc $\begin{cases} y = 1 \\ 4x = 1 \end{cases}$ impossible (car $x \in \mathbb{Z}$)

Ainsi $S_{\mathbb{Z}^2} = \emptyset$.