Université Nangui Abrogoua
Licence 2
Semestre 1

Année 2018-2019
Maths - Info

Examen d'Analyse 3
ECUE 2 Développement en séries

Première Session

Durée : 1 heure 45 minutes

Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé

On rappelle que $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$

$\boxed{1}$ **Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :**

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n \qquad\qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n.$$

a) • Rayon de convergene de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1}$:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{n^3+n+3}{n+1} x^n$.

On a $a_n \sim n^2$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. D'où le rayon de convergence est $R = 1$.

• Calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$:

En effectuons la division euclidienne ci-dessous,

$$\begin{array}{r|l}
n^3+n+3 & n+1 \\ \cline{2-2}
-n^3-n^2 & n^2-n+2 \\ \cline{1-1}
-n^2+n+3 & \\
n^2+n & \\ \cline{1-1}
2n+3 & \\
-2n-2 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

on obtient

$$\frac{n^3+n+3}{n+1} = n^2-n+2+\frac{1}{n+1} = n(n-1)+2+\frac{1}{n+1}$$

Ainsi

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n.$$

$$\star \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n$$
$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
$$= x^2 \left[\frac{1}{1-x}\right]''$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$\star \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\star \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \qquad \forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n = -\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

Finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{2}{1-x} - \dfrac{1}{x}\ln(1-x) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) • Rayon de convergene de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}x^n$:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \dfrac{(n+1)^2}{n!}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0$. D'où le rayon de convergence est $R = +\infty$.

• Calcul de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

On a

$$\frac{(n+1)^2}{n!} = \frac{n^2+2n+1}{n!} = \frac{n^2+2n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+3n+1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + 3\frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\
&= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 3x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\
&= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 3x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n - 1
\end{aligned}$$

$$S(x) = (x^2+3x+1)\mathrm{e}^x - 1.$$

$\boxed{2}$ **(a) Écrire le développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-2x}$.**

(b) En déduire à l'aide d'une décomposition en éléments simples le développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{-3+4x}{1-3x+2x^2}$

a) Développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-2x}$:

On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Donc

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x| < 1$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

b) – Décomposons en éléments simples de $\dfrac{-3+4x}{1-3x+2x^2}$

On a $1-3x+2x^2 = (1-x)(1-2x)$, donc il existe des réels a et b tels que

$$\frac{-3+4x}{1-3x+2x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}.$$

On a $a = \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{-3+4x}{1-2x} = -1$ et $b = \displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{-3+4x}{1-x} = -2$. D'où

$$\frac{-3+4x}{1-3x+2x^2} = \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{1-2x}.$$

– Développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{-3+4x}{1-3x+2x^2}$:

On sait que $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et $\forall x \in]-1/2, 1/2[$, $\dfrac{1}{1-2x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$.

Comme $\frac{1}{2} < 1$, donc pour tout $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{-3+4x}{1-3x+2x^2} &= -\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-2x} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\
\frac{-3+4x}{1-3x+2x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1-2^{n+1}) x^n.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **On considère la fonction f, 2π-périodique et définie sur $[-\pi, \pi[$ par**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ \\ 0 & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

(a) Représenter la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

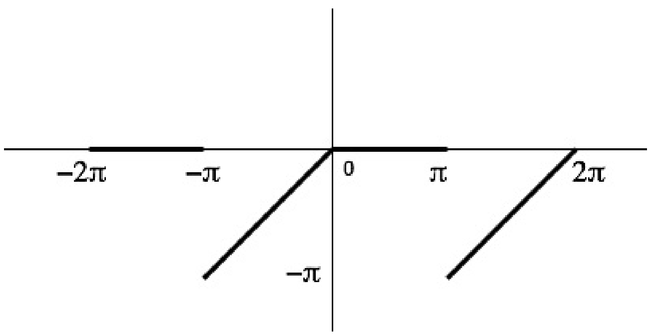
(b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(c) La série de Fourier de f converge-t-elle ?

(d) Calculer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},.$$

a) Représentation graphique de f :



D'après le graphe, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais continue sur $]-\pi, \pi[$. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, cependant f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
b) Calcul des coefficients de Fourier de f :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} xdx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} \\
a_0 &= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{n}dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} \\
a_n &= \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} \\
b_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

c) Convergence de la série de Fourier de f :
La série de f s'écrit en tout point x de $\mathbb{R}$ par

$$SF_f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right]$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet.
D'autre part f est continue sur $]-\pi,\pi[$, donc $\forall x \in]-\pi,\pi[$,

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right] = f(x)$$

d) On a pour tout $x \in]-\pi,\pi[$,

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right] = f(x)$$

– Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$: en prenant $x=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \cos(0) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(0) \right] &= f(0) \\
-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} &= 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} &= \frac{\pi^2}{4} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{4} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

– Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$