Exercice 16

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants

1.) $\begin{cases} x = 2 \bmod 10 \\ x = 5 \bmod 13 \end{cases}$

$13 = 10 + 3$

$10 = 3 \times 3 + 1$ $\Longrightarrow$ $4 \times 10 + 13 \times (-3) = 1$;

donc $10 \wedge 13 = 1$;

ainsi, $x_1 = 40$ et $x_1 \equiv 0 [10]$; $x_1 \equiv 1 [13]$;

et $x_2 = -39$; $x_2 \equiv 1 [10]$ et $x_2 \equiv 0 [13]$.

Donc une solution particulière de ce système est :

$N = 5x_1 + 2x_2$

$N = 5 \times 40 - 39 \times 2$

$N = 122$

Ainsi $x = 122 + 130k$, $k \in \mathbb{Z}$

D'où $S_{\mathbb{Z}} = \{122 + 130k, k \in \mathbb{Z}\}$

2.) $\begin{cases} x = 4 \bmod 6 \\ x = 7 \bmod 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \bmod 6 \\ x = 7 \bmod 9 \end{cases} \iff \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; \ x = 4 + 6a = 7 + 9b$$

$$\iff \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; \ 6a - 9b = 3$$

$$\iff \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; \ 2a - 3b = 1$$

Comme $2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1$;

alors $(-1;-1)$ est une solution de l'équation $(*)$.

Et on a : $\begin{cases} 2a - 3b = 1 & (1) \\ 2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1 & (2) \end{cases}$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2(a+1) - 3(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow 2(a+1) = 3(b+1)$$

Alors 2 divise $3(b+1)$ et $2 \wedge 3 = 1$

donc 2 divise $b+1$

Ainsi $b+1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

c'est-à-dire $b = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $x = 7 + 9(2k-1)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 18k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{18k - 2 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

3°) $\begin{cases} 5x = 4 \bmod 27 & (1) \\ 12x = 9 \bmod 51 & (2) \end{cases}$

(i) Résolvons (1)

$27 = 5\times5+2$

$5 = 2\times2+1$

$\Rightarrow 5\times11 + 27\times(-2) = 1$

$\Rightarrow 5\times44 + 27\times(-8) = 4$

d'où $x \equiv 44\ [27]$

ainsi $x \equiv 17\ [27]$

(ii) Résolvons (2)

$12x = 9 \bmod 51 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ;\ 12x = 51k+9$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ;\ 4x = 17k+3$

$\Leftrightarrow 4x \equiv 3\ [17]$

$17 = 4\times4+1 \Rightarrow 17 + 4\times(-4) = 1$

$\Rightarrow 17\times3 + 4\times(-12) = 3$

d'où $x \equiv -12\ [17]$

c'est-à-dire, $x \equiv 5\ [17]$

D'après (i) et (ii), $\begin{cases} 5x \equiv 4\ [27] \\ 12x \equiv 9\ [51] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 17\ [27] \\ x \equiv 5\ [17] \end{cases}$

4.5) Résolvons le système : $\begin{cases} x \equiv 17\ [27] \\ x \equiv 5\ [17] \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 27 &= 17+10 \\ 17 &= 10+7 \\ 10 &= 7+3 \\ 7 &= 3\times 2+1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 17\times 8 + 27\times(-5) = 1$$

donc $17 \wedge 27 = 1$

ainsi $x_1 = 136$, $\begin{cases} x_1 \equiv 1\ [27] \\ x_1 \equiv 0\ [17] \end{cases}$

$x_2 = -135$, $\begin{cases} x_2 \equiv 0\ [27] \\ x_2 \equiv 1\ [17] \end{cases}$

Donc une solution particulière de notre système est:

$N = 17x_1 + 5x_2$

$N = 17\times 136 + 5\times(-135)$

$N = 1637$

ainsi $x = 1637 + 459k$, $k\in\mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{Z}} = \{1637 + 459k,\ k\in\mathbb{Z}\}$$