Exercice 3

Montrons qu'un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G est distingué dans G

Soit H un sous-groupe de G d'indice 2.

Or l'indice de H dans G est : $[G:H] = \mathrm{card}(G/H)_g = \mathrm{card}(G/H)_d$

alors $\mathrm{card}(G/H)_g = \mathrm{card}(G/H)_d = 2$;

où $(G/H)_g = \{xH, x \in G\}$ et $(G/H)_d = \{Hx, x \in G\}$.

Soit $x \in G$. Alors $x \in H$ ou $x \notin H$.

1er Cas : $x \in H$

Alors $xH = H = Hx$

2e Cas : $x \notin H$

Alors $xH \neq H$ et $Hx \neq H$.

or $\mathrm{card}(G/H)_g = \mathrm{card}(G/H)_d = 2$;

donc $(G/H)_g = \{H ; xH\}$ et $(G/H)_d = \{H ; Hx\}$;

6 D'où $G = H \cup (Hx)$ avec $H \cap (Hx) = \emptyset$.

et $G = H \cup (xH)$ avec $H \cap (xH) = \emptyset$

Comme $xH \subseteq G$, alors $(xH) \cap G = xH$

c'est-à-dire, $xH = (xH) \cap (H \cup (Hx))$.

D'où $xH = ((xH) \cap H) \cup ((xH) \cap (Hx))$

Ainsi $xH = (xH) \cap (Hx)$, car $(xH) \cap H = \emptyset$.

Donc $xH \subseteq Hx$ (1)

Comme $Hx \subseteq G$, alors $(Hx) \cap G = Hx$;

c'est-à-dire $Hx = (Hx) \cap (H \cup (xH))$;

ainsi $Hx = ((Hx) \cap H) \cup ((Hx) \cap (xH))$

donc $Hx = (Hx) \cap (xH)$, (car $(Hx) \cap H = \emptyset$).

D'où $Hx \subseteq xH$ (2)

D'après (1) et (2), $xH = Hx$

Dans tous les cas, $Hx = xH$

Par conséquent, $H \triangleleft G$.

7