TRAVAUX DIRIGÉS N° 1 : ANALYSE 3
Thème : Intégrales généralisées

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2\sqrt{1-t}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{t}\right)dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\ (\alpha\in\mathbb{R})$
8. $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t+\cos(t)}-\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$

Exercice 2

Montrer la convergence des intégrales généralisées ci-dessous puis calculer leurs valeurs :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$

Exercice 3

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{E}(t)}\mathrm{d}t$ converge puis la calculer.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}+a\sin x+b\cos x}{x^2}dx$ converge.
2. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$ converge puis la calculer.

Exercice 5

1. Soit $a>0$. Montrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t$ converge. Prouver que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t=\int_x^{ax}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ puis déduire la valeur de I.
2. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t.$