Université Nangui Abrogoua

Année Universitaire 2019-2020

UFR-SFA

Licence 2 - MI

TD d'ALGÈBRE 3 - Fiche 3

Exercice 1

1°) Calculons les déterminants suivants :

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ $l_2 \leftarrow 3l_2 - l_4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 20 & 28 & 0 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$ en développant suivant c_4 on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 20 & 28 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$ $l_2 \leftarrow l_2 - 6l_1$
$l_3 \leftarrow l_3 - l_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_3 - l_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times 2 \times 3$$

donc $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 18.$

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_3 - l_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ en developpant suivant C_3 on a:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\,(6\times 1 - 5\times 4) = 28$$

(iii) $\Delta(a;b;c) = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$l_1 \leftarrow l_1 + l_2 + l_3$

$$\Delta(a;b;c) = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a;b;c) = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\Delta(a;b;c) = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la l_1, on a:

$$\Delta(a;b;c) = (a+b+c) \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a;b;c) = (a+b+c)\left[(a+b+c) \times (a+b+c) - 0 \times 0\right]$$

65

$$\Delta(a;b;c) = (a+b+c)^3.$$

2°) Calculons D et factorisons D(x)

(*) $D = \begin{vmatrix} n & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & n-1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 3 \\ 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

On constate que sur la colonne $(n-2)$ il n'y a que des 3. Donc, en faisant :

$$C_i \leftarrow C_i - C_{n-2}, \text{ pour } i \in \{1;2;\cdots;n-3;n-1;n\}$$

on a: $D = \begin{vmatrix} n-3 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & n-4 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 3 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$l_n \leftarrow l_n - l_{n-2}$

$l_{n-1} \leftarrow l_{n-1} - l_{n-2}$

$D = \begin{vmatrix} n-3 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & n-4 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 3 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Ainsi, le calcul de D revient à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire ;

donc cela revient à faire le produit des éléments de sa diagonale. Ainsi, on a :

$$D = (n-3)(n-4) \cdots \times 1 \times 3 \times (-1) \times (-2)$$

$$D = (n-3)! \times 6$$

$$D = 6[(n-3)!]$$

(**) $D(x) = \begin{vmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{vmatrix}$ $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 + C_3$

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -2x & 4+x & 5 \\ x & 5 & 6+x \end{vmatrix}$$

$D(x) = x \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4+x & 5 \\ 1 & 5 & 6+x \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{array}$

$$D(x) = x \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 10+x & 13 \\ 0 & 2 & 2+x \end{vmatrix}$$

$$D(x) = x \begin{vmatrix} 10+x & 13 \\ 2 & 2+x \end{vmatrix}$$

$$D(x) = x\left[(10+x)(2+x) - 2\times 13\right]$$

$$D(x) = x\left(x^2+12x-6\right)$$

$$D(x) = x\left[(x+6)^2 - 6^2 - 6\right]$$

$$D(x) = x\left[(x+6)^2 - 42\right]$$

$$D(x) = x\left(x+6+\sqrt{42}\right)\left(x+6-\sqrt{42}\right)$$

3) Calculons les déterminants suivants, en factorisant si possible

$$A = \begin{vmatrix} 1-a & b & a & b \\ b & 1-a & b & a \\ a & b & 1-a & b \\ b & a & b & 1-a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$A = \begin{vmatrix} 1+2b & b & a & b \\ 1+2b & 1-a & b & a \\ 1+2b & b & 1-a & b \\ 1+2b & a & b & 1-a \end{vmatrix} = (1+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 1 & 1-a & b & a \\ 1 & b & 1-a & b \\ 1 & a & b & 1-a \end{vmatrix}$$

En faisant $l_i \leftarrow l_i - l_1$, $i = 2;3;4$, on a:

$$A = (1+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 0 & 1-a-b & b-a & a-b \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 \\ 0 & a-b & b-a & 1-a-b \end{vmatrix}$$

$$A = (1+2b)\begin{vmatrix} 1-a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1-2a & 0 \\ a-b & b-a & 1-a-b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la 2e ligne, on a :

$$A = (1+2b)(1-2a)\begin{vmatrix} 1-a-b & a-b \\ a-b & 1-a-b \end{vmatrix}$$

$$A = (1+2b)(1-2a)\left[(1-a-b)(1-a-b) - (a-b)(a-b)\right]$$

$$A = (1+2b)(1-2a)\left[(1-a-b)^2 - (a-b)^2\right]$$

$$A = (1+2b)(1-2a)(1-a-b-a+b)(1-a-b+a-b)$$

$$A = (1+2b)(1-2a)(1-2a)(1-2b)$$

$$A = (1+2b)(1-2b)(1-2a)^2$$

$$A = (1-4b^2)(1-2a)^2$$

$$\Delta(a;b;c) = \begin{vmatrix} -3a & -3a & c-2a-b \\ 3b & a+2b+c & 3b \\ a-2c-b & -3c & -3c \end{vmatrix}$$

$$l_1 \leftarrow l_1 + l_2 + l_3$$

$$\Delta(a;b;c) = \begin{vmatrix} 2b-2a-2c & 2b-2a-2c & 2b-2a-2c \\ 3b & a+2b+c & 3b \\ a-2c-b & -3c & -3c \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a;b;c) = (2b-2a-2c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3b & a+2b+c & 3b \\ a-2c-b & -3c & -3c \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad ; \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$\Delta(a;b;c) = (2b-2a-2c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3b & a-b+c & 0 \\ a-2c-b & -a+b-c & -a+b-c \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a;b;c) = (2b-2a-2c)(a-b+c)(-a+b-c)$$

$$\Delta(a;b;c) = -2(a-b+c)(a-b+c)(-a+b-c)$$

$$\Delta(a;b;c) = 2(a-b+c)^3$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & n-1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & 2 & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On constate que sur la $(n-1)$-ième colonne il n'ya que des 2. Donc en faisant

$$C_i \leftarrow C_i - C_{n-1} \text{ , pour } i \in \{1; 2; \dots; n-2; n\}$$

on a: $$D_n = \begin{vmatrix} n-2 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & n-3 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad l_n \leftarrow l_n - l_{n-1}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n-2 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & n-3 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ainsi le calcul de D_n revient à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire;

donc cela revient à faire le produit des éléments de sa diagonale. Ainsi on a:

$$D_n = (n-2)(n-3)\cdots \times 1 \times 2 \times (-1)$$

$$D_n = -2\left[(n-2)!\right]$$