Exercice 6

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, A et B deux parties de E. On définit :

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$
$$X \longmapsto (X \cap A \,;\, X \cap B).$$

1. Montrons que f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$

($\Longrightarrow$) Supposons que f est injective.

(*) $f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A \,;\, (A \cup B) \cap B\big)$

$f(A \cup B) = (A \,;\, B)$

(**) $f(E) = (E \cap A \,;\, E \cap B)$

$f(E) = (A \,;\, B)$

D'après (*) et (**), $f(A \cup B) = f(E)$

et comme f est injective, alors $A \cup B = E$.

18

($\Leftarrow$) Supposons que $A \cup B = E$

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{P}(E)$

tels que $f(X) = f(Y)$.

Alors $\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$

Donc $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$;

c'est-à-dire $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$;

d'où $X \cap E = Y \cap E$

ainsi $X = Y$

Par conséquent, f est injective.

D'après ($\Rightarrow$) et ($\Leftarrow$), on a:

f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$

2. Montrons que f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$(\Rightarrow)$ Supposons que f est surjective.

Comme $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ et $A \cap B \in \mathcal{P}(B)$

alors $(\emptyset ; A \cap B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

ainsi il existe $X \in \mathcal{P}(E)$, tel que : $f(X) = (\emptyset ; A \cap B)$

c'est-à-dire, $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = A \cap B$

or $A \cap B = X \cap B \Rightarrow A \cap B \subseteq X$

donc $A \cap B \subseteq X \cap A = \emptyset$

d'où $A \cap B = \emptyset$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $A \cap B = \emptyset$.

Soit $(Z ; T)$ un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$;

alors $Z \in \mathcal{P}(A)$ et $T \in \mathcal{P}(B)$

c'est-à-dire, $Z \subseteq A$ et $T \subseteq B$

20

or $A \cap B = \emptyset$

alors $\begin{cases} Z\cap A = A \text{ et } Z\cap B = \emptyset \\ T\cap A = \emptyset \text{ et } T\cap B = T \end{cases}$

d'où $Z\cup T \in \mathcal{P}(E)$

et $f(Z\cup T) = \big((Z\cup T)\cap A \,;\, (Z\cup T)\cap B\big)$

$$f(Z\cup T) = \big((Z\cap A)\cup(T\cap A)\,;\,(Z\cap B)\cup(T\cap B)\big)$$

$$f(Z\cup T) = (Z\cup\emptyset\,;\,\emptyset\cup T) = (Z\,;\,T)$$

Donc $Z\cup T$ est un antécédent de $(Z;T)$ par f dans $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi f est surjective.

D'après $(\Rightarrow)$ et $(\Leftarrow)$, on a :

f est surjective $\Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$.

3) Donnons une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et f est surjective

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

(d'après les questions 1) et 2))

$$\Leftrightarrow B = C_E A$$

Déterminons dans ce cas la bijection réciproque de f

$$f^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$(X ; Y) \longmapsto X \cup Y$$