Exercice 2

On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a_1;a_2;a_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$D(a_1;a_2;a_3;a_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

a) Calculons $D(a_1;a_2;a_3)$

$$D(a_1;a_2;a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$D(a_1;a_2;a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$D(a_1;a_2;a_3) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$D(a_1;a_2;a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \end{vmatrix}$$

(73) $D(a_1;a_2;a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\left[(a_3 - a_1) - (a_2 - a_1)\right]$

$$D(a_1;a_2;a_3) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

b) Montrons qu'on peut remplacer la dernière ligne de $D(a_1;a_2;a_3;a_4)$ par $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$ sans changer sa valeur, où $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Posons $C = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \end{pmatrix}$

Comme $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, alors on a :

$$C = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3+\alpha a_1^2+\beta a_1+\gamma & a_2^3+\alpha a_2^2+\beta a_2+\gamma & a_3^3+\alpha a_3^2+\beta a_3+\gamma & a_4^3+\alpha a_4^2+\beta a_4+\gamma \end{pmatrix}$$

En faisant, $l_4 \leftarrow l_4 - (\gamma l_1 + \beta l_2 + \alpha l_3)$, on a :

$$C = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix} = D(a_1;a_2;a_3;a_4)$$

Donc, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \end{pmatrix} = D(a_1,a_2,a_3,a_4)$

Chosissons f de façon judicieuse de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul et en développant, montrons que :

$$D(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) D(a_1, a_2, a_3)$$

Je vais chosir la fonction f telle que :

$f(a_1) = 0$; $f(a_2) = 0$; $f(a_3) = 0$ et f est un polynôme de degré 3 ;

Donc un polynôme de degré 3 ayant a_1, a_2, a_3 comme racine est : $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$

Ainsi, $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \end{vmatrix}$

D'où, $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & f(a_4) \end{vmatrix}$

En dévelloppant suivant la dernière ligne, on a :

$$D(a_1, a_2, a_3, a_4) = f(a_4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

or $f(a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$

et $D(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$

alors $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) D(a_1, a_2, a_3)$

c) <u>Déduisons la valeur de $D(a_1, a_2, a_3, a_4)$</u>

Comme $D(a_1, a_2, a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$

et que $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) D(a_1, a_2, a_3)$

alors $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$

Généralisation

Posons $\Delta_n = D(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

* En prenant $f(x) = x^{n-1} + \alpha_{n-1} x^{n-2} + \cdots + \alpha_2 x + \alpha_1$

Et en remplaçant la dernière ligne de Δ_n par

$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$, on montre que Δ_n ne

change pas de valeur

* En prenant $f(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$

on a : $f(a_i) = 0$, $\forall i = 1; \ldots; n-1$ et $f(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$

et en développant, on a :

$$\Delta_n = f(a_n)\, \Delta_{n-1}$$

c'est-à-dire, $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)\, \Delta_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.