Université Nangui Abrogoua

UFR Sciences Fondamentales et Appliquées

Licence 2 : Maths-Info & Phys-Chimie | Année Universitaire : 2019–2020

Fiche N° 4 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $x = \pm R$ des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ 2) $\displaystyle\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\text{Log}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right) x^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} x^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} x^n, a > 0.$

EXO 2 Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!} x^n.$$

EXO 3 **a)** Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1) x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

c) En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1) x^{2n}$.

EXO 4 Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0], \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n puis en déduire a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n} et b_{2n+1}.

c) Écrire la série de Fourier SF_f associée à f et étudier sa convergence en $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

d) En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

e) En appliquant l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

f) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2}$.

EXO 5 Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0], \\ x & \text{si} \quad x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n.

c) Écrire la série de Fourier SF_f associée à f et étudier sa convergence en $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

d) En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.