Exercice 7

Soit $f : X \to Y$. Montrons que les trois propositions suivants sont équivalents :

(i) f est injective

(ii) $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(iii) $\forall A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

(*) (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Supposons que f est injective.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(X)$.

a) Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que : $y = f(x)$

or $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$

c'est-à-dire $y \in f(A) \cap f(B)$

ainsi $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b) Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.

Alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$

donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tel que

$f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y$

d'où $f(x_1) = f(x_2)$

or f est injective

alors $x_1 = x_2$

d'où $x_1 \in A \cap B$

ainsi $f(x_1) \in f(A \cap B)$

c'est-à-dire $y \in f(A \cap B)$;

donc $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

D'après a) et b), $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

(∗∗) <u>(ii) $\Longrightarrow$ (iii)</u>

Supposons que : $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(X)$ tels

que $A \cap B = \emptyset$

Alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$

or $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

donc $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

(***') $\underline{\underline{(iii) \Longrightarrow (i)}}$

Supposons que, $\forall A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

Soient x_1 et x_2 deux éléments de X tels que

$f(x_1) = f(x_2)$.

Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$

Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Alors $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

c'est-à-dire, $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$

or $f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$ et $f(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}$

donc $\{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$

c'est-à-dire $f(x_1) \neq f(x_2)$

ce qui est absurde; donc $x_1 = x_2$

alors f est injective.