Université Nangui Abrogoua | **République de Côte d'Ivoire**
Licence 2 : MI & PC | **Année Universitaire : 2021/2022**

TRAVAUX DIRIGÉS N° 2 : ANALYSE 3
Thème : Séries numériques

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 3

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ln(n)}{n}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels tels que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ soit convergente. Déterminer alors sa somme.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente.
   (b) En déduire la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 5

Étudier suivant les réels a et b la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{b^n+n}$

Les exercices qui suivent sont réservés aux étudiants de MI

Exercice 6

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. Calculer $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$.
3. Pour tout réel r tel que $|r| < 1$, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2r^k = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Exercice 7

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+b-1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $b-a-1 > 0$ et calculer sa somme en fonction de a et b.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 9

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrerquelessuites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n}.$$
4. Justifier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant les questions précédentes.