Université Nangui Abrogoua
UFR Des Sciences Fondamentales Appliquées

Année Universitaire 2014/2015

Épreuve de la première session de l'examen de

L'UE D'ANALYSE 3
ECU 2 : DEVELOPPEMENT EN SERIE
Licence 2 : Mathématiques - Informatique
Durée : 1 heure 30

EXERCICE 1

1. a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

   b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0}(\cos n)x^n$.

   c) En remarquant que $\cos n = \dfrac{e^{in}+e^{-in}}{2}$, calculer la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\cos n)x^n \quad \forall x \in]-R, R[$.

2. Pour toute fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier (trigonométriques) sont donnés pour tout entier n par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

   Montrer que si f est 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de Fourier de la dérivée f' de f sont donner par $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.

EXERCICE 2

1. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1}x^n \qquad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2 n^n}x^{2n}.$$

2. On considère la série de la question 1-b),
   a) Etudier la convergence de cette série au points $x = -R$ et $x = R$ où R le rayon de convergence de la série.
   b) En remarquant que $\dfrac{n}{n^2-1} = \dfrac{1/2}{n-1} + \dfrac{1/2}{n+1}$, calculer la somme $f(x)$ de cette série.

   (on pourra par intégration, utiliser le développement : $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.)

EXERCICE 3

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

2. a) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire que la série de Fourier de f est $SF_f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}$.

3. En déduire la valeur des série suivantes $\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}$, $\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p^2}$.