

Exercice 9

$$(i) \quad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto n+1$$

a) f est injective

$$\text{Car } \forall n, m \in \mathbb{N}, f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$$

b) on a: $0 \in \mathbb{N}$; 0 n'admet
d'antécédent par f

Donc f n'est pas surjective.

f n'est pas bijective.

$$(ii) \quad g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto n+1$$

a) g est injective

b) g est surjective

Donc g est bijective.

$$(iii) \quad h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x+y; x-y)$$

a) h est injective

Soient (x, y) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Supposons que $h(x, y) = h(a, b)$

$$\text{Alors } (x+y; x-y) = (a+b; a-b)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x+y = a+b & (1) \\ x-y = a-b & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 2x = 2a \\ &\Rightarrow x = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow y = a - x + b \\ &\Rightarrow y = b \quad (\text{car } a = x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (x, y) = (a, b)$$

h est injective.

(29)

b) soit (x, y) un élément de \mathbb{R}^2

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} \in \mathbb{R} \\ \frac{x-y}{2} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{donc } \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2} \right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \text{et } h\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}\right) &= \left(\frac{x+y+x-y}{2}, \frac{x+y-x-y}{2} \right) \\ &= (x; y) \end{aligned}$$

donc $\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2} \right)$ est un antécédent de $(x; y)$ par h .

h est surjective

h est bijective.