Université Nangui Abrogoua — Année 2018-2019
Licence 2 — Maths - Info
Semestre 1

---

# Examen d'Analyse 3
# ECUE 1 Intégrales et Séries

Première Session

Durée : 1 heure 45 minutes

*Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé*

---

$\boxed{1}$ **Montrer que, l'intégrale**

$$\boldsymbol{I = \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt}$$

**converge puis calculer sa valeur.**

• La fonction $f : t \longmapsto t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1, 1]$, donc la seule borne impropre est $-1$.
Au voisinage de $-1$, $f$ a un signe constant et $f(t) \underset{-1}{\sim} \frac{-\sqrt{2}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$. Et comme $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($\frac{1}{2} < 1$), donc $I = \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$ converge.

• Calcul de $I = \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$

– Une méthode :
Faisons le changement de variable $t = \cos x$. On a :

$$\begin{aligned}
&dt = -\sin x \\
&1 - t = 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&1 + t = 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&t = 1 \Longrightarrow x = 0 \\
&t = -1 \Longrightarrow x = -\pi
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt \\
&= \int_{\pi}^{0} \cos x\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}(-\sin x dx) \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos x\sqrt{\frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}}(\sin x dx) \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos x\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}\cdot 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos x\cdot 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos x(1-\cos x)dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \left(\cos x - \frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx \\
&= \left[\sin x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\
I &= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

– Une autre méthode :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt \\
&= \int_{-1}^{1} t\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
I &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt - \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt
\end{aligned}$$

$\star$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} = 0.$

$\star$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[-t\sqrt{1-t^2}\right] + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$

$$= \int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2 x}(-\sin x dx), \quad \text{(en posant } t=\cos x$$

$$= \int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx = \int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $I = -\dfrac{\pi}{2}$.

– Une autre méthode encore :

Faisons le changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$. On a :

$$\begin{aligned}
&t = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad \text{et } dt = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}dx \\
&t = 1 \Longrightarrow x = 0 \\
&t = -1 \Longrightarrow x = +\infty
\end{aligned}$$

D'où

$$I = \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot x \cdot \frac{4x}{(1+x^2)^2}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{-4x^4+4x^2}{(1+x^2)^3}dx$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{-4x^4+4x^2}{(1+x^2)^3}$ étant paire sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$R(x) = \frac{-4x^4+4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{(1+x^2)^3}.$$

On a : $c = \lim\limits_{x\to i}(1+x^2)^3R(x) = \lim\limits_{x\to i}(-4x^4+4x^2) = -8$, $a = \lim\limits_{x\to\infty} x^2R(x) = -4$ et de $R(0) = 0$, on tire $b = 12$. Ainsi

$$R(x) = \frac{-4x^4+4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-4}{1+x^2} + \frac{12}{(1+x^2)^2} + \frac{-8}{(1+x^2)^3}.$$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ alors $J_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}J_n$.

– $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

– $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = J_2 = \frac{1}{2}J_1 = \frac{\pi}{4}$

– $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx = J_3 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3\pi}{16}$.

D'où $I = -4J_1 + 12J_2 - 8J_3 = -2\pi + 3\pi - \dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$ **Établir la convergence puis calculer la somme de la série**

$$\boldsymbol{\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}}.$$

- Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}$ :

On a $\dfrac{n}{(n^2-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3}$ converge $(3 > 1)$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}$ converge.

• Calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2}$ :
Par une décomposition en éléments simples, on a $\forall n \geq 2$,

$$\frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

– Une méthode : On va rendre la série telescopique en remarquant que pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\frac{n}{(n^2-1)^2} &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\\ \frac{n}{(n^2-1)^2} &= v_n - v_{n+1} \quad \text{où} \quad v_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty}(v_n - v_{n+1})$ est un série telescopique convergente, par suite $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = v_2 - \lim_{n\to\infty} v_n$.
On a $v_2 = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{16}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$, donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{5}{16}.$$

– Une autre méthode : En passant par les sommes partielles.
Soit $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k^2-1)^2}$ la somme partielle d'ordre $n$. On a :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right]\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ S_n &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}.$$

$\boxed{3}$ **Soit $\alpha > 0$. On considère la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par**

$$f_n(x) = n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2x^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ que l'on déterminera.**

**b) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.**

a) Convergence simple de $(f_n)_n$ :
– On a $f_n(0) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
– Pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2x^2} = 0$.
Dans tous les cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Convergence uniforme de $(f_n)_n$ :
Chaque $f_n$ est dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = n^\alpha \mathrm{e}^{n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$.
$f_n$ étant impaire, on donne ses variations sur $[0, +\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{n\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

D'après le tableau de variation on a $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}} \cdot \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$.
Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2e}} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Par conséquent la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

$\boxed{4}$ **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et** $\begin{array}{rrcl} f_n : & [0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{(1+x^2)^n} \end{array}$ .

**a) Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge sur $[0, +\infty[$ et calculer sa somme.**

**b) Que peut-on en déduire concernaant la convergence uniforme et normale de la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $[0, +\infty[$ ?**

a) • Convergence (simple) de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ :

– On a $f_n(0) = 0$, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(0) = 0$ converge.

– Pour $x \in ]0, +\infty[$, on a

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

Or pour tout $x > 0$, $) < \frac{1}{1+x^2} < 1$, donc $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Par conséquent $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

Dsns tous les cas, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge sur $[0, +\infty[$.

• Calcul de la somme :

Pour tout $x \in ]0, +\infty[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi la somme $S$ de la série est définie par :

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

b) • Convergence uniforme :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$ alors que la somme $S$ n'est pas continue en $0$, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément.

• Convergence normale :

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément donc elle ne converge pas normalement.