Université NANGUI ABROGOUA

Année U...

UFR - SFA

2021-2022

Laboratoire de Mathématiques
et Informatique

EXAMEN DE L'UE D'ARITHMÉTIQUE
L2-MI (1ère Session)

Exercice 1 (12pts)

A) Soit E l'anneau $\mathbb{Z}/_{33\mathbb{Z}}$; la classe d'un entier n sera notée $\bar{n}$.

On considère g l'application définie par :

$$g : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto g(x) = \overline{22}\, x + \bar{7}.$$

Déterminons l'image de E par l'application g

$g(\bar{0}) = \overline{22} \times \bar{0} + \bar{7} = \bar{7} \Rightarrow g(\bar{0}) = \bar{7}$ (0,25)

$g(\bar{1}) = \overline{22} \times \bar{1} + \bar{7} = \overline{29} \Rightarrow g(\bar{1}) = \overline{29}$ (0,25)

$g(\bar{2}) = \overline{22} \times \bar{2} + \bar{7} = \overline{18} \Rightarrow g(\bar{2}) = \overline{18}$ (0,25)

① $g(\bar{3}) = \overline{22} \times \bar{3} + \bar{7} = \bar{7} \Rightarrow g(\bar{3}) = \bar{7}$ (0,25) soit x un élément de E, alors il existe un entier n ...

or $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{ n \equiv 0 [3]$ ou $n \equiv 1 [3]$ ou $n \equiv 2 [3] \}$ 0,25

c'est-à-dire $n = 3k$ ou $n = 1+3k$ ou $n = 2+3k$ / avec $k \in \mathbb{Z}$ 0,25

ainsi $g(E) = \{ g(\overline{3k}) ; g(\overline{1+3k}) ; g(\overline{2+3k}) ; k \in \mathbb{Z} \}$

$g(\overline{3k}) = \overline{22} \times \overline{3k} + \overline{7} = \overline{33} \times \overline{2k} + \overline{7} = \overline{0} \times \overline{2k} + \overline{7} = \overline{7}$ 0,25

$g(\overline{3k}) = g(\overline{0}) = \overline{7}$ 0,25

$g(\overline{3k+1}) = \overline{22}(\overline{3k} + \overline{1}) + \overline{7} = \overline{22} \times \overline{3k} + \overline{22} \times \overline{1} + \overline{7}$ 0,25

or $\overline{22} \times \overline{3k} = \overline{33} \times \overline{2k} = \overline{0} \times \overline{2k} = \overline{0}$

alors $g(\overline{3k+1}) = g(\overline{1}) = \overline{29}$ 0,25

$g(\overline{3k+2}) = \overline{22}(\overline{3k+2}) + \overline{7} = \overline{22} \times \overline{3k} + \overline{22} \times \overline{2} + \overline{7}$ 0,25

or $\overline{22} \times \overline{3k} = \overline{33} \times \overline{2k} = \overline{0} \times \overline{2k} = \overline{0}$

alors $g(\overline{3k+2}) = g(\overline{2}) = \overline{18}$ 0,25

Par conséquent, $g(E) = \{ \overline{7} ; \overline{18} ; \overline{29} \}$ 0,5 **

B) Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Posons :

$\delta = pgcd(a;b)$; $\mu = ppcm(a;b)$; $\alpha = \frac{a}{\delta}$ et $\beta = \frac{b}{\delta}$

1\. a) Montrons que : $\alpha \wedge \beta = 1$

Comme δ est un diviseur commun de a et b, alors $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont des entiers ; (0,25)

c'est-à-dire, α et β sont des entiers.

Comme $\delta = pgcd(a;b)$, alors d'après le Théorème de BEZOUT il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$\delta = au + bv \Leftrightarrow \frac{a}{\delta}u + \frac{b}{\delta}v = 1$; (0,5)

c'est-à-dire $\alpha u + \beta v = 1$;

ainsi d'après l'identité de BEZOUT $\alpha \wedge \beta = 1$. (0,25)

b) Montrons que μ est un multiple de $\delta\alpha\beta$

$\alpha = \frac{a}{\delta} \Leftrightarrow a = \delta\alpha$ et $\beta = \frac{b}{\delta} \Leftrightarrow b = \delta\beta$;

Comme μ est un multiple commun de a et b, alors il existe ρ et ε des entiers non nuls tels que :

$\mu = \rho a = \varepsilon b$; (0,5) **

c'est-à-dire ; $\delta\rho\alpha = \delta\varepsilon\beta = \mu$ (0,25) ainsi $\rho\alpha = \varepsilon\beta$; 0,25

donc α divise $\varepsilon\beta$ et α et β sont premiers entre eux

alors d'après le Théorème de Gauss α divise ε ; 0,25

d'où il existe un entier non nul k tel que : $\varepsilon = k\alpha$ 0,25

Ainsi, $\mu = \delta(k\alpha)\beta = k(\delta\alpha\beta)$; 0,25

donc μ est un multiple de $\delta\alpha\beta$. 0,25

c) Montrons que $\delta\alpha\beta$ est un multiple de μ.

On sait que : $a = \delta\alpha$ et $b = \delta\beta$ / 0,25

ainsi, on a : $\delta\alpha\beta = (\delta\alpha)\beta = a\beta$; 0,25

donc $\delta\alpha\beta$ est un multiple de a ; 0,25

De même $\delta\alpha\beta = \alpha(\delta\beta) = \alpha b$; 0,25

d'où $\delta\alpha\beta$ est un multiple de b. 0,25

Ainsi $\delta\alpha\beta$ est un multiple commun de a et b 0,25

or $\mu = \text{ppcm}$;

alors $\delta\alpha\beta$ est un multiple de μ. 0,25

c) Déduisons-en que $\mu\delta = ab$

Comme μ et $\delta\alpha\beta$ sont des entiers naturels non nuls et que d'après b), μ est un multiple de $\delta\alpha\beta$ et d'après c) $\delta\alpha\beta$ est un multiple de μ

alors $\mu = \delta\alpha\beta$;

c'est-à-dire, $\mu = \delta\left(\frac{a}{\delta}\cdot\frac{b}{\delta}\right)$;

d'où $\mu = \frac{a \cdot b}{\delta}$ 0,25

ainsi $\mu\delta = ab$ 0,25

2) Trouvons toutes les paires d'entiers naturels a et b tels que : $\begin{cases} pgcd(a;b) = 42 \\ ppcm(a;b) = 1680 \end{cases}$

Posons $\alpha = \frac{a}{42}$ et $\beta = \frac{b}{42}$ 0,25

D'après la question 1.a) α et β sont premiers entre eux. 0,25

D'après la question 1. d) on a :

$ppcm(a;b) = pgcd(a;b)\alpha\beta$ 0,25

c'est-à-dire, $1680 = 42\alpha\beta$ 0,25

d'où $\alpha\beta = 40$ 0,25

ainsi $(\alpha;\beta) \in \{(1;40);(40;1);(5;8);(8;5)\}$ 0,25

Alors $(a;b) \in \{(42;1680);(1680;42);(210;336);$
$(336;210)\}$ 0,25

$S_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{(42;1680);(1680;42);(210;336);(336;210)\}$ 0,25

Exercice 2 (8pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons : $A = n-1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.

1. a) Montrons que $pgcd(A;B) = pgcd(A;4)$

Faisons la division euclidienne de B par A.

$$\left.\begin{array}{r|l} n^2 - 3n + 6 & n-1 \\ \cline{2-2} -(n^2 - n) & n-2 \\ \cline{1-1} -2n + 6 & \\ -(-2n+2) & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}\right\} \Rightarrow n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$$

0,25 0,25

Donc $B = A(n-2) + 4 \Leftrightarrow B - A(n-2) = 4$

(*) Tout diviseur commun de A et B est un diviseur commun de A et 4 car $B - A(n-2) = 4$. 0,25

(*) Tout diviseur commun de A et 4 est un diviseur commun de A et B car $B = A(n-2) + 4$ 0,25

D'où, $pgcd(A;B) = pgcd(A;4)$ 0,25

b) Déterminons, suivant les valeurs de n, pgcd (A;B)

On sait que l'ensemble des diviseurs strictement positifs de 4 est $\{1;2;4\}$; 0,25

et comme $pgcd(A;B) = pgcd(A;4)$ 0,25

alors $pgcd(A;B) \in \{1;2;4\}$.

(*) $pgcd(A;B) = 1 \Leftrightarrow pgcd(A;4) = 1$ 0,25

$\Leftrightarrow A \equiv 1[4]$ ou $A \equiv 3[4]$

$\Leftrightarrow n-1 \equiv 1[4]$ ou $A \equiv 3[4]$

$\Leftrightarrow n \equiv 2[4]$ ou $n \equiv 0[4]$ 0,25

(*) $pgcd(A;B) = 2 \Leftrightarrow pgcd(A;4) = 2$ 0,25

$\Leftrightarrow A \equiv 2[4]$

$\Leftrightarrow n-1 \equiv 2[4]$ 0,25

$\Leftrightarrow n \equiv 3[4]$

(*) $pgcd(A;B) = 4 \Leftrightarrow pgcd(A;4) = 4$ 0,25

$$(A;B) = 4 \iff A \equiv 0\,[4]$$
$$\iff n-1 \equiv 0\,[4]$$
$$\iff n \equiv 1\,[4]$$

Par conséquent ; on a :

$$\text{pgcd}(A;B) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \equiv 2\,[4] \text{ ou } n \equiv 0\,[4] \\ 2, & \text{si } n \equiv 3\,[4] \\ 4, & \text{si } n \equiv 1\,[4]. \end{cases}$$

2) <u>Déterminons n pour que $C = \dfrac{n^2-3n+6}{n-1}$ soit un entier</u>

On sait que $n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$

ainsi, $C = n - 2 + \dfrac{4}{n-1}$

donc C est un entier si $(n-1)$ est un diviseur de 4

or les diviseurs de 4 sont : $-1; -2; -4; 1; 2$ et 4

d'où $C \in \mathbb{Z} \iff n-1 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

$n-1=-4 \Rightarrow n=-3$

$n-1=-2 \Rightarrow n=-1$

$n-1=-1 \Rightarrow n=0$ 0,25 $\times 4$

$n-1=1 \Rightarrow n=2$

$n-1=2 \Rightarrow n=3$

$n-1=4 \Rightarrow n=5$

$\Rightarrow C \in \mathbb{Z}, \forall n \in \{-3;-1;0;2;3;5\}$

3) Déterminons le reste de la division euclidienne de 2020^{1000} par 7

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 7 \\ -14 & 288 \\ \hline 62 & \\ -56 & \\ \hline 60 & \\ 56 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

0,25

$\Rightarrow 2020 = 7 \times 288 + 4$ 0,25

donc $2020 \equiv 4\,[7]$

d'où $2020^{1000} \equiv 4^{1000}\,[7]$ 0,25

or $4 \equiv 4\,[7]\ ;\ 4^2 \equiv 2\,[7]\ ;\ 4^3 \equiv 1\,[7]$ 0,25

et que $1000 = 3 \times 333 + 1$ 0,25

alors $4^{3\times 333+1} \equiv 1 \times 4\,[7] \Rightarrow 4^{1000} \equiv 4\,[7]$; 0,25 0,25

donc $2020^{1000} \equiv 4\,[7]$ 0,25

correcte

10 N.B : Toute autre méthode sera acceptée.