TD ARITHMETIQUE L2 MI : 18-19

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul et $q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On pose $(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, $(n!)_q = (1)_q (2)_q \cdots (n)_q$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = \dfrac{(n!)_q}{(k!)_q ((n-k)!)_q}$ et $(0!)_q = 1$.

a) Montrer que $(n!)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)}{(q-1)^n}$ avec $q \neq 1$

b) Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}_q$

c) Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}_q + q^k \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}_q +$ $q^{n-k} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}_q$

EX 2

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes distincts de G d'ordre un même nombre premier p≥2. Montrer que H∩K= $\{1_G\}$

EX 3

Déterminer l'ordre d'un élément du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, en utulisant son écriture exponentielle.

EX 4

Soit f : G $\longrightarrow$H un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G. Montrer que l'ordre de f(G') divise les ordres de G' et de H.

EX 5

Soit f : G$\longrightarrow$H un morphisme de groupes finis. Soit G' un sous-groupe de G d'ordre premier à l'ordre de H. Montrer que G'$\subset$ ker(f).

Ex 6

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. n^3 - n est divisible par 6 ,

2.n^5 - n est divisible par 30 ,

3. n^7 - n est divisible par 42 .

Ex 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

P_n : 3 divise 4^n-1 et Q_n : 3 divise 4^n+1 .

2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Que penser de l'assertion :$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ Q_n est vraie.

4.Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$, l'entier 3^{n+3}–4^{4n+2}est un multiple de 11.

Ex 8

Démontrer par récurrence que :

a) $2^{2\times 3^n} - 1$ est divisible par 3^{n+1} pour tout entier n$\geq$ 0.

b) $5^{3^n} + 1$ est divisible par 3^{n+1} pour tout entier n$\geq$ 0.:

Ex 9

1.Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$ et tout p$\in \mathbb{Z}$: $\mathrm{p}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

2.Calculer pour tout n

$\mathrm{S}_0 = \sum\limits_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$; $\mathrm{S}_1 = \sum\limits_{p=0}^{n} \mathrm{p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$; $\mathrm{S}_2 = \sum\limits_{p=0}^{n} \mathrm{p}^2 \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

$\mathrm{S}_3 = \sum\limits_{p=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} 3^{p-1}$

3.Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{p} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$

EX 10

Soit $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe le nombre de diviseurs positifs de n .

a) Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ .Calculer $\sigma(p^\alpha)$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux ,et φ : $\mathrm{div}(a) \times \mathrm{div}(b) \longrightarrow \mathrm{div}(ab)$ définie par $\varphi(k,l) = kl$ montrer que φ est une bijection .div(n) désigne l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier n

c) En déduire une relation entre $\sigma(ab)$, $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ si a et b sont premiers entre eux .

d) Soit n un entier naturel, $p_1^{\alpha_1}.\ p_2^{\alpha_2} \cdots\ p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en nombre premiers de n .Exprimer $\sigma(n)$ en fonction des α_i .

Ex 11

On suppose que

n est un entier ≥ 2 tels que $2^n - 1$ est premier.

Montrer que n est un nombre premier.

Ex 12

Soient a et p deux entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier alors a=2 et p est premier.

Ex 13

Soit p un nombre premier, $p \geq 5$. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

EX 14

Résoudre dans Z^2 les équations suivantes :

a) $17x + 6y = 1$ b) $27x + 25y = 1$ c) $118x + 35y = 1$ d) $39x + 26y = 1$

e) Résoudre dans Z^2

$$\begin{cases} 7x + 5y \equiv 2[8] \\ 5x + 4y \equiv 16\,[8] \end{cases}$$

f) Résoudre dans Z, l'équation $x^2+x-2 \equiv 0[13]$.

EX15

Dans une UE de maths d'une université, il y a entre 500 et 1000 inscrits.

L'administration de l'université a remarqué qu'en les répartissant en groupes de 18, ou

bien en groupes de 20, ou bien aussi en groupes de 24, il restait toujours 9 étudiants.

Quel est le nombre d'inscrits ?

EX16

Combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats (au minimum) si, rangés par

trois colonnes,il reste deux soldats, rangés par cinq colonnes, il reste trois soldats et,

rangés par sept

colonnes, il reste deux soldats ?

EX 17

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b tels que :

a = $2n^3+5n^2+4n+1$ et b = $2n^2+n$. 1.

1.Montrer que $2n+1$ divise a et b.

2.PGCD(a , b) = 2n +1, vraie ou fausse ?

3. déterminer pgcd(6n+1, $12n^3+32n^2+17n+2$)

EX 18

1.Résoudre dans Z les équations : $x^2 = 2 \bmod 6$; $x^3 = 3 \bmod 9$.

2. Résoudre dans Z^2 les équations suivantes :

$5x^2 + 2xy - 3 = 0$; $y^2 + 4xy - 2 = 0$.

Ex 19

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

1)$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \bmod 10 \\ x = 5 \bmod 13 \end{array}\right.$ 2)$\left\{\begin{array}{l} x = 4mod6 \\ x = 7mod9 \end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{c} 5x = 4(mod27) \\ 12x = 9(mod51) \end{array}\right.$