Examen : Probabilité et Statistique
L2 Math-Info

Université Nangui-Abrogoua

Durée : 2 heure 30
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Calculatrices autorisées.
Documents non autorisés

1 Analyse combinatoire (4 pts)

1. On tire au hasard un ensemble de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la main contienne au moins un As ?
2. Une urne contient **a** boules blanches et **b** boules noires. On extrait au hasard une poignée de **n** boules.
   Quelle est la probabilité que cette poignée contienne k boules blanches $(0 \leq k \leq n)$?

2 Indicateurs Statistiques (4 pts)

Un agent immobilier s'intéresse au nombre de pièces dans les appartements de ses 77 clients mis en vente. Il obtient la répartition suivante avec x_i le nombre de pièces d'un appartement et n_i l'effectif :

x_i	n_i
1	15
2	20
3	12
4	30

1. Calculer le mode
2. Calculez la médiane
3. Calculez la moyenne pondérée
4. Calculez la variance pondérée sur cette population

3 Étude de la loi exponentielle 6 pts)

On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ est donnée par :

$$f_\theta(x) = \theta e^{\theta x} 1_{x \geq 0}$$

$= \theta e^{-\theta x} 1_{x \geq 0}.$

1. Soit A et B deux évènements. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B : $P(A|B)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Calculer $P(X \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.
3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que $P((X \geq t)|X \geq s) = P(X \geq s)$.
4. Soit maintenant X et Y deux variables aléatoires indépendantes de paramètres respectifs $\theta > 0$ et $\lambda > 0$. On note $S = X + Y$.
   (a) Montrer que $E[X] = \frac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$.
   (b) Calculer $E[X+Y]$ et $Var(X+Y)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $S = X + Y$ ne fait pas partie de la famille des lois exponentielles.

4 Exercice (6 pts)

Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité est donnée par la fonction

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{C}{(x+1)^4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de la constante C.
2. Calculer l'espérance et la variance de X. On pourra écrire

$$\frac{x}{(x+1)^4} = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^4} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$$

3. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X et $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Rappeler l'énoncé du théorème central limite et en déduire la loi de M_n
4. Calculer la limite de

$$P(\frac{1}{2} \leq M_n \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}))$$

lorsque n tend vers l'infini et $\epsilon > 0$ est un paramètre fixé

Examen d'Analyse 3
ECUE 2 Développement en séries

Première Session

Durée : 1 heure 45 minutes

Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé

On rappelle que $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

1 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$.

2 (a) Écrire le développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-2x}$.

(b) En déduire à l'aide d'une décomposition en éléments simples le développement en série entière de la fonction $x \to \dfrac{-3+4x}{1-3x+2x^2}$

3 On considère la fonction f, 2π-périodique et définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

(a) Représenter la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(b) Calculer les coefficient de Fourier de f.

(c) La série de Fourier de f converge-t-elle ?

(d) Calculer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},.$$

Examen d'Analyse 3
ECUE 1 Intégrales et Séries

Première Session

Durée : 1 heure 45 minutes

Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé

$\boxed{1}$ Montrer que, l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

converge puis calculer sa valeur.

$\boxed{2}$ Établir la convergence puis calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}.$$

$\boxed{3}$ Soit $\alpha > 0$. On considère la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x\mathrm{e}^{-n^2x^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\begin{array}{rccl} f_n : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{(1+x^2)^n} \end{array}$.

a) Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge sur $[0, +\infty[$ et calculer sa somme.

b) Que peut-on en déduire concernaant la convergence uniforme et normale de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[0, +\infty[$?

Université Nangui Abrogoua
Licence 2
Semestre 1

Année 2017-20
Maths - 1/

Examen d'Analyse 3
ECUE 1 Intégrales et Séries

Première Session

Durée : 1 heure 45 minutes

Rédiger avec soin et rigueur – Eviter les ratures – aucun document n'est autorisé

---

1 a) Pour quelles valeurs du nombre réel α, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$$

converge ?

b) Montrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

converge puis calculer sa valeur.

2 Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série

$$\sum_{n \geq 0} \left(\ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3) \right)$$

soit convergente, puis calculer sa somme dans ce cas.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n(n+x)} \end{array}$.

a) Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge sur $[0, +\infty[$.

On considère donc la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

b) Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. (f_n' désignant la dérivée de f_n.)

c) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Étudier les variations de f.

d) Calculer $f(p)$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ puis déduire la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

UFR SFA | L2 | Examen d'Algèbre 3 de $2^{ème}$ session | 2018-2019

ECUE1 Groupes et déterminant - semestre 3 | Durée : 1h 30

Exercice 1 (12 points)

Soit G un groupe multiplicatif. On note
$Z(G) = \{a \in G \text{ tel que } \forall x \in G,\ ax = xa\}$
et pour $a \in G$, $C(a) = \{x \in G \text{ tel que } ax = xa\}$.

1) Montrer que pour tout $a \in G$, $Z(G)$ est un sous-groupe de G et un sous-groupe de $C(a)$.

2) $Z(G)$ est-il distingué dans $C(a)$? Justifier.

3) $Z(G)$ est-il distingué dans G? Justifier.

Exercice 2 (8 points)

a) Calculer les déterminants des matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Calculer en fonction de n le déterminant de la matrice d'ordre n suivante :

$$A_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Calculer les inverses des matrices A et B.

UFR SFA	L2	Exammen d'Algèbre 3 de $2^{ème}$ session	2018-2019
ECUE 2 Réduction de matrices et applications - semestre 3			Durée : 1h 30

Problème

Soient $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les vecteurs propres de A puis réduire si possible la matrice A sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Déterminer les sous-espaces propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Justifier.

4) Réduire si possible la matrice B sur $\mathbb{C}$.

5) Résoudre le système suivant : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{5}{2}x_1 + x_2 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{5}{2}x_2 \end{cases}$

UFR SFA | L2 | Exammen d'Algèbre 3 de $2^{ème}$ session | 2018-2019
ECUE 2 Réduction de matrices et applications - semestre 3 | Durée : 1h 30

Problème (20 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 & 24 \\ -12 & 11 & 18 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de A puis réduire si possible la matrice A.

2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Déterminer les sous-espaces propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4) Réduire si possible la matrice B.

5) Résoudre le système suivant : $(\sum) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -14x_1 + 12x_2 + 24x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -12x_1 + 11x_2 + 18x_3 - t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \end{cases}$

UNA, UFR-SFA

Laboratoire de Mathématiques et Informatique
UE Arithmétique dans $\mathbb{Z}$
L2 M.I - année 2018-2019
Sujet $1^{ère}$session, Durée : 1h30

(calculatrice autorisée)

EX1.(5 pts)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases}$$

2. résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation de congruences :
$x^2 + 2x + 14 = 0 \bmod 17$

EX 2 (3pts)
Soit G un groupe multiplicatif, $g \in G$, un élément d'ordre infini.
montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $g^n \neq 1_G$.

Ex3 (3pts)

1.Calculer en fonction de n la quantité suivante :

$$s = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 3^{n-2k}$$

2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n + 5$.