Arithmétique/Exercices/PPCM et PGCD

< Arithmétique

Exercice 4-1

Pour chacun des couples d'entiers (a, b) suivants, trouver leur PPCM.

1. a = 24 ; b = 56.

2. $a = 180$; $b = 450$.
3. $a = 308$; $b = 4004$.
4. $a = 120$; $b = 300$.
5. $a = 72$; $b = 108$.
6. $a = 175$; $b = 490$.

Solution

1. $a/8 = 3$ et $b/8 = 7$ sont premiers entre eux donc $\text{ppcm}(a, b) = 8 \times \text{ppcm}(3, 7) = 8 \times 3 \times 7 = 168$.
2. $a/90 = 2$ et $b/90 = 5$ sont premiers entre eux donc $\text{ppcm}(a, b) = 90 \times \text{ppcm}(2, 5) = 90 \times 2 \times 5 = 900$.
3. $b = 13 \times a$ donc $\text{ppcm}(a, b) = b$.
4. $a/60 = 2$ et $b/60 = 5$ sont premiers entre eux donc $\text{ppcm}(a, b) = 60 \times \text{ppcm}(2, 5) = 60 \times 2 \times 5 = 600$.

5. a/36 = 2 et b/36 = 3 sont premiers entre eux donc ppcm(a, b) = 36×ppcm(2, 3) = 36×2×3 = 216.
6. a/35 = 5 et b/35 = 14 sont premiers entre eux donc ppcm(a, b) =35×ppcm(5, 14) = 35×5×14 = 2450

Exercice 4-2

Pour chacun des couples d'entiers (*a*, *b*) suivants, trouver leur PGCD et déduisez-en leur PPCM.

1. a = 24 ; b = 56.
2. a = 300 ; b = 750.
3. a = 1386 ; b = 546.

Solution

1. $a/8 = 3$ et $b/8 = 7$ sont premiers entre eux donc pgcd(a, b) = 8 et ppcm(a, b) = $ab/8 = 3b = 7a = 168$.
2. $a/150 = 2$ et $b/150 = 5$ sont premiers entre eux donc pgcd(a, b) = 150 et ppcm(a, b) = $ab/150 = 2b = 5a = 1500$.
3. $a/42 = 33$ et $b/42 = 13$ sont premiers entre eux donc pgcd(a, b) = 42 et ppcm(a, b) = $ab/42 = 33b = 13a = 18018$.

Exercice 4-3

Le PPCM de deux nombres est 216. L'un des deux nombres est 72. Quel est l'autre ?

Solution

Les deux nombres sont x = ad et y = bd = 72 avec a et b premiers entre eux et d tels que 216 = abd = 72a, donc a = 3, d = 9k et bk = 8. L'autre nombre est donc x = 27k avec k = 1, 2, 4 ou 8, c'est-à-dire x = 27, 54, 108 ou 216.

Exercice 4-4

Quel est le plus petit entier strictement supérieur à 40 qui, divisé par 140 et par 252, donne 40 comme reste ?

Solution

$n - 40$ doit être > 0 et divisible par ppcm(140, 252) = ppcm(5×28, 9×28) = 5×9×28 = 1260. La plus petite valeur est 1260 + 40 = 1300.

Exercice 4-5

1° Trouvez tous les diviseurs naturels de 108.

2° Trouvez tous les couples (x, y) d'entiers naturels dont le PGCD d et le PPCM m sont tels que $m - 3d = 108$, avec $10 < d < 15$.

Solution

1° $108 = 2^2 \times 3^3$ a pour diviseurs positifs tous les nombres de la forme $2^p \times 3^q$ avec $0 \le p \le 2$ et $0 \le q \le 3$ (il y en a 3×4 = 12).

2° x = ad et y = bd et m = abd avec a et b premiers entre eux.

> 108 = m − 3d = (ab − 3)d et 10 < d < 15 donc d = 12 et ab = 12 donc {a, b} = {3, 4} et {x, y} = {36, 48} ou {a, b} = {1, 12} et {x, y} = {12, 144}.

Exercice 4-6

Résolvez dans $\mathbb{N}^2$, les systèmes :

a) $\begin{cases} xy = 16128 \\ \text{pgcd}(x, y) = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 1734 \\ \text{pgcd}(x, y) = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 439230 \\ \text{pgcd}(x, y) = 121 \end{cases}$

Solution

a) x = 24a et y = 24b avec a et b premiers entre eux et ab = 16128/24^2 = 112 donc {a, b} = {7, 16} et {x, y} = {168, 384}, ou {a, b} = {1, 112} et {x, y} = {24, 2688}.

b) x = 17a et y = 17b avec a et b premiers entre eux et ab = 1734/17^2 = 6 donc {a, b} = {2, 3} et {x, y} = {34, 51}, ou {a, b} = {1, 6} et {x, y} = {17, 102}.

c) $x = 121a$ et $y = 121b$ avec a et b premiers entre eux et $ab = 439230/121^2 = 30$ donc $\{a, b\} = \{5, 6\}$ et $\{x, y\} = \{605, 726\}$, ou $\{a, b\} = \{3, 10\}$ et $\{x, y\} = \{363, 1210\}$, ou $\{a, b\} = \{2, 15\}$ et $\{x, y\} = \{242, 1815\}$, ou $\{a, b\} = \{1, 30\}$ et $\{x, y\} = \{121, 3630\}$.

Exercice 4-7

x et y sont deux entiers naturels, m est leur PPCM, d leur PGCD, et l'on note a et b les entiers tels que $x = ad$ et $y = bd$.

1. Démontrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

2. Déduisez-en que pgcd(x + y, m) = d.

Solution

1. Voir Arithmétique/Exercices/Fractions# Exercice 7-4, 1°.
2. Se déduit de la question précédente et des égalités x + y = (a + b)d et m = (ab)d.

Exercice 4-8

Résolvez, dans $\mathbb{N}^2$, les systèmes :

a) $\begin{cases} xy = 1512 \\ \operatorname{ppcm}(x, y) = 252 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 300 \\ \text{ppcm}(x, y) = 60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 276 \\ \text{ppcm}(x, y) = 1440 \end{cases}$

Solution

x = ad et y = bd avec a et b premiers entre eux et :

a) d = 1512/252 = 6 et ab = 252/6 = 42 donc {a, b} = {6, 7} et {x, y} = {36, 42}, ou {a, b} = {3, 14} et {x, y} = {18, 84}, ou {a, b} = {2, 21} et {x, y} = {12, 126}, ou {a, b} = {1, 42} et {x, y} = {6, 252}.

b) d = 300/60 = 5 et ab = 60/5 = 12 donc {a, b} = {3, 4} et {x, y} = {15, 20}, ou {a, b} =

{1, 12} et {x, y} = {5, 60}.

c) d = pgcd(1440, 276) (d'après l'exercice précédent) = pgcd(12×120, 12×23) = 12, ab = 1440/12 = 120 et a + b = 276/12 = 23, donc {a, b} = {8, 15} et {x, y} = {96, 180}.

Exercice 4-9

Trouver deux entiers positifs x et y sachant que leur PGCD est 24 et que leur PPCM est 1344.

Solution

x = 24a et y = 24b avec a et b premiers entre eux et ab = 1344/24 = 56 donc {a,

b} = {7, 8} et {x, y} = {168, 192} ou {a, b} = {1, 56} et {x, y} = {24, 1344}

Exercice 4-10

a et b sont deux entiers tels que a > b > 0 ; g est leur PGCD et m leur PPCM.

1° Pour cette question, a = n(2n – 1) et b = (n – 1)(2n – 1), avec n entier positif. Déterminez alors g et m.

2° Soient p et q premiers entre eux tels que p > q > 0. Exprimer, en fonction de p et q, les nombres a et b tels que m(a + b) = abg **[1]**, p = a/g et q = b/g.

3° Parmi les nombres a et b qui satisfont à la relation **[1]**, trouver ceux qui satisfont à $g = a - b$ **[2]**.

4° Démontrer que les couples (a, b) qui satisfont à la fois à **[1]** et à **[2]**, sont tels que $(a - b)^2 = a + b$ **[3]**.

5° Soit un entier $r > 0$. Calculer en fonction de r (lorsqu'il en existe) les solutions (a, b) de **[3]** pour lesquelles r est le reste de la division de a par b, et préciser la valeur de g correspondante.

6° Même question pour $r = 0$.

Solution

1° $g = \text{pgcd}(2n^2 - n, 2n^2 - 3n + 1) =$

$\mathrm{pgcd}(2n^2 - n, -2n + 1) = 2n - 1$ et $m = ab/g = n(2n - 1)(n - 1)$.

2° $ab = mg$, donc $m(a + b) = abg$ équivaut à $a + b = g^2$, ou encore : $p + q = g$. On a alors : $a = p(p + q)$ et $b = q(p + q)$.

3° Si de plus $g = a - b$, c'est-à-dire $p - q = 1$ alors $g = 2q + 1$ (donc g impair > 1), $a = g(g + 1)/2$ et $b = g(g - 1)/2$.

4° S'il existe un entier $c > 1$ tel que $a = c(c + 1)/2$ et $b = c(c - 1)/2$ alors (même si c est pair) $a - b = c$ et $a + b = c^2$, donc $(a - b)^2 = a + b$.

5° Soit (a, b) une solution ; notons $c = a - b$ (> 0). Alors, $c^2 = c + 2b$ donc $b = c(c -$

1)/2 et a = b + c = c(c + 1)/2. Enfin, c > 3 (d'après l'hypothèse 0 < r < b) donc r = c (car on a bien c < b).

Par conséquent, il n'y a pas de solution si r = 1, 2 ou 3, tandis que pour r > 3, l'unique solution est (a, b) = (r(r + 1)/2, r(r – 1)/2), et g est égal à r/2 si r est pair et à r si r est impair.

6° Soit (a, b) une solution. Alors, b divise a (donc g = b). Notons k l'entier a/b (> 1). On a $k + 1 = (k - 1)^2 b \geq (k - 1)^2$ donc $k \leq 3$. Les deux seules solutions (a, b) sont donc (6, 3) et (3, 1).

Exercice 4-11

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit D_n le PGCD des deux entiers $n^2 + 100$ et $(n+1)^2 + 100$.

1. Démontrer que
$$D_n = \operatorname{pgcd}\left(2n+1, n^2+100\right).$$
2. En déduire que
$$D_n = \operatorname{pgcd}\left(2n+1, n^2+100, 2(n^2+100) - (2n+1)n\right)$$
.
3. En déduire que
$$D_n = \operatorname{pgcd}(401, n-200).$$
4. En déduire les deux valeurs possibles de D_n.

Solution

1. $D_n = \operatorname{pgcd}\left((n+1)^2 + 100 - \left(n^2+100\right), n^2+100\right)$
.
2. Immédiat.

3. $D_n = \operatorname{pgcd}\left(2n+1, n^2+100, 200-n\right)$ (d'après la question précédente) donc

$$\begin{aligned} D_n &= \operatorname{pgcd}\left(2n+1+2(200-n), n^2+100+(200+n)(200-n), 200-n\right) \\ &= \operatorname{pgcd}(401, 100 \times 401, 200-n) \\ &= \operatorname{pgcd}(401, n-200). \end{aligned}$$

4. 401 est premier donc s'il divise $n-200$ alors $D_n = 401$ et sinon, $D_n = 1$.

Exercice 4-12

Trouvez deux entiers positifs *a* et *b* tels que $a^2 + b^2 = 5409$ et PPCM(a, b) = 360.

Solution

3 divise $360 = \operatorname{ppcm}(a, b)$ donc il divise a ou b, donc 9 divise a^2 ou b^2. Comme 9 divise aussi $5409 = a^2 + b^2$, il divise a^2 **et** b^2. Donc 3 divise a et b.

Soient $c = a/3$ et $d = b/3$. Alors, $\mathrm{ppcm}(c, d) = 120$ et $c^2 + d^2 = 601$, premier avec 120, donc c et d sont premiers entre eux et $cd = 120$, donc

$$(c - d)^2 = 601 - 2.120 = 361 = 19^2$$

et

$$(c + d)^2 = 601 + 2.120 = 841 = 29^2$$

.

La solution est $\{c, d\} = \{5, 24\}$, c'est-à-dire $\{a, b\} = \{15, 72\}$.

Exercice 4-13

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{ppcm}(a, b) & = 42 \\ \text{pgcd}(a, c) & = 3 \\ a + b + c & = 29 \end{cases}$$

Solution

Analyse : $a = 3a'$, $c = 3c'$, $b = 29 - a - c \equiv 2 \bmod 3$, donc $\text{ppcm}(a', b) = 14$, en particulier $b \mid 14$, donc $b = 2$ ou 14.

- Si $b = 2$: $a' + c' = 9$ et $\text{ppcm}(a', 2) = 14$ donc $a' = 7$ et $c' = 2$, d'où $(a, b, c) = (21, 2, 6)$.

- Si $b = 14$: $a' + c' = 5$ et $a' \mid 14$ donc $(a', c') = (1, 4)$ ou $(2, 3)$, d'où $(a, b, c) = (3, 14, 12)$ ou $(6, 14, 9)$.

Synthèse : on vérifie que les trois seuls triplets possibles trouvés sont effectivement solutions, car on a bien pour chacun d'eux : $\mathbf{pgcd}(a', c') = 1$.

Liens externes

- « Calculateur de PPCM » (https://www.dcode.fr/ppcm) , sur dcode.fr
- « Calculateur de PGCD » (https://www.dcode.fr/pgcd) , sur dcode.fr, par trois méthodes

- « Décomposition en facteurs premiers » (https://www.dcode.fr/decomposition-nombres-premiers) , sur dcode.fr