1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Corrigé

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ ☑ Converge ☐ Diverge

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}dt$ ☑ Converge ☐ Diverge

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2+1)t^{-2}dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^3}-t^2}dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

— a) vu en cours

— b) la fonction est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 et à $\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ en $+\infty$.

— c) on se ramène en 0 en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ et on étudie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}du$. Cette intégrale diverge car $\dfrac{\cos(u)}{\sin(u)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u}$.

— d) la fonction est équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$ en 0.

— e) la fonction est équivalente à $\dfrac{2}{t}$ en $+\infty$.

2. A l'aide du changement de variables $x = u^2$ montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ converge et la calculer.

Corrigé

La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement monotone et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, on peut donc poser $x = u^2$ et on a $dx = 2udu$. On en déduit que I est de même nature que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2ue^{-u}}{u}du = \int_0^{+\infty} 2e^{-u}du.$

Cette dernière intégrale converge et vaut 2 donc I converge et $I = 2$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$. On commence par remarquer que $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \sim \dfrac{1}{t^{2(n+1)}}$ donc I_n est bien définie.
On a alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \left[\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2(n+1)x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx \qquad \text{CAR LE CROCHET CONVERGE} \\
&= 2(n+1)\left(\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} dx\right) \\
&= 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.