Exercice 4

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

On note $HK = \{hk \,;\, h \in H, k \in K\}$

1. Montrons que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$

($\Longrightarrow$) Supposons que HK est un sous-groupe de G.

Comme H et K sont des sous-groupes de G, alors $H^{-1} = H$ et $K^{-1} = K$

or comme HK est un sous-groupe de G, on a :

$$(HK)^{-1} = HK \quad \text{et} \quad (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} ;$$

alors $HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$;

d'où $HK = KH$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $HK = KH$.

(i) Comme $1_G \in H$ et $1_G \in K$

alors $1_G = 1_G \cdot 1_G \in HK$;

d'où $1_G \in HK$;

ainsi $HK \neq \emptyset$.

(ii) Soient x et y deux éléments de HK ;
alors il existe $h_1 ; h_2 \in H$ et $k_1 ; k_2 \in K$ tels
que : $x = h_1 k_1$ et $y = h_2 k_2$

$$xy^{-1} = (h_1 k_1)(h_2 k_2)^{-1}$$

$$xy^{-1} = (h_1 k_1)(k_2^{-1} h_2^{-1})$$

$$xy^{-1} = h_1 (k_1 k_2^{-1}) h_2^{-1}$$

or $k_1, k_2 \in K \Rightarrow k_1 k_2^{-1} \in K$

donc il existe $k_3 \in K$ tel que

$k_3 = k_1 k_2^{-1}$;

56 d'où $xy^{-1} = h_1 k_3 h_2^{-1} = h_1 (k_3 h_2^{-1})$

or $k_3 \in K$ et $h_2^{-1} \in H \Rightarrow k_3 h_2^{-1} \in KH = HK$

donc il existe $h_3 \in H$ et $k_4 \in K$ tels que :

$$k_3 h_2^{-1} = h_3 k_4 \;;$$

d'où $xy^{-1} = h_1 (h_3 k_4) = (h_1 h_3) k_4$

c'est-à-dire, $xy^{-1} = h_4 k_4$, où $h_4 = h_1 h_3$

et comme $h_1, h_3 \in H \Rightarrow h_1 h_3 \in H \Rightarrow h_4 \in H$

d'où $xy^{-1} \in HK$..

D'après (i) et (ii), HK est un sous-groupe de G.

Déduisons que si $H \triangleleft G$, alors HK est un sous-groupe de G

Supposons que $H \triangleleft G$. Alors pour tout élément g de G, on a : $gH = Hg$.

En particulier, pour tout $k \in K \subseteq G$

on a : $kH = Hk$

D'où $KH = HK$;

Alors d'après ce qui précède, HK est un sous-groupe de G.

2. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que : $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, \forall k \in K : f(h,k) = hk$ soit un morphisme

Soient x et y deux éléments de $H \times K$ alors il existe $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que : $x = (h_1 ; k_1)$ et $y = (h_2 ; k_2)$

On sait que : $xy = (h_1 h_2 ; k_1 k_2)$

$f(x) = f(h_1, k_1) = h_1 k_1$

$f(y) = f(h_2, k_2) = h_2 k_2$

$f(xy) = f(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2$;

$f(x)f(y) = h_1k_1h_2k_2$;

Ainsi f est un morphisme si et seulement si

$$f(xy) = f(x)f(y) \Leftrightarrow h_1h_2k_1k_2 = h_1k_1h_2k_2$$
$$\Leftrightarrow h_2k_1 = k_1h_2$$

Donc comme h_2 et k_1 sont pris de façon quelconque dans H et K respectivement une condition et nécessaire pour que f soit un morphisme de groupes est que: $\forall h \in H$ et $\forall k \in K$, $hk = kh$.

3. On suppose désormais que $\forall h \in H$, $\forall k \in K$ $hk = kh$.

59 Montrons que f est un morphisme de groupes

Soient (h_1, k_1) et (h_2, k_2) deux éléments de $H \times K$

$$f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = f(h_1 h_2, k_1 k_2)$$

$$f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = (h_1 h_2)(k_1 k_2)$$

$$f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = h_1 (h_2 k_1) k_2$$

or $h_2 k_1 = k_1 h_2$

alors, $f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = h_1 (k_1 h_2) k_2$

d'où, $f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = (h_1 k_1)(h_2 k_2)$

ainsi $f[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] = f(h_1, k_1) f(h_2, k_2)$

Donc f est un morphisme de groupes.

<u>Calculons le noyau et l'image de f</u>

60 $\operatorname{Ker} f = \{ (h, k) \in H \times K : f(h, k) = 1_G \}$

$Ker f = \{(h,k) \in H \times K : hk = 1_G\}$

or $kh = hk$, $\forall h \in H$ et $\forall k \in K$

donc $Ker f = \{(h,k) \in H \times K ; hk = kh = 1_G\}$

d'où $Ker f = \{(h,k) \in H \times K ; k = h^{-1}\}$

or $h \in H \Rightarrow k = h^{-1} \in H \Rightarrow h, k \in H$

et $k \in K \Rightarrow h = k^{-1} \in K \Rightarrow h, k \in H$

donc $h, k \in H \cap K$

ainsi $Ker f = \{(h; h^{-1}) ; h \in H \cap K\}$

$Im f = f(H \times K) = \{f(h,k) = hk : (h,k) \in H \times K\}$

$Im f = \{hk : (h,k) \in H \times K\}$

$Im f = HK = KH$, car $\forall h \in H$ et $\forall k \in K$

$hk = kH$.