Exercice 8

Soit E un ensemble. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E, on note $\bar{A}$ son complémentaire dans E.

Soit $\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$$A \longmapsto \bar{A}$$

(i) <u>Injectivité de ϕ</u>

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Supposons que $\phi(A) = \phi(B)$;

alors $\bar{A} = \bar{B}$

ainsi $\overline{(\bar{A})} = \overline{(\bar{B})}$

c'est-à-dire, $A = B$

d'où ϕ est injective.

(ii) <u>Surjectivité de ϕ.</u>

Soit A un élément de $\mathcal{P}(E)$

on sait que $A = \overline{\overline{A}}$

c'est-à-dire, $A = \overline{(\overline{A})}$

or $A \in \mathcal{P}(E) \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{P}(E)$

et $\phi(\overline{A}) = \overline{(\overline{A})}$

donc $\phi(\overline{A}) = A$

ainsi $\overline{A}$ est un antécédent de A par ϕ.

D'où ϕ est surjective.