Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruence suivant :

$$(S)\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 4 \\ x \equiv -2 \bmod 3 \\ x \equiv 7 \bmod 5 \end{cases}$$

Comme $4 \wedge 3 = 1$; $3 \wedge 5 = 1$ et $5 \wedge 4 = 1$;

alors (S) admet au moins une solution.

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 4\times 3+3 \\ 4 &= 3\times 1+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 15\times(-1)+4\times 4 = 1$$

Donc, $x_1 = -15$ et $\begin{cases} x_1 \equiv 1\,[4] \\ x_1 \equiv 0\,[3] \\ x_1 \equiv 0\,[5] \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 12 &= 5\times 2+2 \\ 5 &= 2\times 2+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12\times(-2)+5\times 5 = 1$$

Donc, $x_2 = -24$ et $\begin{cases} x_2 \equiv 0\,[4] \\ x_2 \equiv 0\,[3] \\ x_2 \equiv 0\,[5] \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 20 &= 3\times 6+2 \\ 3 &= 2\times 1+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 20\times(-1)+3\times 7 = 1$$

Donc $x_3 = -20$ et $\begin{cases} x_3 \equiv 0\,[4] \\ x_3 \equiv 1\,[3] \\ x_3 \equiv 0\,[5] \end{cases}$

Ainsi une solution particulière de (S) est :

$$N = (-15)\times 3 + (-2)\times(-20) + 7\times(-24)$$

$$N = -173$$

Par conséquent, $x = -173 + 60k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$S_{\mathbb{Z}} = \{-173 + 60k \;,\; k \in \mathbb{Z}\}$$