Exercice 11

On suppose que n est un entier supérieur ou égal à 2 tels que $2^n - 1$ est premier.

Montrons que n est un nombre premier

On veut montrer que : $(n \in \mathbb{N} - \{0;1\},\ 2^n - 1$ est premier$) \Rightarrow (n$ est $1^{er})$

nous allons utiliser la contraposée :

Supposons que n ne soit pas premier. Alors on a :

$n = 0$ ou $n = 1$ ou $n > 1$.

(•) Si $n = 0$, alors $2^0 - 1 = 0$

et comme 0 n'est pas premier, alors $2^n - 1$ dans ce cas n'est pas un nombre premier.

(••) Si $n = 1$, alors $2^1 - 1 = 1$

or 1 n'est pas premier ;

donc $2^n - 1$ n'est pas premier pour $n = 1$.

(•••) Si $n > 1$, alors il existe a et b appartenant à $\mathbb{N}$

tels que : $n = ab$, avec $1 < a < n$ et $1 < b < n$.

Donc $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$

D'où $2^n - 1 = (2^a - 1)\left(1 + (2^a) + (2^a)^2 + \cdots + (2^a)^{b-1}\right)$

or $a > 1 \Rightarrow 3 \leq 2^a - 1$ et $b > 1 \Rightarrow 2^a - 1 < (2^a)^b - 1$

donc $2^n - 1$ admet des diviseurs propres ;

ainsi $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier.

Par conséquent, on a :

$(n \neq 0,\ n \neq 1$ et $2^n - 1$ est premier$) \Rightarrow (n$ est premier$)$.