Arithmétique ①

Soient a et b

$4\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

1/ Montrons que 4 est diviseur commun de a et b

$a\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

et $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

or $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$

d'où

① $a\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$

② $b\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$

① $a\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \Rightarrow a \in 4\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid a = 4k$ donc $4 \mid a$

$\Rightarrow 4 \in D(a)$

② $b\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \Rightarrow b \in 4\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\exists k' \in \mathbb{Z} \mid b = 4k' \Rightarrow 4 \mid b$

$\Rightarrow 4 \in D(b)$

Comme $4 \in D(a) \cap D(b)$ alors 4 est un diviseur commun de a et b.

Soit $c \in D(a) \cap D(b)$

$c \in D(a) \cap D(b) \Rightarrow c \in D(a)$ et

$c \in D(b)$ ②

$\begin{cases} c \in D(a) \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \mid a = cq \\ c \in D(b) \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z} \mid b = cq' \end{cases}$

on sait que $4\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 4\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 4 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ or

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$

$4 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \mid$

$4 = au + bv$

$4 = au + bv$

$= (cq)u + (cq')v$

$= c(qu + q'v)$

$4 = cp$ avec $p = qu + q'v \in \mathbb{Z}$

$4 = cp \Rightarrow 4 \equiv 0 [c]$

par conséquent tout diviseur de a et b divise 4.

3) D'après la question 1 et 2 qui vérifie la caractérisation du pgcd.

$4 = pgcd(a, b)$

Le reste de la division ③

de 10^{100} par 105.

$10^{100} \equiv b [105]$, alors b reste de la division

on a:

$105 = 3 \times 5 \times 7$

posons $x = 10^{100} \equiv b [105]$

Soit le système suivant

$$\begin{cases} x \equiv a_1 [3] \\ x \equiv a_2 [5] \\ x \equiv a_3 [7] \end{cases}$$

déterminons a_1, a_2 et a_3

$10^{100} \equiv a_1 [3]$

$10 = 3 \times 3 + 1$

Comme pgcd$(10, 3) = 1$ donc

$10^{3-1} = 10^2 \equiv 1 [3]$

$100 = 2 \times 50 + 0$

$10^{100} = (10^{2 \times 50}) = (10^2)^{50}$, a

Le reste de la division ③
de 10^{100} par 105.

$10^{100} \equiv b [105]$, avec b le reste de la division

on a :

$105 = 3 \times 5 \times 7$

posons $x = 10^{100} \equiv b [105]$

Soit le système suivant

$$\begin{cases} x \equiv a_1 [3] \\ x \equiv a_2 [5] \\ x \equiv a_3 [7] \end{cases}$$

Déterminons a_1, a_2 et a_3

~~100~~

$10^{100} \equiv a_1 [3]$

$10 = 3 \times 3 + 1$

Comme $pgcd(10, 3) = 1$ donc

$10^{3-1} = 10^2 \equiv 1 [3]$

$100 = 2 \times 50 + 0$

$10^{100} = (10^{2 \times 50}) = (10^2)^{50}$ or

$10^2 \equiv 1[3]$ donc $(10^2)^{50} \equiv 1$

d'où

100 $10^{100} \equiv 1[3]$

$a_1 = 1.$

• $10^{100} \equiv a_2[5]$

$10 = 5 \times 2 + 0$ donc

$10^{100} \equiv 0[5]$

$a_2 = 0$

• $10^{100} \equiv a_3[7]$

$10 = 7 \times 1 + 3$

$7 = 3 \times 2 + 1$

$pgcd(10, 7) = 1$ donc

$10^{7-1} \equiv 1[7]$

$\overline{1} = \underline{\overline{3} \times \overline{12}} - \overline{1}$

$\overline{1} =$

$100 = 6 \times 16 + 4$

$10^{100} = 10^{6 \times 16 + 4}$

$= (10^{6 \times 16}) \times 10^4$

$= (10^6)^{16} \times 10^4$

$\equiv 10^4[7]$ car $(10^6)^{16} \equiv 1[7]$

on a :

$10 \equiv 3[7]$

$10^2 \equiv 9[7]$

$\equiv 2[7]$

$10^4 \equiv 4[7]$

$a_3 = 4$

d'où le système suivant

$$\begin{cases} 10^{100} \equiv 1[3] \\ 10^{100} \equiv 0[5] \\ 10^{100} \equiv 4[7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 0[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

avec $x = 10^{100}$.

Comme 3, 5 et 7 sont deux à deux premier entre eux alors le système admet une solution unique.

$M = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$M_1 = \frac{M}{3} = 35$, $M_2 = \frac{M}{5} = 21$

$M_3 = \frac{M}{7} = 15$

$\equiv 10^4[7]$ car $(10^6)^{16} \equiv 1[7]$

on a :

$10 \equiv 3[7]$

$10^2 \equiv 9[7]$

$\equiv 2[7]$

$10^4 \equiv 4[7]$

$a_3 = 4$

d'où le système suivant

$$\begin{cases} 10^{100} \equiv 1[3] \\ 10^{100} \equiv 0[5] \\ 10^{100} \equiv 4[7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 0[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

avec $x = 10^{100}$.

Comme 3, 5 et 7 sont deux à deux premier entre eux alors le système admet une solution unique.

$M = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$M_1 = \frac{M}{3} = 35$, $M_2 = \frac{M}{5} = 21$

$M_3 = \frac{M}{7} = 15$

La solution

6

$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3$

tq

$$\begin{cases} y_1 = 35^{-1} [3] \\ y_2 = 21^{-1} [5] \\ y_3 = 15^{-1} [7] \end{cases}$$

calcul de $y_1 = 35^{-1} [3]$

dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$35 = 3 \times 11 + 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$1 = 3 - 2$

$1 = 3 - (35 - 3 \times 11)$

$1 = 3 \times 12 - 35$

$\overline{1} = \overline{3 \times 12} - \overline{35}$

$\overline{1} = -\overline{1} \times \overline{35}$

$\overline{35}^{-1} = -\overline{1}$

d'où $y_1 = -1$

calcul de $y_3 = 15^{-1} [7]$

dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$15 = 7 \times 2 + 1$

$1 = 15 - 7 \times 2$

$\overline{1} = \overline{15} - \overline{7 \times 2}$

$\overline{1} = \overline{1} \times \overline{15}$

$\overline{15}^{-1} = \overline{1}$

d'où $y_3 = 1$

$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3$

$= 1 \times 35 \times (-1) + 0 + 15 \times 4 \times 1$

$= -35 + 60$

$x = 25 \; [105]$

Le reste de la division est 25.

U_n definie par :

$U_0 = 2$, $U_1 = 5$, $\forall n \geq 0$

$U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

Demontrons que $\forall n \geq 0$

$U_n = 2^n + 3^n$

Soit P_n : « $\forall n \geq 0$, $U_n = 2^n + 3^n$ »

Initialisation

pour $n = 0$ on a :

$U_0 = 2^0 + 3^0 = 2$

donc P_0 est vrai 8

Pour $n=1$ on a :

$U_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ donc P_1 est vrai

Hérédité

soit $n \geq 1$, supposons que P_n et P_{n+1} sont vrais et montrons que P_{n+2} est aussi vrai.

P_n vrai $\Rightarrow U_n = 2^n + 3^n$

P_{n+1} vrai $\Rightarrow U_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$

On cherche à montrer

P_{n+2} : $U_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$

$U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$