Exercice n° 13

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

On sait que : $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$.

Comme $p \geq 5$, alors $p^2 \geq 25$

donc $p^2 - 1 \geq 24$.

$24 = 2^3 \times 3$.

- Comme p est un nombre premier superieur à 5, alors p est un nombre impair ;

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $p = 2k+1$

ainsi $p-1 = 2k$ et $p+1 = 2(k+1)$

- si k est pair, alors $2k \equiv 0\,[4]$

  d'où $2(k+1) \times 2k \equiv 0\,[8]$

  ainsi $(p-1)(p+1) \equiv 0\,[2^3]$ (car $8 = 2^3$)

- si k est impair, alors $k+1$ est pair

  d'où $2(k+1) \equiv 0\,[4]$

  donc $2k \times 2(k+1) \equiv 0\,[8]$

  ainsi $(p-1)(p+1) \equiv 0\,[2^3]$ (car $8 = 2^3$)

Dans tous les cas, $(p-1)(p+1) \equiv 0\,[2^3]$

d'où $p^2-1 \equiv 0\,[2^3]$

- Comme p est un premier, alors p est premier avec 3

Donc soit $p \equiv 1\,[3]$, soit $p \equiv 2\,[3]$

(*) Si $p \equiv 1\,[3]$, alors $p^2 \equiv 1\,[3]$

d'où $p^2-1 \equiv 0\,[3]$

(**) Si $p \equiv 2\,[3]$, alors $p^2 \equiv 4\,[3]$

or $4 \equiv 1\,[3] \Rightarrow p^2 \equiv 1\,[3]$

$\Rightarrow p^2-1 \equiv 0\,[3]$

- D'après (*) et (**), $p^2-1 \equiv 0\,[3]$

Comme $p^2-1 \equiv 0\,[2^3]$ et $p^2-1 \equiv 0\,[3]$ et que $2^3 \wedge 3 = 1$

alors $p^2-1 \equiv 0\,[2^3 \times 3]$

donc $p^2-1 \equiv 0\,[24]$

Ainsi p^2-1 est divisible par 24.