Exercice 10

Soit $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe le nombre de diviseurs positifs de n.

a) Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Calculons $\sigma(p^\alpha)$

Comme p est un nombre premier, alors les diviseurs positifs de p sont : $1, p, p^2, \cdots, p^\alpha$;

ainsi $\sigma(p^\alpha) = \alpha + 1$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et

$\varphi : \operatorname{div}(a) \times \operatorname{div}(b) \longrightarrow \operatorname{div}(ab)$ définie par

$\varphi(k, \ell) = k\ell$. $\operatorname{div}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier n.

Montrons que φ est une bijection

$$\begin{aligned} \varphi : \operatorname{div}(a) \times \operatorname{div}(b) &\longrightarrow \operatorname{div}(ab) \\ (k, \ell) &\longmapsto \varphi(k, \ell) = k\ell. \end{aligned}$$

(i) Soient (k_1, l_1) et (k_2, l_2) deux éléments de $div(a) \times div(b)$.

$$\varphi(k_1, l_1) = \varphi(k_2, l_2) \Longleftrightarrow k_1 l_1 = k_2 l_2$$

or $a \wedge b = 1 \Longrightarrow \begin{cases} k_1 \wedge l_1 = 1 \text{ et } k_1 \wedge l_2 = 1 \\ k_2 \wedge l_1 = 1 \text{ et } k_2 \wedge l_2 = 1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} k_1 \text{ divise } k_2 \text{ et } l_1 \text{ divise } l_2 \\ k_2 \text{ divise } k_1 \text{ et } l_2 \text{ divise } l_1 \end{cases}$

ainsi $k_1 = k_2$ et $l_1 = l_2$

d'où $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$

Par conséquent φ est injective.

(ii) Soit c un diviseur de ab.

Comme $a \wedge b = 1$, alors $c|a$ ou $c|b$.

(•) si $c|a$, alors c ne divise pas $b \Longrightarrow \varphi(c,1) = c$

et $(c, 1) \in div(a) \times div(b)$.

27

Donc φ est surjective.

($\bullet\bullet$) Si $c|b$, alors c ne divise pas $a \Rightarrow \varphi(1;c)=c$

et $(1;c) \in div(a) \times div(b)$.

Ainsi φ est surjective.

Dans tous les cas, φ est surjective.

D'après (i) et (ii), φ ~~est~~ est une bijection.

c) <u>Déduisons une relation entre $\sigma(ab)$, $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$</u>

<u>si a et b sont premiers entre eux.</u>

D'après la question b), si a et b sont premiers entre eux, alors $\varphi : div(a) \times div(b) \longrightarrow div(ab)$

est une bijection ;

ainsi $Card\left(div(a) \times div(b)\right) = card(div(ab))$

or $card\left(div(a) \times div(b)\right) = card(div(a)) \times card(div(b))$

$card\left(div(a) \times div(b)\right) = \sigma(a)\sigma(b)$

et $card(div(ab)) = \sigma(ab)$.

28

Alors $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$.

d) Soit n un entier naturel, $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en nombre premiers de n.

Exprimons $\sigma(n)$ en fonction des α_i

Comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux, alors

$$\sigma\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} \sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

or $\sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_i + 1$ (d'après la question a)

donc $\sigma\left(\prod_{i=1}^{r} p^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$

d'où $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$.