Université Nangui Abrogoua — **République de Côte d'Ivoire**

Licence 2 : MI & PC — **Année Universitaire : 2021/2022**

TRAVAUX DIRIGÉS N°1 : ANALYSE 3
Thème : Intégrales généralisées

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2\sqrt{1-t}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{t}\right)dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\ (\alpha\in\mathbb{R})$
8. $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t+\cos(t)}-\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$

Exercice 2

Montrer la convergence des intégrales généralisées ci-dessous puis calculer leurs valeurs :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$

Exercice 3

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{E}(t)}dt$ converge puis la calculer.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+a\sin x+b\cos x}{x^2}dx$ converge.
2. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$ converge puis la calculer.

Exercice 5

1. Soit $a>0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t$ converge. Prouver que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-at}}{t}\mathrm{d}t=\int_x^{ax}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ puis déduire la valeur de I.
2. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle J=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t.$

TRAVAUX DIRIGÉS N° 2 : ANALYSE 3
Thème : Séries numériques

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 3

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels tels que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ soit convergente. Déterminer alors sa somme.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente.
   (b) En déduire la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 5

Étudier suivant les réels a et b la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{b^n+n}$

Les exercices qui suivent sont réservés aux étudiants de MI

Exercice 6

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. Calculer $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$.
3. Pour tout réel r tel que $|r| < 1$, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 r^k = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Exercice 7

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+b-1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement $b - a - 1 > 0$ et calculer sa somme en fonction de a et b.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 9

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrerquelessuites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n}.$$

4. Justifier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant les questions précédentes.

TRAVAUX DIRIGÉS N° 3 : ANALYSE 3
Thème : Suites et Séries de Fonctions

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge unifomément sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction f_n sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f_n(x) = n\sin(x)\cos^n(x), \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle unifomément sur $[0, a]$ et sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \sqrt{n}x\mathrm{e}^{-nx}, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f ?

Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$ où $A > 0$.
3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6

On définit pour tout entier $n \geq 2$ la fonction un sur $\mathbb{R}^+$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f_n(x) = \frac{1}{x + n^2 - 1}$$

1. Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On appelera S la somme.
2. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?
4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7

On considère la série de fonctions dont le terme général f_n est défini par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
   On note f sa somme.
2. Prouver que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ la dérivée $f_n'(x)$.
4. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément surtout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$
6. En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

TRAVAUX DIRIGÉS N° 4 : ANALYSE 3
Thème : Séries entières et séries de Fourier

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1 *Rayon de convergence 1*

Déterminer le rayon de convergence R et la nature pour $x = \pm$R des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3n} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right) x^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n\,(2n+1)}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} x^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\sqrt{n}} x^n.$

Exercice 2 *Somme d'une série entière*

Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n$ 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n.$

Exercice 3 *Série entière*

On considère la série entière réelle définie par la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus. Puis étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.
2. Soit la série entière définie par la fonction $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière g.
   (b) Calculer pour tout $x \in]-R', R'[$, l'expression de $g(x)$.
3. (a) Soit $x \in]-R, R[$. Montrer que $f'(x) = -g(x^2)$.
   (b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 4 *Série de Fourier 1*

Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x^2.$

1. Étudier la parité de f. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f. Déterminer la série de Fourier $s(f)$ de f et étudier sa convergence.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 5 *Série de Fourier 2*

Soit la fonction impaire, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \pi(x-\pi), \qquad \text{pour tout } x \in [0,\pi]$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f. Déterminer la série de Fourier $s(f)$ de f et étudier sa convergence.
3. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\ ;\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}\ ;\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}\ ;$$

Exercice 6 *Série de Fourier 3*

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Que peut-on dire sur la parité et la continuité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montrera, en particulier, que

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad ; \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k^2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^3}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Justifier que la série de Fourier $s(f)$ de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = s(f)(x).$$

4. En considérant deux valeurs particulières de x, en déduire deux équations liant les sommes des séries : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
   Résoudre le système linéaire ainsi trouvé pour obtenir les valeurs de S_1 et S_2.

Exercice 7 *Série de Fourier 4*

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\pi, 0] \\ \sin(x) & \text{si } x \in \,]0, \pi] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis écrire la série de Fourier $s(f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier $s(f)$ de f sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$