Exercice 14

Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivante

a) $17x + 6y = 1$

Comme $17 \wedge 6 = 1$, alors cette équation a une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} 17 = 6 \times 2 + 5 \\ 6 = 5 \times 1 + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 17 \times (-1) + 6 \times 3 = 1$$

donc $((-1); 3)$ est une solution de cette équation.

Ainsi on a: $\begin{cases} 17x + 6y = 1 & (1) \\ 17 \times (-1) + 6 \times 3 = 1 & (2) \end{cases}$

En faisant $(1) - (2)$, on a: $17(x+1) + 6(y-3) = 0$

d'où $17(x+1) = 6(3-y)$ $(*)$

6 divise $17(x+1)$ et $6 \wedge 17 = 1$

donc d'aprè le Théorème de Gauss, 6 divise $x+1$. Donc nécessairement, on a:

$x + 1 = 6k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $x = 6k - 1$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant x par sa valeur dans $(*)$, on a:

$17(6k - 1 + 1) = 6(3 - y)$

$\Rightarrow 17 \times 6k = 18 - 6y$

$\Rightarrow 17k = 3 - y$

$\Rightarrow y = 3 - 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(6k - 1 ; 3 - 17k), k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\underline{\underline{27x + 25y = 1}}$

Comme $27 \wedge 25 = 1$, alors cette équation admet au moins une solution

$$\left.\begin{array}{l} 27 = 25 + 2 \\ 25 = 2 \times 12 + 1 \end{array}\right. \Rightarrow 25 \times 13 + 27 \times (-12) = 1$$

Donc $(-12 ; 13)$ est une solution de cette équation

On a: $\begin{cases} 27x + 25y = 1 & (1) \\ 27 \times (-12) + 25 \times 13 = 1 & (2) \end{cases}$

(36) $(1) - (2) \Rightarrow 27(x + 12) + 25(y - 13) = 0$

$\Rightarrow 27(x+12) = 25(13-y)$. $(**)$

Alors 25 divise $27(x+12)$ et $27 \wedge 25 = 1$,

donc d'après le Théorème de Gauss 25 divise $(x+12)$

Donc nécessairement, on a : $x+12 = 25k$, $k \in \mathbb{Z}$

c'est-à-dire, $x = 25k - 12$, $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant x par sa valeur dans $(**)$

on a : $27(25k) = 25(13-y)$

$\Rightarrow 27 \times 25k = 25(13-y)$

$\Rightarrow 27k = 13 - y$

$\Rightarrow y = 13 - 27k$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(25k-12 ; 13-27k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

c) $118x + 35y = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 118 = 35 \times 3 + 13 \\ 35 = 13 \times 2 + 9 \\ 13 = 9 \times 1 + 4 \\ 9 = 4 \times 2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 118 \wedge 35 = 1$$

Comme $118 \wedge 35 = 1$, alors cette équation admet au moins une solution.

or $118 \times (-8) + 35 \times 27 = 1$

alors $(-8\,;27)$ est une solution de cette équation et

on a: $\begin{cases} 118x + 35y = 1 & (1) \\ 118 \times (-8) + 35 \times 27 = 1 & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow 118(x+8) + 35(y-27) = 0$

$\Rightarrow 118(x+8) = 35(27-y) \quad (***)$

alors 35 divise $118(x+8)$ et $35 \wedge 118 = 1$

donc 35 divise $(x+8)$;

ainsi $x+8 = 35k$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $x = 35k - 8$, $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant x par sa valeur dans $(***)$, on a:

$118(35k) = 35(27-y)$

$\Rightarrow 118k = 27 - y$

$\Rightarrow y = 27 - 118k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (35k-8 \, ; \, 27-118k), k \in \mathbb{Z} \}$.

d) $\underline{\underline{39x + 26y = 1}}$

Comme $39 = 3 \times 13$ et $26 = 2 \times 13$

alors $39 \wedge 13 = 13 \neq 1$

d'où 39 et 13 ne sont pas premiers entre eux

Donc cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}^2} = \emptyset$.