No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

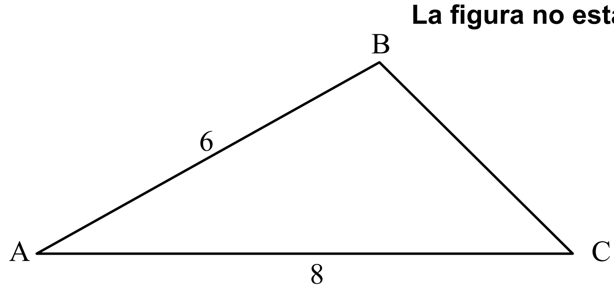
Section A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente figura muestra el triángulo ABC, siendo $AB = 6$ y $AC = 8$.

La figura no está dibujada a escala



(a) Sabiendo que $\cos \hat{A} = \frac{5}{6}$, halle el valor del $\operatorname{sen} \hat{A}$. [3]

(b) Halle el área del triángulo ABC. [2]

2. [Puntuación máxima: 5]

Sean A y B sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}6$.
Halle $\mathrm{P}(A \mid B)$.

3. [Puntuación máxima: 5]

(a) Muestre que $(2n-1)^2+(2n+1)^2=8n^2+2$, donde $n\in\mathbb{Z}$. [2]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, pruebe que la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualesquiera es par. [3]

4. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f'(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Sabiendo que $f(0) = 5$, halle $f(x)$.

5. [Puntuación máxima: 5]

Las funciones f y g se definen del siguiente modo $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$ y $g(x) = 8x + 5$.

(a) Muestre que $(g \circ f)(x) = 2x + 11$. [2]

(b) Sabiendo que $(g \circ f)^{-1}(a) = 4$, halle el valor de a. [3]

6. [Puntuación máxima: 8]

(a) Muestre que $\log_9(\cos 2x + 2) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$. [3]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, resuelva $\log_3(2\,\mathrm{sen}\,x) = \log_9(\cos 2x + 2)$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [5]

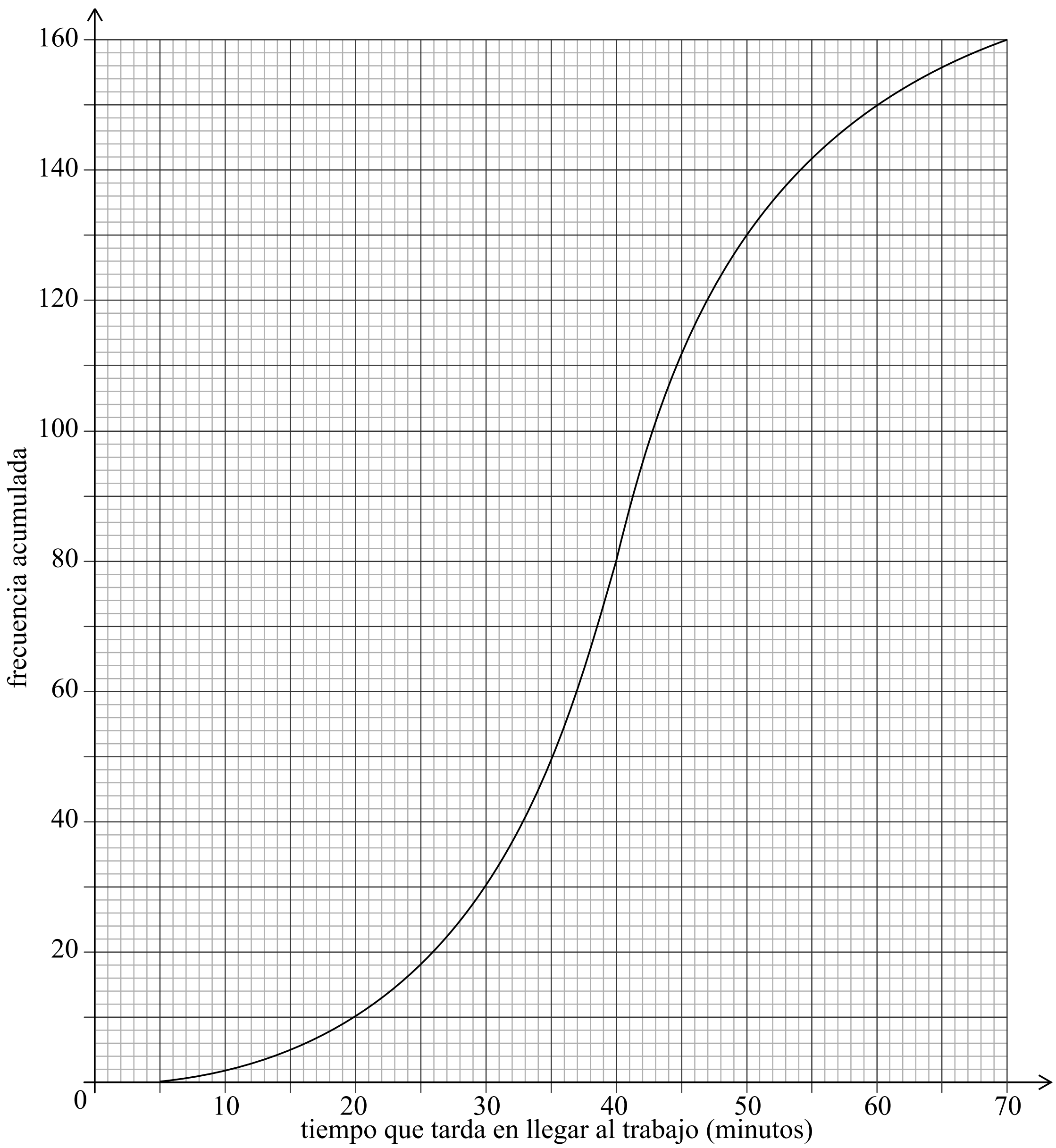
No escriba soluciones en esta página.

Section B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 15]

Una gran empresa decidió hacer una encuesta entre 160 empleados suyos para averiguar cuánto tiempo tardan en llegar al trabajo en un día dado. Los resultados de la encuesta se muestran en el siguiente diagrama de frecuencias acumuladas.



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

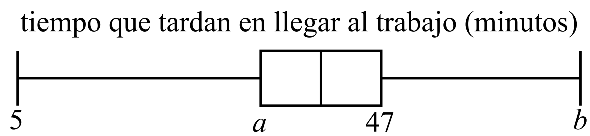
(a) Halle la mediana (en minutos) del tiempo que tardan en llegar al trabajo. [2]

(b) Halle el número de empleados que tardan en llegar al trabajo un tiempo que está a menos de 15 minutos de la mediana. [3]

Únicamente el 10% de los empleados tardaron más de k minutos en llegar al trabajo.

(c) Halle el valor de k. [3]

Los resultados de la encuesta también se pueden representar mediante el siguiente diagrama de caja y bigotes.



(d) Escriba el valor de b. [1]

(e) (i) Halle el valor de a.

(ii) A partir de lo anterior, halle el rango intercuartil. [4]

Los tiempos de viaje al trabajo que son menores que p minutos se consideran valores atípicos.

(f) Halle el valor de p. [2]

No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 17$.

(a) Halle $f'(x)$. [2]

El gráfico de f tiene tangentes horizontales en los puntos donde $x = a$ y $x = b$, $a < b$.

(b) Halle el valor de a y el valor de b. [3]

(c) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, explique por qué el gráfico de f tiene un punto máximo local en $x = a$. [2]

(d) (i) Halle $f''(b)$.

(ii) A partir de lo anterior, utilice la respuesta que dio en el apartado (d)(i) para mostrar que el gráfico de f tiene un punto mínimo local en $x = b$. [4]

La normal al gráfico de f en $x = a$ y la tangente al gráfico de f en $x = b$ se cortan en el punto (p, q).

(e) Halle el valor de p y el valor de q. [5]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \dfrac{\ln 5x}{kx}$, donde $x > 0$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Muestre que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln 5x}{kx^2}$. [3]

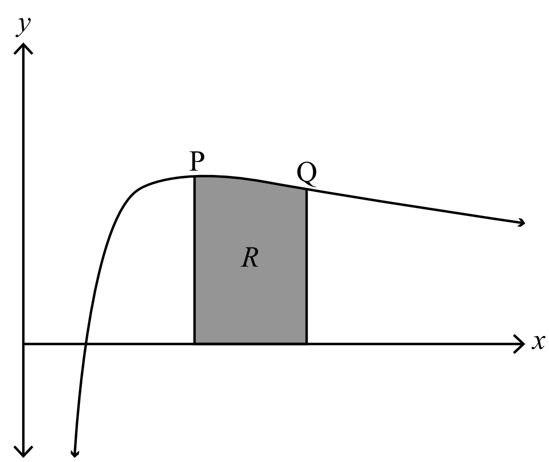
El gráfico de f tiene exactamente un máximo (el punto P).

(b) Halle la coordenada x de P. [3]

La derivada segunda de f viene dada por $f''(x) = \dfrac{2\ln 5x - 3}{kx^3}$. El gráfico de f tiene exactamente un punto de inflexión (Q).

(c) Muestre que la coordenada x de Q es $\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. [3]

La región R está delimitada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales que pasan por el máximo P y por el punto de inflexión Q, respectivamente.



(d) Sabiendo que el área de R es igual a 3, halle el valor de k. [7]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.